

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona <i>in Roma</i>	Enrico Betti <i>in Pisa</i>
Eugenio Beltrami <i>in Pavia</i>	Felice Casorati <i>in Pavia.</i>

SERIE II - TOMO XIV

(dal gennaio 1886 al marzo 1887.)

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIV.^o (SERIE II.^a)

	PAG.
Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali. — <i>Professore G. Ricci</i>	1
Sur le minimum d'une intégrale. — <i>Prof. G. Sabinine</i>	13
Su le superficie di 4° ordine con conica doppia. — <i>H. G. Zeuthen</i>	31
Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces. — <i>Par J.-S. et M.-N. Vaněček</i>	73
Aggiunte alla Memoria "Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten". — <i>Luigi Bianchi</i>	115
Su certi gruppi di superficie di secondo grado. — <i>Dott. Domenico Montesano</i> .	131
Fonctions énumératrices. — <i>Ernest Cesàro</i>	141
Sopra alcune configurazioni piane. — <i>Dott. Vittorio Martinetti</i>	161
Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica. — <i>Prof. Enrico Pucci</i>	193

Indice.

	PAG.
Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli. — <i>Ernest Cesàro</i>	221
Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio. — <i>Alfredo Capelli</i>	227
Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellittiche. — <i>Prof. Francesco Brioschi</i>	238
Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine. — <i>Idem</i>	241

Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali.

(Memoria del prof. G. RICCI, a Padova.)

Nella Introduzione alla Memoria del prof. BELTRAMI: *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* inserita nel Tomo VIII della Serie II delle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna è fatto avvertire la proprietà essenziale di detti parametri essere quella notata da JACOBI, cioè che *la loro trasformazione non richiede altro fuorchè la conoscenza della forma, che assume l'elemento lineare nel nuovo sistema di variabili*. Da questa osservazione emana naturalmente il dubbio che, anche limitandosi alle espressioni di 2° ordine, non soltanto quelle comunemente conosciute e designate coi simboli $\Delta_2 U$, $\Delta_1 \Delta_1 U$, $\nabla(U\Delta_1 U)$ meritino tal nome; e ciò tanto più che per essi la proprietà medesima è stata fino ad ora dimostrata con metodi indiretti ed artificiosi.

Come metodo diretto per tali indagini si offre naturalmente quello seguito dal prof. CASORATI nella sua *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (*) e che consiste nell'eliminare tra due sistemi di quantità corrispondenti a due diversi sistemi di variabili le derivate delle une rispetto alle altre per giungere alle equazioni esprimenti appunto la ricordata proprietà essenziale. Da questo punto di vista in fatti la teoria dei parametri differenziali racchiude in sè quella degli invarianti delle forme differenziali quadratiche, la quale, sebbene svolta soltanto nel caso delle superficie ordinarie a due dimensioni, è oggetto della Memoria del CASORATI. I risultati relativi alla ricerca medesima contenuti nei miei *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (**), pei quali gli invarianti degli

(*) *Annali* di TORTOLINI, vol. III e IV.

(**) Tomo XII della Serie II di questi *Annali*.

Annali di Matematica, tomo XIV.

elementi lineari delle superficie di quante si vogliano dimensioni si sono presentati come veri e propri invarianti algebrici di un sistema di due forme quadratiche covarianti, mi hanno indotto a cercare una via simile per giungere ai parametri differenziali di 2° ordine.

Partendo da una forma differenziale quadratica qualunque φ ad n variabili x_1, x_2, \dots, x_n e da una funzione arbitraria U di queste si vedrà nel § 3 del presente scritto come aggiungendo alle $\frac{d^2 U}{dx_r dx_s}$ una conveniente funzione lineare

delle $\frac{dU}{dx_r}$, i cui coefficienti dipendono da quelli di φ e dalle loro derivate prime,

si ottengano i coefficienti U_{rs} di una forma quadratica χ covariante a φ . Formando col metodo noto il sistema degli invarianti assoluti delle due forme, si hanno n parametri differenziali di 2° ordine di φ , rispettivamente dei gradi 1, 2, ... n nelle derivate di U , e si riconosce facilmente che quello di 1° grado non è che il $\Delta_2 U$. Dal punto di vista delle applicazioni è notevole che nel caso del nostro spazio anche i due nuovi parametri di 2° ordine, che così si trovano, eguagliati a zero danno delle equazioni a derivate parziali, che sono soddisfatte da funzioni del solo raggio vettore ρ e precisamente da $\sqrt{\rho}$ e da ρ . Partendo

dalla nota proprietà che le $\frac{dU}{dx_r}$ sono controgredienti alle dx_r si hanno gli

altri parametri differenziali di 2° ordine già noti, cioè il $\nabla U \Delta_1 U$ e il $\Delta_1 \Delta_1 U$, che sono l'uno un covariante e l'altro un controvariante di φ . Però tutti questi parametri differenziali di 2° ordine non contengono che le derivate prime dei coefficienti della forma differenziale. La introduzione delle loro derivate seconde conduce a quelli della nota forma quadrilineare ψ covariante alla data, il cui annullarsi identicamente costituisce, come dimostrò per primo RIEMANN, la condizione necessaria e sufficiente, perchè la φ sia di classe 0. Così la determinazione degli ulteriori parametri differenziali di 2° ordine si riduce a quelli degli invarianti e covarianti del sistema di forme φ , χ e ψ , determinazione, che non presenta alcuna difficoltà nei casi, in cui alla forma quadrilineare ψ se ne può sostituire una quadratica, come per esempio, quando è $n = 3$, o la forma proposta φ rappresenta l'elemento lineare di una superficie a più di due dimensioni.

La determinazione dei parametri differenziali di 2° ordine con più funzioni arbitrarie non richiede che la considerazione assieme a φ e ψ di tutte le forme, che, come la χ da U , si possono dedurre dalle funzioni stesse.

Nel § 4 è indicato in modo generale e senza scendere ad applicazioni il metodo da seguire per giungere ai parametri differenziali di ordine superiore

al secondo, metodo, che è naturalmente suggerito dai risultati già ottenuti nel § 3. Come in fatti in questo paragrafo le derivate seconde di U sono state espresse per le U_{rs} , così alle derivate terze di U , si sostituiscono con metodi e risultati analoghi i coefficienti di una forma cubica covariante a φ . E in generale alle derivate dell'ordine m^{esimo} di U si sostituiscono i coefficienti di una forma di grado m covariante alla proposta. Questa medesima sostituzione parmi debba spesso tornare utile nelle ricerche analitiche, perchè i coefficienti stessi non introducono nei cambiamenti di variabili, esplicitamente, se non le derivate prime delle antiche rispetto alle nuove e, dipendendo dalla forma dell'elemento lineare, indicheranno in ogni problema naturalmente le coordinate da preferire per dare alle equazioni del problema stesso la maggiore possibile semplicità. Nel caso che l'elemento lineare abbia la forma $\sum_r dx_r^2$ essi coincidono colle derivate di ordine m di U e ad esse forse meglio che ai parametri differenziali si addice il considerarle, come disse di questi il LAMÉ (*), come qualche cosa *plus essentielle, plus simple et en même temps plus complète que toutes les dérivées partielles*.

Allo sviluppo dei risultati testè accennati e che parmi non manchino di interesse ho creduto premettere nel § 1 alcune considerazioni generali sul problema propostomi e sul metodo seguito per risolverlo e nel § 2 una breve esposizione dei risultati da lungo tempo conosciuti e relativi ai parametri differenziali di 1° ordine.

§ 1.

Considerazioni generali.

Avendo a considerare delle funzioni φ di n variabili x_1, x_2, \dots, x_n indicheremo per brevità con $\varphi^{(r)}$ la derivata di φ rispetto ad x_r , con $\varphi^{(rs)}$ la derivata seconda di φ rispetto ad x_r ed x_s , ecc. Ometteremo pure, per brevità, di indicare i limiti delle sommatorie, quando queste si debbano intendere estese da 1 fino ad n .

Chiamiamo *forma differenziale quadratica* ad n variabili ogni espressione

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s,$$

in cui le a_{rs} sono funzioni di x_1, x_2, \dots, x_n . Nelle considerazioni seguenti sup-

(*) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XV.

porremo sempre che il *discriminante* a di φ sia differente da 0 e chiameremo *parametri differenziali* della forma stessa tutte le espressioni, che contengono i coefficienti di φ , una o più funzioni arbitrarie e le derivate di tutte queste quantità, e non cambiano forma quando alle variabili x_1, x_2, \dots, x_n se ne sostituiscono delle nuove u_1, u_2, \dots, u_n . Il loro ordine si desume da quello delle derivate più alte in essi contenute. Quei parametri differenziali, che non contengono nè le funzioni arbitrarie, nè le loro derivate si diranno *invarianti differenziali*.

Quando si sostituiscano le variabili u alle x indicheremo con $x_h^{(r)}$ la derivata di x_h rispetto ad u_r e adoteremo per le quantità relative alle nuove variabili notazioni analoghe a quelle adottate per le quantità corrispondenti relative alle antiche, distinguendo le une dalle altre con delle parentesi. Così con (a_{pq}) indicheremo il coefficiente generico della forma trasformata di φ , con $(U^{(r)})$ la derivata di U rispetto ad u_r , ecc. ed avremo

$$(a_{pq}) = \sum_{rs} a_{rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)} \tag{1}$$

$$(a_{pq}^{(2)}) = \sum_{rs} a_{rs}^{(g)} x_g^{(2)} x_r^{(p)} x_s^{(q)} + \sum_{rs} a_{rs} \{ x_r^{(p2)} x_s^{(q)} + x_r^{(q2)} x_s^{(p)} \} \tag{2}$$

.....

$$(U^{(r)}) = \sum_h U^{(h)} x_h^{(r)} \tag{I}$$

$$(U^{(rs)}) = \sum_{hk} U^{(hk)} x_h^{(r)} x_k^{(s)} + \sum_h U^{(h)} x_h^{(rs)} \tag{II}$$

.....

Se si indica con $F(a_{rs}, \dots, a_{rs}^{(2)}, \dots, U, \dots, U^{(r)}, \dots, U^{(rs)})$ un parametro differenziale, la equazione

$$F(a_{rs} \dots a_{rs}^{(2)} \dots U \dots U^{(r)} \dots U^{(rs)}) = F\{(a_{rs}) \dots (a_{rs}^{(2)}) \dots (U) \dots (U^{(r)}) \dots (U^{(rs)})\},$$

che ne rappresenta la proprietà caratteristica, dovrà risultare dalla eliminazione della $x_h^{(r)}, x_h^{(rs)}, \dots$ tra le (1), (2), ... (I), (II)...

Ne viene per conseguenza che, se si eccettuano le stesse funzioni arbitrarie U, V, \dots che possono a tenore della definizione data riguardarsi come parametri differenziali di ordine 0, ogni parametro differenziale non conterrà che le derivate delle funzioni arbitrarie. Se si nota di più che per conseguenza ogni altro parametro differenziale di ordine 0 sarebbe un invariante algebrico assoluto della forma φ , la quale non ne ammette, si conclude che, *all'infuori delle funzioni arbitrarie non esistono parametri, nè invarianti differenziali di ordine 0.*

§ 2.

Parametri differenziali di 1° ordine.

Se si pone

$$a_{rs, i} = \frac{1}{2} (a_{ri}^{(s)} + a_{si}^{(r)} - a_{rs}^{(i)}) \quad (3)$$

dalle (2) si hanno le

$$(a_{rs, i}) = \sum_g x_g^{(i)} \left\{ \sum_{hk} a_{hg, g} x_h^{(r)} x_k^{(s)} + \sum_h a_{hg} x_h^{(rs)} \right\}, \quad (2^{bis})$$

come da queste si trarrebbero reciprocamente le (2). Invece delle (2) possiamo dunque considerare le (2^{bis}) e poichè evidentemente tra queste non è possibile eliminare le $x_h^{(rs)}$ conviene concludere che i parametri differenziali di 1° ordine non possono contenere le $a_{rs, i}$. Abbiamo così il seguente

TEOREMA: *I parametri differenziali di 1° ordine non contengono le derivate dei coefficienti della forma differenziale.*

Da esso si trae il

COROLLARIO: *Non esistono invarianti differenziali di 1° ordine.*

Dal teorema dimostrato si deduce pure che i parametri differenziali di 1° ordine si avranno eliminando le $x_h^{(r)}$ tra le (1) e (I). Queste ci dicono che le $U^{(r)}$ sono controgradienti alle dx_r così che la determinazione dei parametri differenziali di 1° ordine coincide con quella dei controvarianti della forma φ considerata come forma algebrica quadratica. È questa appunto la via tenuta dal prof. BELTRAMI nella Memoria citata per giungere ai due parametri differenziali di 1° ordine con una o due funzioni arbitrarie

$$\Delta_1 U = \sum_{rs} c_{rs} \frac{dU}{dx_r} \frac{dU}{dx_s}$$

$$\nabla UV = \sum_{rs} c_{rs} \frac{dU}{dx_r} \frac{dV}{dx_s},$$

nei quali è stato posto

$$c_{rs} = \frac{\alpha_{rs}}{a}, \quad (4)$$

indicando con α_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} .

§ 3.

Parametri differenziali di 2° ordine.

Se si pone

$$U_r = \sum_s c_{rs} U^{(s)} \quad (5)$$

si ha

$$U_r = \sum_p (U_p) x_r^{(p)} \quad (I^{bis})$$

la quale ci dice che le U sono cogredienti alle dx_r . Per questa ragione è spesso opportuno, come vedremo in seguito introdurre le U_r invece delle $U^{(r)}$, le (I^{bis}) invece delle (I).

Le (2^{bis}) risolte rispetto alle $x_h^{(rs)}$ danno dopo alcune trasformazioni

$$x_h^{(rs)} = \sum_{pq} (c_{pq}) (a_{rs, q}) x_h^{(p)} - \sum_{pqt} c_{hp} a_{qt, p} x_q^{(r)} x_t^{(s)} \quad (6)$$

e questi valori sostituiti nelle (II) danno

$$(U_{rs}) = \sum_{hk} U_{hk} x_h^{(r)} x_k^{(s)}, \quad (II^{bis})$$

posto

$$U_{hk} = U^{(hk)} - \sum_i a_{hk, i} U_i. \quad (7)$$

La (II^{bis}) confrontata colla (1) ci dice che la forma di coefficienti U_{hk} è covariante alla φ . Se si indica quindi con c_r il coefficiente di c^r nel determinante $\sum \pm (a_{11} + c U_{11}) \cdots (a_{nn} + c U_{nn})$ e si pone

$$\Delta_{2r} U = \frac{c_r}{a},$$

le espressioni $\Delta_{2r} U$ sono parametri differenziali di 2° ordine della forma φ con una funzione arbitraria U e di grado r rispetto alle derivate di questa funzione.

Si ha

$$\Delta_{21} U = \sum_{hk} c_{hk} U_{hk}$$

e poichè per le (3) è

$$\sum_h c_{hk} a_{hk, j} = - \sum_{hk} c_{hk}^{(k)} a_{hj} - \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a})^{(j)}$$

avremo dalla (7)

$$\Delta_{21} U = \sum_{hk} c_{hk} U^{(hk)} + \sum_{hk} c_{hk}^{(k)} \sum_j a_{hj} U_j + \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_j (\sqrt{a})^{(j)} U_j$$

e poichè dalle (5) si trae $\sum_j a_{hj} U_j = U^{(h)}$

$$\Delta_{21} U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r (\sqrt{a} U_r)^{(r)}.$$

La espressione, che si trova al secondo membro di questa equazione, è quella del parametro differenziale di 2° ordine comunemente indicato con $\Delta_2 U$ sotto la forma datagli dal prof. BELTRAMI nel § 3 della Memoria più volte ricordata.

Noteremo di più che se è $\varphi = \sum_r dx_r^2$, si ha $U_{hk} = U^{(hk)}$ e Δ_{2r} non è che la somma dei minori principali di ordine r nel determinante $\sum \pm U^{(11)} U^{(22)} \dots U^{(nn)}$, così che Δ_{2n} coincide con questo stesso determinante.

Se si costruisce il sistema di invarianti algebrici assoluti comuni alla forma φ ed a più forme rispettivamente di coefficienti $U_{rs}, V_{rs}, W_{rs}, \dots$ formati tutti analogamente alle U_{rs} coi coefficienti delle funzioni arbitrarie U, V, W, \dots si ottengono dei parametri differenziali di 2° ordine con un numero qualsivoglia di funzioni arbitrarie.

Le $V_i = \sum_r c_{ir} V^{(r)}$ sono variabili cogredienti e le $\sum_i U_{ir} V_i$ controgredienti alle dx_r . Le prime danno quindi luogo non soltanto al covariante di φ , che coincide col parametro differenziale di 1° ordine di V , ma ben'anche al covariante $\sum_{rs} U_{rs} V_r V_s$, e le seconde al controvariante $\sum_{rsij} c_{rs} U_{ir} U_{js} V_i V_j$, che sono tutti parametri differenziali di 2° ordine con due funzioni arbitrarie; e così pure le espressioni $\sum_{rs} U_{rs} U_r V_s$, $\sum_{rs} c_{rs} U_{ir} U_{js} U_i V_j$. Limitandoci però a considerare i parametri differenziali di 2° ordine con una sola funzione arbitraria noteremo che avendosi, come è facile dimostrare,

$$\frac{d \Delta_1 U}{d x_r} = 2 \sum_i U_{ir} U_i$$

si ha pure

$$\nabla \cdot U \Delta_1 U = 2 \sum_{rs} U_{rs} U_r U_s$$

$$\Delta_1 \cdot \Delta_1 U = 4 \sum_{rsij} c_{rs} U_{ir} U_{js} U_i U_j.$$

È del resto evidente in generale che sostituendo in un parametro differenziale ad una funzione arbitraria un parametro differenziale si ha un nuovo parametro differenziale.

Cerchiamo ora i parametri differenziali di 2° ordine, che contengono anche le derivate seconde dei coefficienti di φ . Dalle (3) si ha

$$a_{rs}^{(t)} = a_{rt} s + a_{st, r} \quad (8)$$

così che le derivate seconde delle a_{rs} si esprimono per le derivate prime delle $a_{rt, s}$. Derivando la (2^{bis}) rispetto ad u_l e calcolando per mezzo delle (2^{bis}) medesime la espressione $\sum_{pq} (c_{pq})(a_{rs, p})(a_{il, q})$ si ottiene facilmente la

$$\left. \begin{aligned} (a_{rs, i}^{(l)}) - \sum_{pq} (c_{pq})(a_{rs, p})(a_{il, q}) &= \sum_{hklg} \{ a_{hkl, g}^{(j)} - \sum_{ut} c_{ut} a_{hkl, u} a_{gjt, t} \} x_h^{(r)} x_k^{(s)} x_g^{(i)} x_j^{(l)} \\ &+ \sum_{hklg} a_{hkl, g} x^{(i)} \{ x_k^{(r)} x_h^{(sl)} + x_k^{(s)} x_h^{(rl)} + x_k^{(l)} x_h^{(rs)} \} + \sum_{hg} a_{hg} x_g^{(i)} x_h^{(rsl)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Da queste si eliminano facilmente le $x_h^{(rsl)}$ e, ponendo

$$a_{ih, gk} = a_{ig, h}^{(k)} - a_{ik, h}^{(g)} + \sum_{rs} c_{rs} \{ a_{ik, r} a_{hg, s} - a_{ig, r} a_{hk, s} \} \quad (10)$$

si ottiene

$$(a_{lm, pq}) = \sum_{ighk} a_{ih, gk} x_i^{(l)} x_g^{(p)} x_h^{(m)} x_k^{(q)}. \quad (3')$$

Le espressioni (10) sono note ed è pur noto che l'annullarsi identicamente della forma quadrilineare ψ , di cui esse sono i coefficienti, dà le condizioni necessarie e sufficienti, perchè la forma φ sia di classe 0 (*). La (3') dice che questa forma è covariante a φ e la determinazione degli invarianti differenziali di 2° ordine di φ è così ridotta a quella degli invarianti algebrici assoluti del sistema di forme φ e ψ . Da ciò si deduce subito il seguente

TEOREMA: *Le forme differenziali quadratiche di classe 0 non ammettono invarianti differenziali di 2° ordine.*

È facile dalle (3') dedurre che se per un dato sistema di variabili x le espressioni $a_{ih, gk}$ sono i minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di grado n , i cui elementi indicheremo con b_{hk} , se cioè si ha

$$a_{ih, gk} = b_{ig} b_{hk} - b_{ik} b_{gh}; \quad b_{hk} = b_{kh}, \quad (11)$$

per un altro sistema qualunque di variabili n si ha pure

$$(a_{lm, pq}) = (b_{lp})(b_{mq}) - (b_{lq})(b_{mp}),$$

con

$$(b_{lq}) = \sum_{ig} b_{ig} x_i^{(l)} x_g^{(q)}. \quad (3'')$$

Queste ultime equivalgono in questo caso alle (3') e allora la determinazione degli invarianti differenziali di 2° ordine di φ si riduce a quella degli n in-

(*) Veggasi il § 2 della mia citata Memoria.

rianti algebrici assoluti della forma φ e di quella ψ' di coefficienti b_{rs} , che secondo la (3'') le è covariante.

Poichè il numero delle espressioni $a_{ih, gk}$ indipendenti fra di loro è $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, quello delle $b_{ig} \frac{n(n+1)}{2}$ e questi due numeri coincidono per $n=3$, in questo caso si potrà sempre sostituire le (3'') alle (3'). Per $n=2$, cioè quando φ rappresenta l'elemento lineare di una superficie del nostro spazio, si ha una sola (11), la quale determina soltanto il discriminante della forma ψ' , e non i suoi singoli coefficienti. Questo discriminante è $a_{12, 12}$ e non esiste in questo caso che un solo invariante differenziale di 2° ordine, cioè $\frac{a_{12, 12}}{a}$, il quale rappresenta la curvatura sferica della superficie.

Le (11) hanno luogo anche quando la forma φ è di 1ª classe (*), cioè quando essa rappresenta l'elemento lineare di una superficie ad n dimensioni. Come si sa, una tale superficie ammette n raggi principali di curvatura e per $n > 2$ i coefficienti della equazione di grado n , che ha per radici questi raggi, supposto ridotto all'unità quello della potenza n esima della incognita, costituiscono n invarianti differenziali indipendenti della forma φ .

Per ottenere tutti i parametri differenziali di 2° ordine basta assieme alla (1) e (3') considerare le (I) (II^{bis}) e le analoghe a queste ultime relative ad altre funzioni arbitrarie ed eliminare tra esse in tutti i modi possibili le $x_h^{(r)}$. Quando alle (3') si possono costituire le (3''), una tale eliminazione non eccede i limiti della teoria ordinaria dei sistemi di forme algebriche quadratiche.

§ 4.

Parametri differenziali di 3° ordine.

Se nella nota formula

$$\left. \begin{aligned} (U^{(rst)}) = & \sum_{hkl} U^{(hkl)} x_h^{(r)} x_k^{(s)} x_l^{(t)} + \sum_{hk} U^{(hk)} (x_k^{(r)} x_h^{(st)} + x_k^{(s)} x_h^{(rt)} + x_k^{(t)} x_h^{(rs)}) \\ & + \sum_h U^{(h)} x_h^{(rst)} \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

si sostituiscono per le $U^{(h)}$, $U^{(hk)}$ ed $x_h^{(rs)}$ i valori dati dalle (5), (7) e (6) ed

(*) Veggasi il § 3 della mia citata Memoria.

Annali di Matematica, tomo XIV.

alle $x_h^{(rst)}$ quelle, che si ottengono derivando le (6) rispetto ad u_t e si pone

$$\left. \begin{aligned} U_{hkj} &= U^{(hkj)} - \sum_{pq} c_{pq} [a_{hk,p} U_{qj} + a_{jk,p} U_{qh} + a_{hj,p} U_{qk}] - \\ &- \sum_g [a_{kh,g}^{(j)} - \sum_{pq} c_{pq} a_{hk,q} a_{gj,p}] U_g \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

si giunge dopo alcune riduzioni servendosi di formule già precedentemente trovate alle

$$(U_{rst}) = \sum_{hkj} U_{hkj} x_h^{(r)} x_k^{(s)} x_j^{(t)}, \quad (\text{III}^{bis})$$

le quali si possono considerare invece delle (III).

Per ottenere le derivate terze delle (a_{rs}) espresse per quelle delle a_{rs} possiamo partire dalle (9). Come si deduce dalla forma di queste la eliminazione delle derivate quarte delle x rispetto alle u conduce a delle risultanti, le quali contengono soltanto le derivate prime delle espressioni indicate nel paragrafo precedente coi simboli $(a_{lm,pq})$, $a_{ih,gk}$. Queste risultanti però si ottengono più facilmente derivando le (3') o (3''), quando queste si possono sostituire a quelle. Si introdurranno così le derivate seconde delle x rispetto alle u e a queste dovranno sostituirsi i loro valori dati dalle (6).

Nel caso di $n=2$ non si ha che una equazione (3), alla quale si può sostituire la

$$\frac{(a_{12,12})}{(a)} = \frac{a_{12,12}}{a},$$

che le equivale, tenuto conto delle (1). In questo caso quindi φ non ha che un invariante differenziale di 3° ordine il $\Delta_1 \left(\frac{a_{12,12}}{a} \right)$. E poichè, secondo quanto abbiamo ora osservato, per la ricerca degli invarianti differenziali di ordine superiore al secondo basta tener conto delle (3') o (3''), potremo concludere in generale che nel caso delle superficie a due dimensioni per ottenere gli invarianti differenziali di ordine $m+2$, basta determinare tutti i parametri differenziali di ordine m con una sola funzione arbitraria e sostituire a questa la curvatura sferica della superficie. Tale nella sostanza è il metodo seguito dal prof. CASORATI nel § 4 e 5 della sua *Ricerca fondamentale*.

Per $n > 2$ ci limiteremo a considerare soltanto il caso, in cui alle (3') si possono sostituire le (3''). Adottando per la forma ψ' di coefficienti b_{rs} notazioni analoghe a quelle adottate per la φ , la derivazione delle (3') conduce alle formule corrispondenti alle (2^{bis}). Sostituendo in esse alle $x_h^{(rs)}$ i valori dati dalle (6) e ponendo

$$\beta_{hkg} = b_{hk,g} - \sum_{pq} c_{pq} b_{gq} a_{hk,p}$$

si giunge alle

$$(\beta_{rsi}) = \sum_{hkg} \beta_{hkg} x_h^{(r)} x_k^{(s)} x_g^{(i)}. \quad (4')$$

La determinazione degli invarianti differenziali di 3° ordine esigerà la eliminazione delle $x_h^{(r)}$ tra le (1), (3'') e (4'), mentre per ottenere i parametri differenziali dello stesso ordine converrà tener conto ancora delle (I^{bis}), (II^{bis}) e (III^{bis}) e delle analoghe a queste relative ad altre funzioni arbitrarie.

Dalle (12), tenendo conto delle (10) si ha

$$U_{hjk} - U_{.jk} = \sum_g a_{hg.jk} U_g$$

e quindi, se la forma φ è di classe 0 $U_{hjk} = U_{hjk}$. E poichè è pure evidentemente $U_{hjk} = U_{khj}$ si vede che, quando la forma proposta φ è di classe 0, le U_{hjk} possono considerarsi come coefficienti di una forma cubica covariante alla φ stessa. Nel caso generale le U_{hjk} sono i coefficienti di una forma quadratico-lineare covariante pure alla φ .

Così anche la ricerca dei parametri ed invarianti differenziali del 3° ordine è ridotta a quella degli invarianti di sistemi di forme algebriche. Ad analoghi risultati si giungerebbe per quelli degli ordini superiori, sui quali non è opportuno insistere, essendo il già esposto sufficiente per le ordinarie applicazioni e per porre in luce il metodo da seguirsi in simili ricerche. Noteremo soltanto che, come si deduce dalle (9), invece delle derivate di ordine $m + 2$ delle a_{rs} si possono considerare quelle di ordine m delle $a_{ih.gk}$ o b_{hk} . Da ciò viene il

TEOREMA: *Le forme differenziali quadratiche di classe 0 non hanno invarianti differenziali.*

Padova, aprile 1885.

Sur le minimum d'une intégrale.

(Par G. SABININE, professeur à l'Université d'Odessa.)

J'ai l'intention d'indiquer dans cet article quelques procédés qui servent à résoudre le problème du minimum d'une intégrale, minimum ayant lieu dans les mêmes conditions, où subsiste le minimum de l'intégrale d'action.

L'analyse que je développe dans cet article, est également applicable au cas d'un corps libre et au cas d'un système quelconque. Aussi, uniquement pour plus de brièveté, nous bornerons-nous au cas d'un corps libre, en supposant que sa masse est égale à l'unité.

Si l'on rapporte la position du corps à trois axes de coordonnées rectangulaires, que l'on désigne par t le temps et par x, y, z les coordonnées du corps au bout du temps t et que l'on désigne encore par Π la fonction des forces, qui, étant donnée comme la fonction de x, y, z , ne contient pas t explicitement, l'intégrale que nous avons à considérer aura pour valeur

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt.$$

t_1 et t_2 étant les limites du temps, c'est-à-dire les valeurs de t , entre lesquelles l'intégrale V est prise et qui répondent aux deux positions données du corps.

Si l'on désigne par $2T$ la force vive du corps et que l'on pose

$$p = \frac{dx}{dt} \quad q = \frac{dy}{dt} \quad r = \frac{dz}{dt}$$

on aura

$$T = \frac{1}{2} (p^2 + q^2 + r^2).$$

Si l'on désigne par h une constante arbitraire, l'équation des forces vives sera

$$\Pi - T = h.$$

Cette équation, étant considérée comme l'équation de condition, le problème qui nous occupe, s'énoncera de cette manière :

« Parmi toutes les x, y, z fonctions de t qui satisfont à l'équation de condition $\Pi - T = h$, pourvu que la constante h conserve la même valeur, trouver celles qui rendent l'intégrale V un minimum pour toutes valeurs de t , comprises entre t_1 et t_0 , qui répondent aux deux positions données du corps? »

La recherche des fonctions inconnues x, y, z qui satisfont aux conditions du problème énoncé, conduit, comme l'on verra, aux équations du mouvement, et les procédés que j'emploierai pour cette recherche ne dépendent pas d'une hypothèse quelconque par rapport aux variations du temps relatives à ses limites; de plus ces procédés servent à démontrer que les variations du temps relatives à ses limites, sont égales entre elles. La déduction des équations du mouvement à l'aide de la solution du problème énoncé fait l'objet du premier paragraphe.

Dans le second paragraphe nous démontrerons cette proposition. « Lorsque sous l'action des forces données, dont la fonction de x, y, z , désignée par Π , ne contient pas le temps t explicitement, se meut un corps depuis le moment t_0 où il part du point donné A , jusqu'à celui t_1 où il arrive à un autre point donné B , de sorte que les équations de ce mouvement sont: $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2}$; alors dans le même intervalle du temps s'effectuent tous les autres mouvements nouveaux, dont chacun aura lieu, si, rendant le premier mouvement impossible par l'introduction de liaisons nouvelles, on oblige le corps à suivre, sous l'action des mêmes forces données, une trajectoire, dont les coordonnées sont $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ où Δ est le signe des variations en général, pour passer du point A à B , tout en laissant subsister l'équation des forces vives et en conservant la valeur de la constante qui exprime la différence $\Pi - T$, où T est la demi-force vive du corps. »

A l'aide de la proposition qui vient d'être énoncée, il est facile, comme l'on verra, de démontrer ces deux théorèmes :

1) « Les conditions qui déterminent le principe de la moindre action, sont telles qu'il en résulte que les variations du temps relatives à ses limites, sont égales entre elles. »

2) « Dans le mouvement d'un corps animé par des forces données, dont la fonction de x, y, z , désignée par Π , ne contient pas le temps t explicitement, l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$ a un minimum, pourvu que les deux positions

du corps, auxquelles répondent les limites du temps t_1 et t_0 , soient considérées comme données et que l'équation $\Delta\Pi = \Delta T$ aie lieu, T étant la demi-force vive du corps et Δ étant le signe des variations en général. »

Dans le troisième paragraphe je démontrerai que la seconde variation de l'intégrale qui doit avoir un minimum, est toujours positive, au moins tant que l'intervalle du temps auquel se rapporte l'intégrale reste inférieur à une certaine limite, et l'on peut affirmer, dès lors, que le minimum a lieu, en général, effectivement.

Mon analyse, au fond, est la même que celle que j'ai employée dans mes deux articles: *Sur la discussion de seconde variation des intégrales définies multiples* (*) et *Sur le principe de la moindre action* (**); mais la démonstration qui a occupé la page 119 du premier de ces deux articles et les pages 247-249 du second article, est remplacée, dans l'article présent, par l'autre démonstration qui, de la manière la plus directe et la plus simple, conduit à la conclusion, que, par une transformation, se réduit identiquement à zéro une expression qui est mise sous le signe (37) dans mon second article et en conséquence une expression analogue à celle qui est désignée par ρ (for. 66) dans mon premier article. A l'aide de la démonstration qui vient d'être indiquée, la méthode de la réduction qu'il faut faire subir à la seconde variation d'une intégrale définie à une variable indépendante, cette méthode est à l'abri des difficultés considérables qui résultent de ce que, comme l'on fait ordinairement, au moyen des constantes arbitraires (***), on égale à zéro une expression analogue à celle qui est le coefficient de $t_n \cdot \frac{dt_v}{dx_i}$ dans la formule qui est mise sous le signe (66) dans le premier de mes deux articles signalés plus haut. C'est là ce qui distingue mon travail des autres, dans lesquels, comme je le sais, se traitait la théorie de la discussion de la seconde variation d'une intégrale définie à une variable indépendante.

(*) *Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples*; par M. G. SABININE. Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, rédigé par M. M. DARBOUX, J. HOÛEL et J. TANNERY, 2^e série, t. 2, p. 100-129, 1878.

(**) *Sur le principe de la moindre action*, par G. SABININE. Annali di Matematica pura ed applicata. Série 2^e, t. 12, p. 251-261, 1884.

(***) Ces constantes arbitraires, comme on le sait, entrent dans les solutions des équations différentielles linéaires analogues à celles dont les intégrales sont connues par le théorème de JACOBI (Journal de CRELLE, t. 17).

§ 1.

D'après ce qui est exposé dans les trois premières pages, les conditions qui déterminent le problème que nous avons à résoudre, consistent en ce que:

1) L'intégrale

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt \quad (1)$$

soit un minimum.

2) Les deux positions d'un corps, aux quelles répondent les limites du temps t_1 et t_0 , soient considérées comme données, en sorte que les variations de t et les variations tronquées de x , y , z , répondantes à t_1 et t_0 , soient liées par ces équations:

$$\left. \begin{aligned} \int^{t_1} \delta x &= - \int^{t_1} p \delta t, & \int^{t_1} \delta y &= - \int^{t_1} q \delta t, & \int^{t_1} \delta z &= - \int^{t_1} r \delta t \\ \int^{t_0} \delta x &= - \int^{t_0} p \delta t, & \int^{t_0} \delta y &= - \int^{t_0} q \delta t, & \int^{t_0} \delta z &= - \int^{t_0} r \delta t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

δ étant le signe des variations tronquées et \int étant le signe de substitution (*).

3) Les x , y , z fonctions de t qui rendent l'intégrale V un minimum, satisfassent à l'équation des forces vives

$$\Pi - T = h \quad (3)$$

où, comme nous avons posé

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad r = \frac{dz}{dt} \quad (4)$$

T , la demi-force vive du corps, a pour valeur

$$T = \frac{1}{2} (p^2 + q^2 + r^2). \quad (5)$$

4) L'équation

$$\Delta \Pi = \Delta T$$

ait lieu; cette équation, en vertu de ce que $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dT}{dt}$ se réduit à celle

$$\delta \Pi = \delta T. \quad (6)$$

Pour résoudre le problème qui se détermine par les quatre conditions énoncées, il faut rechercher le minimum relatif de l'intégrale V (1) avec la condition que, à les équations (2) près, les équations (3) et (6) aient lieu.

(*) t , étant variable indépendante, on peut dénoter sa variation par Δt , aussi bien que par δt .

Suivant la méthode du facteur variable et indéterminé que LAGRANGE a donné et qu'on emploie ordinairement dans la solution des questions des maxima ou des minima relatifs, la recherche indiquée du minimum se ramène à la recherche du minimum absolu de cette autre intégrale

$$W = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

dans laquelle

$$v = \Pi + \lambda [\Pi - T - h]$$

λ , étant le facteur variable qu'il faut déterminer ainsi que les fonctions x, y, z au moyen de l'équation (3) et d'autres équations qui dérivent de l'équation $\Delta W = 0$.

La variation ΔW , comme on le sait, prend la forme

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} [\Pi + \lambda(\Pi - T - h)] \delta t + \int_{t_0}^{t_1} [\delta \Pi + \lambda \delta(\Pi - T)] dt \quad (7)$$

Ayant égard à l'équation (3) et en faisant pour abrégier

$$\left. \begin{aligned} L &= (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dx}, & M &= (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dy}, & N &= (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dz} \\ P &= -\lambda p, & Q &= -\lambda q, & R &= -\lambda r \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

la formule (7) se réduit à celle

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \Pi \delta t + \int_{t_0}^{t_1} \left[L \delta x + M \delta y + N \delta z + P \frac{d\delta x}{dt} + Q \frac{d\delta y}{dt} + R \frac{d\delta z}{dt} \right] dt.$$

Si l'on intègre par parties, ayant égard aux équations (2) et (3), et que l'on pose

$$\delta_1 v = \left(L - \frac{dP}{dt} \right) \delta x + \left(M - \frac{dQ}{dt} \right) \delta y + \left(N - \frac{dR}{dt} \right) \delta z \quad (9)$$

la variation ΔW dévient

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} h \delta t + \int_{t_0}^{t_1} (1 + 2\lambda) T \delta t + \int_{t_0}^{t_1} dt \delta_1 v. \quad (10)$$

D'après les formules (8), (9) et (10) l'équation $\Delta W = 0$ entraîne les suivantes

$$\int_{t_0}^{t_1} h \delta t + \int_{t_0}^{t_1} (1 + 2\lambda) T \delta t = 0 \quad (11)$$

$$\text{et} \quad \left. \begin{aligned} (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dx} &= -\frac{d(\lambda p)}{dt}, & (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dy} &= -\frac{d(\lambda q)}{dt}, \\ (1 + \lambda) \frac{d\Pi}{dz} &= -\frac{d(\lambda r)}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Si l'on multiplie les équations (12) respectivement par p , q , r et qu'on les ajoute, on trouve, toutes réductions faites et en observant que $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dT}{dt}$

$$\frac{d[(1 + 2\lambda)T]}{dt} = 0. \quad (13)$$

Nous allons démontrer que $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pour cela, des équations (4), (12) et (13) nous déduirons celles, sur lesquelles sera fondée la démonstration que nous avons en vue.

En vertu de l'intégration de l'équation (13), on obtiendra

$$\lambda = \frac{C}{2T} - \frac{1}{2} \quad (14)$$

C étant une constante.

La différentiation de cette équation par rapport à t , donne

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{C \frac{dT}{dt}}{2T^2}$$

ou bien

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2C \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{(p^2 + q^2 + r^2)^2} \quad (15)$$

parce que $\frac{dT}{dt} = \frac{d\Pi}{dt}$ et à cause des équations (4) $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r$.

Remarquons que λ ne peut pas être égal à zéro, car la supposition que λ est nul, en vertu des équations (12), conduirait à la conclusion que $\frac{d\Pi}{dx} = 0$, $\frac{d\Pi}{dy} = 0$, $\frac{d\Pi}{dz} = 0$; mais cette conclusion serait en contradiction avec la condition donnée; d'après laquelle Π est la fonction de x , y , z .

Prenant en considération que λ n'est pas nul et ayant égard aux équations (4), on peut toujours représenter les équations (12) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{(1 + \lambda)}{\lambda} \frac{d\Pi}{dx} - \frac{p}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{(1 + \lambda)}{\lambda} \frac{d\Pi}{dy} - \frac{q}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{(1 + \lambda)}{\lambda} \frac{d\Pi}{dz} - \frac{r}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Si, dans le second membre de chacune des trois équations (16), on remplace $\frac{d\lambda}{dt}$ par sa valeur (15) et que l'on adjoigne les équations obtenus aux équations (4) et (15), on aura ce système des équations différentielles du premier ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p & \frac{dy}{dt} &= q & \frac{dz}{dt} &= r \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2Cp \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{\lambda(p^2 + q^2 + z^2)^2} - \frac{(1 + \lambda) d\Pi}{\lambda dx} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{2Cq \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{\lambda(p^2 + q^2 + z^2)^2} - \frac{(1 + \lambda) d\Pi}{\lambda dy} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{2Cr \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{\lambda(p^2 + q^2 + r^2)^2} - \frac{(1 + \lambda) d\Pi}{\lambda dz} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= - \frac{2C \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{(p^2 + q^2 + r^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

x, y, z, p, q, r et λ étant considérées comme les fonctions inconnues de t . De plus, si, dans le second membre de chacune des trois équations (16) on substitue à $\frac{d\lambda}{dt}$ et λ leurs valeurs (15) et (14) et que l'on adjoigne les équations obtenues aux équations (4), on aura ce système des équations différentielles du premier ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p, & \frac{dy}{dt} &= q, & \frac{dz}{dt} &= r \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{4Cp \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{(p^2 + q^2 + r^2)[2C - (p^2 + q^2 + r^2)]} - \frac{2C + (p^2 + q^2 + r^2) d\Pi}{2C - (p^2 + q^2 + r^2) dx} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{4Cq \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{(p^2 + q^2 + r^2)[2C - (p^2 + q^2 + r^2)]} - \frac{2C + (p^2 + q^2 + r^2) d\Pi}{2C - (p^2 + q^2 + r^2) dy} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{4Cr \left(\frac{d\Pi}{dx} p + \frac{d\Pi}{dy} q + \frac{d\Pi}{dz} r \right)}{(p^2 + q^2 + r^2)[2C - (p^2 + q^2 + r^2)]} - \frac{2C + (p^2 + q^2 + r^2) d\Pi}{2C - (p^2 + q^2 + r^2) dz} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

x, y, z, p, q et r étant considérées comme les fonctions inconnues de t . La

formule (14) bien montre que, pour établir que $\lambda = -\frac{1}{2}$, il n'y a qu'à démontrer que C est nul.

Supposons que C n'est pas nul, c'est-à-dire qu'on ne peut attribuer à C qu'une valeur algébrique ou arithmétique différente de 0. Cela supposé, aux équations différentielles de chacun des deux systèmes (17) et (18) est parfaitement applicable le moyen connu de démontrer l'existence du système intégral d'équations différentielles du premier ordre. Prenant cela en considération et désignant, en général, par m le nombre des constantes arbitraires qui n'entrent dans les trois fonctions x, y, z que par suite de l'intégration des équations différentielles du système (17), et par n le nombre des constantes arbitraires qui n'entrent dans les trois fonctions x, y, z que par suite de l'intégration des équations différentielles du système (18), on doit conclure que d'un côté, à cause de la formule (14) et en vertu des équations différentielles du système (17), l'intégration des équations de ce système (17) donne telles valeurs générales des trois fonctions x, y, z , qu'il en résulte que le nombre m est égal à 7; d'autre côté, les équations différentielles du système (18) sont telles qu'il en résulte que le nombre n est égal à 6; d'où il suit que les deux nombres m et n sont inégaux. Or, les équations différentielles de chacun des deux systèmes (17) et (18), étant du même ordre et en même temps étant déduites des mêmes équations différentielles (4), (12) et (13), les deux valeurs générales de chacune de ces trois fonctions x, y, z qui satisfont aux équations différentielles de chacun des deux systèmes (17) et (18), sont identiquement égales entr'elles, et en conséquence les deux nombres m et n sont égaux entr'eux. Tout cela, qui résulte directement de la supposition que C n'est pas nul, conduit à la conclusion que cette supposition ne saurait avoir lieu, à moins que les deux nombres m et n ne soient à la fois égaux et inégaux, ce qui est impossible. On doit donc conclure, que la supposition que C n'est pas nul, est impossible elle-même, d'où il suit que C est nul. La constante C , étant égale à zéro, la formule (14) conduit à la conclusion que

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad (19)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les procédés qui viennent d'être indiqués, servent à démontrer que, dans la déduction des équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action (pages 244-247 de mon article sur le principe de la moindre action), le facteur indéterminé λ (for. 13) est égal à $\frac{1}{2}$.

Si, dans les équations (12) on substitue à λ sa valeur (19), ces équations se réduisent à celles

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\Pi}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\Pi}{dy}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\Pi}{dz} \quad (20)$$

qui ne sont autre chose que les équations du mouvement et sont déduites indépendamment d'une hypothèse quelconque par rapport aux variations du temps relatives à ses limites.

À cause de la formule (19), l'égalité (11) deviendra

$$\int_{t_0}^{t_1} h \delta t = 0$$

d'où il suit que

$$\int_{t_1}^{t_0} \delta t = \int_{t_0}^{t_1} \delta t$$

car h n'est pas nul.

Ainsi les procédés que nous avons suivis dans la déduction des équations du mouvement, servent à démontrer que les variations du temps relatives à ses limites, sont égales entr'elles.

§ 2.

Nous allons démontrer la proposition qui est énoncée dans les trois premières pages.

Les conditions qui déterminent cette proposition, s'expriment par ces égalités

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dy} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1)$$

$$\frac{d\Pi}{dx} \delta x + \frac{d\Pi}{dy} \delta y + \frac{d\Pi}{dz} \delta z = p \frac{d\delta x}{dt} + q \frac{d\delta y}{dt} + r \frac{d\delta z}{dt} \quad (2)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta x = - \int_{t_0}^{t_1} p \delta t, \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta y = - \int_{t_0}^{t_1} q \delta t, \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta z = - \int_{t_0}^{t_1} r \delta t. \quad (3)$$

D'après les équations (1), l'équation (2) peut être représentée sous la forme

$$p^2 \frac{d\left(\frac{\delta x}{p}\right)}{dt} + q^2 \frac{d\left(\frac{\delta y}{q}\right)}{dt} + r^2 \frac{d\left(\frac{\delta z}{r}\right)}{dt} = 0. \quad (4)$$

Remarquons que les fonctions p, q, r ne peuvent pas être à la fois nulles, car, au cas contraire, en vertu des équations (1), on devrait supposer que $\frac{d\Pi}{dx} = 0$, $\frac{d\Pi}{dy} = 0$, $\frac{d\Pi}{dz} = 0$; mais cette supposition serait en contradiction avec la condition donnée, d'après laquelle Π est la fonction de x, y, z .

En admettant que p ne soit pas nul et en divisant par p^2 tous les termes de l'équation (4), cette équation se réduit à celle

$$\frac{d\left(\frac{\delta x}{p}\right)}{dt} = -\frac{q^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta y}{q}\right)}{dt} - \frac{r^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta z}{r}\right)}{dt}.$$

Si l'on multiplie cette équation par dt et que l'on intègre par rapport à t depuis t_0 jusqu'à t_1 , on trouvera, ayant égard aux égalités (3)

$$\int^{t_1} \delta t - \int^{t_0} \delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{q^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta y}{q}\right)}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{r^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta z}{r}\right)}{dt} dt. \quad (5)$$

Comme les trois variations $\delta x, \delta y, \delta z$ ne sont liées que par l'équation (2), les deux de ces trois variations, par exemple δy et δz sont parfaitement arbitraires et indépendantes entr'elles, et en conséquence dans l'égalité (5) on peut toujours changer ces deux variations δy et δz respectivement en $-\delta y$ et $-\delta z$. De plus, chacune des deux variations $\int^{t_1} \delta t$ et $\int^{t_0} \delta t$ est indépendante de chacune des deux variations δy et δz qui sont sous le signe \int ; par conséquent, en supposant que chacune des deux variations $\int^{t_1} \delta t$ et $\int^{t_0} \delta t$ conserve la même valeur absolue et le même signe, on peut toujours choisir les deux variations δy et δz qui sont sous le signe \int , de manière que pour toutes les valeurs de t comprises entre t_0 et t_1 , chacune de ces deux variations δy et δz aie deux valeurs qui, étant égales entr'elles en grandeur absolue, sont des signes contraires. Cela fait, nous recevrons ces deux égalités

$$\int^{t_1} \delta t - \int^{t_0} \delta t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{q^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta y}{q}\right)}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{r^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta z}{r}\right)}{dt} dt$$

$$\int^{t_1} \delta t - \int^{t_0} \delta t = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{q^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta y}{q}\right)}{dt} dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{r^2}{p^2} \frac{d\left(\frac{\delta z}{r}\right)}{dt} dt.$$

Si l'on ajoute ces deux dernières égalités, l'une à l'autre, on aura l'égalité

$$\int^{t_1} \delta t = \int^{t_0} \delta t. \quad (6)$$

Cette égalité (6) conduit à la conclusion que dans le même intervalle du temps s'effectuent tous les mouvements qui sont assujettés aux mêmes conditions que celles qui déterminent la proposition, énoncée dans les trois premières pages. Ainsi cette proposition est démontrée.

Nous démontrerons maintenant le premier des deux théorèmes qui sont énoncés dans les trois premières pages.

Comme la déduction des équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action ne dépend pas d'une hypothèse quelconque par rapport aux variations du temps relatives à ses limites, on doit conclure que, en vertu de la proposition qui vient d'être démontrée, les conditions qui déterminent le principe de la moindre action, sont telles qu'il en résulte que les variations du temps relatives à ses limites, sont égales entr'elles.

Passons à la démonstration du second des deux théorèmes, qui sont énoncés dans les trois premières pages.

Les conditions qui déterminent ce théorème, s'expriment par ces équations

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (7)$$

$$\Delta\Pi = \Delta T \quad \text{ou bien} \quad \delta\Pi = \delta T \quad (8)$$

$$\int^{t_1} \Delta x = 0 \quad \int^{t_0} \Delta x = 0 \quad \int^{t_1} \Delta y = 0 \quad \int^{t_0} \Delta y = 0 \quad \int^{t_1} \Delta z = 0 \quad \int^{t_0} \Delta z = 0. \quad (9)$$

Si l'on multiplie les équations (7) respectivement par Δx , Δy , Δz et que l'on ajoute, on trouvera

$$\Delta\Pi + \Delta T + 2T \frac{d\delta t}{dt} = \frac{d(p\Delta x + q\Delta y + r\Delta z)}{dt} \quad (10)$$

car

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \Delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \Delta z = \frac{d(p\Delta x + q\Delta y + r\Delta z)}{dt} - \Delta T - 2T \frac{d\delta t}{dt}.$$

En vertu de l'égalité (8) et à cause de ce que $T = \Pi - h$ et $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dT}{dt}$, l'égalité (10) se rend par

$$\delta\Pi + \frac{d(\Pi \delta t)}{dt} - h \frac{d\delta t}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(p\Delta x + q\Delta y + r\Delta z)}{dt}.$$

Si l'on multiplie cette dernière égalité par dt et que l'intègre depuis t_0 jusqu'à t_1 , on obtiendra

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt - h \left[\int_{t_0}^{t_1} \delta t - \int_{t_0}^{t_1} \delta t \right] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{p \Delta x + q \Delta y + r \Delta z}{2} \right). \quad (11)$$

Comme les égalités (7), (8) et (9) sont les mêmes que les égalités (1), (2) et (3), des quelles la formule (6) est déduite, on doit conclure que les égalités (7), (8) et (9) sont telles qu'il en résulte que, dans l'égalité (11) les deux variations $\int_{t_0}^{t_1} \delta t$ et $\int_{t_0}^{t_1} \delta t$ sont égales entr'elles.

Cela vû et en vertu des formules (9), l'égalité (11) deviendra

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt = 0$$

c'est-à-dire que la variation de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$ est nulle; par conséquent cette intégrale a un minimum ou un maximum. Or la discussion de la seconde variation de cette intégrale, discussion qui fait l'objet du troisième paragraphe, conduit à la conclusion que l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$ a un minimum. Ainsi le second théorème est démontré.

§ 3.

D'après la formule [(10) § 1], et en vertu des équations [(12), (19) § 1], la variation $\Lambda^2 W$ n'est autre chose que l'intégrale de la différentielle de δ, v , due aux accroissements $\delta x, \delta y, \delta z$ et aux accroissements $\delta p, \delta q, \delta r$. Nous pouvons donc représenter cette variation $\Lambda^2 W$ par

$$\Lambda W = K_1 + K_2 + K_3 \quad (1)$$

en posant pour abrégé

$$K_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z - \frac{d \left(\frac{dP}{dp} \frac{d\delta x}{dt} \right)}{dt} \right] \delta x \quad (2)$$

$$K_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dM}{dx} \delta x + \frac{dM}{dy} \delta y + \frac{dM}{dz} \delta z - \frac{d \left(\frac{dQ}{dq} \frac{d\delta y}{dt} \right)}{dt} \right] \delta y \quad (3)$$

$$K_3 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dN}{dx} \delta x + \frac{dN}{dy} \delta y + \frac{dN}{dz} \delta z - \frac{d \left(\frac{dR}{dr} \frac{d\delta z}{dt} \right)}{dt} \right] \delta z. \quad (4)$$

À chacune des trois intégrales K_1 (2), K_2 (3) et K_3 (4) sont parfaitement applicables les procédés qui sont indiqués dans mon article: *Sur le principe de la moindre action* (pages 245-247). Si l'on suit ces procédés dans la transformation de chacune des trois intégrales K_1 (2), K_2 (3) et K_3 (4), en conservant d'ailleurs les mêmes dénottations, on aura

$$K_1 = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dP}{dp} \xi \delta x \right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dP}{dp} \xi^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Sigma_n \Sigma_v H'_{n,v} \frac{d\omega_v}{dt} \omega_n \right] \quad (5)$$

$$K_2 = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dQ}{dq} \eta \delta y \right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dQ}{dq} \eta^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Sigma_n \Sigma_v H''_{n,v} \frac{d\omega_v}{dt} \omega_n \right] \quad (6)$$

$$K_3 = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dR}{dr} \zeta \delta z \right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dR}{dr} \zeta^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Sigma_n \Sigma_v H'''_{n,v} \frac{d\omega_v}{dt} \omega_n \right] \quad (7)$$

$$H'_{n,v} = \frac{dP}{dp} \frac{dX_n}{dt} X_v - \frac{dP}{dp} \frac{dX_v}{dt} X_n \quad (8)$$

$$H''_{n,v} = \frac{dQ}{dq} \frac{dY_n}{dt} Y_v - \frac{dQ}{dq} \frac{dY_v}{dt} Y_n \quad (9)$$

$$H'''_{n,v} = \frac{dR}{dr} \frac{dZ_n}{dt} Z_v - \frac{dR}{dr} \frac{dZ_v}{dt} Z_n \quad (10)$$

$$\xi = \Sigma_n X_n \frac{d\omega_n}{dt} = \Sigma_v X_v \frac{d\omega_v}{dt} \quad (11)$$

$$\eta = \Sigma_n Y_n \frac{d\omega_n}{dt} = \Sigma_v Y_v \frac{d\omega_v}{dt} \quad (12)$$

$$\zeta = \Sigma_n Z_n \frac{d\omega_n}{dt} = \Sigma_v Z_v \frac{d\omega_v}{dt} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \Sigma_m K_{m,n} \frac{dx}{dc_m}, & Y_n &= \Sigma_m K_{m,n} \frac{dy}{dc_m}, & Z_n &= \Sigma_m K_{m,n} \frac{dz}{dc_m} \\ X_v &= \Sigma_\mu K_{\mu,v} \frac{dx}{dc_\mu}, & Y_v &= \Sigma_\mu K_{\mu,v} \frac{dy}{dc_\mu}, & Z_v &= \Sigma_\mu K_{\mu,v} \frac{dz}{dc_\mu} \end{aligned} \right\} (14)$$

c_m ainsi que c_μ étant une des constantes qui n'entrent dans les fonction x, y, z
Annali di Matematica, tomo XIV. 4

que par suite de l'intégration des équations [(20) § 1] et $K_{m,n}$ ainsi que $K_{\mu,\nu}$ étant une des constantes arbitraires qui n'entrent ni dans les fonctions x, y, z ni dans les équations [(20), (3) § 1]. En même temps n ainsi que ν désignent tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 3, et m ainsi que μ désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6. Les valeurs générales des x, y, z , considérées comme fonctions des c_m , étant indépendantes, et les constantes $K_{m,n}$ parfaitement arbitraires, on peut toujours attribuer à ces dernières des valeurs, pour lesquelles le déterminant D des 3^2 quantités (14) ne soit pas égal à zéro. Ces quantités (14), comme on le sait, sont les solutions des équations différentielles linéaires analogues à celles, dont les intégrales sont connues par le théorème de JACOBI (Journal de CRELLE, t. 17).

Le déterminant D des 3^2 quantités (14), n'étant pas égal à zéro, on peut exprimer les trois variations $\partial x, \partial y, \partial z$ en fonctions d'autant de variables indépendantes ω_n , en prenant les quantités (14) pour coefficients de ces variables, on aura

$$\text{ou } \left. \begin{aligned} \partial x &= \sum_n X_n \omega_n, & \partial y &= \sum_n Y_n \omega_n, & \partial z &= \sum_n Z_n \omega_n \\ \partial x &= \sum_\nu X_\nu \omega_\nu, & \partial y &= \sum_\nu Y_\nu \omega_\nu, & \partial z &= \sum_\nu Z_\nu \omega_\nu \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

où les variables ω_n ou ω_ν doivent être considérées comme fonctions arbitraires de t . Ces fonctions arbitraires ω_n ou ω_ν sont les mêmes que celles qui sont dans les formules (5), (6), (7), (11), (12) et (13), car les procédés, que j'ai employés dans mon article: *Sur le principe de la moindre action* (pag. 245-247) et qui servent à réduire les intégrales (2), (3) et (4) aux intégrales (5), (6) et (7), ces procédés sont fondés sur ce que, sous le signe \int des intégrales (2), (3) et (4), les variations $\partial x, \partial y, \partial z$ sont remplacées par leurs expressions (15).

Après avoir indiqué les dénominations dans les formules (5), (6) et (7), nous allons démontrer maintenant que, par une transformation, chacune des trois expressions $H'_{n,\nu}$ (8), $H''_{n,\nu}$ (9) et $H'''_{n,\nu}$ (10) se réduit identiquement à zéro. La transformation d'une quelconque des trois expressions $H'_{n,\nu}$ (8), $H''_{n,\nu}$ (9) et $H'''_{n,\nu}$ (10) est analogue à celle des deux autres, par conséquent nous bornons-nous à exposer la transformation de la première expression $H'_{n,\nu}$ (8).

En remettant dans l'expression $H'_{n,\nu}$ (8) pour X_n et X_ν leurs valeurs (14), cette expression $H'_{n,\nu}$ devient

$$H_{n,\nu} = \sum_m \sum_\mu K_{m,n} \frac{\partial P}{\partial c_m} K_{\mu,\nu} \frac{dx}{dc_\mu} - \sum_m \sum_\mu K_{\mu,\nu} \frac{\partial P}{\partial c_\mu} K_{m,n} \frac{dx}{dc_m} \quad (16)$$

Nous formons les $m \cdot n$ équations

$$K_{m,n} \frac{dx}{dc_m} = \sum_a \sum_b K_{m,a} K_{n,b} A_{x,a} B_{x,b} \quad (17)$$

dans lesquelles les inconnues sont les produits de $A_{x,a}$ et $B_{x,b}$ deux fonctions de t , et les coefficients de ces inconnues sont les produits des constantes $K_{m,a}$ et $K_{n,b}$ qui n'entrent ni dans les fonctions x, y, z , ni dans les équations [(20) et (3) § 1]. Ces constantes $K_{m,a}$ et $K_{n,b}$, étant parfaitement arbitraires, on peut toujours leur attribuer des valeurs, pour lesquelles le déterminant des m^2 quantités $K_{m,a}$ ne soit pas égal à zéro et il en est de même du déterminant des n^2 quantités $K_{n,b}$; a désignant tous les nombres depuis 1 jusqu'à m et b désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à n .

Si, dans les équations (17), on change respectivement m, n, a et b en μ, ν, α et β , les mêmes équations (17) se représenteront par

$$K_{\mu,\nu} \frac{dx}{dc_\mu} = \sum_\alpha \sum_\beta K_{\mu,\alpha} K_{\nu,\beta} A_{x,\alpha} B_{x,\beta}. \quad (18)$$

De plus nous posons

$$\frac{dP}{dc_m} = \frac{dx}{dc_m} \cdot P_m \quad (19)$$

où le facteur P_m est une fonction de t .

Comme le facteur P_m varie non seulement avec l'indice m , mais encore avec la dérivée $\frac{dx}{dt} = p$, nous exprimons les m facteurs P_m en fonctions d'autant de variables indépendantes $G_{x,l}$, en prenant pour coefficients de ces variables $G_{x,l}$ les m^2 constantes arbitraires $K_{m,l}$ qui n'entrent ni dans les équations [(20) (3) § 1], ni dans les fonctions x, y, z et en attribuant à ces constantes $K_{m,l}$ des valeurs pour lesquelles le déterminant de m^2 quantités $K_{m,l}$ ne soit pas égal à zéro. Cela fait, on recevra ces m équations

$$P_m = \sum_l K_{m,l} G_{x,l} \quad (20)$$

où chacune des variables $G_{x,l}$ est une fonction de t et l désigne tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à m .

Si, après avoir multiplié par $K_{m,n}$ chacune des égalités (19), on en porte les valeurs fournies par les formules (17) et (20), on aura ces égalités

$$K_{m,n} \frac{dP}{dc_m} = \sum_\alpha \sum_b \sum_l K_{m,\alpha} K_{n,b} K_{m,l} A_{x,\alpha} B_{x,b} G_{x,l}. \quad (21)$$

Si, dans les égalités (21), on change respectivement n et b en ν et β , les

mêmes égalités (21) se représenteront par

$$K_{m,\nu} \frac{dP}{dc_m} = \Sigma_a \Sigma_\beta \cdot \Sigma_l K_{m,\alpha} K_{\nu,\beta} K_{m,l} A_{x,\alpha} B_{x,\beta} G_{x,l}. \quad (22)$$

En même temps, si, dans les $m \cdot n$ équations (18), on change respectivement ν et β en n et b , les mêmes équations (18) se représenteront par

$$K_{\mu,n} \frac{dx}{dc_\mu} = \Sigma_a \Sigma_b K_{\mu,\alpha} K_{n,b} A_{x,\alpha} B_{x,b}. \quad (23)$$

Si, dans le second terme du second membre de l'égalité (16) on change m en μ et vice versa, cette égalité se rend par

$$H'_{n,\nu} = \Sigma_m \Sigma_\mu K_{m,n} \frac{dP}{dc_m} K_{\mu,\nu} \frac{dx}{dc_\mu} - \Sigma_m \Sigma_\mu K_{m,\nu} \frac{dP}{dc_m} K_{\mu,n} \frac{dx}{dc_\mu}. \quad (24)$$

Enfin, si, dans l'égalité (24), on substitue respectivement à $K_{m,n} \frac{dP}{dc_m}$, $K_{\mu,\nu} \frac{dx}{dc_\mu}$, $K_{m,\nu} \frac{dP}{dc_m}$, $K_{\mu,n} \frac{dx}{dc_\mu}$ leurs valeurs (21), (18), (22), (23), l'expression $H'_{n,\nu}$ (8) se réduit à celle

$$\left. \begin{aligned} H'_{n,\nu} &= \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_a \Sigma_b \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_l K_{m,\alpha} K_{n,b} K_{m,l} A_{x,\alpha} B_{x,b} G_{x,l} K_{\mu,\alpha} K_{\nu,\beta} A_{x,\alpha} B_{x,\beta} \\ &- \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_a \Sigma_b \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_l K_{m,\alpha} K_{\nu,\beta} K_{m,l} A_{x,\alpha} B_{x,\beta} G_{x,l} K_{\mu,\alpha} K_{n,b} A_{x,\alpha} B_{x,b}. \end{aligned} \right\} (25)$$

Il est évident que le second membre de cette égalité (25) est identiquement égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Cela vû, on doit poser

$$\Sigma_n \Sigma_\nu H'_{n,\nu} \frac{d\omega_\nu}{dt} \omega_n = 0. \quad (26)$$

En appliquant à chacune des deux expressions $H''_{n,\nu}$ (9) et $H'''_{n,\nu}$ (10) les procédés que nous avons suivis dans la transformation de l'expression $H'_{n,\nu}$ (8), on démontrera que, par la transformation indiquée, chacune des deux expressions $H''_{n,\nu}$ (9) et $H'''_{n,\nu}$ (10) se réduit identiquement à zéro, et en conséquence on aura (*)

$$\Sigma_n \Sigma_\nu H''_{n,\nu} \frac{d\omega_\nu}{dt} \omega_n = 0 \quad (27)$$

(*) Par la démonstration analogue à celle que je propose dans l'article présent doit être remplacée chacune des deux démonstrations dont l'une est exposée aux pages 247-249 et à la page 253 du mon article: *Sur le principe de la moindre action*. [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2, t. 12] et l'autre a occupé la page 119 du mon article: *Sur la discussion de la seconde variation des intégrales définies multiples* [Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques rédigé par DARBOUX, HOÜEL et TANNERY, 2^e série, t. 2, p. 100-129].

et

$$\Sigma_n \Sigma_r H'''_{n,r} \frac{d\omega_n}{dt} \omega_n = 0. \quad (28)$$

À cause des formules (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (26), (27) et (28), la variation $\Delta^2 W$ se représentera par

$$\Delta^2 W = - \left. \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dP}{dp} \xi \delta x + \frac{dQ}{dq} \eta \delta y + \frac{dR}{dr} \zeta \delta z \right) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dP}{dp} \xi^2 + \frac{dQ}{dq} \eta^2 + \frac{dR}{dr} \zeta^2 \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Si, dans l'équation [(6) § 1], on substitue aux variations δx , δy , δz leurs expressions (15), on obtiendra

$$\text{ou } \left. \begin{aligned} & \Sigma_n (p X_n + q Y_n + r Z_n) \frac{d\omega_n}{dt} = 0 \\ & \Sigma_r (p X_r + q Y_r + r Z_r) \frac{d\omega_r}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

En vertu des formules (11), (12) et (13) ces équations (30) peuvent être mises sous la forme

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0. \quad (31)$$

D'après les formules (29), (31) [(8), (2) et (19) § 1] la variation $\Delta^2 W$ deviendra

$$\Delta^2 W = \int_{t_2}^{t_1} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dt. \quad (32)$$

Si enfin nous éliminons, sous le signe \int , de $\Delta^2 W$ (32), une des trois quantités ξ , η et ζ , par exemple η , au moyen de l'équation (31), la variation $\Delta^2 W$ se représentera par

$$\Delta^2 W = \int_{t_2}^{t_1} \left[\left(\frac{q^2 + p^2}{q^2} \right) \xi^2 + \left(\frac{q^2 + r^2}{q^2} \right) \zeta^2 + 2 \frac{pr}{q^2} \xi \zeta \right] dt \quad (33)$$

et la discussion de $\Delta^2 W$ (33) se ramène à celle de l'expression différentielle homogène entière et du second degré par rapport à deux variables ξ et ζ arbitraires et indépendantes entre elles.

De la manière, analogue à celle que j'ai indiquée dans mon article: *Sur le principe de la moindre action* (page 251), il est aisé de conclure de la formule (33) que l'intégrale $\int_{t_2}^{t_1} \Pi dt$ a un minimum, en général, effectivement.

Nous finissons cet article par faire cette remarque.

D'après ce que l'illustre auteur de la *Mécanique Analytique* a dit du principe de la moindre action [page 281, lignes 15-27, premier volume 3^{me} édition, 1853 a.], on pourrait l'appeler, avec plus de fondement, le *principe de la plus petite force vive*. Une semblable dénomination est propre au second des deux théorèmes énoncés dans les trois premières pages; il me semble qu'il serait convenable de l'appeler le *principe de la moindre intensité des forces*.

Odessa, 24 juillet 1885.

Su le superficie di 4° ordine con conica doppia.

(Memoria di H. G. ZEUTHEN, pubblicata per la festa commemorativa
del IV centenario dell'Università di Copenhagen - Giugno 1879.)

VERSIONE DAL DANESE, RIVEDUTA DALL'AUTORE,

di GINO LORIA

Intorno a le superficie di cui ci occuperemo in questo lavoro esistono già da molto tempo delle memorie di KUMMER (*), di CLEBSCH (**), di GEISER (***), di CREMONA (****), di R. STURM (*****), e di altri. A queste ricerche si devono aggiungere quelle su le così dette « superficie anallagmatiche del 4° ordine » o « Cicliidi » cioè su le superficie del 4° ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario a l'infinito, ricerche che furono iniziate da MOUTARD (*****) e continuate con gran successo da questo stesso matematico assieme a LAGUERRE, DARBOUX (*****) ed altri. I risultati a cui pervennero questi ultimi geometri sono applicabili immediatamente solo ad una delle classi di superficie che vogliamo studiare; ma si può però passare da essi a quelli relativi a le superficie generali — tranne che per quanto concerne la realtà — con una semplice trasformazione omografica, come osservò anche MOUTARD (*****)).

(*) Giornale di BORCHARDT, vol. 64, pag. 66.

(**) Ib., vol. 69, pag. 142.

(***) Ib., vol. 70, pag. 249.

(****) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 e 23 marzo 1871.

(*****) Mathematische Annalen, vol. 4, pag. 265.

(*****) Bulletin de la Société philomathique, 1864. — Nouvelles Annales, 1864, p. 306 e 536.

(*****) Un elenco delle memorie, in parte pressochè irreperibili, che si riferiscono a questo argomento si trova nel più esteso dei lavori di DARBOUX, il cui titolo è: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873), il cui fine precipuo è appunto lo studio delle cicliidi.

(*****) Nouvelles Annales, 1864, pag. 309. Siccome le memorie di MOUTARD che si trovano in questo stesso volume dei Nouvelles Annales, sono indipendenti da la comunicazione fatta da KUMMER a l'Accademia di Berlino il 16 luglio 1863, così è chiaro che MOUTARD aveva dal canto suo scoperti i cinque coni di KUMMER a cui è dovuto il grande interesse che presentano le superficie di cui è parola.

Ciò che io ho specialmente in vista, e che è la ragione di questo nuovo lavoro, è uno studio della forma e della connessione delle varie falde delle predette superficie e della realtà delle loro rette e dei loro « coni di KUMMER ». Con tale ricerca si giunge ad estendere le nozioni, finora molto limitate, su la forma degli enti geometrici a tre dimensioni definiti da semplici equazioni algebriche, e si ottengono degli esempî che saranno utili nelle future ricerche su la forma delle superficie.

Per fare questo studio io ho anzitutto approfittato della circostanza che il contorno apparente della superficie, vista da un punto della conica doppia, è una curva generale del 4° ordine. Ciò diede origine a una parte del mio lavoro che è una continuazione del mio antico metodo di dedurre le proprietà di realtà della superficie di 3° ordine da la loro proiezione stereografica (*). Questo procedimento, che io uso nella *III Parte*, è immediatamente applicabile solo quando la conica doppia ha punti reali. Ma a la stessa limitazione non è soggetto il procedimento che io segno nella *IV Parte*. Esso consiste in una rappresentazione della superficie su le due facce di una superficie di 2° ordine, rappresentazione che a sua volta si fonda su una costruzione della superficie, la quale non è che una generalizzazione d'una costruzione della ciclode che si trova nell'opera già citata di DARBOUX (**).

Allo studio delle forme farò precedere l'esposizione delle più importanti fra le proprietà generali delle superficie, cioè fra quelle proprietà che possono venir espresse da equazioni e in cui, quindi, non si deve far distinguere fra reale ed imaginario. In tale esposizione io uso naturalmente lo stesso metodo che nello studio della forma delle superficie. Ma siccome questo metodo, che mette in evidenza delle nuove relazioni fra alcune proprietà delle superficie e porge delle dimostrazioni nuove e semplici di alcune proprietà note, ha condotto anche a parecchi nuovi teoremi e apre una comoda via ad ulteriori ricerche, così nella *I e II Parte* io mi arresto a darne un'esposizione più diffusa di quello che esigerebbe le studio della forma fatto nella *III e IV Parte*.

(*) *Mathem. Annalen*, vol. 8. — Nella sua Memoria già citata, GEISER propose di applicare la trasformazione da esso usata, e con la quale si passa da le superficie qui studiate a le superficie di 3° ordine, a trarre delle conclusioni su le proprietà di realtà. Aggiungerò che, per ciò che riguarda le rette della superficie, questo metodo non è neppure di difficile applicazione.

(**) Però questa costruzione non è la stessa che sta a base dello studio fatto da DARBOUX delle « forme principali » delle ciclidi, dal quale si possono ricavare le « forme principali » delle superficie di 4° ordine con una conica doppia non avente punti reali.

Siccome io, come si fa spesso in geometria, nella dimostrazione delle dette proprietà generali, mi servo di una determinata figura su cui certi punti e certe linee — per la cui realtà, si noti bene, non è necessaria alcuna equazione di condizione — sono reali, così io debbo qui esplicitamente enunciare il principio che mi permette di estenderle a tutte le superficie di cui si tratta. Esso è simile al principio di continuità di PONCELET, solamente è più preciso di questo, e non ha bisogno di alcuna dimostrazione, ove lo si enunci nel seguente modo:

Quando un risultato, tale che possa tradursi in una o più equazioni, è dimostrato vero per un'infinità di figure di una certa specie, senza che sia necessario supporre che i coefficienti delle equazioni che definiscono le figure di quella specie soddisfino alcuna nuova equazione di condizione, esso risultato deve sussistere per tutte le figure di quella specie.

P. e.: Siccome la condizione che la conica doppia di una delle superficie di cui ci occupiamo ora abbia punti reali, non può rappresentarsi con un'equazione di condizione, ma solo con una limitazione, così sarebbe perfettamente lecito dimostrare le proprietà generali — ma, ben inteso, non quelle di realtà — nel caso in cui la conica abbia punti reali. Ciò invece non si potrebbe fare nel caso in cui, entro la nostra classe di superficie, si considerasse un sistema in cui l'esistenza di punti reali su la conica doppia fosse soggetta a un'equazione di condizione.

I.

Proprietà generali ottenute mediante proiezione da un punto della conica doppia.

1. *Proiezione da un punto della conica doppia.* Qualunque sezione piana di una superficie di 4° ordine con conica doppia è una curva di 4° ordine avente due punti doppi nelle intersezioni del piano secante con tale conica. Essa è quindi della classe $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$. Da uno qualunque dei punti doppi si possono in conseguenza condurre quattro tangenti, oltre a le due rette tangenti in esso a la curva. Segue da ciò, che un cono circoscritto a la superficie e avente il vertice su la conica doppia sarà costituito dai due piani tangenti nel vertice e da una superficie conica di 4° ordine, ossia che *quando la superficie viene proiettata da un punto della conica doppia, il suo contorno ap-*

parente consta, oltrechè delle tracce dei due piani tangenti, di una curva di 4° ordine. La superficie conica tocca ognuno dei piani tangenti lungo le corrispondenti tangenti principali (rette aventi un contratto di 2° ordine con la superficie); ciò si riconosce conducendo dal vertice del cono le tangenti a la sezione fatta nella superficie da un piano tangente. Il contorno ha quindi per tangenti doppie le tracce di quei due piani tangenti. La traccia del piano della conica doppia passa per il punto d'intersezione di queste due tracce.

Nel n.° 2 mostreremo che il contorno può essere una curva qualunque di 4° ordine. Ma possiamo fin d'ora mostrare che in generale essa non avrà punti doppi nè cuspidi (nè punti multipli più complicati); infatti, qualunque retta proiettante, proietta due soli punti della superficie, mentre un punto doppio o una cuspidale del contorno dovrebbe esser traccia di una tangente doppia o di una tangente principale della superficie non avente alcun punto di contatto coincidente con il centro di proiezione (*), cioè di una retta proiettante 4 o 3 punti della superficie.

2. *Rappresentazione analitica.* Una superficie di 4° ordine avente una conica doppia nel piano $z = 0$ è rappresentata da un'equazione della forma

$$A_2^2 + 2A_2B_1z + C_2z^2 = (A_2 + B_1z)^2 + (C_2 - B_1^2)z^2 = 0, \quad (1)$$

ove A_2, B_1, C_2 sono polinomî contenenti le coordinate nei gradi indicati dagli indici rispettivi. Prendiamo il centro di proiezione, che abbiamo scelto su la conica doppia $A_2 + B_1z = 0, z = 0$, per origine del sistema di coordinate; di più prendiamo per piano $y = 0$ il piano tangente a la superficie $A_2 + B_1z = 0$ in quello stesso punto e finalmente per quarto piano coordinato $t = 0$ il piano polare del centro di proiezione rispetto a la quadrica $C_2 - B_1^2 = 0$. La equazione (1) assumerà allora la forma

$$a(\psi + yt)^2 + b(\varphi + t^2)z^2 = 0 \quad (2)$$

ove φ e ψ sono funzioni di secondo grado delle sole x, y, z ed a, b sono costanti. Una retta proiettante è determinata quando si conoscono i valori dei rapporti $\frac{y}{x}$ e $\frac{z}{x}$; questi valori, sostituiti nella (2), la trasformano in un'equazione di secondo grado nel rapporto $\frac{t}{x}$, le cui radici determinano i punti proiettati da quella retta. Uno di questi coincide con il centro di proiezione

(*) V. p. e. SALMON, *Geometry of three dimensions*, 4^a ed., pag. 245-246, oppure la traduzione tedesca fatta di quest'Opera dal prof. FIEDLER, vol. 2° (1880), pag. 24.

quando sia

$$ay^2 + bz^2 = 0; \tag{3}$$

quest'equazione rappresenta i due piani tangenti nel centro di proiezione. I due valori di $\frac{t}{x}$ coincidono quando sia

$$a^2y^2\psi^2 - (ay^2 + bz^2)(a\psi^2 + b\varphi z^2),$$

cioè quando sia

$$z^2\{(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2\} = 0.$$

Per $z^2 = 0$ i due punti proiettati coincidono in un punto della conica doppia, invece per

$$(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2 = 0 \tag{4}$$

la retta proiettante diviene tangente a la superficie e quindi la (4) rappresenta il cono di 4° ordine che, insieme ai due piani tangenti, costituisce il cono circoscritto da l'origine a la data superficie.

La equazione (4) è la forma più generale dell'equazione di un cono di 4° ordine bitangente a ciascuno dei piani della coppia $ay^2 + bz^2 = 0$ (*), e però questi due piani sono due suoi arbitrari piani tangenti doppi. Inoltre, l'equazione di quella coppia di piani assume la stessa forma quando per piano $z = 0$ si prenda un piano arbitrario passante per la loro intersezione, purchè per piano $y = 0$ si prenda il conjugato armonico di quello rispetto a la coppia stessa. Dunque:

Data ad arbitrio una curva di 4° ordine e date due qualunque sue tangenti doppie e una retta arbitraria passante per la loro intersezione, si può sempre costruire una superficie di 4° ordine con conica doppia tale che quella curva sia il suo contorno in una proiezione fatta da un punto della conica doppia, che le due tangenti doppie siano le tracce dei suoi piani tangenti nel centro di proiezione, e che infine la retta pel loro punto d'intersezione sia la traccia del piano della conica doppia. Vediamo adunque che nelle ricerche generali intorno alla proiezione della superficie fatta da un punto qualunque della conica doppia *non è il caso di pensare ad altre condizioni a cui debbano soddisfare i contorni e le tracce di quei tre piani, oltre a quelle enumerate nel n.º 1.*

(*) Ciò segue dalla nota teoria delle coniche quadritangenti a una curva di 4° ordine; si veggia per es. SALMON, *Higher plane Curves* (pag. 272 della traduzione tedesca del prof. FIEDLER). Di questa teoria avremo occasione di fare parecchie altre applicazioni.

3. *Punti visibili e punti invisibili.* Per distinguere l'uno da l'altro i due punti della superficie che hanno la stessa proiezione, noi introdurremo la nozione di punti visibili e punti invisibili. Imagineremo a tale scopo un punto che percorra la retta proiettante andando dal centro di proiezione, prima a la traccia di essa sul piano di proiezione, poi al suo punto a l'infinito e che quindi, dal punto a l'infinito, ritorni per la parte opposta al centro di proiezione. Allora, diremo visibile il punto della superficie che s'incontra per primo, invisibile l'altro. Siano A, B due punti della superficie; uniamoli con una linea giacente su la superficie — operazione che non è possibile quando i punti stanno su due falde di superficie non connesse lungo una comune intersezione con il piano a l'infinito — e supponiamo che non sia lecito passare da l'una a l'altra delle falde di superficie che s'intersecano nella curva doppia passando per i punti d'intersezione di questa con la curva AB già segnata; allora, A e B saranno entrambi visibili o entrambi invisibili quando la somma del numero dei punti di semplice contatto (*) della proiezione della linea AB con il contorno e del numero de' suoi punti d'intersezione con la proiezione della curva doppia e con la retta all'infinito è un numero pari, invece uno dei detti punti sarà visibile e l'altro invisibile quando quella somma sarà impari.

Presenta un grande interesse lo studio della visibilità o invisibilità dei due punti A e B che stanno infinitamente vicini al centro di proiezione P su ciascuna delle due falde della superficie che ivi s'intersecano. Questi punti sono rappresentati da due punti delle tracce dei piani tangenti in P . Chiameremo T' il punto d'intersezione di queste tracce e A', B' le proiezioni di A, B . Imagineremo poi che un punto mobile vada da A fino a la tangente PT' della conica doppia, mantenendosi infinitamente vicino a P , che poi esso passi da l'una a l'altra delle due falde della superficie, e che infine, mantenendosi infinitamente vicino a P , vada sino in B . Corrispondentemente la proiezione si muoverà su la tangente doppia $T'A'$ da A' a T' e quindi su la tangente doppia $T'B$, sino in B' . Siccome nel precedente movimento è avvenuto un passaggio da una falda a l'altra della superficie, così, nella regola precedentemente esposta,

(*) Si considerano come punti di contatto anche le intersezioni del contorno con una linea doppia del piano di proiezione, cioè con una linea di cui ogni punto è proiezione di due punti appartenenti a la stessa linea della superficie. Una linea doppia è divisa da un punto di intersezione col contorno (« vertice ») in due parti; una di esse è proiezione di due porzioni reali di linee che si riuniscono in quel punto d'intersezione e che sono una visibile, l'altra invisibile; l'altra invece contiene proiezioni di punti immaginari. Se la proiezione di AB seca il contorno in $2n$ punti coincidenti in uno, questo equivale ad n punti di contatto.

bisogna scambiare fra loro le parole pari ed impari. Il movimento può immaginarsi eseguito in modo che in nessuno dei passaggi $A'T'$, $T'B'$ s'incontri la retta a l'infinito del piano di proiezione. Il numero delle intersezioni con la proiezione della conica doppia sarà 0 od 1 secondochè A' e B' stanno da la stessa parte o da parti opposte di essa. Dunque A e B sono entrambi visibili o entrambi invisibili quando la somma di quel numero e del numero dei punti di contatto del contorno con i segmenti rettilinei $A'T'$ e $B'T'$ è impari, uno è visibile l'altro è invisibile quando quella somma è pari.

4. *Piani tangenti doppi.* Oltre a le tracce dei due piani tangenti della superficie nel centro di proiezione, sono tangenti doppie del contorno le tracce dei piani tangenti doppi della superficie che passano pel centro di proiezione. Il numero di questi piani è per conseguenza 26. La linea d'intersezione con la superficie di un piano tangente doppio ha per punti doppi, tanto i due punti di contatto, quanto i punti d'intersezione del suo piano con la conica doppia. Essa sarà quindi composta o di due coniche secantisi in quei quattro punti doppi, oppure di una curva di 3° ordine avente un punto doppio nel centro di proiezione e di una retta secante questa curva nell'altro dei punti d'intersezione del piano considerato con la conica doppia e nei due punti di contatto (*).

A quale di queste due specie di piani tangenti appartenga un dato piano tangente del cono circoscritto, si riconosce determinando se delle due curve in cui si spezza quell'intersezione, ognuna passa una volta pel centro di proiezione, oppure se una di esse vi passa due volte e l'altra non vi passa. Se si chiamano A' e B' i due punti in cui la traccia di quel piano incontra le tracce $T'A'$ e $T'B'$ de' piani tangenti in P alla superficie, noi potremo percorrere quella delle due curve che passa pel punto A coincidente con P e proiettato in A' , e giungere al suo punto C proiettato in B' ; ciò è possibile perchè una qualunque delle due curve qui considerate consta d'un solo ramo. Poi, dovremo determinare se il punto C cade o non nel punto B coincidente con P e proiettato in B' : se A' e B' stanno dalla stessa parte della proiezione della conica doppia ed A è visibile (invisibile) C sarà pure visibile (invisibile) ovvero sarà invisibile (visibile), secondochè il segmento finito $A'B'$ della traccia del piano tangente ha un numero pari o un numero impari di contatti con il contorno; succede il contrario se A' e B' stanno da parti opposte della proiezione della conica doppia. Queste osservazioni assieme a quelle fatte nel

(*) Che questa retta non passi pel centro di proiezione, risulta considerando che, in tal caso, il contorno acquisterebbe un punto doppio, il che è contro le ipotesi fatte.

n.° 3 per decidere se B era visibile, permettono di concludere che C coinciderà con B soltanto quando il perimetro del triangolo $T'A'B'$ tocca il contorno in un numero impari di punti. Nel caso in cui il perimetro del triangolo tocca il contorno in un numero pari di punti — caso che si verifica quando l'intersezione consta di due coniche — i sei punti in cui le rette indefinite $T'A'$, $T'B'$, $A'B'$ toccano il contorno, staranno, in virtù del teorema di CARNOT, su una conica, la quale passerà anche per i punti di contatto d'una quarta tangente doppia. Quest'ultima forma assieme ad $A'B'$ una conica appartenente a quello stesso dei 63 sistemi di coniche quadritangenti al contorno di cui fa parte la conica costituita da le rette $T'A'$ e $T'B'$. Siccome poi ogni sistema contiene in tutto sei coniche degenerate in coppie di rette, così nel predetto sistema vi saranno, oltre a le tracce $T'A'$, $T'B'$ dei piani tangenti in P , ancora le altre dieci tangenti doppie; e però, in virtù del principio enunciato nell'introduzione (applicabile in questo caso perchè tutte le tangenti doppie di una curva di 4° ordine possono esser reali senza che sia soddisfatta alcuna equazione di condizione), potremo considerare come dimostrato in generale il teorema seguente:

Per un punto P della conica doppia si possono condurre dieci piani secanti ciascuno la superficie in due coniche; se si proietta la superficie da P , le tracce di questi piani si distribuiscono in coppie per formare delle coniche quadritangenti al contorno della superficie e appartenenti a lo stesso sistema di cui fa parte la conica costituita da le tracce dei due piani tangenti in P .

Nello stesso tempo concludiamo che: *la superficie contiene sedici rette; qualunque piano per una di esse seca ancora la superficie in una curva di 3° ordine con punto doppio.*

5. *Teorema di Kummer.* Dal n.° 4 scaturisce che, per un punto qualunque della conica doppia, si possono condurre dieci piani, ognuno dei quali sechi la superficie in due coniche. Le proiezioni di queste coniche da un punto fisso P della conica doppia saranno coniche quadritangenti al contorno. Ora, l'insieme delle coniche quadritangenti a una curva di 4° ordine si divide in 63 distinti sistemi colle caratteristiche $\mu = 2$, $\nu = 4$, cioè in 63 sistemi tali che in ognuno di essi vi sono due coniche passanti per un punto arbitrario del piano e quattro tangenti a una retta arbitraria del piano stesso. Quindi le predette proiezioni si devono distribuire in un certo numero y di questi sistemi, e ognuno di questi y sistemi sarà proiezione di un certo sistema di coniche della superficie. Vogliamo cercare l'involuppo dei piani delle coniche appartenenti ad uno di questi sistemi.

Siccome un punto qualunque del piano di proiezione, è imagine di due punti della superficie, così per un punto di questa passerà una conica del sistema. Però, il piano di questa secherà ancora la superficie in una conica. Ora, se questa appartenesse a lo stesso sistema dell'altra, per un punto qualunque della superficie si potrebbe condurre un solo piano tangente all'involuppo cercato, e però questo si ridurrebbe ad una retta, asse di un fascio di piani secanti ciascuno la superficie in una coppia di coniche; tutte le coniche del sistema dovrebbero secare l'asse del fascio in due punti fissi — perchè altrimenti questo asse apparterebbe alla superficie — e in conseguenza le proiezioni loro passerebbero per due punti fissi, il che ripugna con l'ipotesi fatta che il contorno sia una curva di 4° ordine generale.

Segue da ciò, che i piani tangenti dell'involuppo secano ancora la data superficie in un'altra serie di coniche (che non può essere costituita di parecchi sistemi, perchè il dato sistema e l'involuppo sono semplici). Per un punto qualunque della superficie passa dunque una conica di ciascuno dei due sistemi che hanno lo stesso involuppo, cioè due piani tangenti dell'involuppo. Questo risulta quindi di 2^a classe, e però è un cono.

Siccome questo cono non contiene la conica doppia, così da un punto qualunque P di questa si potranno condurre due piani tangenti al cono, e siccome, in virtù del n.° 4, per P passano dieci tali piani, così devono esservi cinque coni e il numero y dei sistemi deve esser 10. Si ha dunque il teorema:

L'involuppo dei piani secanti la data superficie in coppie di coniche, consta di cinque coni di 2° ordine. Li chiameremo Coni di Kummer dal nome dello scopritore di questo teorema. Ogni piano tangente di un cono di Kummer seca la superficie in due coniche appartenenti a sistemi diversi. Diremo conjugati due sistemi di coniche della superficie i cui piani toccano lo stesso cono di KUMMER.

6. *Posizione delle rette della superficie rispetto ai coni di Kummer.* In uno qualunque dei dieci sistemi che si ottengono proiettando un sistema di coniche della superficie, due delle sei coniche degenerate in coppie di rette, rappresentano due coniche della superficie passanti per il centro di proiezione. I punti di una tal conica posti infinitamente vicini a P sono determinati da la traccia di uno dei piani tangenti in P ; gli altri lo sono da la traccia di un piano tangente condotto da P al cono di KUMMER corrispondente al sistema considerato. Delle due paia di coppie di rette che si possono formare combinando la traccia di uno dei due piani tangenti in P con la traccia di un piano tangente a quel cono passante per P , uno appartiene a l'uno, l'altro a l'altro

di quei due sistemi di coniche quadritangenti che sono proiezioni di due sistemi conjugati della superficie.

Le altre otto coppie di tangenti doppie, ognuna delle quali deve riguardarsi come una conica d'uno dei due sistemi, debbono essere proiezioni di coppie di rette della superficie poste in piani tangenti a quel cono. Siccome i due sistemi non possono aver comuni che le quattro rette che nominammo per prime (*), così noi otterremo in tal modo tutte sedici le rette della superficie. Dunque:

Uno qualunque dei cinque coni di Kummer è toccato da le sedici rette della superficie; queste stanno a due a due in otto piani tangenti ad uno di quelli.

Questo teorema mostra che ognuna delle sedici rette della superficie ne incontra altre cinque, quelle, cioè, che stanno con essa in uno stesso piano tangente di un cono di KUMMER.

Come già OSSERVARONO GEISER e DARBOUX, le proprietà caratteristiche della configurazione formata da le rette della superficie, si possono riassumere nel teorema seguente:

Le sedici rette della superficie, per quanto riguarda le loro mutue intersezioni, hanno le stesse proprietà delle sedici rette della superficie generale di 3° ordine non secanti una 17^a di esse.

Il legame che viene così stabilito fra le nostre superficie e quelle del 3° ordine, si rende manifesto in modo naturalissimo studiando la proiezione di cui ci servimmo; infatti, è facile vedere che questa si ottiene anche proiettando una superficie di 3° ordine φ_3 da uno de'suoi punti. Allora le tracce dei due piani tangenti in P a la superficie di 4° ordine si mutano nella traccia del piano tangente a φ_3 nel novello centro di proiezione e nella proiezione di una retta l della superficie; le dieci tracce dei piani tangenti condotti da P ai coni di KUMMER divengono le proiezioni delle rette di φ_3 che secano l ; le proiezioni delle sedici rette della superficie di 4° ordine coincidono con le proiezioni delle rette di φ_3 che non incontrano l ; finalmente le condizioni per l'intersezione *effettiva* di queste rette rimarranno, come si vede facilmente, le stesse. Aggiungeremo ancora che la stessa trasformazione col mezzo della quale GEISER dimostra il precedente teorema, mette in evidenza che le due superficie hanno la stessa proiezione; e questo fatto è la base del precedente metodo di dimostrazione.

(*) Oltre ai due indicati, vi è un terzo modo di distribuire in coppie queste rette; il sistema di coniche che così resta determinato è quello di cui è fatto cenno nel n.° 4.

7. *Intersezioni fra coniche della superficie.* Siccome per ogni punto della superficie non posto su la curva doppia si può condurre una conica di ciascuno dei dieci sistemi (n.º 5), così è evidente che due coniche dello stesso sistema non possono secarsi, supponendo però che non sientino le intersezioni che possono aver luogo in punti della curva doppia e che scompajono facendo un cambiamento infinitesimo in una di esse. Per conseguenza, i due punti in cui una di quelle coniche incontra un altro piano tangente del medesimo cono di KUMMER devono appartenere a la conica del sistema conjugato:

Le coniche della superficie appartenenti a uno stesso sistema non s'incontrano. Le coniche di due sistemi conjugati s'incontrano in due punti.

Le intersezioni di due coniche (k) , (l) i cui piani toccano differenti coni di KUMMER si potrebbero determinare servendosi di una figura, il cui contorno abbia reali le 28 tangenti doppie e, quindi, i 63 sistemi di coniche quadritangenti. Però questo studio si può semplificare limitandosi a considerare il caso in cui una, (l) , delle due coniche è costituita di due rette a e b . Quanto si dice in questo caso riguardo a le intersezioni di questa conica, deve sussistere per infinite altre dello stesso sistema (perchè un punto d'intersezione di (l) con il piano di (k) non può saltare improvvisamente da l'una a l'altra delle coniche in cui quel piano seca la superficie), e quindi varrà per tutto il sistema a cui appartiene (l) .

Ora, poichè le rette a e b si secano senza che il loro piano tocchi quello stesso cono di KUMMER che tocca il piano di (k) , esse faranno parte di coniche di due sistemi conjugati corrispondenti a lo stesso cono di KUMMER. Perciò una secherà (k) , l'altra no. Dunque:

Due coniche della superficie i cui piani non toccano lo stesso cono di Kummer s'incontrano in un punto.

Se (k') è l'altra conica della superficie che sta con (k) in un piano, ed (l') quella che sta con (l) in un piano, i quattro punti d'intersezione della superficie con la retta in cui si secano quei piani, sono le intersezioni di (k) ed (l) , di (k) ed (l') , di (k') ed (l) , e di (k') ed (l') .

8. *Corollarî del metodo di dimostrazione esposto nei n.º 4, 5 e 6.* Applicando dei teoremi noti relativi a le coniche quadritangenti di una curva di 4° ordine, ai sistemi considerati nei numeri precedenti si trovano dei teoremi relativi alla superficie di cui ci occupiamo. Così, dalla proposizione: *i punti di contatto di due coniche dello stesso sistema stanno su un'altra conica*, si ottiene ciò che segue:

Le due coppie di tangenti principali in un punto P della conica doppia

e i punti di contatto della superficie con due piani tangenti doppi passanti per P e toccanti lo stesso cono di KUMMER, stanno su uno stesso cono quadrico.

Un punto P della conica doppia è vertice di un cono quadrico passante per gli otto punti in cui i piani tangenti condotti da P a due coni di KUMMER toccano la superficie. Per le rette che vanno da un punto P della conica doppia ai punti di contatto della superficie con i piani condotti per P e per le rette della superficie che stanno in uno stesso piano tangente ad un cono di KUMMER, si possono far passare: 1.° tre coni quadrici, ognuno dei quali contenga i punti di contatto della superficie con piani condotti per P e per un'altra coppia di rette della superficie situate in uno stesso piano tangente a quel cono di KUMMER, 2.° due coni quadrici a ognuno dei quali appartengano le due tangenti principali poste in uno de' piani tangenti in P a la superficie e i punti di contatto della superficie con uno dei piani tangenti condotti da P a quello stesso cono di KUMMER.

Dal teorema: *le sei intersezioni delle coppie di tangenti che costituiscono coniche dello stesso sistema stanno su una conica*, si deduce, fra le altre, la seguente proprietà: la tangente in un punto P della conica doppia e le congiungenti di P con i vertici dei cinque coni di KUMMER sono generatrici di un cono di 2° ordine. Considerando l'intersezione di due consecutivi di tali coni, si vede che la cubica gobba passante per i vertici dei coni di KUMMER e per il punto P della conica doppia, toccherà questa in P .

Viceversa, da la esposta applicazione stereometrica della teoria delle curve di 4° ordine, si possono dedurre dei *teoremi su queste curve*. I sistemi costituiti da le proiezioni di coniche della superficie appartenenti a due serie poste nei piani tangenti di uno stesso cono di KUMMER, saranno due sistemi di coniche quadritangenti al contorno aventi comuni quattro tangenti doppie distribuite in vario modo in due coppie. Nel terzo di tali modi, le tangenti doppie della stessa coppia si secano nella proiezione K' del vertice del cono di KUMMER e nella traccia T' della tangente a la conica doppia nel centro di proiezione. Ora, se si considera una conica in ognuno di quei due sistemi, due dei loro punti d'incontro saranno proiezioni di intersezioni effettive di due coniche dello spazio poste in piani tangenti al cono di KUMMER, e quindi la congiungente di essi, che è la proiezione dell'intersezione dei due piani tangenti, passerà per K' . L'altra corda comune di quelle due coniche passerà per T' — il che si vede facendo passare la proiezione della conica doppia (la quale proiezione può essere una retta qualunque per T') per uno, M' , dei due punti d'intersezione posti su quella stessa corda comune; allora i due piani tangenti avranno ancora co-

mune il punto della conica doppia che è proiettato in M' , epperò coincideranno (*) e il quarto punto d'intersezione delle due coniche della superficie cadrà in conseguenza su la conica doppia. — Con ciò resta dimostrato il teorema seguente:

Due opposte fra le corde comuni a due coniche quadritangenti di una curva piana di 4° ordine e appartenenti a due sistemi aventi comuni quattro tangenti doppie accoppiate in varî modi, passano una per l'una, l'altra per l'altra delle due intersezioni di quelle due coppie di tangenti doppie che non possono costituire una conica di alcuno di quei due sistemi.

Non ci fermeremo a l'applicazione che si potrebbe fare di questa proposizione a la superficie che studiamo; piuttosto osserveremo che essa guida a la notissima proposizione planimetrica (**):

Oltre a le 28 tangenti doppie di una curva di 4° ordine, vi sono 5040 rette di cui ciascuna congiunge tre punti d'intersezione di tangenti doppie; per ogni punto d'intersezione di due tangenti doppie passano 40 di queste rette.

9. *Curve della superficie.* Una curva algebrica del piano di proiezione è in generale imagine di una curva gobba semplice, i cui punti sono a coppie proiettati in uno stesso punto. Però, nello studio delle curve più semplici appartenenti a la superficie, presentano un grande interesse le curve del piano di proiezione le cui corrispondenti curve si spezzano in due aventi proiezioni coincidenti. Una condizione necessaria affinchè una curva del piano di proiezione sia di tale specie è che essa tocchi il contorno in tutti i punti (reali o immaginari) che ha comuni con questo (n.° 3). Inoltre questa condizione è anche *sufficiente* quando quella curva è *razionale* (unicursale o di genere 0); ciò si deduce dal fatto che il genere della curva proiettata è allora -1 (**).

Non sono in grado di indicare sotto forma completamente generale le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una curva sia proiezione comune di due distinte curve della superficie (****); tuttavia non è difficile trovarle nei casi

(*) La corda comune passante per K' sarà proiezione della generatrice di contatto.

(**) Vedi SALMON-FIEDLER, *Höhere ebene Curven*, pag. 281. Il teorema generale esposto nel testo si può dimostrare analiticamente con un ragionamento analogo a quello con cui il SALMON dimostra la citata proposizione più particolare sulle coppie di tangenti doppie.

(****) Questo risultato — che del resto è contenuto in una formola generale che io pubblicai nel 3° vol. dei *Mathem. Annalen*, pag. 323 — si può anche ottenere mediante una numerazione di punti doppi.

(****) Fra i risultati più particolari citerò i seguenti: Se una curva di 3° ordine del piano di proiezione, priva di punti doppi, è imagine di due curve, essa apparterrà ad uno dei 28 sistemi (triplicemente infiniti) di curve di 3° ordine tangenti in sei punti al contorno

più semplici in cui si tratti di curve d'ordine non molto elevato. Ma siccome la determinazione di tali curve della superficie fu fatta altrimenti e più completamente da CLEBSCH nella Memoria che citammo nell'Introduzione, e siccome noi esporremo più innanzi un metodo nuovo e molto comodo per fare la stessa ricerca, così ci limitiamo a mostrare il profitto che si può trarre da l'esposto modo di procedere servendocene per trovare le cubiche gobbe della superficie.

Una tal curva, come qualunque curva della superficie, deve incontrare la conica doppia. Noi sceglieremo per centro di proiezione uno, P , dei punti d'intersezione. La curva sarà allora proiettata in una conica avente quattro contatti con il contorno. Ora, qualunque conica quadritangente, essendo di genere zero, sarà proiezione di due curve che del pari saranno di genere zero (affinchè il genere complessivo della curva proiettata sia -1) e che quindi dovranno esser formate ciascuna di un sol ramo. Basta dunque — come per le curve proiettate in tangenti doppie — che cerchiamo quante volte ognuna di queste curve passa per P ; aggiungendo due a questi numeri, troveremo l'ordine di queste curve. Dobbiamo dunque trovare delle coniche tali che, delle quattro intersezioni d'una di esse con le tracce dei piani tangenti in P , tre siano proiezioni di punti (coincidenti in P e) appartenenti a una delle due curve obiettive e la quarta sia proiezione di un punto dell'altra. Ora, considerando i 63 sistemi di coniche quadritangenti, si dimostra che ciò non è possibile se non per uno dei 32 sistemi ognuno dei quali è determinato da la traccia di un piano tangente in P e da la proiezione di una delle sedici rette l e le cui altre cinque coniche con punto doppio sono formate da la traccia di un piano tangente condotto da P a un cono di KUMMER e da la proiezione della retta della superficie posta con l in uno stesso piano tangente a quel cono di KUMMER (*). Per P passano dunque 32 sistemi di cubiche gobbe della superficie;

e i cui punti di contatto stanno su una conica passante per i punti di contatto del contorno con una sua tangente doppia; una curva di 4° ordine senza punti doppi deve appartenere ad uno dei sistemi (sei volte infiniti) di curve tangenti in otto punti e i cui punti di contatto stanno su una conica; e una curva di ordine superiore al quarto senza punti doppi non può esser proiezione di due differenti curve. I predetti sistemi di curve di 3° e 4° ordine tangenti in 6 od 8 punti ad una curva di 4° ordine non sono gli unici esistenti. (Vedi HESSE e STEINER nel vol. 49 del Giornale di CRELLE e CLEBSCH nel vol. 63 del Giornale di BORCHARDT.)

(*) Si vede subito che la coppia di piani condotti per P e per una di quelle coppie di rette, seca la superficie in una curva di 3° ordine composta di una retta e una conica, e in una curva di 5° ordine composta di una conica e di una curva di 3° ordine. Che gli altri 31 sistemi di coniche (di cui già nel n.° 5 considerammo quei 10 tali che le curve corrispondenti sono composte ciascuna di una conica e di una curva di 6° ordine) non si debbano qui considerare, si vede facilmente tenendo presenti le loro coniche degeneri.

una curva qualunque appartenente ad uno di essi è determinata da un punto Q della superficie (cfr. n.° 5). Però questi sistemi sono accoppiati in modo che si passa da l'uno a l'altro dei sistemi di una coppia scambiando fra loro i due piani tangenti in P . Se si fa ora muovere P sulla conica doppia sinchè (vedi il seguente numero) s'incontrino i punti in cui due piani tangenti coincidono, in cui si connettono le due falde della superficie, uno dei due sistemi di una coppia si muterà nell'altro. I 16 sistemi che vengono così formati dai 32 precedenti sono fra loro distinti; ognuno corrisponde, nel senso indicato, a una delle rette della superficie. Q e un punto infinitamente vicino a P su una delle due falde della superficie passanti per P , determinano una curva del sistema; cioè:

A la superficie appartengono 16 sistemi di cubiche gobbe. Una curva di uno qualunque di essi è determinata da due suoi punti. A ognuno dei sistemi appartiene una serie infinita di cubiche piane con punto doppio.

La nostra rappresentazione di queste curve si presta anche per determinare il numero delle loro intersezioni effettive con le rette della superficie. Essa ha il vantaggio sul metodo di CLEBSCH di condurre immediatamente al risultato che i 16 predetti sistemi si determinano tutti nello stesso modo.

Che, oltre a queste curve di 3° ordine, non ve ne siano di quelle che passino per certi determinati punti della conica doppia si vede, sia ponendo il punto P di questa in tutte le posizioni possibili a cui corrisponde una forma singolare del contorno, sia collocando P in una posizione arbitraria nel mentre si studiano le curve aventi per immagini curve di 3° ordine con punto doppio.

10. *Punti cuspidali.* Il cono circoscritto avente il vertice nel punto P della conica doppia seca il piano di questa in quattro generatrici i cui punti di contatto debbono coincidere con i loro punti d'intersezione con la conica doppia diversi da P . In ognuno di questi punti d'intersezione vi sono così due intersezioni coincidenti, che appartengono a la stessa falda e quindi sono due punti consecutivi della superficie. Uno di tali punti deve esser dunque uno di quelli in cui le due falde di superficie che s'intersecano nella conica doppia vengono a connettersi, in cui, quindi, quando la conica doppia è reale, i due piani tangenti coincidono per divenir poi immaginari e ove la curva da l'essere intersezione di due falde reali passa a divenire curva isolata. Questi punti, che CLEBSCH chiama *punti cuspidali*, sono gli stessi che CAYLEY chiamò *Pinch-points* (*). La superficie che studiamo contiene dunque *quattro* di questi punti.

(*) Nella mia Memoria *Su le superficie reciproche*, pubblicata nel vol. 10° dei Math. Annalen, io ho ampiamente studiate (pag. 468-479) le proprietà di questi punti. Fra quest.

Proiettando la superficie da un punto cuspidale, si ottiene come contorno una curva avente un punto doppio nella traccia della tangente singolare (*). Le tracce dei due piani tangenti a la superficie nel centro di proiezione coincidono in una delle sei tangenti che passano pel punto doppio del contorno. Una qualunque delle altre cinque diviene traccia di un piano in cui vennero a coincidere due piani tangenti doppi. Le coppie di tangenti doppie a una curva di 4° ordine che vengono a coincidere quando essa acquista un punto doppio costituiscono delle coniche dello stesso sistema; in virtù del n.° 4 gli altri cinque piani tocchanno quindi lo stesso cono di KUMMER.

Giungiamo in tal modo a la conclusione che tutti cinque i coni di KUMMER passano per i punti cuspidali. I piani tangenti a i coni di KUMMER in questi punti secheranno ciascuno la superficie in due coniche fra loro tangenti (ciò segue da quanto si dimostrò al n.° 5).

11. *Altra dimostrazione del teorema di Kummer.* Che i piani tangenti (coincidenti) in un punto cuspidale debbano secare la superficie in due coniche, si può anche dedurre dal fatto che, in generale, le rette della superficie (**), in virtù del n.° 2, non passano per alcun punto cuspidale. Servendosi poi del n.° 10 si può trovare che l'involuppo dei piani secanti la superficie in due coniche è (almeno) di 10^a classe e che passa cinque volte per ciascuno dei punti cuspidali. Esso non può secare la conica doppia della superficie in altri punti — ciò si vede tentando di assumere un altro di questi punti d'intersezione, supposto che esista, come centro di proiezione — onde è di 10° ordine. La sua intersezione con il piano della conica doppia è per conseguenza una curva di 10° ordine con quattro punti quintupli, ha comuni 21 punti colla conica deter-

citerò le seguenti, la cui dimostrazione è semplice, specialmente attenendosi a la superficie di cui trattiamo: Qualunque sezione piana della superficie passante per un punto cuspidale ha ivi una cuspidale; esiste un fascio di piani passanti per quel punto in ognuno dei quali questa cuspidale si muta in un punto di contatto di due rami; i piani di questo fascio toccano tutti la superficie nel punto cuspidale, epperò ogni cono circoscritto a la superficie passa per quel punto; il cono circoscritto, con il vertice in un punto cuspidale, ha per generatrice doppia l'asse del predetto fascio, asse che si chiama *tangente singolare*. Quest'ultima proprietà si dimostra facendo uscire dal punto cuspidale delle tangenti a le varie sezioni piane passanti per esso; ma essa presentasi anche come l'unica possibile spiegazione del fatto che i piani tangenti a le due falde della superficie che erano piani tangenti doppi del cono circoscritto avente il vertice in un punto qualunque della curva doppia, vengano a coincidere.

(*) Vedi la nota precedente.

(**) È da notare che noi qui facciamo uso, oltrechè dei n.° 1, 2, 10, solo di quelle proprietà contenute nel n.° 4 che servono a dimostrare esservi al massimo 26 rette.

minata dai punti cuspidali e da un altro punto della traccia dell'inviluppo sul piano della conica doppia, dunque deve comporsi di cinque coniche (*).

Che l'inviluppo sia un sistema di coni segue dal fatto che il suo spigolo di regresso, se esistesse, dovrebbe secare il piano della conica doppia in cuspidi della intersezione che già determinammo; ora, la predetta intersezione non ha cuspidi, nè i punti quintupli possono risultare da la sovrapposizione di punti singolari fra cui si trovino delle cuspidi, perchè i rami che s'incrociano in essi provengono da l'intersezione di un piano con cinque falde distinte della sviluppabile.

Ma che il detto inviluppo sia costituito da coni si vede anche immediatamente cercando le intersezioni del (supposto) suo spigolo di regresso con la data superficie. Infatti uno di questi punti deve essere uno di quelli in cui il corrispondente piano tangente dell'inviluppo tocca la superficie data, perchè altrimenti questo piano tangente dovrebbe toccare questa superficie lungo una retta, e però due rette della superficie coinciderebbero. Ma se uno dei punti di contatto d'un piano tangente stesse su lo spigolo di regresso dell'inviluppo, giacesse in conseguenza su due generatrici consecutive di questo, ne seguirebbe che esso avrebbe nell'altro suo punto di tangenza un contatto stazionario, onde quest'ultimo sarebbe una cuspidale della intersezione della superficie inviluppo con il piano della conica doppia. Ora un tal punto non può trovarsi su una curva composta di coniche. Dunque lo spigolo di regresso è d'ordine 0.

Dopo avere così dimostrato che l'inviluppo consta di coni, si dedurrà, dal n.º 2, che uno qualunque di questi non può essere d'ordine superiore al secondo, perchè altrimenti per uno stesso punto doppio passerebbero più di due tangenti doppie del contorno della superficie data.

II.

Proprietà generali ottenute servendosi di un cono di Kummer.

12. *Proiezione della superficie dal vertice d'un cono di Kummer.* Siccome qualunque generatrice di un cono di KUMMER tocca due volte la superficie, così il numero delle tangenti che si possono condurre, oltre le due tangenti doppie,

(*) Questa dimostrazione non differisce sostanzialmente da quella che io esposi a pag. 540 della mia citata Memoria *Su le superficie reciproche*, in cui io mi appoggio unicamente su la determinazione dei numeri di certe singolarità. La sola differenza consiste in ciò che io allora applicavo delle relazioni generali fra questi numeri.

dal vertice T di un cono di KUMMER a la linea d'intersezione della superficie con un piano passante per T è 4, perchè tale curva d'intersezione, avendo due punti doppi, è di 8ª classe. Se, dunque, si proietta da T la superficie, il contorno sarà formato da la traccia (s_2) del cono di KUMMER contata due volte e da una curva di 4° ordine (k_4). In tal caso ogni punto del piano di proiezione è immagine di quattro punti della superficie.

La classe di (k_4) si trova determinando il numero delle tangenti che essa ha comuni con (s_2). Notiamo perciò anzitutto che queste due curve debbono toccarsi in tutti i punti che esse hanno comuni: infatti il piano proiettante che passa per la tangente a (s_2) in un punto Q , seca la superficie in due coniche aventi due punti d'intersezione su la retta TQ , cioè i due punti di contatto del piano tangente doppio, e le quattro tangenti condotte da T a quelle coniche sono generatrici del cono $T(k_4)$; ora, se una di queste coincide con TQ , entrambe quelle coniche debbono toccarla e però anche una generatrice di $T(k_4)$ coincide con TQ . (k_4) e (s_2) si toccano quindi in quattro punti; le tangenti in questi equivalgono a $2 \cdot 4 = 8$ tangenti comuni. Le altre tangenti comuni debbono esser tracce di piani secanti la superficie in due coniche una delle quali sia composta di due rette. Otto di tali piani passano per T ; delle corrispondenti coniche degeneri quattro appartengono a l'uno, quattro a l'altro dei due sistemi di coniche poste in piani tangenti al cono di KUMMER considerato. Per conseguenza (k_4) ha in totale comuni sedici tangenti con la conica (s_2), e però è di 8ª classe ed ha due punti doppi.

Dunque per T si possono condurre, oltre a le generatrici del cono di Kummer $T(s_2)$, due tangenti doppie della superficie.

La curva (k_4) ha otto tangenti doppie; esse sono le tracce dei piani tangenti condotti da T a gli altri cono di KUMMER e saranno, per conseguenza, accoppiate per formare quattro coniche quadritangenti degeneri di (k_4). Oltre a queste e a (s_2), si ha un'altra conica quadritangente, cioè la proiezione della conica doppia; ciò risulta notando che, se la conica doppia ha comune un punto R con $T(k_4)$, uno dei piani tangenti in R alla superficie toccherà $T(k_4)$ lungo TR (vedi n.º 13). Può interessare di sapere come le sei coniche testè nominate si distribuiscano nei varî sistemi di coniche quadritangenti; gli è ciò che ora determineremo.

Una curva di 4° ordine con due punti doppi ha tredici sistemi di coniche quadritangenti. Dodici di essi hanno le caratteristiche $\mu = 2$, $\nu = 4$; e a ognuno di essi appartengono due coppie di tangenti doppie e due coniche costituite ciascuna di due tangenti passanti per un punto doppio (ognuna di queste ultime

deve contarsi due volte nella teoria delle caratteristiche). Al tredicesimo appartengono quattro coppie di tangenti doppie ed una conica infinitamente schiacciata, avente per vertici i punti doppi; le caratteristiche di questo sistema sono $\mu = 2$, $\nu = 3$ (*).

Ora, da l'esposta distribuzione dei vari sistemi di coniche della superficie risulta che fra uno qualunque dei coni di KUMMER e gli altri quattro passano le stesse relazioni (dimodochè, quando uno dei vertici è conosciuto, gli altri quattro devono determinarsi mediante un'equazione irriducibile). Questo fatto non può conciliarsi con altra ipotesi se non con quella che tutte le sei predette coniche quadritangenti appartengano a l'ultimo nominato dei tredici sistemi (cosa che del resto verrà dimostrata altrimenti nei n.º 13 e 15).

Le considerazioni testè esposte, potrebbero porgere occasione di far conoscere varie proprietà dello stesso genere di quelle contenute nel n.º 8: noi però non ci arresteremo a farlo e invece riassumeremo nel teorema seguente quanto ora dimostrarremo:

Quando si proietta la superficie dal vertice di un cono di Kummer, il contorno di essa consta della traccia (s_2) di questo cono, contata due volte, e di una curva di 4° ordine (k_4) con due punti doppi toccata quattro volte sia da la predetta traccia, che dà la proiezione (d_2) della conica doppia. Queste due coniche e le tracce delle coppie di piani tangenti degli altri coni di Kummer che passano pel centro di proiezione, appartengono a quel sistema singolare di coniche quadritangenti i cui punti di contatto stanno in una stessa conica con i due punti doppi di (k_4). In ciascuna delle otto tangenti comuni a (s_2) e (k_4), sono proiettate due rette della superficie.

13. *Costruzione della superficie.* Vi è una costruzione per punti della nostra superficie che sta in un legame strettissimo con la proiezione indicata al n.º 12 e che noi ora esporremo, perchè essa serve a dare un'idea molto chiara di varie proprietà di essa superficie.

Per una retta qualunque uscente dal vertice T di un cono di KUMMER si possono condurre a questo due piani tangenti; ognuno di essi seca la superficie in due coniche appartenenti una a l'uno, l'altra a l'altro dei due sistemi congiugati relativi a quel cono. Le quattro intersezioni di quella retta con la superficie si distribuiscono in due coppie M_1M_2 e $M'_1M'_2$, ognuna delle quali (in grazia di ciò che si disse al n.º 7) è formata delle intersezioni di due coniche

(*) Io mi sono occupato di questo sistema singolare in una Memoria inserita nel Bollettino (« Oversigter ») della R. Accademia danese, anno 1879.

appartenenti una a l'uno, l'altra a l'altro dei predetti sistemi. Ora, se noi chiamiamo S il conjugato armonico di T rispetto a M_1M_2 ed S' il conjugato armonico di T rispetto a $M'_1M'_2$, il luogo geometrico dei punti S, S' sarà una quadrica (σ_2). Infatti su una retta per T non si trovano altri punti del luogo che i punti S, S' corrispondenti a quella retta e quelli che, appartenendo ad altre rette uscenti da T , coincidono con T . Ma è facile vedere che di punti di quest'ultima specie non se ne trovano: e in vero, se S coincidesse con T dovrebbe accadere altrettanto di M_1 o di M_2 , cioè T stare su la superficie data, il che non avviene.

Siccome S e S' coincidono quando i due punti M_1, M_2 coincidono con i due punti M'_1, M'_2 , così il cono di KUMMER dev'essere il cono di vertice T circoscritto a la superficie (σ_2).

Noi possiamo ora anche determinare il luogo geometrico delle coppie di punti D, D' armoniche con entrambe le coppie M_1M_2 e $M'_1M'_2$. Su una retta condotta ad arbitrio per T si trovano due tali punti, oltre a quelli che possono coincidere con T . Ora, se per una determinata retta condotta per T , D coincide con T , D' coinciderà con S e con S' . Ma noi vedemmo che questi ultimi non possono coincidere se non quando M_1M_2 coincidono con $M'_1M'_2$. Però in questo caso, non solo T , ma qualunque altro punto di quella retta può riguardarsi come un punto D , e quindi quella retta apparterrà completamente al luogo. Questo è dunque formato del cono di KUMMER e di una quadrica (δ_2) (*) la quale è in realtà il luogo che volevamo determinare.

Quando si conoscono le superficie (δ_2) e (σ_2), si possono determinare, su qualunque retta condotta per T , prima i punti S, S', D, D' come intersezioni della retta con queste superficie, e poi i punti $M_1M_2, M'_1M'_2$ come punti doppî delle involuzioni determinate da la coppia DD' e da una delle due coppie TS, TS' .

Ora, se M_1 deve coincidere con M'_1 (o M'_2) senza che coincidano gli altri due punti M , debbono coincidere fra loro in quello stesso punto D e D' . Ne segue che la conica doppia della superficie è la curva di contatto del cono di vertice T circoscritto a (δ_2).

(*) Bisogna però notare che, per render completa la precedente dimostrazione, sarebbe necessario esaminare se, quando la retta uscente da T tende a divenir generatrice del cono di KUMMER, D e D' hanno per posizione limite T . Noi ci esoneriamo da questa ricerca, perchè si può dimostrare analiticamente che l'intersezione di (δ_2) con un piano condotto ad arbitrio per T è una conica. Ciò del resto fu dimostrato dal sig. dott. J. PETERSEN (v. « Tidsskrift for Mathematik » 1874) in un lavoro ove egli espone una costruzione delle curve di 4° ordine con due punti doppî, trovata da lui e da me, la quale è identica a quella di cui noi qui ci serviamo per le superficie di 4° ordine con conica doppia.

Invece, se due punti $M_1 M_2$ della stessa coppia coincidono, debbono coincidere nello stesso punto tanto S quanto D . Dunque, la curva di contatto della data superficie con il cono circoscritto $T(k_4)$, è l'intersezione delle due superficie (σ_2) e (δ_2) . La curva (k_4) (vedi n.° 12) è proiezione di questa curva gobba (r_4) : le coniche appartenenti al sistema singolare di coniche quadritangenti, sono i contorni di quadriche passanti per essa; e i punti doppi di (k_4) sono le tracce delle generatrici, passanti per T , della quadrica passante per T e appartenente al fascio di base (r_4) .

Notiamo ancora che la superficie (σ_2) potrebbe anche definirsi come luogo delle polari di T rispetto a le coniche della superficie poste in piani tangenti al cono di KUMMER.

Viceversa se si prendono ad arbitrio due quadriche (σ_2) e (δ_2) e un punto T , e si eseguisce la costruzione testè esposta, si trova che essa conduce ad una superficie di 4° ordine (*). La stessa costruzione della superficie mette in evidenza le esposte relazioni fra T , (σ_2) e (δ_2) .

Enunciando prima il teorema reciproco, potremo concludere:

Dato un punto T e due quadriche (σ_2) e (δ_2) , se una retta mobile attorno a T seca queste rispettivamente in S, S' e D, D' , e si determinano due coppie di punti $M_1 M_2$ e $M'_1 M'_2$ conjugate armonicamente entrambe rispetto a DD' e di più la prima rispetto a TS e la seconda rispetto a TS' , il luogo geometrico dei punti M è una superficie di 4° ordine, avente per conica doppia la curva di contatto di (δ_2) con il cono di vertice T ad essa circoscritto e per cono di Kummer il cono circoscritto da T a (σ_2) , e che ha un semplice contatto, lungo la curva d'intersezione (r_4) di (σ_2) e (δ_2) , con il cono proiettante da T questa curva.

Viceversa: qualunque superficie di 4° ordine con conica doppia può generarsi, con il metodo ora descritto, in cinque modi (**) (corrispondenti ai cinque coni di KUMMER).

14. *Rappresentazione della superficie su una quadrica doppia.* La precedente costruzione porge una rappresentazione della superficie, nuova e abbastanza espressiva. A qualunque punto della superficie (σ_2) corrispondono due

(*) Per giungere a questa conclusione, basta contare il numero dei punti del luogo posti su una retta qualunque uscente da T .

(**) Se (δ_2) è una sfera col centro in T , la conica doppia diviene il cerchio immaginario a l'infinito, epperò la superficie è una ciclide; allora (δ_2) è una sua sfera direttrice e (σ_2) è la polare reciproca rispetto a la detta sfera della corrispondente « superficie deferente ». La costruzione della nostra superficie si riduce in questo caso a la costruzione della ciclide che si trova esposta a pag. 122 dell'opera di DARBOUX, *Sur une classe etc.*

punti M_1, M_2 della superficie di 4° ordine, i quali possono dirsi rappresentati da S . La rappresentazione si ottiene mediante una proiezione da T . Converteremo che, dei quattro punti M che sono proiettati nei punti S, S' di (σ_2) , due abbiano per immagini S e due S' . Siccome i due punti M_1, M_2 che sono proiettati in S separano S e T , così si può immaginare ognuno di essi rappresentato su quella faccia di (σ_2) nella quale si trova, rispetto ad S , il segmento della retta indefinita ST che lo contiene. Le rappresentazioni *su le facce* di (σ_2) si *connettono* fra loro lungo la curva gobba (r_1) ; questa separa le parti di (σ_2) che corrispondono a punti reali da quelle che corrispondono a punti immaginari e quindi diviene *contorno* della rappresentazione. Invece le rappresentazioni *cambieranno parte*, e però s'intersecheranno, quando si passerà su (σ_2) , per la curva di contatto del cono di KUMMER $T'(s_2)$; tale curva fa dunque lo stesso ufficio della proiezione della *curva doppia* nella precedente rappresentazione della superficie su un piano doppio. Siccome poi, la conica doppia della superficie è intersezione di parti non aventi la stessa rappresentazione (ma di cui una è rappresentata in punti S , l'altra in punti S'), così essa non ha alcun ufficio speciale nella presente rappresentazione.

Facendo ora una proiezione stereografica di (σ_2) si potrebbe ottenere una nuova rappresentazione della superficie di 4° ordine su un piano doppio; ma siccome in questa vi sarebbero dei *punti fondamentali*, così essa non sarebbe abbastanza espressiva. La proiezione fatta dal punto T della proiezione su (σ_2) , coincide con la proiezione della superficie esposta nel n.° 12.

La rappresentazione di cui ci stiamo occupando, porge senza dubbio il mezzo più comodo per studiare le curve della superficie. Una curva d'ordine n di (σ_2) è immagine d'una curva d'ordine $2n$ della superficie di cui trattiamo e avente infinite bisecanti le quali passano per T e costituiscono un cono d'ordine n . Essa insegna anche a determinare delle superficie secanti la data in questa curva: infatti queste superficie si otterranno sostituendo a la quadrica (σ_2) adoperata nella costruzione del n.° 13, delle superficie incontranti (σ_2) lungo la curva immagine.

La suddetta curva d'ordine $2n$ può decomporre in due d'ordine n non aventi infinite bisecanti uscenti da T . La curva di (σ_2) che rappresenta entrambe queste curve toccherà allora necessariamente la curva (r_1) in tutti i punti ch'essa ha comuni con questa.

Ci limiteremo ad esaminare i casi $n = 1$ e $n = 2$.

$n = 1$. Una generatrice rettilinea di (σ_2) è immagine d'una conica della superficie posta in un piano tangente condotto da T a (σ_2) e però in un piano

tangente al cono di KUMMER. L'altra conica posta in questo piano, corrisponde a la generatrice dell'altro sistema posta in esso piano. Dunque i due sistemi di generatrici corrispondono a due sistemi conjugati di coniche. In ogni sistema si trovano quattro generatrici che toccano (σ_2) e quindi anche la curva (r_4) ; ad ognuna corrisponde una conica avente un punto doppio nel punto di contatto e però scissa in due rette: si ottengono in tal modo le sedici rette della superficie.

$n = 2$. Una sezione piana di (σ_2) corrisponde a una curva gobba di 4° ordine. Questa starà tanto sul cono quadrico che proietta da T quella conica, quanto su una quadrica che si determina facendo muovere sul piano secante il punto S usato nella precedente costruzione. La curva gobba di 4° ordine è quindi di 1ª specie (cioè intersezione di due quadriche). Siccome lo spazio contiene un numero triplicemente infinito di piani, e siccome il cono proiettante una conica di (σ_2) seca ancora (σ_2) in una conica, così vediamo che *sulla superficie vi è un numero triplicemente infinito di curve di 4° ordine e 1ª specie (*)*, situate a due a due su un cono quadrico avente il vertice comune con un cono di Kummer. Nella curva di contatto del cono di KUMMER colla superficie di 4° ordine, coincidono due tali curve.

15. *Nuove proprietà dei coni di Kummer.* Una quartica gobba di 1ª specie si spezza in due coniche allorquando essa acquista due punti doppi: infatti la sua proiezione ne ha allora 4. Per una delle curve considerate nel n.º 14, ciò accadrà quando la conica che la rappresenta su (σ_2) tocca (r_4) in due punti. Ora, è noto che i piani tangenti doppi dell'intersezione (r_4) di due quadriche, sono tangenti a quattro coni quadrici passanti per la stessa intersezione. Le due coniche della superficie che studiamo, rappresentate da l'intersezione di (σ_2) con un piano tangente ad uno, (α_2) , di questi coni s'incontrano nei due punti di contatto di questo con (r_4) e però appartengono, in virtù del n.º 7, a sistemi conjugati. La congiungente di quei due punti passa sempre pel vertice di (α_2) , il quale deve quindi essere il vertice del cono di KUMMER che è toccato da i piani delle due predette coniche. Questi due piani coincidono nel corrispondente piano tangente di (α_2) quando passano per T ; il piano in cui coincidono toc-

(*) Su la superficie vi sono in tutto ∞^1 quartiche gobbe di 1ª specie, ognuna è determinata da una quadrica passante per la conica doppia. — Oltre al suddetto sistema triplicemente infinito, al punto T — come a gli altri punti dello spazio — corrisponde un sistema semplicemente infinito di quartiche di 1ª specie della superficie, che sono intersezioni della superficie con coni quadrici di vertice T . Questi coni sono circoscritti a quadriche passanti per (r_4) .

cherà quindi il cono di KUMMER e il cono (x_2) lungo la generatrice passante pei punti di contatto colla curva (r_4) . Dunque:

La quartica gobba (r_4) , lungo cui la data superficie tocca il cono di Kummer $[T(k_4)]$ ad essa circoscritto dal vertice T d'un cono di Kummer, sta su quattro coni quadrici, ognuno dei quali tocca uno degli altri quattro cono di Kummer lungo le generatrici di contatto con piani tangenti passanti per T .

E ancora:

Le coniche di due sistemi conjugati sono in quattro modi distribuite in coppie tali, che due coniche d'una coppia stanno su quattro cono aventi per vertici i vertici dei quattro cono di Kummer non toccati da i piani di quelle coniche.

III.

Proprietà di realtà e forme della superficie studiate con una proiezione da un punto della conica doppia.

16. *Lemmi relativi a la forma delle curve piane di 4° ordine.* Quando non si tien conto delle differenze provenienti da situazioni differenti rispetto a la retta all'infinito, si può formarsi un'idea completa delle forme delle curve di 4° ordine senza punti doppi, in parte applicando il teorema, noto da molto tempo, che la curva non può avere più di quattro rami separati o più di due, uno dei quali stia entro l'altro; in parte dal teorema che una curva di 4° ordine senza punti doppi ha sempre quattro tangenti doppie reali e tali che ognuna o tocca due volte lo stesso ramo oppure ha punti di contatto imaginari (*). Siccome poi due rami separati di una curva di 4° ordine hanno sempre comuni quattro e solo quattro tangenti, così si ottengono per queste curve le seguenti « forme principali »:

I.	Curva con 4 rami separati e 28 tangenti doppie reali
II.	" 3 " " 16 " " "
III.	" 2 " " 8 " " "
IV.	" 1 " " 4 " " "
V.	" 0 " " 4 " " "
VI.	" 2 rami uno interno a l'altro e 4 tangenti doppie reali.

(*) I miei lavori che si riferiscono a la forma delle curve di 4° ordine, si trovano nel Tidsskrift for Mathematik, 1873 e 1874, e nel vol. 7° dei Math. Annalen. Com'è noto, KLEIN diede della mia proposizione fondamentale, enunciata sotto forma un po' diversa, una notevolissima estensione a tutte le curve algebriche.

A questi risultati, CRONE (*) aggiunse una ricerca su la realtà dei 63 sistemi di coniche quadritangenti e su la distribuzione in essi delle tangenti doppie reali e immaginarie della curva. Dei teoremi da esso stabiliti, noi faremo uso dei seguenti che si riferiscono a sistemi reali, sistemi che chiameremo interni o esterni secondochè le loro coniche stanno entro o fuori dei rami reali della curva (considerando però come esterna la parte di piano situata fra due rami). Indicheremo solo le coniche degeneri reali del sistema (coppie di tangenti doppie), cioè quelle formate ciascuna da due rette reali o immaginarie « conjugate »; ciò che manca al loro numero per formare 6 rappresenta il numero delle coniche composte di rette immaginarie non conjugate. I numeri romani si riferiscono alla precedente classificazione delle curve di 4° ordine; le lettere poste nella colonna successiva servono a stabilire delle suddivisioni fra le varie specie di sistemi.

CURVA	SISTEMI			COPPIE DI TANGENTI DOPPIE DEL SISTEMA		Tangenti doppie reali non appartenenti al sistema
		Numero	Situazione	reali	immaginario conjugate	
I		63	esterni	6	0	16
II	a	30	esterni	4	0	8
	b	1	interno	0	6	16
III	a	1	esterno	4	2	0
	b	12	esterni	2	0	4
	c	2	interni	0	4	8
IV	a	3	esterni	2	2	0
	b	1	esterno	0	0	4
	c	3	interni	0	2	4
V e VI	a	3	esterni	2	4	0
	b	12	interni	0	0	4

(*) V. Tidsskrift for Mathematik, 1875 e 1877, o Math. Annalen, vol 12. Dell'esattezza dei risultati di CRONE, che noi citiamo nel testo perchè ne abbiamo bisogno, si può persuadersi considerando delle curve che sono prossime ad acquistare un punto doppio. Infatti, un cambiamento nei numeri dati nel testo può solo avvenire quando la curva acquista un punto doppio. Per non trascurare alcuno dei casi intermedi bisogna tener presente che vi sono le tre specie seguenti di punti doppi reali: 1.° Nodi, in ognuno dei quali due rami si riuniscono l'uno a l'altro; 2.° Punti isolati, sostituenti ciascuno un ramo nel massimo numero di rami che può avere la curva; 3.° Punti d'intersezione di due rami d'ordine impari a lato dei quali la curva ha al massimo un ramo d'ordine pari. (Cf. Math. Annalen, vol. 7°, p. 424.)

Si può anche osservare che, per le curve II III IV, entro ogni ramo si trovano due de' punti reali d'intersezione delle tangenti doppie conjugate appartenenti a ciascuno dei sistemi interni; e che le coniche del sistema III *a* si possono distinguere da le altre perchè i rami di curva stanno entrambi fuori o entrambi entro una di quelle coniche e ognuno dei rami la tocca un numero pari di volte.

17. *Determinazione delle rette reali e dei coni di Kummer reali di una superficie di 4° ordine dotata di una conica doppia con punti reali.* Quando la conica doppia della nostra superficie ha punti reali, possiamo proiettarla da uno, P , di essi. In virtù del n.° 2, il contorno potrà assumere tutte le forme enumerate nel n.° 16 e la traccia T' della tangente in P alla conica doppia potrà essere uno qualunque dei punti d'intersezioni reali di tangenti doppie. Se queste sono reali, P sarà un punto d'intersezione di due falde reali della superficie; se sono immaginarie conjugate esso apparterrà a la curva isolata. Avvertiamo che le diverse porzioni della conica doppia verranno da noi per brevità indicate rispettivamente con i nomi di *curva di intersezione* e *curva isolata*: ognuna consta al massimo di due parti.

Le curve degeneri del sistema di coniche quadritangenti al quale appartengono le due tangenti doppie incrociate in T' sono, secondo il n.° 4, contorni dei cinque coni di KUMMER. Uno di questi sarà reale (cioè avrà un'equazione a coefficienti reali e almeno il vertice reale) allorquando il suo contorno conterà di due tangenti doppie reali o immaginarie conjugate. Nel primo caso, il centro di proiezione P è esterno al cono; nel secondo, noi possiamo *sempre dire* che esso sta entro il cono, purchè conveniamo di dire che *qualunque punto dello spazio è interno a un cono non avente generatrici reali*.

Le altre tangenti doppie del contorno sono proiezioni di rette della superficie. I numeri dei coni di KUMMER reali e delle rette reali si possono quindi determinare; gli elementi necessari per tale determinazione si trovano nel n.° 16; ma noi rimandiamo al n.° 20 l'esposizione dei risultati di essa per occuparci di altre proprietà delle « forme principali » delle superficie che studiamo.

18. *Falde della superficie e loro tipi.* La forma del contorno porge un'idea della *forma della superficie*: infatti il contorno segna il passaggio da i punti del piano di proiezione ove sono proiettati due punti reali della superficie, a quelli ove ne è proiettato nessuno. Come queste due parti siano disposte rispetto al contorno, si riconosce considerando la traccia T' della tangente in P ; questo punto apparterrà a la prima o a la seconda di quelle parti di piano, secondochè P è un punto della curva d'intersezione o uno della curva isolata.

Nel descrivere le varie falde di cui la superficie può essere formata — e della cui situazione rispetto al piano all'infinito (cioè della loro possibile divisione in parti) noi non terremo conto — chiameremo, seguendo KLEIN (*), le falde d'ordine pari su cui non si trovano rami di curva di ordine impari (per es. un ellissoide) *Falde del tipo punto*, e quelle falde d'ordine pari a cui appartengono rami di curva di ordine impari (per es. un iperboloide a una falda) *Falde del tipo retta*. Quando si proietta la superficie da un punto della curva isolata, le proiezioni delle sue varie falde appariranno separate (**), e una falda sarà del tipo punto quando la sua proiezione starà nell'interno di qualcuno dei rami nel contorno, del tipo retta in caso diverso.

Questa proposizione, la cui esattezza è evidente, sarà sufficiente pel nostro scopo, in tutti i casi in cui il contorno ha punti reali, perchè è bensì vero che quando si parte da una proiezione fatta da un punto P della curva d'intersezione si può incontrare una superficie senza curve isolate, ma si potrà trovarne una che ne sia dotata con un cambiamento della retta passante per T' in cui è proiettata la conica doppia e un tal cambiamento non può avere alcuna influenza sul tipo della superficie. Del resto non sarà difficile determinare direttamente la composizione delle falde della superficie e i loro tipi quando la proiezione sia fatta da un punto della curva d'intersezione; quando il contorno ha rami reali, una sola falda passerà due volte pel centro di proiezione; e tale falda sarà del tipo punto, quando i rami stanno nella stessa coppia di angoli opposti al vertice formati da le tangenti doppie uscenti da T' e ognuno di essi ha un numero pari di punti di contatto con le tangenti doppie, sarà invece del tipo retta quando queste condizioni non saranno entrambe soddisfatte (**).

Resta da considerare il caso in cui *il contorno non ha punti reali e ogni*

(*) V. la sua Memoria *Ueber die Flächen 3^{er} Ordnung* (Mathem. Annalen, Bd. 6, pag. 557-581). Notiamo però che, siccome KLEIN non usa nel citato lavoro le denominazioni « tipo punto » e « tipo retta », così io le conosco probabilmente per una comunicazione verbale. Esse servono ad esprimere che quelle falde possono trasformarsi risp. in un punto o in una retta. Non incontreremo qui il « tipo piano », cioè una falda di superficie d'ordine impari.

(**) Altrimenti dovrebbero essere falde secate in un sol punto da le rette proiettanti, e però sarebbero d'ordine impari; queste falde si secherebbero in una curva d'ordine impari che dovrebbe far parte della conica doppia, il che è impossibile, perchè noi non consideriamo quei casi estremi o intermedi in cui detta conica degenera in due rette.

(***) Infatti, solo in quest'ultimo caso si potrà costruire nel piano di proiezione dei rami di curva d'ordine impari e quindi mostrare, servendosi delle regole esposte nel n.° 3 e applicandole come si fece nel n.° 4, che essi sono proiezioni di rami di curve che non passano pel centro di proiezioni e quindi sono pure d'ordine impari.

punto del piano di proiezione rappresenta due punti della superficie. In questo caso la superficie consta di due falde del tipo punto. Infatti, allora non esiste alcun legame fra i due punti che coincidono in P e qualunque ramo di curva d'ordine impari del piano di proiezione rappresenterà un ramo di curva della superficie il quale, passando per P un numero impari di volte, sarà d'ordine pari (*).

19. *Connessione delle varie falde della superficie.* Per formarsi un'idea esatta della forma di una falda di superficie bisogna conoscere un numero che ne determini la connessione. Come dimostrarono SCHLAEFLI e KLEIN, questo numero è uguale al doppio del numero delle curve chiuse (direttamente o passando per le loro intersezioni con il piano a l'infinito) che si possono tracciare su la falda che si considera senza spezzarla (**). Se, nella nostra rappresentazione, il centro di proiezione P sta su la curva isolata, la connessione d'una falda sarà il doppio del numero dei rami di contorno interni, cioè dei rami di contorno fuori dei quali si trovano proiezioni di punti reali della falda; infatti le curve chiuse che non spezzano la superficie saranno i rami di curva aventi per proiezioni il contorno apparente (rami del così detto contorno « effettivo »). Il solo caso in cui non è applicabile questo metodo di determinazione è quello, che noi già incontrammo, in cui per il centro di proiezione passano due falde d'ordine pari; ma in questo caso è facile vedere, con l'ajuto della rappresentazione, che le due falde hanno la connessione 0.

(*) Quest'ultima asserzione potrebbe apparire un po' precipitata, perchè una proiezione stereografica di un iperboloido rigato sembra presentare tutte le proprietà di una tal falda. Ma vi è la differenza sostanziale che, nella proiezione stereografica dell'iperboloido, vi sono due punti (i punti fondamentali) che sono proiezioni di rette della superficie e quindi la proiezione d'un ramo di curva può incontrare la traccia del piano tangente in uno di questi punti senza passare pel centro di proiezione. Questo esempio dà un'idea di alcune delle modificazioni che subirebbero le nostre considerazioni generali nel caso limite in cui il centro di proiezione stesse su una retta della superficie.

(**) Le osservazioni di SCHLAEFLI su questo argomento si trovano nel vol. 76 del Giornale di BORCHARDT (pag. 152, nota); quelle di KLEIN nello scritto citato nella Nota al n.° 18 e nell'altro: *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (Math. Ann., Bd. 7). — Un toro ha, p. e., la connessione 2, quantunque non lo si spezzi con un parallelo e un meridiano; per rendersi ragione di ciò bisogna tener presente che fra queste due curve, quella che fu disegnata prima è rientrante in sè stessa, ma l'altra va da un punto infinitamente vicino a quella e posto da una parte di essa a un punto, pure infinitamente vicino ad essa, ma posto dall'altra parte. — Un iperboloido a una falda, le cui due estremità si possono considerare come connesse lungo la curva d'intersezione della superficie con il piano all'infinito, ha la stessa connessione del toro.

Del resto, si può facilmente dedurre da un teorema di KLEIN (*) che, quando il centro di proiezione sta su la curva d'intersezione di una falda con sè stessa, la connessione è uguale al doppio del numero dei rami di contorno interni meno due.

20. *Classificazione delle superficie di 4° ordine con conica doppia a punti reali.* Per giungere a tutte le « forme principali » delle superficie di cui ci occupiamo, basta, in grazia di quanto si disse al n.° 17, considerare successivamente le forme del contorno descritte nel n.° 16 e supporre che le tracce dei piani tangenti nel centro di proiezione P siano successivamente una coppia di tangenti doppie reali o immaginarie conjugate di ciascuno dei sistemi enumerati nel citato numero. In tal modo si otterrà due volte ogni forma di superficie, cioè una volta proiettata da un punto della curva isolata, una volta proiettata da un punto della curva di intersezione. Però, quando per ogni rappresentazione si determini il numero delle rette reali e dei coni di KUMMER reali, nonchè la loro situazione rispetto a la curva d'intersezione e a la curva isolata, non si avrà alcun dubbio nel risolvere la questione di determinare a quali rappresentazioni appartenga la stessa forma di superficie, purchè non si considerino come sostanzialmente diverse le forme del contorno che noi indicammo al n.° 16 coi numeri V e VI (curve senza rami reali, curve anulari).

Nell'enumerazione che ora faremo delle « forme principali » della superficie, i numeri romani racchiusi in parentesi e le lettere annesse indicano, rispettivamente, la forma del contorno e il sistema a cui appartengono le due tangenti doppie che fungono da tracce di piani tangenti; il primo di essi lo indica per un centro di proiezione appartenente a la curva d'intersezione, il secondo per uno appartenente a la curva isolata.

La posizione della conica doppia non ha alcuna parte nella classificazione delle forme principali (circostanza che noi abbiamo già utilizzata); ma danno

(*) Math. Annalen, Bd. 7, pag. 554. — L'attuale applicazione di questo teorema a una superficie e a la sua rappresentazione su un piano doppio è possibile perchè la superficie ha due punti fondamentali nel centro di proiezione. Volendo applicarlo a la rappresentazione d'una falda di superficie d'ordine impari su un piano doppio, si deve tener presente che una delle facce d'una tale falda è una continuazione dell'altra. La rappresentazione su un piano doppio può solo valere per una delle sue facce (per rappresentare contemporaneamente le due facce sarebbe necessario l'impiego d'un piano quadruplo) e la sua connessione è minore di 1 di quella della superficie. Servendosi di una proiezione stereografica d'una falda d'ordine impari d'una superficie di 3° ordine, si trova che la connessione di una faccia di questa è minore di 1 del doppio del numero di rami del contorno; con ciò la falda stessa acquista la connessione 8, 6, 4 o 2 attribuitagli da KLEIN.

origine a modificazioni di queste che sono sostanziali, ma che però si immaginano facilmente. Siccome tutti i coni di KUMMER passano pei punti cuspidali [di cui sono reali 0, 2 o 4 (*)], e siccome questi separano la curva d'intersezione da la curva isolata, così il dire che questa sta entro o fuori di un cono di KUMMER, avrà per conseguenza che quella sta fuori o entro dello stesso; lo stesso enunciato si applicherà anche a le superficie che mancano di curve isolate.

A. [I; II b]. *Superficie con sedici rette reali e cinque coni di Kummer reali, formata di una falda del tipo retta con la connessione 6. La curva isolata sta entro a tutti i coni di Kummer.*

B. [II a; III c]. *Superficie con otto rette reali e tre coni di Kummer reali, formata di una falda del tipo retta con la connessione 4. La curva isolata sta entro a tutti i coni di Kummer.*

C. [III b; IV c]. *Superficie con quattro rette reali e un cono di Kummer reale, formata di una falda del tipo retta con la connessione 2. La curva isolata sta nell'interno del cono di Kummer.*

Le superficie delle specie A, B, C hanno 4, 2, 0 punti cuspidali; quando non vi è alcun punto cuspidale, la superficie manca di curva isolata.

D. [III a; V o VI a]. *Superficie senza rette reali e con cinque coni di Kummer reali, e che o è formata da una falda del tipo punto e con la connessione 2 (anulare) o non ha alcun punto reale — fuori della curva isolata; quest'ultima non è neppur compresa nella descrizione delle falde reali delle precedenti forme di superficie. — La curva isolata sta entro tre e fuori di due coni di Kummer.*

Quando la superficie ha una falda reale vi possono essere 4, 2 o 0 punti cuspidali; in quest'ultimo caso può mancare o la curva d'intersezione o la curva isolata.

E. [V o VI a; III a]. *Superficie senza rette reali e con cinque coni di Kummer reali, formata di due falde del tipo punto e con la connessione 0. La curva isolata sta nell'interno di uno e all'esterno di quattro coni di Kummer.*

La curva doppia può essere o intersezione di due falde, nel qual caso manca la curva isolata (contorno V); oppure constare di una curva d'intersezione d'una falda con sè stessa e di 0 o 1 curva isolata; oppure constare di due curve d'intersezione e di due curve isolate; o finalmente essere una sola curva isolata.

(*) Siccome noi prescindiamo in generale dai casi intermedi, così non insistiamo sui casi in cui due o più de' punti cuspidali coincidono,

F. [IV a; IV a]. Superficie senza rette reali e con tre coni di Kummer reali, formata da una falda del tipo punto e con la connessione 0. La curva isolata sta entro uno e fuori di due dei coni di Kummer. Essa ha 4, 2 o 0 punti cuspidali; in quest'ultimo caso può mancare la curva d'intersezione o la curva isolata.

21. *Sistemi reali di coniche; varie specie di rette immaginarie della superficie.* È noto che una retta imaginaria dello spazio può essere di due specie; se essa ha un punto reale, intersecherà la sua coniugata, e però starà in un piano reale e si dirà di 1^a specie; se essa non ha alcun punto reale, per essa non passerà alcun piano reale e si dirà di 2^a specie: in quest'ultimo caso la retta data e la sua coniugata sono determinate da due coppie di punti immaginari coniugati appartenenti a due rette che non s'incontrano.

Il numero delle rette immaginarie delle varie forme di superficie si trova togliendo da 16 il numero delle rette reali. Per trovare quali fra le rette immaginarie siano di 1^a specie, si noti anzitutto che una di queste deve stare con la sua coniugata in un piano tangente di un cono di KUMMER e che questo cono è in conseguenza reale, chè altrimenti lo stesso piano dovrebbe toccare il cono immaginario coniugato. Quindi, queste due rette immaginarie coniugate appartengono ad uno dei due sistemi di coniche della superficie, poste in piani tangenti allo stesso cono di KUMMER e la cui proiezione, secondo il n.° 6, è quel sistema di coniche quadritangenti al contorno che è determinato da la conica spezzata nella traccia di un piano tangente nel centro di proiezione e in una retta di contorno del cono di KUMMER.

Un tal sistema sarà reale quando le due tracce e le due rette di contorno o sono tutte reali o formano due coppie di coniugate e solo allora; quindi i piani tangenti di un cono di KUMMER secano la superficie in coniche reali o immaginarie secondochè la curva isolata sta nell'interno o a l'esterno del cono (viceversa per la curva d'intersezione). Siccome in una conica appartenente a un sistema immaginario non si possono trovare che alcuni punti reali, così noi possiamo trovare un modo migliore per caratterizzare la posizione dei vari coni di KUMMER; invece di dire che *la curva isolata* — che può anche mancare — *sta entro o fuori di un cono di Kummer*, noi potremo ora dire che le falde reali di superficie — che però nella forma *D* potrebbero anche mancare — *stanno fuori o entro di quel cono*. Dal n.° 20 segue allora: che *la falda reale di una delle superficie A, B, C sta all'esterno di tutti i coni di Kummer*; che *la falda reale di D* — quando esiste — *sta all'esterno di tre e nell'interno di due coni di Kummer*; che *le due falde di E stanno entro uno e fuori di quattro*

coni di Kummer; che finalmente la falda reale di F sta entro due e fuori di uno de' coni di Kummer. Però, affinchè questi enunciati siano completi, noi dobbiamo (v. n.° 17) dire che una falda reale di superficie sta entro ogni cono reale non avente generatrici reali. La curva isolata (che dovrebbe stare fuori di questo) deve allora mancare. Se invece non vi sono falde reali della superficie (D), è impossibile, *nelle presenti ipotesi*, che la curva isolata manchi; e allora gli è fra i tre coni entro ognuno dei quali si trova la curva isolata, che se ne può trovare uno o più senza generatrici reali.

I sistemi reali di coniche che si trovano in piani tangenti a' coni fuori dei quali stanno le falde di superficie, si studiano mediante le loro proiezioni, le particolarità delle quali si deducono da le coniche degeneri mediante le regole esposte nella Memoria di CRONE; si può tuttavia osservare che l'arbitrio nella scelta del centro di proiezione sia su la curva d'intersezione sia su la curva isolata, nonchè le nozioni già aquisite su le rette della superficie, combinate coi risultati citati al n.° 16, bastano a risolvere ogni questione senza più ricorrere a quelle regole. Nell'enumerare i sistemi di coniche posti su le varie forme di superficie, noi indicheremo queste ed esporremo le proprietà delle proiezioni dei sistemi di coniche posti su esse con le stesse notazioni usate nel n.° 20.

A. Dieci sistemi di coniche reali, ognuno con quattro coppie di rette reali [I, II a].

B. Sei sistemi di coniche reali, ognuno con due coppie di rette reali e nessuno di rette immaginarie conjugate [II a, III b]. *Tutte le otto rette immaginarie della superficie sono di 2ª specie.*

C. Due sistemi di coniche reali, in uno dei quali vi sono due coppie di rette reali e due coppie di rette conjugate [III a, IV a], nell'altro non si trovano nè rette reali, nè rette immaginarie conjugate [III b, IV b]. *Delle dodici rette immaginarie quattro sono di 1ª specie, otto di 2ª.*

D. Sei sistemi reali di coniche, in cui non vi sono rette reali o immaginarie conjugate [III b, V b o VI b] e che possono mancare di coniche aventi punti reali. *Tutte le rette della superficie sono immaginarie di 2ª specie.* Se la superficie non ha punti reali, vi sono delle differenze fra i piani tangenti reali a tre e a due coni fuori o entro dei quali la superficie può sempre dirsi posta; infatti, uno dei primi seca la superficie in due coniche reali non aventi punti reali, mentre uno degli altri la seca in due coniche immaginarie conjugate. (Per maggiori particolari si vegga il n.° 23.)

E. Due sistemi reali di coniche a ognuno dei quali appartengono quattro

coppie di rette immaginarie conjugate [V o VI a, III c]. *Tutte le sedici rette immaginarie sono di 1ª specie.*

F. Due sistemi reali di coniche, ognuno con due coppie di rette conjugate [IV a, IV c]. *Otto rette immaginarie sono di 1ª specie, otto di 2ª.*

IV.

Proprietà di realtà e forme della superficie studiate mediante un cono di Kummer.

22. *Lemmi su le quartiche gobbe di 1ª specie.* L'intersezione di due quadriche è una curva che può essere formata al massimo di due rami. Essa può avere una delle seguenti « forme principali »:

1) *La curva consta di due rami d'ordine pari.* I quattro coni (κ_2) che passano per essa sono tutti reali.

α . Una superficie del fascio, i cui punti stanno in parte entro di tutti, in parte fuori di tutti i coni (κ_2), ha generatrici reali, le quali possono secare un ramo in due o zero punti. Il caso intermedio si ha nelle generatrici tangenti; ogni ramo della curva tocca due generatrici di ciascuno dei due sistemi.

β . Una superficie del fascio, i cui punti stanno in parte fuori di tre ed entro uno dei coni (κ_2), in parte viceversa, ha generatrici immaginarie.

γ . Una superficie del fascio, i cui punti stanno nell'interno di due e all'esterno di due coni (κ_2), ha generatrici reali, le quali secano ognuno dei due rami in un sol punto, e però non sono mai tangenti ad essi.

2) *La curva consta di un ramo d'ordine pari.* Due de' coni passanti per essa sono reali.

α . Una superficie del fascio, i cui punti stanno parte entro parte fuori dei due coni (κ_2), ha generatrici reali che incontrano il ramo in due o zero punti; due generatrici di ogni sistema lo toccano.

β . Una superficie del fascio, i cui punti stanno entro uno e fuori di uno dei coni, ha generatrici immaginarie.

3) *La curva è formata di due rami d'ordine impari.* Nessuno dei coni (κ_2) è reale. — Una superficie del fascio ha in questo caso sempre generatrici reali. Le generatrici di un sistema secano ciascun ramo in un punto; quelle dell'altro secano un ramo in due o zero punti; ogni ramo è toccato da due generatrici che stanno ciascuna in una delle parti in cui la curva divide la superficie.

4) *La curva non ha rami reali.* Tutti quattro i coni (κ_2) sono reali; due di essi hanno generatrici reali, due non. Come già dicemmo, considereremo ogni punto reale dello spazio come interno a ciascuno di questi ultimi. Siccome i due primi non hanno punti d'intersezioni reali, così un punto non può stare nell'interno di entrambi.

α . Una superficie del fascio, che abbia punti reali posti fuori di due ed entro di due coni, ha generatrici reali.

β . Una superficie del fascio, i cui punti reali stanno entro tre coni ha generatrici immaginarie.

γ . Al fascio appartengono anche superficie senza punti reali e le cui generatrici sono in conseguenza rette immaginarie di 2^a specie. (Invece le generatrici immaginarie precedentemente nominate sono tutte di 1^a specie.)

Di questi teoremi, che noi dovremo applicare, alcuni devono esser noti; gli altri si ottengono mercè considerazioni su le forme, in parte tenendo presenti le due serie di superficie, appartenenti tutte allo stesso fascio, che possono riguardarsi come formanti con continuità il passaggio fra due date, in parte considerando le diverse posizioni che possono assumere, rispetto ai vari rami della curva, le generatrici di una determinata superficie — oppure i piani d'un fascio avente per asse una tangente a la curva gobba.

Da queste considerazioni risulta anche che ogni curva avente punti reali divide ogni superficie del fascio in due porzioni poste ciascuna da una parte di qualunque altra superficie del fascio. Nei casi 1. α e β una di quelle porzioni consta di due parti separate. — Se la curva non ha punti reali, noi ci possiamo immaginare una tale divisione, ossia *parlarne come se esistesse*. Soltanto allora una delle due porzioni (p. e. nel caso 4. α quella che si trova fuori dei due coni a generatrici immaginarie ed entro i due a generatrici reali) non contiene alcun punto reale. Inoltre, siccome nel fascio 4. il caso intermedio fra le superficie 4. β e 4. γ , è uno dei due coni a generatrici immaginarie, così bisogna considerare la superficie 4. γ come posta entro due coni di cui uno ha generatrici reali l'altro immaginarie e fuori degli altri due. Si può dire che qui ha luogo una divisione in parti mediante la curva gobba: ma bisogna tener presente che nè a l'una, nè a l'altra di queste parti appartengono punti reali.

23. *Applicazione della costruzione esposta al n.° 13 a lo studio delle varie forme della superficie.* Secondo i n.° 13 e 14, i punti della superficie sono a coppie rappresentati su i punti S di una quadrica (σ_2). Se T è il punto fisso dello spazio, i due punti M_1 M_2 rappresentati in S stanno su TS e sono i punti doppi dell'involuzione a cui appartengono TS e i punti d'intersezione $D D'$

della retta TS con un'altra quadrica (δ_2) . Essi sono reali o immaginari secondochè T e S entrambi non separano o entrambi separano D e D' . Se essi sono reali per una certa posizione di S , diverranno immaginari quando S passerà per l'intersezione (r_4) di (σ_2) e (δ_2) , e viceversa. La parte di (σ_2) i cui punti S corrispondono a punti M reali, si trasformerà in una a i cui punti S corrispondono punti M immaginari e viceversa quando, rimanendo fissi (σ_2) , (r_4) e T , (δ_2) varierà nel fascio di cui (r_4) è base e passerà o per (σ_2) o per la superficie del fascio che contiene il punto T . Dunque: Data la quadrica (σ_2) e la quartica gobba (r_4) , su una qualunque delle due parti in cui (r_4) divide (σ_2) possono trovarsi immagini di punti reali d'una superficie di 4° ordine a conica doppia; se (r_4) non ha punti reali, tutti i punti reali di (σ_2) saranno immagini di punti tutti reali o tutti immaginari. In quest'ultimo caso e in quello in cui (σ_2) non abbia punti reali, la superficie rappresentata non avrà punti reali.

In virtù del n.° 14, una generatrice reale di (σ_2) è immagine d'una conica della superficie, posta in un piano tangente al cono di KUMMER che ha il vertice in T ed è circoscritto a (σ_2) . Questa conica sarà reale, anche se ad essa non appartengono punti reali, e la superficie starà allora (n.° 21) fuori del cono di KUMMER. Se invece le generatrici di (σ_2) sono immaginarie di 1ª specie, ogni piano tangente al cono di KUMMER secherà la superficie in due coniche immaginarie, e però la superficie starà entro lo stesso cono. Se noi generalizziamo le locuzioni che convengono a questi due casi, dicendo che la superficie si trova rispetto al cono da la stessa parte delle rette uscenti da T e secanti (σ_2) in punti reali e da la parte opposta di quelle che secano (σ_2) in punti immaginari, e ricordiamo che ogni punto reale sta nell'interno di un cono a generatrici immaginarie, noi dobbiamo dire che, nel caso in cui (σ_2) non ha punti reali, la superficie di 4° ordine, la quale pure non ha punti reali, sta fuori del cono di KUMMER.

Se una generatrice reale di (σ_2) tocca (r_4) , la conica corrispondente sarà, per il n.° 14, costituita di due rette che s'intersecano nel punto di contatto reale con (r_4) . Quelle due rette saranno reali o immaginarie (ma aventi però sempre reale il detto punto), secondochè i punti della parte di (σ_2) a cui appartiene quella generatrice, rappresentano punti reali od immaginari. Per distinguere l'uno da l'altro questi due casi, è sufficiente quanto si disse nel n.° 22 e il fatto che tutti i punti di una tangente a la quartica gobba, tranne il punto di contatto, sono esterni a i coni passanti per la curva stessa. I quattro coni di KUMMER della superficie, oltre a quello di vertice T , sono, in forza del n.° 15, reali o immaginari nello stesso tempo dei coni (κ_2) che passano per (r_4) . Se M_1

e M_2 sono punti reali della superficie rappresentati in un punto S di (σ_2) , un piano tangente condotto da M_1 ad uno dei quattro coni di KUMMER e un piano tangente (determinato in conseguenza) condotto da M_2 allo stesso cono di KUMMER, secheranno la superficie in curve i cui punti corrisponderanno a i punti del piano tangente condotto da S al cono (κ_2) avente lo stesso vertice. Secondochè questo piano tangente sarà reale o immaginario, saranno pure reali o immaginari i piani tangenti condotti da M_1 e M_2 a quel cono di KUMMER. I punti M_1 e M_2 stanno, dunque, fuori o dentro del cono di KUMMER secondochè il corrispondente punto S sta fuori o dentro di (κ_2) . Queste stesse determinazioni possono estendersi ai casi in cui la superficie che si studia non ha punti reali, perchè le regole del n.° 22 possono servire anche in questi casi a determinare le posizioni dei punti (non esistenti) di (σ_2) che danno punti M reali. Che in tal modo si giunga a risultati d'accordo con le convenzioni testè fatte su la posizione d'una tale superficie rispetto a un cono di KUMMER, si vede ottenendo questi casi da altri noti con una trasformazione continua (*).

Siamo così in grado nel formare, colla scorta del n.° 22, il quadro seguente delle diverse forme di (r_1) e (σ_2) e della situazione di tutti i punti che sono immagini di punti reali, di aggiungere una tabella contenente i numeri dei coni di KUMMER reali, di rette reali e di rette immaginarie conjugate di 1^a specie; e siccome *uno almeno dei coni di Kummer d'una superficie reale è reale, così noi otteniamo con il procedimento indicato tutte le forme delle superficie che studiamo.*

Se si basa la classificazione sui caratteri di realtà che ho indicati, non si rinverranno altre « forme principali » oltre a quelle trovate nella ricerca precedente quando supponevamo che la conica doppia avesse dei punti reali; solo, una delle « forme principali » conterrà una nuova varietà, possibile solo quando la conica doppia non ha alcun punto reale.

Questo fatto si rileva facilmente dall'ispezione della seguente tabella. In questa, la prima colonna, dopo quella che contiene i numeri d'ordine, indica, colle notazioni adoperate nel n.° 22, le forme di (r_1) e di (σ_2) . L'indicazione $r + 1$ pel numero de' coni di KUMMER, fuori o dentro i quali si trova la superficie rappresentata, esprime che quello che fu adoperato nella rappresenta-

(*) Siccome la retta condotta da T al vertice di un cono (κ_2) , ha la stessa posizione tanto rispetto al cono di KUMMER avente il vertice comune con (κ_2) , quanto rispetto a (κ_2) , così è sufficiente studiare le intersezioni di quella retta con la superficie (σ_2) corrispondente al nuovo cono di KUMMER.

zione ed altri r hanno quella proprietà. Lo stare la superficie entro o fuori del cono anzidetto è invece espresso dalle lettere (i) o (e) annesse alle notazioni introdotte nel n.° 20 per le forme della superficie e che si trovano nell'ultima colonna della tabella. Nelle colonne penultima e terz'ultima sono notati i numeri delle coppie di rette poste in piani tangenti al cono di KUMMER adoperato nella rappresentazione. La distribuzione di queste coppie di rette nei due sistemi di coniche corrispondenti a tal cono è espressa dal simbolo ($a + b$).

	RAPPRESENTAZIONE					SUPERFICIE RAPPRESENTATA				
	V. n.° 22	Rami di (r_4) e loro ordini	Coni (κ_2)		Generatrici di (σ_2)	Coni di Kummer		Coppie di rette tangenti		Forma della superficie
			Le immagini di punti reali stanno			La superficie sta				
			fuori di	entro		fuori di	entro	reali	conjugate	
1	1α	2 pari	4	0	reali	4 + 1	0	4 + 4	0	$A(e)$
2	1β	2 pari	3	1	imaginarie	3	1 + 1	0	0	$D(i)$
3	1γ	2 pari	2	2	reali	2 + 1	2	0	0	$D(e)$
4	1β	2 pari	1	3	imaginarie	1	3 + 1	0	0	$E(i)$
5	1α	2 pari	0	4	reali	0 + 1	4	0	4 + 4	$E(e)$
6	2α	1 pari	2	0	reali	2 + 1	0	2 + 2	0	$B(e)$
7	2β	1 pari	1	1	imaginarie	1	1 + 1	0	0	$F(i)$
8	2α	1 pari	0	2	reali	0 + 1	2 + 2	0	2 + 2	$F(e)$
9	3	2 impari	0	0	reali	0 + 1	0	2 + 0	2 + 0	$C(e)$
10	4β	0	(3)	(1)	imaginarie	3	1 + 1	0	0	$D(i)$
11	4α	0	2	2	reali	2 + 1	2	0	0	$D(e)$
	4γ	0	2	2	imag.° di 2ª specie					
12	4β	0	1	3	imaginarie	1	3 + 1	0	0	$E(i)$

Le parentesi entro cui furon posti i numeri dei coni (κ_2) relativi a la superficie 10, i quali si riferiscono immediatamente a delle posizioni che non possono verificarsi per punti reali, significano che la superficie (σ_2) sta entro di tre e fuori di uno de' cono e rappresenta solo punti immaginari. La superficie rappresentata apparterrà a la forma D senza punti reali. 11 rappresenta contemporaneamente (v. n.° 22) tre casi, perchè (σ_2) può avere punti reali (4α) che siano immagini di punti reali, o punti reali (4α) che siano immagini di punti

immaginarî o finalmente (4γ) solo punti immaginarî. Nel primo caso si ottiene la forma D con punti reali, nei due ultimi la forma D senza punti reali; nei due primi casi il cono di KUMMER che si adopera nella rappresentazione ha generatrici reali, nel terzo non ne ha. Del resto, si vede che le determinazioni relative ai casi 10, 11, 12, ove (r_4) non ha rami reali, coincidono con quelle relative ai casi 2, 3, 4 in cui essa ha due rami reali.

24. *Tipi e connessione delle falde di superficie.* Tenendo presente (vedi n.° 14): 1.° che nella nostra rappresentazione i due punti M_1 e M_2 aventi per immagine lo stesso punto S sono rappresentati ciascuno su una faccia di (σ_2), 2.° che queste facce si connettono lungo r_4 e si permutano fra loro lungo la linea di contatto del cono circoscritto a (σ_2) dal centro di proiezione T ; si vedrà che la rappresentazione stessa è univoca e che quindi essa può porgere un'idea delle proprietà delle falde della superficie rappresentata. Un ramo di curva e la sua immagine, secano in uno stesso numero di punti ogni piano passante per il centro di proiezione T ; dunque essi sono entrambi pari o entrambi impari. Ne viene che, per determinare se una falda di superficie ha il tipo retta, bisogna solo cercare se entro la sua immagine si possono tracciare dei rami di curva chiusi d'ordine impari.

Studiando con questo procedimento tutte le varie « forme principali » dell'immagine che si trovano nel quadro, si riottengono senza difficoltà i risultati esposti nel n.° 20, sul numero delle falde e su i loro tipi. Basterà che, come esempio, noi consideriamo il n.° 11 della tabella nel caso in cui tutta (σ_2) rappresenta punti reali.

Dico che, in questo caso, l'immagine ha una sola falda connessa. Infatti, la rappresentazione su una faccia di (σ_2) sarà continuata, passando per l'infinito lungo la stessa faccia, attraverso la curva di contatto del cono circoscritto da T , lungo l'altra faccia: dunque l'immagine si estende su entrambe le facce. Ora, se si segna su (σ_2) un ramo di curva d'ordine impari, questo intersecherà la predetta curva di contatto in un numero impari di punti. Percorrendo completamente una volta questo ramo, partendo da un punto posto su una delle facce di (σ_2), per la detta regola, non si tornerà al punto di partenza, ma si arriverà al punto posto da l'altra parte di (σ_2). Per ritornare al punto di partenza, si deve percorrere ancora una volta lo stesso ramo o un altro ramo d'ordine impari; ma così si è in totale percorso un ramo d'ordine pari. Dunque la falda è del tipo punto.

La nostra rappresentazione di una falda deve inoltre avere la stessa connessione di questa, e la connessione della rappresentazione si trova molto facil-

mente; i risultati che in tal modo si ottengono sono gli stessi che furono esposti nel n.° 20. Così, nell'ultimo esempio, si vede che, senza spezzare la rappresentazione, si può tracciare su una faccia della superficie una curva chiusa, ma che una nuova curva *rientrante in sè stessa* la spezza; dunque la connessione è 2.

25. *Cambiamento della posizione di T e della superficie (∂_2) .* Le proprietà esposte nei n.° 23 e 24 dipendono unicamente da le forme di (r_1) e (σ_2) e da la scelta della porzione di (σ_2) su cui sono rappresentati i punti reali. Quest'ultima scelta è legata, come risulta dal n.° 23, a le posizioni di T e di (∂_2) ; ma queste posizioni non hanno avuta altra influenza su la distribuzione in « forme principali ».

Quando si vuol riservarsi di fare una scelta conveniente per (∂_2) , *la posizione del punto T* si può fissare completamente ad arbitrio, senza che ciò abbia influenza alcuna su la « forma principale » della superficie a cui si perviene. Se (σ_2) ha generatrici *reali*, anche il cono circoscritto da T , cioè il cono di KUMMER adoperato nella rappresentazione, avrà generatrici reali per ogni posizione di T . Se, invece, (σ_2) ha solo punti immaginari, per ogni posizione di T il cono di KUMMER avrà generatrici immaginarie. Quindi, il solo caso in cui può accadere che un cono, fuori del quale sia situata la superficie, non abbia generatrici reali, è quello in cui la superficie non ha alcuna falda reale (11° della tabella, 3° dei casi nominati al n.° 23). — Se (σ_2) ha generatrici immaginarie di 1ª specie, T può stare fuori od entro di essa: un cono di KUMMER, entro cui sta la superficie, può avere in conseguenza o generatrici reali o solo immaginarie. Quest'ultimo caso può anche aver luogo quando la superficie D non ha alcuna falda reale e quando neppure la conica doppia ha punti reali (v. n.° 21).

Le generatrici, uscenti da T , della superficie del fascio di base (r_1) che passa per T , toccano la superficie rappresentata nelle loro intersezioni con (r_1) e sono quindi due tangenti doppie passanti per T , ma non sono generatrici del corrispondente cono di KUMMER. Per il n.° 22, queste due tangenti saranno reali o immaginarie secondochè T starà nell'interno di un numero pari o di un numero impari dei coni (κ_2) passanti per (r_1) , cioè, in grazia della posizione di questi coni rispetto a gli altri quattro coni di KUMMER (v. n.° 15), secondochè T sta nell'interno di un numero pari o di un numero impari di questi. — Dopo le regole che si riferiscono a la posizione di T rispetto a gli altri coni di KUMMER, se ne possono ancor dare di quelle che riguardino la realtà dei punti di contatto delle due tangenti doppie. Però esse non saranno che enunciati dif-

ferenti delle regole su la realtà delle intersezioni di (r_4) con le sue bisecanti reali, onde non vi è ragione di fermarci ad esporle. Come *esempio* possiamo citare la seguente: le due tangenti doppie della superficie C uscenti dal vertice del suo cono di KUMMER reale, sono reali, e almeno una di esse ha punti di contatto reali.

Se la conica doppia abbia punti reali o non, dipende da la posizione della superficie (δ_2) entro lo spazio limitato — per ognuna delle forme principali — da (σ_2) e da la superficie del fascio passante per T : ciò è conseguenza del fatto che la conica doppia è la curva di contatto di (δ_2) con il cono ad essa circoscritto da T . Si trova che le coniche doppie delle superficie A, B, C hanno sempre punti reali (ciò che del resto può anche considerarsi come conseguenza del fatto che le loro falde hanno il tipo retta e però debbon sempre intersecare il piano della conica doppia). Invece le superficie D, E, F possono avere coniche doppie senza punti reali. Fra queste ultime si presenterà anche, in E , una forma (che noi non incontrammo fra le superficie le cui coniche doppie hanno punti reali) le cui falde stanno una completamente nell'interno dell'altra. Questa forma di superficie si ottiene quando, nelle condizioni indicate dal n.° 12 della tabella, T sta entro (σ_2) e (δ_2) o ha generatrici immaginarie di 1^a specie e racchiude (σ_2) , oppure ha generatrici immaginarie senza punti reali. Il corrispondente cono di KUMMER ha generatrici immaginarie (*).

(*) Le forme che si trovano quando la conica doppia non ha punti reali, differiscono da quelle descritte da DARBOUX, nella citata opera, pag. 128-131, solo per le proprietà non proiettive. Si vede che i numeri che si trovano negli enunciati dei suoi teoremi su la connessione, vanno d'accordo con i nostri quando si tenga conto del differente modo di esprimerli.

PROGRAMMA DI CONCORSO.

Sua Maestà il Re OSCAR II di Svezia desideroso di dare una nuova prova del suo interesse per l'avanzamento delle scienze matematiche, di cui è appassionato cultore, ha risolto di dare il 21 gennaio del 1889, sessantesimo anno della sua nascita, il premio di una medaglia d'oro del valore di 1000 franchi e la somma di 2500 Kronor (franchi 3400 circa) per una scoperta importante nel dominio dell'analisi matematica.

Sua Maestà ha affidato la cura di realizzare le sue intenzioni ad una Commissione di tre membri composta come segue: WEIERSTRASS di Berlino - HERMITE di Parigi - MITTAG-LEFFLER di Stoccolma.

Il lavoro di questa Commissione fu oggetto di un rapporto del quale crediamo utile di pubblicare le conclusioni.

« Prenant en considération les questions qui à divers titres préoccupent également les analystes et dont la solution serait du plus grand intérêt pour les progrès de la science, la commission propose respectueusement à SA MAJESTÉ d'accorder le prix au meilleur mémoire sur l'un des sujets suivants.

1. Etant donné un système d'un nombre quelconque de points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de NEWTON, on propose, sous la supposition qu'un choc de deux points n'ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelques fonctions connues du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

Ce problème dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l'aide des moyens analytiques que nous avons actuellement à notre disposition; on peut le supposer du moins, car LEJEUNE-DIRICHLET a communiqué peu de temps avant sa mort à un géomètre de ses amis qu'il avait découvert une méthode pour l'intégration des équations différentielles de la mécanique, et qu'en appliquant cette méthode il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n'est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte (*). On peut pourtant supposer presque avec certitude que cette méthode était basée non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut avec raison espérer de retrouver par un travail persévérant et approfondi. Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail, dans lequel quelque autre problème de la mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement.

2. M. FUCHS a démontré dans plusieurs de ses mémoires (**)

(*) KUMMER, *Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet*, Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1860, p. 35.

(**) Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Febr. 1880, p. 170. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89, p. 251. — Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, t. IV.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Junius 1880, p. 445. — Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, t. IV.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90, p. 71. — Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, t. IV.

Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1881. — Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, t. V.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883, I, p. 507. Cf. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76, p. 177.

ctions uniformes de deux variables, qui se rattachent par le mode de leur génération aux fonctions ultraelliptiques, mais sont plus générales que ces dernières, et qui pourraient probablement acquérir une grande importance pour l'analyse, si leur théorie était développée davantage.

On propose d'obtenir, sous forme explicite, les fonctions dont l'existence a été prouvée par M. FUCHS, dans un cas suffisamment général, de manière à ce qu'on puisse reconnaître et étudier leurs propriétés les plus essentielles.

3. L'étude des fonctions définies par une équation différentielle suffisamment générale du premier ordre dont le premier membre est un polynôme entier et rationnel par rapport à la variable, la fonction et sa première dérivée.

MM. BRIOT et BOUQUET ont ouvert la voie à une telle étude dans leur mémoire sur ce sujet (Journal de l'École Polytechnique, cahier 36, pag. 133-198). Les géomètres qui connaissent les résultats découverts par ces auteurs, savent aussi que leur travail est loin d'avoir épuisé le sujet difficile et important qu'ils ont abordé les premiers. Il paraît probable que de nouvelles recherches entreprises dans la même direction pourront conduire à des propositions d'un haut intérêt pour l'analyse.

4. On sait quelle lumière a été portée sur la théorie générale des équations algébriques par l'étude de ces équations spéciales auxquelles conduit la division du cercle en parties égales, et la division par un nombre entier de l'argument des fonctions elliptiques. La transcendante si remarquable qu'on obtient en exprimant le module de la théorie des fonctions elliptiques par le quotient des périodes mène semblablement aux équations modulaires qui ont été l'origine de notions entièrement nouvelles, et de résultats d'une grande importance comme la résolution de l'équation du cinquième degré. Mais cette transcendante n'est que le premier terme, le cas particulier le plus simple d'une série infinie de nouvelles fonctions que M. POINCARÉ a introduites dans la science sous la dénomination de *fonctions fuchsienues*, et appliquées avec succès à l'intégration des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque. Ces fonctions qui ont donc dans l'Analyse un rôle dont l'importance est manifeste, n'ont pas été considérées jusqu'ici sous le point de vue de l'algèbre, comme la transcendante de la théorie des fonctions elliptiques, dont elles sont la généralisation. On propose de combler cette lacune et de parvenir à de nouvelles équations analogues aux équations modulaires, en étudiant, ne serait-ce que dans un cas particulier, la formation et les propriétés des relations algébriques qui lient deux *fonctions fuchsienues*, lorsqu'elles ont un groupe commun.

Dans le cas où aucun des mémoires présentés pour le concours sur un des sujets proposés ne serait trouvé digne du prix, ce dernier pourra être adjugé à un mémoire mis en concours contenant la résolution complète d'une question importante de la théorie des fonctions outre celles proposées par la commission. »

Les mémoires présentés au concours devront être munis d'une épigraphe ainsi que du nom et de l'adresse de l'auteur sous pli cacheté et adressés au Rédacteur en chef des *Acta Mathematica* de Stockholm, avant le 1^{er} Juin 1888.

Le mémoire auquel SA MAJESTÉ daignera décerner le prix, ainsi que d'ailleurs le ou les mémoires que la commission estimera dignes d'une mention honorable, seront insérés dans les *Acta Mathematica* et aucun entre eux ne doit être publié auparavant.

Les mémoires peuvent être rédigés dans telle langue que l'auteur voudra choisir, mais comme les membres de la commission appartiennent à trois pays différents, l'auteur doit réunir à son mémoire originaire une traduction française si le mémoire n'est pas déjà écrit en français. S'il n'y a pas de telle traduction l'auteur doit accepter que la commission en fasse faire une à son usage.

Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces.

(Par J.-S. et M.-N. VANEČEK, à Jicín - Bohême.)

I. Sur les faisceaux de surfaces.

1. Une surface R d'ordre r est déterminée par un certain nombre de conditions, qui dépend de l'ordre de la surface R . On sait que ce nombre est égal à

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1.$$

2. Nous allons appeler un système de surfaces qui ne sont pas déterminées par un nombre suffisant de conditions *un faisceau de surfaces*.

Soit R le nombre de conditions qui déterminent une surface R du $r^{\text{ième}}$ ordre. Quand la surface R est donnée par $R - n$ conditions, elle forme un faisceau (R).

En prenant n points arbitraires a, b, c, \dots dans l'espace, on obtiendra un nombre de surfaces R qui correspondent aux $R - n$ conditions données et passent par les points a, b, c, \dots .

Appelons le nombre n , c'est-à-dire le nombre de points que nous pouvons encore choisir pour compléter les conditions nécessaires à détermination d'une surface R , *la dimension du faisceau (R) de surfaces R* .

Le nombre de surfaces R passant par les n points a, b, c, \dots et assujetties aux $R - n$ conditions données nous voulons nommer *l'indice du faisceau (R) de la $n^{\text{ième}}$ dimension de surfaces R* .

Alors en disant *un faisceau (R) de la $n^{\text{ième}}$ dimension d'indice m de surfaces R du $r^{\text{ième}}$ ordre*, on entend: un système de surfaces R du $r^{\text{ième}}$ ordre, données par $R - n$ conditions de telle façon, que par n points quelconques a, b, c, \dots passent m surfaces R .

Annali di Matematica, tomo XIV.

De là résulte que

k points arbitraires dans l'espace déterminent dans un faisceau de la $n^{\text{ième}}$ dimension et d'indice m un faisceau du même indice m mais de la dimension $n - k$.

3. La même chose a lieu quant aux figures planes. Il y a de même dans le plan des faisceaux d'indices divers.

Ainsi quand on dit: un faisceau (R) de la $n^{\text{ième}}$ dimension et d'indice m de courbes R d'ordre r , cela signifie un système de courbes R d'ordre r , déterminées par telles conditions que par n points arbitraires du plan passent m courbes R .

Il est clair que k points du plan déterminent un faisceau de la dimension $n - k$ et d'indice m dans un faisceau (R) de la $n^{\text{ième}}$ dimension et d'indice m .

II. Détermination de l'ordre des surfaces et des courbes.

4. *L'ordre des surfaces.* — Dans le Mémoire présent nous nous occuperons avec des surfaces dont l'ordre doit être déterminé, quelque soit le mode de leurs générations.

Pour cet effet il nous suffit une fois pour toutes de démontrer l'ordre de la surface engendrée par la manière suivante.

5. Considérons une surface S comme le lieu de courbes d'intersection de deux autres surfaces appartenant à deux systèmes; ces deux surfaces jouissent de telle propriété que à une d'elles correspond un certain nombre de surfaces du second système rencontrant la première en une courbe de la surface S .

Dans ce cas général, il n'est pas nécessaire de connaître ni les ordres des surfaces de deux systèmes ni le nombre de surfaces d'un système correspondant à une surface de l'autre système. Il nous suffit de connaître des données plus simples.

Une droite arbitraire Q perce les surfaces d'un des systèmes en des points A et celles de l'autre système en des points B . Supposons que tels points A d'une surface correspondent aux points B de l'autre surface, dont la courbe d'intersection se trouve sur la surface engendrée S .

On voit immédiatement que, quand deux points correspondants A , B se réunissent en un seul point, ce point est celui en lequel la droite Q perce la surface S .

Il faut que nous déterminions: combien de points A peuvent coïncider

avec le point correspondant B , en sachant, que

à un point A pris à volonté sur Q correspondent b points B .

et réciproquement

que à un point B correspondent a points A .

Pour cet effet, faisons passer un plan P par la droite Q et considérons deux points arbitraires α, β de ce plan comme les centres de deux faisceaux de droites.

Joignons un point A avec α et le point correspondant B avec β par des droites qui se rencontrent en un point. Ce point engendre une courbe S' quand les points A, B parcourent la droite Q par la loi indiquée.

La courbe S' rencontre Q en des points qui sont évidemment les points de rencontre de la surface S avec la droite Q , ou, en d'autres termes, la courbe S' et la surface S rencontrent la droite Q en les mêmes points. En déterminant l'ordre de la courbe S' , nous obtenons l'ordre de la surface S .

Nous allons déterminer l'ordre de S' très-aisément. Un rayon α' du faisceau (α) rencontre Q en un point A' auquel correspondent suivant la supposition b points B ; les jonctions de ces points avec β rencontrent α' en b points de la courbe S' .

De là suit que sur un rayon arbitraire α' du faisceau (α) se trouvent b points de S' . Il nous reste encore à examiner si le point α appartient à la courbe S' .

Dans ce cas un rayon β' de (β) passe par α . La droite $\alpha\beta$ rencontre Q en un point B' auquel correspondent a points A . Par ces points passent les rayons du faisceau (α) correspondant à la droite β' et rencontrent la en le point α . De là suit que le point α appartient à la courbe S' et qu'il est multiple d'ordre a ou que la courbe S' est d'ordre $a + b$.

Nous avons donc ce théorème:

Une surface S étant le lieu d'intersection de deux figures jouissant de telle propriété que par un point A pris à volonté sur une droite arbitraire Q passe la première figure et la seconde correspondante rencontre la même droite en b points B , et inversement, que par un point B de Q passe la seconde figure pendant que la première correspondante rencontre Q en a points A , la surface S est d'ordre $(a + b)$.

6. *L'ordre des courbes gauches.* — Nous pouvons déterminer l'ordre d'une courbe gauche par une voie semblable à celle que nous avons suivie tout à l'heure.

Supposons que la courbe traitée K soit le lieu des points d'intersection

d'une courbe C avec une surface F , qui changent de positions suivant une certaine loi.

Nous déterminons l'ordre de la courbe K , en trouvant le nombre de points qu'elle peut avoir sur un plan arbitraire Q .

Ce plan rencontre la courbe C dans une de ses positions en des points c et la surface correspondante F en une courbe f . Quand un point c vient d'être placé sur la courbe correspondante f , ce point appartient à la courbe examinée K .

Afin que nous déterminions le nombre de telles positions du point c , qu'il se trouve sur sa courbe correspondante f , nous appliquons de nouveau de deux projections.

Projettons les points c d'un point arbitraire γ et les courbes f d'un autre point φ . Une droite projetante γc perce la surface conique correspondante φf en des points qui engendrent une courbe auxiliaire L . Il est clair que chaque point d'intersection de cette courbe avec le plan Q est en même temps le point de rencontre de la courbe K avec Q .

De là suit que, en déterminant l'ordre de L , nous connaissons de même l'ordre de la courbe K , ce qui exige la connaissance des quantités suivantes:

- 1.° le nombre p de courbes f qui correspondent à un point c ;
 - 2.° le nombre q de points c qui correspondent à une courbe f ;
 - 3.° l'ordre r de la courbe décrite par le point c sur le plan Q ;
 - 4.° le nombre t de courbes f passant par un point arbitraire du plan Q ;
- et enfin

5.° l'ordre f de la courbe f .

7. Cherchons le nombre de points en lesquels la courbe L rencontre un plan quelconque P passant par le point γ . Ce plan rencontre la courbe décrite sur Q par le point c en r points. A chacun de ces points correspondent p courbes f d'ordre f . Les surfaces coniques, ayant les courbes f pour lignes directrices et le point φ pour sommet, rencontrent les jonctions des points c avec γ en des points de la courbe L . Le nombre de ces points est donc égal à fpr .

Il nous reste encore à chercher, si le point γ appartient à la courbe. Pour cet effet, faisons passer par ce point les surfaces coniques et désignons le point de rencontre de la droite $\gamma\varphi$ avec le plan Q par d . Par ce point passent, comme on sait, t courbes f , et par conséquent par γ passent de même t surfaces coniques $f\varphi$.

A chacune de ces surfaces correspondent q points c ainsi que des rayons γc ,

dont chacun détermine sur la surface conique correspondante le point γ comme le point de la courbe L .

Il s'ensuit que γ est un point multiple d'ordre qt de la courbe L et que cette ligne est d'ordre

$$frp + qt,$$

parce que le plan Q la coupe en autant de points.

La courbe K est du même ordre. De là résulte ce théorème:

Quand les points d'une courbe K proviennent de l'intersection d'une courbe C avec une surface F qui forment deux systèmes correspondants de telle manière que, en coupant C en des points c et F en une courbe f par un plan arbitraire Q ,

la courbe f soit d'ordre f ;

t courbes f passent par un point quelconque du plan Q ;

le point c décrit une courbe d'ordre r sur Q ;

à une courbe f correspondent q points c ; et enfin

à un point c correspondent p courbes f , alors la courbe K est d'ordre

$$fpr + qt.$$

8. *L'ordre d'une courbe plane.* — Supposons que nous obtenons les points d'une courbe plane comme les points d'intersection des courbes correspondantes de deux faisceaux distincts.

Pour déterminer l'ordre de cette courbe, nous pouvons employer le même procédé que nous avons appliqué à une surface.

Les courbes d'un des faisceaux donnés rencontrent une droite arbitraire du plan en des points A et celles de l'autre faisceau en des points B .

Prenons un point A sur Q . Les courbes correspondantes de l'autre faisceau rencontrent la en b points B et réciproquement à un point B correspondent a points A .

Ainsi:

Le lieu des points d'intersection de deux faisceaux donnés est une courbe d'ordre

$$a + b.$$

Nous pouvons de là déduire une formule qui peut être employée directement.

9. Considérons deux faisceaux (F_1) , (F_2) de la première dimension et d'indices m_1 , m_2 de courbes F_1 , F_2 d'ordre f_1 , f_2 , dont les points de rencontre remplissent une courbe.

Quand à une courbe F_1 correspondent a courbes F_2 et à une courbe F_2 correspondent b courbes F_1 , la courbe dérivée doit être d'ordre

$$af_1m_1 + bf_2m_2.$$

En désignant le nombre de points obtenus directement sur une courbe quelconque du faisceau (F_1) par F_1 , nous pouvons écrire

$$\frac{af_1f_2}{f_1} \text{ au lieu de } af_2$$

et parce que $af_1f_2 = F_1$, nous avons

$$af_2 = \frac{F_1}{f_1}.$$

En faisant usage de cette notion aussi pour le second faisceau (F_2) , nous obtenons que l'ordre de la courbe dérivée est

$$m_1 \frac{F_1}{f_1} + m_2 \frac{F_2}{f_2}.$$

De là suit ce théorème:

Une courbe C est le lieu des points de rencontre des courbes d'ordres f_1, f_2 de deux faisceaux $(F_1), (F_2)$ de la première dimension et d'indices m_1, m_2 . F_1, F_2 soient les nombres de points obtenus directement sur deux courbes arbitraires F_1, F_2 des faisceaux $(F_1), (F_2)$. L'ordre de la courbe C est égal à la somme de deux termes, dont chacun est construit ainsi: on divise le nombre de points obtenus directement sur une courbe d'un des faisceaux donnés par l'ordre de cette courbe et on multiplie ce quotient par l'indice du faisceau auquel appartient cette courbe.

10. L'importance de ce théorème se manifeste principalement dans le cas, quand la courbe C provient de l'intersection des tangentes correspondantes de deux courbes A, B de classe α, β . a, b étant les nombres de points de la courbe C , que nous obtenons directement sur une tangente arbitraire respectivement de la courbe A, B , l'ordre de la courbe C est

$$\alpha a + \beta b.$$

III. Sur la surface engendrée par les points d'intersection de n surfaces.

11. Soit donné un faisceau (R) de surfaces R d'ordre r ; supposons que ce faisceau est de la dimension $n - 1$ et d'indice m_r . Outre cela soient données les courbes

$$(p_1), (p_2), \dots (p_n);$$

à chacune de ces courbes correspond un faisceau de surfaces de la première dimension; nous avons respectivement les faisceaux

$$(F_1), (F_2), \dots (F_n).$$

Une surface R du faisceau (R) rencontre les courbes $(p_1), (p_2), \dots$ en des points. Aux points ainsi obtenus sur (p_1) faisons correspondre les points sur

$$(p_2), (p_3), \dots (p_n),$$

et réciproquement.

Ces points déterminent les surfaces dans les faisceaux correspondants. Supposons que les surfaces passant par les points correspondants se correspondent de même. Prenons une à une des surfaces correspondantes; ces n surfaces T se rencontrent en des points.

Quand la surface R forme le dit faisceau (R) , il peut arriver que entre les points, dont nous venons de parler, se trouvent tels points que toutes les n surfaces correspondantes passent par ces points.

Quel est le lieu de ces points?

Pour déterminer ce lieu, considérons le cas quand $n = 3$. Il est clair que, quand nous prenons trois telles surfaces correspondantes F , c'est-à-dire une surface F_1 , une surface F_2 et une surface F_3 , ces surfaces correspondantes se rencontrent en des points, par chacun d'eux passent toutes ces trois surfaces F_1, F_2, F_3 .

Afin que nous trouvions le lieu de ces points, il faut montrer que sur une droite arbitraire se trouve un nombre fini de ces points ou qu'ils remplissent une surface.

12. Nous voulons d'abord démontrer que, n étant égal à 2, la courbe d'intersection de deux surfaces correspondantes F_1, F_2 engendre une surface.

Une droite arbitraire Q rencontre les surfaces F_1, F_2 en des points que nous désignons respectivement par A, B . Les points A correspondent aux points B .

Considérons un point pris à volonté sur la droite Q comme le point A . Par ce point passe un certain nombre de surfaces F_1 , dont chacune détermine sur (p_1) de même un nombre fixe de points; par chacun d'eux passe un certain nombre de surfaces R . Chacune de ces surfaces détermine sur (p_2) des points qui déterminent des surfaces F_2 rencontrant la droite Q en des points B correspondant au point A .

A un point A correspond, par conséquent, un nombre fixe de points B et, parce que cela a lieu aussi réciproquement, on voit, qu'il y a des points en

lesquels coïncident les points A avec leurs points correspondants B . Ce sont évidemment les points en lesquels la droite Q perce la surface engendrée par les courbes d'intersection des surfaces F_1, F_2 .

13. La même voie nous conduira au but demandé dans le cas de l'article 11. Un point quelconque p_3 sur (p_3) détermine dans le faisceau (R) un faisceau de la première dimension.

En considérant la surface F_3 passant par le point p_3 , la courbe d'intersection des surfaces correspondantes F_1, F_2 engendre, d'après le précédent, une surface qui rencontre la surface F_3 en une courbe d'une figure nouvelle. Nous montrerons que cette dernière figure rencontre la droite Q en des points, ou, en d'autres termes, qu'elle est une surface.

Supposons que la surface F_3 rencontre Q en des points A , et que la surface engendrée par les autres surfaces correspondantes coupe cette droite en des points B .

Par un point A pris à volonté sur Q passent des surfaces F_3 qui déterminent sur (p_3) les points p_3 . Ces points déterminent des faisceaux de la première dimension; à chacun d'eux correspond une surface auxiliaire rencontrant Q en des points B .

A un point A correspond donc un nombre fixe de points B , et réciproquement. Car un point arbitraire B sur Q détermine les surfaces F_1, F_2 qui rencontrent les courbes $(p_1), (p_2)$ respectivement en des points p_1, p_2 .

Chacun des points p_1 détermine avec un des points p_2 une surface R rencontrant (p_3) en des points qui déterminent les surfaces F_3 . Ces surfaces coupent la droite Q en des points A . C. Q. F. D.

Par conséquent nous obtenons sur Q de nouveau des points en lesquels coïncide un point A avec son point correspondant B . Il est clair que ce sont les points en lesquels la droite Q perce la figure engendrée par les points d'intersection des surfaces correspondantes F_1, F_2, F_3 .

14. En connaissant ces résultats pour $n = 2$ et $n = 3$, nous pouvons les étendre à un nombre arbitraire, c'est-à-dire nous pouvons démontrer que ces résultats sont valables pour n quand cela a lieu pour $n - 1$.

Considérons alors un faisceau R de la dimension $n - 2$, puis $n - 1$ courbes p_1, p_2, \dots, p_{n-1} et enfin autant de faisceaux $(F_1), (F_2), \dots, (F_{n-1})$ correspondants de la première dimension. Supposons qu'il y a toujours un certain nombre de points par lesquels passent toutes $n - 1$ surfaces correspondantes F_1, F_2, F_{n-1} , et que tous ces points remplissent une surface S_{n-1} .

Considérons maintenant un faisceau (R) de la dimension $n - 1$, et ajoutons encore une courbe (p_n) et son faisceau correspondant (F_n) .

Une droite arbitraire Q rencontre les surfaces F_n en des points A . En prenant le point p'_n sur (p_n) , par lequel passe une telle surface F_n , pour point du faisceau (R) , nous obtenons un nouveau faisceau de la $(n-2)^{\text{ième}}$ dimension, duquel nous pouvons déduire une nouvelle surface S_{n-1} qui rencontre Q en des points B .

Nous voyons que, en prenant un point A sur Q , par ce point passe un nombre fixé de surfaces F_n qui rencontrent la courbe (p_n) en des points déterminant les faisceaux (R) de la dimension $n-2$. Ces faisceaux déterminent des surfaces S_{n-1} qui rencontrent la droite Q en des points B .

Il suit de là que à un point A correspond un nombre fini de points B .

La même chose a lieu quand nous commençons par un point B , qui détermine des surfaces dans les faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_{n-1})$ rencontrant leurs courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots (p_{n-1})$ en des points. En prenant un à un de ces points sur chaque courbe, il détermine une ou plusieurs surfaces R qui fournissent les points p_n par lesquels passent les surfaces F_n déterminant les points correspondants A .

Nous voyons donc que à un point B correspond un nombre fini de points A . Il y a ainsi des points A qui coïncident avec leurs points correspondants B . Ces points sont évidemment ceux, en lesquels la droite Q rencontre le lieu des points provenant de l'intersection des surfaces correspondantes F ; ce que nous pouvons définir ainsi:

Il y a en vérité un nombre infini de points dans l'espace par lesquels passent simultanément les surfaces correspondantes de tous faisceaux; ces points remplissent une surface.

IV. L'ordre de la surface S_2 .

15. La même voie, que nous avons suivie en démontrant que le lieu des points de rencontre de toutes les surfaces correspondantes des faisceaux (F) est une surface S_n , nous conduit à la détermination de l'ordre s_n de cette surface.

Nous allons dériver une formule, dont nous pouvons démontrer qu'elle est valable pour n , quand elle est correcte pour $n-1$. Commençons par $n=2$.

16. Soient données:

un faisceau (R) de la première dimension et d'indice m_2 de surfaces R du $r^{\text{ième}}$ ordre;

Annali di Matematica, tomo XIV.

les courbes $(p_1), (p_2)$ d'ordres p_1, p_2 ; et enfin
 les faisceaux $(F_1), (F_2)$ de la première dimension, d'indices m_1, m_2 , de surfaces d'ordres f_1, f_2 .

Une surface R rencontre les courbes $(p_1), (p_2)$ en rp_1 points p_1 et en rp_2 points p_2 . Chaque point p_1 détermine m_1 surfaces F_1 , et chaque p_2 détermine m_2 surfaces F_2 .

Les surfaces F_1 , ainsi obtenues, rencontrent les surfaces F_2 , qui leurs correspondent suivant la loi indiquée, en des courbes qui remplissent une surface S_2 . L'ordre de cette surface peut être déterminé de la manière que nous avons exposée dans l'article 4.

Supposons que les surfaces F_1 rencontrent Q en des points A et leurs surfaces correspondantes la coupent en des points B . Un point arbitraire A sur Q détermine m_1 surfaces F_1 du faisceau (F_1) rencontrant la courbe (p_1) en $f_1 m_1 p_1$ points p_1 . Chacun d'eux détermine m_2 surfaces R coupant la courbe (p_2) en

$$f_1 m_1 m_r p_1 p_2 r$$

points p_2 , dont chacun détermine m_2 surfaces F_2 qui coupent, par conséquent, la droite Q en

$$f_1 f_2 m_1 m_2 m_r p_1 p_2 r$$

points B correspondant au point A . Nous obtenons par le même raisonnement que à un point B correspondent

$$f_1 f_2 m_1 m_2 m_r p_1 p_2 r$$

points A .

Nous trouvons ainsi

$$2 f_1 f_2 m_1 m_2 m_r p_1 p_2 r$$

points A sur Q , qui coïncident avec leurs points correspondants B . Ces points sont évidemment ceux, en lesquels la droite Q perce la surface S_2 . Cette surface est donc d'ordre

$$s_2 = 2 f_1 f_2 m_1 m_2 m_r p_1 p_2 r.$$

Pour abrégé, nous écrirons dans ce qui va suivre les produits partiels ainsi:

$$F_n = f_1 f_2 \dots f_n$$

$$M_n = m_1 m_2 \dots m_n$$

$$P_n = p_1 p_2 \dots p_n.$$

En faisant usage de cette notation, nous pouvons donc écrire la formule précédente comme il suit:

$$2 r m_r F_2 M_2 P_2.$$

V. L'ordre de la surface S_n .

17. Quand nous avons résolu le problème pour $n = 2$, nous pouvons le faire aussi quand n est d'une grandeur arbitraire.

Supposons que soient données: un faisceau (R) de la dimension $n - 1$ et d'indice m_r de surfaces R d'ordre r ; les faisceaux (F_1), (F_2), ... (F_n) de la première dimension et d'indices m_1, m_2, \dots, m_n de surfaces F_1, F_2, \dots, F_n respectivement d'ordre f_1, f_2, \dots, f_n , et enfin les courbes (p_1), (p_2), ... (p_n) d'ordres p_1, p_2, \dots, p_n à l'aide desquelles nous établissons la correspondance des surfaces F_1, F_2, \dots, F_n .

18. La construction de la surface S_n est la suivante. Une surface R rencontre les courbes (p_1), (p_2), ... (p_n) en points correspondants de telle manière que aux points, ainsi obtenus sur (p_1), correspondent tous les points déterminés par la même surface R sur les autres courbes.

Sur chacune des courbes on prend un à un point correspondant qui détermine dans le faisceau (F) correspondant des surfaces qui sont appelées les correspondantes, quand elles passent par les points correspondants.

Quand n de ces surfaces correspondantes, prises une à une dans chacun des faisceaux, passent par un point s , ce point appartient à la surface S_n .

19. Considérons de nouveau une droite arbitraire Q . En prenant sur (p_n) un point p_n , par ce point passent m_n surfaces (F_n) qui rencontre Q en des points A .

Le point p_n détermine dans le faisceau (R) un faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension, duquel on peut déduire à l'aide des courbes (p_1), (p_2), ... (p_{n-1}) et des faisceaux (F_1), (F_2), ... (F_{n-1}) une nouvelle surface S_{n-1} qui rencontre la droite Q en des points B . Nous allons déterminer le nombre de point B correspondant à un point arbitraire A , et viceversa.

Considérons un point A sur Q . Par ce point passent m_n surfaces F_n du faisceau (F_n), qui coupent la courbe (p_n), en général, en $f_n m_n p_n$ points, dont chacun détermine dans le faisceau (R) un faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension déterminant la surface S_{n-1} qui rencontre Q en s_{n-1} points B correspondant au point A .

A un point A correspondent donc

$$f_n m_n p_n s_{n-1}$$

points B.

Suivons la voie inverse et prenons sur Q un point B . Ce point détermine m_1 surfaces F_1 dans le faisceau (F_1) rencontrant la courbe (p_1) en général en $f_1 m_1 p_1$ points p_1 .

Le point B détermine de même m_2 surfaces F_2 dans le faisceau (F_2) , qui coupent la courbe (p_2) en $f_2 m_2 p_2$ points, etc. Dans le faisceau (F_{n-1}) nous obtenons m_{n-1} surfaces F_{n-1} qui rencontrent (p_{n-1}) en $f_{n-1} m_{n-1} p_{n-1}$ points p_{n-1} . Prenons de tous ces points correspondants un à un sur chaque courbe (p) . Ces $n - 1$ points déterminent m_r surfaces R dans le faisceau (R) . Il est clair que nous obtenons de tels groupes à $n - 1$ points en général

$$f_1 f_2 \dots f_{n-1} m_1 m_2 \dots m_{n-1} p_1 p_2 \dots p_{n-1}$$

ou abrégé

$$F_{n-1} M_{n-1} P_{n-1}.$$

Chacun de ces groupes détermine m surfaces R dont chacune rencontre (p_n) en $r p_n$ points. Par chacun d'eux passent m_n surfaces F_n qui coupent la droite Q en des points A correspondant au point B .

À un point B correspondent donc

$$m_r r F_n M_n P_n$$

points A .

Nous voyons ainsi que sur la droite Q se trouvent

$$f_n m_n p_n s_{n-1} + m_r r F_n M_n P_n$$

points en lesquels coïncident les points A avec leurs points correspondants B , qui sont évidemment les points d'intersection de la droite Q avec la surface S_n . Cette surface est donc d'ordre

$$s_n = m_r r F_n M_n P_n + f_n m_n p_n s_{n-1}.$$

Parce que pour $n = 2$

$$s_2 = 2 r m_r F_2 M_2 P_2$$

et pour $n = 3$

$$s_3 = 3 r m_r F_3 M_3 P_3$$

d'où l'on peut conclure que la formule générale ait la forme

$$s_n = n r m_r F_n M_n P_n,$$

car si elle est valable pour s_{n-1} , on obtiendra pour n

$$s_n = m_r r F_n M_n P_n + f_n m_n p_n r F_{n-1} M_{n-1} P_{n-1},$$

ce qui prouve que la formule précédente est exacte, puisqu'elle est correcte pour $n = 3$; ainsi

$$s_n = n m_r r F_n M_n P_n.$$

VI. Cas particuliers.

20. Quand $n = 3$ nous avons ce théorème:

Un faisceau de la seconde dimension de surfaces détermine des points sur trois courbes, par lesquels passent les surfaces de leurs faisceaux correspondants; ces surfaces se rencontrent en des points d'une surface nouvelle qui est d'ordre

$$s_3 = 3 m_r r F_n M_n P_n.$$

21. Supposons que les surfaces de tous les faisceaux sont du second ordre, que les faisceaux sont d'indice 1 et que les lignes (p) deviennent des droites; alors

$$s_3 = 3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 48.$$

22. Considérons une surface appartenant au faisceau (F_1) et une autre surface du faisceau (F_2) ; ces surfaces se rencontrent en une courbe du quatrième ordre dont les points d'intersection avec la surface S_3 nous allons déterminer.

Les surfaces F_1, F_3 rencontrent respectivement les droites $(p_1), (p_2)$ en des points qui, étant quatre, déterminent quatre groupes de deux à deux points, et par conséquent ils déterminent autant de surfaces R , dont chacune rencontre la droite (p_3) en deux points déterminant une à une surface F'_3 .

Il suit de là que nous obtenons ainsi sur la dite courbe d'intersection du quatrième ordre directement

$$8 \cdot 8 = 64$$

points.

Seulement il faut que sur cette courbe soient $4 \cdot 48 = 192$ tels points. Outre cela, on voit que ce sont tous les points qui résultent de surfaces générales du second ordre (tous les faisceaux sont donc du premier indice).

De là suit que les points de rencontre de la dite courbe du quatrième ordre avec les courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2)$ appartiennent à la courbe considérée. Il y en a seize. Ils sont, par conséquent, les points multiples d'ordre 8. Nous voyons donc que les courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2)$ sont les lignes multiples d'ordre 8 sur la surface S_3 , ce que nous trouverons justifié plus loin.

23. Toutes les conditions restent les mêmes comme précédemment, seulement $n = 2$; la surface S_2 est d'ordre

$$s_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = 16.$$

Une surface F_1 du faisceau (F_1) rencontre la droite (p_1) en deux points qui déterminent deux surfaces R , dont chacune coupe la droite (p_2) en deux points. Chacun d'eux détermine une surface F_2 . Sur la surface F_1 se trouvent donc quatre courbes du quatrième ordre de la surface S_2 . Il nous manque encore une partie de la courbe d'intersection des surfaces F_1, S_2 . C'est la courbe fondamentale du faisceau (F_1) , qui est une ligne multiple d'ordre 4 sur la surface S_2 ; de même la courbe fondamentale du faisceau (F_2) est une ligne multiple d'ordre 4 sur S_2 .

24. Quand le faisceau (R) consiste en des plans, nous obtenons dans le premier cas une surface d'ordre 16, ayant les courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2)$ pour lignes multiples d'ordre 4 et dans le second cas une surface S_2 du huitième ordre, qui possède les courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2)$ comme les lignes multiples d'ordre 2.

25. Dans le cas que les surfaces R et F sont des plans et $n = 2$, nous retrouvons la génération bien connue des surfaces gauches au moyen de trois surfaces développables des classes m_1, m_2, m_3 . L'ordre de la surface engendrée est d'après la formule générale

$$s_2 = 2 m_1 m_2 m_3,$$

ce qui est d'accord avec le résultat connu.

26. Si tous les faisceaux étaient les faisceaux de plans ou les surfaces développables, n étant égal à 3, nous obtenons une surface engendrée par les points, qui est d'ordre

$$s_3 = 3 m_1 m_2 m_3 m_r,$$

et quand les faisceaux de plans sont les faisceaux ordinaires, la surface obtenue est une surface générale du troisième ordre.

Nous sommes parvenu à ces deux résultats par une autre voie, c'est-à-dire par un mode analogue au procédé de MAC-LAURIN.

27. Considérons le cas intéressant quand $n = 4$ et (R) est un faisceau de plans de la troisième dimension ou, en d'autres termes, quand (R) est le système de plans qui remplissent tout l'espace indéfini.

Quand

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 2, \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$$

et

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1,$$

la surface S_4 est d'ordre

$$s_4 = 4 \cdot 2^4 = 64.$$

Nous pouvons de même démontrer, comme dans le précédent, que les courbes fondamentales des faisceaux (F) sont les lignes multiples d'ordre 8 de la surface S_4 .

28. Considérons enfin le cas quand $n = 4$ et toutes les autres quantités sont égaux à 1; la surface engendrée est du quatrième ordre.

Les points de cette surface jouissent de telle propriété que par chacun d'eux passe un à un des plans de quatre faisceaux de plans, qui rencontrent leurs quatre droites correspondantes en des points qui sont situés sur un même plan.

En prenant deux plans F_1, F_2 des faisceaux (F_1), (F_2), ces plans se rencontrent en une droite et coupent les droites (p_1), (p_2) en les points p_1, p_2 . Ces points déterminent un faisceau de plans (R) de la première dimension, duquel on peut déduire une surface réglée du second ordre, qui rencontre la droite F_1, F_2 en des points de la surface S_4 .

Il est clair que les axes des faisceaux (F_1), (F_2) et par conséquent de même ceux des faisceaux (F_3), (F_4) sont les génératrices de la surface S_4 .

VII. Sur la courbe qui est le lieu des points d'intersection des surfaces de trois faisceaux.

29. La courbe gauche peut être engendrée par la même manière comme la surface. Considérons d'abord seulement trois faisceaux de surfaces F , ce qui est le cas le plus simple. Soient données:

un faisceau (R) de la première dimension, d'indice m_r de surfaces d'ordre r ;

trois courbes (p_1), (p_2), (p_3) respectivement d'ordre p_1, p_2, p_3 ; et enfin

trois faisceaux (F_1), (F_2), (F_3) de surfaces, qui sont de la première dimension et d'indices m_1, m_2, m_3 , les surfaces F_1, F_2, F_3 étant respectivement d'ordre f_1, f_2, f_3 .

Une surface arbitraire R du faisceau (R) rencontre de même les courbes (p_1), (p_2), (p_3) en des points qui se correspondent de telle manière que les points ainsi obtenus sur une de ces courbes correspondent aux points sur les autres courbes.

Chacun de ces points d'intersection de la surface R avec les courbes (p) détermine un nombre de surfaces dans le faisceau correspondant (F); les surfaces passant par les points correspondants soient appelées de même les surfaces correspondantes.

En prenant dans chacun des faisceaux une à une surface correspondante, ces trois surfaces F_1, F_2, F_3 se rencontrent en des points qui engendrent une courbe, quand la surface R engendre le faisceau (R).

30. Déterminons les points d'intersection de cette courbe avec un plan arbitraire Q par le procédé que nous avons indiqué en 4.

Une surface quelconque F_1 rencontre (p_1) en des points, dont chacun détermine des surfaces (R). Chacune d'elles coupe la courbe (p_2) en des points p_2 et la courbe (p_3) en des points p_3 . Les surfaces du faisceau (F_2) passant par les points p_2 et celles du faisceau (F_3) passant par p_3 sont toutes les surfaces qui correspondent à la surface F_1 prise à volonté dans le faisceau (F_1).

Ces surfaces F_2, F_3 se rencontrent une à une en une courbe ($F_2 F_3$) qui perce la dite surface F_1 en des points de la courbe C_3 . Nous nous servirons de ce mode de génération de la courbe C_3 à la détermination de son ordre.

Supposons que la surface F_1 rencontre le plan Q en une courbe f et la courbe ($F_2 F_3$) le coupe en un point c . Si nous considérons un point du plan Q comme le point c , nous savons qu'il résulte de l'intersection de ce plan avec une certaine courbe ($F_2 F_3$), et, par conséquent, qu'il correspond à une certaine surface R qui rencontre (p_1) en $r p_1$ points dont chacun détermine m_1 surfaces F_1 et chacune d'elles détermine une courbe f . Donc

à un point c correspondent $m_1 p_1 r$ courbes f .

En prenant une surface F_1 et par suite aussi une courbe f , cette surface rencontre (p_1) en $f_1 p_1$ points qui déterminent $m_2 f_1 p_1$ surfaces R , dont chacune rencontre (p_2) en $r p_2$ points p_2 et (p_3) en $r p_3$ points p_2 . Chaque point p_2 détermine m_2 surfaces F_2 et chaque point p_3 détermine m_3 surfaces F_3 .

Ces surfaces F_2, F_3 se rencontrent en

$$m_r m_2 m_3 r^2 p_1 p_2 f_1$$

courbes ($F_2 F_3$), dont chacune perce le plan Q en $f_2 f_3$ points. Donc

à une courbe f correspondent

$$f_1 f_2 f_3 m_2 m_3 m_r p_1 p_2 p_3 r^2$$

points c .

Il suit de ce que nous avons trouvé quant aux surfaces, que les courbes ($F_2 F_3$) remplissent une surface d'ordre

$$2 f_2 f_3 m_2 m_3 m_r p_2 p_3 r,$$

qui rencontre le plan Q en une courbe engendrée par le point c sur Q . Ainsi le point c engendre une courbe d'ordre

$$2 f_2 f_3 m_2 m_3 m_r p_2 p_3 r.$$

Par un point arbitraire dans l'espace passent m_1 surfaces F_1 et par conséquent de même autant de courbes f passent par un point du plan Q . Donc
par un point quelconque du plan Q passent m_1 courbes f qui sont d'ordre f_3 .

À l'aide de ce que nous avons démontré dans le paragraphe II nous pouvons dire que la courbe C_3 est d'ordre

$$c_3 = 2f_1f_2f_3m_1m_2m_3m_r p_1p_2p_3r^2 + f_1f_2f_3m_1m_2m_3m_r p_1p_2p_3r^2$$

ou

$$c_3 = (1 + 2)m_r r^2 F_3 M_3 P_3.$$

VIII. Sur la courbe qui est le lieu des points d'intersection des surfaces de n faisceaux.

31. Comme dans nos recherches sur les surfaces nous avons déterminé l'ordre d'une surface S_n en connaissant l'ordre d'une surface S_{n-1} , nous pouvons appliquer la même voie quant aux courbes.

Soient données:

un faisceau (R) de la $(m - 2)^{\text{ième}}$ dimension et d'indice m_r de surfaces d'ordre r ; puis

les courbes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$ respectivement d'ordre $p_1, p_2, \dots p_n$; et enfin

les faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ de la première dimension et d'indices $m_1, m_2, \dots m_n$ de surfaces $F_1, F_2, \dots F_n$ respectivement d'ordre $f_1, f_2, \dots f_n$.

Faisons correspondre les surfaces du faisceau (F_1) aux points de la courbe (p_1) , etc. Une surface R détermine sur les courbes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$ des points correspondants. Les surfaces de ces faisceaux passant par les points correspondants sur les courbes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$ soient appelées de même correspondantes.

32 Prenons une à une de chacun de ces groupes de surfaces correspondantes F .

Ces n surfaces, prises trois à trois, se rencontrent en des points. Quand la surface R change de position, il peut arriver que toutes ces n surfaces se rencontrent en un point. On voit très-aisément que le lieu de ces points est une courbe dont l'ordre nous allons déterminer.

Cherchons le nombre de points de rencontre de cette courbe avec un plan arbitraire Q .

Négligeons la courbe (p_n) et son faisceau correspondant (F_n) . Nous pouvons dériver une surface S_{n-1} du faisceau (R) et des autres $n - 1$ faisceaux (F) . La surface S_{n-1} rencontre Q en une courbe que nous voulons considérer comme le lieu des points c .

En effet nous pouvons obtenir la surface S_{n-1} comme le lieu des courbes d'intersection d'une surface arbitraire F_{n-1} avec la surface correspondante S_{n-2} ; à chacune de ces courbes $(F_{n-1} S_{n-2})$ correspond évidemment un certain nombre de surfaces F_n du faisceau (F_n) , et nous obtenons les points de la courbe S_n comme les points de rencontre des courbes $(F_{n-1} S_{n-2})$ avec les surfaces correspondantes F_n du faisceau (F_n) .

Il faut donc que nous connaissions les quantités nécessaires à la détermination de l'ordre de la courbe S_n .

A un point arbitraire c (qui est proprement dit le point de la courbe $Q S_{n-1}$) correspond une seule surface R , de laquelle ce point avait été dérivé. Cette surface R rencontre (p_n) en $r p_n$ point et chacun d'eux détermine m_n surfaces F_n du faisceau (F_n) , dont chacune rencontre Q en une courbe f . Donc
à un point c correspondent $m_n p_n r$ courbes f .

Une surface F_n rencontre Q en une courbe f et la courbe (p_n) en $f_n p_n$ points, dont chacun détermine en (R) un autre faisceau (R') de la $(n - 3)^{\text{ième}}$ dimension. Nous pouvons dériver de ce faisceau à l'aide des autres faisceaux la courbe C_{n-1} rencontrant le plan Q en les points c correspondant à la courbe f . Ainsi

à une courbe arbitraire f correspondent $c_{n-1} f_n p_n$ points c . Le lieu de ces points sur Q est une courbe d'ordre s_{n-1} . Par un point arbitraire du plan Q passent évidemment m_n surfaces F_n et par conséquent autant de courbes f . L'ordre de la courbe f est f_n .

Cela nous apprend, ayant égard au paragraphe II, que la courbe C_n est d'ordre

$$c_n = r f_n m_n p_n s_{n-1} + c_{n-1} f_n m_n p_n$$

et puisque

$$s_{n-1} = (n - 1) r m_r F_{n-1} M_{n-1} P_{n-1},$$

nous obtenons

$$c_n = (n - 1) r^2 m_r F_n M_n P_n + c_{n-1} f_n m_n p_n.$$

En traitant la courbe C_3 , nous avons vu que

$$c_3 = 3 r^2 m_2 F_3 M_3 P_3.$$

Nous pouvons écrire le coefficient 3 sous la forme

$$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \quad \text{ou en général} \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Supposons que pour C_{n-1} la formule

$$c_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} r^2 m_r F_{n-1} M_{n-1} P_{n-1}$$

est valable, alors pour C_n nous obtenons

$$c_n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 m_r F_n M_n P_n$$

et puisque pour $n = 3$ elle est exacte, alors elle est exacte en général; nous avons donc

$$c_n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 m_r F_n M_n P_n.$$

IX. Cas particuliers.

33. *Courbe du troisième ordre.* — En supposant que $n = 3$ et toutes les autres quantités sont égales à 1, nous obtenons une courbe du troisième ordre.

Un plan R du faisceau (R) rencontre les droites (p_1) , (p_2) , (p_3) en des points, par lesquels passent respectivement les plans F_1 , F_2 , F_3 qui se rencontrent en un point d'une courbe du troisième ordre.

Nous trouvons que sur un plan du faisceau (F_1) se trouve un seul point ou que l'axe du faisceau (F_2) contient deux points de la courbe; la même propriété jouissent les axes des autres deux faisceaux.

Cette construction de la courbe du troisième ordre est un cas particulier de la génération des surfaces et des courbes due à MAC-LAURIN que nous avons généralisée ailleurs.

34. *Courbe du sixième ordre.* — Supposons que (R) soit un faisceau de plans de la deuxième dimension et du premier indice, ou, en d'autres termes, il est un faisceau de plans déterminés par un seul point r . Les lignes (p_1) , (p_2) , (p_3) , (p_4) soient des droites et (F_1) , (F_2) , (F_3) , (F_4) soient des faisceaux de la première dimension et du premier indice; alors ce sont des plans passant par les droites D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , n étant égal à 4.

Considérons un plan arbitraire F'_4 du faisceau (F_4) qui rencontre (p_4) en un point p'_4 . Ce point détermine avec r un faisceau de plans de la première dimension et du premier indice. Par conséquent, on en peut déduire, à l'aide des droites (p_1) , (p_2) , (p_3) et des faisceaux (F_1) , (F_2) , (F_3) , une cubique gauche. Cette courbe perce le plan F'_4 en des points qui appartiennent évidemment à

la courbe C_4 . Puisque nous n'obtenons sur ce plan que ce point, il suit de là que l'axe D_4 en contient trois.

Les points situés sur D_4 nous trouvons ainsi: omettons le faisceau (F_4) et la droite (p_4) . Du faisceau (R) à l'aide des faisceaux (F_1) , (F_2) , (F_3) nous pouvons construire une surface S_3 qui est du troisième ordre.

Elle rencontre D_4 en trois points qui sont les points de la courbe C_4 . Donc

La courbe C_4 rencontre chacun des axes des faisceaux (F_1) , (F_2) , (F_3) , (F_4) en trois points.

35. *Courbe C_5 du dixième ordre.* — Considérons un faisceau (R) de plans, qui est de la troisième dimension, ou en d'autres termes, dont les plans ne sont pas déterminés et remplissent tout l'espace. De là suit que $n = 5$. Cette condition exige que soient données cinq courbes $(p_1), \dots (p_5)$ et autant de faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_5)$ qui sont de la première dimension et du premier indice, c'est-à-dire ce sont des plans passant par cinq droites D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 .

Un plan quelconque F'_5 du faisceau (F_5) rencontre (p_5) en le point p'_5 qui détermine un faisceau de plans de la seconde dimension duquel on peut dériver à l'aide des faisceaux (F_1) , (F_2) , (F_3) , (F_4) et des droites (p_1) , (p_2) , (p_3) , (p_4) une courbe du sixième ordre (l'article précédent). Cette courbe rencontre le plan F'_5 en six points d'une courbe C_5 du dixième ordre qui coupe, par conséquent, chacun des axes des faisceaux (F) en quatre points. Ainsi:

Chacun des axes de cinq faisceaux (F) rencontre la courbe C_5 en quatre points; et

un plan arbitraire d'un des faisceaux (F) coupe cette courbe encore en six points.

Les points de rencontre des axes de ces faisceaux avec la courbe C_5 peuvent être déterminés comme il suit.

En cherchant les points c_5 sur D_5 , nous faisons usage seulement de quatre faisceaux (F) et de quatre courbes (p) qui déterminent avec un faisceau de plans de la troisième dimension une surface S_3 du quatrième ordre. Cette surface rencontre la droite D_5 en des points de la courbe C_5 ; de même pour les autres axes D_1, D_2, D_3, D_4 des faisceaux (F) .

36. *Autres cas particuliers.* — Achevons en peu de mots encore quelques autres cas particuliers de la construction des courbes.

Supposons que le faisceau (R) de plans soit de la première dimension et du premier indice et que tous les trois faisceaux (F) de surfaces du second ordre soient de même de la première dimension et d'indice 1, et enfin que les lignes (p) soient des droites.

Alors la courbe C_3 est d'ordre

$$c_3 = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

Une surface arbitraire F'_3 rencontre la droite (p_3) en deux points, dont chacun détermine un plan rencontrant (p_1) , (p_2) en des points; chacun d'eux détermine une surface du second ordre; ces surfaces se rencontrent en une biquadratique gauche qui perce F'_3 en huit points. Nous obtenons ainsi seize points directement.

En négligeant le faisceau (F_3) , nous obtenons une surface S_2 du huitième ordre qui rencontre la courbe fondamentale du faisceau (F_3) en 32 points qui appartiennent évidemment à la courbe C_3 .

D'où il suit que

La courbe C_3 possède 32 points sur chaque courbe fondamentale des faisceaux (F) .

37. Les courbes du 24^{ième} ordre résultent aussi des faisceaux de plans quand les courbes (p) sont des coniques.

Un plan quelconque F_3 rencontre (p_3) en deux points dont chacun détermine un plan R et chacun de ces plans coupe les coniques (p_1) , (p_2) en deux à deux points. De là résulte que nous obtenons de chacun des plans R quatre droites F_1 , F_2 , qui percent F_3 en des points de la courbe C_3 . Nous obtenons alors sur chaque plan (F_3) huit points directement. En omettant le faisceau (F_3) et la conique (p_3) , le faisceau (R) détermine une surface S_2 du huitième ordre. Cette surface rencontre D_1 en huit points qui sont les points doubles, ce qui prouve le raisonnement suivant.

A un de ces points correspond un seul plan R qui rencontre (p_3) en deux points et chacun d'eux détermine un plan F_3 . Ces deux plans ainsi obtenus fournissent le même point. Donc

La courbe C_3 est du 24^{ième} ordre douée des 24 points doubles qui sont situés huit à huit sur trois droites.

38. Considérons encore le cas quand $n = 3$, toutes les lignes (p) sont des droites, (R) est un faisceau de plans de la première dimension et d'indice 1, et enfin (F) sont les faisceaux de la première dimension de surfaces d'ordre f .

La courbe C_3 est donc d'ordre

$$c_3 = 3f^3.$$

Ainsi:

Sur une surface quelconque d'un faisceau se trouvent f^3 points. Chacunes des courbes fondamentales des faisceaux contient $2f^3$ points de la courbe C_3 .

X. Décomposition des figures dérivées.

39. La surface dérivée se décompose, quand un point fondamental a du faisceau (F_n) se trouve sur (p_n) .

Considérons la position de la surface R , quand elle passe par ce point a . Ce point détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension, qui avec les autres $(n - 1)$ faisceaux, excepté (F_n) , détermine une surface S_{n-1} . Quand nous voulons déterminer la surface F_n , nous trouvons qu'elle est indéterminée, parce que par ce point passe une infinité de surfaces du faisceau (F_n) .

Nous voyons donc que la surface S_{n-2} fait une partie de la surface S_n . D'où il suit que

Un faisceau, ayant un de ses points fondamentaux sur la courbe correspondante, ce point détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau d'une dimension inférieure, dont la surface dérivée à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux fait une partie de la surface S_n .

40. La surface S_n se décompose, quand la courbe fondamentale du faisceau (R) rencontre (p_n) en un point a .

Ce point détermine m_n surfaces F_n du faisceau (F_n) . Considérons une de ces surfaces et un de ses points f . Nous pouvons démontrer que ce point appartient à la surface S_n .

Ce point f détermine dans chacun des autres $n - 1$ faisceaux plusieurs surfaces, dont chacune rencontre la courbe correspondante en des points. En prenant un à un point de ces groupes, nous obtenons $n - 1$ points qui déterminent des surfaces R , dont chacune rencontre (p_n) au point a et par conséquent la surface F_n passant par a correspond aux surfaces des autres faisceaux, qui passe par le point f .

Puisque par le point f passent n surfaces correspondantes et ce point, étant pris à volonté sur la surface F_n qui passe par a , nous pouvons donc dire que

Quand un point fondamental du faisceau (R) se trouve sur la courbe (p_n) , les surfaces du faisceau (F_n) , qui passent par ce point forment les parties de la surface générale de S_n .

41. Nous allons démontrer que la même chose a lieu quant aux courbes.

Le faisceau (F_n) a un de ses points fondamentaux a sur la courbe correspondante (p_n) .

Le point a détermine dans le faisceau (R) un nouveau faisceau de la $(n - 3)^{\text{ième}}$ dimension, duquel on peut dériver à l'aide des autres $n - 1$ faisceaux une courbe C_{n-1} . Cette courbe fait évidemment une partie de la courbe C_n , parce que chaque surface F_n correspond aux surfaces qui engendrent la courbe C_{n-1} . Par conséquent chaque point de la courbe C_{n-1} appartient à la courbe C_n .

Donc

Quand un faisceau (F) a un de ses points fondamentaux sur la courbe correspondante (p) , ce point détermine dans le faisceau (R) un nouveau faisceau de la dimension inférieure et la courbe C_{n-1} , dérivée de ce faisceau à l'aide des autres faisceaux de surfaces, fait une partie de la courbe générale C_n .

42. La courbe (p_n) passe par un point fondamental du faisceau (R) de la $n^{\text{ième}}$ dimension.

Le faisceau (R) de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension détermine à l'aide des autres $n - 1$ faisceaux une surface S_{n-1} qui rencontre les surfaces du faisceau (F_n) , passant par le point a , en des courbes qui sont évidemment les parties de la courbe C_n .

Nous avons donc ce théorème:

Quand un point fondamental du faisceau (R) est situé sur une des courbes (p) , alors les courbes d'intersection des surfaces du faisceau correspondant à (p) , qui passent par ce point, avec la surface dérivée du faisceau (R) à l'aide des autres faisceaux, font les parties de la courbe C_n .

XI. L'ordre de la surface dégénérée.

43. Supposons que les courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ rencontrent leurs courbes correspondantes $(p_1), (p_2), (p_3), \dots (p_n)$ en les points F_1, F_2, \dots, F_n , puis que la courbe fondamentale du faisceau (R) coupe les mêmes courbes en des points R_1, R_2, \dots, R_n .

Quand nous voulons déterminer l'ordre de la surface S_n , nous suivons la même voie comme dans le cas général et soustrayons alors les dits points fondamentaux du nombre général.

44. Appliquons de nouveau une droite Q . En prenant un point arbitraire p'_n sur (p_n) , ce point détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension, duquel nous pouvons dériver une surface S_{n-1} à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux et des courbes. Cette surface rencontre Q en les points B et les surfaces F_n du faisceau (F_n) , qui passent par le point p'_n , coupent la droite Q en les points A correspondant aux points B .

Considérons un point quelconque de la droite Q comme le point B .

Par ce point passent m_1 surfaces F_1 du faisceau (F_1) , dont chacune rencontre la courbe (p_1) outre les dits points fondamentaux encore en $f_1 p_1 - F_1$ points. Ce point B détermine de même m_2, m_3, \dots, m_{n-1} surfaces F_2, F_3, \dots, F_{n-1} des faisceaux $(F_1), (F_2), \dots, (F_{n-1})$, et ces surfaces rencontrent les courbes correspondantes $(p_2), (p_3), \dots, (p_{n-1})$ outre les points fondamentaux encore en

$$f_2 p_2 - F_2, \quad f_3 p_3 - F_3, \dots, \quad f_{n-1} p_{n-1} - F_{n-1}$$

points qui, étant pris un à un sur chaque courbe, déterminent chaque fois m_r surfaces R . Ces points déterminent en entier

$$m_r M_{n-1} (f_1 p_1 - F_1) (f_2 p_2 - F_2) \dots (f_{n-1} p_{n-1} - F_{n-1})$$

surfaces R .

Pour abrégé, écrivons au lieu de terme

$$(f_1 p_1 - F_1) (f_2 p_2 - F_2) \dots (f_{n-1} p_{n-1} - F_{n-1})$$

le symbole

$$\Pi_{n-1} (fp - F);$$

la signification de Π_{n-1} est assez claire, car il remplace l'expression « le produit » et son index signifie qu'il faut poser dans les parenthèses en même temps le même index; la valeur de cet index varie de 1 à $n - 1$; les binomes ainsi construits sont les facteurs de ce produit.

Nous avons donc:

$$\Pi_{n-1} (fp - F) = (f_1 p_1 - F_1) (f_2 p_2 - F_2) \dots (f_{n-1} p_{n-1} - F_{n-1}).$$

Chacune des surfaces ainsi obtenues détermine sur (p_n) outre les points fondamentaux encore $(r p_n - R_n)$ points et chacun d'eux détermine m_n surfaces F_n , dont chacune rencontre Q en f_n point A correspondant au point B pris à volonté sur Q .

A un point B correspondent donc

$$m_r M_n f_n (r p_n - R_n) \Pi_{n-1} (fp - F)$$

points A .

Considérons maintenant un point arbitraire de Q comme le point A . Par ce point passent m_n surfaces F_n du faisceau (F_n) dont chacune rencontre la courbe (p_n) outre les dits points fondamentaux encore en $f_n p_n - F_n$ points, et chacun d'eux détermine un faisceau (R) de la $(n - 2)^{\text{ème}}$ dimension. De chacun de ces faisceaux (R) nous pouvons dériver à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux (F) une surface S_{n-1} qui rencontre la droite Q en s_{n-2} points B correspondant au point A .

A un point A correspondent donc

$$m_n(f_n p_n - F_n) s_{n-1}$$

points B .

La courbe S_n est alors d'ordre

$$s_n = m_n(f_n p_n - F_n) s_{n-1} + m_r f_n M_n(r p_n - R_n) \Pi_{n-1}(f p - F).$$

On voit très aisément que pour $n = 2$ la surface S_{n-1} se compose de plusieurs surfaces F_1 et qu'il faut poser dans la formule précédente pour s_1 le terme

$$f_1 m_1 m_r (p_1 r - R_1),$$

la formule prend la forme

$$s_2 = m_2(f_2 p_2 - F_2) f_1 m_1 m_r (p_1 r - R_1) + m_r m_1 m_2 f_2 (r p_2 - R_2) (f_1 p_1 - F_1),$$

ce que nous pouvons écrire ainsi:

$$s_2 = m_r M_2 \left(f_1 \frac{p_1 r - R_1}{f_1 p_1 - F_1} + f_2 \frac{p_2 r - R_2}{f_2 p_2 - F_2} \right) \Pi_2(f p - F).$$

Dans ce qui va suivre nous allons écrire

$$\sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right)$$

au lieu de

$$f_1 \frac{r p_1 - R_1}{f_1 p_1 - F_1} + f_2 \frac{r p_2 - R_2}{f_2 p_2 - F_2}$$

et en général

$$\sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) = f_1 \frac{r p_1 - R_1}{f_1 p_1 - F_1} + f_2 \frac{r p_2 - R_2}{f_2 p_2 - F_2} + \dots + f_n \frac{r p_n - R_n}{f_n p_n - F_n}.$$

La signification de ce symbole est assez claire.

Acceptons que pour $n - 1$ la formule

$$s_{n-1} = m_r M_{n-1} \Pi_{n-1}(f p - F) \sum_{i=1}^{n-1} \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right)$$

soit exacte, alors la formule pour n prend la forme

$$s_n = m_n(f_n p_n - F_n) m_r M_{n-1} \Pi_{n-1}(f p - F) \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} + m_r M_n f_n (r p_n - R_n) \Pi_{n-1}(f p - F)$$

et puis que

$$(f_n p_n - F_n) \Pi_{n-1}(f p - F) = \Pi_n(f p - F),$$

nous obtenons

$$s_n = m_r M_n \Pi_n (fp - F) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) + f_n \frac{r p_n - R_n}{f_n p_n - F_n} \right].$$

Tandis que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) + f_n \frac{r p_n - R_n}{f_n p_n - F_n} = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right)$$

nous pouvons écrire

$$s_n = m_s M_n \Pi_n (fp - F) \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right).$$

Nous avons ainsi démontré que cette formule est exacte si elle est valable pour $n - 1$. Tandis que elle est valable pour $n = 2$ et par conséquent pour $n = 3$ et si suit, alors cette formule est exacte en général.

De là suit que la courbe propre S_n est d'ordre

$$s_n = m_r M_n \Pi_n (fp - F) \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{r p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right). \quad (a)$$

45. Quoique cette formule exprime l'ordre de la surface S_n quand les données occupent des positions singulières, elle est, on le voit, plus générale que la formule de l'article 19, qui peut être déduite de la formule actuelle.

Supposons que le nombre de points fondamentaux sur (p) soit

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = \theta$$

et de même

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = \theta,$$

nous obtenons

$$fp - F = fp$$

et

$$f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} = f_i \frac{p_i r}{p_i f_i} = r.$$

D'où il suit que

$$\sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) = nr$$

et la formule (a) prend la forme

$$s_n = m_r n r M_n \Pi_n (fp),$$

ce résultat est donc identique avec celui de l'article 19.

46. De la formule (a) on peut dériver beaucoup d'autres, dont unes sont particulières, et les autres paraissent d'être générales et tout entier différentes.

XII. Constructions générales des surfaces déduites du précédent.

47. *Premier cas.* — Considérons d'abord la construction d'une surface quand les surfaces F sont des plans et par conséquent les faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ sont des surfaces développables respectivement de la classe $m_1, m_2, \dots m_n$.

Cependant il faut distinguer ces deux cas: a) où (R) est un faisceau de surfaces générales, b) où (R) est un faisceau de plans.

a) Supposons que les surfaces du faisceau (R) soient d'ordre r . La surface obtenue S_n est d'ordre

$$m_r M_n \Pi_n (p - F) \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i r - R_i}{p_i - l_i} \right),$$

F étant en général $= 0$. La construction d'un point de la surface est la suivante :

Un faisceau (R) de la dimension $(n - 1)$ de surfaces R d'ordre r rencontre les courbes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$ en des points par lesquels passent les plans tangents des surfaces développables $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ de la classe $m_1, m_2, \dots m_n$; quand tous les plans ainsi correspondants passent par un même point, ce point appartient à la surface S_n .

48. Le cas, dont nous venons de parler, renferme aussi tel, quand les surfaces développables deviennent des surfaces coniques qui ont leurs sommets respectivement sur les courbes correspondantes. Ainsi :

Soient données n surfaces coniques $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ de la classe $m_1, m_2, \dots m_n$, dont les sommets se trouvent respectivement sur les courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$.

Quand n plans tangents de ces surfaces passent par un point s de telle manière qu'ils rencontrent les courbes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$ en des points qui, étant pris un à un sur chacune de ces courbes, déterminent une surface R d'un faisceau de la dimension $n - 1$, ce point s appartient à une surface d'ordre

$$m_r M_n \Pi_n (p - 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i r - R_i}{p_i - 1} \right).$$

Nous obtenons le cas encore plus particulier, quand les lignes fondamentales des faisceaux (F) sont des droites.

b) Considérons le cas, quand les faisceaux (F) sont des surfaces développables et R sont des plans.

Nous pouvons distinguer trois cas particuliers, savoir:

- 1.° le faisceau (R) de plans R est de la première dimension;
- 2.° le même faisceau est de la deuxième dimension.

Nous avons traités ces deux cas dans les articles 25 et 26.

3.° Le faisceau (R) de plans R est de la troisième dimension, ou, en d'autres termes, les plans R ne sont assujettis ni à une condition.

La construction d'un point s de la surface peut être énoncée ainsi:

Soient données quatre surfaces développables (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) respectivement de la classe m_1 , m_2 , m_3 , m_4 . Par un point quelconque s dans l'espace passent les plans tangents à ces surfaces, qui rencontrent les courbes correspondantes (p_1), (p_2), (p_3), (p_4) en des points. Quand quatre de ces points, étant pris un à un sur chaque courbe (p), se trouvent sur un plan, le point s appartient à une surface d'ordre

$$m_r M_4 \Pi_4 (p - F) \sum_{i=1}^4 \left(\frac{p_i}{p_i - F_i} \right).$$

On voit que F ne doit pas dépasser 2.

49. *Deuxième cas.* — Supposons que (F) soient des faisceaux de surfaces générales et que

a) (R) soit un faisceau de plans.

Nous pouvons distinguer de nouveau les cas suivants:

1.° (R) est un faisceau de la première dimension, ou il forme une surface développable. Dans ce cas, les faisceaux (F) peuvent être seulement deux, et nous obtenons cette construction:

Les plans tangents d'une surface développable de la classe m_r rencontrent les courbes (p_1), (p_2) en des points qui déterminent des surfaces F_1 , F_2 dans les faisceaux (F_1), (F_2) correspondants. Les surfaces F_1 , F_2 correspondantes se coupent en une courbe qui engendre une surface d'ordre

$$m_r M_2 \Pi_2 (fp - F) \sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{p_i - R_i}{f_i p_i - F_i} \right).$$

C'est évidemment un cas particulier de la surface que nous avons traitée au commencement de ce Mémoire.

2.° Nous pourrions de même donner la construction d'une surface, quand le plan R enveloppe une surface générale de la classe m_r .

3.° Quand le faisceau (R) est de la troisième dimension, nous trouvons la construction donnée dans l'article 48, 3.°.

b) Le cas que nous allons traiter nous semble très-important. Supposons que tous les faisceaux sont de la première dimension, c'est-à-dire

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_r = 1$$

et que

$$f_i p_i - F_i = 1, \quad p_i r - R_i = k,$$

k étant une grandeur constante.

L'ordre de la surface peut être donnée en cette forme

$$s_n = k \sum_{i=1}^n f_i.$$

En supposant que

$$p_i r - R_i = k = 1,$$

nous obtenons

$$s_n = \sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n.$$

On voit immédiatement que l'ordre de la surface S_n ne dépend pas d'ordre des surfaces R et des courbes (p); les faisceaux (F) jouissent de telle propriété que, en prenant une à une surface des $n - 1$ faisceaux, à ces surfaces correspond une seule surface du $n^{\text{ième}}$ faisceau.

Nous pouvons énoncer ce théorème:

Soient donnés n faisceaux (F_1), (F_2), ... (F_n) de la première dimension de surfaces F_1, F_2, \dots, F_n respectivement d'ordre f_1, f_2, \dots, f_n . Faisons correspondre les surfaces des faisceaux de telle manière que, en prenant une à une surface dans $n - 1$ faisceaux, à ces surfaces correspond une seule surface du $n^{\text{ième}}$ faisceau.

Il y a une infinité de points en lesquels se rencontrent toutes les n surfaces correspondantes, et ces points remplissent une surface dont l'ordre est égal à la somme des ordres des surfaces de tous les faisceaux.

XIII. Décomposition d'une courbe.

50. La décomposition d'une courbe dépend de mêmes conditions que nous avons trouvées en traitant les surfaces.

1.° Quand le faisceau (R) a un de ses points fondamentaux a sur la courbe (p_n), nous pouvons de ce faisceau dériver à l'aide des autres $n - 1$ faisceaux une surface S_{n-1} .

Le point a détermine dans le faisceau (F_n) m_n surfaces F_n qui rencontrent la surface, dont nous venons de parler, en des courbes qui appartiennent évidemment à la courbe C_n et forment par conséquent une partie de cette courbe.

2.^o Supposons qu'un point fondamental a du faisceau (F_n) se trouve sur la courbe (p_n) . Ce point détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau de la $(n - 3)^{\text{ième}}$ dimension, duquel nous pouvons construire à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux (F) une courbe C_{n-1} qui est une partie de la courbe demandée C_n .

XIV. L'ordre de la courbe dégénérée.

51. Soient F_1, F_2, \dots, F_n les nombres de points d'intersection des courbes fondamentales des faisceaux $(F_1), (F_2), \dots, (F_n)$ avec les courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots, (p_n)$ et R_1, R_2, R_n soient les nombres de points fondamentaux du faisceau (R) situés sur les mêmes courbes.

Considérons un plan quelconque Q et désignons par c les points, en lesquelles la courbe S_{n-1} perce ce plan Q , et par f les courbes, en lesquelles le rencontrent les surfaces F_n .

A un point c correspond une seule surface R qui rencontre la courbe (p_n) outre les points fondamentaux encore en $(p_n r - R_n)$ points, dont chacun détermine m_n surfaces (F_n) rencontrant Q en des courbes f qui correspondent au point c . A un point c correspondent donc

$$m_n(p_n r - R_n)$$

courbes f .

Une surface quelconque F_n du faisceau (F_n) détermine une courbe f et rencontre (p_n) outre les points fondamentaux encore en $(p_n f_n - F_n)$ points.

Chacun d'eux détermine un faisceau (R) de la dimension $(n - 3)$, duquel on peut à l'aide des autres $n - 1$ faisceaux dériver une courbe C_{n-1} qui détermine les points c correspondant à la courbe f primitive.

Donc

A une courbe f correspondent

$$(f_n p_n - F_n) c'_{n-1}$$

points c . Le point c engendre sur Q une courbe S_{n-1} . Par un point arbitraire du plan Q passent m_n surfaces F_n et par conséquent autant de courbes f . La courbe f est d'ordre f_n . L'ordre de la courbe C_n est donc

$$c_n = f_n m_n s_{n-1} (p_n r - R_n) + m_n (f_n p_n - F_n) c'_{n-1}.$$

Nous voyons que pour $n = 3$ à un point c correspondent

$$m_3(p_3 r - R_3)$$

courbes f . A une courbe f correspondent

$$m_r M_2 f_1 f_2 (p_3 f_3 - F_3)(r p_1 - R_1)(r p_2 - R_2)$$

points c . Ces points engendrent une courbe d'ordre

$$m_r M_2 \Pi_2 (fp - F) \sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right).$$

Par un point arbitraire du plan Q passent m_3 courbes f d'ordre f_3 . De là suit que

$$c_3 = f_3 (p_3 r - R_3) m_r M_2 \Pi_2 (fp - F) \sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) + m_r M_3 f_1 f_2 (p_3 f_3 - F_3)(r p_1 - R_1)(r p_2 - R_2),$$

ce que nous pouvons écrire ainsi:

$$c_3 = m_r M_3 \Pi_3 (fp - F) \left[f_3 \frac{p_3 r - R_3}{f_3 p_3 - F_3} \sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) + f_1 f_2 \frac{(p_1 r - R_1)(p_2 r - R_2)}{(f_1 p_1 - F_1)(f_2 p_2 - F_2)} \right].$$

Nous pouvons remplacer le terme

$$f_3 \frac{(p_3 r - R_3)}{(f_3 p_3 - F_3)} \sum_{i=1}^2 \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) + f_1 f_2 \frac{(p_1 r - R_1)(p_2 r - R_2)}{(f_1 p_1 - F_1)(f_2 p_2 - F_2)}$$

par le suivant

$$\sum_{i \cong t}^{1,3} \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right].$$

Lé symbole $\sum_{i \cong t}^{1,3}$ signifie que dans les parenthèses il faut poser pour i et t toutes valeurs possibles de 1 à 3 de telle manière, que toutes les deux ne soient pas égales en même temps, et que résultats ainsi obtenus doivent être additionés.

Ainsi la formule, qui exprime l'ordre de la courbe C_3 , prend la forme suivante:

$$c_3 = m_r M_3 \Pi_3 (fp - F) \sum_{i \cong t}^{1,3} \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right].$$

Supposons que la formule

$$c_{n-1} = m_r M_{n-1} \Pi_{n-1} (fp - F) \sum_{i \cong t}^{1, (n-1)} \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right]$$

pour $n - 1$ soit exacte; nous obtenons pour n

$$c_n = m_n f_n (p_n r - R_n) m_r M_{n-1} \Pi_{n-1} (fp - F) \sum_i^{n-1} \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right) \\ + m_n (f_n p_n - F_n) m_r M_{n-1} \Pi_{n-1} (fp - F) \sum_{i \cong t}^{n-1} \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right],$$

ce que nous pouvons écrire ainsi:

$$c_n = m_r M_n \Pi_n (fp - F) \left[f_n \frac{(p_n r - R_n)}{f_n p_n - F_n} \sum_i^{n-1} f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right. \\ \left. + \sum_{i \cong t}^{n-1} \left(f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right) \right].$$

Il est visible que

$$f_n \frac{(p_n r - R_n)}{(f_n p_n - F_n)} \sum_i^{n-1} f_i \frac{(p_i r - R_i)}{(f_i p_i - F_i)} + \sum_{i \cong t}^{n-1} \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right] \\ = \sum_{i \cong t}^n \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right].$$

La formule déterminant l'ordre de la courbe C_n prend cette forme

$$c_n = m_r M_n \Pi_n (fp - F) \sum_{i \cong t}^n \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right]. \quad (b)$$

Cette formule est exacte pour n , quand elle est exacte pour $n - 1$. Seulement elle est valable pour $n = 3$, ainsi pour $n = 4$, ou elle est valable en général.

XV. Constructions générales des courbes déduites du précédent.

52. La formule (b) renferme celle du cas général, en lequel les courbes fondamentales ne rencontrent pas les courbes correspondantes (p).

Il faut seulement y poser $F = \theta$, $R = \theta$ et apercevoir que la somme Σ contient toujours

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

termes. Nous pouvons distinguer ces trois cas particuliers.

1.^o (R) est un faisceau de surfaces générales et (F) sont les faisceaux de plans ou les surfaces développables. La construction de la courbe est analogue à celle de la surface.

2.° (R) est un faisceau de plans et (F) sont les faisceaux de surfaces générales. Ce cas nous présente trois constructions qui vont suivre.

a) *Les plans tangents d'une surface (R) rencontrent les courbes (p_1), (p_2), (p_3) en des points qui déterminent respectivement des surfaces dans les faisceaux (F_1), (F_2), (F_3). Trois de ces surfaces ainsi correspondantes, dont chacune appartient à un faisceau différent, se rencontrent en des points d'une courbe.*

b) *Quand un point c se trouve en une telle position que, en faisant passer par lui une à une surface de chacun de quatre faisceaux (F_1), (F_2), (F_3), (F_4), qui rencontrent les courbes (p_1), (p_2), (p_3), (p_4) en des points et quand quatre de ces points pris un à un sur les courbes (p) se trouvent dans un plan tangent de la surface générale (R), alors le point c engendre une courbe.*

c) *Considérons cinq faisceaux (F) et déterminons comme précédemment le point c de telle manière que cinq points correspondants, pris un à un sur chaque courbe (p), se trouvent sur un plan, le point c engendre une courbe.*

3.° Quand (F) et (R) sont les faisceaux de plans, nous obtenons trois constructions analogues aux précédentes, en posant les plans tangents des surfaces développables au lieu des surfaces des faisceaux.

4.° Considérons enfin le cas très important, quand chaque terme $fp - F = 1$ et de même $rp - R = 1$,

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_r = 1.$$

L'ordre de la courbe C_n est

$$c_n = \sum_{i=1}^n (f_i f_t).$$

Nous voyons que cette formule ne dépend pas des quantités du faisceau (R) et des courbes (p) qui nous servent seulement à établir la correspondance entre les surfaces.

Cette correspondance s'effectue de telle manière que, en prenant une à une surface dans $n - 2$ faisceaux, à ces surfaces correspond une à une surface dans les deux autres faisceaux. Nous pouvons donc dire:

Quand les surfaces des n faisceaux de la première dimension se correspondent de telle façon que à ($n - 2$) surfaces prises à volonté une à une dans ($n - 2$) faisceau correspond une à une surface dans les deux autres faisceaux, alors les points, par lesquels passent en même temps toutes les n surfaces ainsi correspondantes, remplissent une courbe.

En multipliant deux à deux ordres des surfaces des faisceaux, l'ordre de la courbe C_n est égal à la somme de ces produits.

XVI. Surface S_n passe par les points fondamentaux des faisceaux (F).

53. Nous avons vu, dans nos recherches sur la construction des courbes dans cas singuliers, que ces courbes rencontrent les lignes fondamentales des faisceaux (F).

Cela nous amène à l'idée que la surface S_n jouit de la même propriété, c'est-à-dire qu'elle passe par les points communs à toutes les surfaces d'un même faisceau (F).

Considérons un point a par lequel passent toutes surfaces du faisceau (F_n). Par ce point on peut faire passer plusieurs surfaces de chaque faisceau, qui rencontrent les courbes correspondantes (p) en des points qui, étant pris un à un sur chacune de ces courbes, déterminent un certain nombre de surfaces (E). Quelque soient les points p_n , la surface F_n passe toujours par le point a .

Ce point jouit par conséquent de la propriété que par lui passent toutes n surfaces correspondantes, prises une à une dans chaque faisceau, ou, en d'autres termes, *le point a appartient à la surface S_n .*

54. Examinons la multiplicité d'un tel point fondamental a d'un faisceau (F_k). Afin que nous obtenions une formule la plus générale, supposons que les faisceaux (R) et (F_n) ont des points fondamentaux sur les courbes correspondantes (p). Ce point a détermine

$$m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_n$$

surfaces des faisceaux

$$(F_1), (F_2), \dots, (F_{k-1}), (F_{k+1}), \dots, (F_n)$$

qui rencontrent respectivement les courbes correspondantes

$$(p_1), (p_2), \dots, (p_{k-1}), (p_{k+1}), \dots, (p_n)$$

outre les points fondamentaux en

$$\begin{aligned} f_1 p_1 - F_1, & \quad f_2 p_2 - F_2, \dots & \quad f_{k-1} p_{k-1} - F_{k-1}, \\ f_{k+1} p_{k+1} - F_{k+1}, & \dots & \quad f_n p_n - F_n \end{aligned}$$

points. En prenant un à un de ces points sur chacune de ces courbes, nous obtenons

$$\frac{M_n}{m_k} \cdot \frac{\Pi_n(f p - F')}{f_k p_k - F_k}$$

groupes de tels points correspondants que chacun de ces groupes détermine m_r ,

surfaces R et chacune de ces surfaces rencontre (p_k) en $p_k r - R_k$ points, dont chacun détermine m_k surfaces F_k passant par a . De là suit que a est un point multiple d'ordre

$$m_r M_n \frac{\Pi_n(fp - F)}{f_k p_k - F_k} (p_k r - R_k)$$

sur la surface S_n .

XVII. La courbe C_n a des points multiples sur les courbes fondamentales des faisceaux (F).

55. Supposons que la courbe fondamentale du faisceau (F_k) soit d'ordre b_k .

En négligeant pour un moment le faisceau (F_k) et la courbe correspondante (p_k) , nous pouvons dériver du faisceau (R) qui est de la $(n - 2)^{i\text{em}}$ dimension à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux une surface S_{n-1} ,

Cette surface rencontre la courbe fondamentale de (F_k) en $b_k \cdot s_{n-1}$ points. Bien entendu, dans la construction de la surface S_{n-1} avait été négligé le faisceau (F_k) et non le faisceau (F_n), ce qui a une influence à l'ordre de cette surface.

Chacun desdits points résulte d'une certaine surface R qui rencontre la courbe (p_n) en $r p_k - R_k$ points dont chacun détermine m_k surfaces F_n .

Chaque tel point d'intersection est par conséquent un point multiple d'ordre

$$(r p_k - R_k) m_k.$$

Le nombre de ces points est égal à $b_k s_{n-1}$.

En substituant la valeur de s_{n-1} , nous obtenons ce théorème:

Quand le faisceau (F_k) a une courbe fondamentale d'ordre b_k , la courbe C_n possède sur cette courbe

$$b_k m_r \frac{M_n}{m_k} \frac{\Pi_n(fp - F)}{f_k p_k - F_k} \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} - f_k \frac{p_k r - R_k}{f_k p_k - F_k} \right)$$

points qui sont multiples d'ordre

$$m_k (p_k r - R_k).$$

XVIII. Un faisceau (F) de surfaces d'ordre f possède une courbe fondamentale d'ordre f^2 .

56. On sait que ce théorème peut être démontré par une autre voie, seulement pour montrer l'importance de nos recherches nous allons en faire usage dans ce problème.

Considérons une surface quelconque F'_n du faisceau (F_n) et la surface S_n .

La surface F' rencontre (p) en $f_n p_n$ points dont chacun détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau de la dimension $(n - 2)$. De chacun de ces faisceaux on peut déduire à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_{n-1})$ une surface S_{n-1} qui rencontre la surface F'_n en une courbe d'ordre $f_n s_{n-1}$ ou

$$f_n(n-1)r m_r F_{n-1} M_{n-1} P_{n-1}.$$

Puisque le nombre de ces courbes est $f_n p_n$ et la surface S_n ne rencontre pas la surface F'_n en d'autres points, parce que il n'y a plus des surfaces F'_n qui coupent la surface F'_n , la courbe d'intersection totale serait d'ordre

$$(n-1)f_n r m_r F_n M_{n-1} P_n,$$

pendant qu'elle doit être d'ordre

$$n r f_n m_r F_n M_{n-1} P_n.$$

Cela nous montre que le faisceau (F_n) a une courbe fondamentale qui, étant la courbe d'intersection de F'_n avec S_n , est d'ordre

$$r f_n m_r F_n M_{n-1} P_n.$$

Ce qui précède nous apprend que, s'il y a une telle courbe, elle doit être multiple d'ordre

$$\frac{r m_r F_n M_{n-1} P_n}{f_n}$$

et par conséquent elle est d'ordre f_n^2 .

C. Q. F. D.

XIX. Faisceaux de surfaces.

57. Un faisceau (R) de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ dimension et n faisceaux (F) de surfaces nous servent à la construction d'une surface S_n .

Seulement nous pouvons réciproquement d'une courbe C à l'aide des n faisceaux (F) construire un faisceau (R) de surfaces.

Supposons que les surfaces R soient données par N telles conditions que par n points arbitraires passent m_r surfaces du faisceau (R) .

Considérons une courbe C , les faisceaux $(F_1), (F_2), \dots (F_n)$ de surfaces et leurs courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots (p_n)$. Un point arbitraire c de la courbe C détermine dans chacun des faisceaux (F) un certain nombre de surfaces qui rencontrent respectivement les courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots$

(p_n) en des points. En prenant un à un de ces points sur chacune de ces courbes, ces n points déterminent avec les N conditions données m_r surfaces R . Quand le point c parcourt la courbe C , la surface R engendre un faisceau (R) .

Déterminons la dimension et l'indice de ce faisceau.

Pour cet effet, considérons un point arbitraire a qui détermine avec les N conditions données un faisceau de la dimension $(n - 1)$, du quel on peut dériver une surface S_n d'ordre s_n à l'aide des faisceaux (F) . Cette surface rencontre la courbe C en des points qui fournissent évidemment les surfaces R passant par a .

Donc

Le faisceau (R) de surfaces, dérivé d'une courbe C à l'aide des faisceaux (F) et des courbes (p) jouit de la propriété que par un point arbitraire a passent cs_n de ses surfaces ou que ce faisceau est de la première dimension et d'indice cs_n .

Il est clair que s_n peut être une des quantités des articles précédents.

58. Quand le point c parcourt une surface S , nous pouvons demander: quelle est la nature du faisceau de surfaces R ?

Considérons le faisceau (R) des articles précédents et deux points arbitraires a, b qui déterminent dans (R) un autre faisceau de la dimension $(n - 2)$, duquel nous pouvons déduire à l'aide des faisceaux (F) et des courbes (p) une courbe C_n d'ordre connu c_n .

Cette courbe perce la surface S en $c_n s$ points qui fournissent évidemment les surfaces R passant par les points a, b .

Ainsi

Le faisceau (R) de surfaces R , dérivé d'une surface S à l'aide des faisceaux (F) et des courbes (p) , jouit de telle propriété que par deux points arbitraires a, b passent $c_n s$ surfaces R , ou, en d'autres termes, ce faisceau est de la deuxième dimension et d'indice $c_n s$.

59. Supposons que $n = 3$ et que les surfaces R deviennent des plans.

On sait que les faisceaux de plans de la première dimension sont les surfaces développables et les faisceaux de plans de la deuxième dimension sont les surfaces générales. Les indices de ces faisceaux sont les classes de ces surfaces.

Nous voyons donc que les théorèmes précédents renferment ces deux autres théorèmes:

1.° *Un point c détermine respectivement m_1, m_2, m_3 surfaces dans les faisceaux (F) qui sont de la première dimension. Chacune de ces surfaces rencontre les courbes correspondantes $(p_1), (p_2), (p_3)$ en des points. En*

prenant un à un de ces points sur chacune de ces courbes, ces points déterminent un plan R .

Quand le point c parcourt une courbe C d'ordre c , le plan R enveloppe une surface développable de la classe cs_n .

Il est clair que les faisceaux (F) peuvent être les surfaces développables, enveloppes des plans F .

2.° Un point arbitraire s détermine respectivement m_1, m_2, m_3 surfaces dans les faisceaux (F_1), (F_2), (F_3) de la première dimension. Chacune de ces surfaces rencontre les courbes correspondantes respectivement en des points $p_1, p'_1, \dots; p_2, p'_2, \dots; p_3, p'_3, \dots$

En prenant un à un de ces points sur chacune de ces courbes (p), ces trois points déterminent un plan R . Quand le point s parcourt une surface S d'ordre s , le plan R enveloppe une surface générale de la classe sc_n .

Le mot *générale* ne signifie pas une surface générale de cette classe, seulement que cette surface n'est pas développable. Nous pouvons de même dans ce théorème remplacer les faisceaux (F) par des surfaces différentes.

60. Nous obtenons les faisceaux de surfaces d'une autre manière, savoir la surface S_n remplit un faisceau.

Supposons qu'une surface R est donnée par N conditions et que à la détermination complète de cette surface manquent encore n points.

Considérons un point arbitraire a comme le point fondamental du faisceau (R). De ce faisceau, qui est maintenant de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dimension, nous pouvons déduire une surface S_n .

Quel est le lieu que remplit la surface S_n , quand le point a est assujéti à parcourir une courbe A d'ordre a ?

Nous montrerons aisément que la surface S_n remplit un faisceau de la première dimension, ou, en d'autres termes, que par un point arbitraire b passe un certain nombre de surfaces S_n .

Considérons un tel point b qui détermine m_1, m_2, \dots, m_n surfaces F_1, F_2, \dots, F_n des faisceaux (F_1), (F_2), \dots (F_n).

Chacune de ces surfaces rencontre la courbe correspondante (p) en

$$f_1 p_1 - F_1, \quad f_2 p_2 - F_2, \dots, \quad f_n p_n - F_n$$

points. En prenant un à un de ces points sur chacune des courbes (p), ces n points déterminent m_r surfaces R . Nous obtenons par conséquent, en général,

$$m_r M_n \Pi_n (fp - F)$$

surfaces R d'ordre r .

Chacune de ces surfaces rencontre la courbe A en ar points, dont chacun, étant pris pour un point fondamental du faisceau, détermine une surface S_n , passant par le point b .

Par le point b passent donc

$$ar m_r M_n \Pi_n (fp - F')$$

surfaces S_n , ou, en d'autres termes, la surface S_n remplit un faisceau de la première dimension et d'indice

$$ar m_r M_n \Pi_n (fp - F').$$

Ces surfaces sont, comme on sait, d'ordre

$$m_r M_n \Pi_n (fp - F') \sum_i^n \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right).$$

XX. Faisceaux de courbes.

61. Supposons de nouveau que le faisceau (R) de surfaces R soit donné par N conditions de telle façon que par n points arbitraires passe un certain nombre de ces surfaces.

Prenons deux points arbitraires a, b . Ces points déterminent un faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension duquel nous pouvons dériver une courbe C_n dont l'ordre est connu.

Quel est le lieu de la courbe C_n , quand le point b parcourt une courbe B d'ordre b ?

Il est facile de montrer que ce lieu est une surface, ou, en d'autres termes, qu'une droite arbitraire Q rencontre un certain nombre de courbes C_n .

Omettons les points a, b . Nous pouvons dériver de la droite Q un faisceau de surfaces R , qui est de la première dimension et d'indice cs_n ou, dans ce cas, s_n . Par le point a passent par conséquent cs_n surfaces R . Chacune d'elles rencontre B en br points. En prenant chacun de ces points pour point fondamental du faisceau R , nous obtenons une courbe S_n qui rencontre la droite Q .

Supposons que R' soit une des surfaces R , dérivée d'un point q' de la droite Q . La surface R' rencontre évidemment la courbe B en br points, dont chacun offre une courbe qui doit passer par q' . De là suit que nous obtenons de tous les points BR' d'une surface R' , un seul point d'intersection sur la droite Q ou que le nombre de ces points est égal au nombre de surfaces R passant par a . La surface S_n est donc d'ordre s_n , ce qui est vrai, parce que ce faisceau de surfaces R est, proprement dit, un faisceau de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ dimension et fournit, par conséquent, une surface d'ordre s_n .

62. Examinons maintenant le lieu de la courbe S_n , quand le point a parcourt une courbe A d'ordre a .

Nous trouverons que ce lieu est un faisceau de courbes, dont un certain nombre passe par un point arbitraire c . Le point c détermine m_1, m_2, \dots, m_n surfaces $(F_1), (F_2), \dots, (F_n)$ rencontrant respectivement les courbes correspondantes $(p_1), (p_2), \dots, (p_n)$ en

$$f_1 p_1 - F_1, \quad f_2 p_2 - F_2, \dots, \quad f_n p_n - F_n$$

points. En prenant un à un de ces points sur chacune des courbes (p) , nous obtenons

$$M_n \Pi_n (fp - F)$$

groupes, dont chacun détermine m_r surfaces R . Chacune d'elles rencontre A en ar points et B en br points. Considérons un de ces points, situé sur A et un sur B ; ces deux points fournissent un faisceau de la dimension $(n - 2)$, qui détermine la courbe C_n passant par le point c .

Chaque surface R offre $arbr$ couples de points sur les courbes A, B et chacun de ces groupes fournit une courbe. Par conséquent les courbes C_n , passant par c , sont en nombre

$$abr^2 m_r M_n \Pi_n (fp - F).$$

Nous pouvons donc dire que

Étant données les surfaces R par N telles conditions que n autres points arbitraires déterminent m_r surfaces R , deux points quelconque a, b déterminent un faisceau de la dimension $n - 2$, duquel peut être dérivée une courbe S_n d'ordre

$$m_r M_n \Pi_n (fp - F) \sum_{i=1}^n \left[f_i f_t \frac{(p_i r - R_i)(p_t r - R_t)}{(f_i p_i - F_i)(f_t p_t - F_t)} \right].$$

Quand les points a, b parcourent respectivement deux courbes d'ordres a, b , la courbe S_n remplit un tel faisceau que par un point arbitraire c passe

$$abr^2 m_r M_n \Pi_n (fp - F)$$

courbes S_n .

XXI. Sur la surface S_n

engendrée par l'intersection de deux faisceaux de surfaces.

63. En examinant l'ordre de la surface S_n , nous avons employé la surface S_{n-1} . Dans cet article nous allons montrer que la surface S_n peut être obtenue comme le lieu de courbes d'intersection des surfaces S_{n-1} avec les surfaces correspondantes F_n .

Prenons un point arbitraire p'_n sur la courbe (p_n) . Ce point détermine dans le faisceau (R) un nouveau faisceau de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ dimension, duquel nous pouvons dériver à l'aide des autres $(n - 1)$ faisceaux (F') une surface S'_{n-1} qui est donc d'ordre

$$m_r M_{n-1} \Pi_{n-1} (fp - F) \sum_i^{n-1} \left(f_i \frac{p_i r - R_i}{f_i p_i - F_i} \right).$$

Le point p'_n détermine m_n surfaces F'_n dans le faisceau (F'_n) . Chacune de ces surfaces rencontre S'_{n-1} en une courbe qui appartient à la surface S_n .

Quand le point p'_n change de position sur (p_n) , nous obtenons une autre surface S'_{n-1} et de même autres surfaces F'_n et par conséquent aussi une autre courbe de la surface S_n .

Quand le point p'_n parcourt la courbe (p_n) , la surface S'_{n-1} remplit un faisceau (S_{n-1}) et la surface F'_n remplit le faisceau (F'_n) . De là suit que nous obtenons les courbes de la surface S_n comme les intersection des faisceaux correspondants $(S_{n-1}), (F'_n)$.

Le faisceau (S_{n-1}) est selon l'article 62 de la première dimension. En substituant ar par $p_n r - R_n$ dans la formule de cet article, nous obtenons l'indice

$$m_r M_{n-1} (p_n r - R_n) \Pi_{n-1} (fp - F)$$

de ce faisceau.

64. Quand nous examinons l'ordre de la surface S_n dans ce genre, nous trouvons que c'est le procédé que nous avons déjà employé.

A une surface S_{n-1} correspondent donc m_n surfaces F'_n et à une surface F'_n correspondent $f_n p_n - F'_n$ surfaces S'_{n-1} .

Quand les deux faisceaux de ces surfaces doivent être projectifs, c'est-à-dire, quand à une surface d'un de ces faisceaux doit correspondre une seule surface de l'autre faisceau, il faut que

$$m_n = 1, \quad f_n p_n - F'_n = 1;$$

et de plus, quand ces faisceaux doivent être de la première dimension, il faut que

$$m_r M_{n-1} (p_n r - R_n) \Pi_{n-1} (fp - F) = 1$$

ou que

$$m = 1, \quad M_{n-1} = 1, \quad p_n r - R_n = 1$$

et que chaque terme

$$fp - F = 1.$$

Nous obtenons donc que la surface S'_{n-1} est d'ordre

$$\sum_i^{n-1} f_i(p_i r - R_i)$$

et que la surface S_n est d'ordre

$$\sum_i^{n-1} [f_i(p_i r - R_i)] + f_n.$$

XXII. Génération analogue d'une courbe.

65. La même chose a lieu quant aux courbes. Prenons un point arbitraire p'_n sur la courbe (p_n) , qui détermine dans le faisceau (R) un autre faisceau de la $(n - 3)$ ^{ième} dimension. Ce nouveau faisceau détermine avec les faisceaux (F) , excepté le faisceau (F'_n) , une courbe C_{n-1} .

Seulement par le point p'_n passent aussi plusieurs surfaces F_n qui rencontrent la courbe C_{n-1} en des points de la courbe C_n . Quand le point p'_n change de position sur (p_n) , la courbe C_{n-1} et les surfaces F_n le font aussi. Quand le point p'_n parcourt la courbe (p_n) , la courbe C_{n+1} engendre, suivant le précédent, une surface S_{n-1} et les surfaces F_n remplissent le faisceau (F'_n) .

Nous obtenons ainsi les points de la courbe C_n comme les points d'intersection des courbes C_{n-1} avec les surfaces correspondantes F_n , la correspondance étant de telle sorte, que à une courbe C_{n-1} correspond un certain nombre de surfaces F_n , et réciproquement à une surface F_n correspond une certaine courbe C_{n-1} .

Il est intéressant que tous les points de la courbe C_n se trouvent sur la surface S_{n-1} .

En omettant un autre faisceau, par exemple (F_k) de surfaces F_k , et en construisant du faisceau R une surface S_{nk} , la courbe C_n doit se trouver toute entière sur cette surface. Cette courbe est donc l'intersection desdites surfaces S_{n-1} , S_{nk} .

Nous obtenons ainsi la courbe C_n comme la ligne d'intersection de plusieurs surfaces. En négligeant un faisceau (F) et sa courbe correspondante (p) , nous obtenons toujours une surface de (R) . Il y en a n et toutes ces surfaces passent par la même courbe C_n qui fait une partie de leur courbe d'intersection.

Aggiunte alla Memoria (*)

« Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten ».

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

1. Al § 7 della Memoria abbiamo considerato una classe di sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN contenenti una serie di superficie di ENNEPER a curvatura costante. È facile vedere che non esistono altri sistemi di WEINGARTEN formati con superficie di ENNEPER, cioè: *Se le superficie a curvatura costante di un sistema triplo di Weingarten sono superficie di Enneper, esse hanno il medesimo asse e sono congruenti per rotazione attorno a questo.* (**)

Supponiamo che la curvatura K del sistema sia negativa, $K = -1$, la dimostrazione per $K = +1$ potendosi fare nel medesimo modo. L'elemento lineare dello spazio, riferito a questo sistema, prenderà la forma (M, n.° 4):

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2.$$

Se le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ delle superficie pseudosferiche $w = \text{cost.}^\circ$ sono piane, dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) = 0 \tag{1}$$

e viceversa, soddisfatta questa condizione, le $v = \text{cost.}^\circ$ saranno piane. (***)

La (1) può scriversi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

(*) Le citazioni che si riferiscono a questo lavoro (tom. 13, fasc. 3° degli Annali) saranno segnate con (M).

(**) Intendiamo, come nella Memoria, escluso il caso delle superficie di rotazione.

(***) E infatti l'elemento lineare della superficie essendo dato da

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2,$$

il corrispondente sferico nella rappresentazione di GAUSS sarà

$$ds'^2 = \sin^2 \theta du^2 + \cos^2 \theta dv^2$$

derivandola rispetto a w coll'osservare la 3^a delle formole (I) (M, n.° 4), otteniamo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

Ma poichè le superficie $w = \text{cost.}^\circ$ non sono superficie di rotazione, sarà $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ diversa da zero, quindi

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = 0.$$

Questa associata colla (1) ci dà:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = U + \psi(v, w),$$

dove U è funzione di u soltanto e ψ di v, w . Dopo ciò segte dalle formole (13) (M, n.° 4)

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r_{13}} = \frac{dU}{du},$$

donde si conclude che le superficie $u = \text{cost.}^\circ$ del sistema triplo di WEINGARTEN sono sfere e precisamente le sfere che contengono le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ sulle superficie pseudosferiche di ENNEPER $w = \text{cost.}^\circ$. Queste superficie hanno dunque il medesimo asse.

D'altra parte, dovendo il valore di θ tratto dalla (2) soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sin \theta \cos \theta,$$

i calcoli fatti da ENNEPER nelle *Göttinger Nachrichten*, 1868, pag. 258, dimostrano che la funzione U deve essere determinata dalla formola

$$\frac{dU}{du} = \sqrt{C - A \cos h 2U + B \sin h 2U}.$$

I valori delle costanti A, B, C determinano già perfettamente la forma della superficie; le $w = \text{cost.}^\circ$ sono dunque superficie di ENNEPER identiche di forma

e la condizione richiesta equivarrà all'altra che le immagini sferiche delle linee $v = \text{cost.}^\circ$ siano cerchi, cioè la loro curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}$ sia funzione della sola v , il che dà appunto la (1). Similmente la condizione perchè siano piane le linee $u = \text{cost.}^\circ$ si esprimerà colla formola

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = 0. \quad (1')$$

e col medesimo asse. Se in fine si osserva che lo stesso movimento attorno all'asse, pel quale una superficie $w = \text{cost.}^\circ$ si porta in un'altra, deve far strisciare ciascuna sfera $u = \text{cost.}^\circ$ sopra sè medesima, si vede che questo moto consiste in una pura rotazione. Un caso di eccezione si presenterebbe quando le sfere avessero tutte il medesimo raggio; ma allora le $w = \text{cost.}^\circ$ sono elicoidi (del DINI) e qualunque movimento attorno all'asse riconduce l'intero sistema in sè medesimo.

2. La condizione cui deve soddisfare la funzione $\theta(u, v)$ perchè la superficie pseudosferica definita dalla formola

$$ds^2 = \cos^2\theta du^2 + \text{sen}^2\theta dv^2 \quad (2)$$

abbia le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ sferiche risulta da quanto ha esposto ENNEPER nel lavoro sopra citato (pag. 421 s.s.). (*) Essendo

$$r_1 = -\text{tg}\theta \quad r_2 = \cot\theta$$

i raggi principali di curvatura della superficie, la condizione richiesta si esprimerà colla formola

$$\cot\theta = \alpha + \beta \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v},$$

dove α, β sono funzioni di v soltanto. Derivandola rispetto ad u otteniamo la formola equivalente

$$\frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v} \right) = 0. \quad (3)$$

Dovendo questa coesistere con quella che risulta da una nuova derivazione, otteniamo

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u}, & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial\theta}{\partial u} \right), & \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v} \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (3')$$

formola che potremo sostituire alla (3) quando $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial\theta}{\partial v} \right)$ sia diversa da zero. La (3') esprime quindi la condizione, perchè le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ siano *piane* o *sferiche*. (**)

(*) Cf. anche DINI: *Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche*. Atti dell'Accademia dei XL, 1869.

(**) Sviluppando il determinante la condizione può scriversi

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u^2 \partial v} \frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \right)^3 \frac{\partial\theta}{\partial v} = 0. \quad (4)$$

Ciò posto, proponiamoci la questione seguente: *Esistono superficie pseudosferiche, le cui trasformate complementari abbiano tutte un sistema di linee di curvatura sferiche?*

Una qualunque Σ delle complementari della superficie S corrispondente alla (2), sia definita dalla formola

$$ds^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi dv^2;$$

la funzione $\varphi(u, v)$ sarà legata alla $\theta(u, v)$ dalle relazioni di DARBOUX (M, n.° 19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \sin \varphi \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\cos \varphi \sin \theta - \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad (5)$$

e se supponiamo che le linee $v = \text{cost.}^e$ sopra le superficie Σ siano sferiche, dovrà inoltre soddisfare la condizione (3')

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), & \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \end{array} \right| = 0.$$

Questa sviluppata, col porre per $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ i loro valori (5), diventa

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi + C = 0, \quad (6)$$

dove i coefficienti A , B , C sono dati dalle formole:

$$A = \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial v} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$$

$$B = \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + \cos \theta \frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v^2} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}$$

$$C = \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^3 + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}.$$

Se non fosse identicamente $A = B = C = 0$, due soli sarebbero i valori di $\cos \varphi$ o $\sin \varphi$ forniti dalla (6) e la superficie S avrebbe quindi al più due trasformate complementari della specie voluta.

Ora se la superficie S non è di rotazione, (*) sarà $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ diversa da zero e la condizione $A = 0$, diventando

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = 0,$$

(*) Quando ciò accada tutte le complementari sono superficie di ENNEPER (cf. numero seguente).

esprime che la superficie S ha le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ piane. In quanto alle altre due condizioni $B=0$, $C=0$ si trovano identicamente verificate supposto $A=0$.

Nel numero seguente si dimostrerà che le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ di tutte le superficie Σ non possono essere piane se la superficie S non è di rotazione. Possiamo quindi rispondere alla questione proposta coll'enunciare il teorema:

Perchè tutte le complementari di una superficie pseudosferica S abbiano le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ sferiche, è necessario e sufficiente che le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ sopra la S siano piane.

Ne risulta che tutte le complementari delle superficie di ENNEPER hanno un sistema di linee di curvatura sferiche, mentre le linee di curvatura del 2° sistema non sono nè piane nè sferiche. Siccome sulle superficie di ENNEPER conosciamo le linee geodetiche (M, n.° 17), le equazioni in termini finiti per queste nuove superficie si otterranno con soli calcoli di derivazione. Per due classi di queste superficie le formole esplicite si trovano stabilite nel lavoro del sig. KUEN citato al n.° 15 (M) e al n.° 7 della mia Nota 1^a sui sistemi ciclici; le prime superficie si ottengono con due trasformazioni complementari successive dalla pseudosfera, le seconde con una trasformazione complementare dalle elicoidi del DINI.

Il teorema dimostrato ci assicura poi che applicando la trasformazione complementare a queste nuove superficie (il che si potrà fare dopo eseguita una quadratura) perverremo ad ulteriori superficie a curvatura costante, le cui linee di curvatura non saranno nè piane nè sferiche.

3. La trasformazione complementare applicata ai sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN, che contengono una serie di superficie di ENNEPER, conduce, secondo quanto abbiamo asserito al n.° 24 della Memoria, a sistemi della medesima specie. Ne discende che ogni superficie di ENNEPER ne possiede due altre contigue per trasformazione complementare. Se la superficie di ENNEPER considerata è complementare di una superficie di rotazione S , queste però si riducono ad una sola superficie, cioè alla S .

Ora possiamo facilmente dimostrare il teorema:

Se ad una superficie pseudosferica sono contigue, per trasformazione complementare, due superficie di Enneper, deve essa stessa appartenere alla classe di superficie di Enneper; se esistono più di due superficie di Enneper contigue, tutte le altre complementari sono superficie di Enneper e la primitiva è una superficie di rotazione.

L'elemento lineare della superficie pseudosferica S sia dato dalla (2) e quello di una sua complementare Σ dall'altra:

$$ds^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \sin^2 \varphi dv^2;$$

se supponiamo che le linee $u = \text{cost.}^\circ$ della Σ siano piane, dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0,$$

ossia, sviluppando per mezzo delle formole di DARBOUX (5):

$$\cos \varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0. \quad (*) \quad (7)$$

Questa, se non è $\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$, fornisce due soli valori per $\cos \varphi$ o $\sin \varphi$; fra le complementari di S ve ne sono adunque due al più che hanno le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ piane, a meno che la S non sia superficie di rotazione, nel qual caso la (7) è un'identità e tutte le Σ sono superficie di ENNEPER, conforme alla 2^a parte del teorema.

In ogni caso però, se una delle superficie Σ ha le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ piane, la sua complementare S ; in forza del teorema al numero precedente, avrà le linee di curvatura $v = \text{cost.}^\circ$ sferiche o piane. Ma è facile vedere che questo secondo caso non può presentarsi se non quando la Σ stessa sia una superficie di rotazione. E infatti se deriviamo la (7) rispetto ad u , osservando le (5), otteniamo:

$$\cos \varphi \left\{ \frac{\partial^3 \theta}{\partial u^3} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 - \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\} - \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Ora se le linee $v = \text{cost.}^\circ$ sopra Σ fossero piane, si avrebbe

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad (8')$$

quindi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^3} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \sin \theta \cos \theta \right) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \sin^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2.$$

Allora la (8) diventa

$$\cos \varphi \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\} - \sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial v} - \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0$$

(*) Similmente la condizione perchè le linee $v = \text{cost.}^\circ$ siano piane sarà:

$$\sin \varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0. \quad (7')$$

e combinata colla (5) dà

$$\cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 = 0,$$

da cui, non essendo $\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$,

$$\cos \varphi = - \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Questa per la (8') dimostra che φ è funzione della sola u , cioè la Σ è una superficie di rotazione come si era asserito. In tal caso, con calcoli simili ai precedenti, si proverà facilmente che l'unica superficie di ENNEPER complementare della S è appunto la Σ .

Escluso questo caso è chiaro, per quanto abbiamo visto ora, che se la superficie S possiede due complementari Σ di ENNEPER, le loro linee di curvatura piane dovranno corrispondere ad un medesimo sistema di linee di curvatura sopra S , poniamo per es. alle $u = \text{cost.}^\circ$ In questa ipotesi dovranno i due valori di $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ tratti dalla (8) coincidere con quelli ricavati dalla (7) e quindi sussisteranno le relazioni:

$$\frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2}{\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}} - \cos^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} = - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

La seconda di esse ci dà

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = 0$$

e dimostra che la superficie iniziale S deve avere le linee di curvatura $u = \text{cost.}^\circ$ piane. La prima poi non è che una conseguenza della seconda.

Infine noteremo che per dimostrare come la (7) coincida colla equazione (28) (M, n.º 20) applicata ai sistemi di WEINGARTEN contenenti superficie di ENNEPER, basta osservare che in questo caso si ha (M, n.º 17)

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = k \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

k essendo una costante; la citata formola (28) diventa quindi

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$$

e a causa di $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}$ coincide colla (7). Così resta dimostrato che

questi sistemi tripli di WEINGARTEN riproducono per trasformazione complementare sistemi della medesima specie.

4. Al n.º 25 della Memoria la trasformazione di BÄCKLUND è stata definita colle formole di DARBOUX generalizzate [v. i formole (33)]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \theta + \operatorname{sen} \sigma \cos \varphi \operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \cos \theta}{\cos \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Si può dare per mezzo di esse la seguente interpretazione geometrica della trasformazione di BÄCKLUND.

Sia S la superficie pseudosferica iniziale, S' la sua derivata per la trasformazione di BÄCKLUND B_σ . Fra la superficie S e la S' viene stabilita, per la costruzione stessa, una corrispondenza di punto a punto di guisa che le ∞^2 rette PP' che uniscono due punti corrispondenti P, P' , toccano nel punto P la superficie S e in P' la S' . Le rette PP' sono quindi le tangenti di un sistema ∞^1 di curve giacenti sopra S (e similmente per S'). A queste curve, che nel caso di $\sigma = 0$ formano un sistema di geodetiche parallele, daremo il nome di *linee di Bäcklund* e le indicheremo con L_σ . Assegnato il valore di σ , le linee corrispondenti di BÄCKLUND L_σ formano una doppia infinità a causa della costante arbitraria che entra nell'integrale generale φ delle (9). (Cf. M, n.º 25.)

Esse godono della seguente proprietà caratteristica:

Lungo ogni linea L_σ di Bäcklund, la normale principale della curva è inclinata dell'angolo costante σ sulla normale alla superficie.

E infatti se si calcola la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho g}$ di queste linee dalla loro equazione differenziale:

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \theta du - \cos \varphi \operatorname{sen} \theta dv = 0$$

si trova

$$\frac{1}{\rho g} = \operatorname{tg} \sigma \frac{\cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta};$$

d'altra parte, per la formola d'EULERO, la curvatura normale $\frac{1}{R}$ delle medesime linee è data da

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{r_1} = \frac{\cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta},$$

dunque

$$\frac{1}{\rho g} = \operatorname{tg} \sigma \frac{1}{R},$$

formola che dimostra il teorema.

Le linee tracciate sopra una superficie e aventi in ogni punto la normale principale inclinata dell'angolo costante σ sulla normale alla superficie formano un sistema ∞^2 , poichè l'intero corso della curva è determinato quando si fissa un primo elemento. Si perviene al medesimo risultato analiticamente, osservando che la ricerca di queste curve dipende da un'equazione differenziale del 2° ordine, la cui integrazione introduce due costanti arbitrarie. (*) Se ne conclude che sulle superficie pseudosferiche la proprietà enunciata è caratteristica per le linee di BÄCKLUND. Mediante le formole (10) le ∞^2 linee di BÄCKLUND vengono distribuite in ∞^1 sistemi contenenti ciascuno ∞^1 curve; ogni singolo sistema dà luogo ad una superficie derivata di BÄCKLUND S' . La costruzione geometrica per passare dalla S alla S' è la stessa come per la trasformazione complementare; soltanto il segmento costante da portarsi sulle tangenti alle linee di BÄCKLUND è eguale a $\cos\sigma$.

Questa interpretazione geometrica ci fa rilevare una notevole differenza fra la trasformazione generale di BÄCKLUND B_σ e la complementare B_0 . Mentre quest'ultima è indipendente dalle flessioni della superficie, perchè ogni sistema di geodetiche parallele si conserva tale per qualunque flessione, la prima invece è legata alla forma attuale della superficie nello spazio. E infatti si vede subito che, flettendo la superficie, le linee di BÄCKLUND perdono la loro proprietà fondamentale.

5. Risolviamo ora per la trasformazione di BÄCKLUND B_σ una questione analoga a quella risolta al n.° 3 per la trasformazione complementare; cerchiamo cioè se essa può cangiare una superficie pseudosferica S definita dalla formola

$$ds^2 = \cos^2\theta du^2 + \sin^2\theta dv^2, \quad (10)$$

in altrettante superficie di ENNEPER. Designando una qualunque delle superficie derivate con Σ e il suo elemento lineare con

$$ds^2 = \cos^2\varphi du^2 + \sin^2\varphi dv^2,$$

saranno φ, θ legate fra loro dalle (9) e, supposto che le $v = \text{cost.}^\circ$ sopra le Σ

(*) Supposta la superficie S riferita alle sue linee di curvatura e ritenendo le solite notazioni, si trova per l'equazione differenziale in discorso

$$d\varphi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \text{tg}\sigma \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R} \right\} du - \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \text{tg}\sigma \frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R} \right\} dv,$$

dove

$$\text{tg}\varphi = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{r_2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_1}$$

siano piane, si avrà inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0.$$

Osservando le (9), questa formola diventa:

$$\begin{aligned} & \left(\cos \sigma \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen}^2 \theta \right) \cos \varphi - \\ & - \left(\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos \sigma} - \cos \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \right) \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = 0 \end{aligned}$$

e dovendo, per l'amessa ipotesi, essere soddisfatta qualunque sia φ , si scinde nelle due:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \pm \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \sigma}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \pm \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \theta.$$

È indifferente scegliere i segni superiori o gli inferiori, l'un caso riducendosi all'altro col cangiare u , v in $-u$, $-v$. Scegliendo i superiori, avremo:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \frac{u}{\cos \sigma} + v \operatorname{tg} \sigma + C,$$

dove, senza alterare la forma della superficie, potremo porre la costante arbitraria $C = 0$. Le superficie pseudosferiche corrispondenti sono le elicoidi del DINI (M, n.° 28), dunque:

Se la trasformazione (9) di Bäcklund fa nascere dalla superficie pseudosferica (10) altrettante superficie di Enneper, la superficie iniziale S sarà un'elicoidi del Dini corrispondente alla formola ()*

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = e^{\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}}$$

Per trovare effettivamente le superficie derivate, conviene integrare l'equazione a differenziali totali (33') (M, n.° 25); nel nostro caso, ponendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \Lambda$, essa diventa:

$$d\Lambda + \frac{\operatorname{sen} \sigma \Lambda^2 + \operatorname{sen} h \left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \right) \cdot \Lambda}{\cos \sigma \cos h \left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \right)} du + \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} h \left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \right) \Lambda}{\cos \sigma \cos h \left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \right)} dv = 0.$$

(*) Si noti bene che le superficie dedotte con trasformazione di BÄCKLUND al n.° 29 della Memoria dalle elicoidi del DINI non appartengono a questa classe. Nella notazione attuale esse corrispondono alla trasformazione di BÄCKLUND $B_{-\sigma}$.

Integrando prima rispetto a v , otteniamo:

$$\Lambda = \cosh\left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right) \left\{ U - \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{tg} h\left(\frac{u + v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right) \right\},$$

dove la funzione U di u dovrà soddisfare l'equazione

$$\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{dU}{du} = 1 - \operatorname{sen}^2 \sigma U^2.$$

Distinguendo i due casi di $\operatorname{sen} \sigma U < 1$ o $\operatorname{sen} \sigma U > 1$, troviamo nel 1°

$$U = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{tg} h\left(C + \frac{u}{\cos \sigma}\right)$$

e nel 2°

$$U = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{coth}\left(C + \frac{u}{\cos \sigma}\right),$$

quindi

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{\operatorname{sen} h(C - v \operatorname{tg} \sigma)}{\operatorname{sen} \sigma \cosh\left(C + \frac{u}{\cos \sigma}\right)}, \text{ per } \operatorname{sen} \sigma U < 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{\cosh(C - v \operatorname{tg} \sigma)}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} h\left(C + \frac{u}{\cos \sigma}\right)}, \text{ per } \operatorname{sen} \sigma U > 1.$$

La costante arbitraria C può suppersi nulla senza alterare la forma della superficie; e le due superficie pseudosferiche S_1, S_2 che se ne ottengono corrispondenti alle formole:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 = \frac{\operatorname{sen} h(v \operatorname{tg} \sigma)}{\operatorname{sen} \sigma \cosh\left(\frac{u}{\cos \sigma}\right)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 = \frac{\cosh(v \operatorname{tg} \sigma)}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} h\left(\frac{u}{\cos \sigma}\right)}$$

sono distinte se i parametri u, v percorrono soltanto i valori reali, mentre si cangiano l'una nell'altra, cangiando u, v rispettivamente in $u - \frac{i\pi}{2} \cos \sigma$, $v + \frac{i\pi}{2} \cot \sigma$. Esse appartengono alla classe di superficie di ENNEPER considerate da KUEN (M, n.° 17). Se si considerano come due falde reali e distinte di una medesima superficie di KUEN, sarebbe facile vedere, risolvendo l'equazione (7), che la superficie considerata nella sua totalità si riproduce per trasformazione complementare, mentre però le due falde S_1, S_2 si scambiano fra loro.

6. Al § 9, n.° 27 della Memoria abbiamo dimostrato che ad ogni sistema pseudosferico di WEINGARTEN è applicabile la trasformazione di BÄCKLUND. L'integrale generale φ della equazione (38) (M, n.° 27) contenendo una costante arbitraria, ne segue che per una superficie pseudosferica S del sistema si può prendere ad arbitrio la sua trasformata di BÄCKLUND S' , rimanendo con ciò completamente determinata la trasformazione per tutto il sistema. Da questa osservazione e dalla circostanza che le linee $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \text{cost.}^\circ$ sulla superficie S formano un sistema di cerchi geodetici paralleli, come analogamente le linee $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \text{cost.}^\circ$ sopra la S' , si può trarre una conseguenza notevole contenuta nel teorema seguente, che pel caso della trasformazione complementare venne osservato per la prima volta da LIE:

Se le linee geodetiche di una superficie pseudosferica S sono note, si potranno determinare con quadrature quelle di ogni superficie S' derivata da S per trasformazione di Bäcklund.

Per dimostrarlo osserviamo che ponendo, come al n.° 6 della Memoria,

$$\psi = \frac{\partial \theta}{\partial w},$$

la funzione $\psi(u, v)$ soddisferà alle tre equazioni simultanee alle derivate parziali

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) &= \cos \theta \cdot \psi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) &= \sin \theta \cdot \psi - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Da quanto poi è stato dimostrato ai n.° 5 e 6 della Memoria risulta che le soluzioni comuni alle equazioni (10) si ottengono *tutte* nel modo seguente: Ridotto l'elemento lineare

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2$$

della superficie S , in un modo qualunque, alla forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2,$$

appartenente ad una superficie di rotazione, basta porre

$$\psi = C \frac{dr}{d\alpha}$$

dove C è una costante arbitraria. Sia ora S' una superficie qualunque derivata da S con una trasformazione di BÄCKLUND B_σ ; il suo elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, sia dato da

$$ds'^2 = \cos^2 \varphi du^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi dv^2,$$

dove la funzione $\varphi(u, v)$ è legata alla $\theta(u, v)$ dalle formole (9). Esaminando attentamente il processo tenuto al n.º 27 della Memoria, si vedrà subito che la funzione

$$\Psi = \frac{\cos \sigma \cos \varphi}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\cos \sigma \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \psi$$

soddisfa alle equazioni (10) costruite per la superficie S' , cioè che si ha identicamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) &= \cos \varphi \Psi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) &= \operatorname{sen} \varphi \Psi - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} &= \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \end{aligned}$$

il che è anche facile a verificarsi con un calcolo diretto. D'altra parte, finchè σ è diversa da zero, non può mai essere $\Psi = \operatorname{cost.}^\circ$, perchè si dimostra facilmente che i valori di φ tratti dall'equazione $\Psi = \operatorname{cost.}^\circ$ non possono soddisfare le (9).

Ne segue che conoscendo sopra la superficie iniziale S un sistema di circoli geodetici $\psi = \operatorname{cost.}^\circ$, conosceremo altresì sopra la superficie derivata di BÄCKLUND S' un sistema di circoli geodetici paralleli, cioè le linee

$$\Psi = \operatorname{cost.}^\circ$$

Le geodetiche ortogonali si otterranno quindi con una quadratura, dopo di che saranno note sopra la S' tutte le linee geodetiche c. d. d.

7. I teoremi dell'appendice relativi alla applicazione simultanea della trasformazione complementare e di BÄCKLUND ai sistemi pseudosferici di WEINGARTEN, possano anche applicarsi alle superficie pseudosferiche isolate. Basta infatti considerare il caso in cui il sistema Σ di WEINGARTEN del gruppo Γ sia un sistema ciclico di RIBAUCCOUR; allora il suo complementare Σ_1 si riduce ad un'unica superficie pseudosferica S , di cui tutte le Σ sono complementari. Ne risulta quindi il teorema seguente:

Se ad una superficie pseudosferica S si applica una trasformazione

complementare qualunque B_0 , alla nuova superficie ottenuta $S' \equiv B_0 S$ una trasformazione qualunque di BÄCKLUND B_σ e infine alla terza superficie $S'' \equiv B_\sigma S' \equiv B_\sigma B_0 S$ una conveniente trasformazione complementare B'_σ , la superficie iniziale S e la finale $S''' \equiv B'_\sigma S'' \equiv B'_\sigma B_\sigma B_0 S$ saranno legate fra loro da una trasformazione di BÄCKLUND B'_σ di guisa che si potrà scrivere simbolicamente

$$B'_\sigma \equiv B'_\sigma B_\sigma B_0.$$

Le trasformazioni complementari e di BÄCKLUND sono quindi in un certo senso permutabili fra loro, poichè

$$B'^{-1}_\sigma B'_\sigma \equiv B_\sigma B_0.$$

Quattro punti corrispondenti P, P', P'', P''' sopra le quattro superficie S, S', S'', S''' formano i vertici di un quadrilatero sghembo, i cui lati opposti sono eguali e che può muoversi nello spazio mantenendo invariate le lunghezze dei suoi lati mentre i suoi vertici scorrono sopra le quattro superficie pseudosferiche S, S', S'', S''' e i due lati concorrenti in ciascuno dei quattro vertici sono situati nel piano tangente della superficie, su cui scorre il vertice stesso. Questo teorema combinato coi risultati del numero precedente dimostra che se di una superficie pseudosferica S si sanno determinare le trasformate complementari e quelle di BÄCKLUND (con una determinata costante σ), lo stesso potrà farsi per le nuove superficie ottenute e così di seguito, quando si eseguiscano soltanto successive quadrature. Per quanto abbiamo visto al n.º 5, le elicoidi del DINI e le loro trasformate complementari e di BÄCKLUND si trovano appunto in queste condizioni.

NOTA.

Nel corso della Memoria abbiamo più volte fatto uso del teorema: *Ogni equazione lineare ai differenziali totali, la quale contenga linearmente la funzione incognita e soddisfi alle condizioni d'integrabilità, si integra con quadrature.* Non credo inutile darne qui la dimostrazione, che manca negli ordinari trattati. Sia la funzione z delle n variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_n determinata dall'equazione a differenziali totali, lineare rispetto a z :

$$dz + \sum_{i=1}^{i=n} (a_i z + b_i) dx_i = 0, \quad (\alpha)$$

dove a_i, b_i sono funzioni note delle n variabili x_1, x_2, \dots, x_n . Supponiamo sod-

disfatte le condizioni d'integrabilità per la (α), date dalle relazioni

$$\frac{\partial(a_r z + b_r)}{\partial x_s} = \frac{\partial(a_s z + b_s)}{\partial x_r}, \quad r \left. \vphantom{\frac{\partial(a_r z + b_r)}{\partial x_s}} \right\} = 1, 2, \dots, n,$$

le quali per la (α) stessa si scindono nelle altre

$$\frac{\partial a_r}{\partial x_s} = \frac{\partial a_s}{\partial x_r} \quad (\beta)$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial x_s} + a_s b_r = \frac{\partial b_s}{\partial x_r} + a_r b_s. \quad (\gamma)$$

Le (β) esprimono che $\sum_{i=1}^{i=n} a_i dx_i$ è un differenziale esatto; se si pone

$$M = e^{\int (\sum a_i dx_i)},$$

sarà M un fattore integrante della (α) e renderà nello stesso tempo $M \sum b_i dx_i$ un differenziale esatto a causa delle (γ). L'integrale generale della (α) sarà dunque dato per quadrature dalla formola:

$$Mz + \int (\sum M b_i dx_i) = \text{cost.}^e,$$

ovvero

$$z = e^{-\int (\sum a_i dx_i)} \left\{ C - \int \left(\sum e^{\int (\sum a_i dx_i)} b_i dx_i \right) \right\}. \quad (\delta)$$

Mi sia qui permessa una digressione, che completa e semplifica i risultati esposti nella mia Nota II^a: *Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali*. (*) Supposta conosciuta per un sistema ∞^2 normale di cerchi una delle superficie traiettorie ortogonali insieme alle sue linee di curvatura, (**) le altre infinite superficie ortogonali si determinano dalla equazione a differenziali totali (vedi § 8 Nota citata)

$$d\theta - \left\{ \frac{\text{sen } \theta}{R} \left(\sqrt{E} \cos \varphi + \frac{\partial R}{\partial u} \right) + \frac{\sqrt{E} \cos \varphi}{r_2} (1 + \cos \vartheta) \right\} du - \\ - \left\{ \frac{\text{sen } \theta}{R} \left(\sqrt{G} \text{sen } \varphi + \frac{\partial R}{\partial v} \right) + \frac{\sqrt{G} \text{sen } \varphi}{r_1} (1 + \cos \vartheta) \right\} dv = 0,$$

(*) Giornale di Napoli, vol. 22°.

(**) Questa seconda condizione, benchè superflua, viene qui lasciata per brevità onde applicare immediatamente le formole della Nota citata.

la quale, ponendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = z$ si riduce alla forma lineare (cf. § 4 della Nota)

$$dz + \left\{ \frac{\partial \log \frac{\psi}{R}}{\partial u} z - \frac{\sqrt{E} \cos \varphi}{r_2} \right\} du + \left\{ \frac{\partial \log \frac{\psi}{R}}{\partial v} z - \frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi}{r_1} \right\} dv = 0.$$

Per la (8) le altre superficie ortogonali si determinano quindi con una quadratura dalla formola

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \frac{R}{\psi} \left\{ C - \int \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right) \right\}.$$

In particolare ricordando il teorema di RIBAUCOUR (cf. M, § 4), potremo enunciare il risultato:

Nota un sistema triplo di superficie ortogonali, i suoi sistemi ciclici osculatori si determinano con quadrature.

CORREZIONI ALLA MEMORIA (*)

- Pag. 19-195 ultima linea in luogo di $\frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}}$ leggi $\frac{1}{\rho_3} = \sqrt{\frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}}$
 » 20-196 aggiungi: *indicando con $\frac{1}{r}$ la curvatura geodetica dei circoli $\frac{\partial \theta}{\partial w} = \operatorname{cost.}^e$*
 » 41-217 linea 12^a dall'alto in luogo di $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda'$ leggi $\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{\Lambda}$
 » » » » 4^a dal basso » » B_0 » » B_σ
 » » » » 6^a » » » B_σ » » B_0
 » 45-221 » 9^a dall'alto » » $y = \operatorname{sen} \sigma \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos h \alpha}$ » » $y = \operatorname{cos} \sigma \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos h \alpha}$.

(*) Il 1° numero indica la pagina delle copie a parte, il 2° la corrispondente degli *Annali* (tom. XIII).

Su certi gruppi di superficie di secondo grado.

(Nota del dott. DOMENICO MONTESANO, a Roma.)

Oggetto di questa breve Nota si è lo studio di gruppi di superficie di secondo grado siffatti che di due qualsiasi superficie del gruppo l'una sia polare reciproca a sè stessa rispetto all'altra.

Due gruppi *completi* di tale specie sono noti: il gruppo delle otto superficie di secondo grado, rispetto a cui due superficie date di secondo grado sono fra loro polari reciproche, (*) e il gruppo dei dieci iperboloidi, che contengono i sistemi rigati comuni a sei complessi lineari di rette, a due a due fra loro in involuzione, presi a tre a tre. (**)

Ora io in questa Nota, partendo dall'esame diretto di un gruppo completo di superficie quadratiche della specie accennata, dimostrerò che un tal gruppo non può essere che uno dei due gruppi già noti, e con tale dimostrazione metterò in evidenza una costruzione semplicissima ed immediata di tali gruppi.

1. Per dare alle nostre ricerche la maggiore generalità possibile, invece di considerare direttamente le superficie di secondo grado, considereremo le corrispondenze polari, che esse determinano nello spazio.

In generale una corrispondenza proiettiva fra gli elementi dello spazio (collineare o reciproca) sarà da noi detta *armonica*, quando essa coincida con la sua inversa, e quindi, riguardata come trasformazione nello spazio, essa dia, applicata due volte, la corrispondenza identica. Diremo cioè armoniche sia la corrispondenza polare rispetto ad una superficie di secondo grado (reale o immaginaria) e la corrispondenza polare *nulla* (Nullsysteme dei Tedeschi), sia

(*) D'OVIDIO. Giornale di Matematiche, vol. 10, pag. 313. — THIEME. Giornale di SCHLÖMILCH, vol. 22, pag. 377.

(**) STEPHANOS, *Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres*. Bulletin des Sciences mathématiques, serie 2^a, vol. 3. — VERONESE, *Sopra alcune notevoli configurazioni*, ecc. Transunti dell'Accademia dei Lincei, serie 3^a, vol. 4.

la corrispondenza collineare omologica armonica e la corrispondenza *iperboloidica* armonica (con due *assi* luoghi di punti ed involuppi di piani uniti).

Due corrispondenze armoniche saranno da noi dette *involutorie* quando, riguardate come trasformazioni nello spazio, diano, applicate successivamente, una terza corrispondenza anche armonica.

Se cioè K_1, K_2 sono due corrispondenze armoniche fra loro involutorie, assumendo di un qualsiasi elemento A dello spazio il coniugato A_1 nella corrispondenza K_1 e di A_1 il coniugato $A_{1,2}$ nella corrispondenza K_2 , si otterrà lo stesso elemento, che si avrebbe se dell'elemento A si assumesse il coniugato A , nella K_2 e di questo il coniugato $A_{2,1}$ nella corrispondenza K_1 ; avremo cioè che la corrispondenza *prodotta* da le K_1, K_2 è la stessa qualunque sia l'ordine con cui esse si applicano.

Allora ad ogni coppia $(A-A_1)$ di elementi coniugati nella K_1 corrisponde nella K_2 una coppia $(A_2-A_{1,2})$ anche essa formata di elementi coniugati nella K_1 ; come ad ogni coppia $(A-A_2)$ di elementi coniugati nella K_2 corrisponde nella K_1 la coppia $(A_1-A_{2,1})$ costituita del pari da elementi coniugati nella K_2 ; — onde se riguardiamo le K_1, K_2 come forme geometriche costituite dall'assieme di coppie di elementi coniugati, ciascuna di esse si muterà in sè stessa rispetto all'altra.

Se viceversa le corrispondenze armoniche K_1, K_2 sono tali che la prima riguardata come forma geometrica, si muti in sè stessa rispetto alla seconda, allora le due corrispondenze risultano involutorie, e quindi di esse anche la seconda si muta in sè stessa rispetto alla prima. Infatti allora ogni coppia $(A-A_1)$ costituita da elementi coniugati nella corrispondenza K_1 ha per coniugata nella K_2 una coppia $(A_2-A_{1,2})$ anche essa di elementi coniugati nella K_1 , sicchè il punto $A_{1,2}$ coincide col punto $A_{2,1}$, e quindi la corrispondenza (K_1-K_2) , prodotta da le K_1, K_2 , è armonica.

Due elementi coniugati nella (K_1-K_2) hanno gli stessi elementi coniugati nelle K_1, K_2 , ma con l'ordine mutato.

Di più la $(K_1-K_2) = (K_2-K_1)$ è in involuzione con ciascuna delle corrispondenze K_1, K_2 , che la compongono. Infatti essa combinata con la K_1 dà la K_2 , e combinata con la K_2 dà la K_1 .

Più generalmente se la corrispondenza armonica H è in involuzione con le corrispondenze armoniche K_1, K_2 , sarà anche in involuzione con la corrispondenza da queste prodotta. Infatti la H si muta in sè stessa sia nella K_1 che nella K_2 e quindi anche nella (K_1-K_2) , con la quale perciò essa risulta in involuzione.

2. Occupiamoci ora più specialmente delle corrispondenze polari.

Sia K_1 una tale corrispondenza; — per avere il sistema delle corrispondenze polari involutorie con essa basta combinare la K_1 con tutte le corrispondenze collineari armoniche, con cui essa è in involuzione. Ora queste ultime corrispondenze si determinano facilmente notando che ognuna di esse, dovendo mutarsi in sè stessa rispetto alla K_1 , o è omologica, e allora il suo centro ed il suo piano d'omologia sono coniugati nella K_1 , o è iperboloidea, e allora i due suoi assi o sono fra loro coniugati nella K_1 , o ciascuno è coniugato a sè stesso in detta corrispondenza.

In particolare se la K_1 è una corrispondenza polare nulla, le corrispondenze omologiche armoniche in involuzione con essa sono degeneri, e quindi, combinate con la K_1 , danno luogo a corrispondenze polari degeneri.

Invece ogni corrispondenza armonica C , che abbia per assi due rette coniugate rispetto alla K_1 , combinata con questa dà una corrispondenza $(C-K_1) = K_2$ involutoria con la K_1 , e che è anche essa polare nulla. Infatti due punti A, A' coniugati nella C sono su di un raggio unito della K_1 , e quindi il piano polare α' del punto A' rispetto alla K_1 , che è il piano polare del punto A nella corrispondenza $(C-K_1)$, passa per A , qualunque esso sia.

Viceversa è evidente che ogni corrispondenza polare nulla K_2 involutoria con la K_1 determina con questa una corrispondenza collineare armonica, che ha per assi le due rette coniugate in entrambe le K_1, K_2 ; — perciò le corrispondenze polari nulle involutorie con la K_1 formano un sistema quattro volte infinito.

Se invece consideriamo una corrispondenza iperboloidea armonica C , di cui gli assi siano raggi uniti della K_1 , la corrispondenza polare $(C-K_1)$, involutoria con la K_1 , non sarà nulla; ma in essa saranno situati su i loro piani polari solamente i punti dei raggi uniti di entrambe le corrispondenze K_1, C , raggi che appartengono ad un sistema rigato di un iperboloide, il quale sarà la superficie fondamentale della corrispondenza $(C-K_1)$.

Viceversa ogni corrispondenza polare non nulla K_2 , che sia in involuzione con la K_1 , ha per superficie fondamentale un iperboloide (reale o immaginario), di cui un sistema rigato è costituito da raggi uniti della corrispondenza K_1 , mentre l'altro sistema contiene due soli di tali raggi, che sono gli assi della corrispondenza collineare armonica (K_1-K_2) .

Regge il teorema inverso; si ha cioè che: Tutte e sole le superficie di secondo grado, di cui un sistema rigato appartiene al complesso lineare dei raggi uniti di una corrispondenza polare nulla, corrispondono a sè stesse in tale corrispondenza.

Dette superficie formano un sistema sei volte infinito.

3. La corrispondenza polare K_1 non sia nulla.

Vi sono allora tre sistemi di corrispondenze polari in involuzione con la K_1 , dovuti, come notammo, alla combinazione della K_1 con i tre sistemi di corrispondenze collineari armoniche, con cui essa è in involuzione.

Uno di questi ultimi sistemi è costituito dalle corrispondenze iperboloidiche armoniche, che hanno per assi due generatrici dello stesso sistema della superficie fondamentale della K_1 .

Ora ciascuna di queste corrispondenze, combinata con la K_1 , dà evidentemente una corrispondenza polare nulla, nella quale sono uniti tutti i raggi della superficie fondamentale della K_1 , di sistema opposto a gli assi della corrispondenza iperboloidica considerata. E ne sussegue che: Vi è un assieme doppiamente infinito di corrispondenze polari nulle involutorie con una corrispondenza polare non nulla. Detto assieme si divide in due sistemi tali che in tutte le corrispondenze di uno stesso sistema sono uniti i raggi di uno stesso sistema rigato della superficie fondamentale della corrispondenza data. E i due sistemi risultano fra loro involutori, cioè ciascuna corrispondenza dell'un sistema è involutoria con tutte le corrispondenze dell'altro.

Notiamo infatti che se $(C-K)$, $(C'-K)$ sono due di tali corrispondenze di sistema opposto, la corrispondenza da esse prodotta è la $(C-C')$, che è armonica, giacchè le C , C' sono fra loro involutorie, avendo i loro assi formanti un quadrilatero gobbo, in modo che una di esse si muta in sè stessa rispetto all'altra.

Gli altri due sistemi di corrispondenze polari involutorie con la K_1 sono costituiti da corrispondenze polari non nulle. Il primo, dovuto a la combinazione della K_1 con le corrispondenze omologiche armoniche $(O-\omega)$, di cui il centro O ed il piano ω di omologia sono fra loro coniugati nella K_1 , comprende un assieme triplamente infinito di corrispondenze; — il secondo, dovuto a la combinazione della K_1 con le corrispondenze iperboloidiche armoniche (r_1-r_2) , di cui gli assi r_1 , r_2 sono fra loro coniugati nella K_1 , comprende un assieme quattro volte infinito di corrispondenze.

Passando da le corrispondenze polari alle loro superficie fondamentali, notiamo che di due corrispondenze polari non nulle fra loro involutorie le superficie fondamentali sono l'una reciproca a sè stessa rispetto all'altra; sono cioè, come noi diremo, anche esse involutorie.

Sicchè data una superficie di secondo grado, esistono due sistemi di superficie quadratiche involutorie con essa, l'uno tre volte e l'altro quattro volte infinito.

Ogni quadrica del primo sistema tocca lungo una conica la superficie data, mentre ogni quadrica del secondo sistema ha in comune con essa un quadrilatero gobbo; di più in entrambi i casi nel fascio-schiera determinato dalla superficie data e da una superficie con essa involutoria, le due superficie sono separate armonicamente dalle superficie degeneri della forma. Regge il teorema inverso. (*)

4. Veniamo ora all'esame dei gruppi completi di corrispondenze polari (nulle o non nulle) a due a due fra loro in involuzione.

Sia G un gruppo siffatto. Essendo esso completo, non vi sarà fuori di esso alcun'altra corrispondenza polare, che sia involutoria con le singole sue corrispondenze.

Fissiamo a piacere una corrispondenza del gruppo: la K .

Siano $P, Q, \dots T$ le corrispondenze collineari armoniche, che la K determina con tutte le singole corrispondenze del gruppo [fra di esse vi sarà la corrispondenza identica ($K-K$)], sicchè le corrispondenze del gruppo G siano le corrispondenze ($K-P$), ($K-Q$), \dots ($K-T$).

Indichiamo con G' il gruppo delle $P, Q, \dots T$.

Esse saranno in involuzione con la corrispondenza K , e a due a due saranno fra loro involutorie, giacchè due di esse, per es. le P, Q , combinate assieme danno la corrispondenza ($P-Q$), che coincide con quella prodotta dalle corrispondenze ($K-P$), ($K-Q$) del gruppo G , e che perciò risulta armonica.

(*) Le caratteristiche elementari del primo sistema sono tutte uguali ad otto, come fu dimostrato dallo STURM nella sua breve Memoria: *Ueber Flächen 2 Grades, welche zu sich selbst polar sind*. Math. Annalen, vol. 25. — La lettura di tale Memoria mi spinse a considerare anche le caratteristiche del secondo sistema, ma tale ricerca fu fatta contemporaneamente dal dott. DEL PEZZO, ed è già stata pubblicata negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, fasc. 6°, 1885, onde non mi sembra opportuno il ripeterla. Noterò solo che per due superficie di secondo grado I_1, I_2 fra loro involutorie con un quadrilatero gobbo in comune (avente per diagonali le r_1, r_2), possono presentarsi in quanto alla loro natura i seguenti casi:

1.° Le I_1, I_2 sono reali e rigate ed hanno in comune un quadrilatero gobbo reale. In tale caso i due segmenti delle r_1, r_2 , che cadono in una stessa regione rispetto ad uno degli iperboloidi I_1, I_2 , cadono in regioni diverse rispetto all'altro;

2.° La I_1 è immaginaria; allora la I_2 è reale e rigata, e le r_1, r_2 cadono rispetto ad essa in regioni diverse;

3.° Le I_1, I_2 sono reali ed a punti ellittici. In tale caso su quella delle due rette r_1, r_2 , che incontra le superficie in punti reali, il segmento esterno all'una superficie è interno all'altra, onde una almeno delle due superficie è a due falde;

4.° Le I_1, I_2 sono entrambe reali e rigate, ed hanno in comune due sole generatrici reali di uno stesso sistema. In tale caso le r_1, r_2 risultano immaginarie coniugate (di 2^a specie).

Di più il gruppo G' sarà completo; non vi sarà cioè nessuna corrispondenza collineare armonica non contenuta in esso gruppo G' , che sia involutoria con ciascuna corrispondenza di esso e con la corrispondenza polare K .

Se infatti vi fosse una tale corrispondenza X , la corrispondenza $(K-X)$ sarebbe polare, e sarebbe evidentemente in involuzione con le singole corrispondenze del gruppo G senza essere contenuta in G , il che è contrario alle ipotesi fatte. D'altra parte siccome due corrispondenze del gruppo G' combinate assieme danno una corrispondenza collineare armonica, che è in involuzione con la K e con tutte le corrispondenze di G' , essendo tali le sue componenti (§ 1), perciò essa corrispondenza-prodotto sarà anche contenuta nel gruppo G' .

Questo adunque è un gruppo chiuso.

E ne sussegue ancora che due qualsiasi corrispondenze $(K-P)$, $(K-Q)$ del gruppo G danno sempre, combinate assieme, una corrispondenza $(P-Q)$ del gruppo G' .

Perciò qualunque sia la corrispondenza polare K del gruppo G , da cui si parte, il gruppo G' che si ottiene, sarà sempre lo stesso; o in altri termini ciascuna corrispondenza del gruppo G è involutoria con le corrispondenze del gruppo G' , e combinata con esse dà le corrispondenze del gruppo G .

5. Dunque dalla esistenza di un gruppo completo G di corrispondenze polari a due a due fra loro involutorie, noi abbiamo dedotto l'esistenza di un gruppo completo G' di corrispondenze collineari armoniche a due a due fra loro in involuzione e tali che due di esse combinate assieme danno una terza corrispondenza del gruppo.

Viceversa costruito un gruppo siffatto G' , si potrà da esso dedurre un gruppo G , se esista una corrispondenza polare, che sia in involuzione con le singole corrispondenze di esso gruppo G' .

Occupiamoci perciò da prima della costruzione di questi gruppi G' , che si presenta più facile di quella dei gruppi G .

Notiamo a ciò che se due corrispondenze collineari armoniche sono fra loro involutorie, gli elementi fondamentali dell'una (centro e piano di omologia, se è omologica, o i due assi, se è iperboloidica) sono coniugati a sè stessi rispetto all'altra; e viceversa.

Onde:

1.° Se due corrispondenze omologiche armoniche $(O-\omega)$, $(O'-\omega')$ sono involutorie, il centro dell'una è nel piano di omologia dell'altra, e la corrispondenza da esse prodotta è la corrispondenza iperboloidica-armonica $(OO'-\omega\omega')$, che ha per assi la congiungente i centri e la intersezione dei piani di omologia delle due date corrispondenze.

2.° Se viceversa due corrispondenze collineari armoniche $(O-\omega)$, $(a-b)$, l'una omologica, l'altra iperboloidica, sono fra loro involutorie, un asse a della seconda passerà pel centro O della prima, e l'altro asse b si troverà nel piano di omologia ω di essa; e la corrispondenza collineare armonica prodotta da le due corrispondenze, è la corrispondenza omologica armonica $(O'-\omega')$, ove O' è il punto $(a-\omega)$, ed ω' è il piano $(b-O)$.

3.° Se due corrispondenze iperboloidiche armoniche sono fra loro involutorie, o gli assi delle due corrispondenze formano un quadrilatero gobbo, o formano due coppie armoniche su uno stesso sistema rigato.

Nel primo caso la corrispondenza da esse prodotta è la corrispondenza iperboloidica armonica, che ha per assi le due diagonali del quadrilatero formato da gli assi delle date corrispondenze; invece nel secondo caso la corrispondenza prodotta dalle due date corrispondenze è la corrispondenza iperboloidica armonica, che ha per assi i due raggi, che dividono armonicamente le due coppie di assi delle date corrispondenze sul sistema rigato determinato da esse coppie.

Abbiamo con ciò tre diverse terne di corrispondenze collineari armoniche siffatte, che in ogni terna due corrispondenze combinate assieme danno la terza corrispondenza della terna. Sicchè, se ad ogni terna aggiungiamo la corrispondenza identica, avremo tre diversi gruppi chiusi Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 di corrispondenze collineari armoniche a due a due fra loro involutorie.

Di essi il primo contiene una corrispondenza iperboloidica e due corrispondenze omologiche, mentre gli altri due non contengono che corrispondenze iperboloidiche (oltre la corrispondenza identica).

Ora evidentemente i gruppi completi G' , che noi vogliamo costruire, o sono questi tre gruppi Γ ora trovati, o sono costituiti da due o da più di essi.

Se cioè esistono gruppi G' della specie cercata, che contengano più di quattro corrispondenze, essi saranno certo formati da due o più gruppi Γ ; e quindi conterranno certo due corrispondenze iperboloidiche armoniche e la terza da esse prodotta, conterranno cioè certamente o il gruppo Γ_2 o il gruppo Γ_3 .

Partiamo allora da ciascuno di questi gruppi, e vediamo se vi sono altre corrispondenze collineari armoniche, che siano involutorie con le corrispondenze di esso.

Ora se partiamo dal gruppo Γ_2 , di cui le tre corrispondenze iperboloidiche hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro $ABCD$, vi sono quattro corrispondenze collineari armoniche in involuzione con esse; e sono le quattro corrispondenze omologiche armoniche, che hanno per centri i vertici

di detto tetraedro e per piani di omologia le facce di esso rispettivamente opposte.

Queste quattro corrispondenze con quelle del gruppo Γ_2 formano un gruppo di otto corrispondenze tali che due qualsiasi di esse combinate assieme ne danno una terza; nè vi è alcun'altra corrispondenza collineare armonica, che sia in involuzione con ciascuna delle otto corrispondenze, giacchè non vi è alcun'altra corrispondenza collineare armonica, oltre le otto già considerate, che muti ciascun elemento del tetraedro $ABCD$ in sè stesso.

Perciò il gruppo delle otto corrispondenze ora determinate è un gruppo completo G' della specie da noi cercata.

Invece se partiamo dal gruppo Γ_3 , formato dalla corrispondenza identica e da tre corrispondenze iperboliche armoniche: 1, 2, 3, di cui le tre coppie di assi sono su di un sistema rigato R , e si dividono armonicamente a due a due, le corrispondenze collineari armoniche in involuzione con esse formano quattro sistemi ciascuno doppiamente infinito.

Il primo di tali sistemi è costituito dalle corrispondenze iperboliche armoniche, che hanno per assi due qualsiasi direttrici del sistema rigato R ora accennato.

Invece ciascuno degli altri tre sistemi è costituito dalle corrispondenze iperboliche armoniche, che hanno per assi due rette, che siano reciproche rispetto all'iperboloide I , su cui trovasi il sistema R , e che si appoggino a gli assi di una delle tre corrispondenze 1, 2, 3.

Chè se H è una di tali corrispondenze, che abbia per assi due rette appoggiate a gli assi della corrispondenza 1 e reciproche rispetto all'iperboloide I , essa sarà in involuzione con la corrispondenza 1 e con la corrispondenza polare dovuta all'iperboloide I , sicchè su questo due generatrici dello stesso sistema, che siano divise armonicamente dalle due generatrici dello stesso sistema appoggiate a gli assi della corrispondenza H , saranno coniugate nella H , onde in particolare risultano coniugati rispetto alla H gli assi delle corrispondenze 2, 3, con le quali perciò, oltre che con la 1, la H risulta involutoria.

Nè evidentemente oltre i quattro sistemi considerati vi sono altre corrispondenze collineari armoniche involutorie con le corrispondenze del gruppo Γ_3 .

Ora se fra le corrispondenze del primo dei quattro sistemi (corrispondenze che hanno per assi le direttrici del sistema R) ne consideriamo tre: le 4, 5, 6, a due a due fra loro involutorie, e se alle due terne 1, 2, 3; 4, 5, 6 aggiungiamo le corrispondenze iperboliche armoniche (1-4), (1-5), (1-6), (2-4), (2-5), (2-6), (3-4), (3-5), (3-6) prodotte dalla combinazione di ciascuna cor-

rispondenza dell'una terna con quelle dell'altra, e se aggiungiamo di più la corrispondenza identica, otterremo un gruppo di sedici corrispondenze collineari armoniche (di cui non ve ne è alcuna omologica), di cui due qualsiasi combinate assieme ne danno una terza.

Combinando infatti per es. le corrispondenze (1-4), (1-5) si ottiene la corrispondenza (4-6) = 3; e così combinando le (1-4), (2-5) si ottiene la corrispondenza (3-6); ecc.

D'altra parte siccome non vi è alcun'altra corrispondenza collineare armonica, che sia in involuzione con tutte le sedici corrispondenze ora determinate, giacchè per ciò che si è detto precedentemente, le corrispondenze collineari armoniche, che mutino in sè stessa ciascuna corrispondenza delle due terne 1, 2, 3; 4, 5, 6, debbono avere gli assi appoggiati agli assi di una corrispondenza della prima terna ed a quelli di una corrispondenza della seconda terna, e quindi sono le altre nove corrispondenze (1-4),... (3-6), perciò il gruppo G' delle sedici corrispondenze considerate è un gruppo chiuso e completo.

Con ciò siamo giunti a due diversi gruppi chiusi e completi di corrispondenze collineari armoniche fra loro involutorie; — di più il ragionamento fatto per ottenerli mostra chiaramente che non esistono altri gruppi siffatti, sicchè ne possiamo dedurre che al massimo vi sono due gruppi completi di corrispondenze polari a due a due fra loro involutorie.

Ma giacchè d'altra parte tutte le corrispondenze del primo gruppo ottenuto G' sono in involuzione con una qualsiasi corrispondenza polare, che abbia per tetraedro polare il tetraedro $ABCD$, che contiene gli elementi fondamentali delle corrispondenze del gruppo; mentre tutte le corrispondenze del secondo gruppo ottenuto G'' sono in involuzione con la corrispondenza polare K dovuta all'iperboloide I , che contiene gli assi di sei corrispondenze del gruppo, e rispetto a cui sono reciproci gli assi delle altre nove sue corrispondenze, perciò possiamo addirittura affermare che *esistono due, e due soli, gruppi completi di corrispondenze polari a due a due fra loro in involuzione; l'uno costituito da otto e l'altro da sedici corrispondenze polari.*

Il primo di tali gruppi è costituito da una corrispondenza polare K e dalle sette corrispondenze polari, che si hanno combinando la K con le sette corrispondenze collineari armoniche dovute ad un tetraedro polare $ABCD$ di essa.

Ora se I è una superficie di secondo grado, che ha per tetraedro polare il tetraedro $ABCD$, essa si muterà in sè stessa nelle sette corrispondenze collineari armoniche dovute a tale tetraedro, e quindi la superficie I' , che è coniugata alla I rispetto alla K , lo sarà anche rispetto alle altre sette corri-

spondenze del gruppo, sicchè viceversa, come avevamo affermato in principio, il gruppo delle otto superficie di secondo grado, rispetto a cui due quadriche date sono fra coniugate, è della specie del primo gruppo G da noi ottenuto.

Invece il secondo gruppo G , a cui siamo giunti, si ottiene combinando una corrispondenza polare K con due terne: 1, 2, 3; 4, 5, 6 di corrispondenze iperboloidiche armoniche a due a due fra loro involutorie, ed aventi gli assi sulla superficie fondamentale della K , e di più combinando la corrispondenza K con le nove corrispondenze (1-4),... (3-6), prodotte dalle due terne, e con la corrispondenza identica.

Ora nel gruppo G , che si ottiene, le sei corrispondenze $(K-1) = K_1$, $(K-2) = K_2$, $(K-3) = K_3$, $(K-4) = K_4$, $(K-5) = K_5$, $(K-6) = K_6$ sono nulle (§ 3), mentre le altre dieci corrispondenze K , $(K-1-4) = K_{1,4}$,... $(K-3-6) = K_{3,6}$ non lo sono. — In virtù del § 2 le superficie fondamentali di queste ultime corrispondenze sono i dieci iperboloidi, che contengono i venti sistemi rigati comuni ai complessi lineari dei raggi uniti delle corrispondenze nulle K_1, \dots, K_6 , presi a tre a tre.

Più particolarmente se nei simboli delle dieci corrispondenze polari non nulle ai simboli 1, ... 6 sostituiamo i simboli equivalenti (2-3), ... (4-5), per designare dette corrispondenze avremo i simboli $K_{(abc)} = K_{(def)}$, (per $a, \dots, f = 1, \dots, 6$ e fra loro differenti), con che la corrispondenza polare $K_{(abc)} = K_{(def)}$ sarà il prodotto delle corrispondenze nulle K_a, K_b, K_c o delle corrispondenze K_d, K_e, K_f , onde su la superficie fondamentale di essa l'un sistema rigato apparterrà ai complessi dei raggi uniti delle corrispondenze K_a, K_b, K_c e l'altro sistema apparterrà ai complessi dei raggi uniti delle K_d, K_e, K_f . Otterremo cioè i noti simboli della configurazione di KLEIN.

Noi potremmo continuare ad esporre le notevoli proprietà dei due gruppi G , deducendole dalla loro legge di generazione, ma non giungeremmo certamente ad alcunchè di nuovo, giacchè i lavori degli eminenti geometri su nominati hanno portato su tali proprietà la maggior luce possibile. Perciò non insistiamo ulteriormente.

Fonctions énumératrices.

(Note de M. ERNEST CESÀRO, à Torre Annunziata.)

le flot que j'ai franchi revient pour me bercer;
à les compter en vain mon esprit se consume,
c'est toujours de la vague et toujours de l'écume,
les jours flottent sans avancer!

(LAMARTINE.)

1. Pour détacher du système des nombres entiers un nouveau système Ω , on imagine une fonction $\Omega(x)$, égale à 1 ou à 0, suivant que l'entier x appartient ou n'appartient pas à Ω . Ces *fonctions indicatrices* ont été étudiées précédemment, (*) et nous avons, dans un récent travail, (**) appelé l'attention sur le cas où elles sont douées de la propriété

$$\Omega(x)\Omega(y) = \Omega(xy). \quad (1)$$

Alors, il est clair que Ω est nécessairement un *groupe*, c'est-à-dire qu'il contient le produit de deux quelconques de ses éléments, sans jamais renfermer le produit de l'un d'eux par un élément extérieur. Mais le groupe Ω a aussi la propriété caractéristique de ne pas contenir le produit de deux éléments extérieurs quelconques: c'est pourquoi nous disons, en outre, que Ω est un *groupe fermé*. Plus loin, nous approfondirons mieux la nature de cette espèce de groupes. Remarquons ici que, quelles que soient les propriétés des systèmes Ω , leurs fonctions indicatrices engendrent, par sommation, les *fonctions énumératrices*, exprimant combien d'éléments jouissent d'une propriété déterminée, dans un système donné. Ces dernières fonctions pourraient porter le nom de *totients*, (***) si l'on voulait appliquer et étendre la terminologie proposée par M. SYLVESTER dans un cas particulier.

(*) Voyez nos *Excursions arithmétiques à l'infini*, publiées par ces Annales, (1885, pp. 235-351).

(**) « *Sur l'étude des événements arithmétiques* », (Mémoires de l'Académie de Belgique, 1886).

(***) Du latin *toties*. Consultez les travaux asymptotiques de J. J. SYLVESTER.

2. La plus remarquable des fonctions énumératrices est, sans contredit, la *fonction de Gauss*, $\varphi(n)$. On est conduit à une première généralisation de cette fonction en considérant le nombre $\varphi_\varepsilon(n)$ des *fractions irréductibles, de dénominateur n , non supérieures à ε* . On retrouve, pour $\varepsilon = 1$, la fonction de GAUSS. Pour le calcul des fonctions énumératrices il est souvent utile de remplacer une certaine fonction F par une fonction f , telle que l'on ait

$$f(a) + f(b) + f(c) + \dots = F(n),$$

a, b, c, \dots étant tous les diviseurs de n . Si, par exemple, on veut évaluer la somme

$$F(n, 1) + F(n, 2) + F(n, 3) + \dots + F(n, N),$$

où (x, y) représente le plus grand commun diviseur de x et y , on commence par ordonner cette somme relativement à la fonction f , en observant que $f(a)$ entre dans $F(n, i)$ pour les valeurs de i divisibles par a , non supérieures à N . On a donc

$$\sum_{i=1}^{i=N} F(n, i) = \sum \left[\frac{N}{a} \right] f(a). \quad (2)$$

Si la fonction $F(x)$ est nulle en général, mais égale à l'unité pour $x=1$, et si l'on suppose que N soit le plus grand nombre entier contenu dans $n\varepsilon$, on trouve

$$\varphi_\varepsilon(n) = \sum \left[\frac{n\varepsilon}{a} \right] \mu(a) = \sum [a\varepsilon] \mu \left(\frac{n}{a} \right). \quad (3)$$

Inversement, (*)

$$\varphi_\varepsilon(a) + \varphi_\varepsilon(b) + \varphi_\varepsilon(c) + \dots = [n\varepsilon]. \quad (4)$$

On a une interprétation immédiate de cette égalité, en observant que $\varphi_\varepsilon(a), \varphi_\varepsilon(b), \dots$, sont respectivement les quotités des $[n\varepsilon]$ premiers nombres naturels, qui admettent, avec n , les plus grands communs diviseurs $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \dots$

3. Plus généralement, si la fonction g satisfait à la condition (1), on trouve, au lieu de (2),

$$\sum_{i=1}^{i=N} g(i) F(n, i) = \sum g(a) f(a) s \left[\frac{N}{a} \right], \quad (5)$$

pourvu que l'on pose

$$g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(x) = s(x).$$

(*) « *Sull'inversione delle identità aritmetiche* », (Journal de BATTAGLINI, 1885, p. 168).

Par conséquent, si l'on désigne par $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, \dots$ les numérateurs des fractions irréductibles, non supérieures à ε , dont le dénominateur est n , et si l'on pose

$$g(\alpha_\varepsilon) + g(\beta_\varepsilon) + g(\gamma_\varepsilon) + \dots = s_\varepsilon(n),$$

on a

$$s_\varepsilon(n) = \sum \mu(a) g(a) s \left[\frac{n\varepsilon}{a} \right],$$

d'où, par inversion, on déduit l'identité

$$\sum s_\varepsilon(a) g \left(\frac{n}{a} \right) = s [n\varepsilon], \tag{6}$$

généralisation d'une intéressante formule, communiquée par LIOUVILLE à l'Académie de Paris.

4. Parmi les conséquences de l'identité (4) signalons la suivante:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(i)}{i^\nu} = \frac{1}{s_\nu} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{[i\varepsilon]}{i^\nu}, \quad \text{où } s_\nu = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^\nu}.$$

En particulier:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi(i)}{i^\nu} = \frac{s_{\nu-1}}{s_\nu}, \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_1(i)}{i^\nu} = \frac{s_{\nu-1}}{2s_\nu} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^\nu} \right);$$

etc. L'identité (3) est plus utile au point de vue des applications asymptotiques. Si l'on pose

$$\Phi_\varepsilon(n) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_\varepsilon(i), \quad \sigma_\varepsilon(n) = \sum_{i=1}^{i=n} [i\varepsilon],$$

on a

$$\Phi_\varepsilon(n) = \mu(1)\sigma_\varepsilon \left[\frac{n}{1} \right] + \mu(2)\sigma_\varepsilon \left[\frac{n}{2} \right] + \mu(3)\sigma_\varepsilon \left[\frac{n}{3} \right] + \dots,$$

d'où l'on sait (*) déduire, pour n indéfiniment croissant et $\varepsilon > 0$,

$$\lim \frac{\Phi_\varepsilon(n)}{n^2} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\mu(i)}{i^2} = \frac{3\varepsilon}{\pi^2}. \tag{7}$$

En d'autres termes, la fonction $\varphi_\varepsilon(n)$ est asymptotiquement égale au nombre n , multiplié par la constante $\frac{6\varepsilon}{\pi^2}$.

5. Les fonctions φ_ε trouvent leur utilité dans l'étude des suites de Farey. Rappelons que l'on appelle ainsi l'ensemble des fractions irréductibles, dont le

(*) Consultez la Note « Sur la distribution des quantités commensurables », dans nos *Excursions*.

dénominateur ne dépasse pas une limite donnée. On suppose que les fractions dont il s'agit soient rangées par ordre de grandeur croissante. Cela étant, la propriété découverte par J. FAREY (*) consiste en ceci: si $\frac{u_i}{v_i}$ est le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite, on a

$$\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{v_{i-1} + v_{i+1}}.$$

Ce curieux théorème découle immédiatement de ce que la différence $u_i v_{i-1} - v_i u_{i-1}$ est constamment égale à l'unité. Il a été pris en considération par CAUCHY, par GLAISHER, et par beaucoup d'autres. (**) Quant aux recherches asymptotiques, relatives aux suites en question, M. SYLVESTER s'en est occupé à plusieurs reprises, (***) en démontrant la formule (7) dans le cas particulier de $\varepsilon = 1$. Nous sommes arrivé à des résultats plus généraux dans notre *Première Mémoire*, (****) et nous venons d'obtenir une nouvelle extension des résultats connus. Il est clair, en effet, que $\Phi_\varepsilon(n)$ indique le nombre des fractions d'une suite de FAREY, qui ne dépassent pas ε , et dont les dénominateurs ne sont pas supérieurs à n . Cela étant, on voit par la formule (7) que, pour n indéfiniment grand, ce nombre est proportionnel à ε . Il en résulte que les termes d'une suite de Farey tendent à se ranger en progression arithmétique, lorsque la limite des dénominateurs croît sans cesse. Autrement dit, leur distribution dans le système des quantités réelles et positives tend à devenir uniforme.

6. Remarquons encore que, si l'on représente par $\varphi_\varepsilon^{(v)}(n)$ la somme des $v^{\text{èmes}}$ puissances des numérateurs des fractions irréductibles, non supérieures à ε , dont le dénominateur est n , et si l'on pose

$$\Phi_\varepsilon^{(v)}(n) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_\varepsilon^{(v)}(i), \quad s^{(v)}(n) = \sum_{i=1}^{i=n} i^v,$$

on a, en vertu de (6),

$$\sum a^v \varphi_\varepsilon^{(v)}\left(\frac{n}{a}\right) = s^{(v)}[n\varepsilon],$$

(*) *Philosophical Magazine* (1816, p. 385).

(**) Le théorème de Farey a été démontré par CAUCHY dans ses *Exercices* (t. I, p. 114), et plus simplement par M. A. F. PULLICH, de Copenhague, dans *Mathesis* (t. I, p. 161). Il a été démontré et généralisé, dans le *Philosophical Magazine* (1879), par J. W. L. GLAISHER. Consultez les indications bibliographiques fournies par M. H. BROCARD, dans *Mathesis* (t. V, p. 76).

(***) Lisez l'article « *On the number of Fractions...* », dans le *Johns Hopkins University Circulars* de 1883, et la communication faite par M. SYLVESTER à l'Académie de Paris, sur le même sujet. Dans ces recherches M. SYLVESTER arrive à des résultats connus depuis DIRICHLET, et retrouvés par MERTENS, PEROTT, etc.

(****) Voyez, par exemple, notre démonstration d'un théorème de M. Perott.

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^\nu \Phi_\varepsilon^{(\nu)} \left[\frac{n}{i} \right] = \sum_{i=1}^{i=n} s^{(\nu)} [i\varepsilon].$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$,

$$\Phi^{(\nu)} \left[\frac{n}{1} \right] + 2^\nu \Phi^{(\nu)} \left[\frac{n}{2} \right] + 3^\nu \Phi^{(\nu)} \left[\frac{n}{3} \right] + \dots = (n + 1) s^{(\nu)}(n) - s^{(\nu+1)}(n).$$

Plus particulièrement encore, si l'on fait successivement $\nu = 0$, $\nu = 1$, on trouve les formules

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Phi \left[\frac{n}{i} \right] = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{i=n} i \Phi^{(1)} \left[\frac{n}{i} \right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

données par M. SYLVESTER. (*)

7. D'après la formule (4), on peut écrire

$$\varphi_\varepsilon^{(\nu)}(n) = n^\nu \sum \frac{s^{(\nu)}[a\varepsilon]}{a^\nu} \mu \left(\frac{n}{a} \right),$$

d'où, après avoir posé

$$S_\varepsilon^{(\nu)}(n) = s^{(\nu)}[\varepsilon] + s^{(\nu)}[2\varepsilon] + s^{(\nu)}[3\varepsilon] + \dots + s^{(\nu)}[n\varepsilon],$$

on déduit, par addition,

$$\Phi_\varepsilon^{(\nu)}(n) = \mu(1) S_\varepsilon^{(\nu)} \left[\frac{n}{1} \right] + 2^\nu \mu(2) S_\varepsilon^{(\nu)} \left[\frac{n}{2} \right] + 3^\nu \mu(3) S_\varepsilon^{(\nu)} \left[\frac{n}{3} \right] + \dots$$

Il est aisé d'établir, ensuite, la formule asymptotique

$$\Phi_\varepsilon^{(\nu)}(n) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\nu+1} \cdot \frac{n^{\nu+2}}{\nu+2}.$$

En particulier,

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2, \quad \Phi^{(1)}(n) = \frac{1}{\pi^2} n^3,$$

conformément aux résultats obtenus par M. SYLVESTER, dans le *Philosophical Magazine*.

8. Voici une autre extension de la formule (2):

$$\sum_1^N F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu) = \sum \left[\frac{N}{a} \right]^\nu f(a).$$

On en déduit que la quotité des systèmes de ν nombres, qui constituent, avec

(*) *Philosophical Magazine* (1883, p. 251). Voyez aussi le *Bulletin de Darboux* (1885, p. 240).

n , des systèmes de $\nu + 1$ nombres premiers entre eux, et dont les rapports à n ne surpassent pas une limite donnée ε , est

$$\psi_\varepsilon^{(\nu)}(n) = \sum \left[\frac{n\varepsilon}{a} \right]^\nu \mu(a) = \sum [a\varepsilon]^\nu \mu\left(\frac{n}{a}\right). \tag{8}$$

Par inversion, on voit que ces fonctions ψ jouissent de la propriété suivante:

$$\psi_\varepsilon^{(\nu)}(a) + \psi_\varepsilon^{(\nu)}(b) + \psi_\varepsilon^{(\nu)}(c) + \dots = [n\varepsilon]^\nu.$$

En particulier, si $\psi^{(\nu)}(n)$ est la *quotité des systèmes de ν nombres, non supérieurs à n , qui constituent, avec cet entier, des systèmes de nombres premiers entre eux*, on a

$$\psi^{(\nu)}(a) + \psi^{(\nu)}(b) + \psi^{(\nu)}(c) + \dots = n^\nu.$$

On a aussi

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\psi_\varepsilon^{(\nu)}(i)}{i^\nu} = \frac{1}{s_\nu} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{[i\varepsilon]^\nu}{i^\nu}, \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\psi^{(\nu)}(i)}{i^\nu} = \frac{s_{\nu-\nu}}{s_\nu}.$$

Par exemple:

$$\frac{\psi^{(2)}(1)}{1^4} + \frac{\psi^{(2)}(2)}{2^4} + \frac{\psi^{(2)}(3)}{3^4} + \frac{\psi^{(2)}(4)}{4^4} + \dots = \frac{15}{\pi^2}.$$

Enfin, la formule (8) permet d'évaluer asymptotiquement les fonctions ψ . On obtient d'abord, par addition,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \psi_\varepsilon^{(\nu)}(i) = \mu(1)\sigma_\varepsilon^{(\nu)}\left[\frac{n}{1}\right] + \mu(2)\sigma_\varepsilon^{(\nu)}\left[\frac{n}{2}\right] + \mu(3)\sigma_\varepsilon^{(\nu)}\left[\frac{n}{3}\right] + \dots,$$

où

$$\sigma_\varepsilon^{(\nu)}(n) = [\varepsilon]^\nu + [2\varepsilon]^\nu + [3\varepsilon]^\nu + \dots + [n\varepsilon]^\nu.$$

Si l'on fait usage des procédés d'approximation habituels, on trouve

$$\sum_{i=1}^{i=n} \psi_\varepsilon^{(\nu)}(i) = \frac{\varepsilon^\nu n^{\nu+1}}{\nu+1} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\mu(i)}{i^{\nu+1}} = \frac{\varepsilon^\nu}{s_{\nu+1}} \cdot \frac{n^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Donc, asymptotiquement,

$$\psi_\varepsilon^{(\nu)}(n) = \frac{(n\varepsilon)^\nu}{s_{\nu+1}}.$$

9. Avant d'aller plus loin, rappelons ce théorème général: *si une fonction $F(n)$ admet une valeur moyenne constante, celle-ci est donnée par la série*

$$\frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \frac{f(4)}{4} + \dots$$

C'est un théorème qu'il n'est pas difficile de démontrer avec rigueur, et qui

a beaucoup de conséquences importantes. En particulier, si l'on a égard à l'identité connue (*)

$$s, \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{f(i)}{i^v} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{F(i)}{i^v},$$

on en déduit l'égalité remarquable

$$\lim \left\{ \varepsilon \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{F(i)}{i^{1+\varepsilon}} \right\}_{\varepsilon=0} = \lim \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} F(i) \right\}_{n=\infty},$$

qui généralise largement un théorème de DIRICHLET. (**) Pour obtenir ce dernier théorème, il suffit d'imaginer que F soit la fonction indicatrice d'un système Ω , constitué par les nombres u_1, u_2, u_3, \dots , que l'on suppose rangés par ordre de grandeur croissante. Alors, si l'on remplace, dans le second membre de la dernière égalité, n par u_n , on trouve d'abord

$$\lim \cdot \frac{\Omega(1) + \Omega(2) + \Omega(3) + \dots + \Omega(n)}{n} = \lim \frac{n}{u_n},$$

pour n infini; puis:

$$\lim \left\{ \varepsilon \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{u_i^{1+\varepsilon}} \right\}_{\varepsilon=0} = \lim \left(\frac{n}{u_n} \right)_{n=\infty}.$$

Par exemple:

$$\lim \left\{ \varepsilon \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{(a i + b)^{1+\varepsilon}} \right\}_{\varepsilon=0} = \lim \left(\frac{n}{a n + b} \right)_{n=\infty} = \frac{1}{a}.$$

Tel est, en somme, le théorème de DIRICHLET, débarrassé de toutes les restrictions que la démonstration exige. Rappelons que ce théorème a servi à DIRICHLET pour constater qu'il y a une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique, dont le premier terme est premier avec la raison. (***)

10. Cela posé, nous allons étudier une fonction $\Psi(n)$, exprimant la *quotité des nombres*

$$1 \cdot 2, \quad 2 \cdot 3, \quad 3 \cdot 4, \quad 4 \cdot 5, \dots, \quad n(n+1),$$

qui sont premiers avec n . En ordonnant la somme

$$F(n, 1 \cdot 2) + F(n, 2 \cdot 3) + \dots + F[n, n(n+1)]$$

par rapport à la fonction f , on voit que $f(a)$ doit être pris autant de fois qu'il est possible de rendre $i(i+1)$ divisible par a , en attribuant à i des valeurs

(*) Consultez notre Mémoire « Sur diverses questions d'arithmétique ».

(**) « Sur un théorème relatif aux séries », (Journal de CRELLE, t. 53).

(***) Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin (1837).

non supérieures à n ; mais on peut se borner à examiner ce qui arrive pour $i \geq a$, puisque des faits identiques se reproduisent pour les valeurs de i comprises entre deux multiples successifs de a . Or, pour que $i(i+1)$ soit divisible par a , il est nécessaire que les nombres $i, i+1$, soient respectivement divisibles par deux diviseurs complémentaires de a , premiers entre eux. Réciproquement, si l'on décompose a en un produit rs de deux nombres premiers entre eux, on sait que l'on peut toujours trouver une infinité de valeurs de x et y , telles que l'on ait, en nombres entiers,

$$i = rx, \quad i + 1 = sy, \quad \text{d'où} \quad sy - rx = 1,$$

et l'on obtiendra une solution unique si l'on exige que i soit compris entre 0 et a . Conséquemment, si $\tau(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n , de sorte que $2^{\tau(n)}$ représente le nombre des décompositions de n en un produit de deux nombres premiers entre eux, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} F[n, i(i+1)] = n \sum \frac{2^{\tau(a)} f(a)}{a}. \quad (9)$$

En particulier:

$$\Psi(n) = n \sum \frac{2^{\tau(a)} \mu(a)}{a}. \quad (10)$$

En d'autres termes, si u, v, w, \dots désignent les facteurs premiers de n ,

$$\Psi(n) = n \left(1 - \frac{2}{u}\right) \left(1 - \frac{2}{v}\right) \left(1 - \frac{2}{w}\right) \dots$$

Telle est la formule qui donne les valeurs de la fonction Ψ . Quant à la valeur asymptotique de cette fonction, on l'obtient immédiatement en appliquant le théorème général rappelé plus haut. En effet, puisque la fonction $\frac{\Psi(n)}{n}$ est toujours comprise entre 0 et 1, on peut affirmer *a priori* que sa valeur moyenne est constante. On a donc, d'après (10), l'égalité asymptotique

$$\frac{\Psi(n)}{n} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^{\tau(i)} \mu(i)}{i^2}.$$

En d'autres termes, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ sont les nombres premiers, supérieurs à l'unité, on a asymptotiquement

$$\Psi(n) = n \left(1 - \frac{2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_4^2}\right) \dots$$

11. Plus généralement, si $\Psi_\alpha(n)$ est la quotité des nombres de la série

considérée, qui admettent a pour plus grand commun diviseur avec n , et si l'on observe que

$$\tau(x) + \tau(y) = \tau(xy) + \tau(x, y),$$

la formule (9) donne

$$\Psi_a(n) = 2^{\tau(a)} \Psi\left(\frac{n}{a}\right),$$

lorsque a et $\frac{n}{a}$ sont premiers entre eux. La dernière formule est donc toujours vraie lorsque l'entier n est *dépourvu de facteurs carrés*. La fonction Ψ jouit d'un grand nombre d'autres propriétés intéressantes. Par exemple, à cause de

$$\sum_{\varphi(a)} \varphi(a) = n, \quad \sum 2^{\tau(a)} \mu(a) = (-1)^{\tau(n)},$$

l'identité (10) se transforme (*) en

$$\Psi(n) = \sum (-1)^{\tau(a)} \varphi\left(\frac{n}{a}\right).$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\Psi(i)}{i^s} = \frac{s_{s-1}}{s_s} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^{\tau(i)}}{i^s},$$

tandis que la formule (10) donne

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\Psi(i)}{i^s} = s_{s-1} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^{\tau(i)} \mu(i)}{i^s} = s_{s-1} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{2}{\varpi^s}\right).$$

Une fonction analogue à $\Psi(n)$, mais beaucoup plus importante, est celle qui exprime combien de nombres, premiers avec n , il y a dans la série

$$1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots, \quad n(n+1)(n+2).$$

M. E. LUCAS a rencontré cette fonction en étudiant les *lois géométriques du tissage*, (**) et il est curieux qu'on la rencontre encore dans le *problème des reines*, sur un échiquier quelconque, et dans le dénombrement des *carrés diaboliques*. (***)

12. L'étude de la fonction Ψ se rattache à celle d'une autre fonction énumératrice remarquable, $\nabla(n)$, qui indique combien de nombres *premiers avec n*

(*) Voyez les premières *Notes* de notre Mémoire « *Sur diverses questions d'arithmétique* ».

(**) Lisez les « *Principii fondamentali della geometria dei tessuti* », (L'Ingegneria civile e le Arti industriali, 1880).

(***) Consultez les *Récréations mathématiques* de M. LUCAS (t. I, pp. xviii, 85, etc.).

sont contenus dans la série des $2n$ premiers *nombre triangulaires*

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, \dots$$

Reprenons, en effet, la formule (9), et supposons que la fonction $f(x)$, nulle pour les valeurs *impaires* de la variable, ne diffère pas de $\mu\left(\frac{x}{2}\right)$ lorsque x est *pair*. On sait que la fonction $F(x)$, toujours nulle, est égale à l'unité pour $x=2$. Or, pour que le triangulaire $\frac{i(i+1)}{2}$ soit premier avec n , il faut et il suffit que 2 soit le plus grand commun diviseur de $i(i+1)$ et $2n$. La formule (9) devient donc, après y avoir changé n en $2n$, et en remarquant que les diviseurs pairs de $2n$ sont les doubles des diviseurs de n ,

$$\nabla(n) = n \sum \frac{2^{\tau(2a)} \mu(a)}{a}.$$

Si l'on distingue par un accent les diviseurs *impairs* de n , on peut écrire

$$\nabla(n) = n \sum \frac{2^{\tau(a)} \mu(a)}{a} + n \sum \frac{2^{\tau(a')} \mu(a')}{a'}.$$

D'ailleurs, les nombres a', b', c', \dots sont les diviseurs du *plus grand diviseur impair* de n , que nous représenterons par $\delta(n)$. Donc, enfin,

$$\frac{\nabla(n)}{n} = \frac{\Psi(n)}{n} + \frac{\Psi[\delta(n)]}{\delta(n)}.$$

Inversement,

$$\frac{\Psi(n)}{n} = \frac{\nabla(n)}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\nabla[\delta(n)]}{\delta(n)}.$$

13. La nouvelle fonction, que nous venons d'imaginer, possède aussi beaucoup de propriétés curieuses. Ainsi, il est facile de démontrer la formule

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} g(i) F[\delta(i)] = \frac{1 - g(2) F(2)}{1 - g(2)} \sum_{i=1}^{i=\infty} i g(i),$$

en admettant que les deux séries soient convergentes, et que les fonctions g, F , soient douées de la propriété (1). On en déduit, par exemple, les formules

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\delta(i)}{i^v} = \left(1 - \frac{1}{2^v - 1}\right) s_{v-1}, \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\lambda(i) \delta(i)}{i^v} = \left(1 + \frac{1}{2^v + 1}\right) \frac{s_{2v-2}}{s_{v-1}}.$$

En particulier

$$\frac{\delta(1)}{1^3} + \frac{\delta(2)}{2^3} + \frac{\delta(3)}{3^3} + \frac{\delta(4)}{4^3} + \frac{\delta(5)}{5^3} + \dots = \frac{\pi^2}{7}.$$

Si l'on ne retient, dans le premier membre, que l'unité et les entiers composés d'un nombre *pair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux, on a

$$\frac{d(1)}{1^3} + \frac{d(4)}{4^3} + \frac{d(6)}{6^3} + \frac{d(9)}{9^3} + \frac{d(10)}{10^3} + \dots = \frac{13\pi^2}{378};$$

etc. On trouve aussi

$$\sum_{i=1}^{i=n} g(i) F[\backslash(i)] = g(1)S\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + g(2)S\left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + g(4)S\left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right] + \dots,$$

où la fonction g doit satisfaire à l'égalité (1), et la fonction S est définie par la relation

$$S(x) = g(1)F(1) + g(3)F(3) + g(5)F(5) + \dots + g(2x - 1)F(2x - 1).$$

On peut prendre, par exemple,

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = x, \quad S(x) = x,$$

et l'on trouve

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d(i)}{i} = \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{n}{8} + \frac{1}{2}\right] + \dots,$$

d'où l'on déduit que le plus grand diviseur impair de n est égal, en moyenne, aux $\frac{2}{3}$ de n .

14. Il n'est pas difficile d'obtenir d'autres résultats asymptotiques, relatifs à la fonction d ; mais nous voulons surtout faire observer que, si la fonction $F[d(n)]$ admet une valeur moyenne constante, celle-ci est nécessairement, d'après un théorème énoncé plus haut, la somme de la série

$$\frac{f(1)}{1} + \frac{f(3)}{3} + \frac{f(5)}{5} + \frac{f(7)}{7} + \dots$$

On a donc, en moyenne,

$$\frac{\Psi[d(n)]}{d(n)} = \prod_{i=2}^{i=\infty} \left(1 - \frac{2}{\omega_i^2}\right) = 2 \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{2}{\omega_i^2}\right) = 2 \frac{\Psi(n)}{n}.$$

Par conséquent

$$\frac{\nabla(n)}{n} = 3 \left(1 - \frac{2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{2}{\omega_4^2}\right) \dots$$

Ainsi, la fonction $\nabla(n)$ est, en moyenne, trois fois plus grande que $\Psi(n)$.

15. Bien que les procédés employés jusqu'à présent, pour l'évaluation des fonctions énumératrices, ne puissent être considérés comme constituant une mé-

thode générale, ils n'en donnent pas moins, dans un grand nombre de cas, avec rapidité et sous une forme précise, les résultats voulus. En voici encore un exemple. Supposons que l'on prenne, de toutes les manières possibles, ν diviseurs de n , égaux ou inégaux, et désignons-les par $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu$. On trouve immédiatement

$$\sum F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu) = \sum f(a) \vartheta^\nu \left(\frac{n}{a} \right).$$

Donc, si $\xi_\nu(n)$ est le nombre des cas où les ν diviseurs sont premiers entre eux, on a

$$\xi_\nu(n) = \sum \mu(a) \vartheta^\nu \left(\frac{n}{a} \right),$$

d'où, par inversion,

$$\xi_\nu(a) + \xi_\nu(b) + \xi_\nu(c) + \dots = \vartheta^\nu(n).$$

Dans le cas de $\nu = 2$ on obtient les identités

$$\sum F(a, b) = \sum f(a) \vartheta^2 \left(\frac{n}{a} \right) = \sum \theta(a^2) F' \left(\frac{n}{a} \right) = \sum 2^{\tau(a)} F' \left(\frac{n}{a} \right),$$

pourvu que F' se déduise de la fonction F comme celle-ci a été déduite de f . En particulier,

$$\xi_2(n) = \theta(n^2) = \sum 2^{\tau(a)} = \sum \mu(a) \vartheta^2 \left(\frac{n}{a} \right).$$

16. De même, pour résoudre des questions de probabilités, relatives aux nombres triangulaires, on établit immédiatement la formule

$$\sum_1^n F[x_1(x_1 + 1), x_2(x_2 + 1), \dots, x_\nu(x_\nu + 1)] = \sum_{i=1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{\nu \tau(i)} f(i) \left\{ \left[\frac{n}{i} \right] + \rho \right\}^\nu.$$

Le nombre positif ρ est moindre que l'unité, et les entiers x sont pris, au hasard, dans la suite des n premiers nombres naturels. Cela étant, la probabilité $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ que ν triangulaires, pris au hasard, soient premiers entre eux, est la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{1}{n^\nu} \sum_{i=1}^{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{\nu \tau(2i)} \mu(i) \left\{ \left[\frac{n}{2i} \right] + \rho \right\}^\nu,$$

lorsque n augmente indéfiniment. Par suite:

$$\mathfrak{p}^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} 2^{|\tau(2i)-1|\nu} \cdot \frac{\mu(i)}{i^\nu} = \left(1 - \frac{1}{2^\nu} \right) \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^{\nu \tau(2i-1)} \mu(2i-1)}{(2i-1)^\nu}$$

En d'autres termes:

$$p^{(\nu)} = \left(1 - \frac{1}{\omega_1}\right) \left[1 - \left(\frac{2}{\omega_2}\right)^\nu\right] \left[1 - \left(\frac{2}{\omega_3}\right)^\nu\right] \left[1 - \left(\frac{2}{\omega_4}\right)^\nu\right] \dots$$

Par exemple: la probabilité que deux nombres triangulaires, pris au hasard, soient premiers entre eux, est égale à

$$\frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \left(1 - \frac{4}{7^2}\right) \left(1 - \frac{4}{11^2}\right) \dots$$

17. Toutes les considérations que nous venons d'exposer subsistent lorsque le système des nombres entiers est remplacé par un de ses sous-groupes *fermés*. Il suffit d'observer, à cet effet, que les formules générales, données plus haut, contiennent une fonction g , qui doit satisfaire à la condition (1), et qui peut être, à cause de cela, la fonction indicatrice d'un groupe fermé Ω . C'est ainsi que les nombres u_1, u_2, u_3, \dots , appartenant à Ω , apparaissent dans toutes ces formules, à l'exclusion des autres nombres entiers. Par exemple, la formule évidente

$$\sum_1^n g(x_1)g(x_2)\dots g(x_\nu)F(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = \sum_{i=1}^{i=n} f(i)g^\nu(i) s^\nu \left[\frac{n}{i} \right],$$

où

$$s(x) = g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(x),$$

devient

$$\sum_1^{s(n)} F(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_\nu}) = \sum_{i=1}^{i=s(n)} f(u_i) s^\nu \left[\frac{n}{u_i} \right].$$

Par suite, si $p^{(\nu)}$ est la probabilité que ν éléments du groupe fermé Ω , pris au hasard, soient premiers entre eux, on a

$$p^{(\nu)} = \lim \cdot \frac{1}{s^\nu(n)} \sum_{i=1}^{i=s(n)} \mu(u_i) s^\nu \left[\frac{n}{u_i} \right] = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\mu(u_i)}{u_i^\nu} = \frac{1}{\frac{1}{u_1^\nu} + \frac{1}{u_2^\nu} + \frac{1}{u_3^\nu} + \dots}.$$

Si, par exemple, Ω est le système des nombres impairs, on voit, pour $\nu = 2$, que $\frac{8}{\pi^2}$ est la probabilité que deux nombres impairs, pris au hasard, soient premiers entre eux.

18. Il convient, maintenant, d'examiner de plus près la nature des groupes fermés. Par définition, un élément d'un tel groupe ne peut admettre un diviseur extérieur au même groupe. Par conséquent, si un groupe est fermé, il contient les diviseurs de tous ses éléments. Réciproquement, si un groupe contient les diviseurs de tous ses éléments, il est nécessairement fermé. Mais

il faut que l'on ait affaire à un *groupe*; car il est facile de trouver des systèmes de nombres, renfermant les diviseurs de tous leurs éléments, sans être des groupes. Citons comme exemple le système

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, \dots$$

constitué par tous les *nombres dépourvus de facteurs carrés*. Ces systèmes, qu'ils soient ou non des groupes, ont des propriétés communes, fort intéressantes: nous en avons indiqué quelques-unes dans une étude sur le *déterminant de SMITH et MANSION*. (*) Ainsi, on trouve facilement

$$|F(u_i, u_j)|^{(n)} = f(u_1)f(u_2)f(u_3)\dots f(u_n);$$

le premier membre représente le déterminant de degré n , dont l'élément général est $F(u_i, u_j)$. Par exemple, on a

$$|(u_i, u_j)|^{(n)} = \varphi(u_1)\varphi(u_2)\varphi(u_3)\dots\varphi(u_n),$$

ce qui généralise un théorème de H. J. S. SMITH. (**) On suppose, bien entendu, que les entiers u soient rangés par ordre de grandeur croissante. On peut même, assez facilement, exprimer les mineurs des déterminants analogues à celui qui précède, en se laissant guider par les indications que nous avons fournies dans d'autres études sur les déterminants arithmétiques. (***) Mais c'est surtout sur la constitution des groupes fermés que doit se porter, actuellement, notre attention. Il est évident que, si ω est *premier*, le système $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ est un *groupe fermé*, et, en outre, ce groupe est *premier*, en ce sens qu'il n'admet pas de sous-groupe fermé, autre que lui-même ou l'unité. Inversement, tout groupe premier a nécessairement la forme que nous venons d'indiquer; car, si le groupe fermé Ω contient un élément différent de l'unité, il doit renfermer aussi tous les diviseurs de cet élément, et, par suite, il contient au moins un nombre premier ω . Le groupe Ω admet donc le sous-groupe fermé $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots$, d'où il suit qu'il ne saurait être premier, à moins de coïncider avec ce dernier groupe. D'après cela, un groupe fermé quelconque contient nécessairement quelque sous-groupe premier $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots$. Il peut, d'ailleurs, en

(*) « *Intorno a taluni determinanti aritmetici* », (Comptes-Rendus de l'Académie des *Lincei*, 1885, p. 709).

(**) « *On the Value of an Arithmetical Determinant* », (Proceedings of the London Mathematical Society, v. 7, p. 108).

(***) « *Nuovo studio di determinanti aritmetici* », (Comptes-Rendus des *Lincei*, 1885, p. 711). Lire aussi nos « *Nouvelles considérations sur le déterminant de Smith et Mansion* », dans les *Annales de l'École Normale Supérieure* (1885).

renfermer plusieurs, ayant tous une constitution analogue, d'où il suit que l'un quelconque de ses éléments ne saurait avoir d'autre forme que $u^\alpha v^\beta w^\gamma \dots$, en supposant que u, v, w, \dots soient des nombres premiers donnés, et que les entiers $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ varient de zéro à l'infini. Il en résulte qu'un groupe fermé s'obtient en supprimant, dans le système des nombres entiers, tous les nombres divisibles par un ou plusieurs nombres premiers donnés. Cette conclusion est évidente. Les nombres *impairs*, par exemple, constituent un groupe fermé.

19. Pour finir, disons quelques mots sur le rôle important que les groupes fermés jouent dans l'*inversion des séries*. Considérons une fonction $e_n(x)$, telle que

$$e_i[e_j(x)] = e_j[e_i(x)] = e_{ij}(x), \tag{11}$$

et tâchons d'effectuer l'inversion de la série

$$\mathfrak{F}(x) = h_{u_1} F[e_{u_1}(x)] + h_{u_2} F[e_{u_2}(x)] + h_{u_3} F[e_{u_3}(x)] + \dots, \tag{12}$$

dans l'hypothèse que les nombres u constituent un groupe fermé. On peut écrire

$$\mathfrak{F}[e_j(x)] = \sum_{i=1}^{i=\infty} \Omega(i) h_i F[e_{ij}(x)].$$

Si l'on attribue successivement à j les valeurs 1, 2, 3, ..., on obtient une suite de relations, qui, multipliées respectivement par $\Omega(1)h_1, \Omega(2)h_2, \Omega(3)h_3, \dots$, et additionnées, donnent

$$F[e_i(x)] = \sum_{i=1}^{i=\infty} \Omega(i) h_i \mathfrak{F}[e_i(x)],$$

c'est-à-dire

$$F(x) = h_{u_1} \mathfrak{F}[e_{u_1}(x)] + h_{u_2} \mathfrak{F}[e_{u_2}(x)] + h_{u_3} \mathfrak{F}[e_{u_3}(x)] + \dots, \tag{13}$$

pourvu que les coefficients h_i et h_j , que l'on peut considérer comme des fonctions $h(i)$ et $h(j)$, vérifient la relation

$$h(a)h\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)h\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)h\left(\frac{n}{c}\right) + \dots = \begin{cases} 0, & \text{en général} \\ 1, & \text{pour } n = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Dans ce cas, nous disons que les fonctions h et h sont *conjuguées*. Le théorème d'inversion, exprimé par les relations (12) et (13), est le plus général que l'on connaisse: nous l'avons déjà formulé dans nos *Excursions*, (*) mais sans faire remarquer suffisamment la possibilité de remplacer le système des nombres entiers par un groupe fermé quelconque, détaché du même système. Cette pos-

(*) Voyez la Note « Sur l'inversion de certaines séries ».

sibilité a été implicitement reconnue par MÖBIUS, qui s'est occupé, il y a longtemps, de l'inversion des séries dans un cas particulier. (*)

20. Toutes les formules d'inversion, signalées jusqu'à présent, supposent que la fonction $h(x)$ obéisse à la loi (1). Alors $h(x)$ ne diffère pas de $h(x)_\mu(x)$. Mais nous avons donné, dans le *Journal de Battaglini*, (**) le moyen d'exprimer une fonction quelconque moyennant sa conjuguée. Dans ce but, nous avons imaginé l'algorithme (***)

$$\bigoplus_n^v h(x),$$

égal à la somme de tous les produits analogues à $h(x_1)h(x_2)\dots h(x_v)$, en supposant que l'on ait, de toutes les manières possibles, en nombres entiers, supérieurs à l'unité,

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_v = n.$$

Si l'on convient de prendre $h(1) = h(1) = 1$, on a

$$h(n) = - \bigoplus_n^1 h(x) + \bigoplus_n^2 h(x) - \bigoplus_n^3 h(x) + \bigoplus_n^4 h(x) - \dots$$

Supposons, par exemple, que $h(x)$ soit l'indicatrice des nombres premiers, c'est-à-dire qu'elle soit une fonction $p(x)$, généralement nulle, mais égale à l'unité lorsque x est premier. Si l'on décompose n en ses facteurs premiers, et si l'on obtient

$$n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \dots,$$

il est clair que l'algorithme \bigoplus_n^i ne diffère de zéro que pour $i = \alpha + \beta + \gamma + \dots$ et, alors, sa valeur est égale à autant de fois l'unité qu'il y a de manières distinctes de permuter entre eux les facteurs premiers de n , dont α sont égaux à u , β à v , γ à w , etc. Par suite

$$p(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\dots} \cdot \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \dots)!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$$

D'après cela, l'inversion de la série

$$f(x) = F[e_1(x)] + F[e_2(x)] + F[e_3(x)] + F[e_5(x)] + F[e_7(x)] + F[e_{11}(x)] + \dots,$$

(*) « Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen », (Journal de CRELLE, t. 9 p. 105).

(**) « Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche », (1885, p. 175).

(***) Algorithme isodynamique, base du Calcul isodynamique. Les nombres n et v sont respectivement la puissance et le degré de l'algorithme.

est effectuée par la formule

$$F(x) = p(1) \mathfrak{f}[e_1(x)] + p(2) \mathfrak{f}[e_2(x)] + p(3) \mathfrak{f}[e_3(x)] + p(4) \mathfrak{f}[e_4(x)] + \dots$$

En d'autres termes, si l'on observe que $p(n)$ est, au signe près, le coefficient de n dans le développement de $(u + v + w + \dots)^{\alpha + \beta + \gamma + \dots}$, on reconnaît que l'on peut écrire

$$F(x) = \mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}^{(1)}(x) + \mathfrak{f}^{(2)}(x) - \mathfrak{f}^{(3)}(x) + \mathfrak{f}^{(4)}(x) - \dots,$$

en posant *symboliquement*

$$\mathfrak{f}^{(v)}(x) = \{ \mathfrak{f}[e_2(x)] + \mathfrak{f}[e_3(x)] + \mathfrak{f}[e_5(x)] + \mathfrak{f}[e_7(x)] + \mathfrak{f}[e_{11}(x)] + \dots \}^v,$$

où l'on convient de remplacer, après développement,

$$\mathfrak{f}[e_i(x)] \mathfrak{f}[e_j(x)] \dots \text{ par } \mathfrak{f}[e_{ij\dots}(x)].$$

21. Quant aux formes possibles de $e_n(x)$, il est clair que l'on peut prendre

$$e_n(x) = x \cdot e(n),$$

pourvu que la fonction $e(n)$ obéisse à la loi (1). On a ainsi le couple de séries inverses

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_{u_i} F[x \cdot e(u_i)], \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_{u_i} \mathfrak{f}[x \cdot e(u_i)].$$

En particulier, si la fonction h satisfait à la condition (1), et si l'on prend

$$u_i = i, \quad e(n) = n,$$

on trouve

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_i F(ix), \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu(i) h_i \mathfrak{f}(ix).$$

Trois cas particuliers de ces dernières formules ont été étudiés par M. ТЧЕБЫЧЕВ. (*) Un peu plus généralement, on peut écrire

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_i F\left(\frac{x}{i^v}\right), \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_i \mathfrak{f}\left(\frac{x}{i^v}\right),$$

et il est possible de retrouver, par cette voie, toutes les formules que nous avons données dans le cours de nos articles d'Arithmétique. D'autres formes sont possibles pour $e_n(x)$, telles que

$$\frac{x}{1 - x \log e(n)}, \quad \frac{x \cdot e(n)}{1 - kx\{e(n) - 1\}}, \quad x^{e(n)}, \dots,$$

(*) Voyez le *Journal de Liouville* de 1851.

où la fonction e doit toujours vérifier la condition (1). On a donc, pour la dernière forme de $e_n(x)$,

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_{u_i} F(x^{e(u_i)}), \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_{u_i} \mathfrak{f}(x^{e(u_i)}).$$

En particulier, si $e(x) = x$, et si la fonction h jouit de la propriété (1), on obtient

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} h_{u_i} F(x^{u_i}), \quad F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu(u_i) h_{u_i} \mathfrak{f}(x^{u_i}).$$

Tel est le *théorème de Möbius*, dont M. GLAISHER a fait, dans le *Philosophical Magazine*, une foule d'applications intéressantes. (*) À notre tour, nous ne tarderons pas à appliquer nos formules d'inversion aux fonctions indicatrices et aux fonctions énumératrices des groupes fermés, et nous montrerons de quelle manière les mêmes formules se modifient, dans l'hypothèse que la fonction e soit l'indicatrice d'un groupe *ouvert*, c'est-à-dire d'un groupe qui renferme toujours le produit de deux éléments extérieurs quelconques.

(*) Une communication sur ce sujet, concernant les nombres premiers, a été faite par M. GLAISHER au *Congrès du Havre* (1877). Voir, dans le *Philosophical Magazine* (1884, p. 518), les « *Applications of Möbius's Theorem on the Reversion of certain Series* ». Il a été rendu compte de cet article dans le *Bulletin de Darboux* (Décembre, 1885); mais le *théorème de Möbius*, tel qu'il est énoncé dans le Bulletin, n'est pas exact.

TEMA DI CONCORSO

DELLA

SOCIETÀ PRINCIPE JABLONOWSKI

(publicato nello *Jahresbericht* della Società, Lipsia, marzo 1886).

Per l'anno 1889

Benchè mediante le ricerche di BORCHARDT sulla media aritmetico-geometrica sia dimostrata una certa connessione delle funzioni \mathfrak{S} a più variabili con integrali multipli e già a JACOBI non fosse ignota (*) l'estensione del teorema di ABEL a integrali algebrici multipli, sembra tuttavia che i relativi integrali doppi non siano finora stati oggetto di uno studio esauriente. Ora potendosi dimostrare che se per es. $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5$ dinotano certe funzioni \mathfrak{S} di due variabili u e v appartenenti a un così detto gruppo di ROSENHAIN (Giorn. di CRELLE, t. XI, pag. 342) il determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S} & \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_2 \\ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

è proporzionale al prodotto $\mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_5$, se ne ricava (Leipziger Berichte, 1884, p. 187) per $x = \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}}\right)^2$, $y = \left(\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}}\right)^2$ un'equazione della forma $du dv = \frac{dx dy}{\sqrt{R(xy)}}$. La Società desidera un'indagine accurata dell'integrale doppio più generale della forma

$$\iint \frac{f(xy) dx dy}{\sqrt{R(xy)}}$$

(ove f è una funzione razionale) nei suoi rapporti con le funzioni \mathfrak{S} di due variabili.

Premio 1000 Marchi.

Le memorie dei concorrenti devono essere anonime e, ove la Società in casi particolari non conceda espressamente l'uso di altra lingua, devono essere redatte in *tedesco, latino o francese*, scritte chiaramente e con le pagine numerate. Saranno inoltre contrassegnate con un *motto* e accompagnate

(*) Vedi Giornale di CRELLE, t. VIII, p. 415, come pure ROSENHAIN nelle sue lettere a JACOBI Giorn. di CRELLE, t. XL, ove sono considerati anche integrali della forma $\iint \frac{dt du}{\sqrt{F(tu)}}$, nei quali $F(tu)$ è il prodotto di sei fattori lineari $A + Bt + Cu$. Cfr. inoltre i lavori di NOETHER nelle *Nachrichten* di Gottinga, 1869 N. 15, e t. II dei *Mathem. Annalen*, p. 293.

da una busta suggellata portante all'esterno lo stesso motto e contenente il nome e domicilio dell'Autore. I lavori saranno inviati al Segretario della Società; il tempo utile per l'invio scade col 30 novembre dell'anno indicato. I risultati dell'esame degli scritti inoltrati saranno pubblicati, nel marzo o aprile dell'anno seguente, nella Gazzetta di Lipsia. I lavori premiati divengono proprietà della Società.

PROGRAMMA DI CONCORSO

DELLA

REALE ACCADEMIA DI NAPOLI

(pubblicato nel *Rendiconto* dell'Accademia, gennaio 1886)

L'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli conferirà un premio di lire mille all'Autore della migliore Memoria: *Sulle curve piane di 4° ordine in relazione coll'interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica.*

L'Accademia desidera un'esposizione analitica sistematica delle più notevoli proprietà delle curve piane del 4° ordine in relazione con l'interpretazione geometrica delle forme invariantive della forma ternaria biquadratica. La Memoria dovrebbe trattare:

- 1.° Delle polari delle curve di 4° ordine.
- 2.° Delle sue tangenti doppie.
- 3.° Dei suoi flessi.
- 4.° Dei caratteri analitici invariantivi che distinguono le linee speciali del 4° ordine.
- 5.° Della geometria sopra una curva del 4° ordine.

L'Accademia desidera che siano trattati principalmente gli argomenti dei numeri 3.° e 5.°

CONDIZIONI:

1.° Le memorie dovranno essere scritte in *italiano* o *francese*, e dovranno inviarsi al Segretario dell'Accademia non più tardi del mese di marzo del 1887.

2.° Esse non debbono portare il nome dell'Autore, e debbono essere distinte con un *motto* il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata che conterrà il nome dell'Autore.

3.° La Memoria premiata sarà pubblicata negli *Atti* dell'Accademia per intero o per sunto, e l'Autore ne avrà cento copie.

4.° Tutte le memorie inviate pel concorso al premio si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia, e soltanto si permetterà di estrarne copia a chi le avrà presentate.

Sopra alcune configurazioni piane. (*)

(Memoria del dott. V. MARTINETTI, a Pavia.)

§ 1. Definizioni e generalità.

1. Il sistema di μ punti e ν rette in un piano disposte in modo che per ogni punto passino p rette e sopra ogni retta giacciono q punti si chiamerà una *Configurazione* e si dinoterà col simbolo Cfz. $(q, p)_{\mu}^{\nu}$. (**)

Tra i numeri μ , ν , p , q esiste necessariamente la relazione:

$$\mu : \nu = q : p \quad (1)$$

Quando sia $\mu = \nu$, epperò $p = q$, la configurazione si indica più semplicemente col simbolo Cfz. μ_p . (***)

Cercare tutte le forme delle Cfz. per le quali μ , ν , p , q sono certi numeri soddisfacenti alla (1) è problema arduo assai e che fu risolto nei soli casi particolari 8_3 , 9_3 , 10_3 dal KANTOR, (****) il quale trovò: che non esistono Cfz. 8_3 reali; esistono tre forme reali di Cfz. 9_3 e dieci forme di Cfz. 10_3 . Di tutte queste egli ha date varie costruzioni geometriche ed alcune eleganti applicazioni alle curve del 3° ordine.

In un precedente lavoro (*****) lo stesso KANTOR aveva esposta una costruzione geometrica di una intera classe di ∞ configurazioni, tanto nel piano, che nello spazio. Dopo di lui si sono occupati delle Cfz. i sig.ⁱ VERONESE, REYE,

(*) Questo lavoro è l'estratto della mia tesi d'Abilitazione all'insegnamento, presentata alla R. Scuola Normale superiore di Pavia.

(**) S. KANTOR: *Ueber die Configurationen (3, 3) mit den Indices 8, 9, etc.* Sitzb. der Wiener Akad. II Abth., 1881, B. 84. — G. JUNG: *Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.* Annali di Mat., tom. XII.

(***) TH. REYE: *Das Problem der Configurationen.* Acta Mathematica, B. I.

(****) Memoria citata, e *Die Cfz. (3, 3)₁₀*. Sitzb. der Wiener Akad. II Abth., B. 84.

(*****) *Ueber eine Gattung von Configurationen*, ecc. Ibid., B. 80.

VICTOR e JUNG (*) il quale ultimo ha mostrato come certe Cfz. si presentino nella statica grafica studiando le condizioni di equilibrio dei sistemi di forze, ed ha dati molti esempî di Cfz. nascenti in questo modo.

Ora io mi propongo di dare alcune proprietà di una classe di Cfz., la quale si ottiene imponendo una certa condizione, e di cercare quindi e costruire alcune delle più semplici Cfz. di questa classe. Lo studio di alcuni casi particolari ci darà occasione di avvertire delle facili costruzioni geometriche col mezzo delle quali si possono avere parecchie Cfz. di forma diversa.

2. Diremo *congiunti* due punti di una Cfz. quando essi giacciono sopra una medesima retta della Cfz. Così si diranno *congiunte* due rette della Cfz. se si segano in un punto della Cfz. Quando una retta contiene un punto congiunto ad un certo altro punto, diremo che questo è *congiunto* alla retta, od anche che la retta è *congiunta* al punto.

Due elementi non congiunti si chiameranno anche *estranei*.

La condizione che noi vogliamo imporre alla Cfz. $(q, p)^\mu_\mu$ è che *due punti congiunti non abbiano un medesimo punto congiunto fuori della retta che li unisce*. Allora prese due rette congiunte, cioè passanti per un punto della Cfz., nessuna retta, non passante per quel punto, può essere contemporaneamente congiunta ad esse: ossia non dovremo mai avere nella Cfz. tre rette determinanti un triangolo i cui vertici siano tutti punti della Cfz.

Questa condizione, che noi imponiamo, è duale, però se una certa Cfz. vi soddisfa, vi soddisfa anche quella Cfz. che si ottiene da essa per reciprocità.

3. Consideriamo una retta qualunque della Cfz. $(q, p)^\mu_\mu$, che supporremo soddisfare la condizione imposta; su di essa abbiamo q punti per ciascuno dei quali passano altre $p - 1$ rette, tutte le rette passanti per uno dei punti sono estranee a tutte quelle passanti pei rimanenti; per la qual cosa i punti della Cfz. che giacciono sulle $q(p - 1) + 1$ rette considerate sono:

$$q \{(q - 1)(p - 1) + 1\};$$

e perciò sarà:

$$\mu = q \{(q - 1)(p - 1) + 1\} + h.$$

Analogamente considerando le p rette uscenti da un punto e tutte quelle ad esse congiunte ne troviamo:

$$p \{(p - 1)(q - 1) + 1\};$$

(*) VERONESE: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, etc. Math. Ann., B. XIX p. 161. — REYE, l. c. — VICTOR: *Die Harmonische Configuration 24₄*. Freiburg, Ber. VIII, 2. — JUNG, l. c.

talchè sarà:

$$\nu = p \{ (p - 1)(q - 1) + 1 \} + k,$$

e si dovrà avere:

$$h : k = q : p.$$

h è il numero dei punti estranei ad una retta qualunque della Cfz. e k è il numero delle rette della Cfz. estranee ad un punto.

Il gruppo degli h punti estranei ad una retta si dirà il *resto* della retta, così chiameremo *resto* di un punto il gruppo delle k rette estranee al punto.

4. Sia A un punto della Cfz. e sia b una delle sue rette estranee. Dal punto B , sopra b , partono altre $p - 1$ rette (*) nessuna delle quali passa per A , non essendo A congiunto ad alcun punto di b , nè incontra due delle rette per A , cioè vuol dire che una retta almeno per A è estranea al punto B . Se prendiamo a priori una retta a per A avremo su di essa altri $q - 1$ punti da ciascuno dei quali può partire una sola retta congiunta a b , ossia vi è certamente su b un punto estraneo alla retta a . Dunque:

Le rette passanti per un punto hanno punti estranei giacenti sulle rette estranee al punto, ed i punti di una retta hanno rette estranee passanti per punti estranei alla retta. Perciò:

Le rette passanti per un punto A della Cfz. hanno complessivamente per resto il gruppo dei punti (anche contati più volte) giacenti sul resto del punto A , in modo che sopra ogni retta di questo resto giace almeno un punto dei resti di ciascuna delle rette per A ; e correlativamente.

Nell'identica maniera si dimostra che:

Se r rette del resto di A passano per un medesimo punto B , viceversa r e sole r rette estranee a B passano per A ; e correlativamente.

Questa specie di legge di reciprocità torna molto utile nella ricerca delle Cfz. particolari.

5. Il caso più semplice che si possa presentare è quello in cui h , e quindi anche k , è nullo. Allora ha luogo la proprietà che le rette congiunte ad una data retta contengono tutti i punti della Cfz. e per i punti congiunti ad un punto qualunque passano tutte le rette della Cfz.

Per fare un caso particolare supponiamo $q = 3$ e cerchiamo per quali valori di p è possibile avere Cfz. di questa natura.

(*) Quando diremo *retta* o *punto* intenderemo sempre parlare di retta e punto della Configurazione.

Nella fatta ipotesi sarà:

$$\mu = 3(2p - 1), \quad \nu = p(2p - 1).$$

Prendiamo due rette qualunque per un punto arbitrario a_{11} e siano $a_{11} a_{12} a_{13}$, $a_{11} a_{21} a_{31}$ cioè sopra l'una esistano i due punti a_{12} , a_{13} della Cfz. e sopra l'altra i punti a_{21} , a_{31} . Un'altra retta per a_{12} non sarà certo congiunta alla $a_{11} a_{21} a_{31}$, diciamo perciò $a_{22} a_{32}$ i due punti che giacciono su di essa. Dai punti a_{21} , a_{31} devono partire due rette congiunte alla $a_{12} a_{22} a_{32}$, perocchè nel caso nostro nessun punto deve possedere rette estranee, e non potendo esse passare per a_{12} , nè essere congiunte, dovranno passare l'una per a_{22} l'altra per a_{32} , siano perciò rispett.^e $a_{21} a_{22} a_{23}$, $a_{31} a_{32} a_{33}$. Dico allora che i punti a_{13} , a_{23} , a_{33} stanno sopra una retta della Cfz. Infatti è evidente, che questi tre punti devono essere due a due congiunti, epperò se non fossero sulla medesima retta, ne verrebbe che un punto sarebbe congiunto a due punti congiunti fra loro e questo è contrario alla ipotesi fondamentale.

Adunque nelle Cfz. che stiamo considerando potremo sempre avere una figura di 9 punti e 6 rette, tre delle rette non sono congiunte fra loro ma lo sono contemporaneamente alle altre tre, che alla lor volta sono estranee fra loro. Le due terne di rette si diranno formare due trilateri coniugati e l'intera figura si chiamerà o coppia di trilateri coniugati o più brevemente una figura (Δ).

Possiamo trovare subito il numero delle fig.^e (Δ) contenute nella Cfz. $(3, p)_{3(2p-1)}^{p(2p-1)}$. Infatti da quanto precede risulta chiaro che una fig.^a (Δ) è perfettamente individuata quando si prendano due rette estranee. Una retta arbitraria della Cfz. è congiunta a $3(p-1)$ altre rette però le $p(2p-1) - 3(p-1) - 1$ rette residue sono ad essa estranee. Adunque le coppie di rette estranee esistenti nella Cfz. sono:

$$\frac{1}{2} p(2p-1) \{ p(2p-1) - 3(p-1) - 1 \} = p(2p-1)(p-1)^2.$$

Una fig.^a (Δ) contiene sei coppie di rette estranee quindi il numero cercato delle fig.^e (Δ) esistenti nella Cfz. è

$$\frac{1}{6} p(2p-1)(p-1)^2.$$

6. Due punti di una medesima fig.^a (Δ) non possono essere altrimenti congiunti che dalle rette della figura stessa, ed un punto qualunque della Cfz. fuori della fig.^a (Δ) dovendo essere congiunto alle sei rette che compongono questa, è necessariamente congiunto a tre punti di (Δ) estranei fra loro.

Assumiamo una fig.^a (Δ) come fondamentale e riferiamo ad essa la Cfz. Rappresentiamo cogli elementi di un determinante di 3° ordine i punti della

fig.^a (Δ) in guisa che le orizzontali e le verticali rappresentino terne di punti congiunti. Mantenendo le notazioni del numero precedente rappresenteremo la fig.^a (Δ) col determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Le terne di punti fra loro estranei nella fig.^a (Δ) sono manifestamente tutte e sole quelle rappresentate dai termini dello sviluppo del determinante. Un punto fuori della fig.^a (Δ) dovendo essere congiunto a tre punti estranei di (Δ) lo sarà con quelli rappresentati da un termine positivo o negativo. Per brevità diremo *positivo* o *negativo* un punto secondo che esso è congiunto ai tre punti rappresentati da un termine positivo o da uno negativo. Questa denominazione è adunque essenzialmente legata alla scelta ed all'ordinamento della fig.^a (Δ) fondamentale.

Siccome i due termini contenenti uno stesso elemento del determinante sono di segno opposto così avremo:

Sopra ogni retta uscente da un punto della fig.^a (Δ) e non appartenente alla figura stessa esiste un punto positivo ed uno negativo.

I punti positivi sono perciò $3(p-2)$ ed altrettanti i negativi.

Le rette che non appoggiano ai punti della fig.^a (Δ) sono:

$$p(2p-1) - 6 - 9(p-2) = 2(p^2 - 5p + 6)$$

e questo numero per $p > 3$ non è zero.

Consideriamo una di queste rette: Essa contiene tre punti i quali debbono essere del medesimo segno. Infatti un termine qualunque del determinante ha un elemento comune coi tre termini di segno contrario, quindi se sulla retta esistesse un punto positivo ed uno negativo dovrebbe esistere un punto della fig.^a (Δ) congiunto contemporaneamente ad essi, e questo è contrario alla fatta ipotesi.

Se una retta, non passante per punti della (Δ) fondamentale, contiene punti dello stesso segno, potremo anche qui distinguere tali rette col nome di *positive* e *negative* secondo che i punti da esse contenuti sono positivi o negativi.

È chiaro che due rette di segno contrario sono necessariamente estranee.

Le rette positive sono in numero uguale alle negative, cioè $p^2 - 5p + 6$.

7. Queste osservazioni ci conducono alla proprietà seguente:

Se è $p > 3$ l'unico valore di p per cui possono esistere Cfz. della natura considerata è $p = 5$.

Infatti per $p > 3$ è $p^2 - 5p + 6 > 0$ epperò esiste certamente una retta positiva. Per ciascun punto di questa passano tre rette, che vanno a punti di (Δ) , quindi ne rimangono $p - 3$ e queste sono tutte positive, una è la considerata; per la qual cosa se ne avranno in tutte $3(p - 4)$ altre, le quali complessivamente contengono $2 \cdot 3(p - 4) + 3$ punti distinti, tutti positivi. D'altra parte noi abbiamo trovato che il numero totale dei punti positivi è $3(p - 2)$ quindi il numero p deve soddisfare la condizione:

$$3(p - 2) \geq 6(p - 4) + 3$$

ossia:

$$p \leq 5.$$

Se fosse $p = 4$ si cadrebbe ancora in una contraddizione, perchè dai tre punti della retta positiva partirebbero 9 rette distinte, contenenti tutti i 9 punti della fig.^a (Δ) ed altri 9 punti che dovrebbero essere tutti negativi, ed invece per $p = 4$ i punti negativi potrebbero essere solamente 6.

Così si conclude che le ipotesi fatte possono essere soddisfatte dai due valori $p = 5$ e $p = 3$ soltanto, i quali condurrebbero alle due Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$, 15_3 .

8. Di Cfz. di questa natura abbiamo un notissimo esempio.

Se prendiamo una superficie generale di 3° ordine, esistono su di essa 27 rette le quali stanno tre a tre in 45 piani (tritangenti) che cinque a cinque passano per le 27 rette. Segando questo sistema con un piano, otteniamo 27 punti e 45 rette i quali sono fra loro collegati in una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ soddisfacente alle ipotesi da noi fatte.

Se poi dal sistema delle 27 rette di una superficie di 3° ordine ne togliamo 12 formanti una bisestupla, abbiamo un sistema di 15 rette e 15 piani il quale segato con un piano qualunque dà una Cfz. 15_3 della natura, che consideriamo.

Le configurazioni di 27 e 15 rette sulla superficie di 3° ordine sono state completamente studiate da STEINER, STURM, CREMONA, BERTINI (*) ed altri.

(*) I. STEINER's: *Gesammelte Werke*. Berlin, 1882, B. II. — R. STURM: *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*. Leipzig, 1867. — CREMONA-CURTZE: *Oberflächen*, § 261. — CREMONA, Rendiconti del R. Istituto Lomb., Serie II, vol. III. — BERTINI: *Contribuzione*, ecc. Annali di Mat., T. XII, Serie II.

Noi ne riassumeremo ora le più importanti proprietà, riferendoci però alle configurazioni sul piano, e seguendo una via che ci sembra molto facile e naturale.

§ 2. Configurazione (3, 5)₂₇⁴⁵.

9. Per le considerazioni del numero 6 facendo $p = 5$ troviamo, che esistono 12 rette che non appoggiano a punti della fig.^a (Δ) fondamentale; di queste 6 sono positive, e 6 negative. Ciascuna delle 6 rette del medesimo segno è congiunta a tre delle rette stesse, però si vede che le 6 rette formano una fig.^a (Δ). Dunque:

Fissata nella Cfz. (3, 5)₂₇⁴⁵ una fig.^a (Δ) restano nella Cfz. stessa individuate due altre fig.^e (Δ) le quali non hanno fra loro nè colla data alcun elemento comune. Le tre fig.^e (Δ) contengono complessivamente tutti i 27 punti della Cfz. Un gruppo così fatto di fig.^e (Δ) lo chiameremo una terna T . (*)

Le terne T sono 40 poichè le fig.^e (Δ) che si possono formare nella Cfz. sono 120 (n.° 5).

10. Le 12 rette estranee ad una fig.^a (Δ) non possono dar luogo che alle due sole fig.^e (Δ), che insieme alla data costituiscono una terna T , perciò la fig.^a (Δ) considerata avrà con altre 117 qualche elemento comune.

Tre punti fra loro estranei individuano un'unica fig.^a (Δ). Infatti siano a_{11} , a_{22} , a_{33} i tre punti estranei fra loro e conduciamo per a_{11} una retta della Cfz.; sia la a_{11} , a_{12} , a_{13} ; questa conterrà un punto congiunto ad a_{22} ed uno congiunto ad a_{33} . Se questi punti congiunti ad a_{22} ed a_{33} sono fra loro diversi ad es. rispet.^e a_{12} , a_{13} allora le due rette estranee $a_{12}a_{22}$, $a_{13}a_{33}$ individuano una fig.^a (Δ) la quale contiene i tre punti dati, ed è anche manifesto che nessun'altra fig.^a (Δ) può contenerli tutti e tre, poichè le tre rette non appartenenti alla fig.^a ed uscenti ad es. per a_{11} contengono sempre un punto contemporaneamente congiunto agli altri due a_{22} , a_{33} .

I tre punti a_{11} , a_{22} , a_{33} non potrebbero appartenere ad una medesima fig.^a (Δ) solo se avvenisse, che sopra ogni retta per a_{11} esistesse un punto contemporaneamente congiunto ad a_{22} ed a_{33} . Ora questo è impossibile. Infatti considerando una qualunque fig.^a (Δ) contenente a_{22} ed a_{33} , essa possiederà tre punti congiunti ad a_{11} , i cui simboli formeranno un termine del determinante rappresentante la fig.^a (Δ). Questo termine deve essere dello stesso segno

(*) BERTINI, l. c.

di quello che contiene a_{22} ed a_{33} , poichè per a_{11} passa certamente una retta estranea alla fig.^a (Δ) la quale contiene per ipotesi un punto congiunto ad a_{22} ed a_{33} , e tutti i punti di questa retta sono del medesimo segno (n.º 6), ed allora è subito visto che a_{11} deve essere congiunto ad un punto il quale non lo è contemporaneamente ad a_{22} ed a_{33} ma solo ad uno di essi, quindi ecc.

Da questa osservazione segue che due fig.^e (Δ) non possono mai avere in comune tre punti fra loro estranei. Non possono avere neppure un solo punto estraneo comune. Infatti, se ciò avvenisse, le 4 rette della prima figura che non passano pel punto comune, sarebbero estranee alla seconda, d'altra parte due di esse incontrano le altre due, quindi sono del medesimo segno rispetto alla seconda figura, perciò l'ipotesi fatta è assurda, perocchè le rette del medesimo segno sono 6 ed appartengono ad una fig.^a (Δ) (individuata da due di esse che non si incontrano) la quale non ha elementi comuni colla fondamentale.

Consideriamo allora due punti estranei a_{11} , a_{22} della fig.^a (Δ) fondamentale. Fuori della fig.^a stessa esistono tre e tre soli punti congiunti ad essi, una coppia di questi individua una ed una sola fig.^a (Δ) che li contiene insieme ad a_{11} ed a_{22} . Quindi avremo che per ogni coppia di punti estranei della figura fondamentale esistono tre altre fig.^e (Δ) che possiedono quei due soli punti in comune con essa. Le fig.^e (Δ) aventi questa proprietà rispetto alla fondamentale sono complessivamente $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$.

Le fig.^e (Δ) che hanno in comune colla fondamentale una determinata retta sono manifestamente 15; di queste, 9 contengono anche un'altra retta della fondamentale, congiunta alla prima, perciò le fig.^e (Δ) aventi colla fondamentale una sola retta comune sono $6 \cdot 6 = 36$, quelle aventi due rette congiunte in comune sono $\frac{1}{2} 9 \cdot 6 = 27$.

Manifestamente altri casi non sono possibili. Ecco perciò come si distribuiscono le 120 fig.^e (Δ) rispetto ad una qualunque di esse:

- 2 non hanno elementi comuni con essa;
- 54 hanno comuni una coppia di punti estranei;
- 36 hanno comune una retta;
- 27 due rette congiunte.

11. La fig. (Δ) che assumiamo come fondamentale indichiamola con $(\Delta)_1$, e siano $(\Delta)_2$ e $(\Delta)_3$ le due figure dei punti rispettivamente positivi e negativi. Prendiamo in $(\Delta)_1$ tre elementi estranei, rappresentati quindi da un termine del solito determinante. Se questo termine è positivo tutti i punti negativi sono congiunti all'uno od all'altro dei tre punti presi ed invece tre soli dei

punti positivi sono congiunti contemporaneamente a tutti e tre. Tali punti sono quelli dati da un termine del determinante che rappresenta $(\Delta)_2$. Lo stesso si direbbe di un termine negativo. Però noi vediamo che esiste un coordinamento fra i termini dei tre determinanti che rappresentano le figure di una terna T , ossia un ordinamento delle terne di punti estranei. Ogni terna ne individua una seconda i cui punti sono congiunti a tutti quelli della prima.

L'insieme di due terne così fatte si dirà una coppia di terne *complementari*, e chiameremo fig.^a (D) il complesso dei sei punti delle due terne e delle nove rette della Cfz. che contengono due di quei punti. Manifestamente la fig.^a (D) è la correlativa alla (Δ) .

Due terne complementari individuano due fig.^e (Δ) appartenenti alla medesima terna T ; d'altra parte in ogni terna T abbiamo 9 fig.^e (D), quindi in una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ esistono $40 \times 9 = 360$ coppie di terne complementari, o fig.^a (D).

Si vede poi senza difficoltà, che rispetto ad una qualunque fig.^a (D) le 359 rimanenti si dividono in 9 gruppi, come segue:

- 1° Gruppo. — 74 fig.^e (D) non aventi alcun elemento in comune colla data;
- 2° Gruppo. — 72 fig.^e (D) aventi un solo punto ed una sola retta in comune colla data;
- 3° Gruppo. — 72 fig.^e (D) aventi un solo punto e due rette in comune colla considerata;
- 4° Gruppo. — 6 fig.^e (D) aventi un solo punto e tre rette in comune colla data;
- 5° Gruppo. — 18 fig.^e (D) che hanno in comune colla data due punti ed una retta;
- 6° Gruppo. — 72 fig.^e (D) aventi in comune colla data due punti e tre rette;
- 7° Gruppo. — 9 fig.^e (D) aventi due punti e cinque rette in comune colla data;
- 8° Gruppo. — 18 fig.^e (D) che hanno comuni colla data tre punti e quattro rette, e finalmente:
- 9° Gruppo. — 18 fig.^e (D) aventi quattro punti e quattro rette in comune colla figura considerata.

12. Come abbiamo osservato una terna di punti estranei è estranea a sei soli punti della Cfz. e questi appartengono tutti alla fig.^a (Δ) individuata

dalla terna complementare, nella quale costituiscono le due terne rappresentate dai termini di ugual segno a quello che determina la figura stessa. L'insieme della terna data con una di queste due terne si dirà una *sestupla*. Le sestuple sono adunque gruppi di sei punti tutti fra loro estranei. Una sestupla si può ottenere in questo modo da 10 terne T .

È manifesto che nessun altro punto della Cfz. è estraneo a tutti quelli di una sestupla.

Le terne complementari alle due costituenti una sestupla formano un'altra sestupla che diremo associata alla prima. Un punto di una sestupla è congiunto a tutti quelli della sua associata uno eccettuato. Si vede immediatamente che la sestupla associata di una data non cambia qualunque sia quella delle 10 terne T , rispetto alla quale si prendono le terne complementari.

Si dirà che due sestuple associate costituiscono una *bisestupla*.

Le sestuple esistenti nella Cfz. sono $2 \cdot \frac{120 \cdot 6}{2 \cdot 10} = 72$.

Le bisestuple sono quindi 36.

13. Da quanto si è detto risulta immediatamente che:

Una terna qualunque di punti estranei appartiene a due diverse bisestuple le quali allora hanno in comune tre altri punti fra loro estranei, costituenti la terna complementare alla considerata;

Tutti i punti non appartenenti ad una bisestupla sono congiunti a due punti della bisestupla stessa, ogni punto della quale è poi congiunto a cinque dei punti esterni. Perciò se nella Cfz. prescindiamo dai punti di una bisestupla e dalle rette concorrenti in quelli si ottiene una Cfz. di 15 punti e 15 rette di indice 3.

14. Due bisestuple aventi in comune due terne complementari si diranno *associate*. Esse contengono insieme 18 punti i quali si dividono in un unico modo in due fig.^e (Δ) appartenenti alla medesima terna T . Ma due fig.^e (Δ) di una terna T danno luogo non a due ma a tre e tre sole bisestuple, perciò oltre alle due bisestuple associate che abbiamo considerate ne abbiamo una terza la quale possiede manifestamente la proprietà di essere associata alle due prime.

Le tre Cfz. 15_3 che nascono escludendo successivamente tre bisestuple due a due associate hanno in comune la medesima fig.^a (Δ), gli altri 6 punti in ciascuna sono diversi e costituiscono una fig.^a (D).

15. Fissata una terna T come fondamentale le 45 rette della Cfz. si dividono in due gruppi l'uno di 18 rette appartenenti alla terna T , l'altro

di 27 ciascuna delle quali contiene un punto di ognuna delle tre fig.^o (Δ) costituenti la terna T , e sono tali che a tre a tre passano pei 27 punti della Cfz. Esse costituiscono una Cfz. 27₃ del nostro tipo. In questa Cfz. i punti si comportano tutti egualmente ed hanno per resto 12 rette le quali si dividono in 4 terne di rette passanti per 4 punti. Le 4 terne si separano in due coppie di terne corrispondenti, le rette di una non incontrano quelle della corrispondente in punti della Cfz., ma invece incontrano quelle delle altre due; ecc.

In una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ si possono considerare 40 Cfz. 27₃ le quali tutte sono identiche per forma.

16. Vogliamo ora vedere quale relazione abbiano le 39 terne T rispetto a quella assunta come fondamentale, che alla sua volta è una terna T arbitraria.

Una terna T qualunque è determinata da una delle sue tre fig.^o $(\Delta)'_1$, $(\Delta)'_2$, $(\Delta)'_3$; queste devono avere con quelle della fondamentale, cioè $(\Delta)_1$, $(\Delta)_2$, $(\Delta)_3$, qualche elemento comune.

Supponiamo che $(\Delta)'_1$ sia una delle 27 figure aventi con $(\Delta)_1$ due rette congiunte in comune (v. n.^o 10).

Poichè nessuna retta di $(\Delta)_1$ è congiunta a quelle di $(\Delta)_2$ e $(\Delta)_3$ è necessario che $(\Delta)'_1$ abbia in comune con $(\Delta)_2$ e $(\Delta)_3$ due punti estranei, non potendo avere in comune nè una nè due rette. Per la stessa ragione $(\Delta)'_2$ e $(\Delta)'_3$ devono avere due punti in comune con $(\Delta)_1$.

In $(\Delta)_2$ vi sono due sole rette (congiunte) non passanti pei punti comuni a $(\Delta)'_1$, e queste sono manifestamente estranee a $(\Delta)'_1$, quindi appartengono a $(\Delta)'_2$ od a $(\Delta)'_3$, supporremo a $(\Delta)'_2$. Dunque $(\Delta)_2$ e $(\Delta)'_2$ hanno in comune due rette congiunte. Lo stesso si conclude per $(\Delta)_3$ e $(\Delta)'_3$, perciò: Data una terna T esistono 27 altre terne T aventi comuni con quella 6 rette, due congiunte per ciascuna fig.^a (Δ) .

Se si fosse considerata per $(\Delta)'_1$ una delle 54 figure aventi con $(\Delta)_1$ due punti estranei in comune si sarebbero ottenute chiaramente le medesime terne T .

Prendiamo invece una delle 36 figure che hanno comune con $(\Delta)_1$ una sola retta. Essa determina due altre fig.^o (Δ) , che con essa formano una terna T , ciascuna delle quali ha con $(\Delta)_1$, $(\Delta)_2$ e $(\Delta)_3$ una retta sola in comune. Questo è evidente, poichè si è già notato che tali figure devono avere qualche elemento comune con quelle della terna fondamentale, e per quanto si è visto sopra non possono avere nè due punti, nè due rette, quindi hanno tutte una retta in comune.

Le 36 fig.^o (Δ) di questa natura dànno luogo a 12 terne T le quali hanno comuni colla data 9 rette tre per ciascuna figura ed estranee fra loro.

Ecco trovata la relazione che hanno 39 terne T rispetto alla rimanente. (*)

17. Due rette non congiunte individuano una fig.^a (Δ) , perciò ogni retta di $(\Delta)_1$ combinata con ogni retta di ciascuna delle due fig.^e $(\Delta)_2$ e $(\Delta)_3$ dà una fig.^a (Δ) nella quale la terza retta estranea alle due considerate appartiene alla rimanente fig.^a (Δ) . Quindi le 18 rette di T entrano in altre 36 fig.^e (Δ) non appartenenti alla terna fondamentale.

Se teniamo fissa una retta di $(\Delta)_1$ e la combiniamo successivamente con tre fra loro estranee di $(\Delta)_2$ otteniamo tre fig.^e (Δ) nelle quali le terze rette estranee alle due che le determinano sono 3 rette estranee di $(\Delta)_3$ come facilmente si riconosce.

Le medesime rette di $(\Delta)_3$ si ottengono poi combinando le stesse rette di $(\Delta)_2$ con un'altra di $(\Delta)_1$ estranea a quella prima considerata.

Perciò fra i trilateri costituenti le tre fig.^e (Δ) di una medesima terna T vi è una relazione molto semplice per la quale due qualunque di essi in figure diverse ne determinano uno della terza figura.

Le rette di tre trilateri corrispondenti appartengono oltre che alla terna considerata, ad altre tre terne T delle quali ciascuna è individuata dalla fig.^a (Δ) , che contiene una retta di ciascun trilatero.

Noi possiamo prendere in 8 modi diversi un trilatero per ciascuna figura, la combinazione di tre di questi trilateri dà 9 rette estranee fra loro e quindi contenenti tutti i 27 punti della Cfz. Diremo che queste 9 rette costituiscono un 9-latero principale.

Gli 8 9-lateri principali che si possono formare colle 18 rette di una terna T sono di due specie:

di 1^a specie se i trilateri che lo compongono sono corrispondenti;

di 2^a specie se tali trilateri non sono corrispondenti.

In ogni terna T avremo 4 9-lateri di 1^a specie, dei quali ciascuno appartiene ad altre tre terne T , ed avremo 4 9-lateri di 2^a specie, i quali non saranno comuni a nessun'altra terna T .

Adunque nella Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ si possono formare 40 9-lateri di 1^a specie e 160 di 2^a specie.

Colle 45 rette della Cfz. si possono formare altri 9-lateri principali? Si vede subito che non è possibile. Infatti se 9 rette della Cfz. sono tutte estranee, combinandone una colle 8 rimanenti dovrebbero ottenersi 8 fig.^e (Δ) tutte diverse, se si vuole che il sistema delle 9 rette non sia costituito da tre trilateri

(*) Per la costruzione e l'ordinamento delle 40 terne T , v. BERTINI, l. c., § 4.

appartenenti ad una medesima terna T . Queste 8 fig.^o (Δ) avrebbero poi una sola retta in comune, e ciò è impossibile, perocchè sono 6 sole le fig.^o (Δ) aventi in comune una retta data (v. n.^o 10).

Si presenterebbe ora lo studio di tutti i moltilateri formati da rette della Cfz. estranee fra loro. Questa ricerca è già stata fatta pei 45 piani tritangenti delle superficie di 3^o ordine, ed i risultati ottenuti si possono integralmente applicare a questa nostra Cfz., perciò rimandiamo per questo argomento alla citata Memoria del sig. BERTINI.

§ 3. Configurazione 15₃.

18. Per $p = 3$ esistono nella Cfz. 10 fig.^o (Δ) e presane una come fondamentale nessuna retta è ad essa estranea, cioè una retta qualunque della Cfz. od appartiene alla (Δ) o passa per un punto di essa. Per ogni punto della figura passa una ed una sola retta non appartenente alla figura stessa.

Oltre ai 9 punti della figura fondamentale esistono altri 6 punti, tre positivi e tre negativi, i punti del medesimo segno sono fra loro estranei ed invece sono congiunti tutti ai tre di segno contrario. Questi sei punti formano dunque due terne complementari, ed appartengono ad una fig.^a (D).

Le coppie di terne complementari sono 10, tante quante le fig.^o (Δ) della Cfz.

Due fig.^o (Δ) qualunque della Cfz. hanno necessariamente due rette congiunte in comune. Se consideriamo due rette estranee nella fig.^a (Δ), allora fuori di essa esistono tre e tre sole rette estranee alle due considerate e non congiunte fra loro, queste tre rette sono quelle congiunte alla terza retta di (Δ) estranea alle due prese.

Le 5 rette così ottenute contengono tutti i 15 punti della Cfz. e noi diremo che esse formano un *pentelatero principale*.

I pentelateri principali contenuti nella Cfz. sono in numero di $\frac{6 \cdot 10}{10} = 6$, poichè ogni fig.^a (Δ) dà luogo a 6 pentelateri, ed ogni coppia di lati di un pentelatero dà una fig.^a (Δ) diversa.

Due pentelateri quali si vogliono hanno sempre un lato in comune, ed una retta della Cfz. appartiene unicamente a due pentelateri.

19. I sistemi di rette fra loro estranee che si possono formare colle 15 della Cfz. sono:

20 *trilateri principali*, non contenuti nei pentelateri. Ciascuno di essi determina una fig.^a (Δ) alla quale appartiene un altro trilatero principale;

$15 \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 60$ *trilateri non principali*, ciascuno dei quali appartiene ad un unico pentelatero. Di questi se ne hanno 10 per ogni pentelatero. Fissato uno di essi gli altri 59 si distribuiscono come segue:

- 6 aventi con esso due rette in comune,
- 21 aventi una sola retta in comune,
- 32 non aventi alcuna retta in comune.

I quadrilateri non possono contenere trilateri del primo tipo, non esistendo rette estranee a tre non congiunte di una stessa fig.^a (Δ), però i quadrilateri sono necessariamente contenuti in un pentelatero e contengono 6 trilateri della 2^a specie.

Il numero dei quadrilateri è 30, un quadrilatero appartiene ad un unico pentelatero, il quale dà luogo a 5 quadrilateri.

29 quadrilateri rispetto al rimanente si distribuiscono così:

- 4 hanno comune con esso un trilatero di 2^a specie;
- 20 hanno comune una retta;
- 5 non hanno rette comuni col considerato.

La Cfz. 15₃ è correlativa a sè medesima, però le cose qui dette sui gruppi di rette si trasportano per dualità ai gruppi di punti.

§ 4. Costruzione delle Configurazioni 15₃ e (3, 5)₂₇⁴⁵.

20. Veniamo ora alla costruzione delle Cfz. studiate.

Se indichiamo coi numeri progressivi dall'1 al 15 i punti della Cfz. 15₃ e supponiamo che le coppie di punti rispet.^o allineate con 1, 2, 3, 8, 10 siano:

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 2, 3 \\ 4, 6, \\ 6, 7 \end{array} \right. \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} 1, 3 \\ 8, 9, \\ 10, 11 \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} 1, 2 \\ 12, 13, \\ 14, 15 \end{array} \right. \quad 8 \left\{ \begin{array}{l} 2, 9 \\ 4, 12, \\ 6, 15 \end{array} \right. \quad 10 \left\{ \begin{array}{l} 2, 11 \\ 4, 14, \\ 6, 13 \end{array} \right.$$

come è sempre possibile fare, allora la notazione di tutti i punti della Cfz. è individuata, tenendo conto della sola condizione da noi imposta ed abbiamo gli allineamenti, come dal seguente specchio.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2, 3	1, 3	1, 2	1, 5	1, 4	1, 7	1, 6	2, 9	2, 8	2, 11	2, 10	3, 13	3, 12	3, 15	3, 14
4, 5	8, 9	12, 13	8, 12	9, 13	8, 15	9, 14	4, 12	5, 13	4, 14	5, 15	4, 8	5, 9	4, 10	5, 11
6, 7	10, 11	14, 15	10, 14	11, 15	10, 13	11, 12	6, 15	7, 14	6, 13	7, 12	7, 11	6, 10	7, 9	6, 8

Prendiamo una fig.^e (Δ) della Cfz. e sia ad es. $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 9 & 13 \end{array} \right|$. Rispetto ad essa

sono terne complementari le 6, 11, 14; 7, 10, 15, la prima è quella dei punti positivi, la seconda quella dei negativi.

Se allora fissiamo arbitrariamente nel piano la fig.^a (Δ) e prendiamo comunque il punto 6 e sulla $(1, 6)_1$, il punto 7, avremo individuate le 4 rette $(6, 8)_1$, $(6, 13)_1$, $(7, 9)_1$, $(7, 12)_1$.

Sulla $(6, 13)_1$ prendiamo un punto α uniamolo con 2 e sia 11 il punto in cui $(2, \alpha)_1$ sega la $(7, 12)_1$; uniamo 11 con 5 e sia 15 l'intersezione di questa retta colla $(6, 8)_1$; uniamo 15 con 3 e sia 14 l'intersezione colla $(7, 9)$ finalmente si conduca la $(4, 14)_1$ e dicasi β la sua intersezione colla $(6, 13)_1$. Allora al variare di α sulla $(6, 13)_1$ varia β sulla retta stessa descrivendo una punteggiata proiettiva a quella descritta da α . Le due punteggiate proiettive hanno due punti uniti, e prendendo uno di questi come punto 10 si ha precisamente una Cfz. della specie voluta.

Vediamo adunque, che per costruire la Cfz. 15₃ possiamo prendere arbitrariamente 10 punti, 9 dei quali formino una fig.^a (Δ), e poi ancora un punto arbitrario sopra una retta determinata. La costruzione della Cfz. è allora ridotta ad un problema di 2° grado.

I nove punti che formano una fig.^a (Δ) sono punti base di un fascio di cubiche, però potendosi sciogliere, per costruire la Cfz. ancora due punti arbitrariamente, si vede come i punti della Cfz. non giacciono necessariamente sopra una curva di 3° ordine.

Lo sciogliere il punto 7 sulla intersezione di $(1, 6)_1$ colla cubica C_3 del fascio $(1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13)_3$ passante per 6 non porta necessariamente ad una Cfz. inscritta nella cubica C_3 , come si riconosce facilmente, ma è necessario che un altro punto della Cfz. venga a cadere sulla curva per poter affermare che tutta la Cfz. vi è inscritta.

Si riconosce poi immediatamente la possibilità di ottenere Cfz. 15₃ sopra una data cubica del fascio. Basta far rotare una retta attorno ad 1 e prendere per punti 6 e 7 le intersezioni di questa retta colla cubica considerata; allora uno dei punti mobili della Cfz., ad es. 10, descrive una curva, e basterà prendere per punto 10 una intersezione di questa colla C_3 , e per 6 e 7 i corrispondenti punti per ottenere una Cfz. tutta inscritta nella cubica data.

21. Vediamo quante Cfz. si possono ottenere sopra questa cubica.

Perciò osserviamo che quando la Cfz. è inscritta nella cubica C_3 la retta

$(2, 10)_1$ sega questa in un punto che deve necessariamente essere 11, e le rette $(11, 12)_1$, $(10, 13)_1$ devono segare C_3 nei punti 7 e 6 allineati con 1. Orbene vogliamo dimostrare essere sufficiente che si presenti questo fatto, perchè i punti 14 e 15 intersezioni di C_3 colle $(7, 9)_1$, $(6, 8)_1$ costituiscano insieme ai punti già considerati una Cfz. 15_3 .

Per questo basta far vedere che la retta $(5, 11)_1$ sega la $(6, 8, 15)_1$ nel punto 15, e la $(4, 10)_1$ nel punto 14, e che di più 14 e 15 sono allineati con 3.

Considerando la C_3 insieme alle due coppie di cubiche spezzate:

$(1, 6, 7)_1$, $(4, 8, 12)_1$, $(5, 11)_1$, $(1, 4, 5)_1$, $(6, 8, 15)_1$, $(7, 11, 12)_1$;

$(1, 6, 7)_1$, $(5, 9, 13)_1$, $(4, 10)_1$, $(1, 4, 5)_1$, $(6, 10, 13)_1$, $(7, 9, 14)_1$

si vede subito, che le rette $(4, 10)_1$, $(5, 11)_1$ devono contenere i punti 14 e 15.

Considerando invece insieme alla C_3 le due cubiche:

$(5, 9, 13)_1$, $(7, 11, 12)_1$, $(3, 14)_1$, $(5, 11, 15)_1$, $(7, 9, 14)_1$, $(3, 12, 13)_1$

è subito visto che la $(3, 14)_1$ passa per 15.

Dunque noi potremo ottenere Cfz. 15_3 inscritte nella C_3 cercando quelle rette del fascio di centro 2, diverse dalle $(1, 2, 3)_1$, $(2, 8, 9)_1$ che segano la cubica in due punti i quali, proiettati uno da 12, l'altro da 13, danno due rette seganti ulteriormente C_3 in due punti allineati con 1.

Una retta per 2 segherà ancora C_3 in due punti, proiettando questi da 12 avremo due rette, le quali segano ancora C_3 in due punti, che uniti con 1 danno due rette che diremo corrispondenti alla retta condotta per 2. Avremo così stabilita una corrispondenza $[2, 2]$ nei fasci di centro 1 e 2.

Scambiando 12 con 13 otteniamo negli stessi fasci un'altra corrispondenza $[2, 2]$ avente la medesima definizione.

Queste due corrispondenze posseggono 16 coppie di elementi comuni.

Nella prima corrispondenza sono omologhi due raggi, quando due delle loro intersezioni con C_3 , una sopra ciascun raggio, sono allineate con 2; sono invece corrispondenti nella seconda, quando due di tali intersezioni sono allineate con 13. Quindi se due raggi sono omologhi contemporaneamente nelle due corrispondenze bisognerà che due delle dette intersezioni siano allineate con 12 e due con 13.

Per il punto 2 passano le due rette $(1, 2, 3)_1$, $(2, 8, 9)_1$ e si vede subito che alla prima corrisponde nel fascio 1 la coppia $(1, 12)_1$, $(1, 13)_1$ ed alla seconda la retta $(1, 4, 5)_1$ tanto nell'una quanto nell'altra corrispondenza. Alla retta $(1, 2, 3)_1$, considerata nel fascio 1, corrispondono sempre le due rette $(2, 12)_1$, $(2, 13)_1$.

Così vengono precisate 5, delle 16 coppie comuni. Le altre 11 possono presentare unicamente tre casi:

1.° Il raggio per 1 sega C_3 in un punto α , cosicchè $(12, \alpha)_1$ e $(13, \alpha)_1$ segano C_3 in due punti β e γ allineati con 2.

2.° Il raggio per 2 sega C_3 in un punto α , cosicchè $(12, \alpha)_1$ e $(13, \alpha)_1$ segano C_3 in due punti allineati con 1.

3.° Il raggio per 2 sega C_3 in due punti α e β tali che $(12, \alpha)_1$ e $(12, \beta)_1$ segano C_3 in altri due punti allineati con 1.

Queste ultime rette sono quelle che fanno allo scopo nostro, ed è il loro numero che vogliamo trovare.

Supponiamo perciò che avvenga il caso 1.°.

Allora possiamo immaginare generata la nostra cubica per mezzo di due fasci proiettivi, uno di rette col centro in 2, e l'altro di coniche del quale siano α , 12, 13 tre punti base. Il quarto punto resta da essi determinato.

Una conica del fascio deve contenere β e γ ed un'altra i punti 1 e 3, perciò tali coniche sono necessariamente

$$(\alpha, \gamma, 12)_1 \quad (\alpha, \beta, 12)_1, \quad (3, 12, 13)_1 \quad (1, \alpha)_1;$$

ossia il quarto punto base del fascio generatore è ancora α , vale a dire le coniche di questo fascio passano per 12, 13 ed α e toccano tutte in α la retta $(1, \alpha)_1$. Allora necessariamente $(1, \alpha)_1$ deve essere tangente a C_3 in α . Vediamo così quale condizione deve soddisfare il punto α , perchè si presenti il caso 1.°. Ma dico di più che tale condizione è sufficiente, cioè se da 1 conduciamo una tangente a C_3 ed è α il punto di contatto, allora $(12, \alpha)_1$ $(13, \alpha)_1$ segano C_3 in due punti β e γ allineati con 2.

Infatti le due cubiche:

$$(\alpha, \gamma, 12)_1 \quad (\alpha, \beta, 13)_1 \quad (1, 2, 3)_1, \quad (3, 12, 13)_1 \quad (1, \alpha, \alpha)_1 \quad (2, \beta)_1$$

hanno comuni con C_3 8 punti, epperò $(2, \beta)_1$ passa per γ . Ne concludiamo che le coppie di raggi corrispondenti, le quali presentano il caso 1.° sono 4. Altrettante sono quelle che presentano il caso 2.°, per le medesime considerazioni.

Sicchè esistono tre sole coppie che presentano il 3.° caso e queste sono le sole che ci conducono a Cfz. 15₃ inscritte nella data cubica.

Adunque fissata una cubica e sopra di essa una fig.^a (Δ), sono tre e tre sole le Cfz. 15₃ che posseggono quella fig.^a (Δ) e sono inscritte nella cubica considerata.

22. Queste tre Czf. 15_3 sono poi fra loro in una relazione intima, giacchè i loro 27 punti diversi costituiscono una Czf. $(3, 5)_{27}^{45}$ del tipo considerato.

Infatti chiamiamo, come già si è fatto, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 9 & 13 \end{vmatrix}$ la fig.^a (Δ) scielta sulla C_3 , e $\begin{Bmatrix} 6 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 15 \end{Bmatrix}$ i punti che completano una delle Czf. 15_3 e $\begin{Bmatrix} 6' & 11' & 14' \\ 7' & 10' & 15' \end{Bmatrix}$ quelli che completano una seconda Czf. 15_3 , inscritta nella cubica data; supporremo di più che le medesime cifre appartengano ai punti, che hanno la medesima relazione colla figura fondamentale. Allora le sei coppie di rette

$$\begin{Bmatrix} (6 & 11)_1 \\ (6' & 11)_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} (6 & 14)_1 \\ (6' & 14)_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} (11 & 14)_1 \\ (11' & 14)_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} (7 & 10)_1 \\ (7' & 10)_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} (7 & 15)_1 \\ (7' & 15)_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} (10 & 15)_1 \\ (10' & 15)_1 \end{Bmatrix}$$

determinano sei punti che indicheremo ordinatamente con $14''$, $11''$, $6''$, $15''$, $10''$, $7''$. È manifesta la legge colla quale si devono prendere le coppie di rette, e la notazione dei punti da esse determinati.

Questi sei punti giacciono sulla C_3 e costituiscono insieme alla fig.^a (Δ) fondamentale la terza Czf. 15_3 inscritta nella cubica.

Infatti se si vuol dimostrare ad es. che $10''$ giace sopra C_3 basta osservare che le due cubiche spezzate

$$\begin{aligned} &(1, 6, 7)_1 \quad (6', 8, 15')_1 \quad (7', 15, 10'')_1 \\ &(1, 6', 7')_1 \quad (6, 8, 15)_1 \quad (7, 15', 10'')_1 \end{aligned}$$

hanno 8 punti comuni sulla C_3 e quindi vi hanno anche il nono punto che è $10''$. Così dicasi dei rimanenti punti.

Per persuaderci poi che $\begin{Bmatrix} 6'' & 11'' & 14'' \\ 7'' & 10'' & 15'' \end{Bmatrix}$ determinano colla (Δ) fondamentale una Czf. 15_3 basterà mostrare che le coppie di punti $6''$, $7''$; $10''$, $11''$; $7''$, $11''$; $6''$, $10''$; $11''$, $15''$; $10''$, $14''$; $6''$, $15''$; $7''$, $14''$; $14''$, $15''$ sono rispettivamente allineate coi punti

$$1, 2, 12, 13, 5, 4, 8, 9, 3.$$

Considerando le due cubiche

$$\begin{aligned} &(6'', 7'')_1 \quad (3, 14, 15)_1 \quad (2, 10', 11')_1 \\ &(1, 2, 3)_1 \quad (6'', 14, 11')_1 \quad (7'', 15, 10')_1 \end{aligned}$$

le quali hanno comuni colla data 8 punti, si conclude che $(6'', 7'')$, passa per 1. Allo stesso modo si dimostra questa proprietà per le altre 8 coppie.

Così si vede che i 27 punti dati insieme dalle tre Cfz. 15_3 , sono allineati tre a tre sopra 45 rette, epperò essi costituiscono una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$, come si era asserito.

Così abbiamo dimostrata anche l'esistenza delle Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ senza uscire dal piano, e presupporre la conoscenza del sistema delle rette di una superficie di 3° ordine.

Sarebbe però interessante far vedere se l'essere la Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ inscritta in una cubica, sia o no condizione necessaria. I legami esistenti fra i punti della Cfz. non trarrebbero, pare, necessariamente a concludere che i punti stessi sono sopra una medesima cubica, come appunto si è dimostrato per le 15_3 , ma bisognerebbe però cercare di costruire tale Cfz. senza servirci di curve di 3° ordine, cosa che fino ad ora non ho potuto fare.

23. Ecco un'altra questione che vogliamo risolvere.

Quando si segano le 27 rette di una superficie di 3° ordine, o le 15 di un sistema completo, con un piano, si ottiene rispettivamente una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ o Cfz. 15_3 inscritta in una cubica. Ora si domanda: data a priori una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ o Cfz. 15_3 sopra una cubica, è possibile costruire superficie di 3° ordine, le quali determinano sul piano la medesima Cfz.? Si vede facilmente che sì.

Infatti sia data una Cfz. 15_3 sopra C_3 , e facciamo passare per i punti 1, 8, 10 tre rette che non si incontrano, e per i punti 2, 4, 6 conduciamo le tre rette che appoggiano a quelle, cosa possibile, perocchè i sei punti considerati giacciono sopra una conica (essi insieme ai tre punti in linea retta 5, 9, 13 costituiscono i punti base di un fascio di cubiche perciò, ecc.), indi nel piano delle rette condotte per 1 e 2 ed in quello delle rette per 2 ed 8, conduciamo due rette le quali passino rispettivamente per i punti 3 e 9. Per brevità denomineremo le rette collo stesso numero attribuito al punto pel quale passano, solamente per evitare equivoci porremo questo numero fra parentesi.

Allora nove punti della cubica nella quale è inscritta la Cfz. e tre punti su ciascuna delle rette (1), (8), (10) ed un punto sulle (3) e (9) individuano una superficie di 3° ordine, la quale possiederà fra le sue 27 rette le (1), (2), (3), (4), (6), (8), (9), (10), perchè tutte queste la incontrano in 4 punti. Il piano delle (1), (4) incontra la (9) in un punto e la cubica C_3 in 5, però la terza retta (5) in quel piano tritangente passa per 5 ed è appoggiata alla (9). Così il piano (1) (6) sega la superficie in una retta (7) passante per 7 ed appoggiata alla (9), ecc., ecc. Così si ottiene un sistema di 15 rette della superficie passanti per i 15 punti della Cfz. È poi evidente che questo sistema di 15 rette è un sistema completo sulla superficie; perciò: « Una data Cfz. 15_3 sopra C_3 può

essere ottenuta come sezione di un sistema completo sopra una totalità ∞^5 di superficie di 3° ordine. » Sopra ciascuna di esse abbiamo altre 12 rette le quali determineranno sul piano di C_3 , anzi sulla C_3 , 12 punti, che insieme ai 15 considerati formano una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$. Per quanto si è visto tale Cfz. non può cangiare al variare della superficie, epperò abbiamo anche:

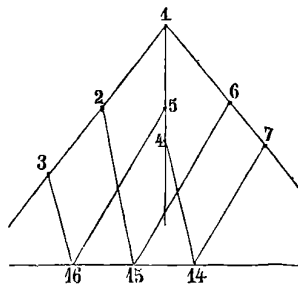
« Data sopra una cubica una Cfz. $(3, 5)_{27}^{45}$ esiste una totalità ∞^5 di superficie di 3° ordine, tutte capaci di dare colle intersezioni delle loro 27 rette la Cfz. considerata. »

§ 5. Configurazione 17₃.

24. Ora vogliamo dare qualche esempio di Cfz. nelle quali h e k non sono nulli (n.° 3). Poniamo $p=q=3$ epperò $h=k$, cioè consideriamo le Cfz. $(15+h)_3$ le quali soddisfano la condizione da noi imposta.

Il caso $h=1$ non è possibile.

Infatti supponiamo che esista una Cfz. 16₃ del tipo considerato e sia 1 un suo punto qualunque. D'ora innanzi chiameremo sempre 2, 3; 4, 5; 6, 7 le tre coppie di punti allineati con 1. La retta costituente il resto di 1 contiene tre punti, che chiameremo 14, 15, 16, da ciascuno dei quali partono due altre rette congiunte a due di quelle per 1, e contenenti manifestamente insieme tutti i 6 punti congiunti ad 1. Potremo quindi sempre supporle disposte come nella figura. Allora 14, 15, 16 sono rispett.^o i resti delle rette $(1, 2, 3)_1$, $(1, 4, 5)_1$, $(1, 6, 7)_1$.



Le due rette $(4, 14)_1$, $(7, 14)_1$ devono costituire i resti di 2 e 3, e precisamente deve essere la prima il resto di 2, e la seconda quello di 3, perchè il resto di 4 deve passare per 15 e quindi non può essere una retta per 2 (n.° 4). Allora le rette $(5, 16)_1$, $(7, 14)_1$ sono necessariamente congiunte a 2 quindi i due punti 8 e 9 che ancora giacciono su di esse devono essere allineati con 2. La retta estranea al punto 4 è la $(2, 15)_1$, perciò la $(2, 8, 9)_1$ deve essere congiunta a 4, e questo è contrario alla ipotesi fondamentale, perchè i punti 2, 8, 9 sono tutti congiunti a punti congiunti a 4.

25. Facciamo $h=2$. Voglio dimostrare dapprima che se esiste una Cfz. 17₃ della natura che consideriamo in essa vi è certamente un punto che ha per resto due rette congiunte.

Perciò notiamo il seguente:

Teorema. — Se una retta di una Cfz. $(15 + h)_3$, soddisfacente alla solita condizione, ha nel suo resto due punti congiunti, su quella retta esiste certamente un punto che ha nel suo resto due rette congiunte.

Infatti se la retta r_1 ha nel suo resto i punti α_2 e β_2 giacenti sopra una retta r_2 della Cfz. è necessario che la retta r_2 possenga nel suo resto due punti α_1 e β_1 sopra r_1 , perchè soltanto il terzo punto γ_2 di r_2 potrebbe essere congiunto alla r_1 . Allora delle tre rette passanti per α_2 una appartiene contemporaneamente al resto di α_1 e β_1 ed è la r_2 e le altre due o sono nel resto di γ_1 , ovvero una certamente appartiene al resto di α_1 o β_1 in ogni caso si vede, che sopra r_1 esiste un punto, il quale ha nel suo resto due rette congiunte.

Per dimostrare ora la proprietà accennata si supponga, che il punto 1 abbia per resto le due rette estranee $r_1 \equiv (12, 14, 16)_1$ $r_2 \equiv (13, 15, 17)_1$.

La retta r_1 ha per resto oltre al punto 1 un altro punto; se questo è congiunto ad 1, resta dimostrata la proprietà voluta in virtù del teorema precedente, se invece esso è estraneo ad 1 lo chiameremo 8, supponendo per ora che non sia un punto di r_2 ; così il punto che insieme ad 1 forma il resto della r_2 , deve supporre estraneo ad 1 e sarà o 9 od ancora 8. Allora dai 4 punti 8, 9, 10, 11 partono necessariamente 6 rette congiunte alle r_1 ed r_2 e questo esige, che fra i punti stessi vi siano tre coppie di punti congiunti, e che esistano tre rette contenenti un punto di ciascuna delle r_1 ed r_2 , che noi supporremo essere $(12, 13)_1$, $(14, 15)_1$, $(16, 17)_1$.

Se 8 e 9 appartengono ai resti rispett.^o delle r_1 ed r_2 dovranno manifestamente essere 8 e 9 congiunti fra loro e rispett.^o a 10 ed 11. Allora se la $(8, 10)_1$ passa per 2 deve la $(9, 11)_1$ passare per 3 (come si riconosce facilmente), ed è quindi necessario, che due delle rette contenenti un punto di r_1 ed uno di r_2 passino per 2 e per 3, così si riconosce che la retta $(1, 2, 3)_1$ possiede per resto due punti congiunti; però, ecc.

Se poi tanto r_1 quanto r_2 hanno per resto 1 ed 8, debbano da 8 partire tre rette contenenti rispett.^o 9, 10, 11 e potremo supporre che tali rette passino poi per 2, 4, 6. Per questi punti passeranno allora le due rette $(12, 13)_1$, $(14, 15)_1$, $(16, 17)_1$, e possiamo ammettere di più che vi passino in questo ordine. Allora le due rette per 3 devono contenere 10 ed 11 e due punti estranei delle r_1 ed r_2 diversi da 12 e 13, epperò o 14 e 17 o 15 e 16, sicchè 3 è certamente congiunto alle $(14, 15)_1$ e $(16, 17)_1$, e così si vede immediatamente che il resto di 3 è formato da due rette congiunte in 9.

Se poi il resto di r_1 è il punto 1 ed un punto di r_2 ad es. 13, allora il resto di r_2 è formato da 1 e da un punto di r_1 che supporremo 12.

Questo esige che siano congiunti 14 con 15, 16 con 17, 8 con 9 e 10 con 11 (tenendo calcolo si intende dell'arbitrarietà della notazione). Anche in questo caso è subito visto che la retta $(8, 9, 2)_1$ ha per resto due punti congiunti delle r_1 ed r_2 , però, ecc.

Dunque vediamo essere impossibile che tutti i punti della Cfz. posseggano per resto due rette estranee.

26. Prendiamo adunque ad esaminare il caso in cui 1 ha per resto due rette congiunte, il quale ci condurrà a trovare tutte le possibili Cfz. 17, del tipo voluto.

Siano $(13, 14, 17)_1$, $(15, 16, 17)_1$ le due rette che costituiscono il resto di 1. Dal punto 17 parte un'altra retta la quale sarà congiunta ad una retta per 1, chiamiamo 7 il punto contemporaneamente congiunto ad 1 e 17, e 12 il terzo punto sulla $(7, 17)_1$.

Dal punto 7 oltre le $(1, 6, 7)_1$, $(7, 12, 17)_1$ parte una terza retta, la quale, non potendo contenere alcuno dei punti congiunti ad 1 e 17 conterrà due dei punti 8, 9, 10, 11; siano 10 ed 11. Dal punto 6 invece partono due rette le quali devono contenere i punti 8, 9 e 13 o 14, 15 o 16. Noi potremo senz'altro supporre, che tali rette siano:

$$(6, 8, 14)_1, \quad (6, 9, 16)_1.$$

Dal punto 12 partono ugualmente due rette ciascuna delle quali deve contenere un punto congiunto ad 1 supporremo 3 e 5; allora sulle $(3, 12)_1$, $(5, 12)_1$ esistono due punti della Cfz., i quali non potendo essere congiunti ad 1, 7, 17 altro non possono essere che 8 e 9, però le due rette per 12 siano:

$$(3, 8, 12)_1, \quad (5, 9, 12)_1.$$

Con questo non abbiamo fatta alcuna ipotesi particolare sulla configurazione.

Dal punto 8 partono le due rette $(3, 8, 12)_1$, $(6, 8, 14)_1$, quindi la terza retta per 8 deve contenere un punto delle due rette $(1, 4, 5)_1$, $(15, 16, 17)_1$, poichè i resti di queste due rette sono due coppie di punti rispettivamente congiunti a 17 e ad 1, e quindi 8 non è estraneo a queste due rette; d'altra parte 5 ed 8 sono congiunti a 12 ed 8 e 16 a 6, però 8 è necessariamente congiunto a 4 e 15. Lo stesso ragionamento si può ripetere per 9 e si trova, che la coppia 2, 13 è allineata con 9. Dopo questo si vede subito quali debbano essere gli altri 4 allineamenti.

Prendiamo ad es. il punto 2, la terza retta che passa per esso, oltre le $(1, 2, 3)_1$, $(2, 9, 13)_1$, non può contenere 8, perchè questo è già congiunto a 3, epperò conterrà 10 od 11, 15 o 16; ma 2 e 16 sono già congiunti a 9, e 10 ed 11 non sono ad altro vincolati che ad essere allineati con 7 (quindi è permesso scambiare all'occorrenza le loro denominazioni) cosicchè possiamo affermare, che la retta cercata è la $(2, 10, 15)_1$. Analogamente si trova, che per 3, 4, 5 debbono passare ordinatamente le rette $(3, 11, 16)_1$, $(4, 11, 13)_1$, $(5, 10, 14)_1$.

Adunque per le fatte ipotesi siamo condotti ad un unico tipo di Cfz. 17₃, il quale vedremo fra poco che esiste effettivamente.

Questo tipo essendo unico deve essere reciproco di sè medesimo per l'osservazione del n.º 2; ciò del resto si vedrà direttamente.

27. Qui sotto diamo tre specchi, nel Iº sono poste sotto ad ogni punto le tre coppie di punti ad esse congiunte, mantenendo le denominazioni precedenti; nel IIº sono indicate le due rette costituenti, il resto dei singoli punti; nel IIIº sono date le coppie di punti, che costituiscono il resto di ciascuna retta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
I	2, 3	1, 3	1, 2	1, 5	1, 4	1, 7	1, 6	3, 12	2, 13	2, 15	3, 16	3, 8	2, 9	5, 10	2, 10	3, 11	7, 12
	4, 5	9, 13	8, 12	8, 15	9, 12	8, 14	10, 11	4, 15	5, 12	5, 14	4, 13	5, 9	4, 11	6, 8	4, 8	6, 9	13, 14
	6, 7	10, 15	11, 16	11, 13	10, 14	9, 16	12, 17	6, 14	6, 16	7, 11	7, 10	7, 17	14, 17	13, 17	16, 17	15, 17	15, 16

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
II	13, 14, 17	6, 8, 14	5, 10, 14	6, 9, 16	3, 11, 16	4, 11, 13	2, 9, 13	2, 9, 13	7, 10, 11	3, 8, 12	6, 8, 14	4, 11, 13	1, 6, 7	1, 2, 3	1, 6, 7	1, 4, 5	1, 2, 3
	15, 16, 17	7, 12, 17	13, 14, 17	7, 12, 17	15, 16, 17	2, 10, 15	4, 8, 15	7, 10, 11	4, 8, 15	6, 9, 16	5, 9, 12	2, 10, 15	3, 8, 12	3, 11, 16	5, 9, 12	5, 10, 14	1, 4, 5

	1, 2, 3	1, 4, 5	1, 6, 7	2, 9, 13	2, 10, 15	3, 8, 12	3, 11, 16	4, 8, 15	4, 11, 13	5, 9, 12	5, 10, 14	6, 8, 14	6, 9, 16	7, 10, 11	7, 12, 17	13, 14, 17	15, 16, 17
III	14	16	13	7	6	10	5	7	6	11	3	2	4	8	2	1	1
	17	17	15	8	12	13	14	9	12	15	16	11	10	9	4	3	5

Dallo specchio IIº risulta immediatamente, che i punti della Cfz. non si comportano tutti allo stesso modo.

Ve ne sono 6, cioè 1, 3, 5, 14, 16, 17, che posseggono per resto due rette congiunte. Uno qualunque di questi punti è congiunto a due degli altri cinque, talchè considerandoli nell'ordine 1, 3, 16, 17, 14, 5 costituiscono i vertici di un esagono semplice, i cui lati sono rette della Cfz.

Gioverà introdurre una notazione nuova, la quale metterà in maggiore evidenza la disposizione degli elementi della Cfz.

I sei vertici dell'esagono nominato diciamoli $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ poniamo cioè ad es.

$$a_1 \equiv 1, \quad a_2 \equiv 3, \quad a_3 \equiv 16, \quad a_4 \equiv 17, \quad a_5 \equiv 14, \quad a_6 \equiv 5.$$

Sui lati di questo esagono, abbiamo 6 punti che noi indicheremo colla lettera a , apponendo al piede i due indici corrispondenti ai vertici che stanno sul lato stesso. Così veniamo a considerare i punti:

$$a_{12} \equiv 2, \quad a_{23} \equiv 11, \quad a_{34} \equiv 15, \quad a_{45} \equiv 13, \quad a_{56} \equiv 10, \quad a_{16} \equiv 4$$

i quali nella Cfz. si distinguono da tutti gli altri pel fatto di avere per resto due rette non congiunte, tali però che ogni punto dell'una ha un punto congiunto sull'altra, e ciascuna retta contiene di più uno dei punti a_i .

Si hanno altri due punti 6, 12, i quali possiedono per resto due rette estranee che come le precedenti contengono tre coppie di punti congiunti, ma esse non contengono però alcuno dei punti a_i . Diciamo b_1 e b_2 questi due punti. Ciascuno di essi è congiunto a tre punti a_i precisamente a tre vertici non consecutivi del nostro esagono; se supponiamo $b_1 \equiv 6$ $b_2 \equiv 12$ avremo che b_1 è congiunto ai punti a_i di indice impari, b_2 a quelli di indice pari.

I due punti b_1, b_2 possiedono il medesimo resto, costituito da due rette contenenti i 6 punti a_{ik} .

Rimangono altri tre punti 7, 8, 9, i quali hanno per resto due rette estranee, ciascuna delle quali contiene un punto estraneo all'altra. Ciascuno di questi tre punti è congiunto a b_1 ed a b_2 e sulle rette che lo congiungono a b_1 e b_2 stanno due punti a_i vertici opposti del solito esagono, converremo perciò di rappresentare questi punti colla lettera c al piede della quale porremo i due indici relativi ai vertici opposti dell'esagono, che sono ad essi congiunti. Sarà perciò $c_{14} \equiv 7, c_{25} \equiv 8, c_{36} \equiv 9$.

Un punto c_{ih} è congiunto anche a due punti a_{jk} congiunti fra loro, questi due punti giacciono sui due lati dell'esagono non passanti per la coppia di vertici opposti congiunti a c_{ih} , perciò c_{ih} è congiunto ai due punti a_{jk} , i quali non posseggono nè l'indice i , nè l'indice h . Adunque vi sono nella Cfz. 4 gruppi di punti:

- 6 punti a_i formanti un esagono;
- 6 punti a_{ik} giacenti sopra due rette;
- 2 punti b_1 e b_2 ; e
- 3 punti c_{ik} .

Si vede dal III° specchio, come la medesima divisione possa effettuarsi nelle rette della Cfz. Esse si dividono in 4 gruppi rispett.° di 6, 6, 2, 3 rette, le prime 6 posseggono per resto una coppia di punti congiunti e sono precisamente i lati del nostro esagono, ecc. Si vede di qui che la Cfz. è reciproca di sè medesima.

. 28. Consideriamo i tre triangoli $a_1, a_3, a_5; a_4, a_6, a_2; c_{14}, c_{36}, c_{25}$. Per le proprietà notate si vede subito, che i primi due sono omologici al terzo, e sono b_1 e b_2 i centri di prospettiva.

Così i due trilateri

$$(a_5, a_6)_1, (a_1, a_2)_1, (a_3, a_4)_1; (a_2, a_3)_1, (a_4, a_5)_1, (a_6, a_1)_1$$

sono prospettivi al medesimo trilatero

$$(a_{56}, c_{14}, a_{23})_1, (a_{12}, c_{36}, a_{45})_1, (a_{34}, c_{52}, a_{61})_1$$

e sono

$$(a_{12}, a_{34}, a_{56})_1, (a_{23}, a_{45}, a_{61})_1$$

gli assi di prospettiva.

Per brevità chiamiamo t_1, t_2, t i tre triangoli suaccennati e τ_1, τ_2, τ i tre trilateri. Allora noi vediamo subito, che il trilatero τ è circoscritto al triangolo t , mentre i trilateri τ_1 e τ_2 lo sono contemporaneamente ai due triangoli t_1 e t_2 . La legge colla quale i lati dei trilateri debbono passare pei vertici di t_1 e t_2 è molto semplice.

I lati di τ_1 e τ_2 omologhi al medesimo lato di τ non debbono passare pei 2 vertici di t_1 e t_2 , i quali sono omologhi al vertice di t che giace sul lato considerato di τ , nè debbono contenere una coppia di vertici omologhi ad un medesimo vertice di t .

Dunque la nostra Cfz. si può considerare sotto questi due punti di vista (correlativi):

1.° Il complesso dei 9 vertici di tre triangoli due dei quali sono prospettivi al terzo insieme ai 2 centri di prospettiva ed alle 6 intersezioni dei lati omologhi di un trilatero prospettivo a due altri, essendo i trilateri nella relazione detta coi triangoli.

2.° Il complesso dei 9 lati di tre trilateri due dei quali sono prospettivi al terzo, insieme ai 2 assi di prospettiva ed alle 6 congiungenti i vertici omologhi di un triangolo prospettivo a due altri, essendo i triangoli nella relazione detta coi trilateri.

Queste proprietà mentre pongono in tutta evidenza la mutua disposizione ed il diverso comportarsi dei punti e delle rette della Cfz. ci permettono di

costruire immediatamente la Cfz. stessa, poichè è facile vedere, che le condizioni imposte ai tre triangoli ed ai tre trilateri, conducono ad un problema di 2° grado.

La legge colla quale i triangoli devono essere iscritti ai trilateri può essere diversa da quella notata, indispensabile per ottenere Cfz. del tipo da noi considerato. Quando sia soddisfatta la condizione, che per un vertice di t passi un solo lato di τ , e per ogni vertice di t_1 o t_2 un solo lato di τ_1 e di τ_2 , il che è possibile in molti modi, si ottengono sempre Cfz. 17₃, che manifestamente non soddisferanno più alla nostra condizione, ma che pure si otterranno colla stessa costruzione.

§ 6. Configurazioni 18₃.

29. Diamo ad h e k il valore 3, verremo così a considerare le Cfz. 18₃, le quali soddisfano la nostra condizione.

Anche qui si dimostra senza difficoltà che se esiste una tale Cfz. 18₃, certamente vi è in essa un punto, che ha per resto due rette congiunte ad una terza. Il metodo che si segue per dimostrare questa proprietà, e per la successiva ricerca delle Cfz. 18₃ è analogo a quello tenuto nel precedente paragrafo, però ci dispensiamo dall'espore per disteso le discussioni ed i ragionamenti, che condussero ai seguenti risultati.

Le Cfz. 18₃, le quali soddisfano la solita condizione sono di quattro tipi, che noi indicheremo rispettivamente coi simboli (A), (B), (C) e (D).

Tipo (A). I punti della Cfz. sono di due specie:

9 punti a_1, \dots, a_9 hanno per resto due rette congiunte ad una terza;

i 9 punti rimanenti b_1, \dots, b_9 hanno per resto tre rette fra loro estranee.

Delle tre rette passanti per un punto della Cfz., due contengono ancora due punti fra loro di specie diversa, l'altra ne contiene due della medesima specie che però è diversa da quella del punto considerato.

Le stesse cose possono ripetersi per le 18 rette della Cfz. e si vede così che il tipo (A) è reciproco di sè medesimo.

Considerando i punti della stessa specie in un certo ordine, costituiscono due 9-goni semplici (a) e (b) i cui lati sono rispettivamente i due gruppi di 9 rette della Cfz., si trova allora che i 9-goni sono contemporaneamente iscritti e circoscritti fra loro. Dunque la Cfz. (A) è una di quelle costituite da due 9-goni contemporaneamente iscritti e circoscritti.

La legge colla quale i lati dell'un poligono devono passare pei vertici dell'altro affinchè nasca una Cfz. 18₃ della natura considerata è la seguente.

Il poligono (b) deve essere inscritto ad (a) per modo che se un vertice b_i di (b) giace sopra un lato $a_i a_{i+1}$ di (a) i due vertici b_{i+1} , b_{i-1} , adiacenti a b_i , devono giacere sui lati di (a), che passano pel vertice opposto ad $a_i a_{i+1}$, ossia per a_{i+5} , ed un lato di (b) $b_m b_{m+1}$ deve passare pel vertice di (a) separato dallo stesso numero di lati da quelli che contengono i due punti k_m e k_{m+1} . Così se sarà (a) $\equiv a_1 a_2 \dots a_9$, (b) $\equiv b_1 b_2 \dots b_9$, e se sopra $a_1 a_2$ si troverà b_1 , dovranno b_2 e b_9 essere sopra $a_5 a_6$, e $a_6 a_7$ e supponendo b_2 sopra $a_5 a_6$, e quindi b_9 sopra $a_6 a_7$ si avrà che la $b_1 b_2$ passa per a_8 , la $b_1 b_9$ per a_4 ; che sopra $a_1 a_9$ si trova b_3 , e $b_2 b_3$ passa per a_3 , ecc., e così si vede che la notazione della Cfz. è individuata. È poi facile trovare in quale relazione stia (a) rispetto a (b).

Le condizioni imposte ai due poligoni (a) e (b) si soddisfano risolvendo un problema di 2° grado.

In questa Cfz. sarebbe impossibile avere gruppi di 6 rette tutti estranee fra loro, ecc.

30. *Tipi (B) e (C)*. Indicando, come già si fece altre volte, coi numeri dall'1 al 18 i punti della Cfz., allora il tipo (B) è dato dai seguenti 18 allineamenti:

1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7; 2, 8, 10; 2, 15, 16; 3, 9, 11; 3, 17, 18;
4, 8, 12; 4, 11, 15; 5, 9, 16; 5, 10, 14; 6, 8, 17;
6, 11, 14; 7, 9, 13; 7, 10, 18; 12, 13, 14; 12, 16, 18; 13, 15, 17;

ed il tipo (C) è dato dagli allineamenti:

1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7; 2, 10, 14; 2, 15, 16; 3, 8, 12; 3, 9, 11;
4, 11, 14; 4, 17, 18; 5, 8, 10; 5, 9, 13; 6, 8, 15;
6, 9, 18; 7, 10, 17; 7, 11, 16; 12, 13, 14; 12, 16, 18; 13, 15, 17.

Coi segni \bigwedge , \sqcup , \leq intenderemo rispettivamente di indicare, che il punto di cui si tratta, ha per resto tre rette congiunte (\bigwedge), due rette congiunte ad una terza (\sqcup), due rette congiunte estranee alla terza (\leq). Significati correlativi avranno i simboli \dots , $\hat{\bigwedge}$, \dots .

Nella Cfz. (B) abbiamo 12 punti \sqcup e 6 punti \bigwedge i quali sono 5, 9, 16; 6, 8, 17 che si dividono poi in due terne di punti allineati, ed abbiamo invece 12 rette $\hat{\bigwedge}$ e 6 \dots , (1, 2, 3)₁, (4, 11, 15)₁, (5, 9, 16)₁, (6, 8, 17)₁, (7, 10, 18)₁, (12, 13, 14)₁, le quali non passano tre per un punto e tre per un altro, dunque la (B) non è una Cfz. correlativa di sè medesima.

La (C) possiede 6 rette $---$, le quali si dividono in due terne concorrenti in un punto, ed è precisamente la Cfz. correlativa alla (B).

Consideriamo le 6 rette $---$ di (B). Esse sono fra loro estranee e quindi contengono tutti i 18 punti della Cfz.; le rette stesse contengono punti della medesima specie, cioè ve ne hanno due le $(5, 9, 16)_1$, $(6, 8, 17)_1$, che contengono i sei punti \wedge , le altre quattro contengono solamente punti \sqcup . I punti \wedge di una delle rette sono estranei a quelli dell'altra, invece insieme sono congiunti a tutti i punti \sqcup . Ma vi è di più. Se prendiamo la retta $(5, 9, 16)_1$, o la $(6, 8, 17)_1$, ed una qualunque delle altre quattro rette $---$, per es. $(5, 9, 16)_1$ e $(1, 2, 3)_1$, vediamo che i tre punti che stanno ancora sulle unenti le coppie di punti congiunti di queste due rette, giacciono sopra una medesima retta $---$. Adunque le sei rette $---$ si dividono in due gruppi di 2 e 4 rette, rispetto a ciascuna del primo gruppo le 4 del secondo si separano in due coppie e le 4 terne che così si ottengono sono rette estranee di altrettante fig.^o (Δ). Così riconosciamo l'esistenza di 4 fig.^o (Δ), due qualunque delle quali hanno in comune una sola retta che è poi una $---$.

Le altre 12 rette \wedge entrano una sol volta nelle 4 fig.^o (Δ), epperò vediamo, che esse si dividono in 4 terne determinate di rette estranee costituenti 4 trilateri (fondamentali). Due qualunque di questi trilateri appartengono a due fig.^o (Δ) aventi una retta in comune, quindi i due trilateri sono prospettivi.

La Cfz. (B) è adunque una Cfz. che nasce considerando i lati di quattro trilateri due a due prospettivi, insieme agli assi di prospettiva.

In modo identico si vedrebbe che:

« La Cfz. (C) è la Cfz. dei vertici di 4 triangoli due a due prospettivi insieme ai sei centri di prospettiva. »

La legge colla quale debbonsi prendere i lati omologhi in questi trilateri prospettivi, ed i vertici nei triangoli, è perfettamente determinata quando le Cfz. nascenti in tal guisa debbano soddisfare la proprietà posta a fondamento delle nostre ricerche.

Del resto qualunque sia la legge di successione degli elementi omologhi da noi imposta, è chiaro che giungeremo sempre a Cfz. 18₃, qualora sia possibile ottenere nel piano 4 trilateri, o triangoli, due a due prospettivi colla legge determinata. Si vede facilmente che questa costruzione dipende da un problema di 2° grado, perciò possiamo affermare che le Cfz. (B) e (C) esistono effettivamente.

31. I vertici nei 4 triangoli della Cfz. (C) [quanto ora si dice vale pei lati dei trilateri fondamentali di (B)] indichiamoli rispett.^o colle lettere a, b ,

formare così tre trilateri rimanenti. Due qualunque di questi quattro esalateri hanno in comune una retta appartenente al primo il quale ha comuni tre rette con ciascuno degli altri quattro.

Esistono poi:

12 pentelateri principali (non contenuti negli esalateri),

30 pentelateri non principali,

36 quadrilateri principali, e

135 non principali,

ed in tutto 252 trilateri nessuno dei quali è principale.

Considerazioni correlative valgono pei gruppi di punti in (C).

In (C) poi abbiamo tre soli esalateri contenenti tutti i 18 punti della Cfz. e quindi in (B) tre soli gruppi di 6 punti pei quali passano tutte le 18 rette della Cfz.

32. *Tipo (D)*. Esso è correlativo di sè medesimo ed è dato dai 18 allineamenti:

1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7; 2, 10, 14; 2, 15, 16; 3, 8, 12;
 3, 9, 11; 4, 11, 14; 4, 17, 18; 5, 8, 10; 5, 9, 13; 6, 8, 17;
 6, 9, 16; 7, 10, 18; 7, 11, 15; 12, 13, 14; 12, 16, 18; 13, 15, 17.

I punti della Cfz. sono di tre specie:

2 \blacktriangle , cioè 6 e 14,

4 \leq , cioè 2, 4, 10 ed 11, e

12 \square .

I due punti \blacktriangle si comportano ben diversamente, poichè all'uno (14) sono congiunti i quattro punti \leq all'altro (6) nessun punto di questa specie.

Lo stesso si dica delle rette: vi sono

2 rette $-\cdot-\cdot-$, (1, 6, 7)₁, (12, 13, 14)₁, e

4 rette $\cdot-\cdot$, che si dividono in due coppie di rette congiunte fra loro ed alla (12, 13, 14)₁, e

12 rette $\dot{\wedge}$. Togliendo da queste le due passanti per 14, le 10 rimanenti si dividono in due gruppi di 5 formanti colla (1, 6, 7)₁ una fig.^a (Δ). Però nella Cfz. abbiamo due fig.^e (Δ) aventi una retta comune

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 16 & 15 \\ 3 & 9 & 11 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 7 \\ 4 & 17 & 18 \\ 5 & 8 & 10 \end{array} \right|.$$

Correlativamente si vedrebbe, che eccettuati i due punti L_1 congiunti a 14, i 10 rimanenti si distribuiscono in due gruppi di 5 formanti ciascuno con 6 una fig.^a (D), ossia una coppia di terne complementari: 1, 8, 9; 3, 5, 6 e 7, 16, 17; 6, 15, 18. Avendo queste coppie di terne complementari l'elemento comune 6 possiamo riguardare le due terne 1, 8, 9; 7, 16, 17 come i vertici di due triangoli prospettivi, essendo 6 il centro di prospettiva e 1, 7; 8, 17; 9, 16 le coppie di vertici omologhi.

Proiettando il primo triangolo da 3 e poi da 5 risultano i due triangoli 2, 12; 11; 4, 10, 13 ed esso prospettivi, i quali sono poi anche prospettivi fra loro rispetto a 14.

Proiettando il secondo da 15 e 18 si ottengono i due triangoli 11, 13, 2; 10, 4, 12 fra loro prospettivi pure rispetto a 14.

Il complesso dei 6 vertici di questi due triangoli è lo stesso di quello dei due precedenti prospettivi ad 1, 8, 9.

Dunque la nostra Cfz. è una di quelle formata dai vertici di due coppie di triangoli prospettivi

$$\begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{cases}$$

aventi questa relazione:

$a_1 a_2 a_3$ è prospettivo ai due triangoli $c_1 c_2 c_3$, $d_1 d_2 d_3$, e

$b_1 b_2 b_3$ è prospettivo a due altri triangoli che si ottengono scambiando

due vertici omologhi nei due triangoli prospettivi $\begin{cases} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{cases}$, insieme ai 6 centri di prospettiva.

Se non si aggiunge altro si hanno moltissime Cfz. 18₃ nascenti in questo modo (e si costruiscono risolvendo un problema di 2° grado), ma se si aggiunge che due vertici omologhi in una coppia di triangoli prospettivi non debbano essere mai omologhi si ottiene un unico tipo di Cfz. 18₃ che è appunto il tipo (D). In questo caso le 6 coppie di triangoli prospettivi si possono sempre supporre le seguenti:

$$\begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{cases}, \begin{cases} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{cases}, \begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{cases}, \begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_3 & d_1 & d_2 \end{cases}, \begin{cases} b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & c_3 & c_2 \end{cases}, \begin{cases} b_1 & b_2 & b_3 \\ d_2 & c_1 & d_3 \end{cases}$$

Anche qui i 6 centri di prospettiva si potranno indicare con $(a b)$, $(c d)$, $(a c)$, $(a d)$, $(b c)$, $(b d)$.

Valgono poi tutte le considerazioni correlative.

È notevole il fatto che questo modo di stabilire la proiettività dei triangoli permetta di poter disporre 12 delle 18 congiungenti i vertici omologhi in 4 trilateri, che abbiano la disposizione correlativa menzionata nei triangoli, e che di più gli assi di prospettiva siano le altre 6 congiungenti.

La notazione ora indicata equivarrebbe a porre ad es.

$$\begin{aligned}
 1 &\equiv a_3, & 2 &\equiv c_3, & 3 &\equiv (ac), & 4 &\equiv d_2, & 5 &\equiv (a\bar{d}), & 6 &\equiv (ab), \\
 & & & & & & 7 &\equiv b_3, & 8 &\equiv a_1, & 9 &\equiv a_2, \\
 10 &\equiv d_3, & 11 &\equiv c_2, & 12 &\equiv c_1, & 13 &\equiv d_1, & 14 &\equiv (cd), & 15 &\equiv (bc), \\
 & & & & & & 16 &\equiv b_2, & 17 &\equiv b_1, & 18 &\equiv (bd).
 \end{aligned}$$

Pavia, giugno 1885.

Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica.

(Memoria di ENRICO PUCCI, professore nella R. Università di Roma.)

1.

Nella prima parte della nota Memoria di BESSEL sopra *l'influenza delle irregolarità della terra nei lavori geodetici* si trovano sviluppate le espressioni analitiche delle differenze fra le coordinate astronomiche dei punti di una geodetica del Geoide e le corrispondenti coordinate ellissoidiche calcolate come se la geodetica stessa appartenesse all'ellissoide di riferimento (*ellissoide terrestre*), facendo cioè astrazione dalla diversità delle due superficie. BESSEL non ha applicato tali espressioni, ma se n'è servito soltanto per stabilire l'ordine di grandezza delle quantità che, dipendendo dalle cosiddette attrazioni locali e dalle ondulazioni del Geoide, non si possono valutare se non per mezzo di approssimazioni successive, e che in realtà sogliono essere trascurate; interpretando però le formule Besseliane si cade in contraddizione coi risultati dedotti nella seconda parte della stessa sua Memoria con un'analisi molto meno delicata e rigorosa. Questa contraddizione proviene da due errori commessi nella prima parte, l'uno nel ricavare nel § 3 l'espressione geoidica della quantità

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

per la quale trova

$$\Delta = \frac{2}{a} \frac{1 + \frac{h}{a}}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}},$$

tralasciando un termine dell'ordine stesso di $\frac{h}{a}$, dipendente dalle attrazioni locali, l'altro nell'integrare definitamente per approssimazione nel § 4 le quantità $p.d\alpha$, $q.d\alpha$. Correggendo tali errori e modificando un poco le condizioni ai

limiti degli integrali si possono stabilire le formole fondamentali della Geodesia geodica, le quali, se dentro l'approssimazione delle odierne misure non conducono a risultati completamente nuovi, da un lato giustificano i procedimenti analitici usati nei calcoli della Geodesia scientifica e danno il modo di tener conto in gran parte anche delle quantità che comunemente si trascurano, e dall'altro lato permettono di formulare delle importanti proposizioni con un metodo di ricerca che mi sembra meritare l'attenzione dei Geodeti.

Credo pertanto che valga la pena di ricostituire in questo nuovo ordine di idee la Memoria Besseliana con un'analisi in parte diversa, ma che non ammetta obiezione, ed introducendo in luogo dei simboli di BESSEL che non hanno significato geometrico esplicito, gli enti geodetici che possono esser calcolati da un sistema di misure astronomico-geodetiche.

2.

Estendiamo l'idea delle coordinate astronomiche al caso di una superficie qualunque, col definire per *collatitudine astronomica* di un punto di una superficie l'angolo piano che la normale in tal punto fa con un asse fisso (*asse polare*), e per *longitudine astronomica* l'angolo diedro che il piano che contiene questa normale e una parallela all'asse fisso (*piano meridiano*) fa con un piano fisso che passi per l'asse, e cerchiamo le equazioni differenziali delle geodetiche in funzione di siffatte coordinate. Perciò immaginiamo anzitutto riferita la superficie ad una terna di assi cartesiani, di cui quello delle z coincida coll'asse polare suddetto, e quello delle x sia parallelo al piano fisso scelto come origine delle longitudini; gli angoli V_x, V_y, V_z che la normale in un punto $M(x, y, z)$ della superficie fa cogli assi cartesiani sono dati in funzione della latitudine l e della longitudine λ dalle note relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \cos V_x &= \cos l \cdot \cos \lambda, \\ \cos V_y &= \cos l \cdot \sin \lambda, \\ \cos V_z &= \sin l. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Sia

$$F(x, y, z) = 0$$

l'equazione della superficie considerata, ed indichiamo con R il raggio di curvatura e con s_x, s_y, s_z gli angoli di direzione di una sua geodetica; è noto

che le equazioni di questa curva possono essere scritte come segue

$$\begin{aligned} \pm ds \cdot \cos V_x &= R \cdot d \frac{dx}{ds} = R \cdot d(\cos s_x), \\ \pm ds \cdot \cos V_y &= R \cdot d \frac{dy}{ds} = R \cdot d(\cos s_y), \\ \pm ds \cdot \cos V_z &= R \cdot d \frac{dz}{ds} = R \cdot d(\cos s_z), \end{aligned}$$

i due segni caratterizzando le due direzioni della normale V , corrispondenti alle due faccie della superficie. Se si considera, come qui faremo, la sola direzione diretta verso lo *Zenit* astronomico (direzione che corrisponde sul Geoide alla faccia convesso-convessa) sono da tenere i segni negativi; quindi, introducendo per V_x, V_y, V_z i loro valori in l e λ , come equazioni delle geodetiche porremo:

$$\left. \begin{aligned} R \cdot d(\cos s_x) + \cos l \cdot \cos \lambda \cdot ds &= 0, \\ R \cdot d(\cos s_y) + \cos l \cdot \text{sen} \lambda \cdot ds &= 0, \\ R \cdot d(\cos s_z) + \text{sen} l \cdot ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Per esprimere in funzione delle coordinate astronomiche anche i coseni di direzione della curva, indichiamo con N_x, N_y, N_z gli angoli che fa cogli assi la direzione della sezione normale formata sulla superficie dal piano meridiano del punto qualunque $M(x, y, z)$, direzione che, per analogia al caso del Geoide, diremo *cardinale nord-sud*; è facile vedere che si ha:

$$\left. \begin{aligned} \cos N_x &= -\cos \lambda \cdot \text{sen} l, \\ \cos N_y &= -\text{sen} \lambda \cdot \text{sen} l, \\ \cos N_z &= \cos l. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Analogamente rappresentando con E_x, E_y, E_z gli angoli formati cogli assi dalla *direzione cardinale est-ovest*, ossia dalla direzione perpendicolare alla nord-sud sulla superficie, si trova:

$$\left. \begin{aligned} \cos E_x &= -\text{sen} \lambda, \\ \cos E_y &= \cos \lambda, \\ \cos E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ora la normale MV in un punto della superficie e le direzioni cardinali nord-sud ed est-ovest costituiscono una nuova terna di assi cartesiani, coi quali la direzione ds di una linea della superficie nel punto considerato fa rispettiva-

mente gli angoli 90° , A , e $90^\circ - A$, essendo A l'azimut astronomico della linea, e riferendo a tali assi anche gli assi delle x , delle y e delle z si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} \cos s_x &= \frac{dx}{ds} = \cos N_x \cos A + \cos E_x \sin A = \\ &= -\cos \lambda \cdot \sin l \cdot \cos A - \sin \lambda \cdot \sin A, \\ \cos s_y &= \frac{dy}{ds} = \cos N_y \cos A + \cos E_y \sin A = \\ &= -\sin \lambda \cdot \sin l \cdot \cos A + \cos \lambda \cdot \sin A, \\ \cos s_z &= \frac{dz}{ds} = \cos N_z \cos A + \cos E_z \sin A = \\ &= \cos l \cdot \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Le equazioni (2) si trasformano quindi nelle seguenti

$$\begin{aligned} \cos l \cdot \cos \lambda \cdot ds &= \cos l \cdot \cos \lambda \cdot \cos A \cdot R \cdot dl - (\sin l \cdot \sin \lambda \cdot \cos A - \cos \lambda \cdot \sin A) R \cdot d\lambda - \\ &\quad - (\sin l \cdot \cos \lambda \cdot \sin A - \sin \lambda \cdot \cos A) R \cdot dA, \\ \cos l \cdot \sin \lambda \cdot ds &= \cos l \cdot \sin \lambda \cdot \cos A \cdot R \cdot dl + (\sin l \cdot \cos \lambda \cdot \cos A + \sin \lambda \cdot \sin A) R \cdot d\lambda - \\ &\quad - (\sin l \cdot \sin \lambda \cdot \sin A + \cos \lambda \cdot \cos A) R \cdot dA, \\ \sin l \cdot ds &= \sin l \cdot \cos A \cdot R \cdot dl + \cos l \cdot \sin A \cdot R \cdot dA, \end{aligned}$$

che prima sommate membro a membro dopo essere state moltiplicate rispettivamente per

$$\cos l \cdot \cos \lambda, \quad \cos l \cdot \sin \lambda, \quad \sin l,$$

e, successivamente, coll'eliminazione di ds fra le prime due, danno

$$\left. \begin{aligned} ds &= R \cdot \cos A \cdot dl + R \cdot \sin A \cdot \cos l \cdot d\lambda, \\ dA &= \sin l \cdot d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Queste sono le equazioni differenziali delle geodetiche di una superficie qualunque, date da BESSEL nella citata Memoria.

3.

L'integrazione di queste equazioni non può esser fatta in generale, senza cioè caratterizzare la superficie, giacchè dalla natura della superficie dipendono le variazioni elementari dl e $d\lambda$ che prendono le coordinate astronomiche lungo una linea tracciata su di essa. Tralascieremo quindi l'elegante ricerca delle espressioni generali di queste variazioni, istituita da BESSEL, e ci proporremo

senza più di integrare le (6) pel caso del Geoide, ossia di una superficie ondulata estremamente poco diversa da un ellissoide di rivoluzione, osservando che lo spirito del procedimento che qui sviluppiamo può, con poche modificazioni, essere applicato in ogni altro caso analogo, purchè sia nota di natura, e si possa sperimentalmente determinare una superficie (*superficie di riferimento*) molto prossima alla superficie da studiare.

Affinchè le coordinate astronomiche l e λ sopra definite rappresentino sul Geoide gli enti propriamente indicati dalla loro denominazione è necessario, nel sistema di coordinate cartesiane dei precedenti paragrafi, scegliere come asse delle z l'asse polare terrestre cui, per determinazione, è parallelo l'asse minore dell'ellissoide di riferimento scelto a rappresentare la superficie matematica della terra: ponendo inoltre l'origine, che rimane arbitraria, al centro di questo ellissoide, ed indicando in generale con h (*altitudine ellissoidica*) la parte di una normale ellissoidica compresa fra l'ellissoide ed il Geoide e con n_x, n_y, n_z gli angoli di direzione della normale stessa, fra le coordinate x_1, y_1, z_1 dei punti dell'ellissoide e quelle x, y, z dei punti del Geoide si avranno le corrispondenze

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h \cdot \cos n_x, \\ y &= y_1 + h \cdot \cos n_y, \\ z &= z_1 + h \cdot \cos n_z, \end{aligned}$$

che si riducono alle seguenti

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} + h \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega, \\ y &= \frac{a \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} + h \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega, \\ z &= \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} + h \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

esprimendo x_1, y_1, z_1 in funzione delle corrispondenti coordinate geografiche φ (*latitudine*) ed ω (*longitudine*), ed osservando che dall'equazione dell'ellissoide a due assi

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} - 1 = 0,$$

o dalle (1) si deduce:

$$\begin{aligned} \cos n_x &= \cos \varphi \cdot \cos \omega, \\ \cos n_y &= \cos \varphi \cdot \sin \omega, \\ \cos n_z &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

4.

Introduciamo ancora le seguenti notazioni:

ϱ = attrazione locale (ossia l'angolo fra una normale ellissoidica e la corrispondente verticale),

ψ = azimut del piano verticale in cui agisce l'attrazione locale,

ξ = componente stimata dell'attrazione locale nella direzione del meridiano,

η = componente stimata dell'attrazione locale nella direzione del parallelo,

θ_α = componente stimata dell'attrazione locale nell'azimut A ,

α = azimut ellissoidico,

ρ = raggio di curvatura del meridiano ellissoidico sotto la latitudine φ ,

r = raggio del parallelo ellissoidico sotto la latitudine φ ,

e ricordiamo che, geodeticamente parlando, negli sviluppi in serie si considerano come affatto trascurabili rispetto all'unità le quantità dell'ordine di $\frac{h^2}{a^2}$, ϱ^2 , $\frac{e^2 \cdot h}{a}$, $e^2 \theta$.

Per una linea s qualunque del Geoide si ha evidentemente [v. formule (1)]

$$\cos l \cdot \cos \lambda \frac{dx}{ds} + \cos l \cdot \sin \lambda \frac{dy}{ds} + \sin l \frac{dz}{ds} = 0, \quad (8)$$

mentre le corrispondenze (7), tenendo presente che in generale è

$$\rho \cdot d\varphi = \cos \alpha \cdot ds, \quad r \cdot d\omega = \sin \alpha \cdot ds,$$

ed osservando che la derivata $\frac{dh}{ds}$ deve esser considerata come una quantità tutto al più dell'ordine di h , danno dentro l'approssimazione geodetica suddetta:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right) - \\ &\quad - \sin \alpha \cdot \sin \omega \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \frac{dh}{ds} \cos \varphi \cdot \cos \omega, \\ \frac{dy}{ds} &= -\cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \\ &\quad + \sin \alpha \cdot \cos \omega \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \frac{dh}{ds} \cos \varphi \cdot \sin \omega, \\ \frac{dz}{ds} &= \cos \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right) + \frac{dh}{ds} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Inoltre è noto che fra le coordinate astronomiche di un punto del Geoide e le coordinate geografiche φ ed ω del punto ellissoidico che, poste le (7), gli corrisponde, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} l &= \varphi - \xi, \\ \lambda &= \omega - \eta \cdot \sec \varphi, \end{aligned}$$

cosicchè, dentro l'approssimazione suddetta, si può porre:

$$\begin{aligned} \cos l \cdot \cos \lambda &= \cos \varphi \cdot \cos \omega + \xi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega + \eta \cdot \sin \omega, \\ \cos l \cdot \sin \lambda &= \cos \varphi \cdot \sin \omega + \xi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega - \eta \cdot \cos \omega, \\ \sin l &= \sin \varphi - \xi \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (8) si trova

$$\frac{dh}{ds} = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha, \quad (9)$$

d'onde, introducendo in luogo di ξ e di η i loro valori in funzione dell'attrazione locale complessiva θ e dell'azimut ψ in cui essa agisce, si trae:

$$\frac{dh}{ds} = \theta \cdot \cos(\alpha - \psi) = \theta_a. \quad (10)$$

L'attrazione locale in una direzione geoidica qualunque è quindi uguale al coefficiente di variazione dell'altitudine ellissoidica in quella direzione.

5.

Se nelle corrispondenze (7) si esprimono φ ed ω in funzione di l e λ si ottengono (sempre dentro la già indicata approssimazione) le relazioni seguenti

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \cos l \cdot \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 l}} - \xi \cdot a \cdot \sin l \cdot \cos \lambda - \eta \cdot a \cdot \sin \lambda + h \cdot \cos l \cdot \cos \lambda, \\ y &= \frac{a \cdot \cos l \cdot \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 l}} - \xi \cdot a \cdot \sin l \cdot \sin \lambda + \eta \cdot a \cdot \cos \lambda + h \cdot \cos l \cdot \sin \lambda, \\ z &= \frac{a(1 - e^2) \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 l}} + \xi \cdot a \cdot \cos l + h \cdot \sin l, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

che rappresentano le corrispondenze fra le coordinate cartesiane del Geoide e le coordinate astronomiche l e λ , giacchè h , ξ ed η debbono esser considerate come delle funzioni, sperimentalmente determinabili, di l e λ . Dalle (11) si deduce facilmente l'espressione dell'elemento lineare geoidico in coordinate

astronomiche, e da questa scaturiscono delle interessanti proprietà delle linee meridiane (linee di eguale longitudine) e dei paralleli geoidici (linee di eguale latitudine): ma noi abbandoniamo tale argomento, come quello che non ha attinenza colle formole fondamentali che vogliamo stabilire.

Derivando rispetto all'arco s di una linea geoidica qualunque, caratterizzata dai valori che prende l'azimut astronomico A lungo di essa, tenendo conto delle (5), e ponendo per semplicità

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \text{sen}^2 l)^{3/2}}, \\ R_2 &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

dalle (11) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\cos \lambda \cdot \text{sen } l \cdot \cos A - \text{sen } \lambda \cdot \text{sen } A = \\ &= \frac{dl}{ds} (-R_1 \text{sen } l \cdot \cos \lambda - \xi \cdot a \cdot \cos l \cdot \cos \lambda - h \cdot \text{sen } l \cdot \cos A) + \\ &+ \frac{d\lambda}{ds} (-R_2 \text{sen } \lambda \cdot \cos l + \xi \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \text{sen } \lambda - \eta \cdot a \cdot \cos \lambda - h \cdot \cos l \cdot \text{sen } \lambda) - \\ &- \frac{d\xi}{ds} \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \cos \lambda - \frac{d\eta}{ds} \cdot a \cdot \text{sen } \lambda + \frac{dh}{ds} \cdot \cos l \cdot \cos \lambda, \\ \frac{dy}{ds} &= -\text{sen } \lambda \cdot \text{sen } l \cdot \cos A + \cos \lambda \cdot \text{sen } A = \\ &= \frac{dl}{ds} (-R_1 \text{sen } l \cdot \text{sen } \lambda - \xi \cdot a \cdot \cos l \cdot \text{sen } \lambda - h \cdot \text{sen } l \cdot \text{sen } \lambda) + \\ &+ \frac{d\lambda}{ds} (R_2 \cos l \cdot \cos \lambda - \xi \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \cos \lambda - \eta \cdot a \cdot \text{sen } \lambda + h \cdot \cos l \cdot \cos \lambda) - \\ &- \frac{d\xi}{ds} \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \text{sen } \lambda + \frac{d\eta}{ds} \cdot a \cdot \cos \lambda + \frac{dh}{ds} \cos l \cdot \text{sen } \lambda, \\ \frac{dz}{ds} &= \cos l \cdot \cos A = \\ &= \frac{dl}{ds} (R_1 \cos l - \xi \cdot a \cdot \text{sen } l + h \cdot \cos l) + \frac{d\xi}{ds} a \cdot \cos l + \frac{dh}{ds} \text{sen } l, \end{aligned}$$

d'onde si trae

$$\left. \begin{aligned} dl &= \frac{\cos A (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l)^{3/2}}{a (1 - e^2)} ds - d\xi - \frac{h}{a^2} \cdot \cos A \cdot ds - \eta \cdot d\alpha, \\ \cos l \cdot d\lambda &= \frac{\text{sen } A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} \cdot \text{sen } A \cdot ds + \xi \cdot d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

col porre, come dentro l'approssimazione delle (11) è permesso di fare,

$$dA = d\alpha = \frac{\text{tang } l \cdot \text{sen } A}{a} ds$$

nei termini dipendenti dalle attrazioni locali.

6.

Le equazioni differenziali (13) convengono ad una linea geoidica qualunque, ma per integrarle è necessario caratterizzare la natura della linea e, per il caso, qui studiato, di una geodetica basta per ciò aggiungere alle (13) una delle due equazioni fondamentali (6); scegliendo la seconda prenderemo dunque ad integrare le equazioni simultanee seguenti

$$\left. \begin{aligned} dl &= \frac{\cos A (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l)^{3/2}}{a(1 - e^2)} ds - d\xi - \frac{h}{a} \cos A \cdot ds - \eta \cdot d\alpha, \\ \cos l \cdot d\lambda &= \frac{\text{sen } A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} \text{sen } A \cdot ds + \xi \cdot d\alpha, \\ \text{cotg } l \cdot dA &= \frac{\text{sen } A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a} ds - d\eta - \frac{h}{a^2} \text{sen } A \cdot ds + \xi \cdot d\alpha, \\ dA &= \text{sen } l \cdot d\lambda, \end{aligned} \right\} (14)$$

delle quali la terza proviene dall'eliminazione di $d\lambda$ fra la seconda e l'ultima.

Indichiamo con φ' , ω' , α' la latitudine, la longitudine e l'azimut geografici lungo un arco di geodetica ellissoidica che parta dal punto $\varphi'_0 = l_0 + \xi_0$, $\omega'_0 = \lambda_0 + \eta_0 \text{sec } \varphi_0$ (che sull'ellissoide corrisponde geodeticamente, nel senso già indicato, all'origine $M(l_0, \lambda_0)$ della geodetica geoidica s_1 che si vuol considerare), sotto l'azimut $\alpha_0 = A_0 + \eta_0 \text{tang } \varphi_0$ (*) corrispondente all'azimut A_0 di partenza della s_1 e che sia in lunghezza uguale alla s_1 stessa, e poniamo in generale

$$\left. \begin{aligned} l &= \varphi' + \varepsilon_\varphi, \\ \lambda &= \omega' + \varepsilon_\omega, \\ A &= \alpha' + \varepsilon_\alpha, \end{aligned} \right\} (15)$$

intendendo che l , λ ed A da una parte, φ' , ω' ed α' dall'altra siano i valori

(*) È noto che $\eta \text{ tang } \varphi$ rappresenta l'influenza dell'attrazione locale nell'azimut.

delle coordinate corrispondenti ad un comune qualunque valore s degli archi di geodetica geoidica ed ellissoidica. Le quantità ε_φ , ε_ω , ε_α saranno dell'ordine delle attrazioni locali, dimodochè dentro la solita approssimazione, nelle già indicate notazioni degli elementi geodetici, potremo scrivere

$$\frac{\cos A (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l)^{3/2}}{a(1 - e^2)} = \frac{\cos \alpha'}{\rho'} - \frac{\text{sen} \alpha' \cdot \varepsilon_\alpha}{\rho'},$$

$$\frac{\text{sen} A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a \cdot \cos l} = \frac{\text{sen} \alpha'}{r'} + \frac{\cos \alpha' \cdot \varepsilon_\alpha}{r'} + \frac{\text{sen} \alpha' \cdot \text{tang} \varphi' \cdot \varepsilon_\varphi}{r'},$$

$$\frac{\text{sen} A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a \cdot \cotg l} = \frac{\text{sen} \alpha' \cdot \text{sen} \varphi'}{r'} + \frac{\cos \alpha' \cdot \text{sen} \varphi' \cdot \varepsilon_\alpha}{r'} + \frac{\text{sen} \alpha' \cdot \varepsilon_\varphi}{r' \cdot \cos \varphi'},$$

o più semplicemente:

$$\frac{\cos A (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l)^{3/2}}{a(1 - e^2)} ds = d\varphi' - \varepsilon_\alpha \cos \varphi' \cdot d\omega',$$

$$\frac{\text{sen} A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a \cdot \cos l} ds = d\omega' + \varepsilon_\alpha \sec \varphi' \cdot d\varphi' + \varepsilon_\varphi \sec \varphi' \cdot d\alpha',$$

$$\frac{\text{sen} A \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 l}}{a \cdot \cotg l} ds = d\alpha' + \varepsilon_\alpha \text{tang} \varphi' \cdot d\varphi' + \frac{\varepsilon_\varphi \cdot d\alpha'}{\text{sen} \varphi' \cdot \cos \varphi'}.$$

Per mezzo di questi sviluppi e delle corrispondenze (15) la prima e la terza delle relazioni (14) si trasformano facilmente nelle seguenti

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_\varphi &= -\frac{\varepsilon_\alpha \cos \varphi'}{\text{sen} \varphi'} d\alpha' - d\xi - \frac{h}{a^2} \cos \alpha' \cdot ds - \eta \cdot d\alpha', \\ d(\varepsilon_\alpha \cos \varphi') &= \frac{\varepsilon_\varphi}{\text{sen} \varphi'} d\alpha' - \left(d\eta + \frac{h}{a^2} \text{sen} \alpha' \cdot ds - \xi \cdot d\alpha' \right) \text{sen} \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

che, moltiplicate rispettivamente per $\cos \alpha'$ e per $\text{sen} \alpha' \cdot \text{sen} \varphi'$, e sommate membro a membro, danno:

$$\begin{aligned} \cos \alpha' \cdot d\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\varphi \text{sen} \alpha' \cdot d\alpha' + \text{sen} \alpha' \cdot \text{sen} \varphi' \cdot d(\varepsilon_\alpha \cos \varphi') + \frac{\varepsilon_\alpha \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha'}{\text{sen} \varphi'} &= \\ = -\cos \alpha' \cdot d\xi - \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen} \alpha' \cdot d\eta - \frac{h}{a^2} (1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') ds + \\ + \xi \cdot \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen} \alpha' \cdot d\alpha' - \eta \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha'. \end{aligned}$$

Il primo membro di questa equazione si riduce a una differenziale esatta, ossia a

$$d(\varepsilon_\alpha \cos \alpha') + d(\varepsilon_\alpha \cos \varphi' \cdot \text{sen} \varphi' \cdot \text{sen} \alpha')$$

osservando che, dentro l'approssimazione tenuta, è

$$d\varphi' = \cotg \varphi' \cdot \cotg \alpha' \cdot d\alpha'$$

e, per conseguenza,

$$d(\text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha') = \frac{\cos \alpha'}{\text{sen } \varphi'} d\alpha'; \quad (17)$$

porremo pertanto

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi \cos \alpha' + \varepsilon_\alpha \cos \varphi' \cdot \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' &= - \int (\cos \alpha' \cdot d\xi + \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot d\eta) - \\ - \frac{1}{a^2} \int h(1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') ds + \int (\xi \cdot \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' - \eta \cdot \cos \alpha') d\alpha' + C_1, \end{aligned} \right\} (18)$$

rappresentando con C_1 la costante di integrazione, da determinare poi per mezzo delle condizioni ai limiti degli integrali.

Analogamente se si sottraggono membro a membro le (16) dopo averle rispettivamente moltiplicate per $\text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi'$ e per $\cos \alpha'$ si trova, tenendo conto della precedente relazione approssimativa (17) ed integrando:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' - \varepsilon_\alpha \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' &= - \int (\text{sen } \alpha' \cdot d\xi - \cos \alpha' \cdot d\eta) \text{sen } \varphi' - \\ - \int (\eta \cdot \text{sen } \alpha' + \xi \cdot \cos \alpha') \text{sen } \varphi' \cdot d\alpha' + C_2. \end{aligned} \right\} (19)$$

Ora le (18) e (19), risolte rispetto alle nostre incognite ε_φ ed ε_α , danno:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') &= - \cos \alpha' \int (\cos \alpha' \cdot d\xi + \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot d\eta) - \\ &- \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \int (\text{sen } \alpha' \cdot d\xi - \cos \alpha' \cdot d\eta) \text{sen } \varphi' - \cos \alpha' \int (\eta \cdot \cos \alpha' - \xi \cdot \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha') d\alpha' - \\ &- \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \int (\eta \cdot \text{sen } \alpha' + \xi \cdot \cos \alpha') \text{sen } \varphi' \cdot d\alpha' + C_1 \cos \alpha' + C_2 \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' - \\ &- \frac{\cos \alpha'}{a^2} \int h(1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') ds, \\ \varepsilon_\alpha \cos \varphi' (1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') &= - \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \int (\cos \alpha' \cdot d\xi + \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot d\eta) + \\ &+ \cos \alpha' \int (\text{sen } \alpha' \cdot d\xi - \cos \alpha' \cdot d\eta) \text{sen } \varphi' - \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \int (\eta \cdot \cos \alpha' - \xi \cdot \text{sen}^2 \varphi' \cdot \text{sen } \alpha') d\alpha' + \\ &+ \cos \alpha' \int (\eta \cdot \text{sen } \alpha' + \xi \cdot \cos \alpha') \text{sen } \varphi' \cdot d\alpha' + C_1 \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' - C_2 \cos \alpha' - \\ &- \frac{\text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha'}{a^2} \int h(1 - \cos^2 \varphi' \cdot \text{sen}^2 \alpha') ds; \end{aligned}$$

ma lungo la geodetica ellissoidica s , cui le quantità ε_φ , ε_α si riferiscono, si ha

$$\frac{\cos \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha'}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi'}} = \text{costante} = \operatorname{sen} \beta, \tag{20}$$

essendo β un angolo ausiliario costante; quindi, ponendo per semplificare

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \beta \cdot \text{I} &= \int (\cos \alpha' \cdot d\xi + \operatorname{sen}^2 \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha' d\eta), \\ \cos^2 \beta \cdot \text{II} &= \int (\operatorname{sen} \alpha' \cdot d\xi - \cos \alpha' \cdot d\eta) \operatorname{sen} \varphi', \\ \cos^2 \beta \cdot \text{III} &= \int (\eta \cdot \cos \alpha' - \xi \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha) d\alpha', \\ \cos^2 \beta \cdot \text{IV} &= \int (\xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \varphi' \cdot d\alpha', \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

dentro l'approssimazione tenuta avremo:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= -\cos \alpha' \left(\text{I} + \text{III} + \int \frac{h}{a^2} ds \right) - \\ &\quad - \operatorname{sen} \alpha' \cdot \operatorname{sen} \varphi' (\text{II} + \text{IV}) + \frac{C_1 \cos \alpha' + C_2 \operatorname{sen} \alpha' \cdot \operatorname{sen} \varphi'}{\cos^2 \beta}, \\ \varepsilon_\alpha \cos \varphi' &= -\operatorname{sen} \alpha' \cdot \operatorname{sen} \varphi' \left(\text{I} + \text{III} + \int \frac{h}{a^2} ds \right) + \\ &\quad + \cos \alpha' (\text{II} + \text{IV}) + \frac{C_1 \operatorname{sen} \alpha' \cdot \operatorname{sen} \varphi' - C_2 \cos \alpha'}{\cos^2 \beta}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

7.

Per dedurre anche l'espressione analitica di ε_ω introduciamo nell'ultima delle (14) in luogo di dA e di $d\lambda$ i valori che per tali quantità si deducono differenziando le corrispondenze (15); avremo per tal guisa

$$d\omega' + d\varepsilon_\omega = \frac{d\alpha'}{\operatorname{sen} l} + \frac{d\varepsilon_\alpha}{\operatorname{sen} l} = \frac{d\alpha'}{\operatorname{sen} \varphi'} - \frac{\varepsilon_\varphi \cos \varphi' \cdot d\alpha'}{\operatorname{sen}^2 \varphi'} + \frac{d\varepsilon_\alpha}{\operatorname{sen} l},$$

d'onde, se si scambia, come più sopra, l con φ nel termine dipendente da ε_α e si tien conto della relazione ellissoidica fra $d\omega'$ e $d\alpha'$, si trae con facili trasformazioni

$$\varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_\alpha}{\operatorname{sen} \varphi'} + \int \frac{\cos \varphi'}{\operatorname{sen}^2 \varphi'} (\varepsilon_\alpha d\varphi' - \varepsilon_\varphi d\alpha') + C_3,$$

e, quindi, sostituendo ad ε_α , ε_φ le loro espressioni (22):

$$\varepsilon_\omega = \frac{\varepsilon_\alpha}{\text{sen } \varphi'} + \left. \begin{aligned} & \int \left(\text{I} + \text{III} + \int \frac{h}{a^2} ds \right) \frac{\cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha' - \text{sen } \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot d\varphi'}{\text{sen}^2 \varphi'} + \\ & + \int (\text{II} + \text{IV}) \frac{\cos \alpha' \cdot d\varphi' + \cos \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' \cdot d\alpha'}{\text{sen}^2 \varphi'} + \\ & + \int \frac{C_1 \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' - C_2 \cos \alpha'}{\text{sen}^2 \varphi' \cdot \cos^2 \beta} d\varphi' - \int \frac{C_1 \cos \alpha' + C_2 \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi'}{\text{sen}^2 \varphi' \cdot \cos^2 \beta} \cdot \cos \varphi' \cdot d\alpha' + C_3. \end{aligned} \right\} (23)$$

Si ha per altro identicamente

$$\left. \begin{aligned} d(\cos \varphi' \cdot \text{sen } \alpha') &= \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha' - \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' \cdot d\varphi', \\ -d(\cotg \varphi' \cdot \cos \alpha') &= \cotg \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' \cdot d\alpha' + \frac{\cos \alpha'}{\text{sen}^2 \varphi'} d\varphi', \\ \int (\text{II} + \text{IV}) \cdot d(\cotg \varphi' \cdot \cos \alpha') &= (\text{II} + \text{IV}) \cotg \varphi' \cdot \cos \alpha' - \\ &- \int \cotg \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d(\text{II} + \text{IV}) + C_4, \end{aligned} \right\} (24)$$

e, dentro l'approssimazione tenuta nei paragrafi precedenti, si può, nei termini dipendenti dalle attrazioni locali, ammettere che sia

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' \cdot \text{sen } \alpha' &= \text{sen } \beta, \\ d(\cos \varphi' \cdot \text{sen } \alpha') &= 0; \end{aligned} \right\} (25)$$

ponendo ancora

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \beta \cdot \text{V} &= \int (\text{sen } \alpha' \cdot d\xi - \cos \alpha' \cdot d\eta) \cos \varphi' \cdot \cos \alpha', \\ \cos^2 \beta \cdot \text{VI} &= \int (\xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \text{sen } \alpha') \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha', \end{aligned} \right\} (26)$$

è facile quindi trasformare l'equazione (24) nella seguente

$$\varepsilon_\omega \cos \varphi' = -\text{sen } \alpha' \left(\text{I} + \text{III} + \int \frac{h}{a^2} ds \right) + \cos \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' (\text{II} + \text{IV}) + \cos \varphi' (\text{V} + \text{VI}) + \left. \begin{aligned} & + (C_3 - C_4) \cos \varphi' + \frac{C_1 \text{sen } \alpha' \cdot \text{sen } \varphi' - C_2 \cos \alpha'}{\cos^2 \beta \cdot \text{sen } \varphi'} + C_2 \cos \varphi' \int \frac{ds}{a \cdot \text{sen}^2 \varphi'}, \end{aligned} \right\} (27)$$

che dà l'espressione di ε_ω cercata.

8.

Per rendere esplicito il significato analitico degli integrali I, II e V che dipendono da $d\xi$ e da $d\eta$ introduciamo le relazioni fra le componenti ξ ed η

dell'attrazione locale nelle due direzioni cardinali nord-sud ed est-ovest e le componenti $\theta_\alpha, \theta_{90^\circ+\alpha}$ negli azimut α e $\alpha + 90^\circ$. Tali relazioni, che si deducono dalle precedenti formole (9) e (10), sono

$$\left. \begin{aligned} \theta_\alpha &= \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha, \\ \theta_{90^\circ+\alpha} &= -\xi \cdot \operatorname{sen} \alpha + \eta \cdot \cos \alpha, \\ \xi &= \theta_\alpha \cdot \cos \alpha - \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot \operatorname{sen} \alpha, \\ \eta &= \theta_\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

d'onde si deduce:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= (d\theta_\alpha - \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot d\alpha) \cos \alpha - (d\theta_{90^\circ+\alpha} + \theta_\alpha \cdot d\alpha) \operatorname{sen} \alpha, \\ d\eta &= (d\theta_\alpha - \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot d\alpha) \operatorname{sen} \alpha + (d\theta_{90^\circ+\alpha} + \theta_\alpha \cdot d\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Se si aggiungono le notazioni

$$\left. \begin{aligned} dX &= d\theta_\alpha - \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot d\alpha, \\ dY &= d\theta_{90^\circ+\alpha} + \theta_\alpha \cdot d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

e si sostituiscono nelle (21) e (26) a $d\xi$ e $d\eta$ le loro espressioni (29) colla solita avvertenza sulle quantità da trascurare, si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta \cdot I &= -\operatorname{sen} \beta \int \cos \alpha' \cdot \cos \varphi' \cdot dY + \cos^2 \beta \int dX, \\ \cos^2 \beta \cdot II &= -\int \operatorname{sen} \varphi' \cdot dY, \\ \cos^2 \beta \cdot V &= -\int \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot dY, \end{aligned}$$

ove conviene però introdurre come unica variabile, in luogo di φ' ed α' , l'arco s della geodetica ellissoidica alla quale tutte queste equazioni appartengono, o, meglio, l'arco sferico χ che corrisponde ad s nel noto triangolo sferico ausiliario Besseliano, definito dalla formula

$$\cos u \cdot \operatorname{sen} \alpha = \text{costante},$$

in cui u rappresenta la *latitudine ridotta*. Tale triangolo fornisce le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha' &= \cos \varphi'_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha'_0 + e^2 \{ \dots \} = \operatorname{sen} \beta + e^2 \{ \dots \}, \\ \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' &= -\operatorname{sen} \chi \cdot \operatorname{sen} \varphi'_0 + \cos \chi \cdot \cos \varphi'_0 \cos \alpha'_0 + e^2 \{ \dots \}, \\ \operatorname{sen} \varphi' &= \cos \chi \cdot \operatorname{sen} \varphi'_0 + \operatorname{sen} \chi \cdot \cos \varphi'_0 \cos \alpha'_0 + e^2 \{ \dots \}; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

così avremo

$$\cos^2 \beta. I = \operatorname{sen} \varphi'_0 \operatorname{sen} \beta \int \operatorname{sen} \chi. dY - \operatorname{sen} \beta. \cos \varphi'_0 \cos \alpha'_0 \int \cos \chi. dY + \cos^2 \beta \int dX,$$

$$\cos^2 \beta. II = - \operatorname{sen} \varphi'_0 \int \cos \chi. dY - \cos \varphi'_0 \cos \alpha'_0 \int \operatorname{sen} \chi. dY,$$

$$\cos^2 \beta. V = \operatorname{sen} \varphi'_0 \int \operatorname{sen} \chi. dY - \cos \varphi'_0 \cos \alpha'_0 \int \cos \chi. dY,$$

e, sostituendo nelle (22) e (27), si otterrà, dopo qualche trasformazione fatta tenendo conto delle (31):

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta. \varepsilon_\varphi &= \cos^2 \beta. \operatorname{sen} \alpha' \left\{ \operatorname{sen} \chi \int \operatorname{sen} \chi. dY + \cos \chi \int \cos \chi. dY \right\} - \\ &\quad - \cos \alpha' \int (\eta. \cos \alpha' - \xi. \operatorname{sen}^2 \varphi'. \operatorname{sen} \alpha') d\alpha' - \\ &\quad - \operatorname{sen} \varphi'. \operatorname{sen} \alpha' \int (\xi. \cos \alpha' + \eta. \operatorname{sen} \alpha') \operatorname{sen} \varphi'. d\alpha' + \\ &\quad + \cos^2 \beta. \cos \alpha' \int \left(\frac{h}{a^2} ds + dX \right) + C_1 \cos \alpha' + C_2 \operatorname{sen} \alpha'. \operatorname{sen} \varphi', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta. \cos \varphi'. \varepsilon_\omega &= - \cos^2 \beta. \cos \alpha' \left\{ \operatorname{sen} \chi \int \operatorname{sen} \chi. dY + \cos \chi \int \cos \chi. dY \right\} - \\ &\quad - \operatorname{sen} \alpha' \int (\eta. \cos \alpha' - \xi. \operatorname{sen}^2 \varphi'. \operatorname{sen} \alpha') d\alpha' - \\ &\quad - \operatorname{sen} \varphi'. \cos \alpha' \int (\xi. \cos \alpha' + \eta. \operatorname{sen} \alpha') \operatorname{sen} \varphi'. d\alpha' + \\ &\quad + \cos \varphi' \int (\xi. \cos \alpha' + \eta. \operatorname{sen} \alpha') \cos \varphi'. \cos \alpha'. d\alpha' + \\ &\quad + \cos^2 \beta. \operatorname{sen} \alpha' \int \left(\frac{h}{a^2} ds + dX \right) - C_2 \cos \varphi'. \cos^2 \beta \int \frac{ds}{u. \operatorname{sen}^2 \varphi'} + \\ &\quad + \frac{C_1 \operatorname{sen} \varphi'. \operatorname{sen} \alpha' - C_2 \cos \alpha'}{\operatorname{sen} \varphi'} + (C_3 - C_4) \cos \varphi'. \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta. \cos \varphi'. \varepsilon_\alpha &= - \cos^2 \beta. \cos \alpha'. \operatorname{sen} \varphi' \left\{ \operatorname{sen} \chi \int \operatorname{sen} \chi. dY + \cos \chi \int \cos \chi. dY \right\} + \\ &\quad + \cos^2 \beta. \cos \varphi' \left\{ \operatorname{sen} \chi \int \cos \chi. dY - \cos \chi \int \operatorname{sen} \chi. dY \right\} - \\ &\quad - \operatorname{sen} \varphi'. \operatorname{sen} \alpha' \int (\eta. \cos \alpha' - \xi. \operatorname{sen}^2 \varphi'. \operatorname{sen} \alpha') d\alpha' + \\ &\quad + \cos \alpha' \int (\xi. \cos \alpha' + \eta. \operatorname{sen} \alpha') \operatorname{sen} \varphi'. d\alpha' - \\ &\quad - \cos^2 \beta. \operatorname{sen} \varphi'. \operatorname{sen} \alpha' \int \left(\frac{h}{a^2} ds + dX \right) + C_1 \operatorname{sen} \alpha'. \operatorname{sen} \varphi' - C_2 \cos \alpha'. \end{aligned}$$

9.

Le integrazioni accennate non possono essere eseguite in generale, giacchè, *a priori*, ci è affatto sconosciuta la relazione fra χ e l'attrazione locale lungo la geodetica s ; ma nel caso in cui l'arco s sia di lunghezza limitata, per modo che le quantità $\frac{s}{a}$ ed χ possano esser considerate come piccole del 1° ordine, dentro l'approssimazione del *secondo ordine relativo* (*), ossia dell'ordine di $\frac{\xi \cdot s}{a}$ e di $\frac{\eta \cdot s}{a}$, nelle formule precedenti si può evidentemente porre

$$\left. \begin{aligned} \cos \chi \int \cos \chi \cdot dY + \operatorname{sen} \chi \int \operatorname{sen} \chi \cdot dY &= \int dY + \frac{s}{a^2} \int s \cdot dY = \int dY + \dots, \\ \operatorname{sen} \chi \int \cos \chi \cdot dY - \cos \chi \int \operatorname{sen} \chi \cdot dY &= \frac{s}{a} \int dY - \frac{1}{a} \int s \cdot dY = \frac{1}{a} \int ds \int dY, \end{aligned} \right\} (32)$$

giacchè la differenza fra $\frac{s}{a}$ e χ è dell'ordine di $\frac{e^2 \cdot s}{a}$. Ora dalle (30) si trae

$$\left. \begin{aligned} \int dX &= \theta_\alpha - \int \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot d\alpha' + C_s = \xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha' - \int \theta_{90^\circ+\alpha} \cdot d\alpha' + C_s, \\ \int dY &= \theta_{90^\circ+\alpha} + \int \theta_\alpha \cdot d\alpha' + C_e = -\xi \cdot \operatorname{sen} \alpha' + \eta \cdot \cos \alpha' + \int \theta_\alpha \cdot d\alpha' + C_e; \end{aligned} \right\} (33)$$

inoltre, dentro l'approssimazione del secondo ordine relativo suddetto, si ha

$$\left. \begin{aligned} \int (\eta \cdot \cos \alpha' - \xi \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha') d\alpha' &= \cos \alpha' \int \eta \cdot d\alpha' - \operatorname{sen} \alpha' \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi' \int \xi \cdot d\alpha', \\ \int (\xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha') \operatorname{sen} \varphi' \cdot d\alpha' &= \operatorname{sen} \varphi' \cdot \cos \alpha' \int \xi \cdot d\alpha' + \operatorname{sen} \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \int \eta \cdot d\alpha', \\ \int (\xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \operatorname{sen} \alpha') \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' \cdot d\alpha' &= \cos \varphi' \cdot \cos^2 \alpha' \int \xi \cdot d\alpha' + \operatorname{sen} \alpha' \cdot \cos \alpha' \cdot \cos \varphi' \int \eta \cdot d\alpha', \end{aligned} \right\} (34)$$

perchè le variazioni di α' e di φ' lungo la geodetica s sono dell'ordine di $\frac{s}{a}$. Finalmente per determinare le varie costanti di integrazione immaginiamo che tutte le integrazioni sieno estese fra i limiti corrispondenti agli estremi del-

(*) Geodeticamente parlando debbono esser considerate come piccole del 1° ordine relativo le grandezze analoghe ad $\frac{s}{a}$ il cui valore cresce col crescere della distanza, e del 1° ordine assoluto quelle analoghe ad e^2 . È ovvio il motivo di tale distinzione.

l'arco s della geodetica ellissoidica, e ricordiamo che all'origine di questo le coordinate ellissoidiche sono per ipotesi

$$\varphi'_0 = l_0 + \xi_0, \quad \omega'_0 = \lambda_0 + \eta_0 \sec \varphi'_0, \quad \alpha'_0 = A_0 + \eta_0 \tan \varphi'_0,$$

per modo che le deviazioni $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\omega, \varepsilon_\alpha$ prendono quivi rispettivamente i valori $-\xi_0, -\eta_0 \sec \varphi'_0, -\eta_0 \tan \varphi'_0$; le formule (18) e (19) danno in tal caso

$$C_1 = -\xi_0 \cos \alpha'_0 - \eta_0 \sec^2 \varphi'_0 \sin \alpha'_0, \\ C_2 = -\xi_0 \sin \alpha'_0 \sin \varphi'_0 + \eta_0 \sin \varphi'_0 \cos \alpha'_0,$$

d'onde si vede che nel formare le quantità

$$C_1 \cos \alpha' + C_2 \sin \varphi' \cdot \sin \alpha', \\ C_1 \sin \alpha' \cdot \sin \varphi' - C_2 \cos \alpha',$$

dentro l'approssimazione tenuta si può porre (*):

$$\alpha' = \alpha'_0 + \frac{s \cdot \tan \varphi'_0 \sin \alpha'_0}{a}, \quad \varphi' = \varphi'_0 + \frac{s \cdot \cos \alpha'_0}{a}, \\ \cos \alpha' = \cos \alpha'_0 - \frac{s}{a} \tan \varphi'_0 \sin^2 \alpha'_0, \\ \sin \varphi' = \sin \varphi'_0 + \frac{s}{a} \cos \alpha'_0 \cos \varphi'_0, \\ \sin \alpha' = \sin \alpha'_0 + \frac{s}{a} \tan \varphi'_0 \sin \alpha'_0 \cos \alpha'_0, \\ \cos^2 \alpha'_0 + \sin^2 \alpha'_0 \sin^2 \varphi'_0 = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta.$$

Con tali avvertenze si deduce

$$C_1 \cos \alpha' + C_2 \sin \varphi' \cdot \sin \alpha' = - \left(\xi_0 - \frac{\eta_0 s}{a} \tan \varphi'_0 \sin \alpha'_0 \right) \cos^2 \beta, \\ C_1 \sin \alpha' \cdot \sin \varphi' - C_2 \cos \alpha' = - \left(\eta_0 \sin \varphi'_0 + \frac{\xi_0 s}{a} \frac{\sin \alpha'_0}{\cos \varphi'_0} \right) \cos^2 \beta,$$

(*) È noto che si ha in generale (*serie di Legendre*):

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{s \cdot \sin \alpha_0 \sin \varphi_0}{r_0 \sin 1''} + \frac{s^2 \cdot \sin 2 \alpha_0 (1 + \sin^2 \varphi_0)}{4 \cdot r_0^2 \sin 1''} + 3^\circ \text{ ordine} \\ \varphi = \varphi_0 + \frac{s \cdot \cos \alpha_0}{r_0 \cdot \sin 1''} - \frac{s^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \sin \varphi_0}{2 r_0^2 \sin 1''} + 3^\circ \text{ ordine.}$$

Annali di Matematica, tomo XIV.

e, analogamente, dalle formule (23), (24) e (33) si ricava:

$$C_3 = C_4 = 0,$$

$$C_5 = -(\theta_\alpha)_0 = -\xi_0 \cos \alpha'_0 - \eta_0 \sin \alpha'_0,$$

$$C_6 = -(\theta_{90^\circ+\alpha})_0 = \xi_0 \sin \alpha'_0 - \eta_0 \cos \alpha'_0.$$

Sostituendo nelle equazioni finali del paragrafo precedente si trova

$$l - \varphi' = \varepsilon_\varphi = -\xi_0 - \xi + \xi_0 \cos(\alpha' - \alpha'_0) + \frac{\eta_0 s}{a} \operatorname{tang} \varphi'_0 \sin \alpha'_0 - \eta_0 \sin(\alpha' - \alpha'_0) +$$

$$+ \sin \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\alpha d\alpha' + \cos \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_{90^\circ+\alpha} d\alpha' - \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \eta \cdot d\alpha' - \cos \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds,$$

$$(\lambda - \omega') \cos \varphi' = \cos \varphi' \cdot \varepsilon_\omega = -\eta_0 - \eta + \xi_0 \sin(\alpha' - \alpha'_0) + \eta_0 \cos(\alpha' - \alpha'_0) - \frac{\xi_0 s}{a} \sin \alpha'_0 \operatorname{tang} \varphi'_0 +$$

$$+ \sin \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_{90^\circ+\alpha} d\alpha' - \cos \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\alpha d\alpha' + \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \xi \cdot d\alpha' - \sin \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds,$$

$$(A - \alpha') \cos \varphi' = \cos \varphi' \cdot \varepsilon_\alpha = -\eta_0 \sin \varphi'_0 - \eta \cdot \sin \varphi' + \eta_0 \sin \varphi' \cdot \cos(\alpha' - \alpha'_0) +$$

$$+ \xi_0 \sin \varphi' \cdot \sin(\alpha' - \alpha'_0) - \frac{\xi_0 s}{a} \frac{\sin \alpha'_0}{\cos \varphi'_0} - \sin \varphi' \cdot \cos \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\alpha d\alpha' +$$

$$+ \sin \varphi' \cdot \sin \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_{90^\circ+\alpha} d\alpha' + \sin \varphi' \int \xi \cdot d\alpha' + \cos \varphi' \int_0^s \frac{ds}{a} \int_0^s dY -$$

$$- \sin \varphi' \cdot \sin \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds,$$

e queste relazioni si riducono alla loro forma più semplice osservando che dentro l'approssimazione tenuta nel dedurle si può porre in esse, come del resto abbiamo già implicitamente fatto:

$$\alpha' - \alpha'_0 = \frac{s \cdot \operatorname{tang} \varphi'_0 \sin \alpha'_0}{a},$$

$$\cos(\alpha' - \alpha'_0) = 1, \quad \sin(\alpha' - \alpha'_0) = \alpha' - \alpha'_0,$$

$$\int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_\alpha d\alpha' = \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} (\xi \cdot \cos \alpha' + \eta \cdot \sin \alpha') d\alpha' = \cos \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \xi \cdot d\alpha' + \sin \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \eta \cdot d\alpha',$$

$$\int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \theta_{90^\circ+\alpha} d\alpha' = - \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} (\xi \cdot \sin \alpha' - \eta \cdot \cos \alpha') d\alpha' = - \sin \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \xi \cdot d\alpha' + \cos \alpha' \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \eta \cdot d\alpha',$$

$$\int_0^s \frac{ds}{a} \int_0^s dY = \int_0^s \theta_{90^\circ+\alpha} \frac{ds}{a} - (\theta_{90^\circ+\alpha})_0 \int_0^s \frac{ds}{a} + \int_0^s \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \frac{\theta_\alpha \cdot ds \cdot d\alpha'}{a} = \int_0^s \theta_{90^\circ+\alpha} \frac{ds}{a} - \frac{s(\theta_{90^\circ+\alpha})_0}{a} + 3^\circ \text{ ordine};$$

per tal guisa si ottiene con facili trasformazioni

$$\left. \begin{aligned} l - \varphi' &= -\xi - \cos \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ (\lambda - \omega') \cos \varphi' &= -\eta - \operatorname{sen} \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ (A - \alpha') \cos \varphi' &= -\eta \cdot \operatorname{sen} \varphi' + \cos \varphi' \int_0^s \theta_{90'+\alpha} \frac{ds}{a} - \operatorname{sen} \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \end{aligned} \right\} (35)$$

e queste sono le equazioni fondamentali della Geodesia geoidica, giacchè danno in funzione di quantità sperimentalmente determinabili (come sono ξ , η ed h) le differenze fra le coordinate astronomiche dei punti di una geodetica geoidica, e le corrispondenti coordinate ellissoidiche, calcolate come se la geodetica appartenesse all'ellissoide di riferimento.

10.

Rappresentando con L e Λ le coordinate astronomiche del punto del Geoide che geodeticamente corrisponde all'estremo φ' , ω' dell'arco s di geodetica dell'ellissoide, ossia che è situato sulla normale ellissoidica condotta per questo estremo, e con A' l'azimut astronomico che, corretto dall'influenza dell'attrazione locale, è eguale all'azimut ellissoidico α' , le (35) possono anche scriversi come segue

$$\left. \begin{aligned} l - L &= -\cos \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ \lambda - \Lambda &= -\frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\cos \varphi'} \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \\ A - A' &= \frac{1}{a} \int_0^s \theta_{90'+\alpha} \cdot ds - \operatorname{tang} \varphi' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \int_0^s \frac{h}{a^2} ds, \end{aligned} \right\} (36)$$

sotto la qual forma danno gli errori che si commettono nel trasportare la latitudine, la longitudine e l'azimut lungo una geodetica geoidica se si considera questa come ellissoidica, ma si tien conto a parte (come si suole nel calcolo delle costanti terrestri) dell'influenza che hanno le attrazioni locali negli elementi del punto di partenza. *Per le latitudini e le longitudini così calcolate tali errori non dipendono che dall'elevazione dei punti geoidici al disopra del-*

l'ellissoide di riferimento, ma per l'azimut influiscono anche le deviazioni fra i piani osculatori della geodetica geoidica e quelli della geodetica ellissoidica corrispondenti, deviazioni che sono prossimamente misurate dalle componenti

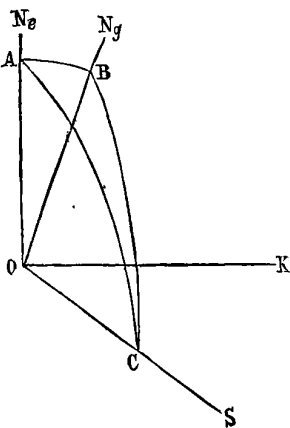


Fig. 1.

$\theta_{90^\circ + \alpha}$ delle attrazioni locali negli azimut $90^\circ + \alpha$. Ed invero sia N_e (v. figura annessa) la normale ellissoidica ed N_g la verticale di un punto qualunque del Geoide, OS la direzione di un elemento di geodetica ellissoidica, e OK la traccia del piano $N_e O N_g$ sul piano tangente all'ellissoide; nel triangolo sferico ABC corrispondente al triedro $N_e N_g S$ si ha evidentemente $c = \theta$ e $b = 90^\circ$, e l'angolo A è la differenza fra l'azimut ψ del piano AOB nel quale agisce l'attrazione locale e l'azimut α della geodetica S ; finalmente l'angolo $C = \mu$, dentro l'approssimazione delle (36), rappresenta appunto la deviazione suddetta per una delle coppie di piani osculatori corrispondenti: ora tale triangolo dà

ossia

$$\text{tang } \mu = \text{tang } \theta \cdot \text{sen}(\psi - \alpha),$$

$$\mu = \theta \cdot \text{sen}(\psi - \alpha) = -\theta_{90^\circ + \alpha}, \tag{37}$$

come abbiamo sopra enunciato.

Le relazioni (36) determinano ancora le correzioni che debbono esser fatte all'azimut e alla lunghezza di un arco di geodetica geoidica per ridurlo all'arco di geodetica ellissoidica corrispondente, che corre cioè fra i punti dell'ellissoide che geodeticamente corrispondono agli estremi dell'arco geoidico. Le espressioni analitiche di tali correzioni si ottengono dalle formule seguenti

$$\delta \Delta \varphi_{s, \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot \delta s}{\rho} - \frac{s \cdot \text{sen } \alpha \cdot \delta \alpha}{\rho},$$

$$\delta \Delta \omega_{s, \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \delta s}{r} + \frac{s \cdot \cos \alpha \cdot \delta \alpha}{r},$$

che sono approssimate fino al second'ordine inclusivamente (*), e nelle quali le quantità α , r e ρ si riferiscono all'estremo di arrivo delle geodetica s e $\delta \Delta \varphi_{s, \alpha}$,

(*) Queste formule si deducono differenziando rispetto ad s e ad α le note serie di LEGENDRE, in parte già sopra citate in nota, ed introducendo, per mezzo delle serie stesse, in luogo degli elementi del punto iniziale φ_0, ω_0 quelli del punto di arrivo.

$\delta\Delta\omega_{s,\alpha}$ rappresentano le variazioni che subiscono le differenze di latitudine e di longitudine fra gli estremi di un arco di geodetica ellissoidica se l'azimut iniziale e la lunghezza della geodetica prendono degli aumenti $\delta\alpha$ e δs piccolissimi. Quantunque tali relazioni appartengano in realtà all'ellissoide, dentro l'approssimazione qui tenuta sono applicabili anche al Geoide; ponendo quindi

$$\delta\Delta\varphi_{s,\alpha} = l - L, \quad \delta\Delta\omega_{s,\alpha} = \lambda - \Lambda,$$

si trova

$$\left. \begin{aligned} \delta s &= - \int_0^s \frac{h}{a} ds, \\ \delta\alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

d'onde si conclude che *una geodetica ellissoidica differisce dalla geodetica geoidica corrispondente per $\int_0^s \frac{h}{a} ds$ in lunghezza e per $n_0 \text{tang} l_0$ in orientamento.*

È importante il notare che tutte le formule precedenti in pratica non sono applicabili che al caso in cui la geodetica geoidica s sia stata misurata direttamente (*base geodetica*) o sia uno dei lati elementari di una triangolazione, giacchè i grandi archi di una geodetica non possono essere calcolati che per mezzo di una rete di triangoli compensati e risolti come ellissoidici, e come se ad un ellissoide la geodetica appartenesse, dimodochè rimane solo da tener conto delle correzioni da farsi agli elementi osservati della triangolazione per ridurli all'ellissoide di riferimento.

Dal confronto fra le basi geodetiche, fatto per mezzo delle triangolazioni interposte, scaturisce uno dei varii argomenti che militano contro le conclusioni cui conduce il calcolo delle onde geoidiche fatto a priori colla teorica dell'attrazione Newtoniana, immaginando che le densità siano equabilmente distribuite nell'interno della terra e tenendo conto soltanto delle scabrosità visibili della crosta e degli avvallamenti marini. È noto infatti che le differenze fra i valori continentali di h così calcolati e quelli marini raggiungono parecchie centinaia di metri, perlochè le discordanze fra le basi misurate sulle coste e quelle misurate nelle parti centrali dei continenti dovrebbero essere molto rilevanti e molto maggiori delle massime constatate. *L'estrema piccolezza di queste discordanze tende quindi, come le altre analoghe determinazioni astronomico-geodetiche, a far supporre che le ondulazioni continentali del geoide sieno molto piccole, e che lungo ciascun raggio vettore della terra vi sia una specie di compensazione nella distribuzione della massa.*

11.

L'azimut geoidico A_0 che abbiamo introdotto in calcolo nei paragrafi precedenti, e che caratterizza la geodetica geoidica s , data la sua origine, non può essere direttamente osservato: in sua vece si considera, come è noto, l'azimut nel punto $s = 0$ della sezione verticale corrispondente ad s , ossia che passa per l'altro estremo di quest'arco, e si calcola quindi la differenza fra tale azimut ed A_0 considerando il Geoide come confuso coll'ellissoide di riferimento. Si conoscono, è vero, delle formole di riduzione anche pel caso di una superficie qualunque, ma in queste compariscono i raggi di curvatura principali della superficie, i quali, a priori, per il caso del Geoide sono ignoti, e che nelle piccole ondulazioni locali variano rapidamente da un punto ad un altro. Teoreticamente parlando interessa quindi di studiare l'influenza che hanno le attrazioni locali e le ondulazioni geoidiche in questa riduzione (*).

Sia pertanto $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto geoidico qualunque di latitudine l_0 , da cui partano la geodetica AB sotto l'azimut A_0 e la corrispondente sezione verticale sotto l'azimut $A_0 + \delta A = A_1$; l'equazione del piano verticale in A che passa per B sarà della forma

$$M_1(x_0 - X) + M_2(y_0 - Y) + M_3(z_0 - Z) = 0, \tag{39}$$

essendo X, Y, Z le coordinate correnti (che debbono potersi identificare colle coordinate x_1, y_1, z_1 del punto B), ed M_1, M_2, M_3 i coefficienti angolari del piano, che sono proporzionali ai coseni degli angoli formati cogli assi da una perpendicolare al piano stesso. L'origine delle longitudini essendo arbitraria, supponiamo che esse siano contate a partire dal piano meridiano del punto A ; ciò posto, sia sulla cosiddetta sfera celeste (rappresentata in proiezione nella annessa figura 2) O lo Zenit del punto A , T quello di B , e siano P, M, E, K rispettivamente i punti che individuano le direzioni degli assi coordinati delle z, x, y e la direzione di una perpendicolare al piano verticale considerato; evidentemente sarà

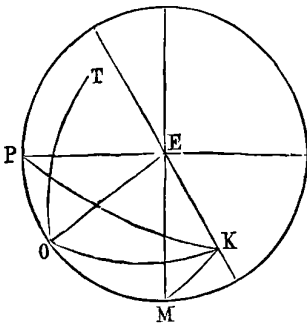


Fig. 2.

$$\begin{aligned} \text{arco } OM &= l_0, & \text{arco } OK &= 90^\circ, & \text{arco } OE &= 90^\circ, \\ \text{angolo } POK &= 90^\circ + A_1, & \text{angolo } EOK &= A_1, \end{aligned}$$

(*) Praticamente gli azimut osservati si riferiscono sempre a punti molto prossimi e si può ammettere senz'altro che la geodetica che riunisce questi punti si confonda coll'arco di sezione normale corrispondente.

ed i tre archi MK , EK , PK rappresenteranno gli angoli K_x , K_y , K_z che la suddetta perpendicolare fa cogli assi coordinati. Ora i triangoli sferici MOK , POK , EOK danno

$$\begin{aligned}\cos K_x &= \text{sen } l_0 \text{sen } A_1, \\ \cos K_y &= \cos A_1, \\ \cos K_z &= -\cos l_0 \text{sen } A_1;\end{aligned}$$

quindi dalla precedente equazione (39) si trae la relazione

$$\text{sen } l_0 \text{sen } A_1(x_0 - x_1) + \cos A_1(y_0 - y_1) - \cos l_0 \text{sen } A_1(z_0 - z_1) = 0, \quad (40)$$

che determina A_1 .

Per introdurre in luogo delle coordinate cartesiane le coordinate astronomiche dei punti $A(l_0, 0)$, $B(l_1, \lambda_1)$ abbiamo le corrispondenze (11), che possiamo anche scrivere come segue senza alterarne l'approssimazione:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 l}} \cos l \cdot \cos \lambda - \xi \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \cos \lambda - \eta \cdot a \cdot \text{sen } \lambda, \\ y &= \frac{a+h}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 l}} \cos l \cdot \text{sen } \lambda - \xi \cdot a \cdot \text{sen } l \cdot \text{sen } \lambda + \eta \cdot a \cdot \cos \lambda, \\ z &= \frac{(a+h)(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 l}} \text{sen } l + \xi \cdot a \cdot \cos l + \eta \cdot \text{sen } l.\end{aligned}$$

Sostituendo nella (40) e trascurando al solito i termini di secondo ordine rispetto ad h , ξ ed η si trova

$$\left. \begin{aligned}\text{sen } A_1 \left\{ \text{sen } l_0 \cos l_1 \cos \lambda_1 - \text{sen } l_1 \cos l_0 (1 - e^2) - e^2 \text{sen } l_0 \cos l_0 \frac{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 l}}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 l_0}} \right\} + \\ + \cos A_1 \cos l_1 \text{sen } \lambda_1 + \xi_0 \text{sen } A_1 - \eta_0 \cos A_1 - \\ - \xi_1 (\text{sen } l_0 \text{sen } l_1 \cos \lambda_1 \text{sen } A_1 + \text{sen } l_1 \text{sen } \lambda_1 \cos A_1 + \cos l_0 \cos l_1 \text{sen } A_1) - \\ - \eta_1 (\text{sen } l_0 \text{sen } \lambda_1 \text{sen } A_1 - \cos \lambda_1 \cos A_1) = 0.\end{aligned} \right\} \quad (41)$$

La parte del 1° membro che dipende dalle attrazioni locali si riduce a forma semplicissima se si osserva che, trattandosi di una correzione dell'ordine di ξ e di η , dentro la solita approssimazione vi si può supporre

$$\cos l_1 \text{sen } A'_1 = \cos l_0 \text{sen } A_0,$$

essendo A'_1 l'azimut in B della geodetica AB , e ciò equivale a calcolare i coefficienti di ξ_1 ed η_1 nella (41) come se il Geoide fosse una sfera e, per conseguenza, a considerare gli elementi $90^\circ - l_1$, $90^\circ - l_0$, λ_1 , A_0 , A'_1 (o invece

di A_0, A'_1 gli azimut della sezione verticale AB che loro corrispondono) come appartenenti ad un triangolo sferico, ponendo:

$$\begin{aligned} \cos \lambda_1 \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} l_1 + \cos A_1 \operatorname{sen} \lambda_1 \operatorname{sen} l_1 + \cos l_0 \operatorname{sen} A_1 \cos l_1 &= \operatorname{sen} A'_1, \\ \cos \lambda_1 \cos A_1 - \operatorname{sen} l_0 \operatorname{sen} \lambda_1 \operatorname{sen} A_1 &= \cos A'_1. \end{aligned}$$

Così la (41) dà

$$\operatorname{sen} A_1 \left(\operatorname{sen} l_0 \cos l_1 \cos \lambda_1 - \cos l_0 \operatorname{sen} l_1 (1 - e^2) - e^2 \operatorname{sen} l_0 \cos l_0 \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 l}}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 l_0}} \right) + \left. \begin{aligned} &+ \cos A_1 \cos l_1 \operatorname{sen} \lambda_1 - \xi_1 \operatorname{sen} A'_1 + \xi_0 \operatorname{sen} A_1 + \eta_1 \cos A'_1 - \eta_0 \cos A_1 = 0, \end{aligned} \right\} (42)$$

d'onde si deduce con facili trasformazioni

$$\operatorname{sen} A_1 \left\{ \operatorname{sen} U_0 \cos U_1 \cos \lambda_1 - \operatorname{sen} U_1 \cos U_0 + e^2 \cos U_0 (\operatorname{sen} U_1 - \operatorname{sen} U_0) \right\} + \left. \begin{aligned} &+ \cos A_1 \cos U_1 \operatorname{sen} \lambda_1 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U_0} - \xi_1 \operatorname{sen} A'_1 + \xi_0 \operatorname{sen} A_1 + \eta_1 \cos A'_1 - \eta_0 \cos A_1 = 0 \end{aligned} \right\} (43)$$

introducendo le latitudini ridotte U_0 ed U_1 corrispondenti alle latitudini geoidiche l_0 ed l_1 e definite dalla nota relazione

$$\operatorname{tang} U = \operatorname{tang} l \sqrt{1 - e^2}.$$

12.

La formula analoga alla (42), che dà invece l'azimut geodetico A_0 si deduce dalla equazione della geodetica geoidica s , equazione che si ottiene senza difficoltà dalla relazione

$$\cos u' \operatorname{sen} \alpha' = \text{costante} \quad (44)$$

(che, lungo la già considerata geodetica ellissoidica s , lega l'azimut ellissoidico α' alla latitudine ridotta u' corrispondente alla latitudine ellissoidica φ'), introducendovi in luogo di φ' e di α' i loro valori tolti dalle corrispondenze (15). Se si osserva che dentro la solita approssimazione si può porre $U - \varepsilon_\varphi = u'$ si ottiene così la relazione

$$\cos(U_1 - \varepsilon_\varphi) \operatorname{sen} \alpha'_1 = \cos(U_0 + \xi_0) \operatorname{sen}(A_0 + \eta_0 \operatorname{tang} \varphi_0), \quad (45)$$

cui vanno aggiunte le altre che si traggono dal triangolo sferico ausiliario Besseliano corrispondente alla geodetica (44), e che sono

$$\left. \begin{aligned} \cos \chi &= \operatorname{sen}(U_0 + \xi_0) \operatorname{sen}(U_1 - \varepsilon_\varphi) + \cos(U_0 + \xi_0) \cos(U_1 - \varepsilon_\varphi) \cos w, \\ \cos(A_0 + \eta_0 \operatorname{tang} \varphi_0) \operatorname{sen} \chi &= \cos(U_0 + \xi_0) \operatorname{sen}(U_1 - \varepsilon_\varphi) - \operatorname{sen}(U_0 + \xi_0) \cos(U_1 - \varepsilon_\varphi) \cos w, \\ \operatorname{sen}(A_0 + \eta_0 \operatorname{tang} \varphi_0) \operatorname{sen} \chi &= \cos(U_1 - \varepsilon_\varphi) \operatorname{sen} w, \end{aligned} \right\} (46)$$

ove w rappresenta il terzo angolo del triangolo, opposto al lato χ e legato alle differenze di longitudine λ ed ω dalle formole

$$w = \Delta\omega + \frac{e^2 \cdot \chi \cdot \cos U_0 \sin \alpha_0}{2} + e^4 \{ \dots \},$$

$$w = \lambda - \varepsilon_\omega - \eta_0 \sec \varphi_0 + \frac{e^2 \cdot \chi \cdot \cos U_0 \sin A_0}{2} + \dots$$

Sostituendo nelle due ultime delle (46) e sviluppando rispetto agli elementi di correzione si trova, dentro la solita approssimazione,

$$\begin{aligned} \cos U_0 \sin U_1 - \sin U_0 \cos U_1 \cos \lambda_1 &= \sin \chi \cdot \cos A_0 + \xi_0 \cos \chi - \\ &- \eta_0 \sin \chi \sin A_0 \tan \varphi_0 + \varepsilon_\varphi (\cos U_1 \cos U_0 + \sin U_1 \sin U_0 \cos \lambda_1) + \\ &+ (\varepsilon_\omega + \eta_0 \sec \varphi_0) \sin U_0 \cos U_1 \sin \lambda_1 - \frac{e^2 \cdot \chi}{2} \cos U_0 \sin U_0 \cos U_1 \sin A_0 \sin \lambda_1, \\ \cos U_1 \sin \lambda_1 &= \sin \chi \cdot \sin A_0 + \eta_0 \tan \varphi_0 \sin \chi \cdot \cos A_0 - \\ &- \varepsilon_\varphi \sin U_1 \sin \lambda_1 + (\varepsilon_\omega + \eta_0 \sec \varphi_0) \cos U_1 \cos \lambda_1 - \frac{e^2 \cdot \chi}{2} \cos U_0 \cos U_1 \sin A_0 \cos \lambda_1; \end{aligned}$$

per conseguenza, tenendo presente che nei termini dipendenti dalle attrazioni locali e da e^2 , senza alterarne l'approssimazione, si possono scambiare gli elementi geoidici U_0 , U_1 , A_0 e λ_1 coi corrispondenti elementi sferici u_0 , u_1 , α_0 e w , la precedente formula (43) può essere scritta anche come segue

$$\begin{aligned} \sin(A_0 - A_1) \sin \chi - \xi_0 \sin A_1 \cos \chi + \eta_0 \sin \chi \cdot \tan \varphi_0 \cos(A_0 - A_1) - \\ - \varepsilon_\varphi (\sin \alpha_0 \cos u_0 \cos u_1 + \sin \alpha_0 \sin u_0 \sin u_1 \cos w + \sin u_1 \cos \alpha_0 \sin w) + \\ + (\varepsilon_\omega + \eta_0 \sec \varphi_0) (\cos u_1 \cos \alpha_0 \cos w - \sin u_0 \cos u_1 \sin \alpha_0 \sin w) - \\ - \frac{e^2 \cdot \chi}{2} \cos u_0 \sin \alpha_0 (\sin u_0 \cos u_1 \sin \alpha_0 \sin w - \cos \alpha_0 \cos u_1 \cos w) - \\ - \frac{e^2}{2} \cos^2 u_0 \cos \alpha_0 \cos u_1 \sin w + e^3 \cdot \cos u_0 \sin \alpha_0 (\sin u_1 - \sin u_0) - \\ - \xi_1 \sin A_1' + \xi_0 \sin A_1 + \eta_1 \cos A_1' - \eta_0 \cos A_1 = 0, \end{aligned}$$

e, facendo uso delle relazioni fra gli elementi del triangolo sferico ausiliario, e notando che in luogo di $\sin(A_0 - A_1)$ e di $\cos(A_0 - A_1)$ si può rispettivamente

sostituire $A_0 - A_1 = -\delta A$ e l'unità, si riduce a

$$\begin{aligned} \delta A \cdot \text{sen } \chi &= 2\xi_0 \text{sen } A_1 \text{sen}^2 \frac{\chi}{2} + \eta_0 \text{tang } \varphi_0 \text{sen } \chi - \xi_1 \text{sen } A'_1 + \eta_1 \cos A'_1 + \\ &+ \eta_0 \sec \varphi_0 \cos u_1 \cos A'_1 - \eta_0 \cos A_1 - \varepsilon_\varphi \text{sen } A'_1 + \varepsilon_\omega \cos A'_1 \cos u_1 + \\ &+ \frac{e^2}{2} \cos^2 u_0 \cos \alpha_0 \cos u_1 \text{sen } w + e^2 \cos u_0 \text{sen } \alpha_0 (\text{sen } u_1 - \text{sen } u_0) + \\ &+ \frac{e^2 \chi}{2} \cos u_0 \text{sen } \alpha_0 (\text{sen } u_0 \cos u_1 \text{sen } \alpha_0 \text{sen } w - \cos \alpha_0 \cos u_1 \cos w). \end{aligned}$$

La parte del secondo membro che è indipendente dalle attrazioni locali si riferisce evidentemente alla correzione ellissoidica dell'azimut astronomico osservato A_1 , e si riduce infatti senza difficoltà alla nota forma di tale correzione tenendo conto delle relazioni fornite dal triangolo sferico ausiliario: introducendo in luogo di ε_φ e di ε_ω i valori tratti dalle (35), e in luogo di $\text{sen } \chi$ il valore prossimo $\frac{s}{a}$, e considerando i termini in $\frac{\xi \cdot s^2}{a^2}$, $\frac{\eta \cdot s^2}{a^2}$ ecc. come affatto trascurabili trattandosi di azimut *osservati*, e perciò di distanze geodetiche assai piccole, porremo quindi

$$\delta A \cdot \frac{s}{a} = \frac{\eta_0 s}{a} \text{tang } \varphi_0 - \eta_0 \cos A_1 + \eta_0 \sec \varphi_0 \cos u_1 \cos A'_1 + \text{parte ellissoidica},$$

d'onde, per essere dentro la solita approssimazione,

$$\begin{aligned} \eta_0 \sec \varphi_0 \cos u_1 \cos A'_1 &= \eta_0 \sec \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos \alpha' = \\ &= \eta_0 \cos \alpha_0 - \Delta \varphi \cdot \eta_0 \text{tang } \varphi_0 \cos \alpha_0 - \Delta \alpha \cdot \eta_0 \text{sen } \alpha_0 = \\ &= \eta_0 \cos \alpha_0 - \frac{\eta_0 s}{a} \text{tang } \varphi_0, \end{aligned}$$

si trova finalmente

$$\delta A = \text{correzione ellissoidica}. \tag{47}$$

A meno di quantità del terzo ordine relativo rispetto a θ ed h le attrazioni locali e le ondulazioni geoidiche non influiscono dunque sulla differenza fra un azimut geodetico ed il corrispondente azimut di sezione normale.

Perchè tutti i problemi che si presentano in Geodesia geoidica possano essere ridotti ai corrispondenti problemi ellissoidici resta soltanto da stabilire ancora le formole per mezzo delle quali le direzioni astronomiche osservate da

punti e su punti non situati nè sul Geoide, nè sull'Ellissoide di riferimento possono essere ridotte alle direzioni ellissoidiche corrispondenti. Tale riduzione consta di tre correzioni distinte, di cui la prima è dovuta alla divergenza del meridiano astronomico dal meridiano ellissoidico corrispondente, la seconda dipende dal fatto che l'asse di rotazione dell'istrumento di misura, invece di esser diretto secondo la normale (non individuabile) dell'ellissoide, vien disposto verticalmente, e la terza dalla circostanza che, invece dei punti terrestri osservati, dovrebbero esser puntate le proiezioni ellissoidiche delle loro proiezioni geoidiche.

La direzione della verticale di un punto terrestre differisce dalla direzione della normale al Geoide nel punto corrispondente (*), e tanto più differisce quanto più il punto terrestre è elevato o depresso, ma la divergenza è così piccola che nella massima parte dei casi se ne può fare completamente astrazione. Del resto è facile calcolarne con grande approssimazione il valore, considerando invece delle due superficie di livello ignote, che passano per i due punti corrispondenti considerati, le due superficie equipotenziali alle quali esse si ridurrebbero se la densità nella massa attraente fosse equabilmente distribuita colla legge di LAPLACE o con altra legge qualunque. Il piano in cui la deviazione ha luogo è evidentemente il piano del meridiano e se il punto di osservazione si considera come interno alla massa attraente, l'angolo di divergenza $\partial\xi$ è (come ho altrove dimostrato) prossimamente eguale a

$$\frac{e^2 \cdot H \cdot \text{sen } 2\varphi}{2 \cdot a \cdot \text{sen } 1''}, \quad (48)$$

essendo H l'altezza del punto terrestre sul Geoide; se poi il punto di osservazione si considera come esterno alla massa la deduzione di $\partial\xi$ riesce più complicata, ma è chiaro che la differenza fra i risultati che si ottengono nelle due ipotesi devono differire estremamente poco, giacchè l'altitudine geoidica del punto di osservazione è sempre molto piccola rispetto al raggio medio terrestre (**). Da ciò risulta che se ξ ed η sono le componenti dell'attrazione locale θ di un punto geoidico qualunque, $\xi' = \xi + \frac{e^2 \cdot H \cdot \text{sen } 2\varphi}{2 \cdot c \cdot \text{sen } 1''}$ ed η sono sensibilmente quelle del punto terrestre che gli corrisponde ed è elevato di H

(*) Il punto del Geoide corrispondente a un punto terrestre e la proiezione geoidica di questo, fatta cioè per mezzo della normale al Geoide.

(**) La quantità (48) rappresenta quindi la correzione che deve esser fatta ad una latitudine astronomica osservata per ridurla al Geoide.

sul Geoide, e

$$\theta' = \sqrt{\xi'^2 + \eta^2} = \theta + \frac{\xi \cdot H \cdot e^2 \cdot \text{sen } 2\varphi}{2 \cdot \theta \cdot a \cdot \text{sen } 1''}, \quad (49)$$

è sensibilmente l'angolo che la verticale di questo secondo punto forma colla normale ellissoidica corrispondente.

14.

Abbiamo dato in un altro lavoro le espressioni analitiche delle tre correzioni parziali indicate nel paragrafo precedente, espressioni che, nelle notazioni prestabilite, per ciascuna direzione caratterizzata dall'azimut α possono essere scritte come segue

$$\left. \begin{aligned} \delta \alpha_0 &= \eta \cdot \text{tang } \varphi, \\ \delta \alpha_\theta &= \theta' \cdot H'' \cdot \text{sen}(\alpha - \psi) \cdot \text{sen } 1'', \\ \delta \alpha_h &= \frac{e^2 \cdot H' \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{cos } 2\varphi}{2 \cdot a \cdot \text{sen } 1''}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

H'' essendo l'altezza angolare del punto osservato contata in secondi, ed H' la sua elevazione sull'ellissoide di riferimento. Questa elevazione consta di due parti distinte, ossia dell'elevazione del punto sul Geoide e dell'elevazione del Geoide sull'Ellissoide, ma quest'ultima non può esser calcolata se non dopochè le onde geoidiche sono state approssimativamente determinate.

Nella massima parte dei casi le due ultime correzioni (50) sono inferiori all'errore probabile di osservazione, e non si ha quindi da tenerne conto che in punti isolati e rari, e ciò non può farsi che in una seconda approssimazione: ma è da notare che nella compensazione di una rete l'errore di un angolo azimutale viene distribuito anche negli angoli vicini, in proporzione inversa del loro peso e diretta della loro prossimità alla stazione errata, perlochè *una seconda compensazione che si facesse tenendo conto in seconda approssimazione anche delle correzioni dovute alle attrazioni locali condurrebbe a risultati pochissimo diversi da quelli ottenuti nella compensazione già fatta.*

Roma, luglio 1886.

Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli.

(Par M. ERNEST CESÀRO, à Torre Annunziata.)

Le théorème de STAUDT et CLAUSEN, concernant les nombres de BERNOULLI, conduit à imaginer la fonction suivante :

$$P(n) = \frac{\varpi(a+1)}{a+1} + \frac{\varpi(b+1)}{b+1} + \frac{\varpi(c+1)}{c+1} + \dots \quad (1)$$

Dans cette égalité a, b, c, \dots sont tous les diviseurs de n , et la fonction $\varpi(n)$ est 1 ou 0, suivant que n est *premier* ou *composé*. Remarquons que, pour n *impair*, la fonction P se réduit toujours à $\frac{1}{2}$. Cela étant, on sait que le théorème cité consiste dans l'égalité

$$B_{2n} = \mathfrak{J}_n - \mathcal{E}_n,$$

où \mathfrak{J}_n est un nombre entier, et

$$\mathcal{E}_n = P(2n).$$

On trouve

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_4 = \mathfrak{J}_5 = \mathfrak{J}_6 = 1, & \\ \mathfrak{J}_7 = 2 & \mathfrak{J}_{11} = 6193 \\ \mathfrak{J}_8 = -6 & \mathfrak{J}_{12} = -86579 \\ \mathfrak{J}_9 = 56 & \mathfrak{J}_{13} = 1425518 \\ \mathfrak{J}_{10} = -528 & \mathfrak{J}_{14} = -27298230 \\ \dots & \dots \end{array}$$

On est naturellement porté à croire que, abstraction faite des six premiers termes, la série des nombres \mathfrak{J} est à signes alternés. Cette propriété a été dé-

montrée, récemment, par M. LIPSCHITZ, dans le *Bulletin des Sciences*, (Juin 1886). Si n est *impair*, on sait que B_{2n} est *positif*, et, par suite, il en est de même de \mathfrak{J}_n . Il reste donc à faire voir que \mathfrak{J}_n est *négalif* pour les valeurs *paires* de n , du moins à partir de $n = 8$.

Il faut donc prouver que, pour $n \geq 4$, on a

$$-B_{4n} > \mathcal{E}_{2n}. \quad (2)$$

Rappelons-nous, d'abord, que

$$(-1)^{n+1} B_{2n} = 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{(2\pi)^{2n}} s_{2n}, \quad (3)$$

pourvu que l'on pose

$$s_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \cdots$$

Or on sait, d'après la *formule de STIRLING*, que l'on peut écrire

$$-B_{4n} > 4\pi \sqrt{e} \left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n + \frac{1}{2}}.$$

On sait également que

$$\mathcal{E}_{2n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n+1} < \log(4n+1).$$

En conséquence, si l'on démontre que, pour certaines valeurs de n , on a

$$4\pi \sqrt{e} \left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n + \frac{1}{2}} > \log(4n+1), \quad (4)$$

on aura démontré, du même coup, que l'inégalité (2) doit avoir lieu *a fortiori* pour les mêmes valeurs de n . D'ailleurs, la nature des fonctions, qui interviennent dans l'inégalité (4), indique clairement que le premier membre doit finir par *devenir* et *rester* supérieur au second. Or, pour $n = 4$, les valeurs numériques des deux membres sont respectivement

$$\left(\frac{2^{103}}{\pi^{31} e^{32}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7,055\dots, \quad \log 17 = 2,833\dots$$

Conséquemment, le *théorème de M. LIPSCHITZ* est démontré.

Il y a moyen d'abrégier encore, et d'éviter les calculs numériques. Il s'agit, en définitive, de trouver une valeur de n , vérifiant (4), et, pour cela, il suffit d'attribuer à n une valeur supérieure à $\frac{\pi e}{2}$, telle que $\log(4n+1)$ soit inférieur à $4\pi \sqrt{e}$. Or, *il est visible* que le nombre 5 se trouve dans ces conditions.

La démonstration de M. LIPSCHITZ ne diffère pas de la nôtre; mais elle nous paraît se compliquer inutilement de certains détails, qu'il y a avantage à laisser de côté lorsqu'on est uniquement préoccupé de la démonstration du théorème. Il est vrai que M. LIPSCHITZ se préoccupe aussi, chemin faisant, de la représentation *asymptotique* des nombres de BERNOULLI, et que sa démonstration est enrichie de formules et de remarques du plus haut intérêt.

L'égalité (3) conduit à une expression approchée des nombres de BERNOULLI, lorsqu'on y introduit la formule de STIRLING, en tenant compte de l'égalité

$$s_m = 1 + \frac{\varepsilon}{2^{m-1} - 1}, \quad [0,5 < \varepsilon < 0,7]$$

bien facile à établir. Remarquons, en passant, que le nombre ε décroît constamment depuis $\log 2$ jusqu'à $\frac{1}{2}$, lorsque m croît de 1 à $+\infty$. On obtient

$$(-1)^{n+1} B_{2n} = 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{2n-1} - 1}\right) e^{\frac{\theta}{2^{2n}}},$$

θ étant une fraction proprement dite. On voit que la valeur absolue des nombres de BERNOULLI tend à prendre la forme asymptotique $cn^{2n+\frac{1}{2}}$. Il est clair qu'il en est de même des nombres \mathfrak{J} . Ces circonstances apparaissent plus clairement encore si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'égalité (3), ce qui amène le résultat

$$\log \{(-1)^{n+1} B_{2n}\} = \log \left\{ 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \right\} + \sigma_{2n} + \frac{1}{2} \sigma_{4n} + \frac{1}{3} \sigma_{6n} + \dots + \frac{\theta}{24n}, \quad (5)$$

pourvu que l'on tienne compte d'une célèbre formule d'EULER. On a posé

$$\sigma_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{11^m} + \dots$$

La formule (5) a été rappelée par M. LIPSCHITZ, dans la *Note* citée, sous une forme légèrement différente.

Demandons-nous, maintenant, quelle est la valeur moyenne des nombres \mathfrak{E} . Remarquons d'abord que l'on a, d'après (1),

$$P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n) = \sum_1^n \left[\frac{n}{i} \right] \frac{\varpi(i+1)}{i+1},$$

d'où l'on déduit

$$\lim \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n P(i) = \frac{\varpi(2)}{1 \cdot 2} + \frac{\varpi(3)}{2 \cdot 3} + \frac{\varpi(4)}{3 \cdot 4} + \frac{\varpi(5)}{4 \cdot 5} + \dots,$$

pour n infini. En d'autres termes, si l'on pose

$$\tau_m = \frac{1}{3 \cdot 1^m} + \frac{1}{5 \cdot 2^m} + \frac{1}{7 \cdot 3^m} + \frac{1}{11 \cdot 5^m} + \frac{1}{13 \cdot 6^m} + \dots,$$

on peut dire que la fonction $P(n)$ est moyennement égale à la constante $\frac{1 + \tau_1}{2}$.

Quant à \mathcal{E}_n , on a

$$\frac{n}{2} + \sum_1^n \mathcal{E}_i = \sum_1^{2n} P(i),$$

d'où

$$\lim \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n \mathcal{E}_i = \frac{1}{2} + \tau_1.$$

Donc, la partie fractionnaire des nombres de BERNOULLI est moyennement égale à la constante $\frac{1}{2} + \tau_1$.

Ces nombres \mathcal{E} interviennent dans quelques séries, qui présentent un certain intérêt. On sait que l'identité (1) engendre aisément la relation

$$\sum_1^\infty \frac{P(i)\psi(i)}{i^m} = \sum_1^\infty \frac{\psi(i)}{i^m} \cdot \sum_1^\infty \frac{\varpi(i+1)\psi(i)}{(i+1)i^m},$$

en supposant, bien entendu, que les séries soient convergentes, et que la fonction ψ vérifie la condition $\psi(x)\psi(y) = \psi(xy)$, pour toutes les valeurs entières et positives de x et y . On en déduit sans peine

$$\sum_1^\infty \frac{\mathcal{E}_i \psi(i)}{i^m} = \left\{ \frac{1}{2} + \sum_p \frac{\psi\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^m p} \right\} \sum_1^\infty \frac{\psi(i)}{i^m}, \quad (6)$$

où p doit parcourir la série des nombres premiers, supérieurs à 2. Si, par exemple, on fait $\psi(x) = 1$, la formule (6) devient

$$\sum_1^\infty \frac{\mathcal{E}_i}{i^m} = \left(\frac{1}{2} + \tau_m \right) s_m,$$

d'où l'on pourrait déduire, par l'emploi de la formule (3), l'expression des nombres de BERNOULLI, moyennant les parties fractionnaires des mêmes nombres.

Supposons que $\psi(n)$ soit 0, 1, -1, suivant que n a l'une des formes $3k$, $3k+1$, $3k-1$. Appelons t_m ce que devient τ_m lorsqu'on n'y retient que les termes relatifs aux nombres premiers de la forme $3k-1$. En d'autres termes, soit

$$t_m = \frac{1}{5 \cdot 2^m} + \frac{1}{11 \cdot 5^m} + \frac{1}{17 \cdot 8^m} + \frac{1}{23 \cdot 11^m} + \frac{1}{29 \cdot 14^m} + \dots$$

La formule (6) devient

$$\sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon_i \psi(i)}{i^m} = \left(\frac{5}{6} - t_m\right) \left(1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} - \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} - \dots\right)$$

En particulier,

$$\frac{\varepsilon_1}{1} - \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_4}{4} - \frac{\varepsilon_5}{5} + \frac{\varepsilon_7}{7} - \frac{\varepsilon_8}{8} + \dots = \frac{(5 - 6t_1)\pi}{18\sqrt{3}}.$$

De même, soit $\psi(n) = 0, \pm 1, \pm \sqrt{-1}$, suivant que n a l'une des formes $5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$. Représentons par α_m la partie de τ_m , relative aux nombres premiers qui se terminent par 7, et par β_m la partie relative aux nombres premiers terminés par 3 ou par 9, ces derniers étant pris négativement. En d'autres termes, soit

$$\alpha_m = \frac{1}{7 \cdot 3^m} + \frac{1}{17 \cdot 8^m} + \frac{1}{37 \cdot 18^m} + \frac{1}{47 \cdot 23^m} + \frac{1}{67 \cdot 33^m} + \dots,$$

$$\beta_m = \frac{1}{3 \cdot 1^m} + \frac{1}{13 \cdot 6^m} - \frac{1}{19 \cdot 9^m} + \frac{1}{23 \cdot 11^m} - \frac{1}{29 \cdot 14^m} + \dots$$

La formule (6) se dédouble en

$$U_m = \left(\frac{1}{2} + \beta_m\right) S_m - \left(\frac{1}{5 \cdot 2^m} - \alpha_m\right) T_m,$$

$$V_m = \left(\frac{1}{5 \cdot 2^m} - \alpha_m\right) S_m + \left(\frac{1}{2} + \beta_m\right) T_m,$$

pourvu que l'on pose

$$S_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} - \frac{1}{9^m} + \frac{1}{11^m} - \dots,$$

$$T_m = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \frac{1}{12^m} - \dots,$$

et que l'on représente par U_m, V_m , les sommes analogues, dans lesquelles on introduit en numérateur les nombres ε . Si, par exemple, m tend vers l'unité, on trouve que les séries

$$\frac{\varepsilon_1}{1} - \frac{\varepsilon_4}{4} + \frac{\varepsilon_5}{6} - \frac{\varepsilon_9}{9} + \frac{\varepsilon_{11}}{11} - \dots,$$

$$\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_3}{3} + \frac{\varepsilon_7}{7} - \frac{\varepsilon_8}{8} + \frac{\varepsilon_{12}}{12} - \dots,$$

sont respectivement égales à

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + \beta_1 \right) \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{10} - \alpha_1 \right) \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \right\} \frac{\pi}{25},$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{10} - \alpha_1 \right) \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{2} + \beta_1 \right) \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \right\} \frac{\pi}{25}.$$

On obtiendrait des résultats plus généraux en faisant usage de la théorie des indices, ainsi que nous l'avons montré dans nos « *Excursions arithmétiques* ».

Soit, pour finir, $\psi(n) = \sin \frac{\pi n}{2}$, et désignons par γ_m ce que devient τ_m lorsqu'on y considère exclusivement les nombres premiers de la forme $4k + 3$, en affectant chaque terme du coefficient $(-1)^k$. Autrement dit, soit

$$\gamma_m = \frac{1}{3 \cdot 1^m} - \frac{1}{7 \cdot 3^m} + \frac{1}{11 \cdot 5^m} + \frac{1}{19 \cdot 9^m} - \frac{1}{23 \cdot 11^m} - \dots$$

La formule (6) donne, pour $m = 1$,

$$\frac{\varepsilon_1}{1} - \frac{\varepsilon_3}{3} + \frac{\varepsilon_5}{5} - \frac{\varepsilon_7}{7} + \frac{\varepsilon_9}{9} - \dots = \left(\frac{1}{2} + \gamma_1 \right) \frac{\pi}{4}.$$

Plus généralement, la même formule permet d'exprimer les nombres d'EULER au moyen des parties fractionnaires des nombres de BERNOULLI. On obtient, en effet, en utilisant une formule connue,

$$(-1)^n E_{2n} = \frac{4^{n+1}}{\pi^{2n+1}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{\frac{1}{2} + \gamma_{2n+1}} \left(\frac{\varepsilon_1}{1^{2n+1}} - \frac{\varepsilon_3}{3^{2n+1}} + \frac{\varepsilon_5}{5^{2n+1}} - \frac{\varepsilon_7}{7^{2n+1}} + \dots \right).$$

ERRATA-CORRIGE.

P. 144, l. 12, au lieu de *Première*, lisez *Premier*
 » » » dernière » » *notre*, » *notre*.

Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio.

(Memoria di ALFREDO CAPELLI, in Palermo.)

I.

È noto che, se due porzioni finite A ed A' dello spazio si corrispondono punto a punto, univocamente e con continuità, in modo che le figure corrispondenti infinitesime siano simili fra loro, la trasformazione dell'intera prima figura nella seconda dev'essere necessariamente il risultato di una trasformazione per raggi vettori reciproci e di trasformazioni lineari che cambiano la situazione o grandezza dell'intera figura conservandola simile a sè stessa. Questo teorema fondamentale, dovuto a LIOUVILLE, (*) è stato dallo stesso dimostrato mediante un procedimento tutto analitico, il quale, benchè notevolissimo per l'eleganza dei calcoli, richiede cionondimeno un apparato di formole abbastanza esteso per rendere desiderabile una dimostrazione di natura più sintetica ed a cui corrisponda una certa intuizione geometrica della verità da dimostrarsi. Non essendo a mia cognizione che altri avesse ancora dato una siffatta dimostrazione mi proposi di cercarne una io stesso, e, per rendermi più probabile la possibilità di riuscirvi, cominciai dall'eliminare la considerazione delle due trasformazioni speciali sopra menzionate proponendomi di dimostrare che *se le due figure A ed A' si corrispondono punto per punto in modo da essere simili nelle loro parti infinitesime, ad ogni sfera o pezzo di superficie sferica della prima figura corrisponde del pari nella seconda figura una sfera od un pezzo di superficie sferica* (o anche un piano che può sempre considerarsi come una sfera di raggio infinitamente grande). Questo teorema viene da me dimostrato nel secondo paragrafo della presente Memoria con un ragionamento tutto sintetico e al tempo stesso assai semplice.

(*) Vedi la Nota IV di LIOUVILLE all'Opera di MONGE: *Application de l'Analyse à la Geometrie*. Paris, 1860.

Benchè l'enunciato di questo teorema non coincida completamente con quello del teorema sopra citato di LIOUVILLE, ne contiene però certamente la parte essenziale. Ed invero, ammesso che alle superficie sferiche di A corrispondano superficie sferiche di A' , ne segue facilmente che la trasformazione con cui si passa dalla figura A alla figura A' non può essere di natura trascendente, ma è necessariamente una trasformazione algebrica, anzi razionale (*cremoniana*), che può quindi proseguirsi anche all'infuori delle due porzioni limitate A ed A' in modo da abbracciare tutto lo spazio indefinito senza venir meno alle proprietà già menzionate. Siano infatti P, P_1, P_2, P_3 quattro punti, non situati in uno stesso piano presi comunque nell'interno di A e Q, Q_1, Q_2, Q_3 i quattro punti risp. corrispondenti in A' . Alla sfera (P, P_1, P_2, P_3) , che passa pei quattro punti P, P_1, P_2, P_3 , corrisponderà in A' la sfera (Q, Q_1, Q_2, Q_3) ; ed al fascio (P_i, P_h, P_k) formato dalle infinite sfere che passano per tre punti P_i, P_h, P_k corrisponderà in A' il fascio (Q_i, Q_h, Q_k) formato dalle infinite sfere che passano per i punti corrispondenti. La corrispondenza fra i due fasci (P_i, P_h, P_k) e (Q_i, Q_h, Q_k) sarà necessariamente proiettiva, poichè, dovendo essere le due figure A ed A' simili nelle parti infinitesime, è chiaro che l'angolo secondo cui si intersecano due sfere qualunque del fascio (P_i, P_h, P_k) dovrà essere eguale all'angolo secondo cui si intersecano le due sfere corrispondenti del fascio (Q_i, Q_h, Q_k) . Ciò premesso, per avere il punto della figura A' che corrisponde ad un punto qualunque O della figura A si considereranno le tre sfere che passano per O ed appartengono risp. ai tre fasci $(Q, Q_1, Q_2), (Q, Q_2, Q_3), (Q, Q_1, Q_3)$ le quali, avendo già in comune il punto fisso Q , si incontreranno ulteriormente in un altro unico punto comune che sarà evidentemente il cercato punto corrispondente ad O . Di qui emerge come le coordinate del punto corrispondente ad O potranno sempre esprimersi come una funzione razionale di quelle del punto O e reciprocamente. La trasformazione di A in A' è dunque *razionale*.

Non ci fermeremo qui a dimostrare come la costruzione ora indicata coincida, a meno di trasformazioni lineari, con quella propria di una trasformazione per raggi vettori reciproci, tanto più che è già stato dimostrato con procedimento sintetico (*) che una trasformazione *razionale* che conserva la similitudine delle parti infinitesime si riduce necessariamente al tipo ora menzionato. Del resto la dimostrazione complementare, che deve aggiungersi al

(*) BIANCHI: *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio*. Giornale di BATTAGLINI, tom. XVII.

teorema da me dimostrato nel § 2 per istabilire l'enunciato di LIOUVILLE, può anche farsi direttamente in modo assai semplice per via analitica, il che formerà appunto l'oggetto del § 3. Finalmente nell'ultimo paragrafo aggiungiamo qualche osservazione relativamente a quelle speciali trasformazioni dello spazio per le quali soltanto fu dimostrato essere possibile di conservare la similitudine delle parti infinitesime.

II.

Vogliamo dimostrare che, se una porzione finita A dello spazio viene trasformata punto per punto con continuità in un'altra porzione finita A' in modo da aversi la somiglianza delle parti corrispondenti infinitesime, ogni sfera o pezzo di superficie sferica contenuto in A si trasforma necessariamente in una sfera o pezzo di superficie sferica di A' . Sia infatti s una superficie sferica o pezzo di superficie sferica in A il cui centro sia O , e sia s' la superficie corrispondente ad s . La porzione di spazio adiacente ad s si immagini occupata dal sistema triplo di superficie ortogonali composto: 1°) delle sfere di centro O delle quali una sarà la sfera s ; 2°) dei piani che passano per un asse OP condotto per il punto O e per un punto qualunque P dello spazio; 3°) dei coni di rotazione che hanno per vertice il punto O e per asse comune la retta OP . Di queste superficie basterà pel nostro scopo considerare una parte, limitata quanto si vuole, contenuta in A e circostante alla superficie sferica s . Queste superficie godono della proprietà che una qualunque delle superficie di un sistema è incontrata ortogonalmente da tutte quelle appartenenti agli altri due sistemi. Poichè ora nella corrispondenza fra le due figure A ed A' si ha la somiglianza delle parti infinitesime, e per conseguenza la conservazione degli angoli, è chiaro che a due superficie fra loro ortogonali corrisponderanno due superficie del pari ortogonali fra loro; cosicchè al sistema triplo sopra considerato corrisponderà in A' un altro sistema triplo di superficie ortogonali di cui una delle superficie sarà la s' che corrisponde alla superficie sferica s .

Ciò posto, siano t' le superficie che corrispondono ai piani passanti per l'asse OP ed u' le superficie che corrispondono ai coni retti. Per un teorema notissimo dovuto a DUPIN, si sa che le linee di intersezione di tre superficie fra loro ortogonali due a due, sono linee di curvatura delle superficie stesse. Perciò la superficie s' sarà incontrata dalle superficie t' ed u' secondo linee sue proprie di curvatura. Siano ora Q e Q' due punti corrispondenti quali si

vogliamo di s e di s' ; sia $Q'R'$ una retta tangente alla superficie s' nel punto Q' secondo una direzione da fissarsi ad arbitrio, e sia QR la direzione corrispondente sulla superficie s . Con ciò intendiamo dire che all'elemento lineare delle superficie s' condotto pel punto Q' secondo la direzione $Q'R'$ corrisponde un elemento lineare di s uscente dal punto Q e situato lungo la retta QR tangente ad s nel punto Q . Se si sceglie la direzione dell'asse OP in modo che esso sia situato in uno stesso piano colla direzione QR , per es. si prenda OP parallela alla retta QR , la retta $Q'R'$ sarà tangente nel punto Q' a quella superficie t' che corrisponde al piano comune $OPQR$; epperò la linea d'intersezione della superficie t' con la superficie s' , che è, come si è notato, una linea di curvatura di s' , avrà per tangente nel punto Q' la retta $Q'R'$. Poichè ora questa direzione era affatto arbitraria concludiamo che per ogni punto Q' della superficie s' passano linee di curvatura secondo qualsivoglia direzione. Ogni punto di s' sarà dunque un punto *umbilicale*, e la superficie s' dovrà necessariamente essere una sfera od un pezzo di superficie sferica. Resta così dimostrato quanto si voleva.

III.

Per completare la dimostrazione del teorema di LIOUVILLE resta ora soltanto a far vedere che *una trasformazione per la quale si ha la somiglianza delle parti corrispondenti infinitesime e per la quale le sfere si trasformano in sfere si riduce necessariamente a trasformazioni lineari ed a trasformazioni per raggi vettori reciproci*. Ciò si può dimostrare col seguente semplicissimo procedimento di geometria analitica.

Sieno ξ, η, ζ le coordinate ortogonali di un punto qualunque P della prima figura riferite ad una terna di assi ortogonali OX, OY, OZ condotti a piacere per un punto O della stessa prima figura, che potrà fissarsi ad arbitrio, e siano ξ', η', ζ' le coordinate ortogonali del punto corrispondente P' della seconda figura riferite alla terna di assi $O'X', O'Y', O'Z'$ condotti per il punto O' corrispondente del punto O in modo che agli elementi lineari della prima figura uscenti dal punto O e diretti secondo gli assi OX, OY, OZ corrispondano nella seconda figura gli elementi lineari uscenti dal punto O' risp. secondo le direzioni $O'X', O'Y', O'Z'$. Si imaginino fissate nelle due figure due sfere corrispondenti σ e σ' . Sia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = h^2 \quad (1)$$

l'equazione della sfera σ , in cui x, y, z sono le coordinate correnti riferite al sistema di assi OX, OY, OZ e sia:

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 = k^2 \quad (1')$$

quella della sfera σ' nelle coordinate correnti x', y', z' relative al secondo sistema di assi OX', OY', OZ' .

Ciò posto, per il punto P della prima figura si può sempre far passare un'unica sfera tangente al piano YOZ nel punto O . Essendo ξ, η, ζ le coordinate del punto P rispetto al primo sistema di assi, l'equazione di questa sfera nelle coordinate correnti x, y, z sarà data da:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{x}{\xi}, \quad (2)$$

onde il suo centro avrà per coordinate

$$x = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2\xi}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

ed il suo raggio sarà dato, a meno del segno, da:

$$r = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2\xi}. \quad (3)$$

La sfera corrispondente della seconda figura, dovendo passare pel punto P' , corrispondente di P , ed essere tangente nel punto O' al piano $Y'O'Z'$ la cui direzione corrisponde per supposto a quella del piano YOZ , avrà evidentemente per equazione, nelle coordinate correnti ξ', η', ζ' :

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} = \frac{x'}{\xi'}. \quad (2')$$

Poichè ora la corrispondenza fra le due figure è tale da conservare gli angoli, possiamo esprimere che l'angolo sotto cui si intersecano le due sfere (1) e (2) è eguale a quello secondo cui si intersecano le (1)' e (2)'. L'angolo φ delle due sfere (1) e (2) è dato da

$$\cos \varphi = \pm \frac{h^2 + r^2 - \delta^2}{2hr},$$

dove h è il raggio della sfera (1), r è il raggio della sfera (2) il cui valore è dato dalla (3) e δ è la distanza dei due centri. Poichè:

$$\delta^2 = \left(a - \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2\xi} \right)^2 + b^2 + c^2,$$

si ha:

$$\cos \varphi = \pm \frac{\xi(h^2 - a^2 - b^2 - c^2) + a(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Analogamente l'angolo φ' formato dalle due sfere (1)' e (2)' sarà dato da:

$$\cos \varphi' = \pm \frac{\xi'(k^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) + \alpha(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}{k(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

onde, designando con ε_1 la quantità ± 1 , si avrà la relazione:

$$\frac{\xi(h^2 - a^2 - b^2 - c^2)}{h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} + \frac{a}{h} = \varepsilon_1 \frac{\xi'(k^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)}{k(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)} + \varepsilon_1 \frac{\alpha}{k},$$

alla quale si possono senz'altro aggiungere le due analoghe che si otterrebbero considerando in luogo della sfera (2) la sfera analoga tangente al piano XOZ ovvero al piano XOY .

Ponendo per brevità

$$\frac{h^2 - a^2 - b^2 - c^2}{h} = L, \quad \frac{k^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{k} = M$$

$$\frac{a}{h} = \lambda_1, \quad \frac{b}{h} = \lambda_2, \quad \frac{c}{h} = \lambda_3$$

$$\frac{\alpha}{k} = \mu_1, \quad \frac{\beta}{k} = \mu_2, \quad \frac{\gamma}{k} = \mu_3,$$

si hanno dunque le tre relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \lambda_1 &= \varepsilon_1 M \frac{\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} + \varepsilon_1 \mu_1 \\ L \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \lambda_2 &= \varepsilon_2 M \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} + \varepsilon_2 \mu_2 \\ L \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \lambda_3 &= \varepsilon_3 M \frac{\zeta'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} + \varepsilon_3 \mu_3, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dove le ε sono quantità eguali a $+1$ o -1 . Queste forme determinano la trasformazione delle ξ, η, ζ nelle ξ', η', ζ' e mostrano chiaramente come esso sia il risultato di due trasformazioni per raggi vettori reciproci e di una trasformazione lineare.

Ponendo infatti:

$$L \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = X, \quad L \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = Y, \quad L \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = Z,$$

il che equivale ad eseguire sulla prima figura una trasformazione per raggi vettori reciproci che cambia il punto (ξ, η, ζ) nel punto (X, Y, Z) , e ponendo similmente

$$M \frac{\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} = X', \quad M \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \lambda'^2} = Y', \quad M \frac{\zeta'}{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2} = Z',$$

il che equivale ad un' analoga trasformazione per raggi vettori reciproci eseguita sulla seconda figura, la corrispondenza fra i punti (X, Y, Z) della prima ed i punti (X', Y', Z') della seconda figura si riduce, in virtù delle (4), ad una semplice trasformazione lineare

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon_1 X' + (\varepsilon_1 \mu_1 - \lambda_1) \\ Y &= \varepsilon_2 Y' + (\varepsilon_2 \mu_2 - \lambda_2) \\ Z &= \varepsilon_3 Z' + (\varepsilon_3 \mu_3 - \lambda_3), \end{aligned}$$

che conserva l'intera forma della figura. L'enunciato del teorema di LIOUVILLE resta dunque così stabilito completamente.

IV.

1. Benchè la teoria delle trasformazioni per raggi vettori reciproci sia comunemente nota, non crediamo tuttavia inopportuno di aggiungere qui alcuni sviluppi analitici relativi alla trasformazione risultante dall'eseguire successivamente un numero finito di trasformazioni per raggi vettori reciproci e di trasformazioni lineari conformi. È facile riconoscere come una siffatta risultante possa sempre considerarsi come derivata da una sola trasformazione per raggi vettori reciproci combinata con una sola trasformazione lineare conforme. A tale oggetto basta infatti dimostrare: 1°) che la risultante di una trasformazione lineare conforme a cui si faccia succedere una trasformazione per raggi vettori reciproci può anche ottenersi eseguendo prima una certa trasformazione per raggi vettori reciproci e poi una certa trasformazione lineare; 2°) che la risultante di due trasformazioni per raggi vettori reciproci eseguite successivamente può anche ottenersi mediante una sola trasformazione per raggi vettori reciproci combinata con delle trasformazioni lineari conformi.

Senza fermarci alla 1^a proprietà, che è quasi evidente, consideriamo il risultato di due trasformazioni per raggi vettori reciproci:

$$x' - a = R^2 \frac{x - a}{r^2}, \quad y' - b = R^2 \frac{y - b}{r^2}, \quad z' - c = R^2 \frac{z - c}{r^2}, \quad (1)$$

dove $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ ed:

$$x'' - \alpha = T^2 \frac{x' - \alpha}{\rho^2}, \quad y'' - \beta = T^2 \frac{y' - \beta}{\rho^2}, \quad z'' - \gamma = T^2 \frac{z' - \gamma}{\rho^2}, \quad (2)$$

dove $\rho^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2$.

Sostituendo nelle (2) i valori delle x' , y' , z' dati dalle (1) si trova dopo alcune facili riduzioni:

$$x'' - \alpha = T^2 \frac{r^2(a - \alpha) + R^2(x - a)}{r^2[(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2] + 2R^2[(a - \alpha)(x - a) + (b - \beta)(y - b) + (c - \gamma)(z - c)] + R^4}, \quad (3)$$

con due espressioni analoghe per $y'' - \beta$ e $z'' - \gamma$. Ponendo per brevità:

$$\begin{aligned} x - a &= \xi, & y - b &= \eta, & z - c &= \zeta \\ a - \alpha &= A, & b - \beta &= B, & c - \gamma &= C, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$x'' - \alpha = T^2 \frac{A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + R^2\xi}{(A^2 + B^2 + C^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) + R^4},$$

ed anche:

$$\begin{aligned} x'' - \alpha &= \frac{AT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \\ &+ \frac{T^2 R^2}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \frac{(A^2 + B^2 + C^2)\xi - 2A(A\xi + B\eta + C\zeta) - AR^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) + R^4}. \end{aligned}$$

Se ora poniamo:

$$\left. \begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2)\xi - 2A(A\xi + B\eta + C\zeta) - AR^2 &= X \\ (A^2 + B^2 + C^2)\eta - 2B(A\xi + B\eta + C\zeta) - BR^2 &= Y \\ (A^2 + B^2 + C^2)\zeta - 2C(A\xi + B\eta + C\zeta) - CR^2 &= Z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$(A^2 + B^2 + C^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) + R^4 = D, \quad (5)$$

elevando a quadrato le (4) e sommando si trova:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (A^2 + B^2 + C^2) \cdot D,$$

onde può scriversi:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \alpha + \frac{AT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + T^2 R^2 \frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ y'' &= \beta + \frac{BT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + T^2 R^2 \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ z'' &= \gamma + \frac{CT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + T^2 R^2 \frac{Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Di qui si vede che, se si trasformano le x, y, z nelle X, Y, Z mediante le sostituzioni lineari (4) e le x'', y'', z'' nelle X'', Y'', Z'' mediante le sostituzioni lineari:

$$\begin{aligned} x'' - \alpha - \frac{AT^2}{A^2 + B^2 + C^2} &= X'' \\ y'' - \beta - \frac{BT^2}{A^2 + B^2 + C^2} &= Y'' \\ z'' - \gamma - \frac{CT^2}{A^2 + B^2 + C^2} &= Z'', \end{aligned}$$

le X'', Y'', Z'' si ottengono dalle X, Y, Z mediante l'unica trasformazione per raggi vettori reciproci

$$\begin{aligned} X'' &= T^2 R^2 \frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, & Y'' &= T^2 R^2 \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ Z'' &= T^2 R^2 \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{Z}, \end{aligned}$$

il che dimostra appunto la proprietà enunciata.

2. Il denominatore D dell'espressione (3) può anche mettersi sotto forma di una somma di tre quadrati nel modo seguente che ci sembra egualmente meritevole di attenzione. Vediamo, cioè, se si possano determinare sei costanti $p, q, r, \mu, \mu', \mu''$ in modo da avere identicamente rispetto alle ξ, η, ζ :

$$\begin{aligned} D &= (A^2 + B^2 + C^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) + R^4 \\ &= (p\xi + q\eta + r\zeta + \mu)^2 + (q\xi + r\eta + p\zeta + \mu')^2 + (r\xi + p\eta + q\zeta + \mu'')^2. \end{aligned}$$

A tale oggetto debbono soddisfarsi le equazioni

$$p^2 + q^2 + r^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad pq + qr + rp = 0 \quad (\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} p\mu + q\mu' + r\mu'' &= R^2 A \\ q\mu + r\mu' + p\mu'' &= R^2 B \\ r\mu + p\mu' + q\mu'' &= R^2 C \end{aligned} \right\} \quad (\beta)$$

$$\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = R^4. \quad (\gamma)$$

Di queste equazioni la (γ) è una conseguenza delle (α) e (β) . Moltiplicando infatti le (β) risp. per p, q, r , sommando e tenendo conto delle (α) viene

$$\mu(A^2 + B^2 + C^2) = R^2(Ap + Bq + Cr)$$

e similmente si deduce dalle stesse (α) e (β):

$$\mu'(A^2 + B^2 + C^2) = R^2(Aq + Br + Cp)$$

$$\mu''(A^2 + B^2 + C^2) = R^2(Ar + Bp + Cq).$$

Da queste tre uguaglianze elevate a quadrato e sommate si ha:

$$(\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2)(A^2 + B^2 + C^2)^2$$

$$= R^4 \{ (A^2 + B^2 + C^2)(p^2 + q^2 + r^2) + 2(AB + BC + CA)(pq + qr + rp) \},$$

ossia appunto, in virtù delle (α):

$$\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = R^4.$$

Si determineranno quindi in un modo qualunque le p , q , r purchè soddisfino alle due condizioni

$$p^2 + q^2 + r^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad pq + qr + rp = 0, \quad (\alpha)$$

dopodichè i valori di μ , μ' , μ'' saranno dati da:

$$\mu = R^2 \frac{Ap + Bq + Cr}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \mu' = R^2 \frac{Aq + Br + Cp}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \mu'' = R^2 \frac{Ar + Bp + Cq}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

3. Poniamo per brevità:

$$\left. \begin{aligned} p\xi + q\eta + r\zeta + \mu &= \varphi_1 \\ q\xi + r\eta + p\zeta + \mu' &= \varphi_2 \\ r\xi + p\eta + q\zeta + \mu'' &= \varphi_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

cosicchè si ha

$$D = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2.$$

Dalle (β) moltiplicate risp. per ξ , η , ζ e sommate si ha:

$$\begin{aligned} R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) &= \mu(p\xi + q\eta + r\zeta) + \mu'(q\xi + r\eta + p\zeta) + \mu''(r\xi + p\eta + q\zeta) \\ &= \mu\varphi_1 + \mu'\varphi_2 + \mu''\varphi_3 - (\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2), \end{aligned}$$

ossia, in virtù delle (γ):

$$R^2(A\xi + B\eta + C\zeta) + R^4 = \mu\varphi_1 + \mu'\varphi_2 + \mu''\varphi_3. \quad (8)$$

Moltiplicando le espressioni (7) risp. per p , q , r , sommando e tenendo conto delle relazioni (α) si trova:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\xi + p\mu + q\mu' + r\mu'' = p\varphi_1 + q\varphi_2 + r\varphi_3,$$

ossia per le (β):

$$(A^2 + B^2 + C^2)\xi + R^2 A = p\varphi_1 + q\varphi_2 + r\varphi_3. \quad (9)$$

Sostituendo le (8) e (9) nell'espressione (4) di X si ha:

$$X = p\varphi_1 + q\varphi_2 + r\varphi_3 - \frac{2A}{R^2} (\mu\varphi_1 + \mu'\varphi_2 + \mu''\varphi_3),$$

con due formole analoghe per Y e Z . In luogo delle (6) si può dunque anche scrivere:

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha + \frac{AT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \\ &+ \frac{T^2}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \frac{(pR^2 - 2A\mu)\varphi_1 + (R^2q - 2A\mu')\varphi_2 + (R^2r - 2A\mu'')\varphi_3}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2} \\ y'' &= \beta + \frac{BT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \\ &+ \frac{T^2}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \frac{(qR^2 - 2B\mu)\varphi_1 + (R^2r - 2B\mu')\varphi_2 + (R^2p - 2B\mu'')\varphi_3}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2} \\ z'' &= \gamma + \frac{CT^2}{A^2 + B^2 + C^2} + \\ &+ \frac{T^2}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \frac{(rR^2 - 2C\mu)\varphi_1 + (R^2p - 2C\mu')\varphi_2 + (R^2q - 2C\mu'')\varphi_3}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}. \end{aligned}$$

4. Il modo più semplice di soddisfare le (α) si ha prendendo:

$$p = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

In tal caso le (δ) ci danno:

$$\mu = \frac{R^2 A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \mu'' = \frac{R^2 B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \mu' = \frac{R^2 C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

e le (7):

$$\varphi_1 = p\xi + \mu, \quad \varphi_3 = p\eta + \mu'', \quad \varphi_2 = p\zeta + \mu'.$$

Palermo, dicembre 1885.

Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellittiche.

(Nota di F. BRIOSCHI, in Milano.)

Devesi a KUMMER (*) l'aver dimostrato che gli integrali ellittici completi, secondo la forma ad essi assegnata da LEGENDRE, possono esprimersi per mezzo di serie ipergeometriche. In un recente fascicolo dei *Mathematische Annalen* (**) è riprodotto un lavoro del 1875 dovuto al sig. BRUNS sullo stesso argomento, nel quale per la forma di questi integrali completi o dei periodi si segue quella adottata dal sig. WEIERSTRASS. Lo scopo di questa Nota, non è tanto di giungere a quelle equazioni differenziali mantenendo agli integrali completi una forma più generale, ma piuttosto di indicare un metodo per ottenere le equazioni stesse che a me sembra preferibile ai noti.

Posto:

$$f(x) = x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)$$

ed $a_0 > a_1 > a_2$; considererò siccome integrali ellittici di prima e di seconda specie, i seguenti:

$$\frac{1}{2} \int_{a_1}^x \frac{dx}{t}, \quad -\frac{1}{2} \int_{a_1}^x \frac{x dx}{t}$$

essendo $t = \sqrt{f(x)}$. Ne segue che i corrispondenti periodi saranno:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{t}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \int_{a_0}^{a_1} \frac{dx}{t}; \quad \eta_1 = -\frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{x dx}{t}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{2} \int_{a_0}^a \frac{x dx}{t}.$$

Ora indicando con a_r una qualunque delle quantità a_0, a_1, a_2 si hanno fra i periodi ω_1, η_1 le seguenti relazioni:

$$2f'(a_r) \frac{d\omega_1}{da_r} = -(a_r \omega_1 + \eta_1); \quad \frac{d\eta_1}{da_r} = -a_r \frac{d\omega_1}{da_r} - \frac{1}{2} \omega_1$$

(*) *Ueber die hypergeometrische Reihe*. Journal für die Mathematik. Bd. 15, pag. 144.

(**) *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung*. Bd. 27, pag. 234.

dalle quali si deducono queste sei:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r \frac{d\omega_1}{da_r} = 0, & \quad \Sigma_r a_r \frac{d\omega_1}{da_r} = -\frac{1}{2}\omega_1, & \quad \Sigma_r a_r^2 \frac{d\omega_1}{da_r} = \frac{1}{2}(A_1\omega_1 - \eta_1) \\ \Sigma_r \frac{d\eta_1}{da_r} = -\omega_1, & \quad \Sigma_r a_r \frac{d\eta_1}{da_r} = \frac{1}{2}\eta_1, & \quad \Sigma_r a_r^2 \frac{d\eta_1}{da_r} = \frac{1}{2}(A_2\omega_1 - A_1\eta_1) \end{aligned} \right\} (1)$$

ed analogamente per ω_2, η_2 .

Considerando ora la forma binaria biquadratica:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^3 + A_1\xi_1^2\xi_2 + A_2\xi_1\xi_2^2 + A_3\xi_2^3)$$

ed indicando con g_2, g_3 i suoi invarianti, si hanno:

$$g_2 = \frac{1}{12}(A_1^2 - 3A_2), \quad g_3 = \frac{1}{3 \cdot 12}(9A_1A_2 - 2A_1^3 - 27A_3).$$

Sia:

$$\delta = g_2^2 - 27g_3^2$$

il discriminante della forma $f(\xi_1, \xi_2)$; essendo:

$$\Sigma_r \frac{d\delta}{da_r} = 0, \quad \Sigma_r a_r \frac{d\delta}{da_r} = 6\delta, \quad \Sigma_r a_r^2 \frac{d\delta}{da_r} = -4A_1\delta$$

se si pongono:

$$y = \delta^{\frac{1}{12}}\omega_1 \quad z = \delta^{-\frac{1}{12}}(\eta_1 - \frac{1}{3}A_1\omega_1)$$

le sei equazioni (1) conducono alle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r \frac{dy}{da_r} = 0, & \quad \Sigma_r a_r \frac{dy}{da_r} = 0, & \quad \Sigma_r a_r^2 \frac{dy}{da_r} = -\frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{6}}z \\ \Sigma_r \frac{dz}{da_r} = 0, & \quad \Sigma_r a_r \frac{dz}{da_r} = 0, & \quad \Sigma_r a_r^2 \frac{dz}{da_r} = \frac{2}{3}\delta^{-\frac{1}{6}}g_2 \cdot y \end{aligned} \right\} (2)$$

Le y, z , si possono quindi considerare come funzioni di una sola variabile g , funzione delle a_0, a_1, a_2 , per la quale sussistano le:

$$\Sigma_r \frac{dg}{da_r} = 0 \quad \Sigma_r a_r \frac{dg}{da_r} = 0.$$

Posto $g = \frac{g_2^3}{\delta}$, queste due relazioni sono appunto soddisfatte, inoltre si ha:

$$\Sigma_r a_r^2 \frac{dg}{da_r} = 36 \frac{g_2^2 g_3}{\delta} = 4\sqrt{3} \cdot \delta^{\frac{1}{6}} g^{\frac{2}{3}} (g - 1)^{\frac{1}{2}}$$

quindi le due ultime equazioni (2), indicando con accenti le derivate rispetto

a g , si trasformano nelle:

$$8\sqrt{3} \cdot g^{\frac{2}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}}y' = -z, \quad 6\sqrt{3} \cdot g^{\frac{1}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}}z' = y$$

dalle quali si ottengono tosto le due note equazioni differenziali ipergeometriche:

$$g(g-1)y'' + \frac{1}{6}(7g-4)y' + \frac{1}{144}y = 0$$

$$g(g-1)z'' + \frac{1}{6}(5g-2)z' + \frac{1}{144}z = 0.$$

Agosto 1886.

Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine.

(Memoria di F. BRIOSCHI, in Milano.)

CAPITOLO I.

Definizioni.

1.° Sia:

$$f(x) = x^5 + A_1x^4 + \dots + A_4x + A_5 = \prod_{r=0}^4 (x - a_r)$$

una funzione intera di quinto grado dell'argomento x , ed in essa le quantità a_0, a_1, \dots, a_4 sieno tutte reali ed in ordine discendente di grandezza, cioè $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Posto:

$$t = \sqrt{f(x)} \quad \text{ed} \quad f_1(x) = m_0x + m_1, \quad f_2(x) = n_0x + n_1 \quad (1)$$

si denomineranno integrali normali iperellittici di primo ordine e di prima specie, i seguenti:

$$\frac{1}{2} \int \frac{f_1(x)}{t} dx, \quad \frac{1}{2} \int \frac{f_2(x)}{t} dx.$$

Le quantità $m_0, m_1; n_0, n_1$ sono pure reali.

Ed indicando con $g_1(x), g_2(x)$ i due polinomi del terzo grado:

$$g_1(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3, \quad g_2(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 \quad (2)$$

a coefficienti reali, si denomineranno integrali normali iperellittici di primo ordine e di seconda specie, gli integrali:

$$\frac{1}{2} \int \frac{g_1(x)}{t} dx, \quad \frac{1}{2} \int \frac{g_2(x)}{t} dx.$$

Se con x_1, x_2 si indicano due valori di x , e con t_1, t_2 i corrispondenti valori di $\sqrt{f(x)}$, supporremo che fra i coefficienti delle quattro funzioni $f_1(x), f_2(x); g_1(x), g_2(x)$ sussistano le relazioni alle quali conduce l'equazione:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1)g_1(x_2) - f_1(x_2)g_1(x_1) + f_2(x_1)g_2(x_2) - f_2(x_2)g_2(x_1) &= \\ = 2t_2 \frac{d}{dx_2} \left[\frac{t_1 + t_2}{x_1 - x_2} \right] - 2t_1 \frac{d}{dx_1} \left[\frac{t_2 + t_1}{x_2 - x_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ossia le cinque relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} m_0 b_0 + n_0 c_0 &= 0 & m_1 b_0 + n_1 c_0 &= -3 \\ m_0 b_1 + n_0 c_1 &= -1 & m_1 b_1 + n_1 c_1 &= -2A_1 \\ m_0 b_3 + n_0 c_3 - (m_1 b_2 + n_1 c_2) &= A_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

per le quali ponendo $m_0 n_1 - m_1 n_0 = \varepsilon$, saranno i coefficienti $b_0, c_0; b_1, c_1$ dati dalle relazioni:

$$\varepsilon b_0 = 3n_0, \quad \varepsilon c_0 = -3m_0; \quad \varepsilon b_1 = 2A_1 n_0 - n_1, \quad \varepsilon c_1 = -2A_1 m_0 + m_1$$

e gli altri coefficienti delle $g_1(x), g_2(x)$ arbitrarii, salvo che deve essere soddisfatta la quinta delle relazioni superiori.

Se, come si ammetterà più avanti, fossero $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$, cioè $m_0 = n_1 = 0, m_1 = n_0 = 1$, e quindi $\varepsilon = -1$, si hanno le:

$$b_0 = -3, \quad b_1 = -2A_1; \quad c_0 = 0, \quad c_1 = -1; \quad c_3 - b_2 = A_2$$

e potendosi perciò supporre $c_2 = c_3 = b_3 = 0$, saranno:

$$g_1(x) = -(3x^3 + 2A_1 x^2 + A_2 x), \quad g_2(x) = -x^2. \quad (5)$$

2.° Si indichino con u_1, u_2 due quantità alle quali possano attribuirsi valori qualsivogliano, e con x_1, x_2 due funzioni di esse che soddisfano le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{f_1(x) dx}{t} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{x_2} \frac{f_1(x) dx}{t} \\ u_2 &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{f_1(x) dx}{t} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{x_2} \frac{f_2(x) dx}{t} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

da esse si deducono tosto le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2t_1} \frac{dx_1}{du_1} &= \frac{f_2(x_2)}{x_1 - x_2}, & \frac{\varepsilon}{2t_1} \frac{dx_1}{du_2} &= \frac{f_1(x_2)}{x_2 - x_1} \\ \frac{\varepsilon}{2t_2} \frac{dx_2}{du_1} &= \frac{f_2(x_1)}{x_2 - x_1}, & \frac{\varepsilon}{2t_2} \frac{dx_2}{du_2} &= \frac{f_1(x_1)}{x_1 - x_2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

per le quali essendo:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{du_1} & \frac{dx_1}{du_2} \\ \frac{dx_2}{du_1} & \frac{dx_2}{du_2} \end{vmatrix} = \frac{4t_1t_2}{\varepsilon(x_1 - x_2)}$$

si ha la formola di trasformazione di integrali doppi:

$$du_1 du_2 = \frac{\varepsilon}{4} \frac{x_1 - x_2}{t_1 t_2} dx_1 dx_2. \quad (8)$$

3.° Supporremo che ciascuna delle quantità $a_m, a_r, a_s, a_\lambda, a_\mu$ rappresentino una qualunque delle a_0, a_1, \dots, a_4 ; si avranno così cinque funzioni di x_1, x_2 analoghe alla $\sqrt{(x_1 - a_r)(x_2 - a_r)}$. Considerata questa, siccome funzione di u_1, u_2 , la indicheremo con $p_r(u_1, u_2)$ o semplicemente con p_r , e denomineremo essa, e le altre quattro analoghe, funzioni iperellittiche di primo ordine ad un indice.

Derivando la funzione $p_r(u_1, u_2)$ rispetto ad u_1, u_2 , si ottengono, per le relazioni (7) le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{dp_r}{du_1} &= \frac{p_r}{x_1 - x_2} \left[\frac{f_2(x_2)}{x_1 - a_r} t_1 - \frac{f_2(x_1)}{x_2 - a_r} t_2 \right] \\ \varepsilon \frac{dp_r}{du_2} &= \frac{p_r}{x_2 - x_1} \left[\frac{f_1(x_2)}{x_1 - a_r} t_1 - \frac{f_1(x_1)}{x_2 - a_r} t_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

per le quali posto:

$$p_{rs}(u_1, u_2) = \frac{p_r p_s}{x_1 - x_2} \left[\frac{t_1}{(x_1 - a_r)(x_1 - a_s)} - \frac{t_2}{(x_2 - a_r)(x_2 - a_s)} \right] \quad (10)$$

si giunge alla:

$$p_{rs} = -\frac{1}{p_s} \left[f_1(a_s) \frac{dp_r}{du_1} + f_2(a_s) \frac{dp_r}{du_2} \right] \quad (11)$$

od anche, potendosi pel valore di p_{rs} permutare le r, s , alla:

$$p_{sr} = -\frac{1}{p_r} \left[f_1(a_r) \frac{dp_s}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_s}{du_2} \right].$$

Le funzioni $p_{rs}(u_1, u_2)$ definite dalla equazione (10) sono quindi funzioni delle p_r, p_s e delle loro derivate rispetto ad u_1, u_2 . Esse sono evidentemente in numero di dieci e le denomineremo funzioni iperellittiche di primo ordine a due indici.

Dai valori di due qualsivogliano funzioni iperellittiche ad un indice, $p_r,$

p_s , risultando identica la equazione:

$$\frac{p^2_r}{x - a_r} - \frac{p^2_s}{x - a_s} = a_s - a_r$$

per $x = x_1$ e per $x = x_2$, si ha che le x_1, x_2 sono radici di una equazione del secondo grado di cui i coefficienti sono funzioni dei quadrati di due qualsivogliano funzioni iperellittiche ad un indice e di quantità costanti.

Così siccome dalle equazioni (9) si deduce sussistere per $x = x_1, x = x_2$, la relazione:

$$\sqrt{f(x)} = \frac{x - a_r}{p_r} \left[f_1(x) \frac{d p_r}{d u_1} + f_2(x) \frac{d p_r}{d u_2} \right]$$

si ha che anche t_1, t_2 sono radici di una equazione del secondo grado di cui i coefficienti sono funzioni di p^2_r, p^2_s , delle derivate dell'una o dell'altra rispetto ad u_1, u_2 e di quantità costanti.

CAPITOLO II.

Le relazioni algebriche fra le quindici funzioni iperellittiche.

1.° Le note formole relative allo spezzamento delle frazioni algebriche conducono ad un grandissimo numero di relazioni fra le potenze seconde e quarte, ed anco fra prodotti a due a due, ed a quattro a quattro, di funzioni iperellittiche del primo ordine.

Indicando con $(rs), (\lambda\mu), \dots$ i binomi $a_r - a_s, a_\lambda - a_\mu, \dots$ si hanno dapprima fra i quadrati di quelle funzioni le tre relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2_r}{(r\lambda)(r\mu)} + \frac{p^2_\lambda}{(\lambda r)(\lambda\mu)} + \frac{p^2_\mu}{(\mu r)(\mu\lambda)} &= 1 \\ \frac{p^2_{rs}}{(r\lambda)(r\mu)} + \frac{p^2_{\lambda s}}{(\lambda r)(\lambda\mu)} + \frac{p^2_{\mu s}}{(\mu r)(\mu\lambda)} &= (sm) \\ p^2_\mu + \frac{1}{(\lambda r)} [p^2_{\lambda\mu} - p^2_{r\mu}] &= (\mu s)(\mu m) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

e le altre che deduconsi da esse colle permutazioni degli indici r, s, m, λ, μ . Queste relazioni dimostrano tosto come, scielte le tre funzioni $p^2_\lambda, p^2_\mu, p^2_{\lambda\mu}$; i quadrati delle altre dodici si possano esprimere linearmente colle medesime e con un termine costante. Dalla prima delle superiori si ottiene infatti la

seguinte :

$$p^2_r = \frac{1}{(\lambda\mu)} [(\lambda r)p^2_\mu - (\mu r)p^2_\lambda] + (\lambda r)(\mu r) \quad (2)$$

e le altre due sostituendo ad r l'indice s , e l'indice m . Dalla terza si ha in secondo luogo:

$$p^2_{r\mu} = p^2_{\lambda\mu} + (\lambda r)p^2_\mu - (\lambda r)(\mu s)(\mu m) \quad (3)$$

e permutando gli indici λ, μ la:

$$p^2_{r\lambda} = p^2_{\lambda\mu} + (\mu r)p^2_\lambda - (\mu r)(\lambda s)(\lambda m)$$

ed altre quattro colle permutazioni di r con s e con m . Infine la seconda, per queste ultime, conduce alle:

$$\left. \begin{aligned} p^2_{rs} &= p^2_{\lambda\mu} + \frac{1}{(\lambda\mu)} [(\lambda r)(\lambda s)p^2_\mu - (\mu r)(\mu s)p^2_\lambda] \\ p^2_{mr} &= p^2_{\lambda\mu} + \frac{1}{(\lambda\mu)} [(\lambda m)(\lambda r)p^2_\mu - (\mu m)(\mu r)p^2_\lambda] \\ p^2_{sm} &= p^2_{\lambda\mu} + \frac{1}{(\lambda\mu)} [(\lambda s)(\lambda m)p^2_\mu - (\mu s)(\mu m)p^2_\lambda]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

È da notarsi che le relazioni (4) non contengono termine costante, così che quei valori di u_1, u_2 i quali annullano le funzioni $p_\lambda, p_\mu, p_{\lambda\mu}$ annullano altresì le p_{rs}, p_{mr}, p_{sm} . Ora se nelle equazioni (1) del Capitolo I si pongono $x_1 = a_1, x_2 = a_3$, oppure $x_1 = a_3, x_2 = a_1$ si hanno $u_1 = u_2 = 0$; ma quei valori di x_1, x_2 annullano evidentemente le funzioni p_1, p_3, p_{13} , si hanno cioè le:

$$p_1(0, 0) = 0 \quad p_3(0, 0) = 0 \quad p_{13}(0, 0) = 0$$

e per la precedente osservazione le:

$$p_{24}(0, 0) = 0 \quad p_{41}(0, 0) = 0 \quad p_{02}(0, 0) = 0$$

cioè sei fra le quindici funzioni iperellittiche del primo ordine si annullano per $u_1 = u_2 = 0$. Le sei indicate funzioni si diranno per questa loro proprietà funzioni dispari, e le altre nove funzioni pari.

2.° Dalle relazioni superiori scorgesi facilmente che si possono trovare altre combinazioni di tre funzioni pei quadrati delle quali e per un termine costante sieno esprimibili i quadrati delle altre dodici. Per esempio se dalla relazione (2) e dall'ultima delle (4) si ricavano i valori di p^2_λ, p^2_μ e si sostituiscono in tutte le altre, si ottengono i valori dei quadrati di dodici funzioni espressi per $p^2_r, p^2_{sm}, p^2_{\lambda\mu}$ ed un termine costante. Ma si possono anche sciogliere in più modi quattro funzioni ed esprimere in funzione lineare dei qua-

drati di queste i quadrati delle altre undici. Infatti supponendo sieno:

$$\begin{aligned} p^2_{s\lambda} &= Ap^2_r + Bp^2_{sm} + Cp^2_{\lambda\mu} + D \\ p^2_{m\mu} &= A_1p^2_r + B_1p^2_{sm} + C_1p^2_{\lambda\mu} + D_1 \end{aligned}$$

nelle quali A, A_1, \dots sono funzioni di a_r, a_s, \dots moltiplicando la prima equazione per D_1 e sottraendo la seconda moltiplicata per D , si giunge ad esprimere p^2_r per una funzione lineare di $p^2_{s\lambda}, p^2_{m\mu}, p^2_{sm}, p^2_{\lambda\mu}$. Ripetendo la stessa operazione fra una delle due relazioni superiori ed una terza, quella che dà, per esempio, il valore di p^2_{mr} , si otterrà quest'ultima funzione espressa linearmente con $p^2_{\lambda s}, p^2_r, p^2_{sm}, p^2_{\lambda\mu}$ e sostituendo in essa il valore di p^2_r trovato precedentemente si otterrà anche p^2_{mr} espressa in funzione lineare di $p^2_{s\lambda}, p^2_{m\mu}, p^2_{sm}, p^2_{\lambda\mu}$.

Le combinazioni sia di tre, sia di quattro funzioni iperellittiche, per i quadrati delle quali (e per un termine costante nel primo caso), possono esprimersi linearmente i quadrati di tutte le altre, sono in numero di sessanta, raggruppate quattro a quattro rispetto ad alcune proprietà dei coefficienti costanti delle quali si dirà più avanti. Ecco tre gruppi delle indicate combinazioni:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & p_m & p_{\lambda s} & p_{\mu r} & 1 & p_m & p_{\lambda r} & p_{\mu s} & 1 & p_m & p_{rs} & p_{\lambda\mu} \\ p_{rs} & p_{\lambda\mu} & p_{\lambda r} & p_{\mu s} & p_{rs} & p_{\lambda\mu} & p_{\lambda s} & p_{\mu r} & p_{\mu r} & p_{\lambda s} & p_{\lambda r} & p_{\mu s} \\ p_r & p_\mu & p_{mr} & p_{\mu m} & p_r & p_\lambda & p_{mr} & p_{\lambda m} & p_r & p_s & p_{mr} & p_{ms} \\ p_s & p_\lambda & p_{sm} & p_{\lambda m} & p_s & p_\mu & p_{sm} & p_{\mu m} & p_\mu & p_\lambda & p_{\mu m} & p_{\lambda m} \end{array} \quad (5)$$

il secondo ed il terzo dei quali si ottengono permutando nel primo μ con λ e con s . Permutando poi nei tre gruppi m con r, s, λ, μ si ottengono le sessanta combinazioni.

Se, come sopra, supponiamo che gli indici λ, μ rappresentino l'uno o l'altro dei numeri 1, 3 e ciascuno degli indici m, r, s uno dei numeri 0, 2, 4, si vede tosto che nelle combinazioni a tre, le tre funzioni sono due dispari ed una pari, oppure tutte e tre pari; e nelle combinazioni a quattro, due funzioni sono dispari e due pari, oppure le quattro pari.

3.° Consideriamo in questo paragrafo le relazioni esistenti fra i quadrati delle funzioni iperellittiche che appartengono ad uno stesso gruppo, per esempio, al primo dei superiori.

Introdurremo per brevità le seguenti denominazioni:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (\lambda\mu)(\lambda r)(sm) & \gamma &= (rs)(\lambda r)(\mu m) \\ \beta &= (\lambda\mu)(\mu s)(rm) & \delta &= (rs)(\mu s)(\lambda m) \\ g &= (\lambda\mu)(rs)(\lambda r)(\mu s) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

e quindi:

$$\alpha\beta\gamma\delta = g^2 h \quad \beta\gamma - \alpha\delta = \rho g$$

essendo $h = f'(a_m)$ e:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= (\mu m)(r m) - (\lambda m)(s m) = (\mu s)(r m) - (\lambda r)(s m) = \\ &= (r s)(\mu m) - (\lambda \mu)(s m) = (r s)(\lambda m) - (\lambda \mu)(r m) = (\lambda m)(\mu s) - (\lambda r)(\mu m). \end{aligned} \right\} (7)$$

Dalle relazioni (2) (3) (4) trovate sopra, si dedurranno le dodici seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\lambda\mu)p_{rs}^2 &= -\alpha\beta + gp_m^2 + \beta p_{\lambda s}^2 - \alpha p_{\mu r}^2 \\ \rho(r s)p_{\lambda\mu}^2 &= \gamma\delta - gp_m^2 - \gamma p_{\lambda s}^2 + \delta p_{\mu r}^2 \\ \rho(\mu s)p_{\lambda r}^2 &= \beta\delta - gp_m^2 - \beta p_{\lambda s}^2 + \delta p_{\mu r}^2 \\ \rho(\lambda r)p_{\mu s}^2 &= -\alpha\gamma + gp_m^2 + \gamma p_{\lambda s}^2 - \alpha p_{\mu r}^2 \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho(\lambda\mu)(\mu s)p_r^2 &= -\beta\gamma + gp_m^2 + \beta(p_{\lambda s}^2 - p_{\mu r}^2) \\ \rho(r s)(\lambda r)p_{\mu}^2 &= -\beta\gamma + gp_m^2 + \gamma(p_{\lambda s}^2 - p_{\mu r}^2) \\ \rho g p_{m r}^2 &= -\alpha\gamma\delta + \gamma g p_m^2 + \beta\gamma p_{\lambda s}^2 - \alpha\delta p_{\mu r}^2 \\ \rho g p_{\mu m}^2 &= -\alpha\beta\delta + \beta g p_m^2 + \beta\gamma p_{\lambda s}^2 - \alpha\delta p_{\mu r}^2 \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho(\lambda\mu)(\lambda r)p_s^2 &= -\alpha\delta + gp_m^2 + \alpha(p_{\lambda s}^2 - p_{\mu r}^2) \\ \rho(r s)(\mu s)p_{\lambda}^2 &= -\alpha\delta + gp_m^2 + \delta(p_{\lambda s}^2 - p_{\mu r}^2) \\ \rho g p_{s m}^2 &= -\beta\gamma\delta + \delta g p_m^2 + \beta\gamma p_{\lambda s}^2 - \alpha\delta p_{\mu r}^2 \\ \rho g p_{\lambda m}^2 &= -\alpha\beta\gamma + \alpha g p_m^2 + \beta\gamma p_{\lambda s}^2 - \alpha\delta p_{\mu r}^2. \end{aligned} \right\} (10)$$

Queste dodici relazioni, o le altre che da esse si possono dedurre, fra i quadrati delle quindici funzioni iperellittiche sono fondamentali nella teoria delle funzioni stesse, e dovremo sovente richiamarle in seguito.

4.° Passiamo ora a considerare le relazioni fra prodotti di due differenti funzioni iperellittiche. Anche queste possono derivarsi da tre principali colla permutazione degli indici r, s, \dots ; dimostrandosi facilmente la sussistenza delle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda\mu)p_r p_{r m} + (\alpha r)p_{\lambda} p_{\lambda m} + (r\lambda)p_{\mu} p_{\mu m} &= 0 \\ (\lambda\mu)p_{r s} p_{r m} + (\mu r)p_{\lambda s} p_{\lambda m} + (r\lambda)p_{\mu s} p_{\mu m} &= 0 \\ p_{r\lambda} p_{r\mu} - p_{s\lambda} p_{s\mu} + (r s)p_{\lambda} p_{\mu} &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

La forma delle prime due relazioni (1) e delle prime due fra queste ultime, conduce a questo risultato: che scelte opportunamente nove funzioni iperellit-

tiche del primo ordine sussistono fra esse le sei relazioni:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0\end{aligned}$$

e quindi per esse le:

$$\Sigma(\pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3) = 1 \quad \alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2, \dots$$

Queste sei relazioni sono infatti soddisfatte ponendo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{p_r}{\sqrt{(r\lambda)(r\mu)}}, & \beta_1 &= \frac{p_\lambda}{\sqrt{(\lambda r)(\lambda\mu)}}, & \gamma_1 &= \frac{p_\mu}{\sqrt{(\mu r)(\mu\lambda)}} \\ \alpha_2 &= \frac{p_{rs}}{\sqrt{(r\lambda)(r\mu)(sm)}}, & \beta_2 &= \frac{p_{\lambda s}}{\sqrt{(\lambda r)(\lambda\mu)(sm)}}, & \gamma_2 &= \frac{p_{\mu s}}{\sqrt{(\mu r)(\mu\lambda)(sm)}}\end{aligned}$$

ed $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ permutando in queste ultime s ed m .

Giungesi così fra le nove funzioni iperellittiche alla relazione di terzo grado:

$$\begin{vmatrix} p_r & p_\lambda & p_\mu \\ p_{rs} & p_{\lambda s} & p_{\mu s} \\ p_{rm} & p_{\lambda m} & p_{\mu m} \end{vmatrix} = (\lambda\mu)(\lambda r)(\mu r)(sm) \quad (12)$$

ed alle due seguenti:

$$(\lambda\mu)(sm)p_r = p_{\lambda s}p_{\mu m} - p_{\lambda m}p_{\mu s}; \quad (\lambda\mu)p_{rs} = p_\mu p_{\lambda m} - p_\lambda p_{\mu m} \quad (13)$$

formole l'una e l'altra di molto uso in questa teorica. Dalla seconda di esse si deducono le:

$$\begin{aligned}(rs)p_m p_{rs} + (sm)p_r p_{sm} + (mr)p_s p_{mr} &= 0 \\ (rs)p_{m\lambda} p_{rs} + (sm)p_{r\lambda} p_{sm} + (mr)p_{s\lambda} p_{mr} &= (rs)(mr)(ms)p_\mu\end{aligned}$$

le quali si possono ottenere anche direttamente.

Notiamo altresì le seguenti, siccome conseguenza di alcune superiori:

$$\begin{aligned}(rs)(\lambda m)p_{m\lambda}^2 + (sm)(\lambda r)p_{r\lambda}^2 + (mr)(\lambda s)p_{s\lambda}^2 &= (rs)(sm)(rm)p_{\lambda}^2 \\ (rs)(\lambda m)p_{m\lambda} p_{\mu m} + (sm)(\lambda r)p_{r\lambda} p_{r\mu} + (mr)(\lambda s)p_{s\lambda} p_{s\mu} &= (rs)(sm)(rm)p_{\lambda} p_{\mu}\end{aligned}$$

da cui:

$$(rs)(\lambda m)p_{m\lambda} p_{rs} + (sm)(\lambda r)p_{r\lambda} p_{sm} + (mr)(\lambda s)p_{s\lambda} p_{mr} = 0;$$

infine la:

$$\frac{p_m p_{m\lambda}}{(\mu m) g'(a_m)} + \frac{p_r p_{r\lambda}}{(\mu r) g'(a_r)} + \frac{p_s p_{s\lambda}}{(\mu s) g'(a_s)} = \frac{p_\mu p_{\lambda\mu}}{g'(a_\mu)}$$

posto $g(x) = (x - a_m)(x - a_r)(x - a_s)$.

5.° Le relazioni di quarto grado fra funzioni iperellittiche si possono distinguere in due specie; alcune sono conseguenze delle note formole relative allo spezzamento delle frazioni, altre hanno origine nelle relazioni di secondo grado considerate nei precedenti paragrafi.

Incominciando dalle prime, notiamo la:

$$\frac{p^4_r}{f'(a_r)} + \frac{p^4_s}{f'(a_s)} + \frac{p^4_m}{f'(a_m)} + \frac{p^4_\lambda}{f'(a_\lambda)} + \frac{p^4_\mu}{f'(a_\mu)} = 1$$

la quale può anche generalizzarsi osservando che posto:

$$q^2_r = (y_1 - a_r)(y_2 - a_r), \quad q^2_s = (y_1 - a_s)(y_2 - a_s), \dots$$

si ha:

$$\bullet \frac{p^2_r q^2_r}{f'(a_r)} + \frac{p^2_s q^2_s}{f'(a_s)} + \frac{p^2_m q^2_m}{f'(a_m)} + \frac{p^2_\lambda q^2_\lambda}{f'(a_\lambda)} + \frac{p^2_\mu q^2_\mu}{f'(a_\mu)} = 1. \quad (14)$$

Così si ottengono quelle della forma:

$$\frac{1}{f'(a_\lambda)} \left[\frac{(\lambda r)^2}{f'(a_r)} p^2_{\lambda r} q^2_{\lambda r} + \frac{(\lambda s)^2}{f'(a_s)} p^2_{\lambda s} q^2_{\lambda s} + \frac{(\lambda m)^2}{f'(a_m)} p^2_{\lambda m} q^2_{\lambda m} + \frac{(\lambda \mu)^2}{f'(a_\mu)} p^2_{\lambda \mu} q^2_{\lambda \mu} \right] = \left. \begin{aligned} & \\ & = \frac{p^2_\lambda q^2_\lambda}{f'(a_\lambda)} - 1 \end{aligned} \right\} (15)$$

e l'altra, distinta da queste, fra sole funzioni dispari:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(\lambda r)(\mu r)}{g'(a_r)} p^2_{sm} q^2_{sm} + \frac{(\lambda s)(\mu s)}{g'(a_s)} p^2_{mr} q^2_{mr} + \frac{(\lambda m)(\mu m)}{g'(a_m)} p^2_{rs} q^2_{rs} = \\ & = p^2_{\lambda\mu} q^2_{\lambda\mu} - \frac{1}{(\lambda\mu)} [g(a_\lambda) p^2_\mu q^2_\mu - g(a_\mu) p^2_\lambda q^2_\lambda] \end{aligned} \right\} (16)$$

nella quale:

$$g(x) = (x - a_r)(x - a_s)(x - a_m).$$

Infine, fra quelle di questa specie, si hanno ancora le due forme seguenti:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{p_r q_r p_{r\lambda} q_{r\lambda}}{(\mu r) g'(a_r)} + \frac{p_s q_s p_{s\lambda} q_{s\lambda}}{(\mu s) g'(a_s)} + \frac{p_m q_m p_{m\lambda} q_{m\lambda}}{(\mu m) g'(a_m)} = \frac{p_\mu q_\mu p_{\lambda\mu} q_{\lambda\mu}}{g'(a_\mu)} \\ & \frac{p_r q_r p_{sm} q_{sm}}{g'(a_r)} + \frac{p_s q_s p_{mr} q_{mr}}{g'(a_s)} + \frac{p_m q_m p_{rs} q_{rs}}{g'(a_m)} = p_{\lambda\mu} q_{\lambda\mu} \end{aligned} \right\} (17)$$

le quali relazioni torneranno opportune nella ricerca delle formole per l'addizione e per la moltiplicazione delle funzioni iperellittiche.

6.° Le relazioni del quarto grado che dipendono da quelle di secondo grado trovate sopra, hanno esse pure una importante applicazione nelle sopra indicate formole ed in quelle della trasformazione.

Rammentiamo che per le relazioni (8) i valori di $p^2_{\lambda r}$, $p^2_{\mu s}$ sono espressi linearmente pei quadrati di p_m , $p_{\lambda s}$, $p_{\mu r}$ ed un termine costante. Ma per la prima delle relazioni (13) anche il prodotto $p_{\lambda r} p_{\mu s}$ può esprimersi in funzione di p_m , $p_{\lambda s}$, $p_{\mu r}$, giacchè dalla citata formola si ha:

$$p_{\lambda r} p_{\mu s} = p_{\lambda s} p_{\mu r} + (\lambda \mu)(r s) p_m$$

perciò moltiplicando fra loro i valori di $p^2_{\lambda r}$ e di $p^2_{\mu s}$ e sottraendo dal prodotto il quadrato di $p_{\lambda r} p_{\mu s}$, si otterrà una equazione del quarto grado, non omogenea fra le tre funzioni iperellittiche p_m , $p_{\lambda s}$, $p_{\mu r}$. Questa equazione è la seguente:

$$0 = \alpha \beta \gamma \delta + g^2 p_m^4 + \beta \gamma p_{\lambda s}^4 + \alpha \delta p_{\mu r}^4 - (\alpha \delta + \beta \gamma) [g p_m^2 + p_{\lambda s}^2 p_{\mu r}^2] - \left. \begin{aligned} & - (\alpha + \delta) [\beta \gamma p_{\lambda s}^2 + g p_m^2 p_{\mu r}^2] + (\beta + \gamma) [\alpha \delta p_{\mu r}^2 + g p_m^2 p_{\lambda s}^2] + 2 \rho^2 g p_m p_{\lambda s} p_{\mu r} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

nella α , β , γ , δ , g , ρ hanno i valori (6) (7).

Si vede tosto che questa equazione si semplifica dividendola pel prodotto $\alpha \beta \gamma \delta$, dopo aver posto:

$$p_m = y \sqrt[4]{h} \quad p_{\lambda s} = z \sqrt[4]{\alpha \delta} \quad p_{\mu r} = w \sqrt[4]{\beta \gamma} \quad (19)$$

essa diventa la:

$$0 = 1 + y^4 + z^4 + w^4 + 2a(y^2 + z^2 w^2) + 2b(z^2 + w^2 y^2) + \left. \begin{aligned} & + 2c(w^2 + y^2 z^2) + 4k y z w \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

essendo:

$$a = -\frac{1}{2} \frac{\alpha \delta + \beta \gamma}{\sqrt{\alpha \beta \gamma \delta}}, \quad b = -\frac{1}{2} \frac{\alpha + \delta}{\sqrt{\alpha \delta}}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{\beta \gamma}}, \quad k = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\sqrt{g h}} \quad (21)$$

e quindi:

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1.$$

Consideriamo ora la seconda quaderna di funzioni dello stesso gruppo. Dalle relazioni (8) essendo:

$$\begin{aligned} \rho(\lambda s)(\mu r) &= (r s) p^2_{\lambda \mu} - (\lambda \mu) p^2_{r s} - (\mu s) p^2_{\lambda r} + (\lambda r) p^2_{\mu s} \\ - \rho(\lambda s)(\mu r) g p_m^2 &= \alpha \beta (r s) p^2_{\lambda \mu} - \gamma \delta (\lambda \mu) p^2_{r s} - \alpha \gamma (\mu s) p^2_{\lambda r} + \beta \delta (\lambda r) p^2_{\mu s} \end{aligned}$$

e per la prima delle (13):

$$(\lambda s)(\mu r) p_m = p_{\lambda \mu} p_{r s} - p_{\lambda r} p_{\mu s}$$

moltiplicando le prime due ed aggiungendovi il quadrato di quest'ultima moltiplicato per $\rho^2 g$ si ha una equazione omogenea del quarto grado nelle funzioni iperellittiche $p_{\lambda\mu}$, p_{rs} , $p_{\lambda r}$, $p_{\mu s}$.

Posto:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\lambda\mu)} \cdot p_{rs} &= x^4 \sqrt{\alpha\beta}, & \sqrt{(rs)} \cdot p_{\lambda\mu} &= y^4 \sqrt{\gamma\delta} \\ \sqrt{(\mu s)} \cdot p_{\lambda r} &= z^4 \sqrt{\beta\delta}, & \sqrt{(\lambda r)} \cdot p_{\mu s} &= w^4 \sqrt{\alpha\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

questa equazione prende la forma:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2a(x^2 y^2 + z^2 w^2) - 2b(x^2 z^2 + y^2 w^2) - \\ &\quad - 2c(x^2 w^2 + y^2 z^2) - 4kxyzw \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ed in essa appaiono gli stessi coefficienti come nella precedente, salvo che i tre ultimi hanno segno negativo.

Si dimostra nello stesso modo che questa proprietà compete anche alle funzioni della terza e della quarta quaderna del gruppo.

Si hanno quindi sessanta equazioni biquadratiche fra le quindici funzioni iperellittiche del primo ordine; esse però si possono raggruppare quattro a quattro per la persistenza del medesimo valore dei coefficienti.

CAPITOLO III.

Le relazioni differenziali fra le quindici funzioni iperellittiche.

1.° Rammentando la formola (11) del Capitolo I, ossia la:

$$f_1(a_s) \frac{d p_r}{d u_1} + f_2(a_s) \frac{d p_r}{d u_2} = - p_s p_{rs} \quad (1)$$

siccome l'indice s può essere sostituito da m , λ , μ , si potranno da due qualunque fra quelle quattro relazioni ricavare i valori delle derivate $\frac{d p_r}{d u_1}$, $\frac{d p_r}{d u_2}$; e si avranno, per esempio:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(s m) \frac{d p_r}{d u_1} &= f_2(a_s) p_m p_{rm} - f_2(a_m) p_s p_{rs} \\ \varepsilon(s m) \frac{d p_r}{d u_2} &= f_1(a_m) p_s p_{rs} - f_1(a_s) p_m p_{rm} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

posto $\varepsilon = m_0 n_1 - m_1 n_0$ come nel Capitolo I.

Per determinare i valori delle derivate rispetto ad u_1, u_2 delle funzioni iperellittiche a due indici, osserviamo dapprima che dalle equazioni (7) dello stesso Capitolo I, si deducono le seguenti:

$$f_1(a_r) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dx_1}{du_2} = -2 \frac{p^2_r}{x_1 - x_2} \cdot \frac{t_1}{x_1 - a_r}$$

$$f_1(a_r) \frac{dx_2}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dx_2}{du_2} = -2 \frac{p^2_r}{x_2 - x_1} \cdot \frac{t_2}{x_2 - a_r}$$

quindi indicando con $F(x_1, x_2)$ una funzione qualunque di x_1, x_2 , sarà:

$$f_1(a_r) \frac{dF}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dF}{du_2} = -2 \frac{p^2_r}{x_1 - x_2} \left[\frac{dF}{dx_1} \frac{t_1}{x_1 - a_r} - \frac{dF}{dx_2} \frac{t_2}{x_2 - a_r} \right].$$

Supponiamo sostituita in questa relazione dapprima in luogo di F la espressione:

$$F_1 = \frac{t_1}{(x_1 - x_2) h(x_1)}$$

essendo $h(x) = (x - a_m)(x - a_s)$; il secondo membro della relazione stessa diventa eguale a $-p^2_r$, moltiplicato per la espressione:

$$\frac{d}{dx_1} \left[\frac{(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)}{(x_1 - x_2)^2} \right] + \frac{t_1^2}{h^2(x_1)(x_1 - x_2)^2} \left[\frac{(rm)(rs)}{(x_1 - a_r)^2} - 1 \right] -$$

$$- \frac{2}{h(x_1)(x_2 - a_r)} \frac{t_1 t_2}{(x_1 - x_2)^2}$$

e permutando le x_1, x_2 si avrà il valore di quel secondo membro per:

$$F_2 = \frac{t_2}{(x_2 - x_1) h(x_2)}.$$

Il valore quindi dello stesso secondo membro per:

$$F = F_1 + F_2$$

sarà $-\frac{p^2_r}{(x_1 - x_2)^2}$ moltiplicato per la espressione:

$$(rm)(rs) \left[\frac{t_1}{(x_1 - a_r) h(x_1)} - \frac{t_2}{(x_2 - a_r) h(x_2)} \right]^2 - \left[\frac{t_1}{h(x_1)} - \frac{t_2}{h(x_2)} \right]^2$$

ossia rammentando la relazione (5) del Capitolo I, il secondo membro sarà eguale a:

$$-\frac{1}{(rs)} \frac{1}{p^2_m p^2_s} \left\{ (rm) [p^2_s p^2_{mr} - 2p_s p_r p_{ms} p_{mr}] - (ms) p^2_r p^2_{ms} \right\};$$

ma per la stessa (5):

$$p_{ms} = p_m p_s [F_1 + F_2]$$

quindi dopo qualche facile riduzione si giunge alla:

$$f_1(a_r) \frac{d p_{ms}}{d u_1} + f_2(a_r) \frac{d p_{ms}}{d u_2} = - p_{mr} p_{sr}. \quad (3)$$

In questa l'indice r potendo essere sostituito da λ o da μ , si avranno le:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\lambda r) \frac{d p_{ms}}{d u_1} &= f_2(a_\lambda) p_{mr} p_{sr} - f_2(a_r) p_{m\lambda} p_{s\lambda} \\ \varepsilon(\lambda r) \frac{d p_{ms}}{d u_2} &= f_1(a_r) p_{m\lambda} p_{s\lambda} - f_1(a_\lambda) p_{mr} p_{sr}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dalle formole (2) (4) rilevasi tosto che le derivate rispetto ad u_1, u_2 delle nove funzioni iperellittiche pari, nelle quali derivate pongansi $u_1 = u_2 = 0$, sono tutte nulle. Per le sei funzioni dispari, si hanno le relazioni:

$$\varepsilon(3m) \left(\frac{d p_1}{d u_1} \right)_0 = f_2(a_3) p_m(0) p_{1m}(0), \quad \varepsilon(3m) \left(\frac{d p_1}{d u_2} \right)_0 = - f_1(a_3) p_m(0) p_{1m}(0) \quad (5)$$

e le analoghe permutando gli indici 1, 3. Così:

$$\varepsilon(1r) \left(\frac{d p_{ms}}{d u_1} \right)_0 = - f_2(a_r) p_{1m}(0) p_{1s}(0), \quad \varepsilon(1r) \left(\frac{d p_{ms}}{d u_2} \right)_0 = f_1(a_r) p_{1m}(0) p_{1s}(0) \quad (6)$$

e le analoghe colla stessa permutazione. Infine:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(ms) \left(\frac{d p_{\lambda\mu}}{d u_1} \right)_0 &= f_2(a_m) p_{\lambda s}(0) p_{\mu s}(0) - f_2(a_s) p_{\lambda m}(0) p_{\mu m}(0) \\ \varepsilon(ms) \left(\frac{d p_{\lambda\mu}}{d u_2} \right)_0 &= f_1(a_s) p_{\lambda m}(0) p_{\mu m}(0) - f_1(a_m) p_{\lambda s}(0) p_{\mu s}(0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ed in ciascuna di esse le r, m, s possono rappresentare qualunque dei numeri 0, 2, 4.

2.° Scielte ad arbitrio due funzioni iperellittiche ad un indice, per esempio p_r, p_s , si moltiplichino il determinante:

$$D_{rs} = \begin{vmatrix} \frac{d p_r}{d u_1} & \frac{d p_r}{d u_2} \\ \frac{d p_s}{d u_1} & \frac{d p_s}{d u_2} \end{vmatrix}$$

pel determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_\lambda) & f_2(a_\lambda) \\ f_1(a_\mu) & f_2(a_\mu) \end{vmatrix} = \varepsilon(\lambda\mu)$$

nel quale gli indici λ, μ sieno differenti da r, s . Si avrà per la (1):

$$\varepsilon(\lambda\mu)D_{rs} = p_\lambda p_\mu \begin{vmatrix} p_{\lambda r} & p_{\lambda s} \\ p_{\mu r} & p_{\mu s} \end{vmatrix}$$

ma per la prima delle relazioni (13) del Capitolo II, si ha:

$$p_{\lambda r} p_{\mu s} - p_{\lambda s} p_{\mu r} = (\lambda\mu)(rs)p_m$$

quindi si avrà:

$$\varepsilon D_{rs} = (rs)p_m p_\lambda p_\mu$$

cioè il determinante Jacobiano di due funzioni iperellittiche ad un indice è eguale al prodotto di una costante per le altre funzioni iperellittiche ad un indice. Evidentemente si avranno dieci equazioni analoghe alla precedente.

Consideriamo in modo speciale la:

$$\varepsilon D_{\lambda\mu} = (\lambda\mu)p_m p_r p_s \quad (8)$$

e supponendo $\lambda = 1, \mu = 3$ poniamo in essa $u_1 = u_2 = 0$; si avrà pel valore del determinante $D_{13}(0, 0)$:

$$D_{13}(0, 0) = \frac{(13)}{\varepsilon} p_m(0)p_r(0)p_s(0) \quad (9)$$

mentre in tutti gli altri casi nelle stesse condizioni il valore di quel determinante sarà nullo.

Infine siccome per la prima delle relazioni (1) del Capitolo II, i quadrati di tre qualsivogliano funzioni iperellittiche ad un indice possono esprimersi in funzione lineare dei quadrati delle altre due e di un termine costante, si avrà che ciascuno di quei dieci determinanti potrà esprimersi con irrazionali del secondo grado delle stesse funzioni iperellittiche che lo compongono.

Posto, per esempio, nella relazione (8) $p_\lambda = \sqrt{(\lambda\mu) \cdot y_1}$, $p_\mu = \sqrt{(\lambda\mu) \cdot y_2}$ siccome:

$$p_m = \sqrt{(\lambda m)(\mu m)} \sqrt{1 - \frac{y_1}{(\lambda m)} + \frac{y_2}{(\mu m)}}$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{du_1} & \frac{dy_1}{du_2} \\ \frac{dy_2}{du_1} & \frac{dy_2}{du_2} \end{vmatrix} = \\ = \frac{4}{\varepsilon} \sqrt{g(a_\lambda)g(a_\mu)} \left[y_1 y_2 \left(1 - \frac{y_1}{(\lambda m)} + \frac{y_2}{(\mu m)} \right) \left(1 - \frac{y_1}{(\lambda r)} + \frac{y_2}{(\mu r)} \right) \left(1 - \frac{y_1}{(\lambda s)} + \frac{y_2}{(\mu s)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ed indicando con $\sqrt{\Phi(y_1, y_2)}$ il secondo membro, si otterrà la formola di trasformazione di integrali doppi:

$$du_1 du_2 = \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{\Phi(y_1, y_2)}}. \quad (10)$$

3.° Le proprietà esposte nel precedente paragrafo relative a funzioni iperellittiche ad un indice si possono estendere ad alcune determinate combinazioni di funzioni iperellittiche sia ad un indice che a due.

Incomincerò dal dimostrare una proprietà che ha luogo per le funzioni dispari. Considerando il determinante:

$$P = \begin{vmatrix} p_{rs} & \frac{dp_{rs}}{du_1} & \frac{dp_{rs}}{du_2} \\ p_{mr} & \frac{dp_{mr}}{du_1} & \frac{dp_{mr}}{du_2} \\ p_{sm} & \frac{dp_{sm}}{du_1} & \frac{dp_{sm}}{du_2} \end{vmatrix}$$

e moltiplicandolo pel determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(a_\lambda) & f_2(a_\lambda) \\ 0 & f_1(a_\mu) & f_2(a_\mu) \end{vmatrix} = \varepsilon(\lambda, \mu)$$

si ottiene il determinante:

$$\begin{vmatrix} p_{rs} & p_{\lambda r} p_{\lambda s} & p_{\mu r} p_{\mu s} \\ p_{mr} & p_{\lambda r} p_{\lambda m} & p_{\mu r} p_{\mu m} \\ p_{sm} & p_{\lambda s} p_{\lambda m} & p_{\mu s} p_{\mu m} \end{vmatrix}$$

dal quale per le relazioni (11) (13) del Capitolo II, si deduce:

$$P = \frac{1}{\varepsilon} (rs)(rm)(sm) p_\lambda p_\mu p_{i\mu} \quad (11)$$

cioè il determinante P formato colle tre funzioni p_{rs} , p_{mr} , p_{sm} è eguale al prodotto di una costante per le altre tre funzioni p_λ , p_μ , $p_{i\mu}$. Ma se supponiamo λ, μ eguale ad 1, 3 le prime tre come queste ultime sono funzioni dispari, e si ha che il determinante P formato con tre funzioni dispari è eguale al prodotto di una costante per le altre tre funzioni dispari. La proprietà sussiste scegliendo tre qualsivogliano fra quelle sei funzioni per formare un determinante analogo a P .

Così moltiplicando un determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{dp_r}{du_1} & \frac{dp_r}{du_2} \\ \frac{dp_{\lambda r}}{du_1} & \frac{dp_{\lambda r}}{du_2} \end{vmatrix}$$

per:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_s) & f_2(a_s) \\ f_1(a_m) & f_2(a_m) \end{vmatrix} = \varepsilon(sm)$$

trovasi per la seconda delle (13) Capitolo II:

$$Q = -\frac{1}{\varepsilon} p_{rs} p_{rm} p_{r\mu}$$

ed analogamente posto:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{dp_{\lambda r}}{du_1} & \frac{dp_{\lambda r}}{du_2} \\ \frac{dp_{\mu r}}{du_1} & \frac{dp_{\mu r}}{du_2} \end{vmatrix}$$

trovasi:

$$R = \frac{(\lambda\mu)}{\varepsilon} p_r p_{rs} p_{rm}$$

e la proprietà indicata in queste relazioni si verificherà evidentemente ogni qualvolta le due funzioni iperellittiche che formano il determinante Jacobiano avranno un indice comune.

4.° Le proprietà dimostrate nel precedente paragrafo pei determinanti P , oppure Q ed R non sussistono più se le tre funzioni iperellittiche nel primo caso o le due nel secondo appartengono ad una delle combinazioni a quattro, o ad una delle combinazioni a tre, delle sessanta combinazioni trovate nel precedente Capitolo. Anche in questi casi però la ricerca del valore di quei determinanti non è meno importante. Rappresentando con P , Q , R i tre determinanti:

$$P = \begin{vmatrix} \frac{dp_m}{du_1} & \frac{dp_m}{du_2} \\ \frac{dp_{\lambda s}}{du_1} & \frac{dp_{\lambda s}}{du_2} \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} \frac{dp_{\mu r}}{du_1} & \frac{dp_{\mu r}}{du_2} \\ \frac{dp_m}{du_1} & \frac{dp_m}{du_2} \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} \frac{dp_{\lambda s}}{du_1} & \frac{dp_{\lambda s}}{du_2} \\ \frac{dp_{\mu r}}{du_1} & \frac{dp_{\mu r}}{du_2} \end{vmatrix}$$

e moltiplicando il primo di essi per:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_\mu) & f_2(a_\mu) \\ f_1(a_r) & f_2(a_r) \end{vmatrix} = \varepsilon(\mu r)$$

si ha:

$$\varepsilon(\mu r)P = p_\mu p_{rs} p_{ir} p_{\mu m} - p_r p_{i\mu} p_{\mu s} p_{mr}.$$

Ma per le relazioni (13) del Capitolo II:

$$p_{ir} p_{\mu m} = p_{i\mu} p_{mr} - (\lambda m)(\mu r)p_s; \quad p_\mu p_{rs} = p_r p_{\mu s} - (\mu r)p_{\lambda m}$$

quindi:

$$\varepsilon P = -p_{i\mu} p_{\lambda m} p_{mr} - (\lambda m)p_\mu p_s p_{rs}$$

ma si ha ancora:

$$p_{i\mu} p_{mr} = p_{im} p_{\mu r} + (\lambda r)(\mu m)p_s; \quad p_s p_{\lambda m} = p_m p_{is} - (sm)p_{\mu r}$$

perciò:

$$\varepsilon P = -p_{\mu r} [p_{im}^2 + (\lambda m)p_s^2 + \rho(sm)] + \rho p_m p_{is}$$

in cui ρ ha il valore (7) del Capitolo precedente. Sostituendo ora in questa formola per $p_{\lambda m}^2$, p_s^2 i valori dati dalle relazioni (10) di quel Capitolo, si giunge alla:

$$\varepsilon \rho g P = p_{\mu r} [2\alpha \delta p_{\mu r}^2 - (\alpha \delta + \beta \gamma) p_{is}^2 - (\alpha + \delta) g p_m^2 + \alpha \delta (\beta + \gamma)] + \rho^2 g p_m p_{is}$$

la quale rammentando la equazione biquadratica (18) dello stesso Capitolo II ed indicando con F il secondo membro della medesima, può scriversi:

$$\varepsilon \rho g P = \frac{1}{2} \frac{dF}{dp_{\mu r}}$$

ed analogamente si otterrebbero le:

$$\varepsilon \rho g Q = \frac{1}{2} \frac{dF}{dp_{\lambda s}}, \quad \varepsilon \rho g R = \frac{1}{2} \frac{dF}{dp_{in}}$$

Se in luogo di p_m , p_{is} , $p_{\mu r}$ si introducono in queste relazioni i valori (19) del Capitolo precedente e si indicano con y_1 , y_2 ; z_1 , z_2 ; w_1 , w_2 le derivate di y , z , w rispetto ad u_1 , u_2 , le relazioni trovate sopra diventano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon k}{\rho} (z_1 w_2 - z_2 w_1) &= \frac{1}{4} \frac{dF}{dy}, & \frac{\varepsilon k}{\rho} (w_1 y_2 - w_2 y_1) &= \frac{1}{4} \frac{dF}{dz}, \\ \frac{\varepsilon k}{\rho} (y_1 z_2 - y_2 z_1) &= \frac{1}{4} \frac{dF}{dw} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ed in queste $F(y, z, w)$ rappresenta il secondo membro della equazione (20) (Capitolo II).

Due conseguenze si possono dedurre da queste equazioni, la prima riguarda il valore del determinante:

$$\frac{\varepsilon k}{\rho} \begin{vmatrix} y & z & w \\ y_1 & z_1 & w_1 \\ y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix} = - [1 + ay^2 + bz^2 + cw^2 + kyzw] \quad (13)$$

la seconda che indicando con c_1, c_2, c_3 tre costanti e con Δ il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ y_1 & z_1 & w_1 \\ y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

si ha:

$$\frac{\Delta}{c_1 \frac{dF}{dy} + c_2 \frac{dF}{dz} + c_3 \frac{dF}{dw}} = \frac{\rho}{4 \varepsilon k} \quad (14)$$

Le stesse proprietà si verificano per tutte le combinazioni di funzioni iperellittiche legate da una equazione del quarto grado.

Considerando per esempio le quattro funzioni $p_{rs}, p_{\lambda\mu}, p_{\lambda r}, p_{\mu s}$, se indicasi con Φ il secondo membro della equazione (23) del Capitolo precedente, e con:

$$\Sigma(\pm y z_1 w_2) = \begin{vmatrix} y & z & w \\ \frac{dy}{du_1} & \frac{dz}{du_1} & \frac{dw}{du_1} \\ \frac{dy}{du_2} & \frac{dz}{du_2} & \frac{dw}{du_2} \end{vmatrix}$$

si hanno le:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon k}{\rho} \Sigma(\pm y z_1 w_2) &= \frac{1}{4} \frac{d\Phi}{dx}, & \frac{\varepsilon k}{\rho} \Sigma(\pm x z_1 w_2) &= -\frac{1}{4} \frac{d\Phi}{dy} \\ \frac{\varepsilon k}{\rho} \Sigma(\pm x y_1 w_2) &= \frac{1}{4} \frac{d\Phi}{dz}, & \frac{\varepsilon k}{\rho} \Sigma(\pm x y_1 z_2) &= -\frac{1}{4} \frac{d\Phi}{dw} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

e ponendo:

$$\nabla = \Sigma(\pm \gamma_1 y z_1 w_2)$$

essendo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ quattro costanti, si avrà:

$$\frac{\nabla}{\gamma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \gamma_2 \frac{d\Phi}{dy} + \gamma_3 \frac{d\Phi}{dz} + \gamma_4 \frac{d\Phi}{dw}} = \frac{\rho}{4 \varepsilon k} \quad (16)$$

nella quale equazione è osservabile che la quantità costante del secondo membro è la stessa che nella (14).

5.° Vogliamo dimostrare in questo paragrafo che fra le derivate rispetto ad u_1 e ad u_2 delle funzioni iperellittiche appartenenti ad una delle sessanta combinazioni indicate al Capitolo II, sussiste un determinato numero di relazioni lineari. Per esempio fra le sei derivate rispetto ad u_1, u_2 delle funzioni $p_m, p_{\lambda s}, p_{\mu r}$ esistono sei relazioni lineari.

Rammentando essere:

$$\varepsilon(\mu r) \frac{d p_{\lambda s}}{d u_1} = f_2(a_\mu) p_{\lambda r} p_{sr} - f_2(a_r) p_{\lambda \mu} p_{s\mu}$$

$$\varepsilon(\lambda s) \frac{d p_{\mu r}}{d u_1} = f_2(a_\lambda) p_{\mu s} p_{rs} - f_2(a_s) p_{\mu \lambda} p_{r\lambda}$$

moltiplicando la seconda per $(\mu r) p_{\lambda s}$ e sottraendovi la prima moltiplicata per $(\lambda s) p_{\mu r}$, applicando al risultato l'ultima delle relazioni (11) del Capitolo II, si giunge alla:

$$\varepsilon(\lambda s)(\mu r) \left[p_{\lambda s} \frac{d p_{\mu r}}{d u_1} - p_{\mu r} \frac{d p_{\lambda s}}{d u_1} \right] =$$

$$= (rs)(\lambda s) f_2(a_\mu) p_\lambda p_\mu p_{rs} + (\lambda \mu)(\mu r) f_2(a_s) p_r p_s p_{\lambda \mu} + G(\mu s) p_\lambda p_r p_{\mu s}$$

posto:

$$G = (\mu r) f_2(a_\lambda) - (\lambda s) f_2(a_\mu) = (\mu r) f_2(a_s) - (\lambda s) f_2(a_r).$$

Ma essendo per la seconda delle (13) del Capitolo II:

$$p_s p_{\lambda \mu} - p_\lambda p_{\mu s} = (\lambda s) p_{mr} \quad p_r p_{\lambda \mu} - p_\mu p_{\lambda r} = (\mu r) p_{ms}$$

la superiore si trasforma nella:

$$\varepsilon(\mu r) \left[p_{\lambda s} \frac{d p_{\mu r}}{d u_1} - p_{\mu r} \frac{d p_{\lambda s}}{d u_1} \right] =$$

$$= (\lambda \mu)(\mu s) f_2(a_r) p_r p_{mr} - (rs)(\lambda r) f_2(a_\mu) p_\mu p_{m\mu}$$

dalla quale, osservando che:

$$f_1(a_r) \frac{d p_m}{d u_1} + f_2(a_r) \frac{d p_m}{d u_2} = -p_r p_{mr}; \quad f_1(a_\mu) \frac{d p_m}{d u_1} + f_2(a_\mu) \frac{d p_m}{d u_2} = -p_\mu p_{m\mu}$$

si deduce una prima relazione fra $\frac{d p_{\mu r}}{d u_1}$, $\frac{d p_{\lambda s}}{d u_1}$, $\frac{d p_m}{d u_1}$, $\frac{d p_m}{d u_2}$. Sostituendo alle p_m , $p_{\lambda s}$, $p_{\mu r}$ le y , z , w date dalle (19) del precedente Capitolo, e ponendo:

$$a_0 = \frac{1}{\varepsilon(\mu r)\sqrt{g}} [(\lambda \mu)(\mu s) f_1^2(a_r) - (rs)(\lambda r) f_1^2(a_\mu)] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(\lambda s)\sqrt{g}} [(\lambda \mu)(\lambda r) f_1^2(a_s) - (rs)(\mu s) f_1^2(a_\lambda)]$$

$$a_1 = \frac{1}{\varepsilon(\mu r)\sqrt{g}} [(\lambda \mu)(\mu s) f_1(a_r) f_2(a_r) - (rs)(\lambda r) f_1(a_\mu) f_2(a_\mu)]$$

$$a_2 = \frac{1}{\varepsilon(\mu r)\sqrt{g}} [(\lambda \mu)(\mu s) f_2^2(a_r) - (rs)(\lambda r) f_2^2(a_\mu)]$$

(17)

si ottengono le prime due relazioni:

$$wz_1 - zw_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2; \quad wz_2 - zw_2 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 \quad (18)$$

nelle quali, come precedentemente, $y_1 = \frac{dy}{du_1}$, $y_2 = \frac{dy}{du_2}$ e così per z , w . Così posto:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\varepsilon(\mu r)\sqrt{(rm)(\mu m)}} [(\mu m)f_1^2(a_r) - (rm)f_1^2(a_\mu)] \\ c_0 &= \frac{1}{\varepsilon(\lambda s)\sqrt{(sm)(\lambda m)}} [(sm)f_1^2(a_\lambda) - (\lambda m)f_1^2(a_s)] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ed analogamente alle superiori per $b_1, c_1; b_2, c_2$: si hanno le quattro seguenti:

$$\left. \begin{aligned} yw_1 - wy_1 &= b_1 z_1 + b_2 z_2 & zy_1 - yz_1 &= c_1 w_1 + c_2 w_2 \\ yw_2 - wy_2 &= -b_0 z_1 - b_1 z_2 & zy_2 - yz_2 &= -c_0 w_1 - c_1 w_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

I nove coefficienti a_0, b_0, c_0, \dots hanno alcune interessanti proprietà le quali passiamo tosto ad esporre.

Trovansi dapprima essere:

$$a_1^2 - a_0 a_2 = b_1^2 - b_0 b_2 = c_1^2 - c_0 c_2 = 1$$

poi che:

$$\left. \begin{aligned} 2b_1 c_1 - b_0 c_2 - b_2 c_0 &= 2a \\ 2c_1 a_1 - c_0 a_2 - c_2 a_0 &= 2b \\ 2a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0 &= 2c \end{aligned} \right| \begin{array}{ccc} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} = 2k \quad (21)$$

nelle quali a, b, c, k sono i coefficienti della equazione biquadratica (20) del Capitolo II. Per queste proprietà se dalle relazioni (18) (20) si eliminano i rapporti fra le sei derivate si giunge a quella equazione biquadratica.

Se inoltre si pongono:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{n_0 f_2(a_m)}{\sqrt{h}}, & \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{h}} [n_0 f_1(a_m) + m_0 f_2(a_m)], & \alpha_2 &= -\frac{m_0 f_1(a_m)}{\sqrt{h}} \\ \beta_0 &= \frac{f_2(a_\lambda) f_2(a_s)}{\sqrt{\alpha \delta}}, & \beta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha \delta}} [f_1(a_\lambda) f_2(a_s) + f_2(a_\lambda) f_1(a_s)], & \beta_2 &= \frac{f_1(a_\lambda) f_1(a_s)}{\sqrt{\alpha \delta}} \\ \gamma_0 &= \frac{f_2(a_\mu) f_2(a_r)}{\sqrt{\beta \gamma}}, & \gamma_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\beta \gamma}} [f_1(a_\mu) f_2(a_r) + f_2(a_\mu) f_1(a_r)], & \gamma_2 &= \frac{f_1(a_\mu) f_1(a_r)}{\sqrt{\beta \gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

nella prima delle quali è da notarsi che le m_0, n_0 del secondo membro sono i coefficienti di x in $f_1(x), f_2(x)$; e le $\alpha, \beta, \gamma, \delta, h$ hanno i valori (6) del

Capitolo II; trovansi sussistere fra le $a_0, a_1, \dots; \alpha_0, \alpha_1, \dots$ le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 &= -2 \frac{k\varepsilon}{\rho} & a_0 \beta_0 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 &= 0 \\ a_0 \gamma_0 + a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 &= 0 \\ b_0 \alpha_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 &= 0 & b_0 \beta_0 + b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 &= -2 \frac{k\varepsilon}{\rho} \\ b_0 \gamma_0 + b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 &= 0 \\ c_0 \alpha_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 &= 0 & c_0 \beta_0 + c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 &= 0 \\ c_0 \gamma_0 + c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 &= -2 \frac{k\varepsilon}{\rho} . \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Per queste ultime relazioni si ottiene altresì che posto:

$$\begin{aligned} l &= a^2 - 1 & m &= b^2 - 1 & n &= c^2 - 1 \\ \alpha &= a - bc, & \beta &= b - ca, & \gamma &= c - ab \end{aligned}$$

sussistono le:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} l & \beta_1\gamma_1 - 2\beta_0\gamma_2 - 2\beta_2\gamma_0 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} \alpha \\ \beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} m & \gamma_1\alpha_1 - 2\gamma_0\alpha_2 - 2\gamma_2\alpha_0 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} \beta \\ \gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} n & \alpha_1\beta_1 - 2\alpha_0\beta_2 - 2\alpha_2\beta_0 &= \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2} \gamma \end{aligned}$$

e quindi le seguenti:

$$\begin{aligned} a_0 l + b_0 \gamma + c_0 \beta &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \alpha_2 & a_0 \gamma + b_0 m + c_0 \alpha &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \beta_2 & a_0 \beta + b_0 \alpha + c_0 n &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \gamma_2 \\ a_1 l + b_1 \gamma + c_1 \beta &= -\frac{\rho k}{2\varepsilon} \alpha_1 & a_1 \gamma + b_1 m + c_1 \alpha &= -\frac{\rho k}{2\varepsilon} \beta_1 & a_1 \beta + b_1 \alpha + c_1 n &= -\frac{\rho k}{2\varepsilon} \gamma_1 \\ a_2 l + b_2 \gamma + c_2 \beta &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \alpha_0 & a_2 \gamma + b_2 m + c_2 \alpha &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \beta_0 & a_2 \beta + b_2 \alpha + c_2 n &= \frac{\rho k}{\varepsilon} \gamma_0 \end{aligned}$$

e la:

$$\begin{vmatrix} l & \gamma & \beta \\ \gamma & m & \alpha \\ \beta & \alpha & n \end{vmatrix} = k^4.$$

Ma la proprietà principale di quei coefficienti si deduce dai valori stessi delle quantità (17) (19). Supporrò per brevità $f_1(x) = 1$ $f_2(x) = x$ e quindi $\varepsilon = -1$.

I valori (17) sviluppati danno:

$$a_2 \sqrt{g} = a_\mu a_r (a_\lambda + a_s) - a_\lambda a_s (a_\mu + a_r)$$

$$a_1 \sqrt{g} = a_\mu a_r - a_\lambda a_s$$

$$a_0 \sqrt{g} = a_\mu + a_r - a_\lambda - a_s.$$

Si considerino ora le due forme binarie quadratiche:

$$\varphi = (\xi_2 - a_\lambda \xi_1)(\xi_2 - a_s \xi_1)$$

$$\psi = (\xi_2 - a_\mu \xi_1)(\xi_2 - a_r \xi_1)$$

e si formi il covariante simultaneo del secondo ordine:

$$(\varphi \psi) = \frac{d\varphi}{d\xi_1} \frac{d\psi}{d\xi_2} - \frac{d\varphi}{d\xi_2} \frac{d\psi}{d\xi_1}$$

si otterrà:

$$(\varphi \psi) = \sqrt{g} [a_2 \xi_1^2 - 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_0 \xi_2^2]$$

ed essendo $a_1^2 - a_0 a_2 = 1$, g sarà il discriminante di questo covariante simultaneo.

La stessa proprietà ha luogo per le quantità $b_0, b_1, b_2; c_0, c_1, c_2$. Ponendo:

$$\rho = \xi_1 (\xi_2 - a_m \xi_1)$$

il covariante simultaneo quadratico $(\psi \rho)$ ha per coefficienti b_0, b_1, b_2 ed il covariante simultaneo $(\rho \varphi)$ le c_0, c_1, c_2 .

Le tre forme quadratiche φ, ψ, ρ hanno sei invarianti simultanei e cioè:

$$(\varphi \varphi)_2, \quad (\psi \psi)_2, \quad (\rho \rho)_2, \quad (\psi \rho)_2, \quad (\rho \varphi)_2, \quad (\varphi \psi)_2$$

ponendo:

$$A = \overline{(\varphi \psi)_2}^2 - (\varphi \varphi)_2 (\psi \psi)_2, \quad B = \overline{(\psi \rho)_2}^2 - (\psi \psi)_2 (\rho \rho)_2, \quad C = \overline{(\rho \varphi)_2}^2 - (\rho \rho)_2 (\varphi \varphi)_2$$

sono:

$$A = g, \quad B = (a_m - a_r)(a_m - a_\mu), \quad C = (a_m - a_s)(a_m - \lambda)$$

ed i tre coefficienti a, b, c della equazione del quarto grado [(20) del Capitolo II] avranno i seguenti valori:

$$a = \frac{1}{\sqrt{BC}} [(\varphi \psi)_2 (\rho \rho)_2 - (\varphi \rho)_2 (\psi \rho)_2]$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{CA}} [(\psi \rho)_2 (\varphi \varphi)_2 - (\psi \varphi)_2 (\rho \varphi)_2]$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{AB}} [(\rho \varphi)_2 (\psi \psi)_2 - (\rho \psi)_2 (\varphi \psi)_2]$$

infine:

$$2k = \frac{1}{\sqrt{ABC}} \begin{vmatrix} (\varphi\varphi)_2 & (\varphi\psi)_2 & (\varphi\rho)_2 \\ (\psi\varphi)_2 & (\psi\psi)_2 & (\psi\rho)_2 \\ (\rho\varphi)_2 & (\rho\psi)_2 & (\rho\rho)_2 \end{vmatrix}$$

Questo risultato dà una chiara idea del modo di generazione delle quindici equazioni analoghe alla sucitata (20) del Capitolo II. Decomponendo la forma binaria del sesto ordine:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(\xi_2 - a_0\xi_1)(\xi_2 - a_1\xi_1) \dots (\xi_2 - a_4\xi_1)$$

in tre forme quadratiche φ, ψ, ρ , si ha pei valori superiori una prima equazione. Permutando in φ, ψ dapprima gli indici λ, μ , poi gli indici μ, s , se ne ottengono altre due. Infine permutando l'indice m cogli r, s, λ, μ nella forma ρ ed in una delle altre due, si ottengono le quindici equazioni.

6.° Le relazioni (18) (20) conducono a determinare le espressioni dei quadrati della derivate prime y_1, y_2, \dots ; dei loro prodotti due a due, e delle derivate seconde $y_{11}, y_{12}, y_{22}, \dots$, in funzione razionale di y, z, w .

Scriveremo per brevità $(a_0 y_1^2)$ per $a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2$; così $(a_0 y_1 z_1)$ invece di $a_0 y_1 z_1 + a_1 (y_1 z_2 + y_2 z_1) + a_2 y_2 z_2$ ed analogamente per altre espressioni simili. Rammentando le relazioni (12) trovate sopra, e ponendo $r = \frac{\rho}{k\varepsilon}$ si hanno dapprima le:

$$\left. \begin{aligned} (a_0 y_1^2) &= -\frac{r}{4} \left[z \frac{dF}{dz} + w \frac{dF}{dw} \right], & (b_0 z_1^2) &= -\frac{r}{4} \left[w \frac{dF}{dw} + y \frac{dF}{dy} \right], \\ (c_0 w_1^2) &= -\frac{r}{4} \left[y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} \right] \\ (b_0 z_1 w_1) &= \frac{r}{4} w \frac{dF}{dz} & (c_0 w_1 y_1) &= \frac{r}{4} y \frac{dF}{dw} & (a_0 y_1 z_1) &= \frac{r}{4} z \frac{dF}{dy} \\ (c_0 z_1 w_1) &= \frac{r}{4} z \frac{dF}{dw} & (a_0 w_1 y_1) &= \frac{r}{4} w \frac{dF}{dy} & (b_0 y_1 z_1) &= \frac{r}{4} y \frac{dF}{dz} \end{aligned} \right\} (24)$$

e dalla derivazione delle (18) (20) le:

$$(a_0 y_{11}) = \frac{r}{2} \frac{dF}{dy} \quad (b_0 z_{11}) = \frac{r}{2} \frac{dF}{dz} \quad (c_0 w_{11}) = \frac{r}{2} \frac{dF}{dw}. \quad (25)$$

Le altre relazioni esigono qualche maggiore preparazione. Si noti che per le

relazioni (21) si hanno le:

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2)^2 = y_1^2 + a_2(a_0 y_1^2), \quad (a_0 y_1 + a_1 y_2)^2 = y_2^2 + a_0(a_0 y_1^2)$$

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2)(a_1 y_1 + a_2 y_2) = -y_1 y_2 + a_1(a_0 y_1^2)$$

e per esse si deducono dalle (18) le seguenti:

$$(a_0 y_1^2) = 2zw(a_0 z_1 w_1) - w^2(a_0 z_1^2) - z^2(a_0 w_1^2)$$

$$(b_0 y_1^2) - 2c(a_0 y_1^2) = -2zw(b_0 z_1 w_1) + w^2(b_0 z_1^2) + z^2(b_0 w_1^2)$$

$$(c_0 y_1^2) - 2b(a_0 y_1^2) = -2zw(c_0 z_1 w_1) + w^2(c_0 z_1^2) + z^2(c_0 w_1^2)$$

ed altre sei simili dalle (20). Perciò introducendo i tre polinomi Y, Z, W formati colle y, z, w e definiti dalle relazioni:

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{dy} = yY + kzw, \quad \frac{1}{4} \frac{dF}{dz} = zZ + kwy, \quad \frac{1}{4} \frac{dF}{dw} = wW + kyz$$

e ponendo come sopra:

$$\alpha = a - bc, \quad \beta = b - ca, \quad \gamma = c - ab$$

si ottengono i valori delle nove espressioni:

$$\left. \begin{aligned} (b_0 y_1^2) &= r[W + (Z - 2\beta)y^2] & (c_0 z_1^2) &= r[Y + (W - 2\gamma)z^2] \\ (a_0 w_1^2) &= r[Z + (Y - 2\alpha)w^2] & & \\ (c_0 y_1^2) &= r[Z + (W - 2\gamma)y^2] & (a_0 z_1^2) &= r[W + (Y - 2\alpha)z^2] \\ (b_0 w_1^2) &= r[Y + (Z - 2\beta)w^2] & & \\ (a_0 z_1 w_1) &= r[(Y - 2\alpha)zw - ky], & (b_0 w_1 y_1) &= r[(Z - 2\beta)wy - kz], \\ (c_0 y_1 z_1) &= r[(W - 2\gamma)yz - kw]. & & \end{aligned} \right\} (26)$$

Infine essendo per le (18):

$$y_1 = w(a_1 z_1 + a_2 z_2) - z(a_1 w_1 + a_2 w_2),$$

$$-y_2 = w(a_0 z_1 + a_1 z_2) - z(a_0 w_1 + a_1 w_2)$$

derivando la prima per u_2 la seconda per u_1 e sommando si ha:

$$w(a_0 z_{11}) = z(a_0 w_{11})$$

ed analogamente dalle (20):

$$y(b_0 w_{11}) = w(b_0 y_{11}); \quad z(c_0 y_{11}) = y(c_0 z_{11})$$

e per queste:

$$\left. \begin{aligned} (a_0 z_{11}) &= 2rz(Y - \alpha) & (b_0 y_{11}) &= 2ry(Z - \beta) & (c_0 y_{11}) &= 2ry(W - \gamma) \\ (a_0 w_{11}) &= 2rw(Y - \alpha) & (b_0 w_{11}) &= 2rw(Z - \beta) & (c_0 z_{11}) &= 2rz(W - \gamma). \end{aligned} \right\} (27)$$

Le 27 relazioni (24) (25) (26) (27) e le tre (12) danno così i valori dei quadrati, dei prodotti due a due delle derivate prime, e le derivate seconde di y, z, w in funzione razionale intera delle stesse y, z, w e dei coefficienti a, b, c, k della equazione biquadratica $F(y, z, w) = 0$.

7.° Ma queste relazioni si possono ancora semplificare e rendere più atte alle applicazioni, introducendo le $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$ (22) in luogo delle a_0, b_0, c_0, \dots

Scriveremo per brevità $(\alpha_2 y_1^2)$ in luogo di $\alpha_2 y_1^2 - \alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_0 y_2^2$, e $(\alpha_2 z_1 w_1)$ invece di $\alpha_2 z_1 w_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 (z_1 w_2 + z_2 w_1) + \alpha_0 z_2 w_2$; poi:

$$\left. \begin{aligned} L &= y^4 + 2ay^2 + 1, & M &= z^4 + 2bz^2 + 1, & N &= w^4 + 2cw^2 + 1 \\ P &= y^2 + z^2 w^2, & Q &= z^2 + w^2 y^2, & R &= w^2 + y^2 z^2 \end{aligned} \right\} (28)$$

infine come in addietro:

$$l = a^2 - 1, \quad m = b^2 - 1, \quad n = c^2 - 1$$

e si avranno le:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_2 y_1^2) &= L + 2 \frac{l}{k} y z w, & (\gamma_2 z_1^2) &= (\beta_2 w_1^2) = P + 2 \frac{\alpha}{k} y z w \\ (\beta_2 z_1^2) &= M + 2 \frac{m}{k} y z w, & (\alpha_2 w_1^2) &= (\gamma_2 y_1^2) = Q + 2 \frac{\beta}{k} y z w \\ (\gamma_2 w_1^2) &= N + 2 \frac{n}{k} y z w, & (\beta_2 y_1^2) &= (\alpha_2 z_1^2) = R + 2 \frac{\gamma}{k} y z w \\ \frac{1}{2} (\alpha_2 y_{11}) &= y(y^2 + a) + \frac{l}{k} z w, & \frac{1}{2w} (\gamma_2 z_{11}) &= \frac{1}{2z} (\beta_2 w_{11}) = z w + \frac{\alpha}{k} y \\ \frac{1}{2} (\beta_2 z_{11}) &= z(z^2 + b) + \frac{m}{k} w y, & \frac{1}{2y} (\alpha_2 w_{11}) &= \frac{1}{2w} (\gamma_2 y_{11}) = w y + \frac{\beta}{k} z \\ \frac{1}{2} (\gamma_2 w_{11}) &= w(w^2 + c) + \frac{n}{k} y z, & \frac{1}{2z} (\beta_2 y_{11}) &= \frac{1}{2y} (\alpha_2 z_{11}) = y z + \frac{\gamma}{k} w \end{aligned} \right\} (29)$$

da ultimo le nove seguenti:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_2 z_1 w_1) &= (y^2 - a)zw + \frac{1}{k}y(\beta z^2 + \gamma w^2 - l) \\
 (\beta_2 w_1 y_1) &= (z^2 - b)wy + \frac{1}{k}z(\gamma w^2 + \alpha y^2 - m) \\
 (\gamma_2 y_1 z_1) &= (w^2 - c)yz + \frac{1}{k}w(\alpha y^2 + \beta z^2 - n) \\
 (\alpha_2 w_1 y_1) &= (y^2 + a)wy + \frac{1}{k}z(lw^2 + \beta y^2 - \gamma) \\
 (\beta_2 y_1 z_1) &= (z^2 + b)yz + \frac{1}{k}w(my^2 + \gamma z^2 - \alpha) \\
 (\gamma_2 z_1 w_1) &= (w^2 + c)zw + \frac{1}{k}y(nz^2 + \alpha w^2 - \beta) \\
 (\alpha_2 y_1 z_1) &= (y^2 + a)yz + \frac{1}{k}w(lz^2 + \gamma y^2 - \beta) \\
 (\beta_2 z_1 w_1) &= (z^2 + b)zw + \frac{1}{k}y(mw^2 + \alpha z^2 - \gamma) \\
 (\gamma_2 w_1 y_1) &= (w^2 + c)wy + \frac{1}{k}z(ny^2 + \beta w^2 - \alpha).
 \end{aligned} \tag{30}$$

8.° Fra le varie conseguenze che assai facilmente si possono ricavare dalle formole superiori, consideriamo in modo speciale quelle date dalle relazioni seguenti perchè stabiliscono una proprietà caratteristica per le funzioni iperellittiche affatto analoga ad una nota per le funzioni ellittiche. Dalle formole (29) si deducono le:

$$\left(\alpha_2 \frac{d^2 \log y}{du_1^2} \right) = y^2 - \frac{1}{y^2}, \quad \left(\beta_2 \frac{d^2 \log z}{du_1^2} \right) = z^2 - \frac{1}{z^2}, \quad \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log w}{du_1^2} \right) = w^2 - \frac{1}{w^2} \tag{31}$$

poi queste altre tre:

$$\left(\alpha_2 \frac{d^2 \log \frac{w}{z}}{du_1^2} \right) = \frac{w^2}{z^2} - \frac{z^2}{w^2}, \quad \left(\beta_2 \frac{d^2 \log \frac{y}{w}}{du_1^2} \right) = \frac{y^2}{w^2} - \frac{w^2}{y^2}, \quad \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log \frac{z}{y}}{du_1^2} \right) = \frac{z^2}{y^2} - \frac{y^2}{z^2}$$

le quali dimostrano che la proprietà scritta in esse sussiste per le funzioni iperellittiche di ciascuna delle 60 combinazioni.

Queste relazioni dimostrano inoltre che posto:

$$y = \frac{\Theta_m}{\Theta}, \quad z = \frac{\Theta_s}{\Theta}, \quad w = \frac{\Theta_{\mu r}}{\Theta} \tag{32}$$

sussistono le:

$$\begin{aligned}
 \left(\alpha_2 \frac{d^2 \log \Theta}{d u_1^2} \right) &= -y^2 + C_m, & \left(\beta_2 \frac{d^2 \log \Theta}{d u_1^2} \right) &= -z^2 + C_{\lambda s}, \\
 \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log \Theta}{d u_1^2} \right) &= -w^2 + C_{\mu r} \\
 \left(\alpha_2 \frac{d^2 \log \Theta_m}{d u_1^2} \right) &= -\frac{1}{y^2} + C_m, & \left(\beta_2 \frac{d^2 \log \Theta_m}{d u_1^2} \right) &= -\frac{w^2}{y^2} + C_{\lambda s}, \\
 \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log \Theta_m}{d u_1^2} \right) &= -\frac{z^2}{y^2} + C_{\mu r} \\
 \left(\alpha_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\lambda s}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{w^2}{z^2} + C_m, & \left(\beta_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\lambda s}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{1}{z^2} + C_{\lambda s}, \\
 \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\lambda s}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{y^2}{z^2} + C_{\mu r} \\
 \left(\alpha_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\mu r}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{z^2}{w^2} + C_m, & \left(\beta_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\mu r}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{y^2}{w^2} + C_{\lambda s}, \\
 \left(\gamma_2 \frac{d^2 \log \Theta_{\mu r}}{d u_1^2} \right) &= -\frac{1}{w^2} + C_{\mu r}
 \end{aligned} \tag{33}$$

nelle quali $C_m, C_{\lambda s}, C_{\mu r}$ sono tre quantità indeterminate, le quali si dimostrerà più tardi essere costanti. Notiamo che quando sieno soddisfatte le tre prime equazioni superiori, le altre lo sono per le formole differenziali precedentemente stabilite.

Ora la prima di quelle equazioni (33), pei valori (22) di $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, può porsi sotto la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \left[m_0 \frac{d T_m}{d u_1} + n_0 \frac{d T_m}{d u_2} \right] = y^2 - C_m$$

nella quale:

$$T_m = f_1(a_m) \frac{d \log \Theta}{d u_1} + f_2(a_m) \frac{d \log \Theta}{d u_2} \tag{34}$$

od anche per le equazioni differenziali (7) del Capitolo I:

$$\frac{2}{(x_1 - x_2) \sqrt{h}} \left[t_1 \frac{d T_m}{d x_1} - t_2 \frac{d T_m}{d x_2} \right] = y^2 - C_m. \tag{35}$$

Analogamente indicando con T_s la espressione (34) mutato l'indice m in s , si ha per la seconda delle equazioni (33):

$$\frac{2}{(x_1 - x_2) \sqrt{\alpha \delta}} \left[(x_2 - a_\lambda) t_1 \frac{d T_s}{d x_1} - (x_1 - a_\lambda) t_2 \frac{d T_s}{d x_2} \right] = z^2 - C_{\lambda s} \tag{36}$$

nella quale evidentemente possono permutarsi le λ, s ; e così per la terza permutando λ, μ ed s, r . Se ora poniamo nella (35):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_m}{dx_1} &= \frac{1}{2t_1} [f_1(a_m)g_1(x_1) + f_2(a_m)g_2(x_1)] - \frac{d}{dx_1} \left[\frac{t_2 + t_1}{x_2 - x_1} \right] + 2 \frac{t_2}{(x_2 - x_1)^2} \\ \frac{dT_m}{dx_2} &= \frac{1}{2t_2} [f_1(a_m)g_1(x_2) + f_2(a_m)g_2(x_2)] - \frac{d}{dx_2} \left[\frac{t_1 + t_2}{x_1 - x_2} \right] + 2 \frac{t_1}{(x_1 - x_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

nelle quali $g_1(x), g_2(x)$ hanno i valori (2) del Capitolo I, rammentando la equazione fondamentale (3) dello stesso Capitolo, si dimostra facilmente che la equazione (35) è soddisfatta purchè sia:

$$C_m = \frac{m_1 g_1(a_m) + n_0 g_2(a_m)}{\sqrt{h}}. \quad (39)$$

Così mutando nelle (37) m in s e sostituendo i valori risultanti nella (36), questa equazione è pure soddisfatta, ponendo:

$$\left. \begin{aligned} C_{\lambda s} &= \frac{1}{2} \frac{f'(a_\lambda) - f'(a_s)}{a_\lambda - a_s} + \frac{1}{2} [f_1(a_\lambda)g_1(a_s) + f_1(a_s)g_1(a_\lambda) + \\ &\quad + f_2(a_\lambda)g_2(a_s) + f_2(a_s)g_2(a_\lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ed analogamente per la terza permutando λ in μ, s in r .

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{2t_2}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{d}{dx_1} \left[\frac{t_2 + t_1}{x_2 - x_1} \right] &= \frac{d}{dx_1} \left[\frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \right] \\ \frac{2t_1}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{d}{dx_2} \left[\frac{t_1 + t_2}{x_1 - x_2} \right] &= \frac{d}{dx_2} \left[\frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \right]; \end{aligned}$$

se quindi poniamo:

$$f_1(a_m)R_1 + f_2(a_m)R_2 = \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \quad (40)$$

dalle (34) (37) deduciamo le:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \log \Theta}{du_1} &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{g_1(x)}{t} dx + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{x_2} \frac{g_1(x)}{t} dx + R_1 \\ \frac{d \log \Theta}{du_2} &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{g_2(x)}{t} dx + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{x_2} \frac{g_2(x)}{t} dx + R_2, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ma la equazione (40) dovendo sussistere mutando m in s, r, λ, μ ; ne segue

che saranno:

$$m_0 R_1 + n_0 R_2 = 0 \quad m_1 R_1 + n_1 R_2 = \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \quad (42)$$

le quali determinano le R_1, R_2 . Per la funzione $\Theta(u_1, u_2)$ così definita sono i valori di $\left(\frac{d\Theta}{du_1}\right)_0, \left(\frac{d\Theta}{du_2}\right)_0$ cioè corrispondenti ad $u_1 = u_2 = 0$, eguali a zero.

Vedremo in un prossimo Capitolo quali relazioni esistano fra le funzioni $\Theta_m(u_1, u_2), \Theta_{\lambda s}(u_1, u_2), \Theta_{\mu m}(u_1, u_2)$ e la $\Theta(u_1, u_2)$.

CAPITOLO IV.

Le derivate delle funzioni iperellittiche rispetto ai moduli.

1.º Denominando, per ora, moduli delle funzioni iperellittiche le cinque quantità a_0, a_1, \dots, a_4 , passiamo a determinare le espressioni delle derivate delle funzioni stesse rispetto a quei moduli.

Premettiamo però prima alcune formole, le quali avrebbero dovuto trovare posto nel Capitolo precedente, ma le abbiamo riservate al presente per la pronta applicazione che di esse faremo.

Notiamo dapprima che dalla formola:

$$f_1(a_\lambda) \frac{dp_r}{du_1} + f_2(a_\lambda) \frac{dp_r}{du_2} = -p_\lambda p_{r\lambda}$$

e dall'altra nella quale si muti λ in μ (differenti da r), in causa della relazione identica:

$$(\lambda r) f_1(a_\mu) - (\mu r) f_1(a_\lambda) = (\lambda \mu) f_1(a_r)$$

si deduce la seguente:

$$(\lambda \mu) \left[f_1(a_r) \frac{dp_r}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_r}{du_2} \right] = (\mu r) p_\lambda p_{\lambda r} - (\lambda r) p_\mu p_{\mu r} \quad (1)$$

ed analogamente la:

$$(\lambda \mu) \left[f_1(a_r) \frac{dp_{mr}}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_{mr}}{du_2} \right] = (\mu r) p_{\lambda m} p_{\lambda r} - (\lambda r) p_{\mu m} p_{\mu r}. \quad (2)$$

Le formole (1) (2) completano la serie delle formole di questa specie trovate nel Capitolo precedente.

Derivando in secondo luogo la:

$$f_1(a_r) \frac{dp_m}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_m}{du_2} = -p_r p_{mr}$$

rispetto ad u_1 e rispetto ad u_2 e sommando i risultati rispettivamente moltiplicati per $f_1(a_r)$, $f_2(a_r)$, si ottiene:

$$(\lambda\mu)K_r = p_r [(\lambda r)p_{\mu r}p_{\mu m} - (\mu r)p_{\lambda r}p_{\lambda m}] + p_{mr} [(\lambda r)p_{\mu}p_{\mu r} - (\mu r)p_{\lambda}p_{\lambda r}]$$

posto:

$$K_r = f_1^2(a_r) \frac{d^2 p_m}{du_1^2} + 2f_1(a_r)f_2(a_r) \frac{d^2 p_m}{du_1 du_2} + f_2^2(a_r) \frac{d^2 p_m}{du_2^2}. \quad (3)$$

La espressione superiore per trasformazioni delle quali si è fatto uso più volte [relazioni (13) del Capitolo II] diventa la:

$$(\lambda\mu)K_r = 2p_{mr} [(\lambda r)p_{\mu}p_{r\mu} - (\mu r)p_{\lambda}p_{r\lambda}] - \frac{(\lambda\mu)}{(r m)} f'(a_r) p_m$$

e quindi indicando con H_r la espressione:

$$(\lambda\mu)H_r = \frac{1}{p_r} [(\mu r)p_{\lambda}p_{r\lambda} - (\lambda r)p_{\mu}p_{r\mu}] \quad (4)$$

ossia per la (1):

$$H_r = f_1(a_r) \frac{d \log p_r}{du_1} + f_2(a_r) \frac{d \log p_r}{du_2} \quad (5)$$

si otterrà la seguente:

$$\frac{1}{2}K_r + \frac{1}{2}f'(a_r) \frac{d \log f'(a_m)}{da_r} p_m = \left[f_1(a_r) \frac{dp_m}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_m}{du_2} \right] H_r \quad (6)$$

avendo posto $\frac{d \log f'(a_m)}{da_r}$ in luogo di $\frac{1}{a_r - a_m}$. Questa formola vale pel caso di m ed r differenti fra loro, allorquando sia $r = m$ essa deve modificarsi così:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2}K_m + \frac{1}{2}f'(a_m) \frac{d \log (f' a_m)}{da_m} p_m = \\ & = \left[f_1(a_m) \frac{dp_m}{du_1} + f_2(a_m) \frac{dp_m}{du_2} \right] H_m + 2f'(a_m) \left(\frac{dp_m}{da_m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

essendo:

$$\left(\frac{dp_m}{da_m} \right) = \frac{2a_m - x_1 - x_2}{2p_m}.$$

Infine le espressioni H_r , H_m ed analoghe si ponno porre sotto la forma:

$$H_r = \frac{t_1}{x_1 - a_r} + \frac{t_2}{x_2 - a_r} - \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \quad (8)$$

2.° Considerando una funzione iperellittica ad un indice p_m e derivandola rispetto ad a_r si avrà:

$$\frac{dp_m}{du_1} \frac{du_1}{da_r} + \frac{dp_m}{du_2} \frac{du_2}{da_r} + \frac{dp_m}{da_r} = 0 \quad (9)$$

se r ed m differenti fra loro, e pel caso di $r = m$:

$$\frac{dp_m}{du_1} \frac{du_1}{da_m} + \frac{dp_m}{du_2} \frac{du_2}{da_m} + \frac{dp_m}{da_m} = \left(\frac{dp_m}{da_m} \right). \quad (10)$$

I valori delle derivate $\frac{du_1}{da_r}$, $\frac{du_2}{da_r}$ si deducono dalle (6) del Capitolo I nel modo seguente. Essendo:

$$\frac{d}{da_r} \left[\frac{f_1(x)}{t} \right] = \frac{1}{t} \left[\frac{df_1(x)}{da_r} + \frac{f_1(x)}{2(x-a_r)} \right]$$

si ha anche:

$$\frac{d}{da_r} \left[\frac{f_1(x)}{t} \right] = \frac{1}{t} \left[\frac{df_1(x)}{da_r} + \frac{f_1(x) - f_1(a_r)}{2(x-a_r)} + \frac{f_1(a_r)}{2(x-a_r)} \right]$$

La espressione lineare rispetto ad x :

$$\frac{df_1(x)}{da_r} + \frac{f_1(x) - f_1(a_r)}{2(x-a_r)} = \frac{dm_0}{da_r} x + \frac{dm_1}{da_r} + \frac{1}{2} m_0$$

si può porre sotto la forma:

$$h_{1r} f_1(x) + h_{2r} f_2(x)$$

quando sieno:

$$m_0 h_{1r} + n_0 h_{2r} = \frac{dm_0}{da_r}, \quad m_1 h_{1r} + n_1 h_{2r} = \frac{dm_1}{da_r} + \frac{1}{2} m_0; \quad (11)$$

e trovasi facilmente, sviluppando il secondo membro della relazione (3) del Capitolo I, e ponendo dopo in essa $x_1 = a_r$ $x_2 = x$ che:

$$\begin{aligned} & \frac{f_1(a_r)}{2(x-a_r)t} = \\ & = \frac{f_1(a_r)}{f'(a_r)} \left\{ \frac{1}{2t} [f_1(x)g_1(a_r) + f_2(x)g_2(a_r) - g_1(x)f_1(a_r) - g_2(x)f_2(a_r)] - \frac{d}{dx} \left(\frac{t}{x-a_r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Per queste relazioni, ricordando le (6) del Capitolo I e le (41) del precedente; si giunge alle:

$$\left. \begin{aligned} 2f'(a_r) \frac{du_1}{da_r} &= Q_r - f_1(a_r) [T_r + H_r] \\ 2f'(a_r) \frac{du_2}{da_r} &= R_r - f_2(a_r) [T_r + H_r] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

essendo Q_r, R_r le due funzioni lineari di u_1, u_2 seguenti:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= [f_1(a_r)g_1(a_r) + 2h_{1r}f'(a_r)]u_1 + [f_1(a_r)g_2(a_r) + 2h_{2r}f'(a_r)]u_2 \\ R_r &= [f_2(a_r)g_1(a_r) + 2k_{1r}f'(a_r)]u_1 + [f_2(a_r)g_2(a_r) + 2k_{2r}f'(a_r)]u_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(le k_{1r}, k_{2r} si deducono dalle (11) sostituendo nei secondi membri n_0, n_1 ad m_0, m_1), T_r come nell'ultimo paragrafo del Capitolo precedente rappresenta la espressione:

$$T_r = f_1(a_r) \frac{d \log \Theta}{du_1} + f_2(a_r) \frac{d \log \Theta}{du_2}$$

ed H_r ha il valore (8) superiore.

Si osservi che le formole (12) sussistono anche nel caso in cui l'indice r sia eguale ad 1 od a 3, cioè la a_r sia uno dei limiti dell'integrale.

Sostituendo le espressioni (12) nella (9), rammentando la relazione (6) sopra stabilita, si avrà la seguente:

$$\left. \begin{aligned} 4f'(a_r) \frac{dp_m}{da_r} &= f'(a_r) \frac{d \log f'(a_m)}{da_r} p_m - 2 \left(Q_r \frac{dp_m}{du_1} + R_r \frac{dp_m}{du_2} \right) + \\ &+ 2T_r \left[f_1(a_r) \frac{dp_m}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dp_m}{du_2} \right] + K_r \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

equazione, la quale sussiste anche per $r = m$, come provasi facilmente sostituendo i valori (12) nella (10) e tenendo conto della (7).

Se infine nella (14) si pone come nei due precedenti Capitoli:

$$p_m = y \sqrt[4]{h} = y \sqrt[4]{f'(a_m)}$$

si ottiene la:

$$\left. \begin{aligned} 4f'(a_r) \frac{dy}{da_r} &= -2(Q_r y_1 + R_r y_2) + 2T_r [f_1(a_r) y_1 + f_2(a_r) y_2] + \\ &+ f_1^2(a_r) y_{11} + 2f_1(a_r) f_2(a_r) y_{12} + f_2^2(a_r) y_{22} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

essendo come nell'ultimo Capitolo $y_1 = \frac{dy}{du_1}, y_2 = \frac{dy}{du_2}, \dots$ Affatto analogamente si troverebbero le due relazioni differenziali che si hanno sostituendo in quest'ultima alla y le z, w .

Le relazioni (14) o (15) e le altre della stessa specie, danno i valori delle derivate rispetto ai parametri di una qualsivoglia funzione iperellittica. Queste espressioni si semplificano allorquando sieno $m_0 = n_1 = 0, m_1 = n_0 = 1$, giacchè in questo caso si hanno le:

$$h_{1r} = 0, \quad h_{2r} = 0; \quad k_{1r} = \frac{1}{2}, \quad k_{2r} = 0. \quad (16)$$

I valori (12) di Q_r, R_r conducono, nella stessa ipotesi, alle:

$$\sum_0^k \frac{Q_r}{f'(a_r)} = 0, \quad \sum_0^k \frac{R_r}{f'(a_r)} = 2u_1$$

$$\sum_0^k \frac{a_r Q_r}{f'(a_r)} = -3u_1, \quad \sum_0^k \frac{a_r R_r}{f'(a_r)} = -u_2$$

e quindi da una qualsivoglia delle quindici equazioni analoghe alla (15), si ottengono due relazioni simili alle seguenti:

$$\sum_0^k \frac{dy}{da_r} = -u_1 \frac{dy}{du_2}, \quad \sum_0^k a_r \frac{dy}{da_r} = \frac{1}{2} \left(3u_1 \frac{dy}{du_1} + u_2 \frac{dy}{du_2} \right) \quad (17)$$

relazioni le quali dimostrano la proprietà caratteristica dello sviluppo in serie delle quindici funzioni iperellittiche. Si avranno cioè per le nove funzioni pari:

$$\frac{y}{y_0} = 1 + (u_1, u_2)_2 + (u_1, u_2)_4 + \dots$$

essendo y_0 il valore di y corrispondente ad $u_1 = u_2 = 0$, ed $(u_1, u_2)_n$ una forma binaria dell'ordine n ; e per le sei dispari:

$$y = (u_1, u_2)_1 + (u_1, u_2)_3 + (u_1, u_2)_5 + \dots$$

essendo:

$$(u_1, u_2)_1 = \left(\frac{dy}{du_1} \right)_0 u_1 + \left(\frac{dy}{du_2} \right)_0 u_2.$$

Tutte queste forme binarie hanno poi una proprietà *invariantiva* che scaturisce dalle (17).

Sia infatti:

$$\varphi = c_0 u_1^n + n c_1 u_1^{n-1} u_2 + \frac{n(n-1)}{2} c_2 u_1^{n-2} u_2^2 + \dots + c_n u_2^n$$

una delle forme binarie di cui componesi lo sviluppo di y , tanto pel caso che y sia funzione pari, quanto in quella che sia funzione dispari. Evidentemente le relazioni (17) dovranno verificarsi per ciascuna forma binaria φ ; dovranno cioè essere identicamente:

$$\sum_0^k \frac{d\varphi}{da_r} = -u_1 \frac{d\varphi}{du_2}, \quad \sum_0^k a_r \frac{d\varphi}{da_r} = \frac{1}{2} \left(3u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + u_2 \frac{d\varphi}{du_2} \right) = u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + \frac{n}{2} \varphi.$$

La prima di esse dà pei coefficienti c_0, c_1, \dots, c_n le seguenti proprietà:

$$\sum_0^k \frac{dc_0}{da_r} = -n c_1, \quad \sum_0^k \frac{dc_1}{da_r} = -(n-1) c_2, \dots, \quad \sum_0^k \frac{dc_n}{da_r} = 0$$

e la seconda queste altre:

$$\sum_r^k a_r \frac{d c_0}{d a_r} = \frac{3n}{2} c_0, \quad \sum_r^k a_r \frac{d c_1}{d a_r} = \frac{3n-2}{2} c_1, \dots, \quad \sum_r^k a_r \frac{d c_s}{d a_r} = \frac{3n-2s}{2} c_s.$$

Ne risulta che nello sviluppo in serie di qualsivoglia funzione iperellittica di primo ordine, quando sia noto il coefficiente c_0 in una delle forme binarie φ di cui componesi quello sviluppo, gli altri coefficienti si deducono per semplice derivazione rispetto ai moduli; che inoltre questo coefficiente incognito deve soddisfare alla condizione che, l'ordine della forma φ essendo n , il suo peso sia $\frac{3n}{2}$. Queste proprietà, note nella teorica dei covarianti, dimostrano il carattere invariante delle forme che compongono quegli sviluppi in serie.

3.° Posto:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{g_1(x)}{t} dx + \frac{1}{2} \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_1(x)}{t} dx \\ v_2 &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{x_1} \frac{g_2(x)}{t} dx + \frac{1}{2} \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_2(x)}{t} dx \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

si otterranno da queste i valori di $\frac{d v_1}{d a_r}$, $\frac{d v_2}{d a_r}$ nello stesso modo seguito nel paragrafo precedente per giungere alle (12). Ponendo perciò le espressioni del terzo grado in x :

$$\begin{aligned} \frac{d g_1(x)}{d a_r} + \frac{g_1(x) - g_1(a_r)}{2(x - a_r)} &= h'_{1r} f_1(x) + h'_{2r} f_2(x) - h'_{3r} g_1(x) - h'_{4r} g_2(x) \\ \frac{d g_2(x)}{d a_r} + \frac{g_2(x) - g_2(a_r)}{2(x - a_r)} &= k'_{1r} f_1(x) + k'_{2r} f_2(x) - k'_{3r} g_1(x) - k'_{4r} g_2(x) \end{aligned}$$

nelle quali le costanti h'_{1r} , k'_{1r} , ... sono funzioni di b_0 , b_1 , ..., c_0 , c_1 , ... e delle loro derivate rispetto ad a_r , si avranno come espressioni di quelle derivate le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} 2f'(a_r) \frac{d v_1}{d a_r} &= Q'_r - Q''_r - g_1(a_r) \left[\frac{t_1}{x_1 - a_r} + \frac{t_2}{x_2 - a_r} \right] \\ 2f'(a_r) \frac{d v_2}{d a_r} &= R'_r - R''_r - g_2(a_r) \left[\frac{t_1}{x_1 - a_r} + \frac{t_2}{x_2 - a_r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

essendo analogamente alle (13) Q'_r , R'_r funzioni lineari di u_1 , u_2 ; Q''_r , R''_r funzioni lineari di v_1 , v_2 e cioè:

$$\begin{aligned} Q'_r &= [g_1(a_r)g_1(a_r) + 2h'_{1r}f'(a_r)]u_1 + [g_1(a_r)g_2(a_r) + 2h'_{2r}f'(a_r)]u_2 \\ R'_r &= [g_2(a_r)g_1(a_r) + 2k'_{1r}f'(a_r)]u_1 + [g_2(a_r)g_2(a_r) + 2k'_{2r}f'(a_r)]u_2 \end{aligned}$$

e:

$$Q''_r = [g_1(a_r)f_1(a_r) + 2h'_{3r}f'(a_r)]v_1 + [g_1(a_r)f_2(a_r) + 2h'_{4r}f'(a_r)]v_2$$

$$R''_r = [g_2(a_r)f_1(a_r) + 2k'_{3r}f'(a_r)]v_1 + [g_2(a_r)f_2(a_r) + 2k'_{4r}f'(a_r)]v_2.$$

Se supponiamo $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ e le $g_1(x)$, $g_2(x)$ abbiano i valori (5) del Capitolo I, queste equazioni si semplificano essendo in questo caso:

$$\left. \begin{aligned} h'_{1r} &= -\frac{1}{2}(3a_r^2 + 2A_1a_r + A_2), & h'_{2r} &= -\frac{1}{2}a_r, & h'_{3r} &= 0 & h'_{4r} &= \frac{1}{2} \\ k'_{1r} &= -\frac{1}{2}a_r, & k'_{2r} &= -\frac{1}{2} & k'_{3r} &= 0 & k'_{4r} &= 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

4.º Dalle due equazioni (12) si deduce la:

$$f_1(a_r)\frac{du_2}{da_r} - f_2(a_r)\frac{du_1}{da_r} = [h'_{1r}f_1(a_r) - h'_{1r}f_2(a_r)]u_1 + [k'_{2r}f_1(a_r) - h'_{2r}f_2(a_r)]u_2$$

e perciò quando $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, e sussistano le (16), si avrà:

$$\frac{du_2}{da_r} = a_r \frac{du_1}{da_r} + \frac{1}{2}u_1. \quad (21)$$

Così dalle (12) e (19), osservando che:

$$T_r - \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} = f_1(a_r)v_1 + f_2(a_r)v_2$$

si deducono le due:

$$f_1(a_r)\frac{dv_2}{da_r} - g_2(a_r)\frac{du_1}{da_r} = [k'_{1r}f_1(a_r) - h'_{1r}g_2(a_r)]u_1 + [k'_{2r}f_1(a_r) - h'_{2r}g_2(a_r)]u_2 - f_1(a_r)[k'_{3r}v_1 + h'_{4r}v_2]$$

$$f_2(a_r)\frac{dv_1}{da_r} - g_1(a_r)\frac{du_2}{da_r} = [h'_{1r}f_2(a_r) - k'_{1r}g_1(a_r)]u_1 + [h'_{2r}f_2(a_r) - k'_{2r}g_1(a_r)]u_2 - f_2(a_r)[h'_{3r}v_1 + h'_{4r}v_2].$$

Da queste si hanno i valori di $\frac{du_2}{da_r}$, $\frac{dv_1}{da_r}$, $\frac{dv_2}{da_r}$ espressi per $\frac{du_1}{da_r}$, u_1 , u_2 ; v_1 , v_2 .

Nel caso sopra considerato alla equazione (21) devono aggiungersi le due seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_2}{da_r} &= -a_r^2 \frac{du_1}{da_r} - \frac{1}{2}a_ru_1 - \frac{1}{2}u_2 \\ \frac{dv_1}{da_r} &= g_1(a_r)\frac{du_1}{da_r} - \frac{1}{2}(3a_r^2 + 2A_1a_r + A_2)u_1 - \frac{1}{2}a_ru_2 - \frac{1}{2}v_2 \end{aligned} \right\} (22)$$

mentre dalla prima delle (12) si ha:

$$2f'(a_r)\frac{du_1}{da_r} = g_1(a_r)u_1 + g_2(a_r)u_2 - v_1 - a_rv_2 - \frac{t_1}{x_1 - a_r} - \frac{t_2}{x_2 - a_r}. \quad (23)$$

Ci serviremo di queste formole nel Capitolo seguente.

CAPITOLO V.

Gli integrali completi di prima e di seconda specie.

1.° Partendo dalla definizione data nel Capitolo I, per gli integrali normali iperellittici del primo ordine di prima e di seconda specie, denomineremo integrali completi di prima specie gli otto integrali definiti seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_3} \frac{f_1(x)}{t} dx, & \omega_{21} &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_3} \frac{f_2(x)}{t} dx \\ \omega_{12} &= \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_4} \frac{f_1(x)}{t} dx, & \omega_{22} &= \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_4} \frac{f_2(x)}{t} dx \\ \omega_{13} &= \frac{1}{2} \int_{a_0}^{a_1} \frac{f_1(x)}{t} dx, & \omega_{23} &= \frac{1}{2} \int_{a_0}^{a_1} \frac{f_2(x)}{t} dx \\ \omega_{14} &= \omega_{13} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_2} \frac{f_1(x)}{t} dx, & \omega_{24} &= \omega_{23} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_2} \frac{f_2(x)}{t} dx \end{aligned} \right\} (1)$$

e si otterranno gli otto integrali completi di seconda specie $\eta_{11}, \eta_{21}; \eta_{12}, \eta_{22}; \eta_{13}, \eta_{23}; \eta_{14}, \eta_{24}$ mutando nelle espressioni superiori $f_1(x)$ in $g_1(x)$, $f_2(x)$ in $g_2(x)$. Fra questi sedici integrali sussistono alcune note relazioni alle quali giungesi facilmente ricorrendo alla formola (3) del Capitolo I. Esse sono le sei seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} \eta_{12} - \omega_{13} \eta_{11} + \omega_{21} \eta_{23} - \omega_{22} \eta_{21} &= 0 & \omega_{12} \eta_{13} - \omega_{13} \eta_{12} + \omega_{22} \eta_{23} - \omega_{23} \eta_{22} &= 0 \\ \omega_{11} \eta_{13} - \omega_{13} \eta_{11} + \omega_{21} \eta_{23} - \omega_{23} \eta_{21} &= -\frac{\pi i}{2} & \omega_{12} \eta_{14} - \omega_{14} \eta_{12} + \omega_{22} \eta_{24} - \omega_{24} \eta_{22} &= -\frac{\pi i}{2} \\ \omega_{11} \eta_{14} - \omega_{14} \eta_{11} + \omega_{21} \eta_{24} - \omega_{24} \eta_{21} &= 0 & \omega_{13} \eta_{14} - \omega_{14} \eta_{13} + \omega_{23} \eta_{24} - \omega_{24} \eta_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Convieni però dare alle medesime una forma che ci sarà utile in seguito. Posto:

$$m_{rs} = \omega_{1r} \omega_{2s} - \omega_{1s} \omega_{2r} = -m_{sr}$$

dalle relazioni superiori si deducono queste altre:

$$\left. \begin{aligned} m_{12} \eta_{24} + m_{24} \eta_{21} + m_{41} \eta_{23} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{11} & m_{12} \eta_{23} + m_{23} \eta_{21} + m_{31} \eta_{22} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{12} \\ m_{12} \eta_{13} + m_{23} \eta_{11} + m_{31} \eta_{12} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{22} & m_{13} \eta_{14} + m_{24} \eta_{11} + m_{41} \eta_{12} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{21} \\ m_{34} \eta_{21} + m_{41} \eta_{23} + m_{13} \eta_{24} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{14} & m_{31} \eta_{22} + m_{42} \eta_{23} + m_{23} \eta_{24} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{13} \\ m_{34} \eta_{12} + m_{42} \eta_{13} + m_{23} \eta_{14} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{23} & m_{34} \eta_{11} + m_{41} \eta_{13} + m_{13} \eta_{14} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{24} \end{aligned} \right\} (3)$$

le quali posto:

$$D = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \eta_{24} \end{vmatrix} \quad (4)$$

possono scriversi così:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dD}{d\eta_{11}} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{12} & \frac{dD}{d\eta_{12}} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{14} & \frac{dD}{d\eta_{13}} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{11} & \frac{dD}{d\eta_{14}} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{12} \\ \frac{dD}{d\eta_{21}} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{23} & \frac{dD}{d\eta_{22}} &= \frac{\pi i}{2} \omega_{24} & \frac{dD}{d\eta_{23}} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{21} & \frac{dD}{d\eta_{24}} &= -\frac{\pi i}{2} \omega_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ed analogamente si hanno le altre otto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dD}{d\omega_{11}} &= -\frac{\pi i}{2} \eta_{13} & \frac{dD}{d\omega_{12}} &= -\frac{\pi i}{2} \eta_{14} & \frac{dD}{d\omega_{13}} &= \frac{\pi i}{2} \eta_{11} & \frac{dD}{d\omega_{14}} &= \frac{\pi i}{2} \eta_{12} \\ \frac{dD}{d\omega_{21}} &= -\frac{\pi i}{2} \eta_{23} & \frac{dD}{d\omega_{22}} &= -\frac{\pi i}{2} \eta_{24} & \frac{dD}{d\omega_{23}} &= \frac{\pi i}{2} \eta_{21} & \frac{dD}{d\omega_{24}} &= \frac{\pi i}{2} \eta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ma per una nota proprietà dei determinanti:

$$\begin{aligned} \omega_{11} \frac{dD}{d\omega_{11}} + \omega_{21} \frac{dD}{d\omega_{21}} + \eta_{11} \frac{dD}{d\eta_{11}} + \eta_{21} \frac{dD}{d\eta_{21}} &= D \\ \omega_{11} \frac{dD}{d\eta_{21}} + \omega_{12} \frac{dD}{d\eta_{22}} + \omega_{13} \frac{dD}{d\eta_{23}} + \omega_{14} \frac{dD}{d\eta_{24}} &= 0 \end{aligned}$$

sarà quindi per la prima $D = -\frac{\pi^2}{4}$ e per la seconda:

$$\omega_{11} \omega_{23} - \omega_{13} \omega_{21} + \omega_{13} \omega_{24} - \omega_{14} \omega_{22} = 0 \quad (7)$$

ed analogamente:

$$\eta_{11} \eta_{23} - \eta_{13} \eta_{21} + \eta_{12} \eta_{24} - \eta_{14} \eta_{22} = 0.$$

Le formole (5) (6), come quella che dà il valore di D , si possono anche ottenere direttamente applicando un noto metodo di trasformazione di integrali multipli. (*)

(*) Si può consultare la quarta delle lettere di ROSENHAIN a JACOBI nel Vol. 40 del Giornale di CRELLE; e l'ultima parte della Memoria di JACOBI: *De binis quibuslibet Functionibus homogeneis secundi ordinis, etc.*, nel Vol. 12 dello stesso Giornale. Vedi anche Annali di Matematica, Tom. I, anno 1858, pag. 17.

2.° Considerando le equazioni (6) del Capitolo I, ed i valori superiori degli integrali completi di prima specie, si vede che per determinati valori di x_1, x_2 , le u_1, u_2 possono assumere i valori $\omega_{11}, \omega_{21}, \dots$. Analogamente le $\frac{d \log \Theta}{d u_1}$, $\frac{d \log \Theta}{d u_2}$ o le v_1, v_2 del Capitolo precedente in causa delle equazioni (41) del Capitolo III, diventano le $\eta_{11}, \eta_{21}, \dots$.

Riservando al successivo Capitolo la determinazione dei valori delle funzioni iperellittiche corrispondenti a quei valori degli argomenti u_1, u_2 ; passiamo ora alla ricerca delle relazioni differenziali esistenti fra quegli integrali completi. Supponendo $f_1(x) = 1$ $f_2(x) = x$, esse sono una conseguenza delle equazioni (21) (22) (23) del Capitolo precedente. L'ultima di queste, ricordando l'osservazione già fatta relativa alla derivazione sotto l'integrale, dà quattro equazioni della forma:

$$2f'(a_r) \frac{d\omega_{11}}{da_r} = g_1(a_r)\omega_{11} + g_2(a_r)\omega_{21} - \eta_{11} - a_r\eta_{21} \quad (8)$$

e le altre tre si ottengono da questa sostituendo ad ω_{11} le $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}$ e facendo nel secondo membro le corrispondenti sostituzioni.

Per la (21) si avrà la:

$$\frac{d\omega_{21}}{da_r} = a_r \frac{d\omega_{11}}{da_r} + \frac{1}{2} \omega_{11} \quad (9)$$

ed altre tre analoghe per $\omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}$.

La seconda delle (22) darà:

$$\frac{d\eta_{11}}{da_r} = g_1(a_r) \frac{d\omega_{11}}{da_r} - \frac{1}{2} (3a_r^2 + A_1 a_r + A_2) \omega_{11} - \frac{1}{2} a_r \omega_{21} - \frac{1}{2} \eta_{21} \quad (10)$$

ed altre tre per $\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{14}$; infine la prima delle (22) conduce alla:

$$\frac{d\eta_{21}}{da_r} = -a_r^2 \frac{d\omega_{11}}{da_r} - \frac{1}{2} a_r \omega_{11} - \frac{1}{2} \omega_{21} \quad (11)$$

ed alle altre tre per $\eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}$.

È evidente che derivando l'equazione superiore (8) tre volte rispetto ad a_r si otterrà, in causa delle (9) (10) (11), una equazione differenziale del quarto ordine per ω_{11} . Questa equazione differenziale, di forma assai semplice, è la seguente:

$$A \frac{d^4 \omega_{11}}{da_r^4} + 3B \frac{d^3 \omega_{11}}{da_r^3} + \frac{25}{4} C \frac{d^2 \omega_{11}}{da_r^2} + \frac{15}{2} D \frac{d\omega_{11}}{da_r} + \frac{45}{16} \omega_{11} = 0 \quad (12)$$

nella quale:

$$A = f'(a_r), \quad B = \frac{dA}{da_r}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{d^2 A}{da_r^2}, \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 A}{da_r^3}.$$

Ponendo $r = 0, 1, 2, 3, 4$, si hanno così cinque equazioni differenziali del quarto ordine per ω_{11} , e le identiche equazioni per $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}$; ossia $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}$ sono integrali particolari di ciascuna di esse. Si può dare altresì a quella equazione una forma abbastanza rimarchevole osservando che indicato con δ la radice quadrata del discriminante di $f(x)$, o meglio del discriminante della forma binaria del sesto ordine:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^5 + A_1 \xi_1^4 \xi_2 + \dots + A_5 \xi_2^5)$$

e con δ_r la radice quadrata del discriminante della stessa forma divisa per il fattore $\xi_1 - a_r \xi_2$, si ha, come è noto,

$$f'(a_r) = \frac{\delta}{\delta_r}$$

quindi l'equazione differenziale superiore diventa:

$$\delta \frac{d^4 \omega_{11}}{da_r^4} + 3 \frac{d\delta}{da_r} \frac{d^3 \omega_{11}}{da_r^3} + \frac{25}{8} \frac{d^2 \delta}{da_r^2} \frac{d^2 \omega_{11}}{da_r^2} + \frac{5}{4} \frac{d^3 \delta}{da_r^3} \frac{d \omega_{11}}{da_r} + \frac{45}{16} \delta_r \omega_{11} = 0.$$

Queste sono le forme delle equazioni differenziali degli integrali completi quando si assumono per moduli o per variabili principali le quantità a, a_1, \dots, a_4 ; esse però possono subire altre trasformazioni scegliendo opportunamente per variabili principali alcune determinate funzioni di quelle stesse quantità a_0, a_1, \dots, a_4 .

Ci occuperemo più avanti delle medesime in uno speciale Capitolo.

3.° Si è indicato nel precedente Capitolo con m_{rs} la espressione:

$$m_{rs} = -m_{sr} = \omega_{1r} \omega_{2s} - \omega_{1s} \omega_{2r}$$

e quindi per la (7)

$$m_{13} + m_{24} = 0.$$

Posto $\omega = m_{12}$, dalle equazioni differenziali (8) e seguenti si ottiene:

$$2f'(a_r) \frac{d\omega}{da_r} = [g_1(a_r) + a_r g_2(a_r)] \omega - (C_0 + 2C_1 a_r + C_2 a_r^2) \quad (13)$$

essendo:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \omega_{22} \eta_{11} - \omega_{21} \eta_{12}, & C_2 &= \omega_{11} \eta_{22} - \omega_{12} \eta_{21} \\ C_1 &= \omega_{11} \eta_{12} - \omega_{12} \eta_{11} = \omega_{22} \eta_{21} - \omega_{21} \eta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Così derivando m_{32} rispetto ad a_r , ed osservando che per le (3) si hanno le:

$$\begin{aligned}\omega_{22}\eta_{13} - \omega_{23}\eta_{12} &= \frac{m_{32}}{\omega} C_0 - \frac{\pi i}{2\omega} \omega_{22}^2 \\ \omega_{22}\eta_{23} - \omega_{23}\eta_{22} &= \frac{m_{32}}{\omega} C_1 + \frac{\pi i}{2\omega} \omega_{22}\omega_{12} \\ \omega_{13}\eta_{22} - \omega_{12}\eta_{23} &= \frac{m_{32}}{\omega} C_2 - \frac{\pi i}{2\omega} \omega_{12}^2\end{aligned}$$

si otterrà:

$$\begin{aligned}2f'(a_r) \frac{dm_{32}}{da_r} &= [g_1(a_r) + a_r g_2(a_r)] m_{32} - \frac{m_{32}}{\omega} (C_0 + 2C_1 a_r + C_2 a_r^2) + \\ &+ \frac{\pi i}{2\omega} (\omega_{22} - a_r \omega_{12})^2\end{aligned}$$

e da queste:

$$2f'(a_r) \frac{d}{da_r} \left[\frac{m_{32}}{\omega} \right] = \frac{\pi i}{2\omega^2} (\omega_{22} - a_r \omega_{12})^2 \quad (15)$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned}2f'(a_r) \frac{d}{da_r} \left[\frac{m_{13}}{\omega} \right] &= 2f'(a_r) \frac{d}{da_r} \left[\frac{m_{42}}{\omega} \right] = -\frac{\pi i}{2\omega^2} (\omega_{22} - a_r \omega_{12})(\omega_{21} - a_r \omega_{11}) \\ 2f'(a_r) \frac{d}{da_r} \left[\frac{m_{14}}{\omega} \right] &= \frac{\pi i}{2\omega^2} (\omega_{21} - a_r \omega_{11})^2\end{aligned}$$

formole delle quali si farà uso più avanti, come pure della seguente:

$$C_0 C_2 - C_1^2 = \omega (\eta_{11}\eta_{23} - \eta_{12}\eta_{21}) \quad (16)$$

CAPITOLO VI.

Le funzioni iperellittiche per valori particolari degli argomenti.

1.° I valori delle quindici funzioni iperellittiche corrispondenti ad $u_1 = u_2 = 0$, si ottengono, come si è già osservato ponendo $x_1 = a_1$, $x_2 = a_3$ o reciprocamente nelle espressioni delle funzioni stesse. Così si avranno le:

$$\begin{array}{lll} p_1(0) = 0 & p_3(0) = 0 & p_{13}(0) = 0 \\ p_{24}(0) = 0 & p_{40}(0) = 0 & p_{02}(0) = 0 \end{array}$$

e le:

$$\left. \begin{aligned} p_0(0) &= [(01)(03)]^{\frac{1}{2}}, & p_{01}(0) &= [(03)(12)(14)]^{\frac{1}{2}}, & p_{03} &= -i[(01)(23)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_2(0) &= i[(12)(23)]^{\frac{1}{2}}, & p_{21}(0) &= -i[(01)(23)(14)]^{\frac{1}{2}}, & p_{23} &= [(03)(12)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_4(0) &= [(14)(34)]^{\frac{1}{2}}, & p_{41}(0) &= -[(01)(12)(34)]^{\frac{1}{2}}, & p_{43} &= i[(03)(23)(14)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (1)$$

nelle quali $i = \sqrt{-1}$ e le quantità sotto il segno radicale sono positive.

Dalle formole di derivazione si ottengono per le derivate delle sei funzioni dispari, corrispondenti ad $u_1 = u_2 = 0$ i seguenti valori:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{f_2(a_3)} \left(\frac{dp_1}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{f_1(a_3)} \left(\frac{dp_1}{du_2} \right)_0 = - [(01)(12)(14)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{f_2(a_1)} \left(\frac{dp_3}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{f_1(a_1)} \left(\frac{dp_3}{du_2} \right)_0 = i [(03)(23)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{f_2(a_0)} \left(\frac{dp_{24}}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{f_1(a_0)} \left(\frac{dp_{24}}{du_2} \right)_0 = - i [(12)(14)(23)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{f_2(a_2)} \left(\frac{dp_{40}}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{f_1(a_2)} \left(\frac{dp_{40}}{du_2} \right)_0 = - [(01)(03)(14)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{f_2(a_4)} \left(\frac{dp_{02}}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{f_1(a_4)} \left(\frac{dp_{02}}{du_2} \right)_0 = - i [(01)(03)(12)(23)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\varepsilon}{n_0} \left(\frac{dp_{13}}{du_1} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{m_0} \left(\frac{dp_{13}}{du_2} \right)_0 = - i [(01)(03)(12)(23)(14)(34)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (2)$$

e quindi se $m_0 = 0$, $\left(\frac{dp_{13}}{du_2} \right)_0 = 0$.

I valori delle derivate seconde, corrispondenti ad $u_1 = u_2 = 0$, per le nove funzioni pari si ottengono facilmente per mezzo delle equazioni (29) (30) del Capitolo III. Trascriviamo tre fra esse, cioè le:

$$\frac{1}{2}(\alpha_2 y_{11}) = y(y^2 + a) + \frac{l}{k} zw$$

$$\frac{1}{2}(\beta_2 y_{11}) = yz^2 + \frac{\gamma}{k} zw$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_2 y_{11}) = yw^2 + \frac{\beta}{k} zw$$

e supponendo per brevità sieno $m_0 = n_1 = 0$; $m_1 = n_0 = 1$, e quindi $\varepsilon = -1$,

si avrà:

$$a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 = 2 \frac{k}{\rho}$$

[vedi equazioni (23) dello stesso Capitolo]. Supponiamo ora z, w funzioni dispari ed indichiamo con y_0 il valore di y corrispondente ad $u_1 = u_2 = 0$. Posto $u_1 = u_2 = 0$ in quelle tre equazioni e sommandole dopo averle moltiplicate per a_2, b_2, c_2 , si ha:

$$\frac{k}{\rho} (y_{11})_0 = y_0 (y_0^2 + a) a_2$$

dove a_2 ha il valore della terza delle equazioni (17) del Capitolo III.

Ma dalla equazione del quarto grado [(20) del Capitolo II] fra le y, z, w , si ha ponendo $u_1 = u_2 = 0$:

$$0 = 1 + y_0^4 + 2a y_0^2$$

e quindi:

$$y_0^2 + a = \sqrt{a^2 - 1}$$

ossia pel valore di a dato dalla (21) del Capitolo II:

$$y_0^2 + a = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sqrt{k}}$$

[equazioni (6) (7) dello stesso Capitolo II]. Se ora rammentasi essere

$$k = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\sqrt{g h}}$$

si giunge alla:

$$\frac{1}{y_0} (y_{11})_0 = a_\mu a_r (a_\lambda + a_s) - a_\lambda a_s (a_\mu + a_r)$$

essendo gli indici λ, μ, r, s , scelti opportunamente perchè z, w sieno funzioni dispari. Questa equazione può anche scriversi come segue:

$$\frac{1}{p_m(0)} \left(\frac{d^2 p_m}{d u_1^2} \right)_0 = a_\mu a_r (a_\lambda + a_s) - a_\lambda a_s (a_\mu + a_r) \quad (3)$$

ed in essa possiamo porre $m = 0, 2, 4$. Affatto analogamente si troverebbero le:

$$\frac{1}{p_m(0)} \left(\frac{d^2 p_m}{d u_1 d u_2} \right)_0 = a_\lambda a_s - a_\mu a_r$$

$$\frac{1}{p_m(0)} \left(\frac{d^2 p_m}{d u_2^2} \right)_0 = a_\mu + a_r - a_\lambda - a_s.$$

Nello stesso modo supponendo in tre fra le equazioni (29) y, w funzioni dispari, si giunge alla:

$$\frac{1}{p_{\lambda s}(0)} \left(\frac{d^2 p_{\lambda s}}{d u_1^2} \right)_0 = (a_\lambda - \dot{a}_s) [a_\mu a_r - a_m (a_\mu + a_r)]. \quad (4)$$

Posto nella (3) $m = 0, \mu, r = 2, 4; \lambda, s = 1, 3$ si ha:

$$\frac{1}{p_0(0)} \left(\frac{d^2 p_0}{d u_1^2} \right)_0 = a_2 a_4 (a_1 + a_3) - a_1 a_3 (a_2 + a_4) \quad (5)$$

ed in questa permutando gli indici 0, 2; 0, 4 le analoghe espressioni per le altre due funzioni iperellittiche ad un indice. Così ponendo nella (4) $\lambda = 1, m = 3, s, \mu, r = 0, 2, 4$, si ha:

$$\frac{1}{p_{10}(0)} \left(\frac{d^2 p_{10}}{d u_1^2} \right)_0 = (a_1 - a_0) [a_2 a_4 - a_3 (a_2 + a_4)]$$

e le altre due permutando l'indice 0 con 2, 4; infine permutando gli indici 1, 3, si otterranno le tre ultime espressioni. Indicando con λ la somma di queste nove espressioni divisa pel numero nove, si avrà quindi:

$$\lambda = \frac{2}{9} [2(a_1 + a_3)(a_2 a_4 + a_1 a_0 + a_0 a_2) - 3a_1 a_3 (a_0 + a_2 + a_4) - 3a_0 a_2 a_4] \quad (6)$$

e se $2\mu, \nu$, rappresentano le analoghe somme per le derivate seconde rispetto ad u_1 e ad u_2 , o rispetto ad u_2 due volte, si hanno le:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{9} [9a_1 a_3 - (a_1 + a_3)(a_0 + a_2 + a_4) - (a_2 a_4 + a_1 a_0 + a_0 a_2)] \\ \nu &= \frac{2}{9} [2(a_0 + a_2 + a_4) - 3(a_1 + a_3)]. \end{aligned}$$

Sieno ora $\lambda_0, \mu_0, \nu_0; \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \lambda_4, \mu_4, \nu_4$, quantità che si deducono da λ, μ, ν permutando 1, 3 in 2, 4; in 4, 0; in 0, 2; sottraendo queste nuove espressioni dalle precedenti si ottengono le:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p_0(0)} \left(\frac{d^2 p_0}{d u_1^2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\lambda - \lambda_0), & \frac{1}{p_0(0)} \left(\frac{d^2 p_0}{d u_1 d u_2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\mu - \mu_0), \\ \frac{1}{p_0(0)} \left(\frac{d^2 p_0}{d u_2^2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\nu - \nu_0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ed analogamente per p_2, p_4 sostituendo alle λ_0, μ_0, ν_0 , le $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \dots$. Così indicando con $\lambda_{01}, \mu_{01}, \nu_{01}$, le espressioni le quali si deducono da λ, μ, ν colla permutazione degli indici 0, 1; si hanno le:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{01}(0)} \left(\frac{d^2 p_{01}}{d u_1^2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\lambda - \lambda_{01}), & \frac{1}{p_{01}(0)} \left(\frac{d^2 p_{01}}{d u_1 d u_2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\mu - \mu_{01}), \\ \frac{1}{p_{01}(0)} \left(\frac{d^2 p_{01}}{d u_2^2} \right)_0 &= \frac{9}{10} (\nu - \nu_{01}) \end{aligned}$$

ed analogamente per tutte le altre funzioni iperellittiche a due indici.

Questo risultato acquista importanza dalla proprietà caratteristica delle espressioni λ, μ, ν . Indicando con φ, ψ le due forme cubiche:

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi_1(\xi_2 - a_1\xi_1)(\xi_2 - a_3\xi_1) \\ \psi &= (\xi_2 - a_0\xi_1)(\xi_2 - a_2\xi_1)(\xi_2 - a_4\xi_1) \end{aligned} \quad (8)$$

e formando il loro covariante simultaneo di secondo ordine:

$$S = (\varphi\psi)_2$$

trovasi essere:

$$S = \frac{1}{2} (\lambda\xi_1^2 + 2\mu\xi_1\xi_2 + \nu\xi_2^2) \quad (9)$$

e quindi eseguendo sopra φ, ψ le indicate permutazioni, si otterranno altrettanti covarianti simultanei quante sono le funzioni iperellittiche pari. Ne risulta che essendo, come si è osservato al Capitolo IV, per una funzione iperellittica pari:

$$\frac{p_m(u_1, u_2)}{p_m(0)} = 1 + (u_1, u_2)_2 + \dots \quad (10)$$

sarà:

$$(u, u_2)_2 = \frac{9}{10} (S - S_m)$$

quando in S ed S_m si sostituiscano u_1, u_2 a ξ_1, ξ_2 .

La proprietà invariantiva degli sviluppi in serie di tutte le funzioni iperellittiche stabilita al Capitolo IV colle equazioni (17) viene così a precisarsi nel senso che le varie forme binarie di cui si compongono quegli sviluppi in serie per le funzioni pari, sono covarianti simultanei di due forme del terzo ordine formate ciascuna di tre fattori della forma del sesto ordine:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(\xi_2 - a_0\xi_1) \cdots (\xi_2 - a_4\xi_1). \quad (11)$$

Per le forme dispari la decomposizione della f subisce una modificazione. Incominciamo dal determinare i valori delle derivate terze delle sei funzioni dispari, per $u_1 = u_2 = 0$. Rammentando le formole superiori (2) e supponendo sempre $\varepsilon = -1$, indicheremo con C_1, C_3, C_{24}, \dots le espressioni dei secondi membri cogli opportuni segni, così che saranno:

$$\frac{1}{a_3} \left(\frac{dp_1}{du_1} \right)_0 = - \left(\frac{dp_1}{du_2} \right)_0 = C_1, \quad \frac{1}{a_4} \left(\frac{dp_3}{du_1} \right)_0 = - \left(\frac{dp_3}{du_2} \right)_0 = C_3$$

e così via; porremo anche per brevità:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_2 + a_4 &= -h_1, & a_2 a_4 + a_4 a_0 + a_0 a_2 &= h_2, & a_0 a_2 a_4 &= -h_3 \\ a_1 + a_3 &= -\alpha & a_1 a_3 &= \beta. \end{aligned} \right\} (12)$$

Si hanno così:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \left(\frac{d^3 p_1}{d u_1^3} \right)_0 &= -2 a_1 a_3^2 h_1 - a_3 (2 a_1 + a_3) h_2 - (2 a_1 + a_3) h_3 \\ \frac{1}{C_{24}} \left(\frac{d^3 p_{24}}{d u_1^3} \right)_0 &= -2 a_0 h_3 + \beta (h_2 + 2 a_0^2 + a_2 a_4) + \alpha a_0 (h_2 + a_2 a_4) \\ \frac{1}{C_{13}} \left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1^3} \right)_0 &= 2 \beta h_1 - \alpha h_2 + 2 h_3. \end{aligned}$$

Dalla prima per la permutazione di 1 e 3 si otterrà il valore di $\left(\frac{d^3 p_3}{d u_1^3} \right)_0$, e così dalla seconda permutando gli indici 2, 4 con 0. Sommando le prime cinque espressioni si ottiene:

$$(\alpha + h_1) [2 \beta h_1 - \alpha h_2 + 2 h_3] - 2(\beta h_2 + \alpha h_3)$$

ma:

$$\alpha + h_1 = A_1 = -(a_0 + a_1 + \dots + a_4)$$

e

$$\beta h_2 + \alpha h_3 = A_4$$

si avrà quindi che la somma delle derivate terze delle sei funzioni dispari, per $u_1 = u_2 = 0$, divise per le corrispondenti costanti C_1, C_3, \dots e moltiplicata la $\left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1^3} \right)_0$ per la somma delle radici a_0, a_1, \dots è eguale a $-2A_4$, cioè a meno due volte la somma dei prodotti a quattro a quattro delle stesse radici. Ossia la forma analoga ad S sarebbe, per caso delle funzioni dispari, salvo un coefficiente numerico, eguale a:

$$A_4 \xi_1^3 + 2 A_3 \xi_1^2 \xi_2 + 3 A_2 \xi_1 \xi_2^2 + 4 A_1 \xi_2^3$$

ossia eguale anche in questo caso a $(\varphi\psi)_2$, supponendo:

$$\varphi = \xi_1 \xi_2, \quad \psi = (\xi_2 - a_0 \xi_1)(\xi_2 - a_1 \xi_1) \dots (\xi_2 - a_4 \xi_1).$$

Osserviamo che il valore superiore di λ può scriversi:

$$3 \beta h_1 - 2 \alpha h_2 + 3 h_3 = \frac{9}{2} \lambda$$

perciò essendo:

$$A_3 = \beta h_1 + \alpha h_2 + h_3$$

si ha:

$$\frac{5}{C_{13}} \left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1^3} \right)_0 + \frac{27}{2} \lambda = -A_3$$

dalla quale:

$$\begin{aligned} \frac{5}{C_{13}} \left[\left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1^3} \right)_0 u_1^3 + 3 \left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1^2 d u_2} \right)_0 u_1^2 u_2 + 3 \left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_1 d u_2^2} \right)_0 u_1 u_2^2 + \left(\frac{d^3 p_{13}}{d u_2^3} \right)_0 u_2^3 \right] = & \left\{ \begin{array}{l} (13) \\ = \frac{27}{2} u_1 [\lambda u_1^2 + 2 \mu u_1 u_2 + \nu u_2^2] + [A_3 u_1^3 + 3 A_2 u_1^2 u_2 + 6 A_1 u_1 u_2^2 + 10 u_2^3]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il primo termine del secondo membro è $\frac{27}{2}u_1S(u_1, u_2)$, il secondo termine è il covariante cubico $(\varphi\psi)_2$ (salvo un coefficiente numerico) che si ottiene ponendo $\varphi = \xi_1^2$ e ψ come superiormente.

Se in luogo del fattore ξ_1 della forma di sesto ordine $f(\xi_1, \xi_2)$ si considera il fattore $\xi_2 - a_r\xi_1$, cioè si determina il covariante cubico simultaneo della forma quadratica $\varphi = (\xi_2 - a_r\xi_1)^2$ e della forma $\psi = \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_2 - a_r\xi_1}$ del quinto ordine, si ottiene per ciascuna forma dispari una relazione analoga alla superiore, notando che il fattore di S nel secondo membro sarà $= u_2 - a_s u_1$; ed $s = 1, 3$ quando $r = 3, 1$; $s = r$ negli altri casi.

Ne segue che per una funzione iperellittica dispari p qualsivoglia, si ha:

$$\frac{p(u_1, u_2)}{C} = mu_1 + nu_2 + \frac{9}{10}(mu_1 + nu_2)S + P(u_1, u_2) + \dots$$

la n essendo eguale a zero se $p = p_{13}$ ed eguale a -1 negli altri casi; la $m = 1$ nel primo caso, ad a_0, a_1, \dots, a_4 negli altri, e $P(u_1, u_2)$ un covariante simultaneo di terzo ordine di due forme l'una quadratica, cioè $(mu_1 + nu_2)^2$, l'altra del quinto ordine ossia $\frac{f(\xi_1, \xi_2)}{mu_1 + nu_2}$.

La determinazione delle derivate d'ordine superiore conduce ad analoghi risultati. Per le derivate di quarto ordine, per esempio, partendo dalle due forme cubiche (8), si devono considerare i covarianti simultanei:

$$(\varphi\varphi)_2 = a, \quad (\psi\psi)_2 = c, \quad (\varphi\psi) = d$$

i primi due quadratici, del quarto ordine il terzo; inoltre l'invariante simultaneo $A = (\varphi\psi)_3$. Ciò posto nello sviluppo di $\frac{1}{p_0(0)}p_0(u_1, u_2)$ si ottiene:

$$(u_1, u_2)_4 = \frac{9^2}{4^2 \cdot 5^2}(S - S_0)^2 - \frac{3}{2 \cdot 4^2}(Ad - A_0d_0) + \frac{27}{8}(ac - a_0c_0) \quad (14)$$

nella quale A_0, a_0, c_0, d_0 si deducono da A, a, c, d colla permutazione già indicata.

Ritourneremo su questi sviluppi in serie più avanti; basti per ora averne dimostrato la proprietà principale.

2.° Se nelle equazioni differenziali (6) del Capitolo I, si pongono $x_1 = a_2$, $x_2 = a_3$ i valori di u_1, u_2 diventano ω_{11}, ω_{21} [(1) del Capitolo IV]. Scrivendo $p_0(\omega_{11})$ in luogo di $p_0(u_1, u_2)$, si hanno le:

$$\begin{aligned} p_2(\omega_{11}) = 0 & & p_3(\omega_{11}) = 0 & & p_{01}(\omega_{11}) = 0 & & p_{04}(\omega_{11}) = 0 \\ & & p_{14}(\omega_{11}) = 0 & & p_{23}(\omega_{11}) = 0 & & \end{aligned}$$

cioè quei valori di u_1, u_2 annullano sei fra le funzioni iperellittiche. Per le altre nove si ottengono i seguenti valori:

$$\left. \begin{aligned} p_0(\omega_{11}) &= [(02)(03)]^{\frac{1}{2}} & p_{02}(\omega_{11}) &= -i[(03)(12)(24)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{03}(\omega_{11}) &= -i[(02)(13)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_1(\omega_{11}) &= [(12)(13)]^{\frac{1}{2}} & p_{12}(\omega_{11}) &= -i[(02)(13)(24)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{13}(\omega_{11}) &= -i[(03)(12)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_4(\omega_{11}) &= [(24)(34)]^{\frac{1}{2}} & p_{42}(\omega_{11}) &= i[(02)(12)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{43}(\omega_{11}) &= i[(03)(13)(24)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Così posto $x_1 = a_1, x_2 = a_4$ le u_1, u_2 diventano ω_{12}, ω_{22} e si hanno le quindici relazioni:

$$\left. \begin{aligned} p_1(\omega_{12}) &= 0 & p_4(\omega_{12}) &= 0 & p_{02}(\omega_{12}) &= 0 & p_{03}(\omega_{12}) &= 0 \\ p_{11}(\omega_{12}) &= 0 & p_{23}(\omega_{12}) &= 0 \\ p_0(\omega_{12}) &= [(01)(04)]^{\frac{1}{2}} & p_{01}(\omega_{12}) &= -[(04)(12)(13)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{04}(\omega_{12}) &= [(01)(24)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_2(\omega_{12}) &= i[(12)(24)]^{\frac{1}{2}} & p_{21}(\omega_{12}) &= -i[(01)(13)(24)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{24}(\omega_{12}) &= i[(04)(12)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_3(\omega_{12}) &= i[(13)(34)]^{\frac{1}{2}} & p_{31}(\omega_{12}) &= -i[(01)(12)(34)]^{\frac{1}{2}} \\ p_{34}(\omega_{12}) &= i[(04)(13)(24)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

e relazioni analoghe si ottengono col porre $x_1 = a_0, x_2 = a_3$ ossia $u_1 = -\omega_{13}, u_2 = -\omega_{23}$; oppure $x_1 = a_0, x_2 = a_2$ cioè $u_1 = -\omega_{14}, u_2 = -\omega_{24}$. Nel primo caso si annullano $p_0, p_3, p_{03}, p_{12}, p_{14}, p_{24}$, nel secondo $p_0, p_2, p_{02}, p_{13}, p_{14}, p_{34}$.

CAPITOLO VII.

Le formole per l'addizione.

1.° Le formole per l'addizione si ottengono dalla applicazione del noto teorema di ABEL. Si indichino con u'_1, u'_2 i valori di u_1, u_2 allorquando nelle equazioni (6) del Capitolo I si sostituiscano le y_1, y_2 alle x_1, x_2 ; ed analoga-

mente sieno u''_1, u''_2 corrispondenti ai limiti z_1, z_2 . Se supponesi:

$$u_1 + u'_1 = u''_1 \quad u_2 + u'_2 = u''_2 \quad (1)$$

il teorema di ABEL conduce ad una serie di relazioni fra le $x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2$ e le a_0, a_1, \dots, a_4 ; le quali sviluppate opportunamente danno le formole per l'addizione.

Sieno $P(x), Q(x)$ due polinomi, del secondo grado il primo, lineare l'altro; cioè:

$$P(x) = x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2, \quad Q(x) = \beta_0 x + \beta_1$$

e decomponiamo il polinomio $f(x)$ nei due $k(x), g(x)$:

$$k(x) = (x - a_\lambda)(x - a_\mu) \quad g(x) = (x - a_m)(x - a_r)(x - a_s);$$

infine poniamo:

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2), \quad \psi(x) = (x - y_1)(x - y_2), \quad \gamma(x) = (x - z_1)(x - z_2).$$

Dalla equazione:

$$P^2(x)k(x) - Q^2(x)g(x) = \varphi(x)\psi(x)\gamma(x) \quad (2)$$

si ottengono le:

$$P(x_1)k(x_1) = Q(x_1)\sqrt{f(x_1)} \quad Q(x_1)g(x_1) = P(x_1)\sqrt{f(x_1)} \quad (3)$$

e le altre sostituendo ad x_1 le x_2, y_1, y_2 ; inoltre le:

$$P(z_1)k(z_1) = -Q(z_1)\sqrt{f(z_1)} \quad Q(z_1)g(z_1) = -P(z_1)\sqrt{f(z_1)} \quad (4)$$

e le analoghe sostituendo z_2 a z_1 .

Ciò posto essendo identicamente:

$$(\lambda \mu) \frac{Q(x)}{k(x)} = \frac{Q(a_\lambda)}{x - a_\lambda} - \frac{Q(a_\mu)}{x - a_\mu}$$

si avranno per le (3), le seguenti:

$$(\lambda \mu) P(x_1) = \frac{Q(a_\lambda)}{x_1 - a_\lambda} \sqrt{f(x_1)} - \frac{Q(a_\mu)}{x_1 - a_\mu} \sqrt{f(x_1)}$$

$$(\lambda \mu) P(x_2) = \frac{Q(a_\lambda)}{x_2 - a_\lambda} \sqrt{f(x_2)} - \frac{Q(a_\mu)}{x_2 - a_\mu} \sqrt{f(x_2)}$$

e da queste la:

$$\frac{(\lambda \mu)}{x_1 - x_2} \left[\frac{P(x_1)}{x_1 - a_m} - \frac{P(x_2)}{x_2 - a_m} \right] = Q(a_\lambda) \frac{p_{m\lambda}}{p_m p_\lambda} - Q(a_\mu) \frac{p_{m\mu}}{p_m p_\mu}.$$

Ora il primo membro della equazione superiore è eguale a:

$$\frac{(\lambda \mu)}{p_m^2} [p_m^2 - P(a_m)]$$

e la e quazione (2) d a:

$$P(a_m) = \frac{p_m q_m t_m}{\sqrt{k(a_m)}}, \quad Q(a_\lambda) = \frac{p_\lambda q_\lambda t_\lambda}{\sqrt{-g(a_\lambda)}}, \quad Q(a_\mu) = \frac{p_\mu q_\mu t_\mu}{\sqrt{-g(a_\mu)}}$$

essendo q , t coi rispettivi indici le funzioni corrispondenti agli argomenti u'_1, u'_2 ; u''_1, u''_2 . Sostituendo si giunger a quindi a questa prima relazione:

$$(\lambda \mu) \left[p_m - \frac{q_m t_m}{\sqrt{k(a_m)}} \right] = q_\lambda p_{m\lambda} \frac{t_\lambda}{\sqrt{-g(a_\lambda)}} - q_\mu p_{m\mu} \frac{t_\mu}{\sqrt{-g(a_\mu)}} \quad (5)$$

e ad altre due sostituendo all'indice m gli indici r, s .

Sostituendo alle x_1, x_2 le y_1, y_2 e le z_1, z_2 , avendo riguardo al segno delle (4) in quest'ultimo caso, si otterranno le due relazioni analoghe:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda \mu) \left[q_m - \frac{p_m t_m}{\sqrt{k(a_m)}} \right] &= p_\lambda q_{m\lambda} \frac{t_\lambda}{\sqrt{-g(a_\lambda)}} - p_\mu q_{m\mu} \frac{t_\mu}{\sqrt{-g(a_\mu)}} \\ - (\lambda \mu) \left[t_m - \frac{p_m q_m}{\sqrt{k(a_m)}} \right] &= p_\lambda q_\lambda \frac{t_{m\lambda}}{\sqrt{-g(a_\lambda)}} - p_\mu q_\mu \frac{t_{m\mu}}{\sqrt{-g(a_\mu)}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Infine dalla (5) e dalle altre due che deduconsi da essa ponendo $m = r, s$, moltiplicate per $(rs)p_m, (sm)p_r, (mr)p_s$ e sommate, si giunge alla:

$$\frac{p_m q_m t_m}{g'(a_m) \sqrt{k(a_m)}} + \frac{p_r q_r t_r}{g'(a_r) \sqrt{k(a_r)}} + \frac{p_s q_s t_s}{g'(a_s) \sqrt{k(a_s)}} = 1 \quad (7)$$

ed analogamente dalla seconda delle (6) moltiplicando per $(rs)t_{m\lambda}, (sm)t_{r\lambda}, (mr)t_{s\lambda}$, e sommando, trovasi:

$$\frac{p_m q_m t_{m\lambda}}{g'(a_m) \sqrt{k(a_m)}} + \frac{p_r q_r t_{r\lambda}}{g'(a_r) \sqrt{k(a_r)}} + \frac{p_s q_s t_{s\lambda}}{g'(a_s) \sqrt{k(a_s)}} = \frac{p_\lambda q_\lambda}{\sqrt{-g(a_\lambda)}} \quad (8)$$

e cos  l'altra permutando λ, μ .

2.  Dalle relazioni superiori e da quelle dimostrate al Capitolo II, si deducono i valori delle quindici funzioni iperellittiche per gli argomenti $u_1 + u'_1, u_2 + u'_2$; espresse per le funzioni degli argomenti u_1, u_2 e u'_1, u'_2 . Le quindici espressioni hanno un denominatore comune, a cui pu  darsi forme differenti. Ne soggiungiamo pel momento due, composte l'una e l'altra di funzioni dispari. Indicando con M questo denominatore, si ha:

$$M = 1 - \frac{p_1^2 q_1^2}{f'(a_1)} - \frac{p_3^2 q_3^2}{f'(a_3)} + \frac{(13) p_{13}^2 q_{13}^2}{f'(a_1) f'(a_3)} \quad (9)$$

oppure per la (16) del Capitolo II:

$$M = 1 + \frac{(24)^2 p_{24}^2 q_{24}^2}{f'(a_2) f'(a_4)} + \frac{(40)^2 p_{40}^2 q_{40}^2}{f'(a_4) f'(a_2)} + \frac{(02)^2 p_{02}^2 q_{02}^2}{f'(a_0) f'(a_2)}.$$

Ciò posto si hanno le seguenti formole di addizione:

$$\begin{aligned} M\sqrt{k(a_m)} \cdot t_m = & p_m q_m + \frac{(\lambda \mu)^2 k(a_m)}{f'(a_\lambda) f'(a_\mu)} p_{\lambda \mu} q_{\lambda \mu} p_{rs} q_{rs} + \frac{(\lambda m)}{f'(a_\lambda)} p_\lambda q_\lambda p_{m\lambda} q_{m\lambda} + \\ & + \frac{(\mu m)}{f'(a_\mu)} p_\mu q_\mu p_{m\mu} q_{m\mu} \end{aligned}$$

nella quale m, r, s possono assumere i valori 0, 2, 4; e $\lambda = 1, \mu = 3$. Colle stesse condizioni si hanno per le funzioni dispari:

$$\begin{aligned} M\sqrt{g(a_\lambda) g(a_\mu)} \cdot t_{\lambda \mu} = & p_\lambda p_\mu q_m q_{rs} + q_\lambda q_\mu p_m p_{rs} - \\ & - [p_{\lambda \mu} q_{m\lambda} q_{m\mu} + q_{\lambda \mu} p_{m\lambda} p_{m\mu}] \\ M\sqrt{k(a_r) k(a_s)} \cdot t_{rs} = & p_r p_s q_{rs} + q_r q_s p_{rs} - \\ & - \frac{1}{k(a_m)} [p_m p_{\lambda \mu} q_{mr} q_{ms} + q_m q_{\lambda \mu} p_{mr} p_{ms}] \\ M g(a_\lambda) g(a_\mu) \frac{t_\lambda}{\sqrt{-g(a_\lambda)}} = & (\mu r)(\mu s) [p_\lambda q_m q_{m\lambda} + q_\lambda p_m p_{m\lambda}] - \\ & - [p_\mu p_{\lambda \mu} q_{rs} q_{m\mu} + q_\mu q_{\lambda \mu} p_{rs} p_{m\mu}] \\ M g(a_\lambda) g(a_\mu) \frac{t_\mu}{\sqrt{-g(a_\mu)}} = & - (\lambda r)(\lambda s) [p_\mu q_m q_{m\mu} + q_\mu p_m p_{m\mu}] + \\ & + p_\lambda p_{\lambda \mu} q_{rs} q_{m\lambda} + q_\lambda q_{\lambda \mu} p_{rs} p_{m\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

Infine le altre sei funzioni pari, per $m = 0, 2, 4$ $\lambda = 1, \mu = 3$ sono date dalle:

$$\begin{aligned} M\sqrt{-g(a_\lambda) k(a_m)} \cdot t_{m\lambda} = & \frac{(\mu m)}{g(a_\mu)} [(\lambda m) p_\mu q_\mu p_{rs} q_{rs} + p_{\lambda \mu} q_{\lambda \mu} p_{m\mu} q_{m\mu}] - \\ & - [(\lambda m) p_{m\lambda} q_{m\lambda} + p_\lambda q_\lambda p_m q_m] \\ M\sqrt{-g(a_\mu) k(a_m)} \cdot t_{m\mu} = & - \frac{(\lambda m)}{g(a_\lambda)} [(\mu m) p_\lambda q_\lambda p_{rs} q_{rs} + p_{\lambda \mu} q_{\lambda \mu} p_{m\lambda} q_{m\lambda}] + \\ & + [(\mu m) p_{m\mu} q_{m\mu} + p_\mu q_\mu p_m q_m]. \end{aligned}$$

3.° Fra le varie conseguenze che si possono dedurre da queste relazioni, consideriamo dapprima i valori delle espressioni stesse corrispondenti

a $u'_1 = \omega_{11}$, $u'_2 = \omega_{21}$; oppure a $u'_1 = \omega_{12}$, $u'_2 = \omega_{22}$ e così per le altre funzioni complete. Rammentando le formole (15) del Capitolo precedente e le relazioni generali del Capitolo II, trovasi che nel primo caso, cioè supponendo $u'_1 = \omega_{11}$, $u'_2 = \omega_{21}$, si ha:

$$M = -\frac{p_{12}^2}{(01)(14)(23)} = \frac{p_{12}^2(u)}{p_{12}^2(0)}$$

e le:

$$\begin{aligned} p_0(u_1 + \omega_{11}) &= [(01)(02)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{34}}{p_{12}}, & p_4(u_1 + \omega_{11}) &= [(14)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{03}}{p_{12}} \\ p_3(u_1 + \omega_{11}) &= [(13)(23)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{04}}{p_{12}} \\ p_2(u_1 + \omega_{11}) &= -[(02)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_1}{p_{12}} & p_1(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(13)(14)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_2}{p_{12}} \\ p_{01}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(02)(13)(14)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{02}}{p_{12}} \\ p_{03}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(02)(13)(23)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_4}{p_{12}} \\ p_{21}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(02)(13)(14)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{p_{12}} \\ p_{23}(u_1 + \omega_{11}) &= [(02)(13)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{13}}{p_{12}} \\ p_{41}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(13)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{24}}{p_{12}} \\ p_{43}(u_1 + \omega_{11}) &= [(13)(14)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_0}{p_{12}} \\ p_{13}(u_1 + \omega_{11}) &= [(01)(14)(23)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{23}}{p_{12}} \\ p_{24}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(02)(14)(23)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{14}}{p_{12}} \\ p_{40}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(03)(14)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_3}{p_{12}} \\ p_{02}(u_1 + \omega_{11}) &= -[(01)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{01}}{p_{12}} \end{aligned} \quad (11)$$

Da queste relazioni, nelle quali si è scritto per brevità $p(u_1 + \omega_{11})$ in luogo di $p(u_1 + \omega_{11}, u_2 + \omega_{21})$, si deduce la proprietà principale delle funzioni iperellittiche. Sostituendo infatti in ciascuna di esse $u_1 + \omega_{11}$, $u_2 + \omega_{21}$ alle

u_1, u_2 , trovansi che tutte quelle funzioni si riproducono collo stesso segno o con segno cambiato, si hanno cioè le:

$$p_0(u_1 + 2\omega_{11}) = p_0, \quad p_1(u_1 + 2\omega_{11}) = -p_1, \quad p_2(u_1 + 2\omega_{11}) = -p_2$$

$$p_3(u_1 + 2\omega_{11}) = p_3, \quad p_4(u_1 + 2\omega_{11}) = p_4$$

così le $p_{12}, p_{03}, p_{34}, p_{04}$ si riproducono collo stesso segno, e le $p_{10}, p_{14}, p_{23}, p_{13}, p_{24}, p_{02}$ con segno cambiato. Risulta perciò evidente che se in quelle funzioni alle u_1, u_2 si sostituiscono $u_1 + 4\omega_{11}, u_2 + 4\omega_{21}$, le funzioni stesse si riprodurranno col proprio segno.

Nel secondo caso, posto $u'_1 = \omega_{12}, u'_2 = \omega_{22}$ si ottiene:

$$M = - \frac{p_{34}^2}{(03)(14)(23)} = \frac{p_{34}^2(u)}{p_{34}^2(0)}$$

inoltre:

$$\left. \begin{aligned} p_0(u_1 + \omega_{12}) &= - [(03)(04)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_{12}}{p_{24}}, & p_{12}(u_1 + \omega_{12}) &= [(13)(14)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{p_0}{p_{34}} \\ p_{34}(u_1 + \omega_{12}) &= - [(03)(04)(13)(14)(23)(24)]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{p_{34}} \end{aligned} \right\} (12).$$

e così via. Aggiungendo in queste formole ad u_1, u_2 nuovamente le ω_{12}, ω_{22} giungesi a dimostrare che le sette funzioni iperellittiche $p_0, p_1, p_2; p_{01}, p_{12}, p_{34}, p_{02}$ si riproducono col proprio segno e le altre otto con segno contrario.

Infine negli ultimi due casi si hanno:

$$M = \frac{p_{01}^2(u)}{p_{01}^2(0)}, \quad M = \frac{p_4^2(u)}{p_4^2(0)}$$

e:

$$\left. \begin{aligned} p_{01}(u_1 + \omega_{13}) &= [(02)(03)(04)(12)(13)(14)]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{p_{01}} \\ p_4(u_1 + \omega_{14}) &= \sqrt{f'(a_4)} \cdot \frac{1}{p_4} \end{aligned} \right\} (13)$$

Riassumendo si avrà che per una funzione iperellittica p qualunque:

$$p(u_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{12} + 2m_3\omega_{13} + 2m_4\omega_{14}) = \pm p(u)$$

essendo m_1, m_2, m_3, m_4 numeri interi, cioè quelle funzioni sono quadruplamente periodiche, pei periodi $4\omega_{11}, 4\omega_{12}; 4\omega_{21}, 4\omega_{22}, \dots$

4.° Se nelle relazioni (10) si mutano u'_1, u'_2 in $-u'_1, -u'_2$, e si moltiplicano le nuove relazioni così ottenute per le corrispondenti da cui de-

rivano, si hanno per ciascuna funzione iperellittica p i valori di:

$$p(u + u')p(u - u').$$

Per le sei funzioni dispari queste espressioni sono molto semplici, essendo:

$$\left. \begin{aligned} Mp_1(u + u')p_1(u - u') &= p_1^2(u) - p_1^2(u') + \frac{(13)}{f'(a_3)} [p_3^2(u)p_{13}^2(u') - p_3^2(u')p_{13}^2(u)] \\ Mp_3(u + u')p_3(u - u') &= p_3^2(u) - p_3^2(u') - \frac{(13)}{f'(a_1)} [p_1^2(u)p_{13}^2(u') - p_1^2(u')p_{13}^2(u)] \\ Mp_{13}(u + u')p_{13}(u - u') &= p_{13}^2(u) - p_{13}^2(u') + \frac{1}{(13)} [p_1^2(u)p_3^2(u') - p_1^2(u')p_3^2(u)] \end{aligned} \right\} (14)$$

e potendosi dedurre le altre tre dalla:

$$\begin{aligned} Mp_{rs}(u + u')p_{rs}(u - u') &= p_{rs}^2(u) - p_{rs}^2(u') + \\ &+ \frac{1}{(rs)k(a_m)} [p_{mr}^2(u)p_{ms}^2(u') - p_{ms}^2(u)p_{mr}^2(u')] \end{aligned}$$

nella quale r, s, m rappresentano 0, 2, 4 e $k(a_m) = (a_1 - a_m)(a_3 - a_m)$.

Il tipo delle espressioni analoghe per le funzioni pari è dato dallo stesso denominatore M sostituendo nell'una o nell'altra delle due forme superiori ai quadrati delle funzioni dispari, i quadrati delle funzioni che costituiscono una delle terne o delle quaderne di funzioni iperellittiche definite al Capitolo II.

Sciogliendo, per esempio, le $p^2_m, p^2_{\lambda s}, p^2_{\mu r}$, ossia le $y^2\sqrt{h}, z^2\sqrt{\alpha\delta}, w^2\sqrt{\beta\gamma}$, ed indicando con ξ, η, ζ , le analoghe quantità per gli argomenti u', u'' , trovasi che M si esprime linearmente colle quattro funzioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} X &= 1 + y^2\xi^2 + z^2\eta^2 + w^2\zeta^2 \\ Y &= y^2 + \xi^2 + z^2\zeta^2 + w^2\eta^2 \\ Z &= z^2 + \eta^2 + \zeta^2y^2 + \xi^2w^2 \\ W &= w^2 + \zeta^2 + y^2\eta^2 + z^2\xi^2. \end{aligned} \right\} (15)$$

Quanto ai coefficienti che moltiplicano queste funzioni X, Y, Z, W , il loro valore si forma coi coefficienti a, b, c della equazione del quarto grado (20) del Capitolo II. Posto:

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad \mu = b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad \nu = c + \sqrt{c^2 - 1} \quad (16)$$

ossia:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}, \quad \mu = -\sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

nelle quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hanno i valori (6) dello stesso Capitolo, si ha per M il seguente valore:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)}{\lambda\mu\nu - 1} M = (\lambda\mu\nu + 1)X + (\lambda + \mu\nu)Y + \\ + (\mu + \nu\lambda)Z + (\nu + \lambda\mu)W. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Le espressioni per:

$$p_m(u + u')p_m(u - u'), \quad p_{\lambda s}(u + u')p_{\lambda s}(u - u'), \quad p_{\mu r}(u + u')p_{\mu r}(u - u')$$

si formano colle stesse funzioni X, Y, Z, W e di più anche i coefficienti non mutano che di posizione. Così si ha:

$$\frac{p_m(u + u')p_m(u - u')}{\sqrt{f'(am)}} = \frac{(\lambda + \mu\nu)X + (\lambda\mu\nu + 1)Y + (\nu + \lambda\mu)Z + (\mu + \nu\lambda)W}{(\lambda\mu\nu + 1)X + (\lambda + \mu\nu)Y + (\mu + \nu\lambda)Z + (\nu + \lambda\mu)W} \quad (18)$$

ed analogamente per

$$\frac{p_{\lambda s}(u + u')p_{\lambda s}(u - u')}{\sqrt{\alpha\delta}}, \quad \frac{p_{\mu r}(u + u')p_{\mu r}(u - u')}{\sqrt{\beta\gamma}}$$

si otterranno due frazioni di cui il denominatore è ancora il secondo membro della (18) ed i numeratori sono:

$$(\mu + \nu\lambda)X + (\nu + \lambda\mu)Y + (\lambda\mu\nu + 1)Z + (\lambda + \mu\nu)W$$

$$(\nu + \lambda\mu)X + (\mu + \nu\lambda)Y + (\lambda + \mu\nu)Z + (\lambda\mu\nu + 1)W.$$

5.° Le ultime formole del precedente paragrafo conducono a quelle per la moltiplicazione delle funzioni pari. Supponendo dapprima in esse $u'_1 = u_1, u'_2 = u_2$, ed indicando per brevità:

$$P = y^2 + z^2w^2, \quad Q = z^2 + w^2y^2, \quad R = w^2 + y^2z^2$$

le espressioni X, Y, Z, W diventano

$$X = 1 + y^4 + z^4 + w^4 = -2[aP + bQ + cR + 2kyzw]$$

$$Y = 2P, \quad Z = 2Q, \quad W = 2R.$$

Per questi valori, osservando essere:

$$a = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}, \quad \sqrt{a^2 - 1} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \dots$$

si ottengono facilmente le formole di duplicazione:

$$\left. \begin{aligned} N \frac{p_m(2u)}{p_m(0)} &= P\sqrt{a^2-1} - Q\sqrt{b^2-1} - R\sqrt{c^2-1} + 2 \frac{\lambda + \mu\nu}{\lambda - \mu\nu} k y z w \\ N \frac{p_{\lambda s}(2u)}{p_{\lambda s}(0)} &= -P\sqrt{a^2-1} + Q\sqrt{b^2-1} - R\sqrt{c^2-1} + 2 \frac{\mu + \nu\lambda}{\mu - \nu\lambda} k y z w \\ N \frac{p_{\mu r}(2u)}{p_{\mu r}(0)} &= -P\sqrt{a^2-1} - Q\sqrt{b^2-1} + R\sqrt{c^2-1} + 2 \frac{\nu + \lambda\mu}{\nu - \lambda\mu} k y z w \end{aligned} \right\} (19)$$

essendo:

$$N = P\sqrt{a^2-1} + Q\sqrt{b^2-1} + R\sqrt{c^2-1} + 2 \frac{\lambda\mu\nu + 1}{\lambda\mu\nu - 1} k y z w.$$

Le formole di duplicazione per le funzioni dispari, si possono dedurre direttamente dalle relazioni (10).

6.º Accenneremo qui ad un'altra formazione delle espressioni (19), della quale si vedrà l'origine più avanti. Introduciamo tre nuove quantità p , q , r definite dalle relazioni:

$$\left. \begin{aligned} p_0 p &= \frac{1 + y^2 - z^2 - w^2}{1 + y^2 + z^2 + w^2} \\ q_0 q &= \frac{1 - y^2 + z^2 - w^2}{1 + y^2 + z^2 + w^2} \\ r_0 r &= \frac{1 - y^2 - z^2 + w^2}{1 + y^2 + z^2 + w^2} \end{aligned} \right\} (20)$$

nelle quali:

$$p_0 = \left[\frac{(\mu + 1)(\nu + 1)}{(\mu - 1)(\nu - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad q_0 = \left[\frac{(\nu + 1)(\lambda + 1)}{(\nu - 1)(\lambda - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_0 = \left[\frac{(\lambda + 1)(\mu + 1)}{(\lambda - 1)(\mu - 1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

sono i valori di p , q , r per $u_1 = u_2 = 0$. Ciò posto le $p_m(2u)$, $p_{\lambda s}(2u)$, $p_{\mu r}(2u)$ si esprimono in funzione di p , q , r nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{p_m(2u)}{p_m(0)} &= \frac{\lambda\mu\nu - 1}{\lambda - \mu\nu} \cdot \frac{1 + p^2 - q^2 - r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ \frac{p_{\lambda s}(2u)}{p_{\lambda s}(0)} &= \frac{\lambda\mu\nu - 1}{\mu - \nu\lambda} \cdot \frac{1 - p^2 + q^2 - r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ \frac{p_{\mu r}(2u)}{p_{\mu r}(0)} &= \frac{\lambda\mu\nu - 1}{\nu - \lambda\mu} \cdot \frac{1 - p^2 - q^2 + r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \end{aligned}$$

ma indicando con y_0 , z_0 , w_0 i valori di y , z , w corrispondenti ad $u_1 = u_2 = 0$,

si hanno le:

$$y_0^2 = \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}, \quad z_0^2 = \frac{\mu - \nu\lambda}{\lambda\mu\nu - 1}, \quad w_0^2 = \frac{\nu - \lambda\mu}{\lambda\mu\nu - 1}$$

quindi saranno:

$$\left. \begin{aligned} y_0 y(2u) &= \frac{1 + p^2 - q^2 - r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ z_0 z(2u) &= \frac{1 - p^2 + q^2 - r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ w_0 w(2u) &= \frac{1 - p^2 - q^2 + r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

affatto analoghe alle (20).

Infine le p, q, r soddisfano ad una equazione biquadratica della stessa forma della (20), cioè:

$$0 = 1 + p^4 + q^4 + r^4 + 2A(p^2 + q^2 r^2) + 2B(q^2 + r^2 p^2) + 2C(r^2 + p^2 q^2) + 4Kpqr$$

ed i valori dei coefficienti A, B, C, K sono le seguenti funzioni dei corrispondenti coefficienti a, b, c, k :

$$A = \frac{a - bc}{\sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}, \quad B = \frac{b - ca}{\sqrt{(c^2 - 1)(a^2 - 1)}}, \quad C = \frac{c - ab}{\sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}}$$

$$K = \frac{k^2}{\sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}.$$

Questi valori conducono alle relazioni:

$$\frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\sqrt{B^2 - 1}}{\sqrt{b^2 - 1}} = \frac{\sqrt{C^2 - 1}}{\sqrt{c^2 - 1}} = \frac{K}{k}. \quad (22)$$

7.° Se nella formola (18) si pone $u'_1 = 2u_1, u'_2 = 2u_2$, il primo membro è eguale a $\frac{p_m(u) p_m(3u)}{\sqrt{f'(a_m)}}$ e nei valori (15) delle X, Y, Z, W del secondo membro le ξ, η, ζ diventano le $y(2u), z(2u), w(2u)$. Si otterranno così per mezzo delle (19) le formole della triplicazione. Daremo in seguito le espressioni di queste come in generale di quelle per la moltiplicazione.

CAPITOLO VIII.

Le funzioni théta e le funzioni sigma.
Loro sviluppo in serie.

1.º Abbiamo dimostrato nell'ultima parte del Capitolo III che ciascuna delle quindici funzioni iperellittiche p_r, p_{rs} può esprimersi mediante il rapporto di due funzioni théta, nel modo seguente:

$$p_r = C_r \frac{\Theta_r(u_1, u_2)}{\Theta(u_1, u_2)}, \quad p_{rs} = C_{rs} \frac{\Theta_{rs}(u_1, u_2)}{\Theta(u_1, u_2)}$$

essendo C_r, C_{rs} due costanti rispetto ad u_1, u_2 e funzioni dei moduli a_0, a_1, \dots, a_4 . Si è inoltre dimostrato che la funzione théta, comune denominatore di quei rapporti, la quale denomineremo funzione théta fondamentale, è definita dalle equazioni (41) dello stesso Capitolo.

Ora rammentando i valori di $f(x), f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$, dati nel Capitolo I, si ottengono dalle suddette (41) le relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \left[m_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} + n_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} \right] &= \varepsilon b_2 - n_0(x_1 x_2 + A_2) - n_1(x_1 + x_2) \\ \varepsilon \left[m_1 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} + n_1 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} \right] &= \varepsilon b_3 + n_0 S + n_1 x_1 x_2 \\ \varepsilon \left[m_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} + n_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} \right] &= \varepsilon c_2 + m_0(x_1 x_2 + A_1) + m_1(x_1 + x_2) \\ \varepsilon \left[m_1 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} + n_1 \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} \right] &= \varepsilon c_3 - m_0 S - m_1 x_1 x_2 \end{aligned} \right\} (1)$$

nelle quali:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{(t_1 - t_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - \\ &- [x_1^3 + x_2^3 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + A_1(x_1 + x_2)^2 + A_2(x_1 + x_2) + A_3]. \end{aligned} \right\} (2)$$

Queste relazioni conducono dapprima alla:

$$\left. \begin{aligned} m_0 \left[f_1(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} + f_2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} \right] + n_0 \left[f_1(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} + f_2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} \right] &= \\ &= (\xi - x_1)(\xi - x_2) + m_0 g_1(\xi) + n_0 g_2(\xi) \end{aligned} \right\} (3)$$

essendo ξ una quantità indeterminata. Ponendo $\xi = a_0, a_1, \dots, a_4$, si ottengono

i valori di $p_0^2, p_1^2, \dots, p_4^2$ espressi colle derivate seconde della funzione théta fondamentale, come già risulta dalla prima delle formole (33) del Capitolo III.

In secondo luogo osservando che il quadrato di una funzione a due indici $p^2_{\xi\eta}$, può così esprimersi:

$$p^2_{\xi\eta} = S(x_1, x_2) - S(\xi, \eta) + (x_1 + x_2)\xi\eta - (\xi + \eta)x_1x_2$$

si giunge alla:

$$\left. \begin{aligned} & f_1(\eta) \left[f_1(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} + f_2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} \right] + f_2(\eta) \left[f_1(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} + f_2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} \right] = \\ & = -p^2_{\xi\eta} + \frac{1}{2} [f_1(\xi)g_1(\eta) + f_1(\eta)g_1(\xi) + f_2(\xi)g_2(\eta) + f_2(\eta)g_2(\xi)] + \frac{1}{2} \frac{f'(\xi) - f'(\eta)}{\xi - \eta}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Se in questa per ξ, η si pongono le a_0, a_1, \dots, a_4 si hanno per i quadrati delle dieci funzioni iperellittiche a due indici espressioni analoghe alle (33) del Capitolo III.

Infine da quelle stesse relazioni si ottiene la seguente:

$$\left. \begin{aligned} & f_1^2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} + 2f_1(\xi)f_2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} + f_2^2(\xi) \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} = \\ & = (b_2\xi + b_3)f_1(\xi) + (c_2\xi + c_3)f_2(\xi) - S(x_1, x_2) + (2x_1x_2 + A_2)\xi - (x_1 + x_2)\xi^2 \end{aligned} \right\} (5)$$

formola della quale ci serviremo più avanti.

Se nelle formole superiori supponiamo $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$, si hanno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \log \Theta}{du_1^2} &= -S(x_1, x_2) \\ \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 du_2} &= x_1 x_2 \\ \frac{d^2 \log \Theta}{du_2^2} &= -(x_1 + x_2) \end{aligned} \right\} (6)$$

e quindi per $u_1 = u_2 = 0$, si dedurranno i valori:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1^2} \right)_0 &= -a_0 a_2 a_4 - a_1 a_3 (a_0 + a_2 + a_4) \\ \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1 du_2} \right)_0 &= a_1 a_3, \quad \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_2^2} \right)_0 = -(a_1 + a_3). \end{aligned} \right\} (7)$$

2.º Richiamando la equazione (15) del Capitolo IV e ponendo in essa:

$$y = \frac{\Theta_m}{\Theta}$$

si ottiene tosto la:

$$\Theta G_m - \Theta_m G = 0$$

nella quale:

$$G = 4f'(a_r) \frac{d\Theta}{da_r} + 2 \left(Q_r \frac{d\Theta}{du_1} + R_r \frac{d\Theta}{du_2} \right) - \\ - \left(f_1^2(a_r) \frac{d^2\Theta}{du_1^2} + 2f_1(a_r)f_2(a_r) \frac{d^2\Theta}{du_1 du_2} + f_2^2(a_r) \frac{d^2\Theta}{du_2^2} \right)$$

e G_m si deduce da G mutando Θ in Θ_m .

Posto $G = E\Theta$, si avrà $G_m = E\Theta_m$, e rimane così a trovarsi il valore di E .
Rammentando le equazioni (18) (19) del Capitolo IV si giunge alla:

$$2f'(a_r) \left[m_0 \frac{dv_1}{da_r} + n_0 \frac{dv_2}{da_r} \right] = m_0 Q'_r + n_0 R'_r - (m_0 Q''_r + n_0 R''_r) - \\ - [m_0 g_1(a_r) + n_0 g_2(a_r)] \left[H_r + \frac{t_1 - t_2}{x_1 - x_2} \right]$$

ed essendo (equazioni 42, Capitolo III)

$$m_0 \frac{dR_1}{da_r} + n_0 \frac{dR_2}{da_r} = - \left(\frac{dm_0}{da_r} R_1 + \frac{dn_0}{da_r} R_2 \right)$$

si ha il valore della espressione:

$$m_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_1 da_r} + n_0 \frac{d^2 \log \Theta}{du_2 da_r}.$$

Se ora osservasi essere:

$$E = 4f'(a_r) \frac{d \log \Theta}{da_r} + 2 \left(Q_r \frac{d \log \Theta}{du_1} + R_r \frac{d \log \Theta}{du_2} \right) - T_r^2 - F_r \quad (8)$$

posto per brevità come nel Capitolo IV:

$$T_r = f_1(a_r) \frac{d \log \Theta}{du_1} + f_2(a_r) \frac{d \log \Theta}{du_2}$$

ed:

$$F_r = f_1(a_r) \frac{dT_r}{du_1} + f_2(a_r) \frac{dT_r}{du_2};$$

si ottiene dopo alcune facili riduzioni essere:

$$m_0 \frac{dE}{du_1} + n_0 \frac{dE}{du_2} = 2(m_0 Q'_r + n_0 R'_r) + 2H_r p^2_r - \\ - \left(m_0 \frac{dF_r}{du_1} + n_0 \frac{dF_r}{du_2} \right)$$

ma per l'equazione (3) superiore:

$$m_0 \frac{d^2 T_r}{d u_1^2} + n_0 \frac{d^2 T_r}{d u_1 d u_2} = 2 p_r \frac{d p_r}{d u_1} = 2 p_r^2 \frac{d \log p_r}{d u_1}$$

$$m_0 \frac{d^2 T_r}{d u_1 d u_2} + n_0 \frac{d^2 T_r}{d u_2^2} = 2 p_r^2 \frac{d \log p_r}{d u_2}$$

per le quali e pel valore di H_r (5) del Capitolo IV, si ha:

$$m_0 \frac{d E}{d u_1} + n_0 \frac{d E}{d u_2} = 2(m_0 Q'_r + n_0 R'_r)$$

ed in essa le Q'_r , R'_r hanno i valori esposti nello stesso Capitolo IV. Analogamente si otterrebbe pel valore $m_1 \frac{d E}{d u_1} + n_1 \frac{d E}{d u_2}$:

$$m_1 \frac{d E}{d u_1} + n_1 \frac{d E}{d u_2} = 2(m_1 Q'_r + n_1 R'_r)$$

da cui:

$$\frac{d E}{d u_1} = 2 Q'_r, \quad \frac{d E}{d u_2} = 2 R'_r$$

e quindi:

$$E = 4 f'(a_r) C_r + P_r$$

nella quale C_r è la costante di integrazione, e $P_r = Q'_r u_1 + R'_r u_2$ è una funzione quadratica in u_1 , u_2 . La equazione (8) condurrà in conseguenza alla seguente equazione differenziale per la funzione Θ fondamentale:

$$\left. \begin{aligned} 4 f'(a_r) \frac{d \Theta}{d a_r} = 4 f'(a_r) C_r \Theta + P_r \Theta - 2 \left[Q_r \frac{d \Theta}{d u_1} + R_r \frac{d \Theta}{d u_2} \right] + \\ + f_1^2(a_r) \frac{d^2 \Theta}{d u_1^2} + 2 f_1(a_r) f_2(a_r) \frac{d^2 \Theta}{d u_1 d u_2} + f_2^2(a_r) \frac{d^2 \Theta}{d u_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ed è evidente pel modo con cui si giunse ad essa, che la equazione stessa sussiste per una qualunque delle sedici funzioni θ . Il valore della costante C_r si ottiene tosto ponendo $u_1 = u_2 = 0$ in quella equazione; e si avrà:

$$\left. \begin{aligned} 4 f'(a_r) C_r = 4 f'(a_r) \frac{d \log \Theta(0)}{d a_r} - \\ - \frac{1}{\Theta(0)} \left[f_1^2(a_r) \left(\frac{d^2 \Theta}{d u_1^2} \right)_0 + 2 f_1(a_r) f_2(a_r) \left(\frac{d^2 \Theta}{d u_1 d u_2} \right)_0 + f_2^2(a_r) \left(\frac{d^2 \Theta}{d u_2^2} \right)_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3.° Supporremo in seguito $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$; in questo caso dalla equazione (9) si deducono le due seguenti:

$$\left. \begin{aligned} 4 \sum_r \frac{d \log \Theta}{d a_r} &= 4 \sum_r C_r - 2(A_2 u_1^2 + 2 u_2^2) - 4 u_1 \frac{d \log \Theta}{d u_2} \\ 4 \sum_r a_r \frac{d \log \Theta}{d a_r} &= 4 \sum_r a_r C_r + 2 \left(3 u_1 \frac{d \log \Theta}{d u_1} + u_2 \frac{d \log \Theta}{d u_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

mentre dalla (10) si hanno:

$$\sum C_r = \sum \frac{d \log \Theta(0)}{d a_r}, \quad \sum a_r C_r = \sum a_r \frac{d \log \Theta(0)}{d a_r}.$$

Poniamo ora, per una funzione théta qualsivoglia, sia pari, sia dispari:

$$\Theta = H \cdot e^{\frac{1}{2} D} \sigma(u_1, u_2) \quad (12)$$

in cui H è una costante a determinarsi, D è la funzione quadratica:

$$D = D_0 u_1^2 + 2 D_1 u_1 u_2 + D_2 u_2^2$$

ed i coefficienti costanti D_0 , D_1 , D_2 sono pure indeterminati.

Supponiamo che i coefficienti D_0 , D_1 , D_2 soddisfino alle seguenti condizioni:

$$\left. \begin{aligned} \sum_r \frac{d D_0}{d a_r} &= -A_2 - 2 D_1, & \sum_r \frac{d D_1}{d a_r} &= -D_2, & \sum_r \frac{d D_2}{d a_r} &= -2 \\ \sum_r a_r \frac{d D_0}{d a_r} &= 3 D_0, & \sum_r a_r \frac{d D_1}{d a_r} &= 2 D_1, & \sum_r a_r \frac{d D_2}{d a_r} &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

posto inoltre:

$$\log \frac{H}{\Theta(0)} = K \quad (14)$$

le due equazioni (11) si trasformano nelle:

$$\left. \begin{aligned} 4 \sum_r \frac{d \sigma}{d a_r} &= -4 \sigma \sum_r \frac{d K}{d a_r} - 4 u_1 \frac{d \sigma}{d u_2} \\ 4 \sum_r a_r \frac{d \sigma}{d a_r} &= -4 \sigma \sum_r a_r \frac{d K}{d a_r} + 2 \left(3 u_1 \frac{d \sigma}{d u_1} + u_2 \frac{d \sigma}{d u_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

le quali sussistono per una qualsivoglia delle sedici funzioni sigma corrispondenti alle sedici funzioni théta.

Distinguiamo ora i due casi delle funzioni théta pari o dispari. Nel primo caso supponendo che la funzione sigma corrispondente sia per $u_1 = u_2 = 0$ eguale all'unità, si avrà dalla relazione (12) che H è eguale alla funzione théta che si considera nella quale sieno $u_1 = u_2 = 0$.

Se la funzione théta che si considera è la fondamentale, si hanno per la (14)

$$\sum_r \frac{dK}{da_r} = 0, \quad \sum_r a_r \frac{dK}{da_r} = 0$$

e le stesse equazioni si verificano per le altre nove funzioni pari. Infatti, se, per esempio, la funzione théta considerata è la $\Theta_m(u_1, u_2)$, queste due equazioni equivalgono alle:

$$\sum_r \frac{dy_m(0)}{da_r} = 0, \quad \sum_r a_r \frac{dy_m(0)}{da_r} = 0$$

equazioni l'una e l'altra soddisfatte dal valore di $y_m(0)$ trovato nel precedente Capitolo. Ne risulta che per una qualunque delle dieci funzioni sigma corrispondenti alle dieci funzioni théta pari, posto:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{-\frac{1}{2}D} \frac{\Theta(u_1, u_2)}{\Theta(0)}$$

la funzione $\sigma(u_1, u_2)$ soddisfa alle due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\sum_r \frac{d\sigma}{da_r} = -u_1 \frac{d\sigma}{du_2}, \quad \sum_r a_r \frac{d\sigma}{da_r} = \frac{1}{2} \left(3u_1 \frac{d\sigma}{du_1} + u_2 \frac{d\sigma}{du_2} \right).$$

Si avrà cioè per ciascuna di quelle dieci funzioni sigma:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + (u_1, u_2)_2 + (u_1, u_2)_4 + \dots$$

essendo $(u_1, u_2)_r$ una forma binaria dell'ordine r pari. E se indichiamo con $\rho(u_1, u_2)$ una qualsivoglia di queste forme, quella, per esempio, di ordine n , si hanno le:

$$\sum_r \frac{d\rho}{da_r} = -u_1 \frac{d\rho}{du_2} \quad \sum_r a_r \frac{d\rho}{da_r} = \frac{n}{2} \rho + u_1 \frac{d\rho}{du_1}.$$

La forma $\rho(u_1, u_2)$ d'ordine n , sarà quindi un covariante simultaneo di due forme binarie, di cui il grado del coefficiente di u_2^n rispetto alle a_0, a_1, \dots, a_n è eguale ad $\frac{n}{2}$. Posto:

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n)(u_1, u_2)^n$$

si avranno fra i coefficienti ρ_0, ρ_1, \dots , analogamente a quanto si è dimostrato

al Capitolo IV, le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r \frac{d\rho_0}{da_r} &= -n\rho_1, & \Sigma_r \frac{d\rho_1}{da_r} &= -(n-1)\rho_2, \dots & \Sigma_r \frac{d\rho_n}{da_r} &= 0 \\ \Sigma_r a_r \frac{d\rho_0}{da_r} &= \frac{3n}{2}\rho_0, & \Sigma_r a_r \frac{d\rho_1}{da_r} &= \frac{3n-2}{2}\rho_1, \dots & \Sigma_r a_r \frac{d\rho_n}{da_r} &= \frac{n}{2}\rho_n. \end{aligned} \right\} (16)$$

Supponiamo in secondo luogo essere dispari la funzione Θ che si considera. In questo caso posto:

$$\left(\frac{d\sigma}{du_1} \right)_0 = h_1 \quad \left(\frac{d\sigma}{du_2} \right)_0 = h_2$$

la relazione (12) dà:

$$h_1 = \frac{1}{H} \left(\frac{d\Theta}{du_1} \right)_0 \quad h_2 = \frac{1}{H} \left(\frac{d\Theta}{du_2} \right)_0.$$

Sia $\Theta_1(u_1, u_2)$ la funzione théta dispari, essendo:

$$p_1(u_1, u_2) = m \frac{\Theta_1(u_1, u_2)}{\Theta(u_1, u_2)}$$

ed m costante: per le formole (2) del Capitolo VI si avranno le due seguenti:

$$m h_1 \frac{H}{\Theta(0)} = a_3 [(01)(12)(14)]^{\frac{1}{2}}, \quad m_1 h_2 \frac{H}{\Theta(0)} = - [(01)(12)(14)]^{\frac{1}{2}}$$

posto quindi $h_1 = -a_3$, $h_2 = 1$ si avrà:

$$m \frac{H}{\Theta(0)} = - [(01)(12)(14)]^{\frac{1}{2}}$$

ma $m = \sqrt[4]{-f'(a_1)}$, quindi:

$$\Sigma_r \frac{dK}{da_r} = 0 \quad \Sigma_r a_r \frac{dK}{da_r} = \frac{1}{2}$$

i quali valori sostituiti nelle equazioni (15) danno per questo caso le seguenti equazioni differenziali del primo ordine:

$$\Sigma_r \frac{d\sigma}{da_r} = -u_1 \frac{d\sigma}{du_2}$$

$$\Sigma_r a_r \frac{d\sigma}{da_r} = -\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2} \left(3u_1 \frac{d\sigma}{du_1} + u_2 \frac{d\sigma}{du_2} \right)$$

e per esse sarà:

$$\sigma = u_2 - a_3 u_1 + (u_1, u_2)_3 + (u_1, u_2)_5 + \dots$$

ed infine indicando con $\rho(u_1, u_2)$ la forma binaria d'ordine n dispari, essa

dovrà soddisfare alle:

$$\sum_r \frac{d\rho}{da_r} = -u_1 \frac{d\rho}{du_2}, \quad \sum_r a_r \frac{d\rho}{da_r} = \frac{n-1}{2} \rho + u_1 \frac{d\rho}{du_1}$$

cioè la forma ρ sarà un covariante simultaneo, nel quale il coefficiente di u_2^n è del grado $\frac{n-1}{2}$ rispetto alle a_0, a_1, \dots, a_4 .

La stessa proprietà vale evidentemente per le funzioni sigma corrispondenti alle funzioni iperellittiche $p_3, p_{24}, p_{40}, p_{62}$. Dimostrasi facilmente seguendo il metodo indicato sopra che per la funzione σ corrispondente alla funzione iperellittica p_{13} si ha:

$$\sigma = u_1 + (u_1, u_2)_3 + (u_1, u_2)_5 + \dots$$

e che per la forma ρ d'ordine n si hanno le:

$$\sum_r \frac{d\rho}{da_r} = -u_1 \frac{d\rho}{du_2}, \quad \sum_r a_r \frac{d\rho}{da_r} = \frac{n-3}{2} \rho + u_1 \frac{d\rho}{du_1}$$

Ciascuna delle forme binarie che compongono gli sviluppi in serie delle sedici funzioni sigma sono quindi covarianti simultanei di due forme binarie, e siccome i coefficienti delle prime sono funzioni di a_0, a_1, \dots, a_4 , queste due forme risultano dallo spezzamento in due fattori della forma binaria:

$$f = u_1(u_2 - a_0 u_1)(u_2 - a_1 u_1)(u_2 - a_2 u_1)(u_2 - a_3 u_1)(u_2 - a_4 u_1)$$

il che risulterà più chiaramente dalle equazioni differenziali del secondo ordine.

4.° Si indichino con L, M, N i tre simboli di operazione:

$$L = \sum_r a_r^2 \frac{d}{da_r}, \quad M = \sum_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) \frac{d}{da_r}, \quad N = \sum_r (a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2) \frac{d}{da_r}$$

e poniamo:

$$p_1 = -(a_0 + a_2 + a_4), \quad p_2 = a_2 a_4 + a_4 a_0 + a_0 a_2, \quad p_3 = -a_0 a_2 a_4 \\ q_1 = -(a_1 + a_3), \quad q_2 = a_1 a_3;$$

dalla relazione (10), rammentando le (7), si hanno le tre seguenti:

$$4 \sum_r a_r^2 C_r = 4L(\log \Theta(0)) - q_1 \\ 4 \sum_r (a_r^3 + A_1 a_r^2) C_r = 4M(\log \Theta(0)) - 2q_2 \\ 4 \sum_r (a_r^4 + A_1 a_r^3 + A_2 a_r^2) C_r = 4N(\log \Theta(0)) - p_3 - p_1 q_2.$$

Per queste relazioni si ottengono dalla (9) le tre equazioni differenziali del

secondo ordine seguenti:

$$\begin{aligned}
 4L(\log \Theta) &= 4L(\log \Theta(0)) - q_1 + 3A_1u_1^2 + A_2u_2^2 - \\
 &\quad - 2(A_1u_1 - u_2) \frac{d \log \Theta}{du_1} - 2A_1u_2 \frac{d \log \Theta}{du_2} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{du_2^2} \\
 2M(\log \Theta) &= 2M(\log \Theta(0)) - q_2 + (A_1A_4 + 3A_5)u_1^2 + A_4u_1u_2 + A_3u_2^2 - \\
 &\quad - 2A_2u_1 \frac{d \log \Theta}{du_1} - A_2u_2 \frac{d \log \Theta}{du_2} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{du_1 du_2} \\
 4N(\log \Theta) &= 4N(\log \Theta(0)) - p_3 - p_1q_2 + (A_2A_4 + 4A_1A_5)u_1^2 + 4A_5u_1u_2 + 3A_4u_2^2 - \\
 &\quad - 6A_3u_1 \frac{d \log \Theta}{du_1} + 2(A_4u_1 - A_3u_2) \frac{d \log \Theta}{du_2} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{du_1^2}
 \end{aligned}$$

le quali trasformate per mezzo della (14) conducono alle tre equazioni differenziali del secondo ordine alle quali devono soddisfare ciascuna delle sedici funzioni sigma. Esse sono:

$$\left. \begin{aligned}
 4L(\sigma) &= [D_2 - q_1 - 4L(K)]\sigma + (L_0u_1^2 + 2L_1u_1u_2 + L_2u_2^2)\sigma - \\
 &\quad - 2(A_1u_1 - u_2) \frac{d\sigma}{du_1} + 2[D_1u_1 + (D_2 - A_1)u_2] \frac{d\sigma}{du_2} + \frac{d^2\sigma}{du_2^2} \\
 2M(\sigma) &= [D_1 - q_2 - 2M(K)]\sigma + (M_0u_1^2 + 2M_1u_1u_2 + M_2u_2^2)\sigma + \\
 &\quad + [(D_1 - 2A_2)u_1 + D_2u_2] \frac{d\sigma}{du_1} + [D_0u_1 + (D_1 - A_2)u_2] \frac{d\sigma}{du_2} + \frac{d^2\sigma}{du_1 du_2} \\
 4N(\sigma) &= [D_0 - p_3 - p_1q_2 - 4N(K)]\sigma + (N_0u_1^2 + 2N_1u_1u_2 + N_2u_2^2)\sigma + \\
 &\quad + 2[(D_0 - 3A_3)u_1 + D_1u_2] \frac{d\sigma}{du_1} + 2(A_4u_1 - A_3u_2) \frac{d\sigma}{du_2} + \frac{d^2\sigma}{du_1^2}
 \end{aligned} \right\} (17)$$

nelle quali K ha il valore (14), i coefficienti D_0, D_1, D_2 devono soddisfare alle (13), e le quantità L_0, L_1, \dots hanno i valori seguenti:

$$\left. \begin{aligned}
 L_0 &= 3A_4 - 2A_1D_0 + D_1^2 - 2L(D_0) \\
 L_1 &= D_0 + D_1D_2 - 2A_1D_1 - 2L(D_1) \\
 L_2 &= A_2 + 2D_1 + D_2^2 - 2A_1D_2 - 2L(D_2) \\
 M_0 &= A_1A_4 + 3A_5 + D_0D_1 - 2A_2D_0 - M(D_0) \\
 M_1 &= \frac{1}{2}[A_4 + D_1^2 + D_0D_2 - 3A_2D_1 - 2M(D_1)] \\
 M_2 &= A_3 + D_1D_2 - A_2D_2 - M(D_2) \\
 N_0 &= A_2A_4 + 4A_1A_5 + D_0^2 - 6A_3D_0 + 2A_1D_1 - 2N(D_0) \\
 N_1 &= 2A_5 + D_0D_1 - 4A_3D_1 + A_4D_2 - 2N(D_1) \\
 N_2 &= 3A_4 + D_1^2 - 2A_3D_2 - 2N(D_2).
 \end{aligned} \right\} (18)$$

Supponiamo dapprima essere la sigma che consideriamo una delle dieci pari; sarà:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + e + g + l + \dots$$

essendo e, g, l, \dots forme binarie d'ordine $2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots$. Sostituendo nelle tre equazioni superiori si hanno per la determinazione dei coefficienti di e le:

$$0 = D_2 - q_1 - 4L(K) + \frac{d^2 e}{du_2^2}$$

$$0 = D_1 - q_2 - 2M(K) + \frac{d^2 e}{du_1 du_2}$$

$$0 = D_0 - p_3 - p_1 q_2 - 4N(K) + \frac{d^2 e}{du_1^2}$$

ossia posto $e = e_0 u_1^2 + 2e_1 u_1 u_2 + e_2 u_2^2$ saranno:

$$e_0 = \frac{1}{2} [4N(K) + p_3 + p_1 q_2 - D_0], \quad e_1 = \frac{1}{2} [2M(K) + q_2 - D_1]$$

$$e_2 = \frac{1}{2} [4L(K) + q_1 - D_2]$$

Così per la determinazione dei coefficienti di g si hanno dalle stesse (17) le tre relazioni quadratiche:

$$\left. \begin{aligned} 4L(e) &= -2e_2 e + L_0 u_1^2 + 2L_1 u_1 u_2 + L_2 u_2^2 - 2(A_1 u_1 - u_2) \frac{de}{du_1} + \\ &\quad + 2[D_1 u_1 + (D_2 - A_1) u_2] \frac{de}{du_2} + \frac{d^2 g}{du_2^2} \\ 2M(e) &= -2e_1 e + M_0 u_1^2 + 2M_1 u_1 u_2 + M_2 u_2^2 + [(D_1 - 2A_2) u_1 + D_2 u_2] \frac{de}{du_1} + \\ &\quad + [D_0 u_1 + (D_1 - A_2) u_2] \frac{de}{du_2} + \frac{d^2 g}{du_1 du_2} \\ 4N(e) &= -2e_0 e + N_0 u_1^2 + 2N_1 u_1 u_2 + N_2 u_2^2 + 2[(D_0 - 3A_3) u_1 + D_1 u_2] \frac{de}{du_1} + \\ &\quad + 2(A_4 u_1 - A_3 u_2) \frac{de}{du_2} + \frac{d^2 g}{du_1^2} \end{aligned} \right\} (19)$$

e così di seguito si ottengono per mezzo di queste formole di ricorsione i valori dei coefficienti di tutte le forme binarie delle quali componesi lo sviluppo di una $\sigma(u_1, u_2)$ pari. Se la $\sigma(u_1, u_2)$ che si considera corrisponde alla funzione thèta fondamentale si hanno $L(K) = M(K) = N(K) = 0$; se, per esempio, corrisponde alla funzione $\Theta_0(u_1, u_2)$ si hanno le:

$$4L(K) + q_1 = -(a_2 + a_4) \quad 2M(K) + q_2 = a_2 a_4$$

$$4N(K) + p_3 + p_1 q_2 = -a_0 a_1 a_3 - a_2 a_4 (a_0 + a_1 + a_3)$$

e perciò i valori di e_0, e_1, e_2 superiori nel passare dalla $\sigma(u_1, u_2)$ fondamentale, alla $\sigma_0(u_1, u_2)$ si ottengono dai precedenti colla permutazione di a_1, a_3 in a_2, a_4 , ed analogamente per le altre funzioni sigma pari.

Ciò posto consideriamo più specialmente lo sviluppo della funzione sigma fondamentale; ed osserviamo dapprima che posto:

$$D_0 = p_3 + p_1 q_2 \quad D_1 = q_2 \quad D_2 = q_1$$

sono soddisfatte le equazioni di condizione (13). I coefficienti e_0, e_1, e_2 sono in questa ipotesi eguali a zero, cioè la funzione $\sigma(u_1, u_2)$ fondamentale, come pure le altre nove funzioni pari, possono esprimersi come segue:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + c_1 g + c_2 l + \dots$$

essendo g del 4° ordine, e c_1, c_2, \dots coefficienti numerici. In questa ipotesi devono per le superiori equazioni (19) essere

$$L_1 = M_2, \quad L_0 = M_1 = N_2, \quad M_0 = N_1$$

e posto $c_1 = -\frac{1}{3 \cdot 4}$, si hanno pei coefficienti della forma biquadratica:

$$g = (g_0, g_1, \dots, g_4)(u_1, u_2)^4$$

i seguenti valori:

$$\left. \begin{aligned} g_4 &= p_2 - q_2 + q_1^2 - p_1 q_1, & g_3 &= p_3 - p_1 q_2 + q_1 q_2 \\ g_2 &= q_1 g_3 - q_2 g_4, & g_1 &= q_1 g_2 - q_2 g_3 \\ g_0 &= q_1 g_1 - q_2 g_2 + g_3^2 - g_2 g_4. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

La forma g , come tutte le altre delle quali componesi lo sviluppo della sigma fondamentale, sono covarianti simultanei delle due forme cubiche:

$$\varphi = u_1(u_2 - a_1 u_1)(u_2 - a_3 u_1) = u_1(q_2 u_1^2 + q_1 u_1 u_2 + u_2^2)$$

$$\psi = (u_2 - a_0 u_1)(u_2 - a_2 u_1)(u_2 - a_4 u_1) = p_3 u_1^3 + p_2 u_1^2 u_2 + p_1 u_1 u_2^2 + u_2^3$$

ed analogamente per le altre nove sigma pari, permutando i moduli a_0, a_1, \dots nel modo sopra indicato.

5.° Il sistema dei covarianti e degli invarianti simultanei di due forme binarie cubiche è noto (*), ma non lo sono del pari alcune relazioni fra le forme del sistema, relazioni opportune al nostro scopo. Esponiamo quindi di nuovo questa teoria colla massima brevità.

(*) *Theorie der Binären Algebraischen Formen* von A. CLEBSCH, § 61.

Il sistema si compone di 26 forme (come quello corrispondente ad una forma del sesto ordine), e cioè una forma biquadratica, sei cubiche, sei quadratiche, sei lineari e sette invarianti. Indicheremo con d ; a , b , c ; α , β , γ la forma biquadratica ed i sei covarianti biquadratici, ossia adottando l'ordinario algoritmo:

$$d = (\varphi\psi), \quad \alpha = \frac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \quad b = (\varphi\psi)_2, \quad c = \frac{1}{2}(\psi\psi)_2$$

$$\alpha = (bc)_2, \quad \beta = (ca)_2, \quad \gamma = (ab)_2$$

le sei forme cubiche saranno:

$$\varphi, \quad \psi; \quad (\varphi a), \quad (\varphi c); \quad (\psi a), \quad (\psi c);$$

le sei lineari:

$$\lambda = (\psi a)_2 = -(\varphi b)_2; \quad \mu = (\varphi c)_2 = -(\psi b)_2; \quad (\lambda a), \quad (\lambda c); \quad (\mu a), \quad (\mu c);$$

infine gli invarianti:

$$J = (\varphi\psi)_3, \quad A = (aa)_2, \quad B = (bb)_2, \quad C = (cc)_2$$

$$E = (bc)_2, \quad F = (ca)_2, \quad G = (ab)_2$$

e:

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}$$

in cui $a_{11} = \frac{1}{2} \frac{d^2 a}{du_1^2}$, $a_{12} = \frac{1}{2} \frac{d^2 a}{du_1 du_2}$, ... Questi invarianti si riducono a sette per la relazione:

$$J^2 = 8F - 2B.$$

I discriminanti delle forme φ , ψ , sono, salvo un coefficiente numerico, eguali ad A , C ; ed il risultante R delle forme stesse è dato dalla:

$$R = -[J^3 + 54K]; \tag{21}$$

infine gli invarianti i , j della forma biquadratica d , hanno i valori:

$$i = \frac{1}{12} J^2, \quad j = -\frac{1}{216} [J^3 + 108K]$$

da cui la nota relazione:

$$R = 108 \left[j - \frac{1}{18} iJ \right].$$

Fra i sei covarianti lineari hanno luogo varie relazioni osservabili. Dapprima

quella che risulta dalla loro definizione cioè la:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

poi le tre:

$$Ka = A\alpha + G\beta + F\gamma; \quad Kb = G\alpha + B\beta + E\gamma, \quad Kc = F\alpha + E\beta + C\gamma$$

dalle quali, osservando essere:

$$2K^2 = \begin{vmatrix} A & G & F \\ G & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix}$$

si ottengono quelle che esprimono α, β, γ in funzione lineare di a, b, c . Fra le α, β, γ sussiste quindi la relazione quadratica:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2E\beta\gamma + 2F\gamma\alpha + 2G\alpha\beta = 0$$

ed una analoga fra le a, b, c ; ossia la:

$$A_1a^2 + B_1b^2 + C_1c^2 + 2E_1bc + 2F_1ca + 2G_1ab = 0$$

essendo A_1, B_1, \dots i determinanti minori $BC - E^2, AC - F^2, \dots$ del determinante superiore. Dalle note formole:

$$2(ab)(ac) = ab(ac)_2 + ac(ab)_2 - a^2(bc)_2 - bc(aa)_2$$

$$2(\overline{bc})^2 = 2bc(bc)_2 - b^2(cc)_2 - c^2(bb)_2$$

si ottengono fra i quadrati dei covarianti quadratici le sei relazioni:

$$2\beta\gamma = Ea^2 + Abc - Gca - Fab$$

$$2\gamma\alpha = Fb^2 - Gbc + Bca - Eab$$

$$2\alpha\beta = Gc^2 - Fbc - Eca + Cab$$

$$2\alpha^2 = 2Ebc - Cb^2 - Bc^2$$

$$2\beta^2 = 2Fca - Ac^2 - Ca^2$$

$$2\gamma^2 = 2Gab - Ba^2 - Ab^2$$

ed essendo:

$$(\beta\gamma) = \frac{1}{2}Ka, \quad (\gamma\alpha) = \frac{1}{2}Kb, \quad (\alpha\beta) = \frac{1}{2}Kc$$

inoltre:

$$(\alpha\alpha)_2 = \frac{1}{2}A_1, \quad (\beta\beta)_2 = \frac{1}{2}B_1, \quad (\gamma\gamma)_2 = \frac{1}{2}C_1$$

$$(\beta\gamma)_2 = \frac{1}{2}E_1, \quad (\gamma\alpha)_2 = \frac{1}{2}F_1, \quad (\alpha\beta)_2 = \frac{1}{2}G_1$$

si avranno le due relazioni reciproche:

$$\begin{aligned} K^2 bc &= E_1 \alpha^2 + A_1 \beta \gamma - G_1 \gamma \alpha - F_1 \alpha \beta \\ K^2 a^2 &= 2 E_1 \beta \gamma - C_1 \beta^2 - B_1 \gamma^2 \end{aligned}$$

ed analogamente le altre quattro. Introducendo ora i due covarianti lineari λ, μ si hanno dapprima le:

$$K\varphi = \mu\gamma - \lambda\beta, \quad K\psi = \lambda\alpha - \mu\beta \quad (22)$$

dalle quali, essendo:

$$(\alpha\lambda) = (\beta\mu), \quad (\beta\lambda) = (\gamma\mu)$$

si deducono le:

$$(\varphi\lambda) = -2\gamma, \quad (\varphi\mu) = -2\beta; \quad (\psi\lambda) = 2\beta, \quad (\psi\mu) = 2\alpha$$

e da queste per la $(\lambda\mu) = 2K$, si ha:

$$Kd = 2(\beta^2 - \alpha\gamma). \quad (23)$$

Sia h l'hessiano della forma biquadratica d ossia $h = \frac{1}{2}(dd)_2$, si ottiene da quest'ultima la relazione:

$$12h = 2Jd - 3(b^2 - 4ac). \quad (24)$$

È noto che l'hessiano della forma biquadratica $ld + mh$, nella quale l, m sono costanti, ha la forma seguente:

$$\left[\frac{1}{6}ilm + \frac{1}{4}jm^2\right]d + \left(l^2 - \frac{1}{12}im^2\right)h$$

essendo i, j i due invarianti di d trovati sopra. Se poniamo:

$$l = J, \quad m = -12$$

si ha, per quei valori di i, j , che l'hessiano stesso è eguale ad $\frac{1}{3}Rd$. Di qui il teorema. *L'hessiano della forma:*

$$Jd - 12h \quad (25)$$

è eguale ad $\frac{1}{3}Rd$.

Se dalle tre equazioni:

$$(\varphi a)_2 = 0 \quad (\varphi b)_2 = -\lambda \quad (\varphi c)_2 = \mu$$

si ricavano i valori di $\varphi_{11}, -2\varphi_{12}, \varphi_{22}$; ed analogamente quelli di $\psi_{11}, -2\psi_{12}, \psi_{22}$, si deducono dai medesimi le tre relazioni:

$$\begin{aligned} 4K^2 a &= B_1 \lambda^2 + C_1 \mu^2 - 2E_1 \lambda \mu \\ 2K^2 b &= -G_1 \lambda^2 - E_1 \mu^2 + (F_1 + B_1) \lambda \mu \\ 4K^2 c &= A_1 \lambda^2 + B_1 \mu^2 - 2G_1 \lambda \mu \end{aligned}$$

ossia posto:

$$V = A_1 \lambda^4 - 4 G_1 \lambda^3 \mu + 6 B_1 \lambda^2 \mu^2 - 4 E_1 \lambda \mu^3 + C_1 \mu^4$$

ed osservando essere:

$$B_1 - F_1 = KJ$$

si hanno le:

$$4K^2 a = V_{22}, \quad 2K^2 b = V_{12} - KJ\lambda\mu, \quad 4K^2 c = V_{11} \quad (26)$$

da cui:

$$4K^2(a\mu^2 + b\mu\lambda + c\lambda^2) = V - 2KJ\lambda^2\mu^2 \quad (27)$$

essendosi scritto V_{11} per $\frac{1}{3} \cdot 4 \frac{d^2 V}{d\lambda^2}$ e così per V_{12} , V_{22} .

Analogamente se indicasi con U la seconda forma biquadratica in λ , μ ; cioè:

$$U = C\lambda^4 + 2E\lambda^3\mu + 6F\lambda^2\mu^2 + 2G\lambda\mu^3 + A\mu^4$$

e con Φ la:

$$\Phi = 4KU - JV$$

si ottengono le relazioni:

$$8K^2\alpha = \Phi_{11}, \quad 8K^2\beta = -\Phi_{12}, \quad 8K^2\gamma = \Phi_{22} \quad (28)$$

dalle quali:

$$8K^2(\alpha\lambda^2 - 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2) = \Phi \quad 64K^4(\alpha\gamma - \beta^2) = H \quad (29)$$

essendo $H = \frac{1}{2}(\Phi\Phi)_2$ l'hessiano di Φ .

Per le relazioni (28) le precedenti (22) danno:

$$8K^3\varphi = \Phi_2 \quad 8K^3\psi = \Phi_1 \quad (30)$$

essendo $\Phi_1 = \frac{1}{4} \frac{d\Phi}{d\lambda}$, $\Phi_2 = \frac{1}{4} \frac{d\Phi}{d\mu}$.

Dai valori di U e di V , si ottengono facilmente le seguenti formole:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(VV)_2 &= 2K^2U - 2KJV_{12}\lambda\mu \\ \frac{1}{2}(UU)_2 &= \frac{1}{8}J^2U + \frac{1}{4}V - \frac{1}{2}J^2U_{12}\lambda\mu - \frac{1}{2}KJ\lambda^2\mu^2 \\ (UV)_2 &= KJU - \frac{1}{2}J^2V_{12}\lambda\mu - 2KJU_{12}\lambda\mu \end{aligned}$$

per le quali si ha:

$$H = 4K^2[V - 2KJ\lambda^2\mu^2] \quad (31)$$

o per la superiore (27):

$$H = 16K^4(a\mu^2 + b\mu\lambda + c\lambda^2)$$

ed anche per la seconda delle (29):

$$4(\alpha\gamma - \beta^2) = a\mu^2 + b\mu\lambda + c\lambda^2. \quad (32)$$

Le relazioni (23) (24) conducono così alle:

$$32 K^5 d = -H, \quad 6 \cdot 4^3 \cdot K^5 h = 12 K^2 \Phi + JH$$

da cui la trasformata della (25):

$$16 K^5 (Jd - 12h) = - [6 K^2 \Phi + JH]. \quad (33)$$

Da queste trasformazioni ottenute per mezzo dei covarianti lineari:

$$\lambda = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \quad \mu = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$$

si può dedurre anche una trasformazione delle equazioni fondamentali (6) del Capitolo I. Infatti posto nelle medesime $x = \frac{z_2}{z_1}$, supponendo $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, ed indicando con l, m i covarianti lineari simultanei delle due forme cubiche:

$$\varphi = z_1(z_2 - a_\lambda z_1)(z_2 - a_\mu z_1), \quad \psi = (z_2 - a_m z_1)(z_2 - a_r z_1)(z_2 - a_s z_1)$$

ossia:

$$l = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \quad m = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2$$

si ha:

$$\frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{\sqrt{\varphi\psi}} = 4 K^2 \frac{l dm - m dl}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}$$

essendo Φ la funzione biquadratica superiore nella quale siensi sostituite l, m a λ, μ . Nelle (6) sopra citate si potranno così sostituire λ, μ ad u_1, u_2 e gli integrali, coi convenienti limiti saranno:

$$2 K^2 \int \frac{l(l dm - m dl)}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}, \quad 2 K^2 \int \frac{m(l dm - m dl)}{\sqrt{\Phi_1 \Phi_2}}.$$

6.° Ritornando ora allo sviluppo in serie delle funzioni sigma, e quindi alle equazioni (20), osserviamo dapprima che il risultante delle forme cubiche φ, ψ , indicato sopra con R , si esprime coi coefficienti della forma biquadratica g nel modo seguente:

$$R = g_3^2 - g_2 g_4.$$

Denominando per ciò con k l'hessiano della stessa forma g , ossia $k = \frac{1}{2} (g g)_2$ si hanno dalle (20) le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= g_0 g_2 - g_1^2 = R(p_3 q_1 - p_2 q_2), & 2k_1 &= g_0 g_3 - g_1 g_2 = R(p_3 - p_1 q_2) \\ 6k_2 &= g_0 g_4 + 2g_1 g_3 - 3g_2^2 = R(p_2 - p_1 q_1 - 3q_2) \\ 2k_3 &= g_1 g_4 - g_2 g_3 = -Rq_1 \\ k_4 &= g_2 g_4 - g_3^2 = -R, & g_1 g_3 - g_2^2 &= -Rq_2. \end{aligned} \right\} (34)$$

Da esse deducesi il valore dell'invariante quadratico S della forma g , e si ha:

$$S = R(p_2 - p_1 q_1 + 3q_2) = -3RJ$$

essendo J l'invariante simultaneo $(\varphi\psi)_3$; inoltre trovasi:

$$T = -R^2$$

pel valore dell'invariante cubico T di g ; infine si ha:

$$k = 3Rd$$

dove d , come sopra, è il covariante simultaneo $(\varphi\psi)$. Ne segue che pel teorema stabilito nel paragrafo precedente, sarà:

$$g = 3(Jd - 12h)$$

la quale espressione per le (23) (24) (32) potrà prendere le tre forme:

$$\left. \begin{aligned} g &= 3[3(b^2 - 4ac) - Jd] = 3[2Jd - 3(\lambda\psi + \mu\varphi)] \\ Kg &= 3[3K(b^2 - 4ac) - 2J(\beta^2 - \alpha\gamma)] \\ 2Kg &= 3[6K[b^2 - 4ac] + J(a\mu^2 + b\mu\lambda + c\lambda^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Da ultimo trasformata per mezzo dei covarianti lineari λ, μ , la funzione g , per la (33) diventerà:

$$16K^5g = \Gamma$$

posto:

$$\Gamma = -3[6K^2\Phi + JH]. \quad (36)$$

Determinate così le varie espressioni della forma biquadratica g , della prima forma, cioè che incontrasi nello sviluppo in serie della sigma fondamentale, ed analogamente di una qualunque sigma pari; supponiamo che xr, ys, zt (essendo x, y, z tre coefficienti numerici) sieno fra le varie forme dello sviluppo le tre degli ordini $n-2, n, n+2$.

Dalle equazioni (19), dopo aver posto per D_0, D_1, D_2 i rispettivi valori $p_3 + p_1q_2, q_2, q_1$, si ottengono fra le forme r, s, t le tre seguenti formole ricorrenti:

$$\left. \begin{aligned} L(s) &= \frac{n(n-1)}{16} g_{22}r - \frac{1}{2}(A_1u_1 - u_2) \frac{ds}{du_1} + \frac{1}{2}(q_2u_1 - p_1u_2) \frac{ds}{du_2} + t_{22} \\ M(s) &= \frac{n(n-1)}{8} g_{12}r - \frac{1}{2}[(2A_2 - q_2)u_1 - q_1u_2] \frac{ds}{du_1} + \\ &\quad + \frac{1}{2}[(p_3 + p_1q_2)u_1 - (A_2 - q_2)u_2] \frac{ds}{du_2} + 2t_{12} \\ N(s) &+ \frac{n(n-1)}{16} g_{11}r - \frac{1}{2}[(3A_3 - p_3 - p_1q_2)u_1 - q_2u_2] \frac{ds}{du_1} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(A_4u_1 - A_3u_2) \frac{ds}{du_2} + t_{11} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

nelle quali:

$$g_{11} = \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{d^2 g}{d u_1^2}, \quad t_{11} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{d^2 t}{d u_1^2} \dots$$

e si è posto:

$$y = \frac{1}{4} z(n+1)(n+2) \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{1}{4} y(n-1)n. \quad (38)$$

L'ultima delle formole superiori, rammentando che la forma s soddisfa alle equazioni differenziali del primo ordine:

$$\sum_r \frac{ds}{da_r} = -u_1 \frac{ds}{du_2} \quad \sum_r a_r \frac{ds}{da_r} = \frac{1}{2} \left[3u_1 \frac{ds}{du_1} + u_2 \frac{ds}{du_2} \right]$$

ed osservando che:

$$N(s) + A_3 \sum_r a_r \frac{ds}{da_r} + A_4 \sum_r \frac{ds}{da_r} = -A_5 \sum_r \frac{1}{a_r} \frac{ds}{da_r}$$

si trasforma nella seguente:

$$\eta(s) = -\frac{n(n-1)}{16} g_{11} r - \frac{1}{2} [(p_3 + p_1 q_2) u_1 + q_2 u_2] \frac{ds}{du_1} + \frac{1}{2} A_4 u_1 \frac{ds}{du_2} - t_{11} \quad (39)$$

indicando con η il simbolo di operazione:

$$\begin{aligned} \eta &= A_5 \sum_r \frac{1}{a_r} \frac{d}{da_r} = p_3 \left[q_1 \frac{d}{dq_1} + (q_1^2 - 2q_2) \frac{d}{dq_2} \right] + \\ &+ q_2 \left[p_2 \frac{d}{dp_1} + (p_1 p_2 - 3p_3) \frac{d}{dp_2} + (p_2^2 - 2p_1 p_3) \frac{d}{dp_3} \right]. \end{aligned}$$

Sieno:

$$\begin{aligned} r &= (r_0, r_1, \dots, r_{n-2})(u_1, u_2)^{n-2}, & s &= (s_0, s_1, \dots, s_n)(u_1, u_2)^n, \\ t &= (t_0, t_1, \dots, t_{n+2})(u_1, u_2)^{n+2} \end{aligned}$$

dalla formola ricorrente (39) si ha tosto:

$$t_0 = -\frac{n(n-1)}{16} g_0 r_0 - \frac{n}{2} (p_3 + p_1 q_2) s_0 + \frac{n}{2} A_4 s_1 - \eta(s_0) \quad (40)$$

per la quale allorquando sieno noti i valori di r_0, s_0, s_1 lo è pur quello di t_0 . Se ora rammentasi che la forma t deve soddisfare alla:

$$\sum_r \frac{dt}{da_r} = -u_1 \frac{dt}{du_2}$$

e quindi sono:

$$(n+2)t_1 = -\sum_r \frac{dt_0}{da_r}, \quad (n+1)t_2 = -\sum_r \frac{dt_1}{da_r}, \dots$$

si può concludere che la ricerca delle varie forme dello sviluppo in serie di

una sigma pari dipende dalla formola ricorrente (40). Nel fare uso della quale si notino le relazioni:

$$A_1 = p_1 + q_1, \quad A_2 = p_2 + q_2 + p_1 q_1, \quad A_3 = p_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1$$

$$A_4 = p_3 q_1 + p_2 q_2, \quad A_5 = p_3 q_2$$

e le:

$$\eta(A_1) = A_4, \quad \eta(A_2) = A_1 A_4 - 5 A_5, \quad \eta(A_3) = A_2 A_4 - 4 A_1 A_5$$

$$\eta(A_4) = A_3 A_4 - 3 A_2 A_5, \quad \eta(A_5) = A_4^2 - 2 A_3 A_5.$$

Rappresentando lo sviluppo in serie della sigma qui considerata colla espressione:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + \frac{b_1}{\Pi 4} g + \frac{b_2}{\Pi 6} l + \frac{b_3}{\Pi 8} m + \frac{b_4}{\Pi 10} n + \frac{b_5}{\Pi 12} v + \dots$$

nella quale l, m, n, v, \dots sono forme binarie degli ordini 6, 8, 10, 12, ... e $\Pi n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; si avrà per le (38) che fra i coefficienti numerici b_1, b_2, \dots sussistono le relazioni:

$$b_2 = 4b_1, \quad b_3 = 4b_2, \quad b_4 = 4b_3, \dots$$

e siccome si è trovato essere:

$$\frac{b_1}{\Pi 4} = -\frac{1}{3 \cdot 4}, \quad \text{e quindi } b_1 = -2$$

ne risulta che il valore del coefficiente numerico b di ciascuna forma g, l, m, \dots è eguale a -2^{i-3} , supposto essere i l'ordine della forma corrispondente.

Sieno ora l_0, m_0, n_0, \dots i coefficienti della più alta potenza di u_1 nelle forme l, m, n, \dots . Se nella formola ricorrente (40) poniamo $n = 4$, saranno $r_0 = 0, s_0 = g_0, t_0 = l_0$ e si avrà così:

$$l_0 = -2(p_3 + p_1 q_2)g_0 + 2A_4 g_1 - \eta(g_0). \quad (41)$$

Ricordando le relazioni (20) ed osservando essere:

$$\left. \begin{aligned} g_1 - p_1 g_2 + p_2 g_3 - p_3 g_4 &= 0 \\ g_0 - p_1 g_1 + p_2 g_2 - p_3 g_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

si ottengono le seguenti formole:

$$\eta(g_4) = g_1 - p_1 g_2 = p_3 g_4 - p_2 g_3, \quad \eta(g_3) = -p_2 q_1 g_3 + A_4 g_4$$

$$\eta(g_2) = -p_2 q_1 g_2 + A_4 g_3 + A_5 g_4$$

$$\eta(g_1) = -p_2 q_1 g_1 + A_4 g_2 + 2A_5 g_3$$

$$\eta(g_0) = -p_2 q_1 g_0 + A_4 g_1 + 3A_5 g_2$$

per l'ultima delle quali la (41) dà:

$$l_0 = P g_0 + A_4 g_1 - 3 A_5 g_2$$

posto:

$$P = p_2 q_1 - 2 p_3 - 2 p_1 q_2 = A_3 - 3(p_3 + p_1 q_2).$$

Da questo valore di l_0 si deducono nel modo indicato quelli di l_1, l_2, \dots e quindi quello della forma l , che esprimasi per mezzo delle forme φ, ψ, g nel modo seguente:

$$l = -\frac{3}{2} [\psi(\varphi g)_2 + \varphi(\psi g)_2 + 3 g(\varphi \psi)_2]. \quad (43)$$

Si notino fra i coefficienti della forma l e quelli delle φ, ψ le relazioni analoghe alle (20) (42):

$$\begin{aligned} l_0 - q_1 l_1 + q_2 l_2 &= R P & l_1 - q_1 l_2 + q_2 l_3 &= -\frac{3}{2} R q_2 \\ l_2 - q_1 l_3 + q_2 l_4 &= -\frac{1}{2} R q_1 & l_3 - q_1 l_4 + q_2 l_5 &= -\frac{1}{2} R \\ l_4 - q_1 l_5 + q_2 l_6 &= 0 \end{aligned}$$

e le:

$$\begin{aligned} l_0 - p_1 l_1 + p_2 l_2 - p_3 l_3 &= -\frac{3}{2} R p_3 & l_1 - p_1 l_2 + p_2 l_3 - p_3 l_4 &= -\frac{1}{2} R p_2 \\ l_2 - p_1 l_3 + p_2 l_4 - p_3 l_5 &= -\frac{1}{2} R p_1 & l_3 - p_1 l_4 + p_2 l_5 - p_3 l_6 &= -\frac{3}{2} R. \end{aligned}$$

Si hanno così per le forme g, l :

$$\begin{aligned} (g \varphi)_3 &= 0 & (g \psi)_3 &= 0 \\ (l \varphi)_3 &= \frac{3}{2} R \varphi, & (l \psi)_3 &= \frac{3}{2} R \psi \end{aligned}$$

essendo R , qui come sopra, il risultante delle forme φ, ψ .

Per $n = 6$ si dovranno porre nella equazione (40) $r_0 = g_0, s_0 = l_0, t_0 = m_0$ e si avrà:

$$m_0 = -\frac{15}{8} g_0^2 - 3(p_3 + p_1 q_2) l_0 + 3 A_4 l_1 - \eta(l_0).$$

Il valore di $\eta(l_0)$ si ottiene direttamente da quello di l_0 , osservando essere:

$$\eta(P) = -2 g_0 - (p_3 + p_1 q_2) P - 4 A_4 q_2 + 3 A_5 q_1$$

e che per le (20) (42) sussistono le due relazioni:

$$\begin{aligned} q_2 g_0 - (p_3 + p_1 q_2) g_1 + A_4 g_2 - 2 A_5 g_3 &= 0 \\ q_1 g_0 - A_2 g_1 + (2 A_3 - p_3 - p_1 q_2) g_2 - 2 A_4 g_3 + 2 A_5 g_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ottiensi così:

$$\eta(l_0) = -2 g_0^2 - A_3 l_0 + 2 A_4 l_1 + 3 A_5 l_2$$

il quale valore sostituito nella formola superiore dà:

$$m_0 = \frac{1}{8} g_0^2 + P l_0 + A_4 l_1 - 3 A_5 l_2 \quad (44)$$

e quindi la forma m dell'ordine ottavo è eguale ad:

$$m = \frac{1}{8} g^2 - \frac{3}{2} [\psi(\varphi l)_2 + \varphi(\psi l)_2 + 3 l(\varphi \psi)_2]. \quad (45)$$

Passando alla forma seguente del decimo ordine n , devesi calcolare $\eta(m_0)$ e quindi oltre $\eta(l_0)$, le $\eta(l_1)$, $\eta(l_2)$ ed analogamente per le forme ulteriori. La formola ricorrente (39) adoperata in senso inverso al precedente agevola questa ricerca. Da essa, eguagliando nei due membri i coefficienti di u_1^{n+2} , $u_1^{n-1} u_2$, $u_1^n u_2^2$, si hanno infatti le:

$$\begin{aligned} \eta(s_0) &= -\frac{n(n-1)}{16} g_0 r_0 - \frac{n}{2} (p_3 + p_1 q_2) s_0 + \frac{n}{2} A_1 s_1 - t_0 \\ \eta(s_1) &= -\frac{n-1}{16} [(n-2)g_0 r_1 + 2g_1 r_0] - \frac{n}{2} (p_3 + p_1 q_2) s_1 + \frac{n}{2} A_4 s_2 - t_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} [q_2 s_0 - (p_3 + p_1 q_2) s_1 + A_4 s_2] \\ \eta(s_2) &= -\frac{(n-2)(n-3)}{16} g_0 r_2 - \frac{n-2}{4} g_1 r_1 - \frac{1}{8} g_2 r_0 - \frac{n}{2} (p_3 + p_1 q_2) s_2 + \\ &\quad + \frac{n}{2} A_4 s_3 - t_2 - [q_2 s_1 - (p_3 + p_1 q_2) s_2 + A_4 s_3]. \end{aligned}$$

Se in queste formole poniamo $n = 6$, e quindi $r = g$, $s = l$, $t = m$, si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} \eta(l_0) &= -\frac{15}{8} g_0^2 - 3(p_3 + p_1 q_2) l_0 + 3 A_4 l_1 - m_0 \\ \eta(l_1) &= -\frac{15}{8} g_0 g_1 - 3(p_3 + p_1 q_2) l_1 + 3 A_4 l_2 - m_1 - A_5 l_3 \\ \eta(l_2) &= -\frac{15}{8} g_0 g_2 - 3(p_3 + p_1 q_2) l_2 + 3 A_4 l_3 - m_2 - 2 A_5 l_4 + \frac{1}{2} k_0 \end{aligned}$$

[essendo come nelle (34) $k_0 = g_0 g_2 - g_1^2$], notando la sussistenza delle relazioni:

$$\begin{aligned} q_2 l_0 - (p_3 + p_1 q_2) l_1 + A_4 l_2 - 2 A_5 l_3 &= 0 \\ q_2 l_1 - (p_3 + p_1 q_2) l_2 + A_4 l_3 - 2 A_5 l_4 &= \frac{1}{2} k_0. \end{aligned}$$

Ciò posto dalla (44) si dedurranno dapprima i valori di m_1, m_2, \dots ossia:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{8} g_0 g_1 + P l_1 + A_4 l_2 - 3 A_5 l_3 \\ m_2 &= \frac{1}{8} g_0 g_2 + P l_2 + A_4 l_3 - 3 A_5 l_4 - \frac{1}{2} k_0 \\ m_3 &= \frac{1}{8} g_0 g_3 + P l_3 + A_4 l_4 - 3 A_5 l_5 - \frac{3}{2} k_1 \\ m_4 &= \frac{1}{8} g_0 g_4 + P l_4 + A_4 l_5 - 3 A_5 l_6 - 3 k_2 - \frac{3}{4} R J \end{aligned}$$

e così via; poi il valore di $\eta(m_0)$, che sostituito nella:

$$n_0 = -\frac{7}{2} g_0 l_0 - 4(p_3 + p_1 q_2) m_0 + 4 A_4 m_1 - \eta(m_0)$$

la quale ottiensì ponendo $n = 8$ nella (40), darà:

$$n_0 = \frac{5}{8} g_0 l_0 + \frac{15}{2} A_5 k_0 + P m_0 + A_4 m_1 - 3 A_5 m_2$$

e quindi la forma del decimo ordine n eguale ad:

$$n = \frac{5}{8} g l + \frac{15}{2} f k - \frac{3}{2} [\psi(\varphi m)_2 + \varphi(\psi m)_2 + 3 m(\varphi \psi)_2].$$

Si avranno inoltre le:

$$(m\varphi)_3 = \frac{45}{4} R b \varphi, \quad (m\psi)_3 = \frac{45}{4} R b \psi$$

essendo $b = (\varphi\psi)_2$ come sopra; e le:

$$\begin{aligned} q_2 m_0 - (p_3 + p_1 q_2) m_1 + A_4 m_2 - 2 A_5 m_3 &= 0 \\ q_2 m_1 - (p_1 + p_1 q_2) m_2 + A_4 m_3 - 2 A_5 m_4 &= \\ &= \frac{1}{2} [P k_0 + A_4 k_1 - 3 A_5 k_2 + \frac{3}{2} R J A_5]. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene per la forma v del dodicesimo ordine il valore:

$$v = \frac{21}{16} (g^3 + 4 l^2) - \frac{33}{8} g m + 21 f \rho - \frac{3}{2} [\psi(\varphi n)_2 + \varphi(\psi n)_2 + 3 n(\varphi \psi)_2]$$

essendo $\rho = (g l)_2$.

Le forme l, m, n, v, \dots si possono quindi esprimere come la g in funzione di covarianti simultanei delle forme φ, ψ ; ed il modo di loro formazione è determinato dalle formole ricorrenti trovate sopra.

La funzione sigma pari fin qui considerata è data dalla:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{-\frac{1}{2} D} \frac{\Theta(u_1, u_2)}{\Theta(0)}$$

nella quale $D = D_0 u_1^2 + 2 D_1 u_1 u_2 + D_2 u_2^2$, ed i coefficienti D_0, D_1, D_2 hanno i valori $p_3 + p_1 q_2, q_2, q_1$. Ora il covariante simultaneo $b = (\varphi\psi)_2$ si esprime come segue:

$$b = \frac{1}{9} [3 p_3 + 3 p_1 q_2 - 2 p_2 q_1] u_1^2 + (9 q_2 - p_1 q_1 - p_2) u_1 u_2 + (3 q_1 - 2 p_1) u_2^2]$$

ossia:

$$b = \frac{1}{9} [(5 D_0 - 2 A_3) u_1^2 + (10 D_1 - A_2) u_1 u_2 + (5 D_2 - 2 A_1) u_2^2]$$

dalla quale:

$$D = \frac{9}{5} b + \frac{2}{5} (A_3 u_1^2 + \frac{1}{2} A_2 u_1 u_2 + A_1 u_2^2).$$

Se quindi definiamo la funzione sigma pari colla:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{-\frac{1}{5} (A_3 u_1^2 + \frac{1}{2} A_2 u_1 u_2 + A_1 u_2^2)} \frac{\Theta(u_1, u_2)}{\Theta(0)}$$

si avrà:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{\frac{2}{10}b} \left[1 + \frac{b_1}{\pi 4} g + \frac{b_2}{\pi 6} l + \dots \right].$$

7.° Questi ultimi valori di D_0, D_1, D_2 , cioè:

$$D_0 = \frac{2}{5} A_3, \quad D_1 = \frac{1}{10} A_2, \quad D_2 = \frac{2}{5} A_1 \quad (46)$$

soddisfano alle condizioni (13), e sussisteranno quindi pei medesimi le relazioni (15) (17) fondamentali per una qualsivoglia delle sedici funzioni sigma. Addottando questi valori le espressioni L_0, L_1, \dots (18) si possono rappresentare nel seguente modo. Indicando, come sopra, con f la forma binaria in u_1, u_2 del sesto ordine, sia $\delta = \frac{1}{2}(ff)_4$ il suo covariante di quarto ordine e di secondo grado, ed J l'invariante quadratico. Posto:

$$\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_4)(u_1, u_2)^4$$

si trovano le:

$$\begin{aligned} N_0 &= 12 \delta_0, & N_1 &= 12 \delta_1, & N_2 &= 12 \delta_2 + \frac{6}{5} J \\ M_0 &= 12 \delta_1, & M_1 &= 12 \delta_2 - \frac{3}{5} J, & M_2 &= 12 \delta_3 \\ L_0 &= 12 \delta_2 + \frac{6}{5} J, & L_1 &= 12 \delta_3, & L_2 &= 12 \delta_4. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la forma f del sesto ordine sia eguale al prodotto di una quintica φ per la forma lineare p ; ponendo:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi\varphi)_4 \quad h = \frac{1}{2}(\varphi\varphi)_2 \quad k = (hp^2)_2$$

si hanno le relazioni:

$$\delta = \frac{2}{5}\alpha p^2 - \frac{1}{3}k, \quad \frac{6}{5}J = -(\alpha p^2)_2 \quad (47)$$

e quindi le quantità L_0, L_1, \dots saranno espresse per coefficienti di covarianti simultanei alla quintica φ ed alla forma lineare p .

Questo caso si verifica per una qualsivoglia funzione sigma dispari. Consideriamo infatti la funzione sigma corrispondente alla iperellittica p_{13} . Si avrà dalla (12) per l'indicata funzione sigma:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{-\frac{1}{2}D} \frac{\Theta_{13}(u_1, u_2)}{H}$$

ed il valore di H per l'ultima delle equazioni (2) del Capitolo VI sarà:

$$\frac{H}{\Theta(0)} = i [(01)(03)(12)(23)(14)(34)]^{\frac{1}{2}}$$

e quindi per la (14):

$$\Sigma_r \frac{dK}{da_r} = 0 \quad \Sigma_r a_r \frac{dK}{da_r} = \frac{3}{2}$$

$$4L(K) = -q_1 - 2A_1, \quad 2M(K) = -q_2 - 2A_2, \quad 4N(K) = p_2 q_1 - 6A_3.$$

Addottando per D_0, D_1, D_2 i valori sopra indicati, e rappresentando, come nel paragrafo precedente con xr, ys, zt tre forme consecutive dello sviluppo di sigma degli ordini $n-2, n, n+2$, essendo x, y, z coefficienti numerici che soddisfano le relazioni (38), le equazioni (17) danno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} L(s) &= \frac{3n(n-1)}{8} [2\delta_{22} + \frac{1}{5} J u_1^2] r + \frac{3}{5} A_1 s - \frac{1}{2} (A_1 u_1 - u_2) \frac{ds}{du_1} + \\ &\quad + \frac{1}{20} (A_2 u_1 - 6 A_1 u_2) \frac{ds}{du_2} + t_{22} \\ M(s) &= \frac{3n(n-1)}{4} [2\delta_{12} - \frac{1}{5} J u_1 u_2] r + \frac{21}{20} A_2 s - \frac{1}{20} (19 A_2 u_1 - 4 A_1 u_2) \frac{ds}{du_1} + \\ &\quad + \frac{1}{20} (4 A_3 u_1 - 9 A_2 u_2) \frac{ds}{du_2} + 2 t_{12} \\ N(s) &= \frac{3n(n-1)}{8} [2\delta_{11} + \frac{1}{5} J u_2^2] r + \frac{27}{20} A_3 s - \frac{1}{20} (26 A_3 u_1 - A_2 u_2) \frac{ds}{du_1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (A_4 u_1 - A_3 u_2) \frac{ds}{du_2} + t_{11} \end{aligned} \right\} (48)$$

nelle quali $t_{11} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{d^2 t}{du_1^2}$, $\delta_{11} = \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{d^2 \delta}{du_1^2}, \dots$ Per la sigma dispari qui considerata si avrà quindi:

$$\sigma(u_1, u_2) = u_1 + \frac{b_1}{\Pi 3} g + \frac{b_2}{\Pi 5} l + \frac{b_3}{\Pi 7} m + \frac{b_4}{\Pi 9} n + \dots$$

essendo g, l, m, n, \dots forme degli ordini $3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, \dots$ ed i coefficienti b_2, b_3, \dots dipenderanno da b_1 per le $b_2 = 4b_1, b_3 = 4b_2, \dots$

Ponendo nelle equazioni differenziali superiori $s = u_1$ e quindi $r = 0$, $t = -\frac{1}{4 \cdot 5} \cdot g$, (supposto $b_1 = -\frac{1}{5}$), saranno $L(s), M(s), N(s)$ eguali a zero, e si otterranno le:

$$g_{11} = A_3 u_1 + A_2 u_2, \quad 2g_{12} = 2A_2 u_1 + 4A_1 u_2, \quad g_{22} = 2A_1 u_1 + 10u_2$$

da cui:

$$g = A_3 u_1^3 + 3A_2 u_1^2 u_2 + 6A_1 u_1 u_2^2 + 10u_2^3$$

cioè se:

$$\varphi = A_5 u_1^5 + A_4 u_1^4 u_2 + A_3 u_1^3 u_2^2 + A_2 u_1^2 u_2^3 + A_1 u_1 u_2^4 + u_2^5$$

sarà:

$$g = 10\varphi_{22} = 10(\varphi u_1^2)$$

ossia g covariante simultaneo della quintica φ e della forma lineare u_1 . Determinata così la forma g , la ricerca delle forme l, m, n, \dots può farsi dipendere da una formola ricorrente analoga a quella trovata per le sigma pari. Premettiamo che per le (15) si hanno in questo caso le:

$$\Sigma_r \frac{ds}{da_r} = -u_1 \frac{ds}{du_2}, \quad \Sigma_r a_r \frac{ds}{da_r} = \frac{n-3}{2} s + u_1 \frac{ds}{du_1}$$

quindi supposto:

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_n)(u_1, u_2)^n$$

si avranno tra i coefficienti s_0, s_1, \dots le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{ds_0}{da_r} &= -n s_1 & \Sigma \frac{ds_1}{da_r} &= -(n-1)s_2 \dots & \Sigma \frac{ds_n}{da_r} &= 0 \\ \Sigma a_r \frac{ds_0}{da_r} &= \frac{3(n-1)}{2} s_0 & \Sigma a_r \frac{ds_1}{da_r} &= \frac{3n-5}{2} s_1 \dots & \Sigma a_r \frac{ds_n}{da_r} &= \frac{n-3}{2} s_n \end{aligned} \right\} (49)$$

inoltre posto:

$$N(s) + A_3 \Sigma a_r \frac{ds}{da_r} + A_4 \Sigma \frac{ds}{da_r} = -A_5 \Sigma \frac{1}{a_r} \frac{ds}{da_r} = -\eta(s)$$

l'ultima delle equazioni differenziali (48) conduce alla:

$$t_0 = -\frac{3n(n-1)}{4} \delta_0 r_0 - \frac{4n-3}{20} A_3 s_0 + \frac{n}{2} A_4 s_1 - \eta(s_0) \quad (50)$$

nella quale t_0, r_0 sono i coefficienti delle più alte potenze di u_1 nelle forme t, r .

Per $n=3$ sono $r = -4 \cdot 5 \cdot u_1, s = g, t = l$; quindi osservando essere $g_0 = A_3, g_1 = A_2$ la formola superiore dà:

$$l_0 = 90\delta_0 - \frac{9}{20} A_3^2 + \frac{1}{2} A_2 A_4 - \eta(A_3).$$

Ora $\eta(A_3) = A_2 A_4 - 4 A_1 A_5$ ed i coefficienti α_0, k_0 delle più alte potenze di u_1 nei covarianti simultanei α, k hanno i valori:

$$\alpha_0 = \frac{1}{4 \cdot 5^2} (20 A_1 A_5 - 8 A_2 A_4 + 3 A_3^2), \quad k_0 = \frac{1}{2 \cdot 5^3} (10 A_1 A_5 + A_2 A_4 - A_3^2)$$

e per la (47) $\delta_0 = \frac{2}{5} \alpha_0 - \frac{1}{3} k_0$, si avrà così:

$$l_0 = 5(7\alpha_0 + 15k_0)$$

e quindi la forma del quinto ordine:

$$l = 5(7\alpha u_1^2 + 15k)u_1.$$

La ricerca dei valori delle forme m, n, \dots del 7°, 9°, ... ordine riducesi a quella della determinazione, per mezzo della formola di ricursione (50), dei coefficienti numerici dei prodotti o delle potenze dei vari covarianti simultanei che entrano a comporre le forme stesse. Infatti queste espressioni, salvo i coefficienti numerici, si possono stabilire per le seguenti loro proprietà. In primo luogo essendo esse funzioni di covarianti simultanei ad una forma φ (quintica) e ad una forma lineare $p = u_1$, si ha, come è noto, che le medesime espressioni saranno funzioni degli invarianti di φ , e dei coefficienti di λ nello sviluppo di:

$$\rho(u_1 - \lambda p_2, u_2 + \lambda p_1)$$

essendo $\rho(u_1, u_2)$ un covariante qualsivoglia di φ e $p = p_1 u_1 + p_2 u_2$.

In secondo luogo per ciascuna di quelle forme $m, n, \dots s, t, \dots$ sono determinati l'ordine, il grado ed il peso dei vari coefficienti rispetto ai coefficienti di φ . Così per la forma s , l'ordine essendo n , il grado è $\frac{n-1}{2}$, il peso del coefficiente di u_1^n è $\frac{3(n-1)}{2}$, come risulta dalle (49).

Ciò posto nella forma m del settimo ordine, il grado rispetto ai coefficienti di φ essendo tre ed il peso di m_0 risultando eguale a nove, vedesi facilmente che i covarianti simultanei i quali entrano a comporre m si dovranno dedurre da covarianti della forma φ che soddisfino a quelle condizioni.

Ora per una quintica si hanno, come è noto, tre covarianti di terzo grado, ed i medesimi sono degli ordini 3°, 5°, 9°, cioè:

$$\beta = (\varphi x)_2, \quad \gamma = (\varphi \alpha), \quad \varepsilon = (\varphi h).$$

Il primo di essi soddisfa alla condizione rispetto al peso; dal secondo e dal terzo si deducono i due covarianti simultanei degli ordini 4°, 6° che soddisfano alla medesima, cioè:

$$\mu = (\gamma p) \quad \nu = (\varepsilon p^2)_3.$$

Si ha quindi:

$$m = x_0 (h p^2)_2 (\varphi p^2)_2 + x_1 (\varepsilon p^2)_3 p + [x_2 \alpha (\varphi p^2)_2 + x_3 \varphi (\alpha p^2)_2] p^2 + x_4 (\gamma p) p^3 + x_5 (\varphi \alpha)_2 p^4$$

nella quale x_0, x_1, \dots sono coefficienti numerici. Determinando i medesimi per mezzo della formola di ricursione (50) si giunge alla seguente espressione di m :

$$m = \frac{5}{4} k g + 3 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot \nu u_1 + \frac{12967}{4 \cdot 7 \cdot 9} g \alpha u_1^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 107}{3 \cdot 7} J \varphi u_1^2 - \frac{4^2 \cdot 5^3 \cdot 31}{7 \cdot 9} \mu u_1^3$$

ed $x_5 = 0$.

Seguendo lo stesso metodo si otterranno le espressioni delle forme ulteriori che compongono lo sviluppo di una sigma dispari.

Notiamo da ultimo che dalle formole (7) si ottengono le seguenti:

$$\Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1^2} \right)_0 = 4 A_3, \quad \Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1 du_2} \right)_0 = A_2, \quad \Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_2^2} \right)_0 = 4 A_1$$

supponendo che il simbolo Σ indichi la somma di quelle espressioni per le dieci θ eta pari; le equazioni (46) daranno quindi per D_0, D_1, D_2 i valori:

$$D_0 = \frac{1}{10} \Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1^2} \right)_0, \quad D_1 = \frac{1}{10} \Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_1 du_2} \right)_0, \quad D_2 = \frac{1}{10} \Sigma \frac{1}{\Theta(0)} \left(\frac{d^2 \Theta}{du_2^2} \right)_0. \quad (51)$$

8.° La equazione (9), dalla quale si sono dedotte le proprietà caratteristiche degli sviluppi in serie delle sedici funzioni sigma, conduce anche, convenientemente trasformata, ad altre proprietà delle stesse funzioni.

Posto:

$$\eta(u) = \frac{1}{2\omega} (C_0 u_1^2 + 2 C_1 u_1 u_2 + C_2 u_2^2)$$

nella quale ω, C_0, C_1, C_2 hanno i valori (13) (14) del Capitolo V, e:

$$\Theta(u) = e^{\eta(u)} \Phi(u)$$

essendo $\Theta(u)$ la θ eta fondamentale e $\Phi(u)$ una funzione di u_1, u_2 che sarà determinata più avanti; osservando che per le relazioni dimostrate in quello stesso Capitolo V, si ha:

$$4f'(a_r) \frac{d\eta}{da_r} = P_r - \frac{2}{\omega} [Q_r(C_0 u_1 + C_1 u_2) + R_r(C_1 u_1 + C_2 u_2)] + \frac{1}{\omega^2} [C_0 u_1 + C_1 u_2 + a_r(C_1 u_1 + C_2 u_2)]^2$$

la equazione (9) nella quale si è supposto $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$, si trasforma nella seguente:

$$4f'(a_r) \frac{d \log \Phi}{da_r} = 4f'(a_r) C_r + \frac{1}{\omega} (C_0 + 2 C_1 a_r + C_2 a_r^2) - 2 \left(Q_r \frac{d \log \Phi}{du_1} + R_r \frac{d \log \Phi}{du_2} \right) + 2 \left(\frac{d\eta}{du_1} + a_r \frac{d\eta}{du_2} \right) \left(\frac{d \log \Phi}{du_1} + a_r \frac{d \log \Phi}{du_2} \right) + \frac{1}{\Phi} \left[\frac{d^2 \Phi}{du_1^2} + 2 a_r \frac{d^2 \Phi}{du_1 du_2} + a_r^2 \frac{d^2 \Phi}{du_2^2} \right].$$

Supponiamo che la funzione $\Phi(u)$ soddisfi alla equazione:

$$4f'(a_r) \frac{d \Phi(0)}{da_r} = \left(\frac{d^2 \Phi}{du_1^2} \right)_0 + 2 a_r \left(\frac{d^2 \Phi}{du_2 du_1} \right)_0 + a_r^2 \left(\frac{d^2 \Phi}{du_2^2} \right)_0 \quad (52)$$

si avrà per l'equazione (10):

$$4f'(a_r)C_r = -\frac{1}{\omega} [C_0 + 2C_1a_r + C_2a_r^2] \quad (53)$$

e la equazione differenziale superiore riducesi alla:

$$2f'(a_r) \frac{d\Phi}{da_r} = - \left(Q_r \frac{d\Phi}{du_1} + R_r \frac{d\Phi}{du_2} \right) + \left(\frac{d\eta}{du_1} + a_r \frac{d\eta}{du_2} \right) \left(\frac{d\Phi}{du_1} + a_r \frac{d\Phi}{du_2} \right) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\Phi}{du_1^2} + 2a_r \frac{d^2\Phi}{du_1 du_2} + a_r^2 \frac{d^2\Phi}{du_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

nella quale per le formole (13) del Capitolo IV sono:

$$\begin{aligned} Q_r &= g_1(a_r)u_1 + g_2(a_r)u_2 \\ R_r &= [a_r g_1(a_r) + f'(a_r)]u_1 + a_r g_2(a_r)u_2. \end{aligned}$$

Si indichino con $\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \eta_{11}, \eta_{12}, \dots$ come nel Capitolo V, gli integrali completi di prima e di seconda specie; e per mezzo delle formole (8), (9), (13) dello stesso Capitolo si determinino i valori delle derivate rispetto ad a_r dei rapporti $\frac{\omega_{11}}{\omega}, \frac{\omega_{12}}{\omega}, \frac{\omega_{21}}{\omega}, \frac{\omega_{22}}{\omega}$. Posto:

$$v_1 = \frac{1}{2\omega} (u_1\omega_{22} - u_2\omega_{12}), \quad v_2 = \frac{1}{2\omega} (u_2\omega_{11} - u_1\omega_{21}) \quad (55)$$

si ottengono le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} 2f'(a_r) \frac{dv_1}{da_r} &= - \left(Q_r \frac{dv_1}{du_1} + R_r \frac{dv_1}{du_2} \right) + \left(\frac{d\eta}{du_1} + a_r \frac{d\eta}{du_2} \right) \left(\frac{dv_1}{du_1} + a_r \frac{dv_1}{du_2} \right) \\ 2f'(a_r) \frac{dv_2}{da_r} &= - \left(Q_r \frac{dv_2}{du_1} + R_r \frac{dv_2}{du_2} \right) + \left(\frac{d\eta}{du_1} + a_r \frac{d\eta}{du_2} \right) \left(\frac{dv_2}{du_1} + a_r \frac{dv_2}{du_2} \right). \end{aligned}$$

Posto inoltre:

$$\tau_{11} = \frac{m_{32}}{\omega}, \quad \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{m_{13}}{\omega} = \frac{m_{42}}{\omega}, \quad \tau_{22} = \frac{m_{14}}{\omega}$$

dalle formole (15) dello stesso Capitolo V si hanno le:

$$\begin{aligned} 2f'(a_r) \frac{d\tau_{11}}{da_r} &= 2\pi i \left(\frac{dv_1}{du_1} + a_r \frac{dv_1}{du_2} \right)^2 \\ 2f'(a_r) \frac{d\tau_{12}}{da_r} &= 2\pi i \left(\frac{dv_1}{du_1} + a_r \frac{dv_1}{du_2} \right) \left(\frac{dv_2}{du_1} + a_r \frac{dv_2}{du_2} \right) \\ 2f'(a_r) \frac{d\tau_{22}}{da_r} &= 2\pi i \left(\frac{dv_2}{du_1} + a_r \frac{dv_2}{du_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Per queste cinque formole, indicando con $\psi(u_1, u_2)$ la espressione:

$$\psi(u_1, u_2) = 2(n_1 v_1 + n_2 v_2) + \tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \tau_{22} n_2^2 \quad (56)$$

nella quale n_1, n_2 sono coefficienti numerici, e ponendo:

$$\varphi(u_1, u_2) = e^{\tau i \psi(u_1, u_2)}$$

si ha tosto che la funzione φ soddisfa alla seguente equazione differenziale:

$$2f'(a_r) \frac{d\varphi}{da_r} = - \left(Q_r \frac{d\varphi}{du_1} + R_r \frac{d\varphi}{du_2} \right) + \left(\frac{d\eta}{du_1} + a_r \frac{d\eta}{du_2} \right) \left(\frac{d\varphi}{du_1} + a_r \frac{d\varphi}{du_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \varphi}{du_1^2} + 2a_r \frac{d^2 \varphi}{du_1 du_2} + a_r^2 \frac{d^2 \varphi}{du_2^2} \right]$$

equazione che ha l'identica forma della (54). Si potrà quindi porre:

$$\Phi(u_1, u_2) = \sum e^{\pi i \psi(u_1, u_2)}$$

il simbolo di sommatoria estendendosi a tutti i valori numerici interi di n_1, n_2 da $-\infty$ a $+\infty$. Questo valore di Φ soddisfa evidentemente la condizione (52) e la funzione théta fondamentale si svilupperà in conseguenza in una serie esponenziale doppiamente infinita:

$$\Theta(u_1, u_2) = e^{\gamma(u)} \sum e^{\pi i \psi(u_1, u_2)} \quad (57)$$

o ponendo:

$$\mathfrak{S}(v_1, v_2) = \sum e^{\pi i [2(n_1 v_1 + n_2 v_2) + \tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \tau_{22} n_2^2]} \quad (58)$$

si avrà per la precedente (56):

$$\Theta(u_1, u_2) = e^{\gamma(u)} \mathfrak{S}(v_1, v_2) \quad (59)$$

essendo le u_1, u_2 legate alle v_1, v_2 dalle relazioni (55). Dalla espressione superiore della funzione $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$ si ha che la medesima soddisfa alle tre equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dv_1^2} = 4\pi i \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau_{11}}, \quad \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dv_1 dv_2} = 2\pi i \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau_{12}}, \quad \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dv_2^2} = 4\pi i \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau_{22}} \quad (60)$$

equazioni le quali si possono altresì dedurre dalla (54) e quindi dalla (9); ora siccome quest'ultima sussiste, come si è dimostrato, per una qualsivoglia delle sedici funzioni $\Theta(u_1, u_2)$, le precedenti avranno luogo per le sedici corrispondenti funzioni $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$; e la stessa proprietà varrà per la (59).

Posto analogamente alle (51):

$$T_0 = \frac{1}{10} \sum \frac{1}{\mathfrak{S}(0)} \left(\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dv_1^2} \right)_0 = \frac{2\pi i}{5} \sum \frac{d \log \mathfrak{S}(0)}{d\tau_{11}} = \frac{2\pi i}{5} \frac{d \log \Pi \mathfrak{S}(0)}{d\tau_{11}}$$

e così T_1, T_2 ; le sommatorie od. il simbolo di prodotto estendendosi alle dieci \wp pari; dalla equazione (59) deduconsi le:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{C_0}{\omega} + \frac{1}{4\omega^2} [T_0 \omega_{22}^2 - 2T_1 \omega_{22} \omega_{21} + T_2 \omega_{21}^2] \\ D_1 &= \frac{C_1}{\omega} + \frac{1}{4\omega^2} [-T_0 \omega_{22} \omega_{12} + T_1 (\omega_{11} \omega_{22} + \omega_{12} \omega_{21}) - T_2 \omega_{11} \omega_{21}] \\ D_2 &= \frac{C_2}{\omega} + \frac{1}{4\omega^2} [T_0 \omega_{12}^2 - 2T_1 \omega_{11} \omega_{12} + T_2 \omega_{11}^2] \end{aligned} \right\} (61)$$

quindi indicando con T la forma quadratica:

$$T = T_0 v_1^2 + 2T_1 v_1 v_2 + T_2 v_2^2$$

si avrà:

$$D = 2\eta(u) + T$$

ed essendo:

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{-\frac{1}{2}D} \frac{\Theta(u_1, u_2)}{H}$$

sarà per la (59):

$$\sigma(u_1, u_2) = \sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{2}T} \frac{\wp(v_1, v_2)}{H} \quad (62)$$

la quantità costante H rimanendo la stessa nelle due formole.

La relazione (53), per la (13) del Capitolo V, conduce alla:

$$4f'(a_r)C_r = 2f'(a_r) \frac{d \log \omega}{da_r} - [g_1(a_r) + a_r g_2(a_r)]$$

ossia:

$$4f'(a_r)C_r = 2f'(a_r) \frac{d \log \omega}{da_r} + 4a_r^3 + 2A_1 a_r^2 + A_2 a_r.$$

Sostituendo in questa in luogo di $4f'(a_r)C_r$ il valore (10) si ha:

$$4f'(a_r) \frac{d \log \frac{\wp(0)}{\sqrt{\omega}}}{da_r} = p_3 + p_1 q_2 + 2a_r q_2 + a_r^2 q_1 + 4a_r^3 + 2A_1 a_r^2 + A_2 a_r$$

nella quale si è scritto $\wp(0)$ in luogo di $\Theta(0)$ e le p_1, q_1, \dots hanno i valori usati nello sviluppo in serie delle sigma pari. Ponendo $r = 0, 1, \dots, 4$ si ottengono le seguenti:

$$4 \frac{d \log \frac{\wp(0)}{\sqrt{\omega}}}{da_0} = \frac{1}{a_0 - a_2} + \frac{1}{a_0 - a_4}, \quad 4 \frac{d \log \frac{\wp(0)}{\sqrt{\omega}}}{da_1} = \frac{1}{a_1 - a_3}$$

ed analoghe, le quali dimostrano essere:

$$\mathfrak{S}(0) = m \sqrt{\omega} [(13)(02)(24)(40)]^{\frac{1}{4}} \quad (63)$$

dove m è un coefficiente costante rispetto alle a_0, a_1, \dots . I valori corrispondenti per le altre nove théta pari si dedurranno dal superiore colle indicate permutazioni delle a_0, a_1, \dots, a_4 ; per ciò denominando Δ il discriminante di f od il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici a_0, a_1, \dots, a_4 , si avrà:

$$\Pi \mathfrak{S}(0) = m^{10} \omega^5 \Delta^{\frac{1}{2}}$$

I valori superiori dei coefficienti T_0, T_1, T_2 diventano così:

$$T_0 = \frac{\pi i}{5} \frac{d \log \Delta}{d \tau_{11}} \quad T_1 = \frac{\pi i}{10} \frac{d \log \Delta}{d \tau_{12}} \quad T_2 = \frac{\pi i}{5} \frac{d \log \Delta}{d \tau_{22}}.$$

Notiamo che per i valori (14), Capitolo V, di C_0, C_1, C_2 , si hanno le:

$$\begin{aligned} C_0 \omega_{11} + C_1 \omega_{21} &= \omega \eta_{11} & C_1 \omega_{11} + C_2 \omega_{21} &= \omega \eta_{21} \\ C_0 \omega_{12} + C_1 \omega_{22} &= \omega \eta_{12} & C_1 \omega_{12} + C_2 \omega_{22} &= \omega \eta_{22} \end{aligned}$$

e per queste dalle (61) si dedurranno le quattro seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{11} - D_0 \omega_{11} - D_1 \omega_{21} &= \frac{1}{4 \omega} (T_1 \omega_{21} - T_0 \omega_{22}) \\ \eta_{21} - D_1 \omega_{11} - D_2 \omega_{21} &= \frac{1}{4 \omega} (T_0 \omega_{12} - T_1 \omega_{11}) \\ \eta_{12} - D_0 \omega_{12} - D_1 \omega_{22} &= \frac{1}{4 \omega} (T_2 \omega_{21} - T_1 \omega_{22}) \\ \eta_{22} - D_1 \omega_{12} - D_2 \omega_{22} &= \frac{1}{4 \omega} (T_1 \omega_{12} - T_2 \omega_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Ora si è dimostrato che le $\eta_{11}, \eta_{21}; \eta_{12}, \eta_{22}$ sono i valori delle derivate della $\Theta(u_1, u_2)$ fondamentale [equazioni (41) del Capitolo III], nelle quali derivate si pongano $\omega_{11}, \omega_{21}; \omega_{12}, \omega_{22}$ in luogo di u_1, u_2 ; quindi indicando con

$$\sigma'(u_1, u_2), \quad \sigma''(u_1, u_2)$$

le derivate della $\sigma(u_1, u_2)$ fondamentale rispetto ad u_1 e ad u_2 , si avrà che le quattro espressioni superiori sono ordinatamente eguali alle:

$$\frac{\sigma'(\omega_{11}, \omega_{21})}{\sigma(\omega_{11}, \omega_{21})}, \quad \frac{\sigma''(\omega_{11}, \omega_{21})}{\sigma(\omega_{11}, \omega_{21})}, \quad \frac{\sigma'(\omega_{12}, \omega_{22})}{\sigma(\omega_{12}, \omega_{22})}, \quad \frac{\sigma''(\omega_{12}, \omega_{22})}{\sigma(\omega_{12}, \omega_{22})}. \quad (65)$$

9.° Dalla espressione (58) della funzione $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$, indicando con α, β due numeri interi si ottengono le note relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}(v_1 + \alpha, v_2 + \beta) &= \mathfrak{S}(v_1, v_2) \\ \mathfrak{S}(v_1 + \alpha\tau_{11}, v_2 + \alpha\tau_{12}) &= e^{-\pi i \alpha (2v_1 + \alpha\tau_{11})} \mathfrak{S}(v_1, v_2) \\ \mathfrak{S}(v_1 + \beta\tau_{21}, v_2 + \beta\tau_{22}) &= e^{-\pi i \beta (2v_2 + \beta\tau_{22})} \mathfrak{S}(v_1, v_2). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Ora dalle (55) si hanno per $u_1, u_2; v_1, v_2$ i seguenti corrispondenti valori:

$$\left. \begin{array}{ccccc} u_1 & 2\omega_{11} & 2\omega_{12} & 2\omega_{13} & 2\omega_{14} \\ u_2 & 2\omega_{21} & 2\omega_{22} & 2\omega_{23} & 2\omega_{24} \\ v_1 & 1 & 0 & \tau_{11} & \tau_{21} \\ v_2 & 0 & 1 & \tau_{12} & \tau_{22}; \end{array} \right\} \quad (67)$$

quindi la (62), per la sigma fondamentale, conduce alla:

$$\sigma(u_1 + 2\omega_{11}, u_2 + 2\omega_{21}) = e^{-\frac{1}{2}S} \sigma(u_1, u_2) \quad (68)$$

nella quale:

$$S = T_0(2v_1 + 1) + 2T_1v_2.$$

Sostituendo in quest'ultima espressione per v_1, v_2 i valori (55), e ricordando le relazioni (64) (65), trovasi:

$$-\frac{1}{2}S = 2 \left[\frac{\sigma'(\omega_{11}, \omega_{21})}{\sigma(\omega_{11}, \omega_{21})} (u_1 + \omega_{11}) + \frac{\sigma''(\omega_{11}, \omega_{21})}{\sigma(\omega_{11}, \omega_{21})} (u_1 + \omega_{21}) \right]$$

la quale per la sua forma dimostra subito quali sarebbero i valori di $\sigma(u_1 + 2\omega_{12}, u_2 + 2\omega_{22}), \dots$ Se nella superiore (68) supponiamo $u_1 = u_2 = 0$, essendo come si è dimostrato $\sigma(0) = 1$, si ha:

$$\sigma(2\omega_{11}, 2\omega_{21}) = e^{-\frac{1}{2}T_0}$$

ed analogamente per le altre espressioni della stessa specie.

Le sedici funzioni $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$ si deducono dalla (58) sostituendo nella medesima a v_1, v_2 le $v_1 + \frac{h_1}{2}, v_2 + \frac{h_2}{2}$ e ad n_1, n_2 le $n_1 + \frac{g_1}{2}, n_2 + \frac{g_2}{2}$, supposto $h_1, h_2; g_1, g_2$ numeri congruenti all'unità od allo zero, mod. 2. Indicheremo con

$$\mathfrak{S} \left| \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{array} \right| (v_1, v_2)$$

la funzione generale così ottenuta, osservando che essa ricavasi dalla $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$ fondamentale colla operazione:

$$e^{\frac{i\pi}{2}(g_1 h_1 + g_2 h_2)} G(g_1, g_2) \mathfrak{S} \left(v_1 + \frac{g_1 \tau_{11} + g_2 \tau_{12} + h_1}{2}, v_2 + \frac{g_1 \tau_{21} + g_2 \tau_{22} + h_2}{2} \right)$$

posto:

$$G(g_1, g_2) = e^{i\pi [g_1 v_1 + g_2 v_2 + \frac{1}{2}(g_1^2 \tau_{11} + 2g_1 g_2 \tau_{12} + g_2^2 \tau_{22})]}$$

Se quindi si introducono le seguenti notazioni corrispondenti ai valori che possono assumere gli elementi della caratteristica:

			g_1, g_2			
			h_1, h_2			
	0 0		0 0		0 0	
	0 0		1 1		1 0	
	$\mathfrak{S}(v);$		$\mathfrak{S}_0(v);$		$\mathfrak{S}_{12}(v);$	$\mathfrak{S}_{34}(v)$
	1 0		1 0		1 0	
	0 0		1 1		1 0	
	$\mathfrak{S}_{01}(v);$		$\mathfrak{S}_1(v);$		$\mathfrak{S}_{02}(v);$	$\mathfrak{S}_2(v)$
	0 1		0 1		0 1	
	0 0		1 1		1 0	
	$\mathfrak{S}_4(v);$		$\mathfrak{S}_{40}(v);$		$\mathfrak{S}_{03}(v);$	$\mathfrak{S}_3(v)$
	1 1		1 1		1 1	
	0 0		1 1		1 0	
	$\mathfrak{S}_{23}(v);$		$\mathfrak{S}_{14}(v);$		$\mathfrak{S}_{13}(v);$	$\mathfrak{S}_{24}(v)$

e poniamo:

$$G(1, 1) = G_0, \quad G(1, 0) = G_1, \quad G(0, 1) = G_2.$$

Si dedurranno dalla generale superiore le quindici relazioni seguenti, nelle quali, come sopra, scriviamo per brevità $\mathfrak{S}(v)$ in luogo di $\mathfrak{S}(v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_0(v) &= \mathfrak{S}(v_1 + \frac{1}{2}, v_2 + \frac{1}{2}), & \mathfrak{S}_{12}(v) &= \mathfrak{S}(v_1 + \frac{1}{2}, v_2), & \mathfrak{S}_{34}(v) &= \mathfrak{S}(v_1, v_2 + \frac{1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_{01}(v) &= G_1 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12}}{2}), & \mathfrak{S}_1(v) &= iG_1 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + 1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_{02}(v) &= iG_1 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12}}{2}), & \mathfrak{S}_2(v) &= G_1 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + 1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_4(v) &= G_2 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{12}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{22}}{2}), & \mathfrak{S}_{40}(v) &= iG_2 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{12} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{22} + 1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_{03}(v) &= G_2 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{12} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{22}}{2}), & \mathfrak{S}_3(v) &= iG_2 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{12}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{22} + 1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_{23}(v) &= G_0 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}), & \mathfrak{S}_{14}(v) &= -G_0 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + \tau_{12} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{22} + 1}{2}) \\
 \mathfrak{S}_{13}(v) &= iG_0 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + \tau_{12} + 1}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}), & \mathfrak{S}_{24}(v) &= iG_0 \mathfrak{S}(v_1 + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}, v_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{22} + 1}{2}).
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Esse sono disposte per modo da mostrare facilmente come si passi dall'una all'altra funzione \mathfrak{S} coll'aggiunta agli argomenti v_1, v_2 dei mezzi periodi $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\tau_{11}, \frac{1}{2}\tau_{12}, \frac{1}{2}\tau_{22}$. Indicando quindi, per esempio, con $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$ i rapporti:

$$\alpha(v) = \frac{\mathfrak{S}_0(v)}{\mathfrak{S}(v)}, \quad \beta(v) = \frac{\mathfrak{S}_{12}(v)}{\mathfrak{S}(v)}, \quad \gamma(v) = \frac{\mathfrak{S}_{34}(v)}{\mathfrak{S}(v)}$$

si otterrebbero le:

$$\alpha(v_1 + \frac{1}{2}, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\alpha(v)}, \quad \beta(v_1 + \frac{1}{2}, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{\gamma(v)}{\alpha(v)}, \quad \gamma(v_1 + \frac{1}{2}, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{\beta(v)}{\alpha(v)}$$

$$\alpha(v_1 + \frac{1}{2}, v_2) = \frac{\gamma(v)}{\beta(v)}, \quad \beta(v_1 + \frac{1}{2}, v_2) = \frac{1}{\beta(v)}, \quad \gamma(v_1 + \frac{1}{2}, v_2) = \frac{\alpha(v)}{\beta(v)}$$

$$\alpha(v_1, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{\beta(v)}{\gamma(v)}, \quad \beta(v_1, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{\alpha(v)}{\gamma(v)}, \quad \gamma(v_1, v_2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\gamma(v)}$$

e queste, colle altre della stessa specie, poste a confronto colle (11) e seguenti del Capitolo VII, dimostrano che gli indici delle funzioni $\mathfrak{S}(v)$ si riproducono nelle corrispondenti funzioni iperellittiche $p(u)$.

Così le altre quindici funzioni sigma si possono ottenere dalla fondamentale colla opportuna aggiunta di mezzi periodi alle u_1, u_2 ; e si avrà, per esempio:

$$\sigma_{12}(u_1, u_2) = e^{-\rho_{11}u_1 + \rho_{21}u_2} \frac{\sigma(u_1 + \omega_{11}, u_2 + \omega_{21})}{\sigma(\omega_{11}, \omega_{21})}$$

$$\sigma_{34}(u_1, u_2) = e^{-\rho_{12}u_1 + \rho_{22}u_2} \frac{\sigma(u_1 + \omega_{12}, u_2 + \omega_{22})}{\sigma(\omega_{12}, \omega_{22})}$$

nelle quali $\rho_{11}, \rho_{21}; \rho_{12}, \rho_{22}$ sono ordinatamente le espressioni (64) o (65).

CAPITOLO IX.

Relazioni fra le funzioni iperellittiche e le funzioni thèta e sigma.

1.° Indicando con c, c_r, c_{rs} i valori della $\mathfrak{S}(v)$ fondamentale e delle funzioni pari $\mathfrak{S}_r(v), \mathfrak{S}_{rs}(v)$, corrispondenti a $v_1 = v_2 = 0$ si otterranno analogamente alla (63) del Capitolo precedente le espressioni:

$$\left. \begin{aligned} c &= m\sqrt{\omega} [(13)(02)(24)(40)]^{\frac{1}{4}} \\ c_0 &= m\sqrt{\omega} [(24)(13)(30)(01)]^{\frac{1}{4}} & c_2 &= m\sqrt{\omega} [(40)(13)(32)(21)]^{\frac{1}{4}} & c_4 &= m\sqrt{\omega} [(02)(13)(34)(41)]^{\frac{1}{4}} \\ c_{01} &= m\sqrt{\omega} [(03)(12)(24)(41)]^{\frac{1}{4}} & c_{21} &= m\sqrt{\omega} [(23)(01)(14)(40)]^{\frac{1}{4}} & c_{41} &= m\sqrt{\omega} [(34)(01)(12)(20)]^{\frac{1}{4}} \\ c_{03} &= m\sqrt{\omega} [(01)(23)(34)(42)]^{\frac{1}{4}} & c_{23} &= m\sqrt{\omega} [(12)(03)(34)(40)]^{\frac{1}{4}} & c_{43} &= m\sqrt{\omega} [(14)(02)(23)(30)]^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right\} (1)$$

nelle quali m è un coefficiente costante che sarà determinato più avanti.

Posto:

$$i\sqrt{\lambda} = \frac{c_{14}}{c_{23}}, \quad i\sqrt{\mu} = \frac{c_{03}}{c_4}, \quad i\sqrt{\nu} = \frac{c_2}{c_{01}}$$

le espressioni stesse si possono porre sotto questa semplice forma:

$$\left. \begin{aligned} c &= \varepsilon \sqrt{\lambda \mu \nu - 1}, & c_0 &= \varepsilon \sqrt{\lambda - \mu \nu}, & c_{12} &= \varepsilon \sqrt{\mu - \nu \lambda}, & c_{34} &= \varepsilon \sqrt{\nu - \lambda \mu} \\ c_{23} &= \varepsilon (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{4}} (\nu^2 - 1)^{\frac{1}{4}}, & c_4 &= \varepsilon (\nu^2 - 1)^{\frac{1}{4}} (\lambda^2 - 1)^{\frac{1}{4}}, & c_{01} &= \varepsilon (\lambda^2 - 1)^{\frac{1}{4}} (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \\ c_{14} &= i\sqrt{\lambda} \cdot c_{23}, & c_{03} &= i\sqrt{\mu} \cdot c_4, & c_2 &= i\sqrt{\nu} \cdot c_{01}. \end{aligned} \right\} (2)$$

La quantità ε è data dalla:

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt[4]{\lambda \mu \nu}} \sqrt{\frac{1}{2} r \omega},$$

essendo r la stessa quantità che figura nelle formole (24) del Capitolo III.

Le λ , μ , ν hanno altresì una significazione speciale della quale ci occuperemo in seguito. Indicando con Δ , come nel Capitolo precedente, la espressione:

$$\Delta = f'(a_0) f'(a_1) f'(a_2) f'(a_3) f'(a_4)$$

si avrà:

$$\Pi c = m^{10} \omega^5 \Delta^{\frac{1}{2}},$$

inoltre indicando per brevità con ρ la espressione:

$$\rho = m \sqrt{\omega} \cdot \Pi c^{\frac{1}{2}},$$

si otterranno le:

$$\left. \begin{aligned} \rho(01) &= c_0^2 c_{12}^2 c_{14}^2, & \rho(02) &= c^2 c_{14}^2 c_{34}^2, & \rho(03) &= c_0^2 c_{23}^2 c_{43}^2, & \rho(04) &= c^2 c_{12}^2 c_{32}^2 \\ \rho(12) &= c_2^2 c_{01}^2 c_{14}^2, & \rho(13) &= c_0^2 c_2^2 c_4^2, & \rho(14) &= c_4^2 c_{01}^2 c_{21}^2, & \rho(23) &= c_2^2 c_{03}^2 c_{43}^2 \\ \rho(24) &= c^2 c_{01}^2 c_{03}^2, & \rho(34) &= c_4^2 c_{03}^2 c_{23}^2. \end{aligned} \right\} (3)$$

Eliminando dalle dieci relazioni superiori le ε , λ , μ , ν , si otterranno sei relazioni fra le dieci quantità c , c_0, \dots ; ossia quattro fra esse potranno esprimersi in funzione delle altre sei.

Per le dieci funzioni pari la (59) dà:

$$\Theta(0, 0) = \mathcal{S}(0, 0)$$

mentre per le sei dispari si hanno le:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{D}}{dv_1} \right)_0 &= \left(\frac{d\Theta}{du_1} \right)_0 \omega_{11} + \left(\frac{d\Theta}{du_2} \right)_0 \omega_{21} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{D}}{dv_2} \right)_0 &= \left(\frac{d\Theta}{du_1} \right)_0 \omega_{12} + \left(\frac{d\Theta}{du_2} \right)_0 \omega_{22}. \end{aligned}$$

Ora per quanto si è dimostrato al Capitolo precedente i valori delle dodici derivate parziali rispetto ad u_1, u_2 delle sei funzioni $\Theta(u)$ dispari, per $u_1 = u_2 = 0$, si possono rappresentare come segue:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Theta_1}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot a_3 \Delta_3^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_1}{du_2}\right)_0 &= -m\sqrt{\omega} \cdot \Delta_3^{\frac{1}{8}} \\ \left(\frac{d\Theta_3}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot a_1 \Delta_1^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_3}{du_2}\right)_0 &= -m\sqrt{\omega} \cdot \Delta_1^{\frac{1}{8}} \\ \left(\frac{d\Theta_{24}}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot a_0 \Delta_0^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_{24}}{du_2}\right)_0 &= -m\sqrt{\omega} \cdot \Delta_0^{\frac{1}{8}} \\ \left(\frac{d\Theta_{40}}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot a_2 \Delta_2^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_{40}}{du_2}\right)_0 &= -m\sqrt{\omega} \cdot \Delta_2^{\frac{1}{8}} \\ \left(\frac{d\Theta_{02}}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot a_4 \Delta_4^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_{02}}{du_2}\right)_0 &= -m\sqrt{\omega} \cdot \Delta_4^{\frac{1}{8}} \\ \left(\frac{d\Theta_{13}}{du_1}\right)_0 &= m\sqrt{\omega} \cdot \Delta^{\frac{1}{8}} & \left(\frac{d\Theta_{13}}{du_2}\right)_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

nelle quali Δ , come sopra, è il discriminante di f , ossia il prodotto dei quadrati delle differenze delle a_0, a_1, \dots , e Δ_r è il prodotto analogo esclusa la radice a_r , e perciò:

$$\Delta_r^{\frac{1}{8}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{8}}}{\sqrt[4]{(-1)^r f'(a_r)}}.$$

Si avranno così le dieci relazioni aventi la forma delle seguenti:

$$\left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_1}\right)_0 = 2m\sqrt{\omega} \cdot (\omega_{11} a_3 - \omega_{21}) \Delta_3^{\frac{1}{8}}, \quad \left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_2}\right)_0 = 2m\sqrt{\omega} \cdot (\omega_{12} a_3 - \omega_{22}) \Delta_3^{\frac{1}{8}}, \quad (5)$$

dalle quali, per le (15) del Capitolo V si deducono le:

$$\left. \begin{aligned} \frac{16m^2\omega^3}{\pi i} \Delta^{\frac{1}{4}} \sqrt{f'(a_3)} \frac{d\tau_{22}}{da_3} &= \left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_1}\right)_0^2 \\ \frac{16m^2\omega^3}{\pi i} \Delta^{\frac{1}{4}} \sqrt{f'(a_3)} \frac{d\tau_{12}}{da_3} &= -\left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_1}\right)_0 \left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_2}\right)_0 \\ \frac{16m^2\omega^3}{\pi i} \Delta^{\frac{1}{4}} \sqrt{f'(a_3)} \frac{d\tau_{11}}{da_3} &= \left(\frac{d\mathfrak{D}_1}{dv_2}\right)_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

e le analoghe. Le quantità $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ si possono esprimere in funzione delle c, c_0, \dots per le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0^{\frac{1}{8}} &= \frac{c_2 c_4 c_{01} c_{03}}{\sqrt[4]{m^6 \omega^3 \cdot \Pi c^{\frac{1}{4}}}}, & \Delta_2^{\frac{1}{8}} &= \frac{c_4 c_0 c_{21} c_{23}}{\sqrt[4]{m^6 \omega^3 \cdot \Pi c^{\frac{1}{4}}}}, & \Delta_4^{\frac{1}{8}} &= \frac{c_0 c_2 c_{41} c_{43}}{\sqrt[4]{m^6 \omega^3 \cdot \Pi c^{\frac{1}{4}}}} \\ \Delta_1^{\frac{1}{8}} &= \frac{c c_{30} c_{32} c_{34}}{\sqrt[4]{m^6 \omega^3 \cdot \Pi c^{\frac{1}{4}}}}, & \Delta_3^{\frac{1}{8}} &= \frac{c c_{10} c_{12} c_{14}}{\sqrt[4]{m^6 \omega^3 \cdot \Pi c^{\frac{1}{4}}}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Indicando ora con $[r, s]$ la espressione:

$$[r, s] = \left(\frac{d \vartheta_r}{d v_1} \right)_0 \left(\frac{d \vartheta_s}{d v_2} \right)_0 - \left(\frac{d \vartheta_r}{d v_2} \right)_0 \left(\frac{d \vartheta_s}{d v_1} \right)_0,$$

le equazioni (5) danno:

$$[1, 13] = 4 m^2 \omega^2 \Delta_3^{\frac{1}{8}} \Delta_2^{\frac{1}{8}}, \quad [3, 13] = 4 m^2 \omega^2 \Delta_3^{\frac{1}{8}} \Delta_1^{\frac{1}{8}},$$

ed analoghe, o le:

$$[04, 3] = 4 m^2 \omega^2 (12) \Delta_1^{\frac{1}{8}} \Delta_2^{\frac{1}{8}}, \quad [1, 04] = 4 m^2 \omega^2 (23) \Delta_3^{\frac{1}{8}} \Delta_2^{\frac{1}{8}},$$

e simili; e quindi per le relazioni (3) e pei valori di Δ, Δ_0, \dots si avranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} [1, 13] &= \frac{4}{m^2} c_{10} c_{12} c_{44}; & [3, 13] &= \frac{4}{m^2} c_{30} c_{32} c_{34}; & [1, 3] &= \frac{4}{m^2} c_0 c_2 c_4 \\ [24, 13] &= \frac{4}{m^2} c_2 c_4 c_{01} c_{03}; & [40, 13] &= \frac{4}{m^2} c_4 c_0 c_{21} c_{23}; & [02, 13] &= \frac{4}{m^2} c_0 c_2 c_{41} c_{43} \\ [3, 24] &= \frac{4}{m^2} c_0 c_{03} c_{12} c_{14}; & [40, 3] &= \frac{4}{m^2} c_2 c_{01} c_{41} c_{23}; & [02, 3] &= \frac{4}{m^2} c_4 c_{10} c_{12} c_{34} \\ [1, 24] &= \frac{4}{m^2} c_0 c_{01} c_{32} c_{34}; & [1, 40] &= \frac{4}{m^2} c_2 c_{03} c_{43} c_{21}; & [02, 1] &= \frac{4}{m^2} c_4 c_{30} c_{32} c_{14} \\ [04, 02] &= \frac{4}{m^2} c_0 c_{01} c_{03}; & [24, 04] &= \frac{4}{m^2} c_4 c_{41} c_{43}; & [24, 02] &= \frac{4}{m^2} c_2 c_{21} c_{23}, \end{aligned} \right\} (8)$$

Ciò posto, siccome una qualsivoglia delle quindici funzioni iperellittiche $p_r(u)$, $p_{rs}(u)$ si esprime, per quanto si è dimostrato al Capitolo III ed al precedente, come segue:

$$p_r(u) = C \frac{\Theta_r(u)}{\Theta(u)} = C \frac{\vartheta_r(v)}{\vartheta(v)}, \quad p_{rs}(u) = C \frac{\Theta_{rs}(u)}{\Theta(u)} = C \frac{\vartheta_{rs}(v)}{\vartheta(v)},$$

essendo le C costanti, i valori delle medesime, per le funzioni pari, sono date dalle:

$$C = p_r(0) \frac{c}{c_r} \quad C = p_{rs}(0) \frac{c}{c_{rs}},$$

e per le funzioni dispari dalla:

$$\left(\frac{d p_r(u)}{d u_1} \right)_0 = \frac{C}{c} \left(\frac{d \Theta_r(u)}{d u_1} \right)_0 \quad \text{o dalla} \quad \left(\frac{d p_r(u)}{d u_2} \right)_0 = \frac{C}{c} \left(\frac{d \Theta_r(u)}{d u_2} \right)_0,$$

ed analoghe. Ora i valori di $p_r(0)$, $\left(\frac{d p_r}{d u_1} \right)_0, \dots$ furono determinati al Capi-

tolo VI colle formole (1) (2), quindi le relazioni fra le funzioni iperellittiche e le θ eta sono completamente stabilite.

Così per una qualsivoglia funzione iperellittica pari si avrà:

$$p_r(u) = p_r(0) \frac{\sigma_r(u)}{\sigma(u)}$$

e per una funzione dispari:

$$p_r(u) = \left(\frac{dp_r(u)}{du_2} \right)_0 \frac{\sigma_r(u)}{\sigma(u)} \quad \text{ad eccezione di} \quad p_{13}(u) = \left(\frac{dp_{13}(u)}{du_1} \right)_0 \frac{\sigma_{13}(u)}{\sigma(u)}.$$

2.° Le relazioni quadratiche e dei gradi superiori delle quali si è dimostrata la sussistenza nel Capitolo II fra le funzioni iperellittiche condurranno ad altrettante fra le funzioni θ eta o fra le funzioni sigma. Scieglieremo fra queste le più importanti per le loro applicazioni. Dapprima quelle corrispondenti alle (8) (9) (10) di quel Capitolo, cioè le:

$$\left. \begin{aligned} L\mathcal{S}_{23}^2 &= \mathcal{S}^2 + \mu\nu\mathcal{S}_0^2 + \mu\mathcal{S}_{12}^2 + \nu\mathcal{S}_{34}^2 & M\mathcal{S}_4^2 &= \mathcal{S}^2 + \lambda\mathcal{S}_0^2 + \nu\lambda\mathcal{S}_{12}^2 + \nu\mathcal{S}_{34}^2 \\ L\mathcal{S}_{14}^2 &= \mu\nu\mathcal{S}^2 + \mathcal{S}_0^2 + \nu\mathcal{S}_{12}^2 + \mu\mathcal{S}_{34}^2 & M\mathcal{S}_{04}^2 &= \lambda\mathcal{S}^2 + \mathcal{S}_0^2 + \nu\mathcal{S}_{12}^2 + \nu\lambda\mathcal{S}_{34}^2 \\ L\mathcal{S}_{13}^2 &= \mu\mathcal{S}^2 + \nu\mathcal{S}_0^2 + \mathcal{S}_{12}^2 + \mu\nu\mathcal{S}_{34}^2 & M\mathcal{S}_{03}^2 &= \nu\lambda\mathcal{S}^2 + \nu\mathcal{S}_0^2 + \mathcal{S}_{12}^2 + \lambda\mathcal{S}_{34}^2 \\ L\mathcal{S}_{24}^2 &= \nu\mathcal{S}^2 + \mu\mathcal{S}_0^2 + \mu\nu\mathcal{S}_{12}^2 + \mathcal{S}_{34}^2 & M\mathcal{S}_3^2 &= \nu\mathcal{S}^2 + \nu\lambda\mathcal{S}_0^2 + \lambda\mathcal{S}_{12}^2 + \mathcal{S}_{34}^2 \\ N\mathcal{S}_{01}^2 &= \mathcal{S}^2 + \lambda\mathcal{S}_0^2 + \mu\mathcal{S}_{12}^2 + \lambda\mu\mathcal{S}_{34}^2 \\ N\mathcal{S}_1^2 &= \lambda\mathcal{S}^2 + \mathcal{S}_0^2 + \lambda\mu\mathcal{S}_{12}^2 + \mu\mathcal{S}_{34}^2 \\ N\mathcal{S}_{02}^2 &= \mu\mathcal{S}^2 + \lambda\mu\mathcal{S}_0^2 + \mathcal{S}_{12}^2 + \lambda\mathcal{S}_{34}^2 \\ N\mathcal{S}_2^2 &= \lambda\mu\mathcal{S}^2 + \mu\mathcal{S}_0^2 + \lambda\mathcal{S}_{12}^2 + \mathcal{S}_{34}^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

nelle quali si è scritto per brevità \mathcal{S} in luogo di $\mathcal{S}(v)$, e le L, M, N hanno i valori:

$$L = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}, \quad M = (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad N = (1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}},$$

e le λ, μ, ν i valori superiori. In ciascun gruppo le ultime tre si deducono dalla prima sostituendo a v_1, v_2 le $v_1 + \frac{1}{2}, v_2 + \frac{1}{2}$; $v_1 + \frac{1}{2}, v_2$; $v_1, v_2 + \frac{1}{2}$.

Da queste si deducono le relazioni quadratiche fra sole funzioni dispari, cioè le:

$$\left. \begin{aligned} c^2\mathcal{S}_{24}^2 &= -c_{03}^2\mathcal{S}_1^2 + c_0^2\mathcal{S}_{13}^2 + c_{01}^2\mathcal{S}_3^2 & c^2\mathcal{S}_1^2 &= -c_{03}^2\mathcal{S}_{24}^2 + c_{23}^2\mathcal{S}_{40}^2 + c_{43}^2\mathcal{S}_{02}^2 \\ c^2\mathcal{S}_{40}^2 &= c_{23}^2\mathcal{S}_1^2 - c_2^2\mathcal{S}_{13}^2 + c_{21}^2\mathcal{S}_3^2 & c^2\mathcal{S}_{13}^2 &= c_0^2\mathcal{S}_{24}^2 - c_2^2\mathcal{S}_{40}^2 + c_4^2\mathcal{S}_{02}^2 \\ c^2\mathcal{S}_{02}^2 &= c_{43}^2\mathcal{S}_1^2 + c_4^2\mathcal{S}_{13}^2 - c_{41}^2\mathcal{S}_3^2 & c^2\mathcal{S}_3^2 &= c_{01}^2\mathcal{S}_{24}^2 + c_{21}^2\mathcal{S}_{40}^2 - c_{41}^2\mathcal{S}_{02}^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

e quindi la:

$$\mathfrak{S}_1^4 + \mathfrak{S}_{13}^4 + \mathfrak{S}_3^4 = \mathfrak{S}_{24}^4 + \mathfrak{S}_{40}^4 + \mathfrak{S}_{02}^4, \quad (11)$$

che corrisponde alla (16) del citato Capitolo. Quanto alle formole corrispondenti alle (13) del medesimo, delle quali si è fatto tanto uso in posteriori trasformazioni, si possono ottenere come segue. Per la prima delle stesse (13) si avrà:

$$A \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{34} + B \mathfrak{S}_{14} \mathfrak{S}_{23} + C \mathfrak{S} \mathfrak{S}_0 = 0,$$

essendo A, B, C tre costanti. Da questa mutando v_1 in $v_1 + \frac{1}{2}$ si ottiene:

$$A \mathfrak{S} \mathfrak{S}_0 - B \mathfrak{S}_{13} \mathfrak{S}_{24} + C \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{34} = 0;$$

pongasi nell'una e nell'altra $v_1 = v_2 = 0$ ed osservando che ha luogo identicamente la:

$$c^2 c_0^2 - c_{12}^2 c_{34}^2 = c_{14}^2 c_{23}^2,$$

si hanno tosto i valori di A, B, C che danno:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} c_{34} \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{34} + c_{14} c_{23} \mathfrak{S}_{14} \mathfrak{S}_{23} - c c_0 \mathfrak{S} \mathfrak{S}_0 &= 0 \\ c_{12} c_{34} \mathfrak{S} \mathfrak{S}_0 - c_{14} c_{23} \mathfrak{S}_{13} \mathfrak{S}_{24} - c c_0 \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{34} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Così dalla:

$$c_0 c_{03} \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_{03} + c_2 c_{23} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_{23} - c_4 c_{43} \mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_{43} = 0,$$

sostituendo $v_1 + \frac{\tau_{11} + 1}{2}$, $v_2 + \frac{\tau_{12} + 1}{2}$ alle v_1, v_2 , le $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_{03}, \dots$ diventano:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}_0 \quad \mathfrak{S}_{03} \quad \mathfrak{S}_2 \quad \mathfrak{S}_{23} \quad \mathfrak{S}_4 \quad \mathfrak{S}_{43} \\ \frac{1}{G_1} \mathfrak{S}_{01}, \quad \frac{1}{G_1} \mathfrak{S}_{24}, \quad - \frac{i}{G_1} \mathfrak{S}_{12}, \quad - \frac{i}{G_1} \mathfrak{S}_{04}, \quad - \frac{i}{G_1} \mathfrak{S}_{14}, \quad - \frac{i}{G_1} \mathfrak{S}_{02}, \end{aligned}$$

e per ciò la superiore si trasforma nella:

$$c_0 c_{03} \mathfrak{S}_{01} \mathfrak{S}_{24} - c_2 c_{23} \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{04} + c_4 c_{43} \mathfrak{S}_{14} \mathfrak{S}_{02} = 0.$$

Collo stesso metodo si ottengono le sessanta equazioni biquadratiche delle quali si è dimostrata l'esistenza al Capitolo II. Come si è notato esse si distinguono in quindici gruppi ciascuno composto di quattro equazioni per le quali i valori dei coefficienti non mutano che di segno. Ora siccome questi coefficienti sono appunto in numero di quattro, dalle quattro equazioni di un gruppo si potranno dedurre i valori dei coefficienti ponendo nelle medesime $v_1 = v_2 = 0$. La equazione biquadratica che corrisponde alla (20) del Capitolo II è la:

$$0 = \mathfrak{S}^4 + \mathfrak{S}_0^4 + \mathfrak{S}_{12}^4 + \mathfrak{S}_{34}^4 + 2a(\mathfrak{S}^2 \mathfrak{S}_0^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \mathfrak{S}_{34}^2) + 2b(\mathfrak{S}^2 \mathfrak{S}_{12}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \mathfrak{S}_0^2) + \left\{ \begin{aligned} & + 2c(\mathfrak{S}^2 \mathfrak{S}_{34}^2 + \mathfrak{S}_0^2 \mathfrak{S}_{12}^2) + 4k \mathfrak{S} \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{34} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

nella quale a, b, c, k sono coefficienti a determinarsi. Per le (69) del precedente Capitolo risulta che sostituendo a v_1, v_2 , dapprima $v_1 + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2}$, $v_2 + \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}$; poi $v_1 + \frac{\tau_{12}}{2}$, $v_2 + \frac{\tau_{22}}{2}$; infine $v_1 + \frac{\tau_{11}}{2}$, $v_2 + \frac{\tau_{12}}{2}$, le funzioni:

$$\left. \begin{array}{cccc} \mathfrak{S} & \mathfrak{S}_0 & \mathfrak{S}_{12} & \mathfrak{S}_{34} \\ \frac{\mathfrak{S}_{23}}{G_0} & -\frac{\mathfrak{S}_{14}}{G_0} & -\frac{i\mathfrak{S}_{13}}{G_0} & -\frac{i\mathfrak{S}_{24}}{G_0} \\ \frac{\mathfrak{S}_4}{G_2} & -\frac{i\mathfrak{S}_{40}}{G_2} & \frac{\mathfrak{S}_{03}}{G_2} & -\frac{i\mathfrak{S}_3}{G_2} \\ \frac{\mathfrak{S}_{01}}{G_1} & -\frac{i\mathfrak{S}_1}{G_1} & -\frac{i\mathfrak{S}_{02}}{G_1} & \frac{\mathfrak{S}_2}{G_1} \end{array} \right\} \quad (14)$$

quindi dalla equazione biquadratica superiore se ne dedurranno altre tre della stessa forma e coi medesimi coefficienti; la prima fra le funzioni $\mathfrak{S}_{23}, \mathfrak{S}_{14}, \mathfrak{S}_{13}, \mathfrak{S}_{24}$ nella quale i coefficienti b, c mutano di segno; la seconda fra le funzioni $\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_{40}, \mathfrak{S}_{03}, \mathfrak{S}_3$ nella quale mutano di segno a, c, k ; la terza fra $\mathfrak{S}_{01}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_{02}, \mathfrak{S}_2$ mutando di segno a, b, k . Ponendo nelle quattro equazioni $v_1 = v_2 = 0$, le ultime tre danno pei valori di a, b, c le:

$$a = -\frac{c_{14}^4 + c_{23}^4}{2c_{14}^2 c_{23}^2}, \quad b = -\frac{c_{03}^4 + c_4^4}{2c_{03}^2 c_4^2}, \quad c = -\frac{c_2^4 + c_{01}^4}{2c_2^2 c_{01}^2},$$

ossia per le (2):

$$a = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}, \quad b = \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}, \quad c = \frac{\nu^2 + 1}{2\nu},$$

da cui:

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad \mu = b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad \nu = c + \sqrt{c^2 - 1},$$

le quali stabiliscono per λ, μ, ν il significato di cui si è fatta menzione nel paragrafo primo di questo Capitolo e precedentemente nel Capitolo VII colle equazioni (16). Determinate così a, b, c ; il coefficiente k si ricava dalla prima equazione e trovasi:

$$2\lambda\mu\nu k = -(\lambda\mu\nu - 1)^{\frac{1}{2}} (\lambda - \mu\nu)^{\frac{1}{2}} (\mu - \nu\lambda)^{\frac{1}{2}} (\nu - \lambda\mu)^{\frac{1}{2}},$$

che dà:

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1,$$

come si è già dimostrato.

3.° Le relazioni differenziali fra le funzioni iperellittiche stabilite al Capitolo III conducono ad altrettante relazioni fra le funzioni théta. Sciegliamo

fra esse le tre seguenti. Al paragrafo terzo di quel Capitolo si è dimostrata l'esistenza della relazione:

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{dp_r}{du_1} & \frac{dp_r}{du_2} \\ \frac{dp_{\lambda r}}{du_1} & \frac{dp_{\lambda r}}{du_2} \end{vmatrix} = p_{rs} p_{rm} p_{r\mu}.$$

Supponiamo $r = 1$, $\lambda = 3$, $s = 0$, $m = 2$, $\mu = 4$; ponendo nella medesima $u_1 = u_2 = 0$ si ha:

$$-\left(\frac{dp_1}{du_2}\right)_0 \left(\frac{dp_{13}}{du_1}\right)_0 = p_{10}(0) p_{12}(0) p_{14}(0),$$

per essere $\left(\frac{dp_{13}}{du_2}\right)_0 = 0$. Siano ora:

$$p_1(u) = C_1 \frac{\mathcal{S}_1(v)}{\mathcal{S}(v)}, \quad p_{13}(u) = C_{13} \frac{\mathcal{S}_{13}(v)}{\mathcal{S}(v)}, \quad p_{10}(u) = C_{10} \frac{\mathcal{S}_{10}(v)}{\mathcal{S}(v)}, \dots$$

nelle quali $C_1, C_{13}, C_{10}, \dots$ sono le rispettive costanti. Determinando le costanti stesse nel modo indicato al paragrafo primo, si ottiene la:

$$\frac{C_{10} C_{12} C_{14}}{C_1 C_{13}} = \frac{c^2}{m^2 \omega},$$

essendo, come sopra, $c = \mathcal{S}(0)$; ma:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dv_1} & \frac{du_1}{dv_2} \\ \frac{du_2}{dv_1} & \frac{du_2}{dv_2} \end{vmatrix} = 4\omega,$$

si avrà così:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{S} & \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_{13} \\ \frac{d\mathcal{S}}{dv_1} & \frac{d\mathcal{S}_1}{dv_1} & \frac{d\mathcal{S}_{13}}{dv_1} \\ \frac{d\mathcal{S}}{dv_2} & \frac{d\mathcal{S}_1}{dv_2} & \frac{d\mathcal{S}_{13}}{dv_2} \end{vmatrix} = 4 \frac{c^2}{m^2} \mathcal{S}_{10} \mathcal{S}_{12} \mathcal{S}_{14}.$$

Se in questa si pongono $v_1 = v_2 = 0$ si deduce la:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d\mathcal{S}_1}{dv_1}\right)_0 & \left(\frac{d\mathcal{S}_{13}}{dv_1}\right)_0 \\ \left(\frac{d\mathcal{S}_1}{dv_2}\right)_0 & \left(\frac{d\mathcal{S}_{13}}{dv_2}\right)_0 \end{vmatrix} = \frac{4}{m^2} C_{10} C_{12} C_{14},$$

come si è dimostrato al paragrafo primo. Questa e le analoghe pei valori di $c, c_{10}, \dots \left(\frac{d\vartheta_1}{dv_1} \right)_0, \dots$ dati dalla (58) del Capitolo precedente danno:

$$m = \frac{2}{\pi i}.$$

Evidentemente si avranno quindici relazioni analoghe a ciascuna delle superiori quante sono le combinazioni a due a due delle derivate delle funzioni pari.

In secondo luogo posto:

$$y = \frac{\varrho_0(v)}{\varrho(v)}, \quad z = \frac{\varrho_{12}(v)}{\varrho(v)}, \quad w = \frac{\varrho_{34}(v)}{\varrho(v)},$$

dalle equazioni (12) dello stesso Capitolo III si hanno le:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{dz}{dv_1} & \frac{dz}{dv_2} \\ \frac{dw}{dv_1} & \frac{dw}{dv_2} \end{array} \right| = r \omega \frac{dF}{dy}, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{dw}{dv_1} & \frac{dw}{dv_2} \\ \frac{dy}{dv_1} & \frac{dy}{dv_2} \end{array} \right| = r \omega \frac{dF}{dz}, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{dy}{dv_1} & \frac{dy}{dv_2} \\ \frac{dz}{dv_1} & \frac{dz}{dv_2} \end{array} \right| = r \omega \frac{dF}{dw}, \quad (15)$$

essendo F il secondo membro dell'equazione superiore (13) diviso per ϱ^4 . Per queste, indicando con $\Sigma \left(\pm \varrho_0 \frac{d\varrho_{12}}{dv_1} \frac{d\varrho_{34}}{dv_2} \right)$ il determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} \varrho_0 & \varrho_{12} & \varrho_{34} \\ \frac{d_1 \varrho_0}{dv_1} & \frac{d \varrho_{12}}{dv_1} & \frac{d \varrho_{34}}{dv_1} \\ \frac{d \varrho_0}{dv_2} & \frac{d \varrho_{12}}{dv_2} & \frac{d_1 \varrho_{34}}{dv_2} \end{array} \right|,$$

si hanno le:

$$\begin{aligned} \Sigma \left(\pm \varrho_0 \frac{d\varrho_{12}}{dv_1} \frac{d\varrho_{34}}{dv_2} \right) &= r \omega \frac{dF}{d\varrho} & \Sigma \left(\pm \varrho \frac{d\varrho_{12}}{dv_1} \frac{d\varrho_{34}}{dv_2} \right) &= -r \omega \frac{dF}{d\varrho_0} \\ \Sigma \left(\pm \varrho \frac{d\varrho_0}{dv_1} \frac{d\varrho_{34}}{dv_2} \right) &= r \omega \frac{dF}{d\varrho_{12}} & \Sigma \left(\pm \varrho \frac{d\varrho_0}{dv_1} \frac{d\varrho_{12}}{dv_2} \right) &= -r \omega \frac{dF}{d\varrho_{34}}. \end{aligned}$$

Per determinare r si operi sopra queste con una delle sostituzioni (12), si avrà, per esempio,

$$\Sigma \left(\pm \varrho_{23} \frac{d\varrho_{13}}{dv_1} \frac{d\varrho_{24}}{dv_2} \right) = -r \omega \frac{d\Phi}{d\varrho_{14}},$$

supposto $\Phi = 0$ essere la equazione biquadratica che corrisponde alla prima sostituzione.

Ponendo in questa $v_1 = v_2 = 0$ si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{d\vartheta_{13}}{dv_1}\right)_0 & \left(\frac{d\vartheta_{24}}{dv_1}\right)_0 \\ \left(\frac{d\vartheta_{13}}{dv_2}\right)_0 & \left(\frac{d\vartheta_{24}}{dv_2}\right)_0 \end{vmatrix} = 4r\omega \frac{c_{14}}{c_{23}} [c_{14}^2 + ac_{23}^2],$$

ma il primo membro è eguale a $\pi^2 c_2 c_4 c_{01} c_{03}$, quindi sostituendo pel coefficiente a il suo valore si ha:

$$r\omega = \frac{1}{2} \pi^2 \frac{c_2 c_4 c_{31} c_{03} c_{14} c_{23}}{c_{23}^4 - c_{14}^4}.$$

Infine dalle relazioni (18) (20) dello stesso Capitolo III si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} w \frac{dz}{dv_1} - z \frac{dw}{dv_1} &= A_1 \frac{dy}{dv_1} + A_2 \frac{dy}{dv_2}, & w \frac{dz}{dv_2} - z \frac{dw}{dv_2} &= -A_0 \frac{dy}{dv_1} - A_1 \frac{dy}{dv_2} \\ y \frac{dw}{dv_1} - w \frac{dy}{dv_1} &= B_1 \frac{dz}{dv_1} + B_2 \frac{dz}{dv_2}, & y \frac{dw}{dv_2} - w \frac{dy}{dv_2} &= -B_0 \frac{dz}{dv_1} - B_1 \frac{dz}{dv_2} \\ z \frac{dy}{dv_1} - y \frac{dz}{dv_1} &= C_1 \frac{dw}{dv_1} + C_2 \frac{dw}{dv_2}, & z \frac{dy}{dv_2} - y \frac{dz}{dv_2} &= -C_0 \frac{dw}{dv_1} - C_1 \frac{dw}{dv_2}. \end{aligned}$$

nelle quali y, z, w sono i rapporti delle ϑ superiori, e le A_0, B_0, \dots sono costanti di cui i valori si possono dedurre da quelli delle a_0, b_0, \dots di quel Capitolo od anche ottenere direttamente. Dedotte nel primo modo risulta, per le (21) del Capitolo III, essere:

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_0 A_2 &= 1 & 2B_1 C_1 - B_0 C_2 - B_2 C_0 &= 2a \\ B_1^2 - B_0 B_2 &= 1 & 2C_1 A_1 - C_0 A_2 - C_2 A_0 &= 2b \\ C_1^2 - C_0 C_2 &= 1 & 2A_1 B_1 - A_0 B_2 - A_2 B_0 &= 2c. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima delle equazioni superiori per $\frac{dy}{dv_2}$, la seconda per $-\frac{dy}{dv_1}$, si giunge per le (15) alla:

$$A_0 \left(\frac{dy}{dv_1}\right)^2 + 2A_1 \frac{dy}{dv_1} \frac{dy}{dv_2} + A_2 \left(\frac{dy}{dv_2}\right)^2 = -r\omega \left[z \frac{dF}{dz} + w \frac{dF}{dw} \right]$$

ed analogamente:

$$B_0 \left(\frac{dz}{dv_1}\right)^2 + 2B_1 \frac{dz}{dv_1} \frac{dz}{dv_2} + B_2 \left(\frac{dz}{dv_2}\right)^2 = -r\omega \left[w \frac{dF}{dw} + y \frac{dF}{dy} \right]$$

$$C_0 \left(\frac{dw}{dv_1}\right)^2 + 2C_1 \frac{dw}{dv_1} \frac{dw}{dv_2} + C_2 \left(\frac{dw}{dv_2}\right)^2 = -r\omega \left[y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} \right].$$

Così derivando la prima delle superiori rispetto a v_2 e la seconda rispetto a v_1 ,

si ottiene:

$$A_0 \frac{d^2 y}{d v_1^2} + 2 A_1 \frac{d^2 y}{d v_1 d v_2} + A_2 \frac{d^2 y}{d v_2^2} = 2 r \omega \frac{d F}{d y},$$

ed analoghe per z e w . Si riproducono cioè le (24) (25) (26) (27) del Capitolo III, sostituendo alle a_0, b_0, c_0, \dots le A_0, B_0, C_0, \dots , scrivendo $4r\omega$ in luogo di r , e prendendo le derivate rispetto a v_1, v_2 .

Di maggiore interesse è l'analogia trasformazione per le relazioni (29) (30) del citato Capitolo. Posto:

$$\begin{aligned} (\alpha_2 y_1^2) &= A_2 \left(\frac{d y}{d v_1} \right)^2 - A_1 \frac{d y}{d v_1} \frac{d y}{d v_2} + A_0 \left(\frac{d y}{d v_2} \right)^2 \\ (\beta_2 y_1^2) &= B_2 \left(\frac{d y}{d v_1} \right)^2 - B_1 \frac{d y}{d v_1} \frac{d y}{d v_2} + B_0 \left(\frac{d y}{d v_2} \right)^2 \\ (\gamma_2 y_1^2) &= C_2 \left(\frac{d y}{d v_1} \right)^2 - C_1 \frac{d y}{d v_1} \frac{d y}{d v_2} + C_0 \left(\frac{d y}{d v_2} \right)^2, \end{aligned}$$

si hanno le:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4 \omega^2} [\alpha_2 \omega_{22}^2 + \alpha_1 \omega_{12} \omega_{22} + \alpha_0 \omega_{12}^2] \\ A_1 &= \frac{1}{4 \omega^2} [2 \alpha_2 \omega_{22} \omega_{21} + \alpha_1 (\omega_{11} \omega_{22} + \omega_{12} \omega_{21}) + 2 \alpha_0 \omega_{11} \omega_{12}] \\ A_0 &= \frac{1}{4 \omega^2} [\alpha_2 \omega_{21}^2 + \alpha_1 \omega_{21} \omega_{11} + \alpha_0 \omega_{11}^2], \end{aligned}$$

e quindi pei valori di $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dati dalle (22) del Capitolo III, supposto $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$; si ottengono per le (3) (8) le seguenti:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{m^6}{4^3} \frac{[13, 24]}{\Pi c} \left(\frac{d \mathfrak{S}_{13}}{d v_2} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_{24}}{d v_2} \right)_0 \\ A_1 &= \frac{m^6}{4^3} \frac{[13, 24]}{\Pi c} \left[\left(\frac{d \mathfrak{S}_{13}}{d v_1} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_{24}}{d v_2} \right)_0 + \left(\frac{d \mathfrak{S}_{13}}{d v_2} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_{24}}{d v_1} \right)_0 \right] \\ A_0 &= \frac{m^6}{4^3} \frac{[13, 24]}{\Pi c} \left(\frac{d \mathfrak{S}_{13}}{d v_1} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_{24}}{d v_1} \right)_0. \end{aligned}$$

Nello stesso modo si giunge alle:

$$B_2 = \frac{m^6}{4^3} \frac{[04, 3]}{\Pi c} \left(\frac{d \mathfrak{S}_{04}}{d v_2} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_3}{d v_2} \right)_0; \quad C_2 = \frac{m^6}{4^3} \frac{[02, 1]}{\Pi c} \left(\frac{d \mathfrak{S}_{02}}{d v_2} \right)_0 \left(\frac{d \mathfrak{S}_1}{d v_2} \right)_0,$$

ed alle analoghe per $B_1, C_1; B_0, C_0$.

Questi coefficienti A_0, B_0, C_0, \dots sostituiti ordinatamente agli $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$ in tutte le relazioni (29) (30) sopra menzionate conducono alla trasformazione delle relazioni stesse.

CAPITOLO X.

Di alcune formole d'addizione per le funzioni théta.

1.° Le formole di addizione per le funzioni théta si deducono facilmente dalle corrispondenti del Capitolo VII relative alle funzioni iperellittiche. Per ciò nel presente Capitolo ci limiteremo ad indicare quelle che conducono a relazioni non ancora note. Ed incominciando dalle funzioni dispari, notiamo dapprima come dalle relazioni (14) di quel Capitolo si deducano le seguenti:

$$\left. \begin{aligned}
 c^2 \vartheta_1(v+v') \vartheta_1(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_1^2(v') + \vartheta_1^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_3^2(v) \vartheta_{13}^2(v') + \vartheta_{13}^2(v) \vartheta_3^2(v') \\
 c^2 \vartheta_{13}(v+v') \vartheta_{13}(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_{13}^2(v') + \vartheta_{13}^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_1^2(v) \vartheta_3^2(v') + \vartheta_3^2(v) \vartheta_1^2(v') \\
 c^2 \vartheta_3(v+v') \vartheta_3(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_3^2(v') + \vartheta_3^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_{13}^2(v) \vartheta_1^2(v') + \vartheta_1^2(v) \vartheta_{13}^2(v') \\
 c^2 \vartheta_{24}(v+v') \vartheta_{24}(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_{24}^2(v') + \vartheta_{24}^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_{40}^2(v) \vartheta_{02}^2(v') + \vartheta_{02}^2(v) \vartheta_{40}^2(v') \\
 c^2 \vartheta_{40}(v+v') \vartheta_{40}(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_{40}^2(v') + \vartheta_{40}^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_{02}^2(v) \vartheta_{24}^2(v') + \vartheta_{24}^2(v) \vartheta_{02}^2(v') \\
 c^2 \vartheta_{02}(v+v') \vartheta_{02}(v-v') &= -\vartheta^2(v) \vartheta_{02}^2(v') + \vartheta_{02}^2(v) \vartheta^2(v') - \vartheta_{24}^2(v) \vartheta_{40}^2(v') + \vartheta_{40}^2(v) \vartheta_{24}^2(v'),
 \end{aligned} \right\} (1)$$

nelle quali si è sempre scritto $\vartheta(v)$ in luogo di $\vartheta(v_1, v_2)$. Poniamo in queste relazioni:

$$v_1 = w_r, \quad v'_1 = w_s; \quad v_2 = w'_r, \quad v'_2 = w_s$$

e per una qualsivoglia delle funzioni ϑ dispari:

$$\vartheta(w_r + w_s) \vartheta(w_r - w_s) = S_{rs} = -S_{sr}.$$

Ponendo inoltre:

$$\vartheta^2(w_r) = x_r \quad \vartheta_1^2(w_r) = y_r \quad \vartheta_{13}^2(w_r) = z_r \quad \vartheta_3^2(w_r) = t_r,$$

indicando con D il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix},$$

e moltiplicando il determinante stesso per:

$$D = \begin{vmatrix} -y_0 & x_0 & t_0 & -z_0 \\ -y_1 & x_1 & t_1 & -z_1 \\ -y_2 & x_2 & t_2 & -z_2 \\ -y_3 & x_3 & t_3 & -z_3 \end{vmatrix},$$

si ottiene, per la prima delle relazioni superiori:

$$D^2 = c^8 \begin{vmatrix} 0 & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & 0 \end{vmatrix},$$

nella quale il simbolo S è applicato alla funzione \mathfrak{S}_1 . Ma il secondo membro della equazione superiore è, come è noto, un quadrato; si avrà cioè:

$$c^4 [S_{01} S_{23} + S_{13} S_{20} + S_{30} S_{21}] = D. \quad (2)$$

Ora applicando il simbolo S alla funzione \mathfrak{S}_{13} , per la seconda delle relazioni (1) si devono nel determinante D permutare le y, z, t nelle z, t, y ; e così applicandolo alla funzione \mathfrak{S}_3 permutare le y, z, t nelle t, y, z ; ma siccome queste permutazioni non modificano il valore od il segno di D , si avrà che la equazione (2) sussiste per le tre funzioni $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_{13}, \mathfrak{S}_3$.

Evidentemente la stessa proprietà avrà luogo per le tre funzioni $\mathfrak{S}_{24}, \mathfrak{S}_{40}, \mathfrak{S}_{02}$ e per un determinante Δ dedotto dal D sostituendo alle y, z, t le $\mathfrak{S}_{24}, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_{02}$. Ma se si moltiplica il determinante D pel determinante:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{03}^2 & c_0^2 & c_{01}^2 \\ 0 & c_{23}^2 & -c_2^2 & c_{21}^2 \\ 0 & c_{43}^2 & c_4^2 & -c_{41}^2 \end{vmatrix},$$

si ottiene, per le relazioni (10) del Capitolo precedente:

$$CD = c^6 \Delta,$$

ma $C = c^6$ quindi $\Delta = D$.

Ne risulta che le sei espressioni le quali si deducono dal primo membro della equazione (2) applicando il simbolo S alle sei funzioni \mathfrak{S} dispari, sono eguali fra loro, e ciascuna eguale al determinante $D = \Delta$.

Operando analogamente si giunge a quest'altro risultato. Si consideri un determinante del sesto ordine pel quale gli elementi di ciascuna linea sieno:

$$0, 0, x_r, y_r, z_r, t_r,$$

per $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; e lo si moltiplichi pel determinante in cui gli elementi delle corrispondenti linee sono:

$$0, 0, -y_r, x_r, t_r, -z_r;$$

si avrà per le sei \mathfrak{S} dispari:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & S_{01} & S_{02} \dots & S_{05} \\ S_{10} & 0 & S_{12} \dots & S_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{50} & S_{51} & S_{52} \dots & 0 \end{vmatrix},$$

ossia:

$$0 = S_{01} [S_{23} S_{45} + S_{35} S_{42} + S_{52} S_{43}] + S_{20} [S_{13} S_{45} + S_{35} S_{41} + S_{51} S_{43}] + \\ + S_{03} [S_{12} S_{45} + S_{25} S_{41} + S_{51} S_{42}] + S_{10} [S_{12} S_{35} + S_{25} S_{31} + S_{51} S_{32}] + \\ + S_{05} [S_{12} S_{34} + S_{24} S_{31} + S_{41} S_{32}]. \quad (3)$$

2.° Ponendo per brevità $\mathfrak{S}_{rs}(v'_1, v'_2) = \theta_{rs}$, ed:

$$X = \mathfrak{S}^2 \theta^2 + \mathfrak{S}_0^2 \theta_0^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{34}^2 \\ Y = \mathfrak{S}_0^2 \theta^2 + \mathfrak{S}^2 \theta_0^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{34}^2 \\ Z = \mathfrak{S}_{12}^2 \theta^2 + \mathfrak{S}^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_0^2 \theta_{34}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_0^2 \\ W = \mathfrak{S}_{34}^2 \theta^2 + \mathfrak{S}^2 \theta_{34}^2 + \mathfrak{S}_0^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_0^2,$$

le (17) (18) del Capitolo VII conducono alle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 \cdot D \cdot \mathfrak{S}(v+v') \mathfrak{S}(v-v') &= (\lambda\mu\nu + 1)X + (\lambda + \mu\nu)Y + (\mu + \nu\lambda)Z + (\nu + \lambda\mu)W \\ \varepsilon^2 \cdot D \cdot \mathfrak{S}_0(v+v') \mathfrak{S}_0(v-v') &= (\lambda + \mu\nu)X + (\lambda\mu\nu + 1)Y + (\nu + \lambda\mu)Z + (\mu + \nu\lambda)W \\ \varepsilon^2 \cdot D \cdot \mathfrak{S}_{12}(v+v') \mathfrak{S}_{12}(v-v') &= (\mu + \nu\lambda)X + (\nu + \lambda\mu)Y + (\lambda\mu\nu + 1)Z + (\lambda + \mu\nu)W \\ \varepsilon^2 \cdot D \cdot \mathfrak{S}_{34}(v+v') \mathfrak{S}_{34}(v-v') &= (\nu + \lambda\mu)X + (\mu + \nu\lambda)Y + (\lambda + \mu\nu)Z + (\lambda\mu\nu + 1)W \end{aligned} \right\} (4)$$

essendo $D = (\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)$ ed ε la quantità che figura nelle equazioni (2) del precedente Capitolo. Queste relazioni si ponno evidentemente dedurre l'una dall'altra sostituendo $v_1 + \frac{1}{2}$ oppure $v_2 + \frac{1}{2}$, o l'uno e l'altro insieme, a v_1, v_2 . Relazioni analoghe si possono ottenere per le altre funzioni \mathfrak{S} pari; ma ne esiste una di carattere generale degna di considerazione.

Si formino per mezzo delle relazioni (9) del Capitolo precedente le espressioni $\mathfrak{S}_{23}^2 \theta_{23}^2; \mathfrak{S}_{14}^2 \theta_{14}^2, \dots$; si otterranno altrettante equazioni quante sono le (9) i secondi membri delle quali sono funzioni dei quadrati di $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_{12}, \mathfrak{S}_{34}; \theta, \theta_0, \theta_{12}, \theta_{34}$.

Posto:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \mathfrak{S}^2 \theta^2 + \mathfrak{S}_0^2 \theta_0^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{34}^2 & P_1 &= \mathfrak{S}^2 \theta^2 + \mathfrak{S}_0^2 \theta_0^2 - \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{12}^2 - \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{34}^2 \\ P_2 &= \mathfrak{S}^2 \theta^2 - \mathfrak{S}_0^2 \theta_0^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{12}^2 - \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{34}^2 & P_3 &= \mathfrak{S}^2 \theta^2 - \mathfrak{S}_0^2 \theta_0^2 - \mathfrak{S}_{12}^2 \theta_{12}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 \theta_{34}^2 \end{aligned} \right\} (5)$$

si indichino con $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; R_0, R_1, R_2, R_3; S_0, S_1, S_2, S_3$ le analoghe espressioni ottenute sostituendo alle:

$$\begin{array}{cccc} \wp & \wp_0 & \wp_{12} & \wp_{34} \\ \text{le:} & & & \\ \wp_{23} & \wp_{14} & \wp_{13} & \wp_{24} \\ \wp_4 & \wp_{04} & \wp_{03} & \wp_3 \\ \wp_{01} & \wp_1 & \wp_{02} & \wp_2, \end{array}$$

e così per le θ . Si hanno con facile calcolazione le sedici relazioni:

$$\left. \begin{array}{ll} 4c^2 \wp(v+v') \wp(v-v') = P_0 + Q_0 + R_0 + S_0 & 4c_{23}^2 \wp_{23}(v+v') \wp_{23}(v-v') = P_1 + Q_1 + R_1 + S_1 \\ 4c_0^2 \wp_0(v+v') \wp_0(v-v') = P_0 + Q_0 - R_0 - S_0 & 4c_{14}^2 \wp_{14}(v+v') \wp_{14}(v-v') = P_1 + Q_1 - R_1 - S_1 \\ 4c_{12}^2 \wp_{12}(v+v') \wp_{12}(v-v') = P_0 - Q_0 + R_0 - S_0 & 0 = P_1 - Q_1 + R_1 - S_1 \\ 4c_{34}^2 \wp_{34}(v+v') \wp_{34}(v-v') = P_0 - Q_0 - R_0 + S_0 & 0 = P_1 - Q_1 - R_1 + S_1 \\ 4c_4^2 \wp_4(v+v') \wp_4(v-v') = P_2 + Q_2 + R_2 + S_2 & 4c_{01}^2 \wp_{01}(v+v') \wp_{01}(v-v') = P_3 + Q_3 + R_3 + S_3 \\ & 0 = P_3 + Q_3 - R_3 - S_3 \\ 4c_{03}^2 \wp_{03}(v+v') \wp_{03}(v-v') = P_2 - Q_2 + R_2 - S_2 & 0 = P_3 - Q_3 + R_3 - S_3 \\ & 0 = P_2 - Q_2 - R_2 + S_2 \\ 4c_2^2 \wp_2(v+v') \wp_2(v-v') = P_3 - Q_3 - R_3 + S_3 \end{array} \right\} (6)$$

Da queste relazioni si deducono tosto le reciproche. Infatti essendo per le (5)

$$4 \wp^2 \theta^2 = P_0 = P_1 + P_2 + P_3,$$

si avrà:

$$4 \wp^2 \theta^2 = \sum c^2 \wp_r \wp_r(v+v') \wp_r(v-v'), \quad (7)$$

la sommatoria estendendosi alle dieci funzioni θ pari; ed analogamente per le altre espressioni della stessa specie.

Supponendo $v' = v$ le formole (6) danno quelle per la duplicazione delle funzioni θ pari; le (7) quelle della bisezione per tutte le funzioni θ .

(Continua.)