TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

TABLE DES MATIERES

contenues dans la première Partie.

TOME PREMIER.

Détermination

LIVRE II.

TOME SECOND.

LIVRE III.

LIVRE IV.

circonstances

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA DU TOME PREMIER.

Page 26, ligne 4, en remontant, au lieu de $\mathfrak{C}$; *lisez* $\frac{\mathfrak{C}}{g}$.
Page 53, ligne 10, en remontant; *changez* le signe — en +.
Page 54, ligne 7; *changez* le dernier — en +.
Page 59, ligne 8, en remontant, au lieu de $-z.\sin.\theta.\cos.\psi$; *lisez* $-z.\sin.\theta.\cos.\varphi$.
Page 72, ligne 4; *changez* les f en S.
Page 73, ligne 10, au lieu de *l'angle;* lisez *le complément de l'angle.*
Page 75, ligne 6, en remontant, au lieu de $\text{tang}.\frac{1}{2}\theta$; *lisez* $\frac{1}{2}\,\text{tang}.2\theta$.
Page 79, ligne 19, à la fin; *ajoutez* $=0$.
Page 83, ligne 13, en remontant, au lieu de *cosinus;* lisez *sinus.*
Page 85, ligne 13, en remontant, au lieu de $\frac{1}{5}$, *lisez* $\frac{3R^2}{5}$.
Page 89, ligne 13; *changez* les f en S.
Page 95, ligne 8, *multipliez* par dt, le premier terme.
Page 96, ligne 14; *ajoutez* $-\frac{\delta p}{g}$ au second membre de l'équation.
Page 105, ligne 6, en remontant, au lieu de $\left(\frac{ds'}{dt}\right)$; *lisez* $\left(\frac{dv'}{dt}\right)$.
Page 124, ligne 9; *changez* l'exposant $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$.
Page 130, ligne 3, au lieu de *partiellement;* lisez *pareillement.*
Page 141, lignes 4 et 8, *multipliez* par $d\theta$.
Page 147, ligne 9, au lieu de $\cos.\theta$; *lisez* $r.\cos.\theta$.
Page 150, ligne dernière, au lieu de $+v$; *lisez* $+s$.
Page 152, ligne 11, au lieu de $\left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right).\sin.(nt+\varepsilon)$; lisez $\left(\frac{dQ}{dx_{,}}\right).\sin.(nt+\varepsilon)$.
Page 160, ligne 9, en remontant; *mettez* $\sqrt{\mu}$ devant le radical.
Page 182, ligne 9, en remontant, au lieu de $\cos 6.(v-\mathfrak{C})$; lisez $\sin.6.(v-\mathfrak{C})$.
Page 185, ligne 11, en remontant, au lieu de T; lisez t.
Page 192, ligne 3, au lieu de $=$; lisez $l=$.
Ibid. ligne 14, en remontant, *comme les;* lisez *réciproques aux*, et ligne 12, en remontant, au lieu de $\sqrt{\frac{2}{r}}$; lisez $U.\sqrt{\frac{2}{r}}$.
Page 207, ligne 3, au lieu de ρ; lisez $\frac{d\rho}{dt}$.
Page 209, ligne 5, au lieu de $\frac{\rho}{\cos.^2\theta}$; lisez $\frac{\rho^2}{\cos.^2\theta}$.
Page 216, ligne 9, en remontant, au lieu de $C\rho^2$; lisez $C\rho$.
Page 226, ligne 7, en remontant, *géocentrique;* lisez *héliocentrique.*
Page 291, ligne dernière, au lieu de $2\sin.v$; lisez $2a.\sin.v$.
Page 298, ligne 10, en remontant, au lieu de $3a$; lisez $\frac{3a}{\mu}$.
Page 354, ligne 11, en remontant, au lieu de $m'.an$; lisez $-m'an$.

ERRATA DU TOME SECOND.

Page 10, ligne 14, au lieu de $\frac{4\pi.k^3}{\sqrt{mn}}$; lisez $\frac{4\pi.k^3}{3.\sqrt{mn}}$.
Page 15, ligne 14, au lieu de $\frac{n-1}{m}$; lisez $\frac{n-1}{n}$.

Page 33, ligne 9, en remontant; *observez* que la masse M est prise pour unité.
Page 35, ligne 4, en remontant, au lieu de $4a\pi.Y^{(i)}$; lisez $4\alpha\pi.Y^{(i)}$.
Page 47, ligne 2, en remontant, au lieu de $2.(i+2n+1).(i+2n+2)\ldots.(2i-1)$; lisez $(i+2n+1).(i+2n+3)\ldots.(2i-1)$.
Page 48, ligne 5; *supprimez* le facteur $.2$.
Page 51, ligne 6, au lieu de $\frac{4\pi}{3}$; lisez $\frac{4\pi\rho}{3}$.
Page 107, ligne 17, au lieu de $2i+1$, *lisez* $2.(2i+1)$.
Page 122, ligne 4; *multipliez* par s les deux derniers termes.
Page 123, ligne 9, au lieu de $\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi}\right)$; lisez $\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)$.
Page 125, ligne 4, en remontant, au lieu de $\sin.2(\varphi+\epsilon)$; lisez $\cos.2(\varphi+\epsilon)$.
Page 136, ligne 16, au lieu de *somme*; lisez *demi-somme*.
Page 156, ligne 17, au lieu de *u étant*; lisez *a étant*.
Ibid. ligne 21, au lieu de *rayon*; substituez *rayon*, *a*.
Page 161, ligne 18, au lieu de $-\frac{4\pi.zdz}{\lambda+1}$; lisez $-\frac{4\pi.\lambda zdz}{\lambda+1}$.
Page 164, lig. 11, au lieu de ces mots, *sur l'élément* $rd\varpi$, *de l'anneau*; lisez *sur l'anneau*.
Page 169, ligne 15, au lieu de $\alpha r^3 d\theta$; lisez $\alpha r^4 d\theta$.
Page 172, ligne 10, en remontant, au lieu de V; lisez v, et *observez* que ce v est différent de celui de l'équation (2).
Page 177, lignes 13 et 14; *multipliez* par l, les deux termes.
Page 189, ligne 6, en remontant, au lieu de $P^{(2f)}$; lisez $P^{(2f-2)}$.
Page 190, ligne 3, en remontant, au lieu de μ^{2f-2}; lisez μ^{2f-1}.
Page 194, ligne 2, au lieu de $\cos.(nt+\varpi-\psi)$; lisez $\sin.(nt+\varpi-\psi)$.
Page 210, ligne 3; *divisez* le second terme par 2.
Page 211, lignes 5 et 7, au lieu de $\frac{2}{3}\pi$; lisez $\frac{4}{3}\pi$.
Page 212, ligne 10, en remontant, *changez* y' en y.
Page 214, ligne 11, au lieu de $\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sin.\varpi$; lisez $\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).\sin.\varpi$.
Page 219, ligne 2, en remontant, au lieu de $n't$; lisez $n'T$.
Page 221, ligne 12; *changez* n^2 dans n'^2.
Page 246, ligne 20, au lieu de 10009^{me},470; *lisez* 1009^{me},470.
Page 257, ligne 4, en remontant, au lieu de $\frac{L'}{r'^3}$; lisez $\frac{L'}{r'^5}$.
Ibid. ligne 5, en remontant, au lieu de $\frac{m'}{r'^3}$; lisez $\frac{m'}{r'^5}$.
Ibid. lignes 7 et 8, en remontant, au lieu de 21; *lisez* 22, et au lieu de y''; lisez αy.
Page 258, ligne 6, au lieu de 6,8091; *lisez* 6,9091.
Page 270, ligne 4, en remontant, au lieu de Γ'; *lisez* $\Gamma'.\sqrt{\frac{p'}{24}}$.
Page 272, ligne 4; *observez* que p doit être augmenté de sa trente-neuvième partie.
Page 293, lignes 7 et 8; changez *équinoxes*, en *solstices*, et réciproquement.
Page 295, ligne 5, au lieu de $l'y$; lisez ly.
Page 308, lignes 4, 5 et 6; *mnltipliez* par ρ, le produit $d\mu.d\varpi$.
Page 312, ligne 12, au lieu de $\frac{A-C}{A}$; lisez $\frac{A-C}{B}$.
Page 313, ligne 5, au lieu de $\cos.(it+\varepsilon)$; lisez $\sin.(it+\varepsilon)$.
Page 324, ligne dernière, au lieu de $\sin.(ft+\epsilon)$; lisez $\cos.(ft+\epsilon)$.

TRAITE.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE.

NEWTON publia, vers la fin du dernier siècle, la découverte de la pesanteur universelle. Depuis cette époque, les Géomètres sont parvenus à ramener à cette grande loi de la nature, tous les phénomènes connus du système du monde, et à donner ainsi aux théories et aux tables astronomiques, une précision inespérée. Je me propose de présenter sous un même point de vue, ces théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et dont l'ensemble embrassant tous les résultats de la gravitation universelle, sur l'équilibre et sur les mouvemens des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systêmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, forme *la Mécanique céleste*. L'Astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problême de mécanique, dont les élémens des mouvemens célestes sont les arbitraires; sa solution dépend à-la-fois de l'exactitude des observations et de la perfection de l'analyse, et il importe extrêmement d'en bannir tout empirisme, et de la réduire à n'emprunter de l'observation, que les données indispensables. C'est à remplir autant qu'il m'a été possible, un objet aussi intéressant, que cet ouvrage est destiné. Je desire qu'en considération de l'importance et des difficultés de la matière, les Géomètres et les Astronomes le reçoivent avec indulgence, et qu'ils en trouvent les résultats assez simples pour les employer dans leurs recherches. Il sera divisé en deux parties. Dans la première, je donnerai les méthodes et les formules pour déterminer les mouvemens des centres de gravité des corps célestes, la figure de ces corps, les oscillations des fluides qui les recouvrent, et leurs mouvemens autour de leurs propres centres de gravité. Dans la seconde partie, j'appliquerai les formules trouvées dans la première, aux planètes, aux satellites et aux comètes; je la terminerai par l'examen de diverses questions relatives au systême du monde, et par une notice historique des travaux des Géomètres sur cette matière. J'adopterai la division décimale de l'angle droit et du jour, et je rapporterai les mesures linéaires, à la longueur du mètre, déterminée par l'arc du méridien terrestre compris entre Dunkerque et Barcelone.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MOUVEMENS ET DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

LIVRE PREMIER.

DES LOIX GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT.

Je vais établir dans ce livre, les principes généraux de l'équilibre et du mouvement des corps, et résoudre les problèmes de mécanique, dont la solution est indispensable dans la théorie du systême du monde.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre et de la composition des forces qui agissent sur un point matériel.

1. Un corps nous paroît se mouvoir, lorsqu'il change de situation par rapport à un systême de corps que nous jugeons en repos; mais comme tous les corps, ceux même qui nous semblent jouir du repos le plus absolu, peuvent être en mouvement; on imagine un espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière : c'est

aux parties de cet espace réel ou idéal, que nous rapportons par la pensée, la position des corps, et nous les concevons en mouvement, lorsqu'ils répondent successivement à divers lieux de l'espace.

La nature de cette modification singulière, en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre, est et sera toujours inconnue; on l'a désignée sous le nom de *force*; on ne peut déterminer que ses effets et les loix de son action. L'effet d'une force agissante sur un point matériel, est de le mettre en mouvement, si rien ne s'y oppose; la direction de la force est la droite qu'elle tend à lui faire décrire. Il est visible que si deux forces agissent dans le même sens, elles s'ajoutent l'une à l'autre, et que si elles agissent en sens contraire, le point ne se meut qu'en vertu de leur différence. Si leurs directions forment un angle entre elles, il en résulte une force dont la direction est moyenne entre celles des forces composantes. Voyons quelle est cette résultante et sa direction.

Pour cela, considérons deux forces x et y agissantes à-la-fois sur un point matériel M, et formant entre elles un angle droit. Soit z leur résultante, et θ l'angle qu'elle fait avec la direction de la force x; les deux forces x et y étant données, l'angle θ sera déterminé, ainsi que la résultante z, en sorte qu'il existe entre les trois quantités x, z et θ, une relation qu'il s'agit de connoître.

Supposons d'abord les forces x et y infiniment petites, et égales aux différentielles dx et dy; supposons ensuite que x devenant successivement dx, $2dx$, $3dx$, &c. y devienne dy, $2dy$, $3dy$, &c., il est clair que l'angle θ sera toujours le même, et que la résultante z deviendra successivement dz, $2dz$, $3dz$, &c.; ainsi dans les accroissemens successifs des trois forces x, y et z, le rapport de x à z sera constant, et pourra être exprimé par une fonction de θ, que nous désignerons par $\varphi(\theta)$; on aura donc $x = z.\varphi(\theta)$, équation dans laquelle on peut changer x en y, pourvu que l'on y change semblablement l'angle θ dans $\frac{\pi}{2} - \theta$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Maintenant, on peut considérer la force x comme la résultante de deux forces x' et x'' dont la première x' est dirigée suivant la résultante z, et dont la seconde x'' est perpendiculaire à cette résultante. La force x qui résulte de ces deux nouvelles forces, formant l'angle θ avec la force x', et l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$ avec la force x'', on aura

$$x' = x.\varphi(\theta) = \frac{x^2}{z}\ ; \quad x'' = x.\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{xy}{z};$$

on peut donc substituer ces deux forces, à la force x. On peut substituer pareillement à la force y, deux nouvelles forces y' et y'' dont la première est égale à $\frac{y^2}{z}$ et dirigée suivant z, et dont la seconde est égale à $\frac{xy}{z}$, et perpendiculaire à z; on aura ainsi, au lieu des deux forces x et y, les quatre suivantes :

$$\frac{x^2}{z},\ \frac{y^2}{z},\ \frac{xy}{z},\ \frac{xy}{z};$$

les deux dernières agissant en sens contraire, se détruisent; les deux premières agissant dans le même sens, s'ajoutent et forment la résultante z; on aura donc

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

d'où il suit que la résultante des deux forces x et y est représentée pour la quantité, par la diagonale du rectangle dont les côtés représentent ces forces.

Déterminons présentement l'angle θ. Si l'on fait croître la force x, de la différentielle dx, sans faire varier la force y, cet angle diminuera d'une quantité infiniment petite $d\theta$; or on peut concevoir la force dx, décomposée en deux, l'une dx' dirigée suivant z, et l'autre dx'' perpendiculaire à z; le point M sera donc alors sollicité par les deux forces $z+dx'$ et dx'' perpendiculaires entre elles, et la résultante de ces deux forces, que nous nommerons z', fera avec dx'' l'angle $\frac{\pi}{2}-d\theta$; on aura ainsi, par ce qui précède,

$$dx'' = z'.\varphi\left(\frac{\pi}{2}-d\theta\right);$$

la fonction $\varphi\left(\frac{\pi}{2}-d\theta\right)$ est par conséquent, infiniment petite, et de la forme $-kd\theta$, k étant une constante indépendante de l'angle θ; on a donc

$$\frac{dx''}{z'} = -kd\theta.$$

z' est, à un infiniment petit près, égal à z; de plus, dx'' formant avec dx, l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$, on a

$$dx''=dx.\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{y\,dx}{z};$$

partant

$$d\theta=\frac{-y\,dx}{k.z^2}.$$

Si l'on fait varier la force y, de dy, en supposant x constant; on aura la variation correspondante de l'angle θ, en changeant dans l'équation précédente, x en y, y en x, et θ dans $\frac{\pi}{2}-\theta$; ce qui donne

$$d\theta=\frac{x\,dy}{k.z^2};$$

en faisant donc varier à-la-fois x et y, la variation totale de l'angle θ sera $\frac{x\,dy-y\,dx}{k.z^2}$; et l'on aura

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{z^2}=k\,d\theta.$$

Substituant pour z^2 sa valeur x^2+y^2, et intégrant, on aura

$$\frac{y}{x}=\text{tang.}\,(k\theta+\rho),$$

ρ étant une constante arbitraire. Cette équation combinée avec celle-ci $x^2+y^2=z^2$, donne

$$x=z.\cos.(k\theta+\rho).$$

Il ne s'agit plus que de connoître les deux constantes k et ρ; or si l'on suppose y nul, on a évidemment $z=x$, et $\theta=0$; donc $\cos.\rho=1$, et $x=z.\cos.k\theta$. Si l'on suppose x nul, on a $z=y$ et $\theta=\frac{1}{2}\pi$; $\cos.k\theta$ étant alors égal à zéro, k doit être égal à $2n+1$, n étant un nombre entier, et dans ce cas, x sera nul toutes les fois que θ sera égal à $\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1}$; mais x étant nul, on a évidemment $\theta=\frac{1}{2}\pi$; donc $2n+1=1$, ou $n=0$, et par conséquent

$$x=z.\cos.\theta.$$

De-là il suit que la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent les deux forces x et y, représente non-seulement la quantité, mais encore la direction de leur résultante. Ainsi l'on peut, à une force quelconque, substituer deux autres forces qui forment les côtés d'un rectangle dont elle est la diagonale; et il est facile d'en conclure que l'on peut décomposer une force, en trois autres qui forment les côtés d'un parallélipipède rectangle dont elle est la diagonale.

Soient donc a, b, c les trois coordonnées rectangles de l'extrémité de la droite qui représente une force quelconque, et dont l'origine est celle des coordonnées; cette force sera exprimée par la fonction $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, et en la décomposant parallèlement aux axes des a, des b et des c, les forces partielles seront exprimées respectivement par ces coordonnées.

Soient a', b', c' les coordonnées d'une seconde force; $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$ seront les coordonnées de la résultante des deux forces, et représenteront les forces partielles dans lesquelles on peut la décomposer parallèlement aux trois axes; d'où il est aisé de conclure que cette résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces.

En général, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; &c. étant les coordonnées d'un nombre quelconque de forces; $a+a'+a''+$ &c.; $b+b'+b''+$ &c.; $c+c'+c''+$ &c., seront les coordonnées de la résultante dont le quarré sera la somme des quarrés de ces dernières coordonnées; on aura donc ainsi la grandeur et la position de cette résultante.

2. D'un point quelconque de la direction d'une force S, point que nous prendrons pour l'origine de cette force, menons au point matériel M, une droite que nous nommerons s; soient x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du point M, et a, b, c les coordonnées de l'origine de la force; on aura

$$s=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Si l'on décompose la force S parallèlement aux axes des x, des y et des z; les forces partielles correspondantes seront, par le n°. précédent,

$$S.\frac{(x-a)}{s};\ S.\frac{(y-b)}{s};\ S.\frac{(z-c)}{s};\ \text{ou } S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right);\ S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right);\ S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right);$$

$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right)$ exprimant suivant la notation reçue, les coefficiens des variations δx, δy, δz, dans la variation de l'expression précédente de s.

Si l'on nomme pareillement s', la distance de M, à un point quelconque de la direction d'une autre force S', pris pour l'origine de cette force; $S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right)$ sera cette force décomposée parallèlement à l'axe des x, et ainsi de suite; la somme des forces S, S', S'', &c. décomposées parallèlement à cet axe, sera donc $\Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$; la caractéristique Σ des intégrales finies, exprimant ici la somme des termes $S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, $S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right)$; &c.

Soit V la résultante de toutes les forces S, S', &c., et u la distance du point M, à un point de la direction de cette résultante, pris pour son origine; $V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$ sera l'expression de cette résultante décomposée parallèlement à l'axe des x; on aura donc, par le n°. précédent,

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)=\Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right).$$

On aura pareillement

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)=\Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right);\quad V.\left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)=\Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right);$$

d'où l'on tire, en multipliant respectivement ces trois équations par δx, δy, δz, et en les ajoutant ensemble,

$$V.\delta u=\Sigma.S.\delta s;\quad (a)$$

Cette dernière équation ayant lieu, quelles que soient les variations δx, δy, δz, elle équivaut aux trois précédentes. Si son second membre est la variation exacte d'une fonction φ, on aura $V.\delta u=\delta\varphi$, et par conséquent,

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)=\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x}\right);$$

c'est-à-dire que la somme de toutes les forces S, S', &c. décomposées parallèlement à l'axe des x, est égale à la différence partielle $\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)$. Ce cas a généralement lieu, lorsque ces forces sont respectivement fonctions de la distance de leur origine, au point M. Alors

pour

pour avoir la résultante de toutes ces forces, décomposée parallèlement à une droite quelconque; on prendra l'intégrale $\Sigma.\int.S\delta s$, et en nommant φ cette intégrale, on la considérera comme une fonction de x, et de deux autres droites perpendiculaires entre elles et à x; la différence partielle $\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)$ sera la résultante des forces S, S', &c. décomposée parallèlement à la droite x.

3. Lorsque le point M est en équilibre, en vertu de toutes les forces qui le sollicitent; leur résultante est nulle, et l'équation (a) devient

$$0=\Sigma.S.\delta s; \qquad (b)$$

c'est-à-dire que dans le cas de l'équilibre d'un point sollicité par un nombre quelconque de forces, la somme des produits de chaque force, par l'élément de sa direction est nulle.

Si le point M est forcé d'être sur une surface courbe; il éprouvera de sa part une réaction, que nous désignerons par R. Cette réaction est égale et directement contraire à la pression que le point exerce sur la surface; car en le concevant animé des deux forces R et $-R$, on peut supposer que la force $-R$ est détruite par la réaction de la surface, et qu'ainsi le point M presse la surface avec la force $-R$; or, la force de pression d'un point sur une surface lui est perpendiculaire, autrement elle pourroit se décomposer en deux, l'une perpendiculaire à la surface, et qui seroit détruite par elle, l'autre parallèle à la surface, et en vertu de laquelle le point n'auroit point d'action sur cette surface, ce qui est contre la supposition; en nommant donc r la perpendiculaire menée par le point M à la surface, et terminée à un point quelconque de sa direction, la force R sera dirigée suivant cette perpendiculaire : il faudra donc ajouter $R.\delta r$ au second membre de l'équation (b) qui devient ainsi :

$$0=\Sigma.S\delta s+R.\delta r; \qquad (c)$$

$-R$ étant alors la résultante de toutes les forces S, S', &c. elle est perpendiculaire à la surface.

Si l'on suppose que les variations arbitraires δx, δy, δz, appartiennent à la surface courbe sur laquelle le point est assujetti; on a par la nature de la perpendiculaire à cette surface, $\delta r=0$, ce qui fait disparoître $R.\delta r$ de l'équation précédente: l'équation (b) a donc encore lieu dans ce cas, pourvu que l'on élimine l'une des trois variations δx, δy, δz, au moyen de l'équation à la surface; mais alors l'équation (b), qui dans le cas général, équivaut à trois équations, n'équivaut plus qu'à deux équations distinctes, que l'on obtient en égalant séparément à zéro les coefficiens des deux différentielles restantes. Soit $u=0$ l'équation de la surface, les deux équations $\delta r=0$ et $\delta u=0$ auront lieu en même temps; ce qui exige que δr soit égal à $N.\delta u$, N étant fonction de x, y, z. Pour la déterminer, nommons a, b, c, les coordonnées de l'origine de r; on aura :

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2};$$

d'où l'on tire $\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta r}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta r}{\delta z}\right)^2=1$, et par conséquent

$$N^2.\left\{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2\right\}=1;$$

en faisant donc

$$\lambda=\frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2+\left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2}};$$

le terme $R.\delta r$ de l'équation (c) se changera dans $\lambda.\delta u$, et cette équation deviendra,

$$0=\Sigma.S\delta s+\lambda.\delta u;$$

équation dans laquelle on doit égaler séparément à zéro, les coefficiens des variations δx, δy, δz, ce qui donne trois équations; mais elles n'équivalent qu'à deux équations entre x, y, z, à cause de l'indéterminée λ qu'elles renferment. On peut donc, au lieu d'éliminer de l'équation (b), une des variations δx, δy, δz, au moyen de l'équation différentielle à la surface, lui ajouter cette équation multipliée par une indéterminée λ, et considérer alors les variations δx, δy, δz, comme indépendantes. Cette méthode qui résulte encore de la théorie de l'élimination, réunit à l'avantage de simplifier le calcul, celui de faire connoître la pression $-R$ que le point M exerce contre la surface.

Concevons ce point renfermé dans un canal à simple ou à double courbure; il éprouvera de la part de ce canal, une réaction que nous désignerons par k, et qui sera égale et directement contraire à la pression que le point exerce contre le canal, et dont la direction sera perpendiculaire au côté du canal : or, la courbe formée par ce canal est l'intersection de deux surfaces dont les équations expriment sa nature; on peut donc considérer la force k, comme la résultante des deux réactions R et R' que le point M éprouve de la part de chacune des surfaces; puisque les directions des trois forces R, R' et k étant perpendiculaires au côté de la courbe, elles sont dans un même plan. En nommant ainsi δr, $\delta r'$ les élémens des directions des forces R et R', directions respectivement perpendiculaires à chaque surface; il faudra ajouter à l'équation (b) les deux termes $R.\delta r$ et $R'\delta.r'$, ce qui la change dans celle-ci :

$$0 = \Sigma . S\,\delta s + R.\delta r + R.'\,\delta r'. \quad (d)$$

Si l'on détermine les variations δx, δy, δz, de manière qu'elles appartiennent à la fois aux deux surfaces, et par conséquent à la courbe formée par le canal; δr et $\delta r'$ seront nuls, et l'équation précédente se réduira à l'équation (b) qui, par conséquent, a encore lieu dans le cas où le point M est assujetti à se mouvoir dans un canal; pourvu qu'au moyen des deux équations qui expriment la nature de ce canal, on fasse disparoître deux des variations δx, δy, δz.

Supposons que $u = 0$, et $u' = 0$, soient les équations de deux surfaces dont l'intersection forme le canal. Si l'on fait :

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2}};$$

$$\lambda' = \frac{R'}{\sqrt{\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta z}\right)^2}};$$

l'équation (d) deviendra

$$0 = \Sigma . S . \delta s + \lambda . \delta u + \lambda' . \delta u';$$

équation dans laquelle on égalera séparément à zéro, les coefficiens de chacune des variations δx, δy, δz; on aura ainsi trois équations au moyen desquelles on déterminera les valeurs de λ et de λ', qui donneront les réactions R et R' des deux surfaces ; et en les composant, on aura la réaction k du canal sur le point M, et par conséquent, la pression que ce point exerce contre le canal. Cette réaction décomposée parallèlement à l'axe des x, est égale à $R.\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right)+R'.\left(\frac{\delta r'}{\delta x}\right)$; ou à $\lambda.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)+\lambda'.\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)$; les équations de condition $u=0$, $u'=0$, auxquelles le mouvement du point M est assujetti, expriment donc, au moyen des différences partielles des fonctions qui sont nulles en vertu de ces équations, les résistances que le mobile éprouve, en vertu des conditions de son mouvement.

On voit, par ce qui précède, que l'équation (b) de l'équilibre, a généralement lieu, pourvu que l'on assujettisse les variations δx, δy, δz, aux conditions de l'équilibre. Cette équation peut se traduire dans le principe suivant.

« Si l'on fait varier infiniment peu la position du point M, en » sorte qu'il reste toujours sur la surface ou sur la courbe qu'il » doit suivre, s'il n'est pas entièrement libre; la somme des forces » qui le sollicitent, multipliées chacune par l'espace que le point » parcourt suivant sa direction, est égale à zéro, dans le cas de » l'équilibre ».

Les variations δx, δy, δz étant supposées arbitraires et indépendantes, on peut dans l'équation (a) substituer aux coordonnées x, y, z, trois autres quantités qui en soient fonctions, et égaler les coefficiens des variations de ces quantités à zéro. Nommons ainsi ρ le rayon mené de l'origine des coordonnées, à la projection du point M, sur le plan des x et des y, et ϖ l'angle formé par ρ et par l'axe des x, nous aurons :

$$x=\rho.\cos.\varpi\;;\qquad y=\rho.\sin.\varpi.$$

En considérant donc dans l'équation (a), u, s, s', &c., comme fonctions de ρ, ϖ et z ; et comparant les coefficiens de $\delta\varpi$, on aura

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta\varpi}\right)=\Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta\varpi}\right);\quad (e)$$

$\frac{V}{\rho}.\left(\frac{\delta u}{\delta\varpi}\right)$ est l'expression de la force V décomposée suivant l'élément $\rho.\delta\varpi$. Soit V' cette force décomposée parallèlement au plan des x et des y, et p la perpendiculaire abaissée de l'axe des z sur la direction de V', parallèlement au même plan ; $\frac{pV'}{\rho}$ sera une seconde expression de la force V décomposée suivant l'élément $\rho\delta\varpi$; on aura donc

$$pV' = V.\left(\frac{\delta u}{\delta \varpi}\right).$$

Si l'on conçoit la force V' appliquée à l'extrémité de la perpendiculaire p, elle tendra à la faire tourner autour de l'axe des z; le produit de cette force, par la perpendiculaire, est ce que l'on nomme *moment* de la force V par rapport à l'axe des z; ce moment est donc égal à $V.\left(\frac{\delta u}{\delta \varpi}\right)$; et il résulte de l'équation (e), que le moment de la résultante d'un nombre quelconque des forces, est égal à la somme des momens de ces forces.

CHAPITRE II.

Du mouvement d'un point matériel.

4. UN point en repos ne peut se donner aucun mouvement, puisqu'il ne renferme pas en lui-même de raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Lorsqu'il est sollicité par une force quelconque, et ensuite abandonné à lui-même; il se meut constamment d'une manière uniforme dans la direction de cette force, s'il n'éprouve aucune résistance. Cette tendance de la matière à persévérer dans son état de mouvement ou de repos, est ce que l'on nomme *inertie*. C'est la première loi du mouvement des corps.

La direction du mouvement en ligne droite, suit évidemment de ce qu'il n'y a aucune raison pour que le point s'écarte plutôt à droite qu'à gauche de sa direction primitive; mais l'uniformité de son mouvement n'est pas de la même évidence. La nature de la force motrice étant inconnue, il est impossible de savoir *à priori* si cette force doit se conserver sans cesse. A la vérité, un corps étant incapable de se donner aucun mouvement à lui-même, il paroît également incapable d'altérer celui qu'il a reçu ; en sorte que la loi d'inertie est au moins la plus naturelle et la plus simple que l'on puisse imaginer ; elle est d'ailleurs confirmée par l'expérience : en effet, nous observons sur la terre que les mouvemens se perpétuent plus long-temps, à mesure que les obstacles qui s'y opposent viennent à diminuer; ce qui nous porte à croire que, sans ces obstacles, ils dureroient toujours. Mais l'inertie de la matière est principalement remarquable dans les mouvemens célestes qui, depuis un grand nombre de siècles, n'ont point éprouvé d'altération sensible. Ainsi, nous regarderons l'inertie comme une loi de la nature, et lorsque nous observerons de l'altération dans le mouvement d'un corps, nous supposerons qu'elle est due à l'action d'une cause étrangère.

Dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps; mais les temps employés à décrire un espace déterminé sont plus ou moins longs, suivant la grandeur de la force motrice. Ces différences ont fait naître l'idée de *vîtesse* qui, dans le mouvement uniforme, est le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir : ainsi, s représentant l'espace, t le temps, et v la vîtesse, on a $v = \frac{s}{t}$. Le temps et l'espace étant des quantités hétérogènes, et par conséquent incomparables; on choisit un intervalle de temps déterminé, tel que la seconde, pour unité de temps; on choisit pareillement une unité d'espace, telle que le mètre; et alors l'espace et le temps sont des nombres abstraits, qui expriment combien ils renferment d'unités de leur espèce, et qui peuvent être comparés l'un à l'autre. La vîtesse devient ainsi le rapport de deux nombres abstraits, et son unité est la vîtesse du corps qui parcourt un mètre dans une seconde.

5. La force n'étant connue que par l'espace qu'elle fait décrire dans un temps déterminé, il est naturel de prendre cet espace pour sa mesure; mais cela suppose que plusieurs forces agissantes dans le même sens, feront parcourir un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément, ou, ce qui revient au même, que la force est proportionnelle à la vîtesse. C'est ce que nous ne pouvons pas savoir *à priori*, vu notre ignorance sur la nature de la force motrice : il faut donc encore sur cet objet, recourir à l'expérience; car tout ce qui n'est pas une suite nécessaire du peu de données que nous avons sur la nature des choses, n'est pour nous qu'un résultat de l'observation.

Nommons v, la vîtesse de la terre, commune à tous les corps qui sont à sa surface; soit f, la force dont un de ces corps M, est animé en vertu de cette vîtesse, et supposons que $v = f.\varphi(f)$, soit la relation qui existe entre la vîtesse et la force; $\varphi(f)$ étant une fonction de f, qu'il faut déterminer par l'expérience. Soient a, b, c, les trois forces partielles, dans lesquelles la force f se décompose parallèlement à trois axes perpendiculaires entre eux. Concevons ensuite le mobile M sollicité par une nouvelle force f' qui se décompose en trois autres a', b', c', parallèles aux mêmes axes.

Les forces dont ce mobile sera animé suivant ces axes, seront $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$; et en nommant F la force unique qui en résulte, on aura par ce qui précède :

$$F=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2+(c+c')^2}.$$

Si l'on nomme U, la vîtesse correspondante à F; $\frac{(a+a').U}{F}$ sera cette vîtesse décomposée parallèlement à l'axe des a; ainsi la vîtesse relative du mobile sur la terre, sera parallèlement à cet axe, $\frac{(a+a').U}{F}-\frac{av}{f}$, ou $(a+a').\varphi(F)-a.\varphi(f)$. Les forces les plus considérables que nous puissions imprimer aux corps à la surface de la terre, étant beaucoup plus petites que celles dont ils sont animés en vertu du mouvement de la terre; nous pouvons considérer a', b', c', comme des quantités infiniment petites relativement à f; nous aurons ainsi :

$$F=f+\frac{aa'+bb'+cc'}{f}\;;\;\&\;\varphi(F)=\varphi(f)+\frac{(aa'+bb'+cc')}{f}.\varphi'(f);$$

$\varphi'(f)$ étant la différentielle de $\varphi(f)$ divisée par df. La vîtesse relative de M suivant l'axe des a, deviendra ainsi,

$$a'.\varphi(f)+\frac{a}{f}.\{aa'+bb'+cc'\}.\varphi'(f).$$

Ses vîtesses relatives suivant les axes des b et des c, seront

$$b'.\varphi(f)+\frac{b}{f}.\{aa'+bb'+cc'\}.\varphi'(f);$$

$$c'.\varphi(f)+\frac{c}{f}.\{aa'+bb'+cc'\}.\varphi'(f).$$

La position des axes des a, des b et des c étant arbitraire, nous pouvons prendre la direction de la force imprimée, pour l'axe des a, et alors b' et c' seront nuls; les vîtesses relatives précédentes se changent dans celles-ci :

$$a'.\left\{\varphi(f)+\frac{a^2}{f}.\varphi'(f)\right\}\;;\quad\frac{ab}{f}.a'.\varphi'(f)\;;\quad\frac{ac}{f}.a'.\varphi'(f).$$

Si $\varphi'(f)$ n'est pas nul; le mobile, en vertu de la force imprimée a' aura une vîtesse relative, perpendiculaire à la direction de cette force, pourvu que b et c ne soient pas nuls; c'est-à-dire, pourvu que la direction de cette force ne coïncide pas avec celle

du

du mouvement de la terre. Ainsi, en concevant qu'un globe en repos sur un plan horizontal très-uni, vienne à être frappé par la base d'un cylindre droit, mû suivant la direction de son axe supposé horizontal; le mouvement relatif apparent du globe ne seroit point parallèle à cet axe, dans toutes les positions de l'axe par rapport à l'horizon : voilà donc un moyen simple de reconnoître par l'expérience si $\varphi'(f)$ a une valeur sensible sur la terre; mais les expériences les plus précises ne font appercevoir dans le mouvement apparent du globe, aucune déviation de la direction de la force imprimée; d'où il suit que sur la terre, $\varphi'(f)$ est nul à très-peu-près. Sa valeur, pour peu qu'elle fût sensible, se manifesteroit principalement dans la durée des oscillations du pendule, durée qui seroit différente, suivant la position du plan de son mouvement, par rapport à la direction du mouvement de la terre. Les observations les plus exactes ne laissant appercevoir aucune différence semblable, nous devons en conclure que $\varphi'(f)$ est insensible, et peut être supposé nul sur la terre.

Si l'équation $\varphi'(f)=0$, avoit lieu, quelle que soit la force f, $\varphi(f)$ seroit constant, et la vîtesse seroit proportionnelle à la force; elle lui seroit encore proportionnelle, si la fonction $\varphi(f)$ n'étoit composée que d'un seul terme, puisqu'autrement $\varphi'(f)$ ne seroit jamais nul, f ne l'étant pas; il faudroit donc, si la vîtesse n'étoit pas proportionnelle à la force, supposer que, dans la nature, la fonction de la vîtesse, qui exprime la force, est formée de plusieurs termes, ce qui est peu probable; il faudroit supposer de plus, que la vîtesse de la terre est exactement celle qui convient à l'équation $\varphi'(f)=0$, ce qui est contre toute vraisemblance. D'ailleurs, la vîtesse de la terre varie dans les diverses saisons de l'année : elle est d'un trentième environ plus grande en hiver qu'en été. Cette variation est plus considérable encore, si, comme tout paroît l'indiquer, le système solaire est en mouvement dans l'espace; car selon que ce mouvement progressif conspire avec celui de la terre, ou selon qu'il lui est contraire; il doit en résulter, pendant le cours de l'année, de grandes variations dans le mouvement absolu de la terre, ce qui devroit altérer l'équation dont il s'agit, et le rapport de la force imprimée à la vîtesse absolue qui en résulte, si cette équation et ce rapport n'étoient pas indépendans du mouvement de la terre : cependant, l'observation n'y fait appercevoir aucune altération sensible.

Voilà donc deux loix du mouvement; savoir, la loi d'inertie, et celle de la force proportionnelle à la vîtesse, qui sont données par l'observation. Elles sont les plus naturelles et les plus simples que l'on puisse imaginer, et sans doute, elles dérivent de la nature même de la matière; mais cette nature étant inconnue, elles ne sont pour nous que des faits observés, les seuls, au reste, que la mécanique emprunte de l'expérience.

6. La vîtesse étant proportionnelle à la force, ces deux quantités peuvent être représentées l'une par l'autre, et tout ce que nous avons établi précédemment sur la composition des forces, s'applique à la composition des vîtesses. Il en résulte que les mouvemens relatifs d'un système de corps animés de forces quelconques, sont les mêmes, quel que soit leur mouvement commun; car ce dernier mouvement décomposé en trois autres parallèles à trois axes fixes, ne fait qu'accroître d'une même quantité, les vîtesses partielles de chaque corps, parallèlement à ces axes; et comme leur vîtesse relative ne dépend que de la différence de ces vîtesses partielles, elle est la même, quel que soit le mouvement commun à tous les corps : il est donc impossible alors de juger du mouvement absolu d'un systême dont on fait partie, par les apparences que l'on y observe, et c'est ce qui caractérise la loi de la proportionnalité de la force à la vîtesse.

Il résulte encore du n°. 3, que si l'on projette chaque force et leur résultante, sur un plan fixe; la somme des momens des forces composantes, ainsi projetées par rapport à un point fixe pris sur le plan, est égale au moment de la projection de la résultante : or, si de ce point, on mène au mobile, un rayon que nous nommerons *rayon vecteur;* ce rayon projeté sur le plan fixe, y traceroit, en vertu de chaque force agissante séparément, une aire égale au produit de la projection de la ligne qu'elle feroit décrire, par la moitié de la perpendiculaire abaissée du point fixe, sur cette projection : cette aire est donc proportionnelle au temps. Elle est encore, dans un temps donné, proportionnelle au moment de la projection de la force; ainsi, la somme des aires que traceroit la projection du rayon vecteur, en vertu de chaque force composante, si elle agissoit seule, est égale à l'aire que la résultante fait décrire à cette projection. Il suit de-là que si un mobile projeté d'abord en ligne droite, est ensuite sollicité par des forces quelconques, dirigées vers le point fixe; son rayon vecteur décrira toujours autour de ce point, des aires proportionnelles aux temps; puisque les aires que feroient décrire à ce rayon, les nouvelles composantes, seroient nulles. Réciproquement, on voit que si le mobile décrit autour du point fixe, des aires proportionnelles aux temps; la résultante des nouvelles forces qui le sollicitent, est constamment dirigée vers ce point.

7. Considérons maintenant, le mouvement d'un point sollicité par des forces qui semblent agir d'une manière continue, telles que la pesanteur. Les causes de cette force et des forces semblables qui ont lieu dans la nature, étant inconnues, il est impossible de savoir si elles agissent sans interruption, ou si leurs actions successives sont séparées par des intervalles de temps, dont la durée est insensible; mais il est facile de s'assurer que les phénomènes doivent être à très-peu-près les mêmes dans ces deux hypothèses; car si l'on représente la vîtesse d'un corps sollicité par une force sans cesse agissante, par l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse représente le temps; cette courbe, dans la seconde hypothèse, se changera dans un polygone d'un très-grand nombre de côtés, et qui, par cette raison, pourra se confondre avec la courbe. Nous adopterons la première hypothèse avec les géomètres, et nous supposerons que l'intervalle de temps qui sépare deux actions consécutives d'une force quelconque, est égal à l'élément dt du temps que nous désignerons par t. Il est clair qu'il faut alors supposer l'action de la force, d'autant plus considérable, que l'intervalle qui sépare ses actions successives, est supposé plus grand; afin qu'après le même temps t, la vîtesse soit la même : l'action instantanée d'une force doit donc être supposée en raison de son intensité et de l'élément du temps pendant lequel elle est supposée agir. Ainsi, en représentant par P cette intensité, on doit supposer au commencement

de chaque instant dt, le mobile sollicité par une force $P.dt$, et mû uniformément pendant cet instant. Cela posé :

On peut réduire toutes les forces qui sollicitent un point M, à trois forces P, Q, R, agissantes parallèlement à trois coordonnées rectangles x, y, z, qui déterminent la position de ce point; nous supposerons ces forces agir en sens contraire de l'origine de ces coordonnées, ou tendre à les accroître. Au commencement d'un nouvel instant dt, le mobile reçoit dans le sens de chacune de ces coordonnées, les accroissemens de force ou de vîtesse, $P.dt$, $Q.dt$, $R.dt$. Les vîtesses du point M, parallèles à ces coordonnées sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; car dans un instant infiniment petit, elles peuvent être censées uniformes, et par conséquent égales aux espaces élémentaires divisés par l'élément du temps. Les vîtesses dont le mobile est animé au commencement d'un nouvel instant, sont par conséquent :

$$\frac{dx}{dt}+P.dt\,; \quad \frac{dy}{dt}+Q.dt\,; \quad \frac{dz}{dt}+R.dt\,;$$

ou

$$\frac{dx}{dt}+d.\frac{dx}{dt}-d.\frac{dx}{dt}+P.dt\,;$$
$$\frac{dy}{dt}+d.\frac{dy}{dt}-d.\frac{dy}{dt}+Q.dt\,;$$
$$\frac{dz}{dt}+d.\frac{dz}{dt}-d.\frac{dz}{dt}+R.dt\,;$$

mais dans ce nouvel instant, les vîtesses dont le mobile est animé parallèlement aux coordonnées x, y, z, sont évidemment $\frac{dx}{dt}+d.\frac{dx}{dt}$; $\frac{dy}{dt}+d.\frac{dy}{dt}$; $\frac{dz}{dt}+d.\frac{dz}{dt}$; les forces $-d.\frac{dx}{dt}+P.dt$, $-d.\frac{dy}{dt}+Q.dt$, et $-d.\frac{dz}{dt}+R.dt$, doivent donc être détruites, en sorte que le mobile M, en vertu de ces forces seules, seroit en équilibre. Ainsi en désignant par δx, δy, δz, les variations quelconques des trois coordonnées x, y, z, variations qu'il ne faut pas confondre avec les différences dx, dy, dz, qui expriment les espaces que le mobile décrit parallèlement aux coordonnées durant l'instant dt; l'équation (b) du n°. 3 deviendra

$$o = \delta x . \left\{ d . \frac{dx}{dt} - P . dt \right\} + \delta y . \left\{ d . \frac{dy}{dt} - Q . dt \right\} + \delta z . \left\{ d . \frac{dz}{dt} - R . dt \right\}; \quad (f)$$

Si le point M est libre, on égalera séparément à zéro, les coefficiens de δx, δy et δz, et l'on aura, en supposant l'élément dt du temps, constant, les trois équations différentielles,

$$\frac{ddx}{dt^2} = P \; ; \quad \frac{ddy}{dt^2} = Q \; ; \quad \frac{ddz}{dt^2} = R.$$

Si le point M n'est pas libre, en sorte qu'il soit assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une ligne courbe; on éliminera de l'équation (f), au moyen des équations à la surface ou à la courbe, autant de variations δx, δy, δz, qu'il y aura d'équations, et l'on égalera séparément à zéro, les coefficiens des variations restantes.

8. On peut supposer dans l'équation (f) les variations δx, δy, δz égales aux différentielles dx, dy, dz, puisque ces différentielles sont nécessairement assujetties aux conditions du mouvement du mobile M. En faisant cette supposition, et en intégrant ensuite l'équation (f), on aura :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2 . \int (P . dx + Q . dy + R . dz) \; ;$$

c étant une constante arbitraire. $\dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ est le quarré de la vîtesse de M, vîtesse que nous désignerons par v; en supposant donc que $Pdx + Qdy + Rdz$ soit la différence exacte d'une fonction φ, on aura

$$v^2 = c + 2\varphi. \qquad (g)$$

Ce cas a lieu lorsque les forces qui sollicitent le point M, sont fonctions des distances de leurs origines à ce point, ce qui comprend à peu-près toutes les forces de la nature. En effet, S, S', etc. représentant ces forces, et s, s', etc. étant les distances du point M à leurs origines; la résultante de toutes ces forces, multipliée par la variation de sa direction, sera par le n°. 2, égale à $\Sigma . S . \delta s$; elle est encore égale à $P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z$; on a donc :

$$P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z = \Sigma . S . \delta s \; ;$$

ainsi, le second membre de cette équation étant une différence exacte, le premier membre l'est pareillement.

Il résulte de l'équation (g), 1°. que si le point M n'est sollicité par aucunes forces, sa vîtesse est constante, puisqu'alors, $\varphi = 0$; C'est ce dont il est facile de s'assurer d'ailleurs, en observant qu'un corps mû dans une surface ou sur une ligne courbe, ne perd à la rencontre de chaque plan infiniment petit de la surface, ou de chaque côté infiniment petit de la courbe, qu'une partie infiniment petite du second ordre de sa vîtesse. 2°. Que le point M, en partant d'un point donné avec une vîtesse donnée, pour arriver à un autre point, aura, en parvenant à ce dernier point, la même vîtesse, quelle que soit la courbe qu'il aura décrite.

Mais si le mobile n'est point assujetti à se mouvoir sur une courbe déterminée; la courbe qu'il décrit, jouit d'une propriété singulière, à laquelle on a été conduit par des considérations métaphysiques, et qui n'est au fond qu'un résultat remarquable des équations différentielles précédentes. Elle consiste en ce que l'intégrale $\int v\, ds$, comprise entre les deux points extrêmes de la courbe décrite, y est moindre que sur toute autre courbe, si le corps est libre, ou sur toute autre courbe assujettie à la même surface sur laquelle il doit se mouvoir, s'il n'est pas entièrement libre.

Pour le faire voir, nous observerons que $P dx + Q dy + R dz$ étant supposé une différentielle exacte, l'équation (g) donne :

$$v\, \delta v = P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z\ ;$$

l'équation (f) du n°. précédent devient ainsi :

$$0 = \delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt} - v\, dt . \delta v.$$

Nommons ds l'élément de la courbe décrite par le mobile ; nous aurons

$$v\, dt = ds\ ; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ ;$$

partant

$$0 = \delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt} - ds . \delta v\ ; \qquad (h)$$

en différentiant par rapport à δ, l'expression de ds, on a

$$\frac{ds}{dt} . \delta . ds = \frac{dx}{dt} . \delta . dx + \frac{dy}{dt} . \delta . dy + \frac{dz}{dt} . \delta . dz.$$

Les caractéristiques d et δ étant indépendantes, on peut les placer à volonté l'une avant l'autre; l'équation précédente peut ainsi prendre cette forme:

$$v.\delta ds = \frac{d.\{dx.\delta x + dy.\delta y + dz.\delta z\}}{dt} - \delta x.d.\frac{dx}{dt} - \delta y.d.\frac{dy}{dt} - \delta z.d.\frac{dz}{dt};$$

en retranchant du premier membre de cette équation, le second membre de l'équation (h); on aura

$$\delta.(v ds) = \frac{d.(dx.\delta x + dy.\delta y + dz.\delta z)}{dt}.$$

Cette dernière équation intégrée par rapport à la caractéristique d, donne

$$\delta.\int v\, ds = \text{constante} + \frac{dx.\delta x + dy.\delta y + dz.\delta z}{dt}.$$

Si l'on étend l'intégrale, à la courbe entière décrite par le mobile, et si l'on suppose les points extrêmes de cette courbe, invariables, on aura $\delta.\int v\, ds = 0$; c'est-à-dire, que de toutes les courbes suivant lesquelles le mobile assujetti aux forces P, Q, R peut parvenir d'un point donné à un autre point donné, il décrira celle dans laquelle la variation de l'intégrale $\int v\, ds$ est nulle, et dans laquelle, par conséquent, cette intégrale est un *minimum*.

Si le point se meut dans une surface courbe, sans être sollicité par aucune force; sa vîtesse est alors constante, et l'intégrale $\int v\, ds$ devient $v\int ds$; ainsi, la courbe décrite par le mobile est, dans ce cas, la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface, du point de départ au point d'arrivée.

9. Déterminons la pression qu'un point mû dans une surface, exerce contre elle. Au lieu d'éliminer de l'équation (f) du n°. 7 une des variations δx, δy, δz, au moyen de l'équation à la surface, on peut par le n°. 3 ajouter à cette équation, l'équation différentielle de la surface, multipliée par une indéterminée $-\lambda\, dt$, et considérer ensuite les trois variations δx, δy, δz, comme indépendantes. Soit donc $u = 0$, l'équation de la surface; on ajoutera à l'équation (f) le terme $-\lambda.\delta u.dt$, et la pression que le point exerce contre la surface, sera par le n°. 3 égale à

$$\lambda.\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}.$$

Supposons d'abord que le point ne soit sollicité par aucune force, sa vîtesse v sera constante : si l'on observe ensuite que $v\,dt = ds$; l'élément dt du temps étant supposé constant, l'élément ds de la courbe décrite, le sera pareillement, et l'équation (f), augmentée du terme $-\lambda.\delta u.dt$, donnera les trois suivantes ;

$$0 = v^2.\frac{ddx}{ds^2} - \lambda.\left(\frac{du}{dx}\right); \quad 0 = v^2.\frac{ddy}{ds^2} - \lambda.\left(\frac{du}{dy}\right); \quad 0 = v^2.\frac{ddz}{ds^2} - \lambda.\left(\frac{du}{dz}\right);$$

d'où l'on tire

$$\lambda.\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{v^2.\sqrt{(ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2}}{ds^2};$$

mais ds étant constant, le rayon osculateur de la courbe décrite par le mobile, est égal à

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2}};$$

en nommant donc r ce rayon, on aura

$$\lambda.\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{v^2}{r};$$

c'est-à-dire que la pression exercée par le point contre la surface, est égale au quarré de sa vîtesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe qu'il décrit.

Si le point se meut dans une surface sphérique, il décrira la circonférence du grand cercle de la sphère, qui passe par la direction primitive de son mouvement ; puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte plutôt à droite qu'à gauche du plan de ce cercle : sa pression contre la surface, ou, ce qui revient au même, contre la circonférence qu'il décrit, est donc égale au quarré de sa vîtesse, divisé par le rayon de cette circonférence.

Concevons le point attaché à l'extrémité d'un fil supposé sans masse, et dont l'autre extrémité soit fixe au centre de la surface ; il est visible que la pression exercée par ce point contre la circonférence, est égale à la tension qu'éprouveroit le fil, si le point n'étoit retenu que par lui. L'effort que ce point feroit pour tendre le fil et pour s'éloigner du centre de la circonférence, est ce que l'on nomme *force centrifuge;* ainsi, la force centrifuge est égale au quarré de la vîtesse, divisé par le rayon.

Dans

Dans le mouvement d'un point, sur une courbe quelconque, la force centrifuge est égale au quarré de la vîtesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe; puisque l'arc infiniment petit de cette courbe se confond avec la circonférence du cercle osculateur; on aura donc la pression que le point exerce contre la courbe qu'il décrit, en ajoutant au quarré de sa vîtesse, divisé par le rayon osculateur, la pression due aux forces qui sollicitent ce point.

Dans le mouvement d'un point sur une surface, la pression due à la force centrifuge, est égale au carré de la vîtesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe décrite par ce point, et multiplie par le sinus de l'inclinaison du plan du cercle osculateur, sur le plan tangent à la surface: en ajoutant à cette pression, celle qui est due à l'action des forces qui sollicitent le point; on aura la pression totale qu'il exerce contre la surface.

Nous venons de voir que si le point n'est animé d'aucunes forces, sa pression contre la surface, est égale au quarré de sa vîtesse, divisé par le rayon osculateur de la courbe décrite; le plan du cercle osculateur, c'est-à-dire le plan qui passe par deux côtés consécutifs de la courbe décrite par le point, est donc alors perpendiculaire à la surface. Cette courbe, relativement à la surface de la terre, est celle que l'on a nommée *perpendiculaire à la méridienne*, et nous avons prouvé (n°. 8) qu'elle est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre sur la surface.

10. De toutes les forces que nous observons sur la terre, la plus remarquable est la pesanteur; elle pénètre les parties les plus intimes des corps, et sans la résistance de l'air, elle les feroit tomber avec une égale vîtesse. La pesanteur est à fort peu-près la même sur les plus grandes hauteurs où nous puissions nous élever, et dans les plus grandes profondeurs où nous puissions descendre: sa direction est perpendiculaire à l'horizon; mais dans les mouvemens des projectiles, on peut supposer sans erreur sensible, qu'elle est constante, et qu'elle agit suivant des droites parallèles, vu le peu d'étendue des courbes qu'ils décrivent, relativement à la circonference de la terre. Ces corps étant mûs dans un fluide résistant, nous nommerons ε, la résistance qu'ils en éprouvent, et qui est dirigée suivant le côté

de la courbe qu'ils décrivent, côté que nous désignerons par ds; nous nommerons, de plus, g la pesanteur. Cela posé :

Reprenons l'équation (f) du n°. 7, et supposons que le plan des x et des y soit horizontal, et que l'origine des z soit au point le plus élevé; la force ε produira suivant les coordonnées x, y, z, les trois forces $-\varepsilon.\frac{dx}{ds}$, $-\varepsilon.\frac{dy}{ds}$, $-\varepsilon.\frac{dz}{ds}$; on aura donc par le n°. 7.

$$P=-\varepsilon.\frac{dx}{ds}; \quad Q=-\varepsilon.\frac{dy}{ds}; \quad R=-\varepsilon.\frac{dz}{ds}+g;$$

et l'équation (f) devient

$$0=\delta x.\left\{d.\frac{dx}{dt}+\varepsilon.\frac{dx}{ds}.dt\right\}+\delta y.\left\{d.\frac{dy}{dt}+\varepsilon.\frac{dy}{ds}.dt\right\}+\delta z.\left\{d.\frac{dz}{dt}+\varepsilon.\frac{dz}{ds}.dt-gdt\right\}.$$

Si le corps est entièrement libre, on aura les trois équations

$$0=d.\frac{dx}{dt}+\varepsilon.\frac{dx}{ds}.dt; \quad 0=d.\frac{dy}{dt}+\varepsilon.\frac{dy}{ds}.dt; \quad 0=d.\frac{dz}{dt}+\varepsilon.\frac{dz}{ds}.dt-gdt.$$

Les deux premiers donnent

$$\frac{dy}{dt}.d.\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}.d.\frac{dy}{dt}=0;$$

d'où l'on tire en intégrant, $dx=fdy$, f étant une constante arbitraire. Cette équation est celle d'une droite horizontale; ainsi, le corps se meut dans un plan vertical. En prenant ce plan pour celui des x et des z, on aura $y=0$; les deux équations

$$0=d.\frac{dx}{dt}+\varepsilon.\frac{dx}{ds}.dt; \quad 0=d.\frac{dz}{dt}+\varepsilon.\frac{dz}{ds}.dt-gdt;$$

donneront, en faisant dx constant,

$$\varepsilon=\frac{ds.ddt}{dt^3}; \quad 0=\frac{ddz}{dt}-\frac{dz.ddt}{dt^2}+\varepsilon.\frac{dz}{ds}.dt-gdt.$$

D'où l'on tire $gdt^2=ddz$; et en différentiant $2gdt.ddt=d^3z$; en substituant pour ddt, sa valeur $\frac{\varepsilon dt^3}{ds}$, et pour dt^2 sa valeur $\frac{ddz}{g}$, on aura

$$\varepsilon=\frac{ds.d^3z}{2.(ddz)^2}.$$

Cette équation donne la loi de la résistance ε, nécessaire pour faire décrire au projectile, une courbe déterminée.

Si la résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse, ε est égal à $h.\frac{ds^2}{dt^2}$, h étant constant dans le cas où la densité du milieu est uniforme. On a alors

$$\frac{\varepsilon}{g}=\frac{h\,.\,ds^2}{g\,dt^2}=\frac{h\,.\,ds^2}{ddz};$$

partant $h.ds=\frac{d^3z}{2\,ddz}$, ce qui donne en intégrant,

$$\frac{ddz}{dx^2}=2a.c^{2hs},$$

a étant une constante arbitraire, et c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Si l'on suppose nulle, la résistance du milieu, ou $h=0$; on aura en intégrant, l'équation à la parabole,

$$z=ax^2+bx+e;$$

b, e étant des constantes arbitraires.

L'équation différentielle $ddz=gdt^2$, donnera $dt^2=\frac{2a}{g}.\,dx^2$; d'où l'on tire $t=x.\sqrt{\frac{2a}{g}}+f'$. Supposons que x, z et t, commencent ensemble, on aura $e=0$, $f'=0$, et par conséquent,

$$t=x.\sqrt{\frac{2a}{g}}; \qquad z=ax^2+bx;$$

ce qui donne

$$z=\frac{gt^2}{2}+bt.\sqrt{\frac{g}{2a}}.$$

Ces trois équations renferment toute la théorie des projectiles dans le vide; il en résulte que la vîtesse est uniforme dans le sens horizontal, et que dans le sens vertical, elle est la même que si le corps tomboit suivant la verticale.

Si le mobile part de l'état du repos, b sera nul, et l'on aura

$$\frac{dz}{dt}=gt; \qquad z=\tfrac{1}{2}gt^2;$$

la vîtesse acquise croît donc comme le temps, et l'espace croît comme le quarré du temps.

Il est facile, au moyen de ces formules, de comparer la force centrifuge à la pesanteur. On a vu précédemment que v étant la vîtesse d'un corps mû dans une circonférence dont le rayon est r, la force centrifuge est $\frac{v^2}{r}$. Soit h la hauteur dont il devroit tomber pour acquérir la vîtesse v; on aura, par ce qui précède, $v^2 = 2gh$; d'où l'on tire $\frac{v^2}{r} = g \cdot \frac{2h}{r}$. Si $h = \frac{1}{2}r$, la force centrifuge devient égale à la pesanteur g; ainsi un corps pesant attaché à l'extrémité d'un fil fixe par son autre extrémité, sur un plan horizontal, tendra ce fil avec la même force, que s'il étoit suspendu verticalement, pourvu qu'il se meuve sur ce plan, avec la vîtesse qu'il acquerroit en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du fil.

11. Considérons le mouvement d'un corps pesant, dans une surface sphérique. En nommant r son rayon, et fixant à son centre, l'origine des coordonnées x, y, z; on aura $r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$; cette équation comparée à celle-ci $u = 0$, donne $u = r^2 - x^2 - y^2 - z^2$; en ajoutant donc à l'équation (f) du n°. 7, la fonction δu, multipliée par l'indéterminée $-\lambda dt$, on aura

$$0 = \delta x . \left\{ d . \frac{dx}{dt} + 2\lambda x . dt \right\} + \delta y . \left\{ d . \frac{dy}{dt} + 2\lambda y . dt \right\} + \delta z . \left\{ d . \frac{dz}{dt} + 2\lambda z . dt - gdt \right\};$$

équation dans laquelle on pourra égaler séparément à zéro, les coefficiens de chacune des variations δx, δy, δz, ce qui donne les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= d . \frac{dx}{dt} + 2\lambda x . dt; \\ 0 &= d . \frac{dy}{dt} + 2\lambda y . dt; \\ 0 &= d . \frac{dz}{dt} + 2\lambda z . dt - gdt \end{aligned}\right\} . \quad (A)$$

L'indéterminée λ fait connoître la pression que le mobile exerce contre la surface. Cette pression est, par le n°. 9, égale à $\lambda . \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$; elle est par conséquent égale à $2 . \lambda r$; or on a par le n°. 8,

$$c + 2gz = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

c étant une constante arbitraire : en ajoutant cette équation, aux équations (A) divisées par dt, et multipliées respectivement par x, y, z; en observant ensuite que l'équation différentielle de la surface, étant $0 = xdx + ydy + zdz$, on a

$$0 = xddx + yddy + zddz + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

on trouvera

$$2.\lambda r = \frac{c + 3gz}{r}.$$

Si l'on multiplie la première des équations (A) par $-y$, et qu'on l'ajoute à la seconde multipliée par x; on aura, en intégrant leur somme,

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c',$$

c' étant une nouvelle arbitraire.

Le mouvement du point est ainsi ramené aux trois équations différentielles du premier ordre,

$$xdx + ydy = -zdz;$$
$$xdy - ydx = c'dt;$$
$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz.$$

En élevant chaque membre des deux premières, au quarré, et en les ajoutant, on aura

$$(x^2 + y^2).(dx^2 + dy^2) = c'^2 dt^2 + z^2 dz^2;$$

si l'on substitue, au lieu de $x^2 + y^2$, sa valeur $r^2 - z^2$, et au lieu de $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, sa valeur $c + 2gz - \frac{dz^2}{dt^2}$; on aura, en supposant que le corps s'éloigne de la verticale,

$$dt = \frac{-rdz}{\sqrt{(r^2 - z^2).(c + 2gz) - c'^2}}.$$

La fonction sous le radical, peut être mise sous la forme $(a - z).(z - b).(2gz + f)$; a, b, f, étant déterminés par les équations

$$f = \frac{2g.(r^2 + ab)}{a + b};$$
$$c = \frac{2g.(r^2 - a^2 - ab - b^2)}{a + b};$$
$$c'^2 = \frac{2g.(r^2 - a^2).(r^2 - b^2)}{a + b}.$$

On peut ainsi substituer aux arbitraires c et c', les nouvelles arbitraires a et b, dont la première est la plus grande valeur de z, et dont la seconde est la plus petite valeur. En faisant ensuite,

$$\sin.\theta = \sqrt{\frac{a - z}{a - b}},$$

l'équation différentielle précédente deviendra

$$dt = \frac{r.\sqrt{2.(a+b)}}{\sqrt{g.\{(a+b)^2+r^2-b^2\}}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1-\gamma^2.\sin.^2\theta}};$$

γ^2 étant égal à $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2+r^2-b^2}$.

L'angle θ donne la coordonnée z, au moyen de l'équation,

$$z = a.\cos.^2\theta + b.\sin.^2\theta,$$

et la coordonnée z divisée par r, exprime le cosinus de l'angle que le rayon r fait avec la verticale.

Soit ϖ l'angle que le plan vertical qui passe par le rayon r, fait avec le plan vertical qui passe par l'axe des x; on aura

$$x = \sqrt{r^2-z^2}.\cos.\varpi; \quad y = \sqrt{r^2-z^2}.\sin.\varpi;$$

ce qui donne

$$x\,dy - y\,dx = (r^2-z^2).d\varpi;$$

l'équation $x\,dy - y\,dx = c'dt$, donnera ainsi :

$$d\varpi = \frac{c'dt}{r^2-z^2},$$

en substituant pour z et dt, leurs valeurs précédentes en θ, on aura l'angle ϖ en fonction de θ; ainsi l'on connoîtra, pour un temps quelconque, les deux angles θ et ϖ, ce qui suffit pour déterminer la position du mobile.

Nommons *demi-oscillation* du mobile, le temps qu'il emploie à parvenir de la plus grande, à la plus petite valeur de z; soit $\frac{1}{2}T$, ce temps. Pour le déterminer, il faut intégrer la valeur précédente de dt, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on trouvera ainsi :

$$T = \pi.\sqrt{\frac{r}{g}}.\sqrt{\frac{2r.(a+b)}{(a+b)^2+r^2-b^2}}.\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\gamma^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\gamma^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\gamma^6+\&c.\right\}.$$

Concevons le point suspendu à l'extrémité d'un fil sans masse, et fixe par son autre extrémité; si la longueur du fil est r, le mobile sera mû exactement comme dans l'intérieur d'une surface sphérique; il formera avec le fil, un pendule dont le cosinus du plus grand écart de la verticale sera $\frac{b}{r}$. Si l'on suppose que dans cet état, la vîtesse du mobile soit nulle; il oscillera dans un plan vertical et l'on aura dans ce cas, $a=r$; $y^2=\frac{r-b}{2r}$. La fraction $\frac{r-b}{2r}$ est le quarré du sinus de la moitié du plus grand angle que le fil forme avec la verticale; la durée entière T de l'oscillation du pendule sera donc

$$T=\pi.\sqrt{\frac{r}{g}}.\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{r-b}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{r-b}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\left(\frac{r-b}{2r}\right)^3+\text{\&c.}\right\}.$$

Si l'oscillation est très-petite, $\frac{r-b}{2r}$ est une très-petite fraction que l'on peut négliger, et alors on a

$$T=\pi.\sqrt{\frac{r}{g}};$$

les oscillations fort petites sont donc isochrones, ou de même durée, quelle que soit leur étendue; et l'on peut facilement, au moyen de cette durée et de la longueur correspondante du pendule, déterminer les variations de l'intensité de la pesanteur, dans les divers lieux de la terre.

Soit z la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps, pendant le temps T; on aura, par le n°. 10, $2z=gT^2$, et par conséquent, $z=\frac{1}{2}\pi^2.r$; on aura donc ainsi, avec une grande précision, au moyen de la longueur du pendule à secondes, l'espace que la pesanteur fait parcourir aux corps, dans la première seconde de leur chute. Des expériences très-exactes ayant fait voir que la longueur du pendule à secondes est la même, quelles que soient les substances que l'on fait osciller; il en résulte que la pesanteur agit également sur tous les corps, et qu'elle tend, dans le même lieu, à leur imprimer dans le même temps, la même vîtesse.

12. L'isochronisme des oscillations du pendule, n'étant qu'approché; il est intéressant de connoître la courbe sur laquelle un corps pesant doit se mouvoir, pour arriver dans le même temps, au point où son mouvement cesse, quel que soit l'arc qu'il aura décrit depuis le point le plus bas. Mais pour embrasser ce problême dans toute sa généralité, nous supposerons, conformément à ce qui a lieu dans la nature, que le mobile se meut dans un milieu résistant. Soit s l'arc décrit depuis le point le plus bas de la courbe; z l'abscisse verticale comptée de ce point; dt l'élément du temps,

et g la pesanteur. La force retardatrice le long de l'arc de la courbe sera 1°. la pesanteur décomposée suivant l'arc ds, et qui devient ainsi égale à $g.\frac{dz}{ds}$; 2°. la résistance du milieu, que nous exprimerons par $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ étant la vîtesse du mobile, et $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ étant une fonction quelconque de cette vîtesse. La différentielle de cette vîtesse sera, par le n°. 7, égale à $-g.\frac{dz}{ds}-\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)$; on aura donc, en faisant dt constant,

$$0=\frac{dds}{dt^2}+g.\frac{dz}{ds}+\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right). \qquad (i)$$

Supposons $\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right)=m.\frac{ds}{dt}+n.\frac{ds^2}{dt^2}$, et $s=\psi(s')$; en désignant par $\psi'(s')$ la différence de $\psi(s')$, divisée par ds'; et par $\psi''(s')$ celle de $\psi'(s')$, divisée par ds'; on aura

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds'}{dt}.\psi'(s')$$
$$\frac{dds}{dt^2}=\frac{dds'}{dt^2}.\psi'(s')+\frac{ds'^2}{dt^2}.\psi''(s');$$

et l'équation (i) deviendra

$$0=\frac{dds'}{dt^2}+m.\frac{ds'}{dt}+\frac{ds'^2}{dt^2}.\left\{\frac{\psi''(s')+n.\{\psi'(s')\}^2}{\psi'(s')}\right\}+\frac{g.dz}{ds'\{\psi'(s')\}^2}; \qquad (l)$$

on fera disparoître le terme multiplié par $\frac{ds'^2}{dt^2}$, au moyen de l'équation

$$0=\psi''(s')+n.[\psi'(s')]^2;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\psi(s')=\log.\left\{h.(s'+q)^{\frac{1}{n}}\right\}=s,$$

h et q étant des arbitraires. Si l'on fait commencer s' avec s, on aura $hq^{\frac{1}{n}}=1$, et si l'on fait pour plus de simplicité, $h=1$, on aura

$$s'=c^{ns}-1;$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité : l'équation différentielle (l) devient alors

$$0=\frac{dds'}{dt^2}+m.\frac{ds'}{dt}+n^2g.\frac{dz}{ds'}.(1+s')^2.$$

En

En supposant s' très-petit, nous pourrons développer le dernier terme de cette équation, dans une suite ascendante par rapport aux puissances de s', et qui sera de cette forme, $ks' + ls'^i +$ &c., i étant plus grand que l'unité; ce qui donne

$$o = \frac{dds'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt} + ks' + ls'^i + \text{\&c.}$$

Cette équation multipliée par $c^{\frac{mt}{2}}.\{\cos.\gamma t + \sqrt{-1}.\sin.\gamma t\}$, et ensuite intégrée, devient, γ étant supposé égal à $\sqrt{k - \frac{m^2}{4}}$,

$$c^{\frac{mt}{2}}.\{\cos.\gamma t + \sqrt{-1}.\sin.\gamma t\}.\left\{\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{m}{2} - \gamma.\sqrt{-1}\right).s'\right\}$$
$$= -l.\int s'^i dt.c^{\frac{mt}{2}}.\{\cos.\gamma t + \sqrt{-1}.\sin.\gamma t\} - \text{\&c.}$$

En comparant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, on aura deux équations au moyen desquelles on pourra éliminer $\frac{ds'}{dt}$; mais il nous suffira ici de considérer la suivante:

$$c^{\frac{mt}{2}}.\frac{ds'}{dt}.\sin.\gamma t + c^{\frac{mt}{2}}.s'.\left\{\frac{m}{2}.\sin.\gamma t - \gamma.\cos.\gamma t\right\} = -l.\int s'^i dt.c^{\frac{mt}{2}}.\sin.\gamma t - \text{\&c.}$$

les intégrales du second membre étant supposées commencer avec t.

Nommons T la valeur de t, à la fin du mouvement où $\frac{ds}{dt}$ est nul; on aura, à cet instant,

$$c^{\frac{mT}{2}}.s'.\left\{\frac{m}{2}.\sin.\gamma T - \gamma\cos.\gamma T\right\} = -l.\int s'^i dt.c^{\frac{mt}{2}}.\sin.\gamma t - \text{\&c.}$$

Dans le cas de s' infiniment petit, le second membre de cette équation se réduit à zéro, par rapport au premier, et l'on a

$$o = \frac{m}{2}.\sin.\gamma T - \gamma.\cos.\gamma T;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\,\gamma T = \frac{2\gamma}{m};$$

et comme le temps T est, par la supposition, indépendant de l'arc parcouru, cette valeur de tang. γT a lieu pour un arc quelconque, ce qui donne, quel que soit s',

$$o = l.\int s'^i.dt.c.^{\frac{mt}{2}}.\sin.\gamma t + \text{\&c.}$$

l'intégrale étant prise depuis $t = o$, jusqu'à $t = T$. En supposant s'

très-petit, cette équation se réduit à son premier terme, et elle ne peut être satisfaite qu'en faisant $l=0$; car le facteur $c^{\frac{mt}{2}}.\sin.\gamma t$ étant constamment positif depuis $t=0$ jusqu'à $t=T$, l'intégrale précédente est nécessairement positive dans cet intervalle. Il ne peut donc y avoir de tautochronisme que dans la supposition de

$$n^2 g.\frac{dz}{ds'}.(1+s')^2=ks';$$

ce qui donne pour l'équation de la courbe tautochrone,

$$gdz=\frac{kds}{n}.(1-c^{-ns}).$$

Dans le vide, et lorsque la résistance est proportionnelle à la simple vîtesse, n est nul, et cette équation devient $gdz=kds$; équation à la cycloïde.

Il est remarquable que le coefficient n de la partie de la résistance, proportionnelle au quarré de la vîtesse, n'entre point dans l'expression du temps T; et il est visible, par l'analyse précédente, que cette expression seroit la même, si l'on ajoutoit à la loi précédente de la résistance, les termes $p.\frac{ds^3}{dt^3}+q.\frac{ds^4}{dt^4}+$ &c.

Soit en général, R la force retardatrice le long de la courbe; on aura

$$0=\frac{dds}{dt^2}+R.$$

s est une fonction du temps t et de l'arc total parcouru qui par conséquent, est fonction de t et de s. En différentiant cette dernière fonction, on aura une équation différentielle de cette forme,

$$\frac{ds}{dt}=V;$$

V étant une fonction de t et de s qui doit être nulle par la condition du problême, lorsque t a une valeur déterminée, et indépendante de l'arc total parcouru. Supposons, par exemple, $V=S.T$, S étant fonction de s seul, et T étant fonction de t seul; on aura

$$\frac{dds}{dt^2}=T.\frac{dS}{ds}.\frac{ds}{dt}+S.\frac{dT}{dt}=\frac{dS}{Sds}.\frac{ds^2}{dt^2}+S.\frac{dT}{dt};$$

mais l'équation $\frac{ds}{dt}=ST$, donne t, et par conséquent $\frac{dT}{dt}$ égal à une fonction de $\frac{ds}{S.dt}$, fonction que nous désignerons par $\frac{ds^2}{S^2.dt^2}.\psi\left(\frac{ds}{Sdt}\right)$; on aura donc

$$\frac{dds}{dt^2}-\frac{ds^2}{S.dt^2}.\left\{\frac{dS}{ds}+\psi\left(\frac{ds}{Sdt}\right)\right\}=-R.$$

Telle est l'expression de la résistance qui convient à l'équation différentielle $\frac{ds}{dt}=ST$; et il est facile de voir qu'elle embrasse le cas de la résistance proportionnelle aux deux premières puissances de la vîtesse, multipliées respectivement par des coefficiens constans. D'autres équations différentielles donneroient d'autres loix de résistance.

CHAPITRE III.

De l'équilibre d'un système de corps.

13. Le cas le plus simple de l'équilibre de plusieurs corps, est celui de deux points matériels qui se choquent avec des vîtesses égales et directement contraires; leur impénétrabilité mutuelle anéantit évidemment leur vîtesse, et les réduit à l'état du repos.

Concevons présentement un nombre m de points matériels contigus, disposés en ligne droite, et animés de la vîtesse u, dans la direction de cette droite. Concevons pareillement un nombre m' de points contigus disposés sur la même droite, et animés de la vîtesse u' directement contraire à u, en sorte que les deux systèmes viennent à se choquer. Il doit exister, pour leur équilibre à l'instant du choc, un rapport entre u et u', qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous observerons que le système m, animé de la vîtesse u, feroit équilibre à un seul point matériel animé de la vîtesse mu, dirigée en sens contraire; car chaque point du système détruiroit dans ce dernier point, une vîtesse égale à u, et par conséquent, ses m points détruiroient la vîtesse entière mu; on peut donc substituer à ce système, un seul point animé de la vîtesse mu. On peut semblablement substituer au système m', un seul point animé de la vîtesse $m'u'$; or les deux systèmes étant supposés se faire équilibre, les deux points qui en tiennent lieu, doivent pareillement se faire équilibre, ce qui exige que leurs vîtesses soient égales; on a donc pour la condition de l'équilibre des deux systêmes, $mu=m'u'$.

La masse d'un corps est le nombre de ses points matériels, et l'on nomme *quantité de mouvement*, le produit de la masse par la vîtesse; c'est aussi ce que l'on entend par la force d'un corps en mouvement. Pour l'équilibre de deux corps ou de deux systèmes de points qui viennent à se choquer en sens contraire; les quantités de mouvement, ou les forces opposées doivent être égales, et par conséquent, les vîtesses doivent être réciproques aux masses.

La densité des corps dépend du nombre des points matériels qu'ils renferment sous un volume donné. Pour avoir leur densité absolue, il faudroit pouvoir comparer leurs masses, à celle d'une substance qui n'auroit point de pores; mais on n'en connoît point de semblables; on ne peut donc avoir que la densité relative des corps, c'est-à-dire, le rapport de leur densité, à celle d'une substance donnée. Il est visible que la masse est en raison du volume et de la densité; en nommant donc M, la masse d'un corps, U son volume et D sa densité, on a généralement $M = DU$; équation dans laquelle on doit observer que les quantités M, D et U expriment des rapports à des unités de leur espèce.

Ce que nous venons de dire, suppose que les corps sont composés de points matériels semblables, et qu'ils ne diffèrent que par la position respective de ces points. Mais la nature des corps étant inconnue, cette hypothèse est au moins précaire, et il est possible qu'il y ait des différences essentielles entre leurs molécules intégrantes. Heureusement, la vérité de cette hypothèse est indifférente à la mécanique, et l'on peut, sans craindre aucune erreur, en faire usage, pourvu que par *points matériels semblables*, on entende des points qui se choquant avec des vîtesses égales et contraires, se font mutuellement équilibre, quelle que soit leur nature.

14. Deux points matériels dont les masses sont m et m', ne peuvent agir l'un sur l'autre, que suivant la droite qui les joint. A la vérité, si les deux points sont liés par un fil qui passe sur une poulie fixe; leur action réciproque peut n'être point dirigée suivant cette droite. Mais on peut considérer la poulie fixe, comme ayant à son centre, une masse d'une densité infinie, qui réagit sur les deux corps m et m', dont l'action l'un sur l'autre n'est plus qu'indirecte.

Nommons p l'action que m exerce sur m' au moyen d'une droite inflexible et sans masse, qui est supposée unir ces deux points. En concevant cette droite animée de deux forces égales et contraires p et $-p$; la force $-p$ détruira dans le corps m, une force égale à p, et la force p de la droite se communiquera toute entière au corps m'. Cette perte de force dans m, occasionnée par son action sur m', est ce que l'on nomme *réaction* de m'; ainsi, dans la communication des mouvemens, *la réaction est toujours égale et contraire à l'action.* L'observation fait voir que ce principe a lieu dans toutes les actions de la nature.

Imaginons deux corps pesans m et m' attachés aux extrémités d'une droite horizontale, inflexible et sans masse, qui puisse tourner librement autour d'un de ses points. Pour concevoir l'action de ces corps l'un sur l'autre, lorsqu'ils se font équilibre; il faut supposer la droite infiniment peu rompue à son point fixe, et formée de deux droites faisant à ce point, un angle qui ne diffère de deux angles droits, que d'une quantité infiniment petite ω. Soient f et f' les distances de m et m' au point fixe : en décomposant la pesanteur de m, en deux forces, l'une agissant sur le point fixe, l'autre dirigée vers m'; cette dernière force sera $\frac{mg.(f+f')}{\omega f'}$, g étant la pesanteur. L'action de m' sur m, sera pareillement $\frac{m'g.(f+f')}{\omega f}$; en égalant donc ces deux forces, en vertu de l'équilibre, on aura $mf=m'f'$; ce qui donne la loi connue de l'équilibre du levier, et fait en même temps, concevoir l'action réciproque des forces parallèles.

Considérons présentement, l'équilibre d'un système de points m, m', m'', &c. sollicités par des forces quelconques, et réagissans les uns sur les autres. Soit f, la distance de m à m'; f' la distance de m à m''; f'' la distance de m' à m'', &c.; soit encore p, l'action réciproque de m sur m'; p' celle de m sur m''; p'' celle de m' sur m'', &c. Enfin, soient mS, $m'S'$, $m''S''$, &c. les forces qui sollicitent m, m', m''; &c.; et s, s', s'', &c. les droites prises depuis leurs origines, jusqu'aux corps m, m', m'', &c.; cela posé, le point m peut être considéré comme étant parfaitement libre, et en équilibre en vertu de la force mS, et des forces que lui communiquent les corps m', m'', &c. : mais s'il étoit assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe, il faudroit ajouter à ces forces, la réaction de la surface ou de la courbe. Soit donc δs, la variation de s, et désignons par $\delta_{,}f$, la variation de f, prise en regardant m' comme fixe. Désignons pareillement par $\delta_{,}f'$, la variation de f', prise en regardant m'' comme fixe, &c. Soient R, R' les réactions de deux surfaces qui, par leur intersection, forment la courbe sur laquelle le point m est assujetti à se mouvoir; et δr, $\delta r'$ les variations des directions de ces dernières forces. L'équation (d) du n°. 3 donnera :

$$o = mS.\delta s + p.\delta_{,}f + p'.\delta_{,}f' + \&c. + R.\delta r + R'.\delta r' + \&c.$$

Pareillement m' peut être considéré comme un point parfaitement libre, en équilibre en vertu de la force $m'S'$, des actions des corps m, m'', &c., et des réactions des surfaces sur lesquelles il peut être assujetti à se mouvoir, réactions que nous désignerons par R'' et R'''. Soit donc $\delta s'$ la variation de s'; $\delta_{,,}f$ la variation de f prise en regardant m comme fixe; $\delta_{,}f''$ la variation de f'' prise en regardant m'' comme fixe, &c. Soient de plus $\delta r''$, $\delta r'''$ les variations des directions de R'', R'''; l'équilibre de m' donnera

$$o = m'S'.\delta s' + p.\delta_{,,}f + p''.\delta_{,}f'' + \&c. + R''.\delta r'' + R'''.\delta r'''.$$

On formera de semblables équations relatives à l'équilibre de m'', m''', &c.; en les ajoutant ensuite, et observant que

$$\delta f = \delta_{,}f + \delta_{,,}f\ ; \qquad \delta f' = \delta_{,}f' + \delta_{,,}f'; \quad \&c.$$

δf, $\delta f'$, &c., étant les variations totales de f, f', &c.; on aura

$$o = \Sigma.m.S.\delta s + \Sigma.p.\delta f + \Sigma.R.\delta r; \qquad (k)$$

équation dans laquelle les variations des coordonnées des différens corps du systême, sont entièrement arbitraires. On doit observer ici, qu'au lieu de $mS.\delta s$, on peut, en vertu de l'équation (a) du n°. 2, substituer la somme des produits de toutes les forces partielles dont m est animé, par les variations de leurs directions respectives. Il en est de même des produits $m'S'.\delta s'$, $m''S'.\delta s''$, &c.

Si les corps m, m', m'', &c. sont liés entr'eux, d'une manière invariable; les distances f, f', f'', &c., sont constantes, et l'on a pour la condition de la liaison des parties du systême, $\delta f = o$, $\delta f' = o$, $\delta f'' = o$, &c. Les variations des coordonnées étant arbitraires dans l'équation (k), on peut les assujettir à satisfaire à ces dernières équations, et alors les forces p, p', p'', &c. qui dépendent de l'action réciproque des corps du systême, disparoissent de cette équation ; on peut même en faire disparoître les termes $R\delta r$, $R'\delta r'$, &c., en assujettissant les variations des coordonnées, à satisfaire aux équations des surfaces sur lesquelles les corps sont forcés de se mouvoir; l'équation (k) devient ainsi

$$0 = \Sigma . mS . \delta s ; \qquad (l)$$

d'où il suit que dans le cas de l'équilibre, la somme des variations des produits des forces, par les élémens de leurs directions, est nulle, de quelque manière que l'on fasse varier la position du système, pourvu que les conditions de la liaison de ses parties soient observées.

Ce théorême auquel nous sommes parvenus dans la supposition particulière d'un systême de corps liés entr'eux d'une manière invariable, est général, quelles que soient les conditions de la liaison des parties du systême. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'en assujettissant les variations des coordonnées, à ces conditions, on a dans l'équation (k),

$$0 = \Sigma . p . \delta f + \Sigma . R \delta r ;$$

or il est clair que δr, $\delta r'$, &c., sont nuls en vertu de ces conditions; il ne s'agit donc que de prouver que l'on a $0 = \Sigma . p . \delta f$, en assujettissant aux mêmes conditions, les variations des coordonnées.

Concevons le système animé des seules forces p, p', p'', &c., et supposons que les corps soient forcés de se mouvoir sur des courbes qu'ils puissent décrire en vertu des mêmes conditions. Alors, ces forces se décomposeront en d'autres, les unes q, q', q'', &c., dirigées suivant les droites f, f', f'', &c., et qui se détruiront mutuellement sans produire d'action sur les courbes décrites; les autres T, T', T'', &c. perpendiculaires aux courbes décrites; les autres enfin, tangentielles à ces courbes, et en vertu desquelles le systême sera mû. Mais il est aisé de voir que ces dernières forces doivent être nulles; car le systême étant supposé leur obéir librement, elles ne peuvent produire ni pression sur les courbes décrites, ni réaction des corps les uns sur les autres; elles ne peuvent donc pas faire équilibre aux forces $-p$, $-p'$, $-p''$, &c.; q, q', q'', &c.; T, T', &c.; il faut donc qu'elles soient nulles, et que le systême soit en équilibre en vertu des seules forces $-p$, $-p'$, $-p''$, &c.; q, q', q'', &c.; T, T', &c. Soient δi, $\delta i'$, &c., les variations

variations des directions des forces T, T', &c.; on aura, en vertu de l'équation (k),

$$0 = \Sigma.(q-p).\delta f + \Sigma.T.\delta i;$$

mais le système étant supposé en équilibre en vertu des seules forces q, q', &c., sans qu'il en résulte aucune action sur les courbes décrites, l'équation (k) donne encore $0 = \Sigma.q.\delta f$; partant

$$0 = \Sigma.p.\delta f - \Sigma.T.\delta i.$$

Si l'on assujétit les variations des coordonnées à satisfaire aux courbes décrites, on a $\delta i = 0$, $\delta i' = 0$, &c.; on a donc alors,

$$0 = \Sigma.p.\delta f;$$

et comme les courbes décrites sont elles-mêmes arbitraires, et ne sont assujéties qu'aux conditions de la liaison des parties du système; l'équation précédente a lieu, pourvu que ces conditions soient remplies, et alors l'équation (k) se change dans l'équation (l). Cette équation est la traduction analytique du principe suivant, connu sous le nom de *principe des vîtesses virtuelles*.

« Si l'on fait varier infiniment peu, la position d'un système » de corps, en l'assujétissant aux conditions qu'il doit remplir; la » somme des forces qui le sollicitent, multipliée chacune par l'es- » pace que le corps auquel elle est appliquée, parcourt suivant » sa direction, doit être égale à zéro, dans le cas de l'équilibre du » système ».

Non-seulement ce principe a lieu dans le cas de l'équilibre; mais il en assure l'existence. Supposons, en effet, que l'équation (l) ayant lieu, les points m, m', &c., prennent les vîtesses v, v', &c., en vertu des forces mS, $m'S'$, &c., qui leur sont appliquées. Ce système seroit en équilibre, en vertu de ces forces et de celles-ci $-mv$, $-m'v'$, &c.; désignons par δv, $\delta v'$, &c., les variations des directions de ces nouvelles forces; on aura, par le principe des vîtesses virtuelles,

$$0 = \Sigma.mS.\delta s - \Sigma.m.v\delta v;$$

mais on a, par la supposition, $0 = \Sigma.mS.\delta s$; on a donc $0 = \Sigma.m.v\delta v$. Les variations δv, $\delta v'$, &c., devant être assujéties aux conditions du système, on peut les supposer égales à $v\,dt$, $v'dt$, &c, et alors on a $0 = \Sigma.mv^2$, équation qui donne $v = 0$, $v' = 0$, &c.;

c'est-à-dire que le système est en équilibre, en vertu des seules forces mS, $m'S'$, &c.

Les conditions de la liaison des parties d'un système peuvent toujours se réduire à des équations entre les coordonnées de ses différens corps. Soient $u=0$, $u'=0$, $u''=0$, &c. ces diverses équations; on pourra, par le n°. 3, ajouter à l'équation (l), la fonction $\lambda\delta u+\lambda'\delta u'+$ &c., ou $\Sigma.\lambda.\delta u$; λ, λ', &c., étant des fonctions indéterminées des coordonnées des corps; cette équation deviendra ainsi,

$$0=\Sigma.mS.\delta s+\Sigma.\lambda.\delta u;$$

dans ce cas, les variations de toutes les coordonnées seront arbitraires, et l'on pourra égaler leurs coefficiens à zéro, ce qui donnera autant d'équations au moyen desquelles on déterminera les fonctions λ, λ', &c. Si l'on compare ensuite cette équation à l'équation (k), on aura,

$$\Sigma.\lambda.\delta u=\Sigma.p.\delta f+\Sigma.R.\delta r;$$

d'où il sera facile de conclure les actions réciproques des corps m, m', &c., et les pressions $-R$, $-R'$, &c., qu'ils exercent contre les surfaces auxquelles ils sont assujétis.

15. Si tous les corps du système sont fixement attachés ensemble, sa position sera déterminée par celle de trois de ses points qui ne sont pas en ligne droite; la position de chacun de ces points dépend de trois coordonnées, ce qui produit neuf indéterminées; mais les distances mutuelles des trois points étant données et invariables, on peut, à leur moyen, réduire ces indéterminées à six autres qui, substituées dans l'équation (l), introduiront six variations arbitraires; en égalant à zéro leurs coefficiens, on aura six équations qui renfermeront toutes les conditions de l'équilibre du système; développons ces équations.

Pour cela, soient x, y, z, les coordonnées de m; x', y', z', celles de m'; x'', y'', z'', celles de m'', &c., on aura

$$f=\sqrt{(x'-x)^2+(y-y)+(z'-z)^2};$$
$$f'=\sqrt{(x'-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2};$$
$$f''=\sqrt{(x''-x')^{,}+(y''-y')^2+(z'-z')^2};$$
&c.

Si l'on suppose

$$\delta x = \delta x' = \delta x'' = \&c.;$$
$$\delta y = \delta y' = \delta y'' = \&c.;$$
$$\delta z = \delta z' = \delta z'' = \&c.;$$

on aura $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0$, &c.; les conditions à satisfaire seront donc remplies, et l'on aura en vertu de l'équation (l),

$$0 = \Sigma . m S . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right); \quad 0 = \Sigma . m S . \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right); \quad 0 = \Sigma . m S . \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right); \quad (m)$$

on aura ainsi, trois des six équations qui renferment les conditions de l'équilibre du systême. Les seconds membres de ces équations sont les sommes des forces du systême, décomposées parallèlement aux trois axes des x, des y, et des z; chacune de ces sommes doit donc être nulle dans le cas de l'équilibre.

Les équations $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f' = 0$, &c., seront encore satisfaites, si l'on suppose z, z', z'', &c. invariables, et si l'on fait

$$\delta x = y . \delta \varpi; \qquad \delta y = -x . \delta \varpi;$$
$$\delta x' = y' . \delta \varpi; \qquad \delta y' = -x' . \delta \varpi;$$
&c.

$\delta \varpi$ étant une variation quelconque. En substituant ces valeurs dans l'équation (l), on aura

$$0 = \Sigma . m S . \left\{ y . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x . \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right\}.$$

Il est visible que l'on peut changer dans cette équation, soit les coordonnées x, x', x'', &c., soit les coordonnées y, y', y'', &c., en z, z', z'', &c., ce qui donnera deux autres équations qui réunies à la précédente, formeront le systême suivant d'équations,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Sigma . m S . \left\{ y . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x . \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right\} \\ 0 &= \Sigma . m S . \left\{ z . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x . \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) \right\} \\ 0 &= \Sigma . m S . \left\{ y . \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) - z . \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right\} \end{aligned}\right\}; \quad (n)$$

la fonction $\Sigma . m S . y . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$ est, par le n°. 3, la somme des momens de toutes les forces parallèles à l'axe des x, pour faire tourner le systême autour de l'axe des z. Pareillement la fonction

$\Sigma . m S . x . \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$ est la somme des momens de toutes les forces parallèles à l'axe des y, pour faire tourner le système autour de l'axe des z, mais en sens contraire des premières forces ; la première des équations (n) indique, par conséquent, que la somme des momens des forces est nulle par rapport à l'axe des z. La seconde et la troisième de ces équations indiquent semblablement que la somme des momens des forces est nulle, soit par rapport à l'axe des y, soit par rapport à l'axe des x. En réunissant ces trois conditions à celles-ci, savoir que les sommes des forces parallèles à ces axes soient nulles par rapport à chacun d'eux; on aura les six conditions de l'équilibre d'un système de corps invariablement unis ensemble.

Si l'origine des coordonnées est fixe, et attachée invariablement au système ; elle détruira les forces parallèles aux trois axes, et les conditions de l'équilibre du système autour de cette origine, se réduiront à ce que les sommes des momens des forces pour le faire tourner autour des trois axes, soient nulles relativement à chacun d'eux.

Supposons que les corps m, m', m'', &c., ne soient animés que par la pesanteur. Son action étant la même sur tous ces corps, et les directions de la pesanteur pouvant être supposées les mêmes dans toute l'étendue du système, on aura

$$S = S' = S'' = \&c. ;$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta x'}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta x''}\right) = \&c. ;$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta y'}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta y''}\right) = \&c. ;$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) = \left(\frac{s}{\delta z'}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta z''}\right) = \&c. ;$$

les trois équations (n) seront satisfaites, quelle que soit la direction de s, ou de la pesanteur, au moyen des trois suivantes :

$$0 = \Sigma . m x \; ; \quad 0 = \Sigma . m y \; ; \quad 0 = \Sigma . m z. \qquad (o)$$

L'origine des coordonnées, étant supposée fixe, elle détruira parallèlement à chacun des trois axes, les forces $S . \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) . \Sigma . m$;

$S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right).\Sigma.m$; $S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right).\Sigma.m$; en composant ces trois forces, on aura une force unique égale à $S.\Sigma.m$, c'est-à-dire, égale au poids du systême.

Cette origine des coordonnées autour de laquelle nous supposons ici le systême en équilibre, est un point du systême, très-remarquable, en ce qu'étant soutenu, le systême animé par la pesanteur reste en équilibre, quelque situation qu'on lui donne autour de ce point que l'on nomme *centre de gravité* du systême. Sa position est déterminée par la condition, que si l'on fait passer par ce point, un plan quelconque, la somme des produits de chaque corps, par sa distance à ce plan, est nulle; car cette distance est une fonction linéaire des coordonnées x, y, z, du corps; en la multipliant donc par la masse du corps, la somme de ces produits sera nulle en vertu des équations (o).

Pour fixer la position du centre de gravité, soient X, Y, Z, ses trois coordonnées par rapport à un point donné; soient x, y, z les coordonnées de m, rapportées au même point; x', y', z', celles de m', et ainsi de suite; les équations (o) donneront

$$0 = \Sigma.m.(x-X);$$

mais on a $\Sigma.m.X = X.\Sigma.m$, $\Sigma.m$ étant la masse entière du systême; on a donc

$$X = \frac{\Sigma.mx}{\Sigma.m}.$$

On aura pareillement

$$Y = \frac{\Sigma.my}{\Sigma.m}; \quad Z = \frac{\Sigma.mz}{\Sigma.m};$$

ainsi, les coordonnées X, Y, Z, ne déterminant qu'un seul point, on voit que le centre de gravité d'un systême de corps est unique. Les trois équations précédentes donnent

$$X^2+Y^2+Z^2 = \frac{(\Sigma.mx)^2+(\Sigma.my)^2+(\Sigma.mz)^2}{(\Sigma.m)^2},$$

équation que l'on peut mettre sous cette forme :

$$X^2+Y^2+Z^2 = \frac{\Sigma.m.(x^2+y^2+z^2)}{\Sigma.m} - \frac{\Sigma.mm'.\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}}{(\Sigma.m)^2},$$

l'intégrale finie $\Sigma.mm'.\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}$, exprimant la somme de tous les produits semblables à celui qui est renfermé sous la caractéristique Σ, et que l'on peut former, en considérant deux à deux, tous les corps du systême. On aura donc ainsi la distance du centre de gravité, à un point fixe quelconque, au moyen des distances des corps du systême, à ce même point fixe, et de leurs distances mutuelles. En déterminant de cette manière, la distance du centre de gravité, à trois points fixes quelconques, on aura sa position dans l'espace; ce qui donne un nouveau moyen de le déterminer.

On a étendu la dénomination de *centre de gravité*, à un point d'un systême quelconque de corps pesans ou non pesans, déterminé par les trois coordonnées X, Y, Z.

16. Il est facile d'appliquer les résultats précédens, à l'équilibre d'un corps solide de figure quelconque, en le concevant formé d'une infinité de points liés fixement entre eux. Soit donc dm, un de ces points, ou une molécule infiniment petite du corps; soient x, y, z, les coordonnées rectangles de cette molécule; soient encore P, Q, R, les forces dont elle est animée parallèlement aux axes des x, des y, et des z; les équations (m) et (n) du n°. précédent, se changeront dans les suivantes :

$$0=\int P.dm\,; \qquad 0=\int Q.dm\,; \qquad 0=\int R.dm\,;$$
$$0=\int(Py-Qx).dm\,; \; 0=\int(Pz-Rx).dm\,; \; 0=\int(Ry-Qz).dm,$$

le signe intégral $\int$ étant relatif à la molécule dm, et devant s'étendre à la masse entière du solide.

Si le corps ne peut que tourner autour de l'origine des coordonnées, les trois dernières équations suffisent pour l'équilibre.

CHAPITRE IV.

De l'équilibre des fluides.

17. Pour avoir les loix de l'équilibre et du mouvement de chacune des molécules fluides, il faudroit connoître leur figure, ce qui est impossible ; mais nous n'avons besoin de déterminer ces loix, que pour les fluides considérés en masse, et alors la connoissance des figures de leurs molécules devient inutile. Quelles que soient ces figures, et les dispositions qui en résultent dans les molécules intégrantes ; tous les fluides pris en masse, doivent offrir les mêmes phénomènes dans leur équilibre et dans leurs mouvemens, en sorte que l'observation de ces phénomènes ne peut rien nous apprendre sur la configuration des molécules fluides. Ces phénomènes généraux sont fondés sur la mobilité parfaite de ces molécules qui peuvent ainsi céder au plus léger effort. Cette mobilité est la propriété caractéristique des fluides ; elle les distingue des corps solides, et sert à les definir. Il en résulte que pour l'équilibre d'une masse fluide, chaque molécule doit être en équilibre en vertu des forces qui la sollicitent, et des pressions qu'elle éprouve de la part des molécules environnantes. Développons les équations qui résultent de cette propriété.

Pour cela, considérons un systême de molécules fluides formant un parallélipipède rectangle infiniment petit. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangles de l'angle de ce parallélipipède, le plus voisin de l'origine des coordonnées. Soient dx, dy, dz, les trois dimensions de ce parallélipipède; nommons p, la moyenne de toutes les pressions qu'éprouvent les différens points de la face $dy.dz$ du parallélipipède, la plus voisine de l'origine des coordonnées, et p' la même quantité relative à la face opposée. Le parallélipipède, en vertu de la pression qu'il éprouve, sera sollicité parallèlement à l'axe des x, par une force égale à $(p-p').dy.dz$.

$p'-p$ est la différence de p prise en ne faisant varier que x ; car quoique la pression p' agisse en sens contraire de p, cependant la pression qu'éprouve un point du fluide, étant la même dans tous les sens, $p'-p$ peut être considéré comme la différence de deux forces infiniment voisines et agissantes dans le même sens ; on a donc $p'-p = \left(\frac{dp}{dx}\right).dx$; et $(p-p').dy.dz = -\left(\frac{dp}{dx}\right).dx.dy.dz$.

Soient P, Q, R, les trois forces accélératrices qui animent d'ailleurs les molécules fluides, parallèlement aux axes des x, des y, et des z; si l'on nomme ρ la densité du parallélipipède, sa masse sera $\rho.dx\;dy\;dz$, et le produit de la force P par cette masse, sera la force entière qui en résulte pour la mouvoir ; cette masse sera, par conséquent, sollicitée parallèlement à l'axe des x, par la force $\left\{\rho P - \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}.dx.dy.dz$. Elle sera pareillement sollicitée parallèlement aux axes des y et des z, par les forces $\left\{\rho Q - \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}.dx.dy.dz$, et $\left(\rho R - \frac{dp}{dz}\right).dx.dy.dz$; on aura donc, en vertu de l'équation (b) du n°. 3,

$$0 = \left\{\rho P - \left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}.\delta x + \left\{\rho Q - \left(\frac{dp}{dy}\right)\right\}.\delta y + \left\{\rho R - \left(\frac{dp}{dz}\right)\right\}.\delta z;$$

ou

$$\delta p = \rho.\{P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z\}.$$

Le second membre de cette équation doit être comme le premier, une variation exacte ; ce qui donne les équations suivantes aux différences partielles,

$$\left(\frac{d.\rho P}{dy}\right) = \left(\frac{d.\rho Q}{dx}\right)\;;\quad \left(\frac{d.\rho P}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho R}{dx}\right)\;;\quad \left(\frac{d.\rho Q}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho R}{dy}\right)\;;$$

d'où l'on tire

$$0 = P.\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q.\left(\frac{dP}{dz}\right) + R.\left(\frac{dP}{dy}\right) - P.\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q.\left(\frac{dR}{dx}\right) - R.\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Cette équation exprime la relation qui doit exister entre les forces P, Q, R, pour que l'équilibre soit possible.

Si le fluide est libre à sa surface, ou dans quelques parties de cette surface, la valeur de p sera nulle dans ces parties ; on aura donc

donc $\delta p = 0$, pourvu que l'on assujétisse les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ à appartenir à cette surface; ainsi, en remplissant ces conditions, on aura

$$0 = P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z.$$

Soit $\delta u = 0$, l'équation différentielle de la surface, on aura

$$P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z = \lambda.\delta u,$$

λ étant une fonction de x, y, z; d'où il suit, par le n°. 3, que la résultante des forces P, Q, R, doit être perpendiculaire aux parties de la surface dans lesquelles le fluide est libre.

Supposons que la variation $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$, soit exacte, ce qui a lieu par le n°. 2, lorsque les forces P, Q, R sont le résultat de forces attractives. Nommons alors $\delta\varphi$ cette variation; on aura $\delta p = \rho.\delta\varphi$; ρ doit donc être fonction de p et de φ, et comme en intégrant cette équation différentielle, on a φ en fonction de p; on aura p en fonction de ρ. La pression p est donc la même pour toutes les molécules dont la densité est la même; ainsi dp est nul relativement aux surfaces des couches de la masse fluide, dans lesquelles la densité est constante, et l'on a par rapport à ces surfaces,

$$0 = P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z.$$

Il suit de là, que la résultante des forces qui animent chaque molécule fluide, est dans l'état d'équilibre, perpendiculaire à la surface de ces couches que l'on a nommées pour cela, *couches de niveau*. Cette condition est toujours remplie, si le fluide est homogène et incompressible, puisqu'alors les couches auxquelles cette résultante est perpendiculaire, sont toutes de même densité.

Pour l'équilibre d'une masse fluide homogène dont la surface extérieure est libre, et qui recouvre un noyau solide fixe et de figure quelconque, il est donc nécessaire et il suffit, 1°. que la différentielle $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$ soit exacte; 2°. que la résultante des forces à la surface extérieure, soit dirigée vers cette surface, et lui soit perpendiculaire.

CHAPITRE V.

Principes généraux du mouvement d'un système de corps.

18. Nous avons ramené dans le n°. 7 les loix du mouvement d'un point, à celles de l'équilibre, en décomposant son mouvement instantané en deux autres, dont l'un subsiste, et dont l'autre est détruit par les forces qui sollicitent ce point : l'équilibre entre ces forces et le mouvement perdu par le corps, nous a donné les équations différentielles de son mouvement. Nous allons faire usage de la même méthode, pour déterminer le mouvement d'un système de corps m, m', m'', &c. Soient donc mP, mQ, mR, les forces qui sollicitent m, parallèlement aux axes de ses coordonnées rectangles x, y, z; soient $m'P'$, $m'Q'$, $m'R'$ les forces qui sollicitent m' parallèlement aux mêmes axes, et ainsi de suite; et nommons t, le temps. Les forces partielles $m.\frac{dx}{dt}$, $m.\frac{dy}{dt}$, $m.\frac{dz}{dt}$, du corps m, à un instant quelconque, deviendront dans l'instant suivant :

$$m.\frac{dx}{dt}+m.d.\frac{dx}{dt}-m.d.\frac{dx}{dt}+mP.dt;$$
$$m.\frac{dy}{dt}+m.d.\frac{dy}{dt}-m.d.\frac{dy}{dt}+mQ.dt;$$
$$m.\frac{dz}{dt}+m.d.\frac{dz}{dt}-m.d.\frac{dz}{dt}+mR.dt;$$

et comme les seules forces

$$m.\frac{dx}{dt}+m.d.\frac{dx}{dt}; \quad m.\frac{dy}{dt}+m.d.\frac{dy}{dt}; \quad m.\frac{dz}{dt}+m.d.\frac{dz}{dt};$$

subsistent; les forces

$$-m.d.\frac{dx}{dt}+mP.dt; \; -m.d.\frac{dy}{dt}+mQ.dt; \; -m.d.\frac{dz}{dt}+mR.dt;$$

seront détruites. En marquant dans ces expressions, successivement d'un trait, de deux traits, &c., les lettres m, x, y, z, P, Q, R, on aura les forces détruites dans les corps m', m'', &c. Cela posé, si l'on multiplie respectivement ces forces, par les variations δx, δy, δz, $\delta x'$, &c. de leurs directions; le principe des vîtesses virtuelles exposé dans le n°. 14, donnera, en supposant dt constant, l'équation suivante :

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & m.\delta x.\left\{\frac{ddx}{dt^2} - P\right\} + m.\delta y.\left\{\frac{ddy}{dt^2} - Q\right\} + m.\delta z.\left\{\frac{ddz}{dt^2} - R\right\} \\ & + m'.\delta x'.\left\{\frac{ddx'}{dt^2} - P'\right\} + m'.\delta y'.\left\{\frac{ddy'}{dt^2} - Q'\right\} + m'.\delta z'.\left\{\frac{ddz'}{dt^2} - R'\right\} \\ & \&c. \end{aligned}\right\} ; \quad (P)$$

on éliminera de cette équation, au moyen des conditions particulières du système, autant de variations qu'il y a de ces conditions; en égalant ensuite séparément à zéro, les coefficiens des variations restantes, on aura toutes les équations nécessaires pour déterminer le mouvement des différens corps du système.

19. L'équation (P) renferme plusieurs principes généraux de mouvement, que nous allons développer. On assujettira évidemment, les variations δx, δy, δz, $\delta x'$, &c., à toutes les conditions de la liaison des parties du système, en les supposant égales aux différences dx, dy, dz, dx', &c. Cette supposition est donc permise, et alors l'équation (P) donne en l'intégrant,

$$\Sigma.m.\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = c + 2.\Sigma.\int m(P.dx + Q.dy + R.dz); \quad (Q)$$

c étant une constante arbitraire introduite par l'intégration.

Si les forces P, Q, R, sont le résultat de forces attractives, dirigées vers des points fixes, et des forces attractives des corps les uns vers les autres; la fonction $\Sigma.\int m.(Pdx + Qdy + Rdz)$ est une intégrale exacte. En effet, les parties de cette fonction, relatives aux forces attractives dirigées vers des points fixes, sont par le n°. 8, des intégrales exactes. Cela est également vrai par rapport aux parties qui dépendent des attractions mutuelles des corps du système; car si l'on nomme f, la distance de m à m', $m'F$, l'attraction de m' sur m; la partie de $m.(Pdx + Qdy + Rdz)$, relative à l'attraction de m' sur m, sera par le n°. cité, égale à $-mm'.Fdf$, la différence df étant prise en ne faisant varier que les coordonnées x, y, z. Mais la réaction étant égale et contraire à l'action, la partie de $m'.(P'dx'+Q'dy'+R'dz')$ relative à l'attraction de m sur m', est égale à $-mm'Fdf$, en ne faisant varier dans f, que les coordonnées x', y', z'; la partie de la fonction $\Sigma.m(Pdx+Qdy+Rdz)$ relative à l'attraction réciproque de m et de m', est donc $-mm'.Fdf$, tout étant supposé varier dans f. Cette quantité est une différence exacte, lorsque F est une fonction de f, ou lorsque l'attraction est comme une fonction de la distance, ainsi que nous le supposerons toujours; la fonction $\Sigma.m.(Pdx+Qdy+Rdz)$ est donc une différence exacte, toutes les fois que les forces qui agissent sur les corps du systême, sont le résultat de leur attraction mutuelle, ou de forces attractives dirigées vers des points fixes. Soit alors $d\varphi$, cette différence, et nommons v, la vîtesse de m, v' celle de m', &c.; on aura

$$\Sigma.mv^2 = c + 2\varphi. \qquad (R)$$

Cette équation est analogue à l'équation (g) du n°. 8; elle est la traduction analytique du principe de la conservation des *forces vives.* On nomme *force vive* d'un corps, le produit de sa masse par le quarré de sa vîtesse. Le principe dont il s'agit, consiste en ce que la somme des forces vives, ou la force vive totale du systême, est constante, si le systême n'est sollicité par aucunes forces; et si les corps sont sollicités par des forces quelconques, la somme des accroissemens de la force vive totale, est la même, quelles que soient les courbes décrites par chacun de ces corps, pourvu que leurs points de départ et d'arrivée soient les mêmes.

Ce principe n'a lieu que dans les cas où les mouvemens des corps changent par des nuances insensibles. Si ces mouvemens éprouvent des changemens brusques, la force vive est diminuée d'une quantité que l'on déterminera de cette manière. L'analyse qui nous a conduits à l'équation (P) du n°. précédent, donne alors, au lieu de cette équation, la suivante :

$$0 = \Sigma.m.\left\{\frac{\delta x}{dt}.\Delta.\frac{dx}{dt}+\frac{\delta y}{dt}.\Delta.\frac{dy}{dt}+\frac{\delta z}{dt}.\Delta.\frac{dz}{dt}\right\} - \Sigma.m.(P.\delta x+Q.\delta y+R.\delta z);$$

$\Delta.\frac{dx}{dt}$, $\Delta.\frac{dy}{dt}$, et $\Delta.\frac{dz}{dt}$, étant les différences de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, et $\frac{dz}{dt}$, d'un instant à l'autre, différences qui deviennent finies, lorsque les mouvemens des corps reçoivent des altérations finies dans un instant. On peut supposer dans cette équation,

$$\delta x = dx + \Delta . dx \; ; \qquad \delta y = dy + \Delta . dy \; ; \qquad \delta z = dz + \Delta . dz \; ;$$

parce que les valeurs de dx, dy, dz, se changeant dans l'instant suivant, dans $dx + \Delta . dx$, $dy + \Delta . dy$, $dz + \Delta . dz$, ces valeurs de δx, δy, δz, satisfont aux conditions de la liaison des parties du systême; on aura ainsi

$$o = \Sigma . m . \left\{ \left(\frac{dx}{dt} + \Delta . \frac{dx}{dt} \right) . \Delta . \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} + \Delta . \frac{dy}{dt} \right) . \Delta . \frac{dy}{dt} + \left(\frac{dz}{dt} + \Delta . \frac{dz}{dt} \right) . \Delta . \frac{dz}{dt} \right\}$$
$$- \Sigma . m . \{ P . (dx + \Delta . dx) + Q . (dy + \Delta . dy) + R . (dz + \Delta . dz) \} .$$

Cette équation doit être intégrée comme une équation aux différences finies relative au temps t dont les variations sont infiniment petites, ainsi que les variations de x, y, z, x', &c. Désignons par $\Sigma_{,}$ les intégrales finies résultantes de cette intégration, pour les distinguer des intégrales finies précédentes, relatives à l'ensemble des corps du systême. L'intégrale de $mP . (dx + \Delta . dx)$ est visiblement la même que $\int mP . dx$; on aura donc

$$\text{constante} = \Sigma . m . \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} + \Sigma_{,} . \Sigma . m . \left\{ \left(\Delta . \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$- 2 \Sigma . \int . m . (P . dx + Q . dy + R . dz) ;$$

en désignant donc par v, v', v'', &c., les vîtesses de m, m', m'', &c. on aura

$$\Sigma . mv^2 = \text{constante} - \Sigma_{,} . \Sigma . m . \left\{ \left(\Delta . \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$
$$- 2 \Sigma . \int . m . (P . dx + Q . dy + R . dz) .$$

La quantité renfermée sous le signe $\Sigma_{,}$, étant nécessairement positive, on voit que la force vive du systême diminue par l'action mutuelle des corps, toutes les fois que durant le mouvement, quelques-unes des variations $\Delta . \frac{dx}{dt}$; $\Delta . \frac{dy}{dt}$, &c., sont finies. L'équation précédente offre de plus, un moyen fort simple d'avoir cette diminution.

A chaque variation brusque du mouvement du systême, on peut concevoir la vîtesse de m, décomposée en deux autres, l'une v qui subsiste dans l'instant suivant; l'autre V, détruite par l'action des autres corps ; or la vîtesse de m étant $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}$ avant cette décomposition, et se changeant après, dans

$$\frac{\sqrt{(dx+\Delta.dx)^2+(dy+\Delta.dy)^2+(dz+\Delta.dz)^2}}{dt},$$

il est facile de voir que l'on a

$$V^2=\left(\Delta.\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\Delta.\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\Delta.\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

l'équation précédente peut donc être mise sous cette forme :

$$\Sigma.mv^2=\text{constante}-\Sigma_{,}.\Sigma.mV^2-2\Sigma.\int.m.(Pdx+Qdy+Rdz).$$

20. Si dans l'équation (P) du nº. 18, on suppose

$$\delta x'=\delta x+\delta x_{,}' \;;\quad \delta y'=\delta y+\delta y_{,}' \;;\quad \delta z'=\delta z+\delta z_{,}' \;;$$
$$\delta x''=\delta x+\delta x_{,}'' \;;\quad \delta y''=\delta y+\delta y_{,}'' \;;\quad \delta z''=\delta z+\delta z_{,}'' \;;$$
&c.

en substituant ces variations, dans les expressions des variations δf, $\delta f'$, $\delta f''$, &c., des distances mutuelles des corps du systême, dont on a donné les valeurs dans le nº. 15 ; on voit que les variations δx, δy, δz, disparoissent de ces expressions. Si le systême est libre, c'est-à-dire, si aucune de ses parties n'a de liaison avec les corps étrangers ; les conditions relatives à la liaison mutuelle des corps, ne dépendant que de leurs distances mutuelles, les variations δx, δy, δz, seront indépendantes de ces conditions ; d'où il suit qu'en substituant, au lieu de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, &c., leurs valeurs précédentes dans l'équation (P), on doit égaler séparément à zéro, les coefficiens des variations δx, δy, δz ; ce qui donne les trois équations

$$0=\Sigma.m.\left(\frac{ddx}{dt^2}-P\right);\quad 0=\Sigma.m.\left(\frac{ddy}{dt^2}-Q\right);\quad 0=\Sigma.m.\left(\frac{ddz}{dt^2}-R\right).$$

Supposons que X, Y, Z soient les trois coordonnées du centre de gravité du systême ; on aura par le nº. 15,

$$X=\frac{\Sigma.mx}{\Sigma.m};\quad Y=\frac{\Sigma.my}{\Sigma.m};\quad Z=\frac{\Sigma.mz}{\Sigma.m};$$

partant

$$0=\frac{ddX}{dt}-\frac{\Sigma.mP}{\Sigma.m};\quad 0=\frac{ddY}{dt^2}-\frac{\Sigma.mQ}{\Sigma.m};\quad 0=\frac{ddZ}{dt^2}-\frac{\Sigma.mR}{\Sigma.m}$$

le centre de gravité du systême se meut donc, comme si tous les corps m, m', &c., étant réunis à ce centre, on lui appliquoit toutes les forces qui sollicitent le systême.

Si le systême n'est soumis qu'à l'action mutuelle des corps qui le composent, et à leurs attractions réciproques; on aura

$$o = \Sigma.mP\ ; \quad o = \Sigma.mQ\ ; \quad o = \Sigma.mR\ ;$$

car en exprimant par p, l'action réciproque de m et de m', quelle que soit sa nature, et désignant par f, la distance mutuelle de ces deux corps; on aura, en vertu de cette action seule,

$$mP = \frac{p.(x-x')}{f}\ ; \quad mQ = \frac{p.(y-y')}{f}\ ; \quad mR = \frac{p.(z-z')}{f}\ ;$$

$$m'P' = \frac{p.(x'-x)}{f}\ ; \quad m'Q' = \frac{p.(y'-y)}{f}\ ; \quad m'R' = \frac{p.(z'-z)}{f}\ ;$$

d'où l'on tire

$$o = mP + m'P'\ ; \quad o = mQ + m'Q'\ ; \quad o = mR + m'R',$$

et il est clair que ces équations ont lieu dans le cas même où les corps exerceroient les uns sur les autres, une action finie dans un instant. Leur action réciproque disparoît donc des intégrales $\Sigma.mP$, $\Sigma.mQ$, $\Sigma.mR$, qui par conséquent, sont nulles, lorsque le systême n'est point sollicité par des forces étrangères. Dans ce cas, on a

$$o = \frac{ddX}{dt^2}\ ; \quad o = \frac{ddY}{dt^2}\ ; \quad o = \frac{ddZ}{dt^2}\ ;$$

et en intégrant,

$$X = a + bt\ ; \quad Y = a' + b't\ ; \quad Z = a'' + b''t\ ;$$

a, b, a', b', a'', b'', étant des constantes arbitraires. En éliminant le temps t, on aura une équation du premier ordre, soit entre X et Y, soit entre X et Z; d'où il suit que le mouvement du centre de gravité, est rectiligne. De plus, sa vîtesse étant égale à $\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2}$, ou à $\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}$, elle est constante, et le mouvement est uniforme.

Il est clair, d'après l'analyse précédente, que cette inaltérabilité du mouvement du centre de gravité d'un système de corps, quelle que soit leur action mutuelle, subsiste dans le cas même où quelques-uns de ces corps perdent dans un instant, par cette action, une quantité finie de mouvement.

21. Si l'on fait

$$\delta x' = \frac{y'.\delta x}{y} + \delta x_{\prime}'; \quad \delta x'' = \frac{y''.\delta x}{y} + \delta x_{\prime}''; \text{ \&c.};$$

$$\delta y = \frac{-x.\delta x}{y} + \delta y_{\prime}; \quad \delta y' = \frac{-x'.\delta x}{y} + \delta y_{\prime}'; \quad \delta y'' = \frac{-x''.\delta x}{y} + \delta y_{\prime}''; \text{\&c.};$$

la variation δx disparoît encore des expressions de δf, $\delta f'$, $\delta f''$, &c. ; en supposant donc le système libre, les conditions relatives à la liaison des parties du système, n'influant que sur les variations δf, $\delta f'$, &c., la variation δx en est indépendante, et elle est arbitraire; ainsi, en substituant dans l'équation (P) du n°. 18, au lieu de $\delta x'$, $\delta x''$, &c., δy, $\delta y'$, $\delta y''$, &c., leurs valeurs précédentes, on doit égaler séparément à zéro, le coefficient de δx, ce qui donne

$$0 = \Sigma.m.\frac{(xddy - yddx)}{dt^2} + \Sigma.m.(Py - Qx);$$

d'où l'on tire, en intégrant par rapport au temps t,

$$c = \Sigma.m.\frac{(xdy - ydx)}{dt} + \Sigma.\int.m.(Py - Qx).dt;$$

c étant une constante arbitraire.

On peut, dans cette intégrale, changer les coordonnées y, y', &c., dans z, z', &c., pourvu que l'on y substitue, au lieu des forces Q, Q', &c., parallèles à l'axe des y, les forces R, R', &c., parallèles à l'axe des z, ce qui donne,

$$c' = \Sigma.m.\frac{(xdz - zdx)}{dt} + \Sigma.\int.m.(Pz - Rx).dt;$$

c' étant une nouvelle arbitraire. On aura de la même manière

$$c'' = \Sigma.m.\frac{(ydz - zdy)}{dt} + \Sigma.\int.m.(Qz - Ry).dt;$$

c'' étant une troisième arbitraire.

Supposons que les corps du système ne soient soumis qu'à leur action mutuelle, et à une force dirigée vers l'origine des coordonnées

données. Si l'on nomme, comme ci-dessus, p l'action réciproque de m et de m', on aura, en vertu de cette action seule,

$$o = m.(Py - Qx) + m'.(P'y' - Q'x');$$

ainsi l'action mutuelle des corps disparoît de l'intégrale finie $\Sigma.m.(Py - Qx)$. Soit S, la force qui sollicite m vers l'origine des coordonnées; on aura, en vertu de cette force seule,

$$P = \frac{-S.x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad Q = \frac{-S.y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

la force S disparoît donc de l'expression de $Py - Qx$; ainsi, dans le cas où les différens corps du système ne sont sollicités que par leur action et leur attraction mutuelle, et par des forces dirigées vers l'origine des coordonnées, on a

$$c = \Sigma.m.\frac{(xdy - ydx)}{dt}; \; c' = \Sigma.m.\frac{(xdz - zdx)}{dt}; \; c'' = \Sigma.m.\frac{(ydz - zdy)}{dt}; \quad (Z)$$

Si l'on projette le corps m, sur le plan des x et des y, la différentielle $\frac{xdy - ydx}{2}$, sera l'aire que trace, durant l'instant dt, le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées, à la projection de m; la somme de ces aires multipliées respectivement par les masses de ces corps, est donc proportionnelle à l'élément du temps; d'où il suit que dans un temps fini, elle est proportionnelle au temps. C'est en cela que consiste le principe de la conservation des aires.

Le plan fixe des x et des y étant arbitraire, ce principe a lieu pour un plan quelconque, et si la force S est nulle, c'est-à-dire, si les corps ne sont assujétis qu'à leur action et à leur attraction mutuelle, l'origine des coordonnées est arbitraire, et l'on peut placer à volonté, le point fixe. Enfin, il est facile de voir, par ce qui précède, que ce principe subsiste dans le cas même où, par l'action mutuelle des corps du système, il survient des changemens brusques dans leurs mouvemens.

Il existe un plan par rapport auquel c' et c'' sont nuls, et qu'il est, par cette raison, intéressant de connoître; car il est visible que l'égalité de c' et de c'', à zéro, doit apporter de grandes simplifications dans la recherche du mouvement d'un système de corps. Pour déterminer ce plan, il est nécessaire de rapporter les coordonnées x, y, z, à trois autres axes ayant la même origine que les précédens. Soit donc θ l'inclinaison du plan cherché formé par deux de ces nouveaux axes, au plan des x et des y; et ψ l'angle que forme l'axe des x, avec l'intersection de ces deux plans, en sorte que $\frac{\pi}{2}-\theta$ soit l'inclinaison du troisième axe nouveau, sur le plan des x et des y, et que $\frac{\pi}{2}-\psi$ soit l'angle que sa projection sur le même plan, fait avec l'axe des x, π étant la demi-circonférence.

Pour fixer les idées, imaginons que l'origine des coordonnées soit au centre de la terre; que le plan des x et des y soit celui de l'écliptique, et que l'axe des z soit la ligne menée du centre de la terre, au pôle boréal de l'écliptique; concevons de plus, que le plan cherché soit celui de l'équateur, et que le troisième axe nouveau soit l'axe de rotation de la terre, dirigé vers le pôle boréal; θ sera l'obliquité de l'écliptique, et ψ sera la longitude de l'axe fixe des x, relativement à l'équinoxe mobile du printemps. Les deux premiers axes nouveaux seront dans le plan de l'équateur, et en nommant φ, la distance angulaire du premier de ces axes à cet équinoxe, φ représentera la rotation de la terre, comptée du même équinoxe, et $\frac{\pi}{2}+\varphi$ sera la distance angulaire du second de ces axes au même équinoxe. Nous nommerons *axes principaux*, ces trois nouveaux axes. Cela posé,

Soient $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, les coordonnées de m rapportées, 1°. à la ligne menée de l'origine des coordonnées, à l'équinoxe du printemps; les $x_{\prime}$ positifs étant pris du côté de cet équinoxe; 2°. à la projection du troisième axe principal, sur le plan des x et des y; 3°. à l'axe des z; on aura

$$x = x_{\prime}.\cos.\psi + y_{\prime}.\sin.\psi;$$
$$y = y_{\prime}.\cos.\psi - x_{\prime}.\sin.\psi;$$
$$z = z_{\prime}.$$

Soient $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$, les coordonnées rapportées, 1°. à la ligne de l'équinoxe du printemps; 2°. à la perpendiculaire à cette ligne, dans le plan de l'équateur; 3°. au troisième axe principal; on aura

$$x_{,} = x_{,,};$$
$$y_{,} = y_{,,}.\cos.\theta + z_{,,}.\sin.\theta;$$
$$z_{,} = z_{,,}.\cos.\theta - y_{,,}.\sin.\theta.$$

Enfin, soient $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$, les coordonnées de m rapportées au premier, au second et au troisième axe principal; on aura

$$x_{,,} = x_{,,,}.\cos.\varphi - y_{,,,}.\sin.\varphi;$$
$$y_{,,} = y_{,,,}.\cos.\varphi + x_{,,,}.\sin.\varphi;$$
$$z_{,,} = z_{,,,}.$$

De-là il est facile de conclure

$$x = x_{,,,}.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\sin.\varphi + \cos.\psi.\cos.\varphi\}$$
$$+ y_{,,,}.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\cos.\varphi - \cos.\psi.\sin.\varphi\} + z_{,,,}.\sin.\theta.\sin.\psi;$$

$$y = x_{,,,}.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\sin.\varphi - \sin.\psi.\cos.\varphi\}$$
$$+ y_{,,,}.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\cos.\varphi + \sin.\psi.\sin.\varphi\} + z_{,,,}.\sin.\theta.\cos.\psi;$$

$$z = z_{,,,}.\cos.\theta - y_{,,,}.\sin.\theta.\cos.\varphi - x_{,,,}.\sin.\theta.\sin.\varphi.$$

En multipliant ces valeurs de x, y, z, respectivement par les coefficiens de $x_{,,,}$ dans ces valeurs; on aura en les ajoutant,

$$x_{,,,} = x.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\sin.\varphi + \cos.\psi.\cos.\varphi\}$$
$$+ y.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\sin.\varphi - \sin.\psi.\cos.\varphi\} - z.\sin.\theta.\sin.\varphi.$$

En multipliant pareillement les valeurs de x, y, z, respectivement par les coefficiens de $y_{,,,}$ dans ces valeurs, et ensuite, par les coefficiens de $z_{,,,}$; on aura

$$y_{,,,} = x.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\cos.\varphi - \cos.\psi.\sin.\varphi\}$$
$$+ y.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\cos.\varphi + \sin.\psi.\sin.\varphi\} - z.\sin.\theta.\cos.\varphi;$$

$$z_{,,,} = x.\sin.\theta.\sin.\psi. + y.\sin.\theta.\cos.\psi + z.\cos.\theta.$$

Ces diverses transformations des coordonnées nous seront très-utiles dans la suite. En marquant d'un trait en haut, de deux traits, &c., les coordonnées x, y, z, $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$, on aura les coordonnées correspondantes aux corps m', m'', &c.

De-là, il est facile de conclure, en substituant c, c', c'', au lieu de $\Sigma.m.\frac{(xdy - ydx)}{dt}$, $\Sigma.m.\frac{(xdz - zdx)}{dt}$, $\Sigma.m.\frac{(ydz - zdy)}{dt}$,

$$\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = c . \cos . \theta - c' . \sin . \theta . \cos . \psi + c'' . \sin . \theta . \sin . \psi ;$$

$$\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = c . \sin . \theta . \cos . \varphi + c' . \{\sin . \psi . \sin . \varphi + \cos . \theta . \cos . \psi . \cos . \varphi\}$$
$$+ c'' . \{\cos . \psi . \sin . \varphi - \cos . \theta . \sin . \psi . \cos . \varphi\} ;$$

$$\Sigma . m . \frac{\{y_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = - c . \sin . \theta . \sin . \varphi + c' . \{\sin . \psi . \cos . \varphi - \cos . \theta . \cos . \psi . \sin . \varphi\}$$
$$+ c'' . \{\cos . \psi . \cos . \varphi + \cos . \theta . \sin . \psi . \sin . \varphi\} .$$

Si l'on détermine ψ et θ de manière que l'on ait

$$\sin . \theta . \sin . \psi = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} ; \qquad \sin . \theta . \cos . \psi = \frac{-c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} ;$$

ce qui donne

$$\cos . \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}} ;$$

on aura

$$\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} ;$$

$$\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = 0 ;$$

$$\Sigma . m . \frac{\{y_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = 0 ;$$

les valeurs de c', et de c'' sont donc nulles par rapport au plan des $x_{\prime\prime\prime}$ et des $y_{\prime\prime\prime}$ déterminé de cette manière. Il n'existe qu'un seul plan qui jouisse de cette propriété ; car en supposant qu'il soit celui des x et des y ; on aura

$$\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = c . \sin . \theta . \cos . \varphi ;$$

$$\Sigma . m . \frac{\{y_{\prime\prime\prime} . dz_{\prime\prime\prime} - z_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime}\}}{dt} = - c . \sin . \theta . \sin . \varphi .$$

En égalant ces deux fonctions à zéro, on aura, $\sin . \theta = 0$; c'est-à-dire que le plan des $x_{\prime\prime\prime}$ et des $y_{\prime\prime\prime}$ coincide alors, avec celui des x et des y.

La valeur de $\Sigma . m . \frac{\{x_{\prime\prime\prime} . dy_{\prime\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime} . dx_{\prime\prime\prime}\}}{dt}$, étant égale à $\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$, quel que soit le plan des x et des y ; il en résulte que la quantité $c^2 + c'^2 + c''^2$, est la même, quel que soit ce plan, et que le plan des $x_{\prime\prime\prime}$ et des $y_{\prime\prime\prime}$ déterminé par ce qui précède, est celui relativement auquel la fonction $\Sigma.m.\frac{\{x_{,,,}.dy_{,,,}-y_{,,,}.dx_{,,,}\}}{dt}$ est la plus grande; le plan dont il s'agit, jouit donc de ces propriétés remarquables, savoir, 1°. que la somme des aires tracées par les projections des rayons vecteurs des corps, et multipliées respectivement par leurs masses, y est la plus grande possible; 2°. que la même somme, relativement à un plan quelconque qui lui est perpendiculaire, est nulle, puisque l'angle φ reste indéterminé. On pourra, au moyen de ces propriétés, retrouver ce plan, à un instant quelconque, quelles que soient les variations survenues par l'action mutuelle des corps, dans leur position respective; de même que l'on peut facilement retrouver dans tous les temps, la position du centre de gravité du système; et par cette raison, il est aussi naturel de rapporter à ce plan, les x et les y, que de rapporter au centre de gravité, l'origine des coordonnées.

22. Les principes de la conservation des forces vives et des aires ont encore lieu, en supposant à l'origine des coordonnées, un mouvement rectiligne et uniforme dans l'espace. Pour le démontrer, nommons X, Y, Z les coordonnées de cette origine supposée mobile, par rapport à un point fixe, et supposons,

$$x = X + x_{,}\ ; \quad y = Y + y_{,}\ ; \quad z = Z + z_{,}\ ;$$
$$x' = X + x_{,}'\ ; \quad y' = Y + y_{,}'\ ; \quad z' = Z + z_{,}'\ ;$$
&c.

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,}'$, &c. seront les coordonnées de m, m', &c., relativement à l'origine mobile. On aura par l'hypothèse,

$$ddX = 0\ ; \quad ddY = 0\ ; \quad ddZ = 0\ ;$$

mais on a par la nature du centre de gravité, lorsque le système est libre,.

$$0 = \Sigma.m.\{ddx + ddx_{,}\} - \Sigma.m.P.dt^2\ ;$$
$$0 = \Sigma.m.\{ddy + ddy_{,}\} - \Sigma.m.Q.dt^2\ ;$$
$$0 = \Sigma.m.\{ddz + ddz_{,}\} - \Sigma.m.R.dt^2\ ;$$

l'équation (P) du n°. 18 deviendra ainsi, en y substituant $\delta X + \delta x_{,}$, $\delta Y + \delta y_{,}$, &c., au lieu de δx, δy, &c.;

$$0 = \Sigma.m.\delta x_{,}.\left\{\frac{ddx_{,}}{dt^2} - P\right\} + \Sigma.m.\delta y_{,}.\left\{\frac{ddy_{,}}{dt^2} - Q\right\} + \Sigma.m.\delta z_{,}.\left\{\frac{ddz_{,}}{dt^2} - R\right\};$$

équation exactement de la même forme que l'équation (P), si les forces P, Q, R, ne dépendent que des coordonnées $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, $x_{\prime}'$, &c. En lui appliquant donc l'analyse précédente, on en tirera les principes de la conservation des forces vives et des aires, par rapport à l'origine mobile des coordonnées.

Si le système n'éprouve point l'action de forces étrangères, son centre de gravité aura un mouvement rectiligne et uniforme dans l'espace, comme on l'a vu dans le n°. 20; en fixant donc à ce centre, l'origine des coordonnées x, y, z, ces principes subsisteront toujours. X, Y, Z, étant alors les coordonnées du centre de gravité; on aura par la nature de ce point,

$$0 = \Sigma . m . x_{\prime} \;; \qquad 0 = \Sigma . m . y_{\prime} \;; \qquad 0 = \Sigma . m . z_{\prime} \;;$$

ce qui donne

$$\Sigma . m . \frac{(x dy - y dx)}{dt} = \frac{(X dY - Y dX)}{dt} . \Sigma . m + \Sigma . m . \frac{(x_{\prime} dy_{\prime} - y_{\prime} dx_{\prime})}{dt};$$

$$\Sigma . m . \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}{dt^2} . \Sigma . m + \Sigma . m . \frac{(dx_{\prime}^2 + dy_{\prime}^2 + dz_{\prime}^2)}{dt^2};$$

ainsi les quantités résultantes des principes précédens, se composent, 1°. des quantités qui auroient lieu, si tous les corps du système étoient réunis à leur centre commun de gravité; 2°. des quantités relatives au centre de gravité supposé immobile; et comme les premières de ces quantités sont constantes, on voit la raison pour laquelle les principes dont il s'agit, ont lieu par rapport au centre de gravité. En fixant donc à ce point, l'origine des coordonnées x, y, z, x', &c., des équations (Z) du n°. précédent, elles subsisteront toujours; d'où il résulte que le plan passant constamment par ce centre, et relativement auquel la fonction $\Sigma . m . \frac{(x dy - y dx)}{dt}$ est un *maximum*, reste toujours parallèle à lui-même, pendant le mouvement du système, et que la même fonction relative à tout autre plan qui lui est perpendiculaire, est nulle.

Les principes de la conservation des aires et des forces vives, peuvent se réduire à des relations entre les coordonnées des distances mutuelles des corps du système. En effet, l'origine des x, des y, et des z, étant toujours supposée au centre de gravité; les équations (Z) du n°. précédent, peuvent être mises sous la forme

$$c\,.\Sigma.m = \Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dy'-dy)-(y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right\};$$

$$c'.\Sigma.m = \Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dz'-dz)-(z'-z).(dx'-dx)}{dt}\right\};$$

$$c''.\Sigma.m = \Sigma.mm'.\left\{\frac{(y'-y).(dz'-dz)-(z'-z).(dy'-dy)}{dt}\right\}.$$

On peut observer que les seconds membres de ces équations multipliées par dt, expriment la somme des projections des aires élémentaires tracées par chaque droite qui joint deux corps du système, dont l'un est supposé se mouvoir autour de l'autre considéré comme immobile, chaque aire étant multipliée par le produit des deux masses que joint la droite.

Si l'on applique aux équations précédentes, l'analyse du n°. 21, on verra que le plan passant constamment par l'un quelconque des corps du système, et relativement auquel la fonction $\Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dy'-dy)-(y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right\}$ est un *maximum*, reste toujours parallèle à lui-même, dans le mouvement du système, et que ce plan est parallèle au plan passant par le centre de gravité, et relativement auquel la fonction $\Sigma.m.\frac{(x\,dy-y\,dx)}{dt}$ est un *maximum*. On verra encore que les seconds membres des équations précédentes sont nuls relativement à tout plan passant par le même corps, et perpendiculaire au plan dont il s'agit.

L'équation Q du n°. 19, peut être mise sous la forme

$$\Sigma.mm'.\left\{\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2}\right\} = \text{const.} - 2\,\Sigma.m.\Sigma.\textstyle\int mm'.Fdf;$$

équation relative aux seules coordonnées des distances mutuelles des corps, et dans laquelle le premier membre exprime la somme des quarrés des vîtesses relatives des corps du système les uns autour des autres, en les considérant deux à deux, et en supposant l'un des deux, immobile, chaque quarré étant multiplié par le produit des deux masses que l'on considère.

23. Reprenons l'équation (R) du n°. 19; en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, on aura

$$\Sigma.mv.\delta v = \Sigma.m.(P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z);$$

l'équation (P) du n°. 18 devient ainsi,

$$0 = \Sigma . m . \left\{ \delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt} \right\} - \Sigma . m\, dt . v\, \delta v.$$

Soit ds l'élément de la courbe décrite par m; ds' l'élément de la courbe décrite par m', &c.; on aura

$$v\,dt = ds \;; \quad v'dt = ds' \;; \text{ \&c.}$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \;; \text{ \&c.}$$

d'où l'on tirera, en suivant l'analyse du n°. 8,

$$\Sigma . m . \delta . (v\,ds) = \Sigma . m . d . \frac{(dx . \delta x + dy . \delta y + dz . \delta z)}{dt}.$$

En intégrant, par rapport à la caractéristique différentielle d, et en étendant les intégrales, aux courbes entières décrites par les corps m, m', &c., on aura

$$\Sigma . \delta . \int m\, v\, ds = \text{constante} + \Sigma . m . \frac{(dx . \delta x + dy . \delta y + dz . \delta z)}{dt};$$

les variations δx, δy, δz, &c., étant, ainsi que la constante du second membre de cette équation, relatives aux points extrêmes des courbes décrites par m, m', &c.

Il suit de là, que si ces points sont supposés invariables, on a

$$0 = \Sigma . \delta . \int m\, v\, ds\,;$$

c'est-à-dire que la fonction $\Sigma . \int m v ds$ est un *minimum*. C'est en cela que consiste le principe de la moindre action, dans le mouvement d'un systême de corps; principe qui, comme l'on voit, n'est qu'un résultat mathématique des loix primordiales de l'équilibre et du mouvement de la matière. On voit en même temps, que ce principe combiné avec celui des forces vives, donne l'équation (P) du n°. 18, qui renferme tout ce qui est nécessaire à la détermination des mouvemens du systême. Enfin, on voit par le n°. 22, que ce principe a lieu encore, quand l'origine des coordonnées est mobile, pourvu que son mouvement soit rectiligne et uniforme, et que le systême soit libre.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Des loix du mouvement d'un systême de corps, dans toutes les relations mathématiquement possibles entre la force et la vîtesse.

24. Nous avons observé dans le n°. 5, qu'il y a une infinité de manières d'exprimer la force par la vîtesse, qui n'impliquent point contradiction. La plus simple de toutes, est celle de la force proportionnelle à la vîtesse, et nous avons vu qu'elle est la loi de la nature. C'est d'après cette loi, que nous avons exposé dans le chapitre précédent, les équations différentielles du mouvement d'un systême de corps ; mais il est facile d'étendre l'analyse dont nous avons fait usage, à toutes les loix mathématiquement possibles entre la vîtesse et la force, et de présenter ainsi, sous un nouveau point de vue, les principes généraux du mouvement. Pour cela, supposons que F étant la force, et v la vîtesse, on ait $F=\varphi(v)$; $\varphi(v)$ étant une fonction quelconque de v: désignons par $\varphi'(v)$, la différence de $\varphi(v)$ divisée par dv. Les dénominations des n^{os}. précédens, subsistant toujours, le corps m sera animé parallèlement à l'axe des x, de la force $\varphi(v).\frac{dx}{ds}$. Dans l'instant suivant, cette force deviendra $\varphi(v).\frac{dx}{ds}+d.\left(\varphi(v).\frac{dx}{ds}\right)$, ou $\varphi(v).\frac{dx}{ds}+d.\left(\frac{\varphi(v)}{v}.\frac{dx}{dt}\right)$, parce que $\frac{ds}{dt}=v$. Maintenant, P, Q, R, étant les forces qui animent le corps m, parallèlement aux axes des coordonnées; le systême sera, par le n°. 18, en équilibre, en vertu de ces forces et des différentielles $d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, $d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, $d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)$, prises avec un signe contraire; on aura donc, au lieu de l'équation (P) du même n°. celle-ci :

$$0=\Sigma.m.\left\{\delta x.\left\{d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Pdt\right\}+\delta y.\left\{d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Qdt\right\}+\delta z.\left\{d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Rdt\right\}\right\};\quad(S)$$

qui n'en diffère qu'en ce que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, y sont multipliés par la fonction $\frac{\varphi(v)}{v}$, qui dans le cas de la force proportionnelle à la vîtesse, peut être supposée égale à l'unité. Mais cette différence rend très-difficile, la solution des problêmes de mécanique. Cependant, on peut tirer de l'équation (S), des principes analogues à ceux de la conservation des forces vives, des aires et du centre de gravité.

Si l'on change δx en dx, δy en dy, δz en dz, &c., on aura

$$\Sigma.m.\left\{\delta x.d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)+\delta y.d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)+\delta z.d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right\}=\Sigma.m.vdv.dt.\varphi'(v);$$

et par conséquent

$$\Sigma.\int mv\,dv.\varphi'(v)=\text{constante}+\Sigma.\int m.(Pdx+Qdy+Rdz).$$

En supposant $\Sigma.m\,(Pdx+Qdy+Rdz)$, une différentielle exacte égale à $d\lambda$, on aura

$$\Sigma.\int mv\,dv.\varphi'(v)=\text{constante}+\lambda; \qquad (T)$$

équation analogue à l'équation (R) du n°. 19, et qui se change en elle, dans le cas de la nature où $\varphi'(v)=1$. Le principe de la conservation des forces vives a donc lieu dans toutes les loix mathématiquement possibles entre la force et la vîtesse, pourvu que l'on entende par *force vive* d'un corps, le produit de sa masse par le double de l'intégrale de sa vîtesse multipliée par la différentielle de la fonction de la vîtesse qui exprime la force.

Si l'on fait, dans l'équation (S), $\delta x'=\delta x+\delta x_{,}'$; $\delta y'=\delta y+\delta y_{,}'$; $\delta z'=\delta z+\delta z_{,}'$; $\delta x''=\delta x+\delta x_{,}''$; &c.; on aura, en égalant séparément à zéro, les coefficiens de δx, δy, δz,

$$0=\Sigma.m\left\{d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Pdt\right\};\quad 0=\Sigma.m.\left\{d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Qdt\right\};$$

$$0=\Sigma.m\left\{d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)-Rdt\right\}.$$

Ces trois équations sont analogues à celles du n°. 20, d'où nous avons conclu la conservation du mouvement du centre de gravité, dans le cas de la nature, lorsque le système n'est assujéti à d'autres forces qu'à l'action et à l'attraction mutuelle des corps du système. Dans ce cas, $\Sigma.mP$, $\Sigma.mQ$, $\Sigma.mR$ sont nuls, et l'on a

$$\text{constante} = \Sigma.m.\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}; \quad \text{constante} = \Sigma.m.\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v};$$

$$\text{constante} = \Sigma.m.\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}.$$

$m.\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}$ est égal à $m\varphi(v).\frac{dx}{ds}$, et cette dernière quantité est la force finie du corps, décomposée parallèlement à l'axe des x; la force d'un corps étant le produit de sa masse par la fonction de la vîtesse qui exprime la force. Ainsi la somme des forces finies du système, décomposées parallèlement à un axe quelconque, est alors constante, quel que soit le rapport de la force à la vîtesse; et ce qui distingue l'état du mouvement de celui du repos, est que dans ce dernier état, cette même somme est nulle. Ces résultats sont communs à toutes les loix mathématiquement possibles entre la force et la vîtesse; mais ce n'est que dans la loi de la nature, que le centre de gravité se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Supposons encore dans l'équation (S),

$$\delta x' = \frac{y'.\delta x}{y} + \delta x_{,}'; \quad \delta x'' = \frac{y''.\delta x}{y} + \delta x_{,}''; \quad \&c.$$

$$\delta y = \frac{-x\delta x}{y} + \delta y_{,}; \quad \delta y' = \frac{-x'.\delta x}{y} + \delta y_{,}'; \quad \&c.$$

la variation δx disparoîtra des variations des distances mutuelles f, f', &c. des corps du systême, et des forces qui dependent de ces quantités. Si le systême est libre d'obstacles étrangers, on aura, en égalant à zéro, le coefficient de δx,

$$0 = \Sigma.m.\left\{x.d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right) - y.d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right\} + \Sigma.m.\{Py - Qx\}.dt;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$c = \Sigma.m.\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right).\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma.\int m.(Py - Qx).dt.$$

On aura pareillement,

$$c' = \Sigma.m.\left(\frac{x\,dz - z\,dx}{dt}\right).\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma.\int m.(Pz - Rx).dt;$$

$$c'' = \Sigma.m.\left(\frac{y\,dz - z\,dy}{dt}\right).\frac{\varphi(v)}{v} + \Sigma.\int m.(Qz - Ry).dt;$$

c, c', c'' étant des constantes arbitraires.

Si le systême n'est soumis qu'à l'action mutuelle de ses parties, on a, par le n°. 21, $\Sigma.m.(Py-Qx)=0$; $\Sigma.m.(Pz-Rx)=0$; $\Sigma.m.(Qz-Ry)=0$; d'ailleurs, $m\left(x.\frac{dy}{dt}-y.\frac{dx}{dt}\right).\frac{\varphi(v)}{v}$ est le moment de la force finie dont le corps m est animé, décomposée parallèlement au plan des x et des y, pour faire tourner le systême autour de l'axe des z; l'intégrale finie $\Sigma.m.\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}\right).\frac{\varphi(v)}{v}$ est donc la somme des momens de toutes les forces finies des corps du systême, pour le faire tourner autour du même axe; cette somme est par conséquent constante. Elle est nulle dans l'état d'équilibre; il y a donc ici la même différence entre ces deux états, que relativement à la somme des forces parallèles à un axe quelconque. Dans la loi de la nature, cette propriété indique que la somme des aires décrites autour d'un point fixe, par les projections des rayons vecteurs des corps, est toujours la même en temps égal; mais cette constance des aires décrites n'a point lieu dans d'autres loix.

Si l'on différentie par rapport à la caractéristique δ, la fonction $\Sigma.\int m.\varphi(v).ds$; on aura

$$\delta.\Sigma.\int m.\varphi(v).ds=\Sigma.\int m.\varphi(v).\delta ds+\Sigma.\int m.\delta v.\varphi'(v).ds;$$

mais on a

$$\delta ds=\frac{dx.\delta dx+dy.\delta dy+dz.\delta dz}{ds}=\frac{1}{v}.\left\{\frac{dx}{dt}.d.\delta x+\frac{dy}{dt}.d.\delta y+\frac{dz}{dt}.d.\delta z\right\};$$

on aura donc, en intégrant par parties,

$$\delta.\Sigma.\int m.\varphi(v).ds=\Sigma.\frac{m\varphi(v)}{v}.\left\{\frac{dx}{dt}.\delta x+\frac{dy}{dt}.\delta y+\frac{dz}{dt}.\delta z\right\}$$
$$-\Sigma.\int m.\left\{\delta x.d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)+\delta y.d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)+\delta z.d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\varphi(v)}{v}\right)\right\}$$
$$+\Sigma.\int m.\delta v.\varphi'(v).ds.$$

Les points extrêmes des courbes décrites par les corps du systême, étant supposés fixes, le terme hors du signe $\int$, disparoît dans cette équation; on aura donc, en vertu de l'équation (S),

$$\delta.\Sigma.\int m.\varphi(v)ds=\Sigma.\int m.\delta v.\varphi'(v).ds-\Sigma.\int mdt.(P\delta x+Q\delta y+R\delta z)$$

mais l'équation (T) différentiée par rapport à δ, donne

$$\Sigma.\int m.\delta v.\varphi'(v).ds = \Sigma.\int m\,dt.(P\delta x + Q\delta y + R\delta z);$$

on a donc

$$0 = \delta.\Sigma.\int m.\varphi(v).ds.$$

Cette équation répond au principe de la moindre action dans la loi de la nature. $m.\varphi(v)$ est la force entière du corps m; ainsi ce principe revient à ce que la somme des intégrales des forces finies des corps du systême, multipliées respectivement par les élémens de leurs directions, est un *minimum*: présenté de cette manière, il convient à toutes les loix mathématiquement possibles entre la force et la vîtesse. Dans l'état de l'équilibre, la somme des forces multipliées par les élémens de leurs directions est nulle, en vertu du principe des vîtesses virtuelles; ce qui distingue donc à cet égard, l'état d'équilibre, de celui du mouvement, est que la même fonction différentielle, qui est nulle dans l'état d'équilibre, donne, étant intégrée, un *minimum* dans l'état de mouvement.

CHAPITRE VII.

Des mouvemens d'un corps solide de figure quelconque.

25. Les équations différentielles des mouvemens de translation et de rotation d'un corps solide, peuvent se déduire facilement de celles que nous avons développées dans le Chapitre V; mais leur importance dans la théorie du système du monde, nous engage à les développer avec étendue.

Imaginons un corps solide dont toutes les partics soient sollicitées par des forces quelconques. Nommons x, y, z, les coordonnées orthogonales de son centre de gravité; $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, les coordonnées d'une molécule quelconque dm du corps, en sorte que x', y', z' soient les coordonnées de cette molécule, rapportées au centre de gravité du corps. Soient de plus P, Q, R, les forces qui sollicitent la molécule, parallèlement aux axes des x, des y et des z. Les forces détruites à chaque instant dans la molécule dm, parallèlement à ces axes, seront par le n°. 18, en considérant l'élément dt, du temps, comme constant,

$$-\left(\frac{ddx+ddx'}{dt}\right).dm+P.dt.dm;$$

$$-\left(\frac{ddy+ddy'}{dt}\right).dm+Q.dt.dm;$$

$$-\left(\frac{ddz+ddz'}{dt}\right).dm+R.dt.dm.$$

Il faut donc que toutes les molécules animées de forces semblables, se fassent mutuellement équilibre. On a vu dans le n°. 15, que pour cela, il est nécessaire que la somme des forces parallèles au même axe, soit nulle; ce qui donne les trois équations suivantes:

$$S.\left(\frac{ddx+ddx'}{dt^2}\right).dm=S.Pdm;$$

$$S.\left(\frac{ddy+ddy'}{dt^2}\right).dm=S.Qdm;$$

$$S.\left(\frac{ddz+ddz'}{dt^2}\right).dm=S.Rdm;$$

la lettre S étant ici, un signe intégral, relatif à la molécule dm, et qui doit s'étendre à la masse entière du corps. Les variables x, y, z, sont les mêmes pour toutes les molécules ; on peut donc les faire sortir hors du signe S; ainsi en désignant par m la masse du corps, on aura

$$S.\frac{ddx}{dt^2}.dm=m.\frac{ddx}{dt^2}; \quad S.\frac{ddy}{dt^2}.dm=m.\frac{ddy}{dt^2}; \quad S.\frac{ddz}{dt^2}.dm=m.\frac{ddz}{dt^2}.$$

On a de plus, par la nature du centre de gravité,

$$S.x'.dm=0; \quad S.y'.dm=0; \quad S.z'.dm=0;$$

partant

$$S.\frac{ddx'}{dt^2}.dm=0; \quad S.\frac{ddy'}{dt^2}.dm=0; \quad S.\frac{ddz'}{dt^2}.dm=0;$$

on aura donc

$$\left.\begin{aligned} m.\frac{ddx}{dt^2}&=S.Pdm;\\ m.\frac{ddy}{dt^2}&=S.Qdm;\\ m.\frac{ddz}{dt^2}&=S.Rdm. \end{aligned}\right\}; \qquad (A)$$

ces trois équations déterminent le mouvement du centre de gravité du corps ; elles répondent aux équations du n°. 20, relatives au mouvement du centre de gravité d'un système de corps.

On a vu dans le n°. 15, que pour l'équilibre d'un corps solide, la somme des forces parallèles à l'axe des x, multipliées respectivement par leurs distances à l'axe des z, moins la somme des forces parallèles à l'axe des y, multipliées par leurs distances à l'axe des z, est égale à zéro ; on aura ainsi :

$$S.\left\{(x+x').\left(\frac{ddy+ddy'}{dt^2}\right)-(y+y').\left(\frac{ddx+ddx'}{dt^2}\right)\right\}.dm$$
$$=S.\{(x+x')Q-(y+y').P\}.dm; \quad (1)$$

or on a

$$S.(x.ddy-yddx).dm=m.(xddy-yddx);$$

on a pareillement

$$S.(Qx-Py).dm=x.\int Qdm-y.\int Pdm;$$

enfin on a

$$S.\{x'ddy+xddy'-y'ddx-yddx'\}.dm=ddy.S.x'dm-ddx.Sy'dm \\ +x.S.ddy'.dm-y.S.ddx'.dm;$$

et par la nature du centre de gravité, chacun des termes du second membre de cette équation, est nul; l'équation (1) deviendra donc, en vertu des équations (A),

$$S.\left(\frac{x'ddy'-y'ddx'}{dt^2}\right).dm=S.(Qx'-Py')..dm;$$

en intégrant cette équation par rapport au temps t, on aura

$$S.\left(\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}\right).dm=S.\int(Qx'-Py').dt.dm;$$

le signe intégral $\int$ se rapportant au temps t.

De-là il est facile de conclure que si l'on fait,

$$S.\int(Qx'-Py').dt.dm=N;$$
$$S.\int(Rx'-Pz').dt.dm=N';$$
$$S.\int(Ry'-Qz').dt.dm=N'';$$

on aura les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} S.\left(\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}\right).dm&=N;\\ S.\left(\frac{x'dz'-z'dx'}{dt}\right).dm&=N';\\ S.\left(\frac{y'dz'-z'dy'}{dt}\right).dm&=N''; \end{aligned}\right\}; \quad (B)$$

ces trois équations renferment le principe de la conservation des aires; elles suffisent pour déterminer le mouvement de rotation du corps, autour de son centre de gravité; réunies aux équations (A), elles déterminent complètement les mouvemens de translation et de rotation du corps.

Si le corps est assujéti à tourner autour d'un point fixe; il résulte du du n°. 15, que les équations (B) suffisent pour cet objet; mais alors, il faut fixer à ce point, l'origine des coordonnées x', y', z'.

26. Considérons particulièrement ces équations, en supposant cette origine fixe à un point quelconque différent ou non, du centre de gravité. Rapportons la position de chaque molécule, à trois axes perpendiculaires entre eux, fixes dans le corps, mais mobiles dans l'espace. Soit θ l'inclinaison du plan formé par les deux premiers axes, sur le plan des x et des y; soit φ l'angle formé par la ligne d'intersection de ces deux plans et par le premier axe; enfin, soit ψ l'angle que fait avec l'axe des x, la projection du troisième axe sur le plan des x et des y. Nous nommerons axes principaux, ces trois nouveaux axes, et nous désignerons par x'', y'' et z'', les trois coordonnées de la molécule dm, rapportées, à ces axes; on aura par le numéro 21,

$$\begin{aligned} x' = x''.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\sin.\varphi + \cos.\psi.\cos.\varphi\} \\ + y''.\{\cos.\theta.\sin.\psi.\cos.\varphi - \cos.\psi.\sin.\varphi\} + z''.\sin.\theta.\sin.\psi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = x''.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\sin.\varphi - \sin.\psi.\cos.\varphi\} \\ + y''.\{\cos.\theta.\cos.\psi.\cos.\varphi + \sin.\psi.\sin.\varphi\} + z''.\sin.\theta.\cos.\psi; \end{aligned}$$

$$z' = z''.\cos.\theta - y''.\sin.\theta.\cos.\varphi - x''.\sin.\theta.\sin.\varphi.$$

Au moyen de ces équations, on pourra développer les premiers membres des équations (B) en fonctions de θ, ψ et φ, et de leurs différentielles. Mais on simplifiera considérablement le calcul, en observant que la position des trois axes principaux dépend de trois arbitraires que l'on peut toujours déterminer de manière à satisfaire aux trois équations

$$S.x''y''.dm = 0; \quad S.x''z''.dm = 0; \quad S.y''z''.dm = 0.$$

Soit alors

$$S.(y''^2 + z''^2).dm = A; \quad S.(x''^2 + z''^2).dm = B;$$
$$S.(x''^2 + y''^2).dm = C;$$

et faisons pour abréger,

$$d\varphi - d\psi.\cos.\theta = p\,dt;$$
$$d\psi.\sin.\theta.\sin.\varphi - d\theta.\cos.\varphi = q\,dt;$$
$$d\psi.\sin.\theta.\cos.\varphi + d\theta.\sin.\varphi = r\,dt.$$

Les équations (B) se changeront après toutes les réductions, dans les trois suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} A.q.\sin.\theta.\sin.\varphi+Br.\sin.\theta.\cos.\varphi-Cp.\cos.\theta=-N; \\ \cos.\psi.\{Aq.\cos.\theta.\sin.\varphi+Br.\cos.\theta.\cos.\varphi+Cp.\sin.\theta\} \\ \quad+\sin.\psi.\{Br.\sin.\varphi-Aq.\cos.\varphi\}=-N'; \\ \cos.\psi.\{Br.\sin.\varphi-Aq.\cos.\varphi\} \\ -\sin.\psi.\{Aq.\cos.\theta.\sin.\varphi+Br.\cos.\theta.\cos.\varphi+Cp.\sin.\theta\}=-N'' \end{array}\right\};(C)$$

ces trois équations donnent, en les différentiant et en supposant $\psi=0$, après les différentiations, ce qui revient à prendre l'axe des x', infiniment près de la ligne d'intersection du plan des x' et des y', avec celui des x'' et des y'',

$$d\theta.\cos.\theta.(Br.\cos.\varphi+Aq.\sin.\varphi)+\sin.\theta.d.(Br.\cos.\varphi+Aq.\sin.\varphi)$$
$$-d.(Cp.\cos.\theta)=-dN;$$

$$d\psi.(Br.\sin.\varphi-Aq.\cos\varphi)-d\theta.\sin.\theta.(Br.\cos.\varphi+Aq.\sin.\varphi)$$
$$+\cos.\theta.d.(Br.\cos.\varphi+Aq.\sin.\varphi)+d.(Cp.\sin.\theta)=-dN;$$

$$d.(Br.\sin.\varphi-Aq.\cos.\varphi)-d\psi.\cos.\theta.(Br.\cos.\varphi+Aq.\sin.\varphi)$$
$$-Cp\,d\psi.\sin.\theta=-dN''.$$

Si l'on fait

$$Cp=p'\;;\quad Aq=q'\;;\quad Br=r'\;;$$

ces trois équations différentielles donnent les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} dp'+\frac{(B-A)}{AB}.q'r'.dt=dN.\cos.\theta-dN'.\sin.\theta; \\ dq'+\frac{(C-B)}{CB}.r'p'.dt=-(dN.\sin.\theta+dN'.\cos.\theta).\sin.\varphi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad+dN''.\cos.\varphi; \\ dr'+\frac{(A-C)}{AC}.p'q'.dt=-(dN.\sin.\theta+dN'.\cos.\theta).\cos.\varphi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad-dN''.\sin.\varphi. \end{array}\right\};\quad(D)$$

ces équations sont très-commodes pour déterminer le mouvement de rotation d'un corps, lorsqu'il tourne à fort peu près autour de l'un des axes principaux, ce qui est le cas des corps célestes.

27. Les trois axes principaux auxquels nous venons de rapporter les angles θ, ψ et φ, méritent une attention particulière; nous allons déterminer leur position dans un solide quelconque.

Les valeurs de x', y', z' du n°. précédent, donnent, par le n°. 21, les suivantes :

$$x'' = x'.(\cos.\theta.\sin.\psi.\sin.\varphi + \cos.\psi.\cos.\varphi) \\ +y'.(\cos.\theta.\cos.\psi.\sin.\varphi - \sin.\psi.\cos.\varphi) - z'.\sin.\theta.\sin.\varphi;$$

$$y'' = x'.(\cos.\theta.\sin.\psi.\cos.\varphi - \cos.\psi.\sin.\varphi) \\ +y'.(\cos.\theta.\cos.\psi.\cos.\varphi + \sin.\psi.\sin.\varphi) - z'.\sin.\theta.\cos.\varphi;$$

$$z'' = x'.\sin.\theta.\sin.\psi + y'.\sin.\theta.\cos.\psi + z'.\cos.\theta.$$

D'où l'on tire

$$x''.\cos.\varphi - y''.\sin.\varphi = x'.\cos.\psi - y'.\sin.\psi;$$
$$x''.\sin.\varphi + y''.\cos.\varphi = x'.\cos.\theta.\sin.\psi + y'.\cos.\theta.\cos.\psi - z'.\sin.\theta.$$

Soit

$$S.x'^2.dm = a^2; \quad S.y'^2.dm = b^2; \quad S.z'^2.dm = c^2;$$
$$S.x'y'.dm = f; \quad S.x'z'.dm = g; \quad S.y'.z'.dm = h;$$

on aura

$$\cos.\varphi.S.x''z''.dm - \sin.\varphi.S.y''z''.dm = (a^2 - b^2).\sin.\theta.\sin.\psi.\cos.\psi \\ +f.\sin.\theta.(\cos.^2\psi - \sin.^2\psi) + \cos.\theta.(g.\cos.\psi - h.\sin.\psi);$$

$$\sin.\varphi.S.x''z''dm + \cos.\varphi.S.y''z''.dm \\ = \sin.\theta.\cos.\theta.(a^2.\sin.^2\psi + b^2.\cos.^2\psi - c^2 + 2f.\sin.\psi.\cos.\psi) \\ +(\cos.^2\theta - \sin.^2\theta).(g.\sin.\psi + h.\cos.\psi).$$

En égalant à zéro, les seconds membres de ces deux équations, on aura

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{h.\sin.\psi - g.\cos.\psi}{(a^2 - b^2).\sin.\psi.\cos.\psi + f.(\cos.^2\psi - \sin.^2\psi)};$$

$$\tfrac{1}{2}\text{tang.}\,2\theta = \frac{g.\sin.\psi + h.\cos.\psi}{c^2 - a^2.\sin.^2\psi - b^2.\cos.^2\psi - 2f.\sin.\psi.\cos.\psi};$$

mais on a

$$\tfrac{1}{2}.\text{tang.}\,2\theta = \frac{\text{tang.}\,\theta}{1 - \text{tang.}^2\theta};$$

en égalant ces deux valeurs de tang. $\frac{1}{2}\theta$, et en substituant dans la dernière, au lieu de tang. θ, sa valeur précédente en ψ; en faisant ensuite, pour abréger, tang. $\psi = u$; on trouvera, après toutes les réductions, l'équation suivante du troisième degré;

$$0 = (gu + h).(hu - g)^2 \\ + \{(a^2 - b^2).u + f.(1 - u^2)\}.\{(hc^2 - ha^2 + fg).u + gb^2 - gc^2 - hf\}.$$

Cette équation ayant au moins une racine réelle, on voit qu'il est toujours possible de rendre nulles à-la-fois, les deux quantités

$$\cos.\varphi.S.x''z''.dm - \sin.\varphi.S.y''z''.dm\ ;$$
$$\sin.\varphi.S.x''z''.dm + \cos.\varphi.S.y''z''.dm\ ;$$

et par conséquent, la somme de leurs quarrés, $(S.x''z''.dm)^2 + (S.y''z''.dm)^2$, ce qui exige que l'on ait séparément,

$$S.x''z''.dm = 0\ ; \quad S.y''z''.dm = 0.$$

La valeur de u donne celle de l'angle ψ, et par conséquent, celle de tang. θ, et de l'angle θ. Il reste maintenant à déterminer l'angle φ, ce que l'on fera au moyen de la condition $S.x''y''.dm = 0$, qui reste à remplir. Pour cela, nous observerons que si l'on substitue dans $S.x''y''.dm$, au lieu de x'', y'' leurs valeurs précédentes; cette fonction deviendra de cette forme, $H.\sin.2\varphi + L.\cos.2\varphi$, H et L étant fonctions des angles θ et ψ, et des constantes a^2, b^2, c^2, f, g, h; en égalant cette expression à zéro, on aura

$$\text{tang.}\,2\varphi = \frac{-L}{H}.$$

Les trois axes déterminés au moyen des valeurs précédentes de θ, ψ et φ, satisfont aux trois équations,

$$S.x''y''.dm = 0\ ; \quad S.x''y''.dm = 0\ ; \quad S.x''z''.dm = 0.$$

L'équation du troisième degré en u, semble indiquer trois systêmes d'axes principaux semblables au précédent; mais on doit observer que u est la tangente de l'angle formé par l'axe des x', et par l'intersection du plan des x' et des y' avec celui des x'' et des y''; or il est clair que l'on peut changer les uns dans les autres, les trois axes des x'', des y'' et des z'', puisque les trois équations précédentes seront toujours satisfaites; l'équation en u, doit donc également déterminer la tangente de l'angle formé par l'axe des x' et par l'intersection du plan des x' et des y', soit avec le plan des x'' et des y'', soit avec le plan des x'' et des z'', soit enfin, avec le plan des y'' et des z''. Ainsi, les trois racines de l'équation en u, sont réelles, et elles appartiennent à un même systême d'axes.

Il suit de-là que généralement, un solide n'a qu'un seul systême d'axes qui jouissent de la propriété dont il s'agit. Ces axes ont été nommés *axes principaux de rotation*, à cause d'une propriété qui leur est particulière, et dont nous parlerons dans la suite.

On nomme *moment d'inertie* d'un corps, relativement à un axe quelconque, la somme des produits de chaque molécule du corps, par le quarré de sa distance à cet axe. Ainsi les quantités A, B, C, sont les momens d'inertie du solide que nous venons de considérer, par rapport aux axes des x'', des y'' et des z''. Nommons présentement C', le moment d'inertie du même solide, par rapport à l'axe des z'; on trouvera, au moyen des valeurs de x' et des y' du n°. précédent,

$$C' = A.\sin.^2\theta.\sin.^2\varphi + B.\sin.^2\theta.\cos.^2\varphi + C.\cos.^2\theta.$$

Les quantités $\sin.^2\theta.\sin.^2\varphi$, $\sin.^2\theta.\cos.^2\varphi$, et $\cos.^2\theta$, sont les quarrés des cosinus des angles que font les axes des x'', des y'' et des z'' avec l'axe des z'; d'où il suit en général, que si l'on multiplie le moment d'inertie relatif à chaque axe principal de rotation, par le quarré du cosinus de l'angle qu'il fait avec un axe quelconque, la somme de ces trois produits sera le moment d'inertie du solide, relativement à ce dernier axe.

La quantité C' est moindre que la plus grande des trois quantités A, B, C; elle est plus grande que la plus petite de ces trois quantités; le plus grand et le plus petit moment d'inertie appartiennent donc aux axes principaux.

Soient X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du solide, par rapport à l'origine des coordonnées, que nous fixons au point autour duquel le corps est assujéti à tourner, s'il n'est pas libre; $x'-X$, $y'-Y$ et $z'-Z$ seront les coordonnées de la molécule dm du corps, relativement à son centre de gravité : le moment d'inertie, relatif à un axe parallèle à l'axe des z', et passant par le centre de gravité, sera donc

$$S.\{(x'-X)^2+(y'-Y)^2\}.dm;$$

or on a, par la nature du centre de gravité, $S.x'dm = mX$; $S.y'dm = mY$; le moment précédent se réduit donc à

$$-m.(X^2+Y^2)+S.(x'^2+y'^2).dm.$$

On aura ainsi les momens d'inertie du solide, relativement aux axes qui passent par un point quelconque; lorsque ces momens seront connus par rapport aux axes qui passent par le centre de gravité. On voit en même temps, que le plus petit de tous les momens d'inertie, a lieu par rapport à l'un des trois axes principaux qui passent par ce centre.

Supposons que par la nature du corps, les deux momens d'inertie A et B soient égaux, on aura

$$C' = A.\sin.^2\theta + C.\cos.^2\theta\,;$$

en faisant donc θ égal à l'angle droit, ce qui rend l'axe des z' perpendiculaire à celui des z'', on aura $C' = A$. Les momens d'inertie relatifs à tous les axes situés dans le plan perpendiculaire à l'axe des z'', sont donc alors égaux entre eux. Mais il est facile de s'assurer que l'on a dans ce cas, pour le système de l'axe des z'' et de deux axes quelconques perpendiculaires entre eux et à cet axe,

$$S.x'y'.dm = 0\,; \quad S.x'z''.dm = 0\,; \quad S.y'z''.dm = 0;$$

car en désignant par x'' et y'' les coordonnées d'une molécule dm, du corps, rapportées aux deux axes principaux, pris dans le plan perpendiculaire à l'axe des z'', et par rapport auxquels les momens d'inertie sont supposés égaux, nous aurons

$$S.(x''^2 + z''^2).dm = S.(y''^2 + z''^2).dm\,;$$

ou simplement $S.x''^2.dm = S.y''^2.dm$; mais en nommant ε l'angle que l'axe des x' fait avec l'axe des x'', on a

$$x' = x''.\cos.\varepsilon + y''.\sin.\varepsilon\,;$$
$$y' = y''.\cos.\varepsilon - x''.\sin.\varepsilon\,;$$

on a donc

$$S.x'y'.dm = S.x''.y''.dm.(\cos.^2\varepsilon - \sin.^2\varepsilon)$$
$$+ S.(y''^2 - x''^2).dm.\sin.\varepsilon.\cos.\varepsilon = 0.$$

On trouvera semblablement $S.x'z''.dm = 0$; $S.y'z''dm = 0$; tous les axes perpendiculaires à celui des z'' sont donc alors des axes principaux; et dans ce cas, le solide a une infinité d'axes semblables.

Si l'on a à-la-fois, $A = B = C$; on aura généralement $C' = A$; c'est-à-dire, que tous les momens d'inertie du solide, sont égaux; mais alors on a généralement,

$$S.x'y'.dm = 0\,; \quad S.x'z'.dm = 0\,; \quad S.y'z'.dm = 0\,;$$

quelle que soit la position du plan des x' et des y'; en sorte que tous les axes sont des axes principaux. C'est le cas de la sphère : nous verrons dans la suite, que cette propriété convient à une infinité d'autres solides dont nous donnerons l'équation générale.

28. Les quantités p, q, r, que nous avons introduites dans les équations (C) du n°. 26, ont cela de remarquable, qu'elles déterminent la position de l'axe réel et instantané de rotation du corps, par rapport aux axes principaux. En effet, on a, relativement aux points situés dans l'axe de rotation, $dx'=0$; $dy'=0$; $dz'=0$, en différentiant les valeurs de x', y', z' du n°. 26, et en faisant $\sin.\psi=0$, après les différentiations, ce qui est permis, puisque l'on peut fixer à volonté, la position de l'axe des x', sur le plan des x' et des y', on aura

$$dx'=x''.\{d\psi.\cos.\theta.\sin.\varphi-d\varphi.\sin.\varphi\}+y''.\{d\psi.\cos.\theta.\cos.\varphi-d\varphi.\cos.\varphi\}$$
$$+z''.d\psi.\sin.\theta=0;$$

$$dy'=x''.\{d\varphi.\cos.\theta.\cos.\varphi-d\theta.\sin.\theta.\sin.\varphi-d\psi.\cos.\varphi\}$$
$$+y''.\{d\psi.\sin.\varphi-d\varphi.\cos.\theta.\sin.\varphi-d\theta.\sin.\theta.\cos.\varphi\}+z''d\theta.\cos.\theta=0;$$

$$dz'=-x''.\{d\theta.\cos.\theta.\sin.\varphi+d\varphi.\sin.\theta.\cos.\varphi\}$$
$$-y''.\{d\theta.\cos.\theta.\cos.\varphi-d\varphi.\sin.\theta.\sin.\varphi\}-z''d\theta.\sin.\theta.$$

Si l'on multiplie la première de ces équations, par $-\sin.\varphi$; la seconde, par $\cos.\theta.\cos.\varphi$, et la troisième, par $-\sin.\theta.\cos.\varphi$; on aura en les ajoutant,

$$0=px''-qz''.$$

Si l'on multiplie la première des mêmes équations, par $\cos.\varphi$; la seconde, par $\cos.\theta.\sin.\varphi$, et la troisième, par $-\sin.\theta.\sin.\varphi$; on aura, en les ajoutant;

$$0=py''-rz''.$$

Enfin, si l'on multiplie la seconde des mêmes équations, par $\sin.\theta$, et la troisième, par $\cos.\theta$; on aura, en les ajoutant,

$$0=qy''-rx''.$$

Cette dernière équation résulte évidemment des deux précédentes; ainsi les trois équations $dx'=0$, $dy'=0$, $dz'=0$, se réduisent à ces deux équations qui sont à une ligne droite formant avec les axes des x'', des y'' et des z'' des angles dont les cosinus sont

$$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Cette droite est donc en repos, et forme l'axe réel de rotation du corps.

Pour avoir la vîtesse de rotation du corps; considérons le point de l'axe des z'', éloigné de l'origine des coordonnées, d'une distance égale à l'unité. On aura ses vîtesses parallèlement aux axes des x', des y' et des z', en faisant $x''=0$, $y''=0$, $z''=1$, dans les expressions précédentes de dx', dy', dz', et en les divisant par dt, ce qui donne pour ces vîtesses partielles,

$$\frac{d\psi}{dt}.\sin.\theta\,; \qquad \frac{d\theta}{dt}.\cos.\theta\,; \qquad \frac{-d\theta}{dt}.\sin.\theta\,;$$

la vîtesse entière du point dont il s'agit, est donc $\frac{\sqrt{dt^2+d\psi^2.\sin.^2\theta}}{dt}$, ou $\sqrt{q^2+r^2}$. En divisant cette vîtesse, par la distance du point, à l'axe instantané de rotation, on aura la vîtesse angulaire de rotation du corps; or cette distance est évidemment égale au sinus de l'angle que l'axe réel de rotation fait avec l'axe des z'', angle dont le cosinus est $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$; on aura donc $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, pour la vîtesse angulaire de rotation.

On voit par-là, que quel que soit le mouvement de rotation d'un corps, autour d'un point fixe, ou considéré comme tel; ce mouvement ne peut être qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe pendant un instant, mais qui peut varier d'un instant à l'autre. La position de cet axe, par rapport aux trois axes principaux, et la vîtesse angulaire de rotation dépendent des variables p, q, r, dont la détermination est très-importante dans ces recherches, et qui exprimant des quantités indépendantes de la situation du plan des x' et des y', sont elles-mêmes indépendantes de cette situation.

29. Déterminons ces variables, en fonctions du temps t, dans le cas où le corps n'est sollicité par aucunes forces extérieures. Pour cela, reprenons les équations (D) du n°. 26, entre les variables p', q', r' qui sont aux précédentes, dans un rapport constant. Les différentielles dN, dN' et dN'', sont alors nulles, et ces

équations

équations donnent, en les ajoutant ensemble, après les avoir multipliées respectivement par p', q' et r',

$$o = p'dp' + q'dq' + r'dr';$$

et en intégrant,

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = k^2,$$

k étant une constante arbitraire.

Les équations (D) multipliées respectivement par $AB.p'$, $BC.q'$ et $AC.r'$, et ensuite ajoutées, donnent en intégrant leur somme,

$$AB.p'^2 + BC.q'^2 + AC.r'^2 = H^2;$$

H étant une constante arbitraire : cette équation renferme le principe de la conservation des forces vives. On tirera de ces deux intégrales,

$$q'^2 = \frac{AC.k^2 - H^2 + A.(B-C).p'^2}{C.(A-B)};$$

$$r'^2 = \frac{H^2 - BC.k^2 - B.(A-C).p'^2}{C.(A-B)};$$

ainsi, l'on connoîtra q' et r' en fonctions du temps t, lorsque p' sera déterminé; or la première des équations (D) donne

$$dt = \frac{AB.dp'}{(A-B).q'r'};$$

partant

$$dt = \frac{ABC.dp'}{\sqrt{\{AC.k^2 - H^2 + A.(B-C).p'^2\}.\{H^2 - BC.k^2 - B.(A-C).p'^2\}}};$$

équation qui n'est intégrable que dans l'un des trois cas suivans, $B = A$, $B = C$, $A = C$.

La détermination des trois quantités p', q', r' renferme trois arbitraires H^2, k^2, et celle qu'introduit l'intégration de l'équation différentielle précédente. Mais ces quantités ne donnent que la position de l'axe instantané de rotation du corps, sur sa surface, ou relativement aux trois axes principaux, et sa vîtesse angulaire de rotation. Pour avoir le mouvement réel du corps, autour du point fixe, il faut connoître encore la position des axes principaux dans l'espace; ce qui doit introduire trois nouvelles arbitraires relatives à la position primitive de ces axes, et ce qui exige trois nouvelles intégrales qui, jointes aux précédentes, donnent la solution complète du problême. Les équations (C) du n°. 26, renferment trois arbitraires N, N', N''; mais elles ne sont pas entièrement distinctes des arbitraires H et k. En effet, si l'on ajoute ensemble les quarrés des premiers membres des équations (C), on a

$$p'^2+q'^2+r'^2=N^2+N'^2+N''^2;$$

ce qui donne $k^2=N^2+N'^2+N''^2$.

Les constantes N, N', N'', répondent aux constantes c, c', c'' du n°. 21; et la fonction $\frac{1}{2}.t.\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$ exprime la somme des aires décrites pendant le temps t, par les projections de chaque molécule du corps, sur le plan relativement auquel cette somme est un *maximum*. N' et N'' sont nuls relativement à ce plan; en égalant donc à zéro, leurs valeurs trouvées dans le n°. 26, on aura

$$0=Br.\sin.\varphi-Aq.\cos.\varphi;$$
$$0=Aq.\cos.\theta.\sin.\varphi+Br.\cos.\theta.\cos.\varphi+Cp.\sin.\theta;$$

d'où l'on tire

$$\cos.\theta=\frac{p'}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}};$$

$$\sin.\theta.\sin.\varphi=\frac{-q'}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}};$$

$$\sin.\theta.\cos.\varphi=\frac{-r'}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}.$$

Au moyen de ces équations, on connoîtra les valeurs de θ et de φ, en fonctions du temps, relativement au plan fixe que nous venons de considérer. Il ne s'agit plus que de connoître l'angle ψ, que l'intersection de ce plan, et de celui des deux premiers axes principaux, fait avec l'axe des x'; ce qui exige une nouvelle intégration.

Les valeurs de q et de r du n°. 26 donnent

$$d\psi.\sin.^2\theta=q\,dt.\sin.\theta.\sin.\varphi+rdt.\sin.\theta.\cos.\varphi;$$

d'où l'on tire

$$d\psi=\frac{-K.dt.(Bq'^2+Ar'^2)}{AB.(q'^2+r'^2)};$$

or on a par ce qui précède

$$q'^2+r'^2=k^2-p'^2; \quad Bq'^2+Ar'^2=\frac{H^2-AB.p'^2}{C};$$

on aura donc

$$d\psi = \frac{-k.dt.\{H^2 - AB.p'^2\}}{ABC.(k^2 - p'^2)}.$$

Si l'on substitue au lieu de dt, sa valeur trouvée ci-dessus ; on aura la valeur de ψ en fonction de p'; les trois angles θ, φ et ψ seront ainsi déterminés en fonctions des variables p', q', r', qui seront elles-mêmes, déterminées en fonctions du temps t. On connoîtra donc à un instant quelconque, les valeurs de ces angles par rapport au plan des x' et des y', que nous venons de considérer, et il sera facile, par les formules de la trigonométrie sphérique, d'en conclureles valeurs des mêmes angles, relatives à tout autre plan; ce qui introduira deux nouvelles arbitraires qui réunies aux quatre précédentes, formeront les six arbitraires que doit renfermer la solution complète du problême que nous venons de traiter. Mais on voit que la considération du plan dont nous venons de parler, simplifie ce problême.

La position des trois axes principaux, étant supposée connue sur la surface du corps; si l'on connoît à un instant quelconque, la position de l'axe réel de rotation, à cette surface, et la vîtesse angulaire de rotation; on aura à cet instant, les valeurs de p, q, r, puisque ces valeurs divisées par la vîtesse angulaire de rotation, expriment les cosinus des angles que l'axe réel de rotation forme avec les trois axes principaux ; on aura donc les valeurs de p', q', r'; or ces dernières valeurs sont proportionnelles aux cosinus des angles que les trois axes principaux forment avec le plan des x' et des y', relativement auquel la somme des aires des projections des molécules du corps, multipliées respectivement par ces molécules, est un *maximum ;* on pourra donc alors déterminer à tous les instans, l'intersection de la surface du corps, par ce plan invariable; et par conséquent, retrouver la position de ce plan, par les conditions actuelles du mouvement du corps.

Supposons que le mouvement de rotation du corps soit dû à une impulsion primitive qui ne passe point par son centre de gravité. Il résulte de ce que nous avons démontré dans les nos. 20 et 22, que le centre de gravité prendra le même mouvement, que si cette impulsion lui étoit immédiatement appliquée, et que le corps

L 2

prendra autour de ce centre, le même mouvement de rotation, que si ce centre étoit immobile. La somme des aires décrites autour de ce point, par le rayon vecteur de chaque molécule projetée sur un plan fixe, et multipliées respectivement par ces molécules, sera proportionnelle au moment de la force primitive projetée sur le même plan; or ce moment est le plus grand, relativement au plan qui passe par sa direction et par le centre de gravité; ce plan est donc le plan invariable. Si l'on nomme f la distance de l'impulsion primitive, au centre de gravité; et v, la vîtesse qu'elle imprime à ce point; m étant la masse du corps, mfv, sera le moment de cette impulsion, et en le multipliant par $\frac{1}{2}t$, le produit sera égal à la somme des aires décrites pendant le temps t; mais cette somme, par ce qui précède, est $\frac{t}{2}.\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$; on a donc

$$\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}=m.fv.$$

Si l'on connoît à l'origine du mouvement, la position des axes principaux, relativement au plan invariable, ou les angles θ et φ; on aura à cette origine, les valeurs de p', q' et r', et par conséquent, celles de p, q, r; on aura donc à un instant quelconque, les valeurs des mêmes quantités.

Cette théorie peut servir à expliquer le double mouvement de rotation et de révolution des planètes, par une seule impulsion primitive. Supposons en effet, qu'une planète soit une sphère homogène d'un rayon R; et qu'elle tourne autour du soleil avec une vîtesse angulaire U; r étant supposé exprimer sa distance au soleil, on aura $v=rU$; de plus, si l'on conçoit que la planète se meut en vertu d'une impulsion primitive dont la direction a passé à la distance f de son centre; il est clair qu'elle tournera sur elle-même, autour d'un axe perpendiculaire au plan invariable; en considérant donc cet axe, comme le troisième axe principal, on aura, $\theta=0$, et par conséquent $q'=0$, $r'=0$; on aura donc $p'=mfv$, ou $Cp=mfrU$. Mais dans la sphère, on a $C=\frac{2}{5}mR^2$; partant,

$$f=\frac{2}{5}.\frac{R^2}{r}.\frac{p}{U};$$

ce qui donne la distance f de la direction de l'impulsion primitive, au centre de la planète, qui satisfait au rapport observé entre la vîtesse angulaire p de rotation, et la vîtesse angulaire U de révolution autour du soleil. Relativement à la terre, on a $\frac{p}{U}=366,25638$; la parallaxe du soleil donne $\frac{R}{r}=0,000042665$, et par conséquent $f=\frac{1}{160}.R$, à fort peu près.

Les planètes n'étant point homogènes; on peut les considérer ici comme étant formées de couches sphériques et concentriques, d'inégales densités. Soit ρ la densité d'une de ces couches dont le rayon est R, ρ étant fonction de R; on aura

$$C=\frac{2m}{3}\cdot\frac{\int\rho.R^4.dR}{\int\rho.R^2.dR},$$

m étant la masse entière de la planète, et les intégrales étant prises depuis $R=0$, jusqu'à sa valeur à la surface; on aura ainsi

$$f=\frac{2}{3}\cdot\frac{p}{rU}\cdot\frac{\int\rho.R^4.dR}{\int\rho.R^2.dR}.$$

Si, comme il est naturel de le supposer, les couches les plus voisines du centre, sont les plus denses; la fonction $\frac{\int\rho.R^4.dR}{\int\rho.R^2.dR}$ sera moindre que $\frac{3}{5}$; la valeur de f sera donc moindre que dans le cas de l'homogénéité.

30. Déterminons présentement les oscillations du corps, dans le cas où il tourne à très-peu-près, autour du troisième axe principal. On pourroit les déduire des intégrales auxquelles nous sommes parvenus dans le n°. précédent; mais il est plus simple de les tirer directement des équations différentielles (D) du n°. 26. Le corps n'étant sollicité par aucunes forces, ces équations deviennent, en y substituant au lieu de p', q', r', leurs valeurs Cp, Aq, et Br,

$$dp+\frac{(B-A)}{C}.qr.dt=0;$$

$$dq+\frac{(C-B)}{A}.rp.dt=0;$$

$$dr+\frac{(A-C)}{B}.pq.dt=0.$$

Le solide étant supposé tourner à fort peu près, autour de son troisième axe principal; q et r sont de très-petites quantités dont nous négligerons les quarrés et les produits; ce qui donne $dp=0$, et par conséquent, p constant. Si dans les deux autres équations, on suppose,

$$q=M.\sin.(nt+\gamma)\ ; \quad r=M'.\cos.(nt+\gamma)\ ;$$

on aura

$$n=p.\sqrt{\frac{(C-A).(C-B)}{AB}}\ ; \quad M'=-M.\sqrt{\frac{A.(C-A)}{B.(C-B)}}\ ;$$

M et γ étant deux constantes arbitraires. La vîtesse angulaire de rotation sera $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, ou simplement p, en négligeant les quarrés de q et de r; cette vîtesse sera donc à très-peu près constante. Enfin, le sinus de l'angle formé par l'axe réel de rotation, et par le troisième axe principal, sera $\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{p}$.

Si à l'origine du mouvement, on a $q=0$, et $r=0$, c'est-à-dire, si l'axe réel de rotation coincide à cet instant, avec le troisième axe principal; on aura $M=0$, $M'=0$; q et r seront donc toujours nuls, et l'axe de rotation coincidera toujours avec le troisième axe principal; d'où il suit que si le corps commence à tourner autour d'un des axes principaux, il continuera de tourner uniformément autour du même axe. Cette propriété remarquable des axes principaux, les a fait nommer *axes principaux de rotation*; elle leur convient exclusivement; car si l'axe réel de rotation est invariable à la surface du corps, on a $dp=0$, $dq=0$, $dr=0$; les valeurs précédentes de ces quantités donnent ainsi,

$$\frac{(B-A)}{C}.rq=0\ ; \quad \frac{(C-B)}{A}.rp=0\ ; \quad \frac{(A-C)}{B}.pq=0.$$

Dans le cas général où A, B, C sont inégaux; deux des trois quantités p, q, r sont nulles en vertu de ces équations, ce qui suppose que l'axe réel de rotation coïncide avec l'un des axes principaux.

Si deux des trois quantités A, B, C sont égales, par exemple, si l'on a $A=B$; les trois équations précédentes se réduisent à celles-ci, $rp=0$, $pq=0$; et l'on peut y satisfaire, par la supposition seule de p égal à zéro. L'axe de rotation est alors dans un plan perpendiculaire au troisième axe principal ; mais on a vu (n°. 27), que tous les axes situés dans ce plan, sont des axes principaux.

Enfin, si l'on a à-la-fois $A = B = C$, les trois équations précédentes seront satisfaites, quels que soient p, q, r; mais alors, par le n°. 27, tous les axes du corps, sont des axes principaux.

Il suit de-là, que les seuls axes principaux ont la propriété d'être des axes invariables de rotation; mais ils n'en jouissent pas tous de la même manière. Le mouvement de rotation autour de celui dont le moment d'inertie est entre les momens d'inertie des deux autres axes, peut être troublé d'une manière sensible par la cause la plus légère; en sorte qu'il n'y a point de stabilité dans ce mouvement.

On nomme *état stable* d'un système de corps, un état tel que le système, lorsqu'il en est infiniment peu dérangé, ne puisse s'en écarter qu'infiniment peu, en faisant des oscillations continuelles autour de cet état. Concevons, cela posé, que l'axe réel de rotation s'éloigne infiniment peu du troisième axe principal ; dans ce cas, les constantes M et M' sont infiniment petites ; et si n est une quantité réelle, les valeurs de q et de r resteront toujours infiniment petites, et l'axe réel de rotation, ne fera jamais que des excursions du même ordre, autour du troisième axe principal. Mais si n étoit imaginaire, sin. $(nt+\gamma)$, et cos. $(nt+\gamma)$ se changeroient en exponentielles ; les expressions de q et de r pourroient donc alors augmenter indéfiniment, et cesser enfin d'être infiniment petites ; il n'y auroit donc point de stabilité dans le mouvement de rotation du corps, autour du troisième axe principal. La valeur de n est réelle, si C est la plus grande ou la plus petite des trois quantités A, B, C; car alors le produit $(C-A).(C-B)$ est positif; mais ce produit est négatif, si C est entre A et B; et dans ce cas, n est imaginaire ; ainsi, le mouvement de rotation est stable autour des deux axes principaux dont les momens d'inertie sont le plus grand et le plus petit ; il ne l'est pas autour de l'autre axe principal.

Maintenant, pour déterminer la position des axes principaux dans l'espace, nous supposerons le troisième axe principal, à fort peu près perpendiculaire au plan des x' et des y', en sorte que θ

soit une quantité très-petite dont nous négligerons le quarré. Nous aurons par le n°. 26,

$$d\varphi - d\psi = p\,dt\,;$$

ce qui donne en intégrant,

$$\psi = \varphi - pt - \varepsilon,$$

ε étant une constante arbitraire. Si l'on fait ensuite,

$$\sin.\theta.\sin.\varphi = s\;; \qquad \sin.\theta.\cos.\varphi = u\;;$$

les valeurs de q et de r du n°. 26, donneront, en éliminant $d\psi$,

$$\frac{ds}{dt} - pu = r\;; \qquad \frac{du}{dt} + ps = -q\;;$$

et en intégrant,

$$s = \beta.\sin.(pt + \lambda) - \frac{A.M}{Cp}.\sin.(nt + \gamma)\;;$$

$$u = \beta.\cos.(pt + \lambda) - \frac{BM'}{Cp}.\cos.(nt + \gamma)\;;$$

β et λ étant deux nouvelles arbitraires : le problême est ainsi complètement résolu, puisque les valeurs de s et de u donnent les angles θ et φ en fonction du temps, et que ψ est déterminé en fonction de φ et de t. Si β est nul, le plan des x' et des y', devient le plan invariable auquel nous avons rapporté dans le n°. précédent, les angles θ, φ et ψ.

31. Si le solide est libre; l'analyse des n°s. précédens donnera son mouvement autour de son centre de gravité : si le solide est forcé de se mouvoir autour d'un point fixe, elle fera connoître son mouvement autour de ce point. Il nous reste à considérer le mouvement d'un solide assujéti à se mouvoir autour d'un axe fixe.

Concevons que x' soit cet axe que nous supposerons horizontal: dans ce cas, la dernière des équations (B) du n°. 25, suffira pour déterminer le mouvement du corps. Supposons de plus que l'axe des y' soit horizontal, et qu'ainsi l'axe des z' soit vertical et dirigé vers le centre de la terre; supposons enfin, que le plan qui passe par les axes des y' et des z', passe par le centre de gravité du corps, et imaginons un axe passant constamment par ce centre et par l'origine des coordonnées. Soit θ l'angle que ce nouvel axe fait avec celui

celui des z'; si l'on nomme y'' et z'' les coordonnées rapportées à ce nouvel axe, on aura

$$y' = y''.\cos.\theta + z''.\sin.\theta\ ; \qquad z' = z''.\cos.\theta - y''.\sin.\theta\ ;$$

d'où l'on tire,

$$S.\left(\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}\right).dm = -\frac{d\theta}{dt}.S.dm.(y''^2 + z''^2).$$

$S.dm.(y''^2 + z''^2)$ est le moment d'inertie du corps relativement à l'axe des x' : soit C ce moment. La dernière des équations (B) du n°. 25, donnera

$$-C.\frac{dd\theta}{dt^2} = \frac{dN''}{dt}.$$

Supposons que le corps ne soit sollicité que par l'action de la pesanteur ; les valeurs de P et de Q du n°. 25, seront nulles, et R sera constant, ce qui donne

$$\frac{dN''}{dt} = S.Ry'.dm = R.\cos.\theta.\int.y''.dm + R.\sin.\theta.\int.z''.dm.$$

L'axe des z'' passant par le centre de gravité du corps, on a $S.y''.dm = 0$; de plus, si l'on nomme h la distance du centre de gravité du corps, à l'axe de x'; on aura $S.z''.dm = mh$, m étant la masse entière du corps; on aura donc

$$\frac{dN''}{dt} = mh.R.\sin.\theta,$$

et par conséquent,

$$\frac{dd\theta}{dt^2} = \frac{-m.h.R.\sin.\theta}{C}.$$

Considérons présentement, un second corps dont toutes les parties soient réunies dans un seul point éloigné de la distance l, de l'axe des x'; on aura, relativement à ce corps, $C = m'l^2$, m' étant sa masse; de plus, h sera égal à l; partant

$$\frac{dd\theta}{dt^2} = \frac{-R}{l}.\sin.\theta.$$

Ces deux corps auront donc exactement le même mouvement d'oscillation, si leur vîtesse initiale angulaire, lorsque leurs centres de gravité sont dans la verticale, est la même, et si l'on a $l = \frac{C}{mh}$. Le second corps dont nous venons de parler, est le pendule simple dont on a considéré les oscillations dans le n°. 11; on peut donc toujours assigner, par cette formule, la longueur l, du pendule simple dont les oscillations sont isochrones à celles du solide que nous considérons ici, et qui forme un pendule composé. C'est ainsi que l'on a déterminé la longueur du pendule simple qui bat les secondes, par des observations faites sur les pendules composés.

CHAPITRE VIII.

Du mouvement des fluides.

32. Nous ferons dépendre les loix du mouvement des fluides, de celles de leur équilibre; de même que, dans le Chapitre V, nous avons déduit les loix du mouvement d'un systême de corps, de celles de l'équilibre de ce systême. Reprenons donc l'équation générale de l'équilibre des fluides, donnée dans le n°. 17,

$$\delta p = \rho . \{P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z\};$$

la caractéristique δ, ne se rapportant qu'aux coordonnées x, y, z de la molécule, et n'étant point relative au temps t. Lorsque le fluide est en mouvement, les forces en vertu desquelles ses molécules seroient en équilibre, sont, par le n°. 18, en supposant dt constant,

$$P - \left(\frac{ddx}{dt^2}\right); \quad Q - \left(\frac{ddy}{dt^2}\right); \quad R - \left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

il faut donc substituer ces forces, au lieu de P, Q, R, dans l'équation précédente de l'équilibre. En désignant par δV, la variation $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$, que nous supposerons exacte; on aura

$$\delta V - \frac{\delta p}{\rho} = \delta x.\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + \delta y.\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \delta z.\left(\frac{ddz}{dt^2}\right); \qquad (F)$$

cette équation équivaut à trois équations distinctes; puisque les variations δx, δy, δz, étant indépendantes, on peut égaler séparément à zéro, leurs coefficiens.

Les coordonnées x, y, z, sont fonctions des coordonnées primitives et du temps t; soient a, b, c, ces coordonnées primitives, on aura

$$\delta x = \left(\frac{dx}{da}\right).\delta a + \left(\frac{dx}{db}\right).\delta b + \left(\frac{dx}{dc}\right).\delta c;$$

$$\delta y = \left(\frac{dy}{da}\right).\delta a + \left(\frac{dy}{db}\right).\delta b + \left(\frac{dy}{dc}\right).\delta c;$$

$$\delta z = \left(\frac{dz}{da}\right).\delta a + \left(\frac{dz}{db}\right).\delta b + \left(\frac{dz}{dc}\right).\delta c.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (F), on pourra égaler séparément à zéro, les coefficiens de δa, δb, δc; ce qui donnera trois équations à différences partielles entre les trois coordonnées x, y, z de la molécule, ses coordonnées primitives a, b, c, et le temps t.

Il nous reste à remplir les conditions de la continuité du fluide. Pour cela, considérons à l'origine du mouvement, un parallélipipède fluide rectangle dont les trois dimensions soient $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}c$. En désignant par (ρ) la densité primitive de cette molécule; sa masse sera $(\rho).\mathrm{d}a.\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$. Nommons (A) ce parallélipipède : il est aisé de voir qu'après le temps t, il se changera dans un parallélipipède obliquangle; car toutes les molécules situées primitivement sur une face quelconque du parallélipipède (A), seront encore dans un même plan, du moins en négligeant les infiniment petits du second ordre : toutes les molécules situées sur les arrètes parallèles de (A), se trouveront sur de petites droites égales et parallèles entre elles. Nommons (B), ce nouveau parallélipipède, et concevons que par les extrémités de l'arrète formée par les molécules qui, dans le parallélipipède (A), composoient l'arrète $\mathrm{d}c$, on mène deux plans parallèles à celui des x et des y. En prolongeant les arrètes de (B), jusqu'à la rencontre de ces deux plans; on aura un nouveau parallélipipède (C), compris entre eux et égal à (B); car il est clair qu'autant l'un des deux plans retranche du parallélipipède (B), autant l'autre lui ajoute. Le parallélipipède (C) aura ses deux bases parallèles au plan des x et des y : sa hauteur comprise entre ses bases, sera évidemment égale à la différence de z, prise en n'y faisant varier que c; ce qui donne $\left(\frac{dz}{dc}\right).\mathrm{d}c$, pour cette hauteur.

On aura sa base, en observant qu'elle est égale à la section de (B), par un plan parallèle à celui des x et des y; nommons (ε) cette section. Par rapport aux molécules dont elle sera formée, la valeur de z sera la même, et l'on aura

$$0=\left(\frac{dz}{da}\right).\mathrm{d}a+\left(\frac{dz}{db}\right).\mathrm{d}b+\left(\frac{dz}{dc}\right).\mathrm{d}c.$$

Soient δp et δq deux côtés contigus de la section (ε), dont le premier soit formé par des molécules de la face $\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$ du parallélipipède (A), et dont le second soit formé par des molécules de sa face $\mathrm{d}a.\mathrm{d}c$. Si par les extrémités du côté δp, on imagine deux droites parallèles à l'axe des x, et que l'on prolonge le côté du parallélogramme (ε), parallèle à δp, jusqu'à la rencontre de ces droites; elles intercepteront entre elles, un nouveau parallélogramme (λ) égal à (ε), et dont la base sera parallèle à l'axe des x. Le côté δp étant formé par des molécules de la face $\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$, relativement auxquelles la valeur de z est la même; il est aisé de voir que la hauteur du parallélogramme (λ) est la différence de y, en supposant a, z et t constans, ce qui donne

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{dy}{db}\right).\mathrm{d}b + \left(\frac{dy}{dc}\right).\mathrm{d}c\,;$$

$$0 = \left(\frac{dz}{db}\right).\mathrm{d}b + \left(\frac{dz}{dc}\right).\mathrm{d}c\,;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{d}y = \frac{\left\{\left(\frac{dy}{db}\right).\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right).\left(\frac{dz}{db}\right)\right\}.\mathrm{d}b\,;}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}$$

c'est l'expression de la hauteur du parallélogramme (λ). Sa base est égale à la section de ce parallélogramme, par un plan parallèle à l'axe des x; cette section est formée des molécules du parallélipipède (A), par rapport auxquelles z et y sont constans; sa longueur est donc égale à la différentielle de x, prise en supposant z, y et t constans; ce qui donne les trois équations,

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{dx}{da}\right).\mathrm{d}a + \left(\frac{dx}{db}\right).\mathrm{d}b + \left(\frac{dx}{dc}\right).\mathrm{d}c\,;$$

$$0 = \left(\frac{dy}{da}\right).\mathrm{d}a + \left(\frac{dy}{db}\right).\mathrm{d}b + \left(\frac{dy}{dc}\right).\mathrm{d}c\,;$$

$$0 = \left(\frac{dz}{da}\right).\mathrm{d}a + \left(\frac{dz}{db}\right).\mathrm{d}b + \left(\frac{dz}{dc}\right).\mathrm{d}c.$$

Soit pour abréger,

$$\varepsilon = \left(\frac{dx}{da}\right).\left(\frac{dy}{db}\right).\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right).\left(\frac{dy}{dc}\right).\left(\frac{dz}{db}\right) + \left(\frac{dx}{db}\right).\left(\frac{dy}{dc}\right).\left(\frac{dz}{da}\right)$$
$$- \left(\frac{dx}{db}\right).\left(\frac{dy}{da}\right).\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right).\left(\frac{dy}{da}\right).\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right).\left(\frac{dy}{db}\right).\left(\frac{dz}{da}\right);$$

on aura

$$\mathrm{d}x = \frac{\epsilon.\mathrm{d}a}{\left(\frac{dy}{db}\right).\left(\frac{dz}{dc}\right)-\left(\frac{dy}{dc}\right).\left(\frac{dz}{db}\right)};$$

c'est l'expression de la base du parallélogramme (λ); la surface de ce parallelogramme sera donc $\frac{\epsilon.\mathrm{d}a.\mathrm{d}b}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}$. Cette quantité exprime encore la surface du parallélogramme (ϵ); en la multipliant par $\left(\frac{dz}{dc}\right).\mathrm{d}c$, on aura $\epsilon.\mathrm{d}a.\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$ pour le volume des parallélipipèdes (C) et (B). Soit ρ la densité du parallélipipède (A) après le temps t; on aura $\rho\epsilon.\mathrm{d}a.\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$ pour sa masse; en l'égalant à sa masse primitive $(\rho).\mathrm{d}a.\mathrm{d}b.\mathrm{d}c$, on aura

$$\rho\epsilon = (\rho)\ ; \qquad (G)$$

pour l'équation relative à la continuité du fluide.

33. On peut donner aux équations (F) et (G), une autre forme d'un usage plus commode dans quelques circonstances. Soient u, ν et v, les vîtesses d'une molécule fluide, parallèlement aux axes des x, des y et des z; on aura

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=u\ ; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)=\nu\ ; \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)=\mathrm{v}.$$

Différentions ces équations, en regardant u, ν et v, comme fonctions des coordonnées x, y, z de la molécule, et du temps t; nous aurons

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)+u.\left(\frac{du}{dx}\right)+\nu.\left(\frac{du}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{du}{dz}\right);$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{d\nu}{dt}\right)+u.\left(\frac{d\nu}{dx}\right)+\nu.\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{d\nu}{dz}\right);$$
$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)+u.\left(\frac{d\mathrm{v}}{dx}\right)+\nu.\left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right).$$

L'équation (F) du n°. précédent deviendra ainsi,

$$\begin{aligned}\delta V-\frac{\delta p}{\rho}=\delta x.&\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)+u.\left(\frac{du}{dx}\right)+\nu.\left(\frac{du}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{du}{dz}\right)\right\}\\ +\delta y.&\left\{\left(\frac{d\nu}{dt}\right)+u.\left(\frac{d\nu}{dx}\right)+\nu.\left(\frac{d\nu}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right\}\ ;\ (H)\\ +\delta z.&\left\{\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)+u.\left(\frac{d\mathrm{v}}{dx}\right)+\ .\left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right)+\mathrm{v}.\left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right)\right\}\end{aligned}$$

Pour avoir l'équation relative à la continuité du fluide; concevons que dans la valeur de β, du n°. précédent, a, b, c, soient égaux à x, y, z, et que x, y, z soient égaux à $x+u\,dt$, $y+v\,dt$, $z+\mathrm{v}\,dt$, ce qui revient à prendre les coordonnées primitives a, b, c, infiniment près de x, y, z; on aura

$$\beta = 1 + dt.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right)\right\};$$

l'équation (G) devient,

$$\rho.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right)\right\}+\rho-(\rho)=0.$$

Si l'on considère ρ comme fonction de x, y, z, et de t; on a

$$(\rho)=\rho-dt.\left(\frac{d\rho}{dt}\right)-u\,dt.\left(\frac{d\rho}{dx}\right)-v\,dt.\left(\frac{d\rho}{dy}\right)-\mathrm{v}\,dt.\left(\frac{d\rho}{dz}\right);$$

l'équation précédente se change ainsi dans la suivante :

$$0=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d.\rho u}{dx}\right)+\left(\frac{d.\rho v}{dy}\right)+\left(\frac{d.\rho\mathrm{v}}{dz}\right); \quad (K)$$

c'est l'équation relative à la continuité du fluide, et il est aisé de voir qu'elle est la différentielle de l'équation (G) du n°. précédent, prise par rapport au temps t.

L'équation (H) est susceptible d'intégration, dans un cas fort étendu, savoir, lorsque $u\,\delta x+v\,\delta y+\mathrm{v}\,\delta z$ est une variation exacte de x, y, z, ρ étant d'ailleurs une fonction quelconque de la pression p. Soit alors $\delta\varphi$ cette variation; l'équation (H) donne

$$\delta V-\frac{\delta p}{\rho}=\delta.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)+\tfrac{1}{2}\delta.\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\};$$

d'où l'on tire en intégrant par rapport à δ,

$$V-\int\frac{\delta p}{\rho}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)+\tfrac{1}{2}.\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\}.$$

Il faudroit ajouter à cette intégrale, une constante arbitraire, fonction de t; mais cette constante peut être censée renfermée dans la fonction φ. Cette dernière fonction donne la vîtesse des molécules fluides, parallèlement aux axes des x, des y et des z; car on a

$$u=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right); \quad v=\left(\frac{d\varphi}{dy}\right); \quad \mathrm{v}=\left(\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

L'équation (K) relative à la continuité du fluide, devient

$$0=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\left(\frac{d\rho}{dx}\right).\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\rho}{dy}\right).\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\left(\frac{d\rho}{dz}\right).\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$
$$+\rho.\left\{\left(\frac{dd\varphi}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dz^2}\right)\right\};$$

ainsi, l'on a relativement aux fluides homogènes,

$$0=\left(\frac{dd\varphi}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dz^2}\right).$$

On peut observer que la fonction $u.\delta x+v.\delta y+\mathrm{v}.\delta z$ est une variation exacte de x, y, z à tous les instans, si elle l'est à un seul instant. Supposons, en effet, qu'à un instant quelconque, elle soit égale à $\delta\varphi$; dans l'instant suivant, elle sera

$$\delta\varphi+dt.\left\{\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right).\delta z\right\};$$

elle sera donc encore, à ce nouvel instant, une variation exacte, si $\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right).\delta z$, est une variation exacte au premier instant; or l'équation (H) donne à cet instant,

$$\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right).\delta z=\delta V-\tfrac{1}{2}.\delta.\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\};$$

le premier membre de cette équation est par conséquent, une variation exacte en x, y, z; ainsi la fonction $u.\delta x+v.\delta y+\mathrm{v}.\delta z$ est une variation exacte dans l'instant suivant, si elle l'est dans un instant; elle est donc alors une variation exacte à tous les instans.

Lorsque les mouvemens sont très-petits; on peut négliger les quarrés et les produits de u, v et v; l'équation (H) devient alors

$$\delta V-\frac{\delta p}{\rho}=\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y+\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right).\delta z;$$

ainsi, dans ce cas, $u.\delta x+v.\delta y+\mathrm{v}.\delta z$ est une variation exacte, si comme nous le supposons, p est fonction de ρ; en nommant donc encore $\delta\varphi$ cette différence, on aura

$$V-\int\frac{\delta p}{\rho}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right);$$

et si le fluide est homogène, l'équation de continuité deviendra

$$0=\left(\frac{dd\varphi}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\varphi}{dz^2}\right).$$

Ces

Ces deux équations renferment toute la théorie des ondulations très-petites des fluides homogènes.

34. Considérons une masse fluide homogène douée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe des x. Soit n la vîtesse angulaire de rotation, à une distance de l'axe que nous prendrons pour unité de distance; on aura $v = -nz$; $\text{v} = ny$; l'équation (H) du n°. précédent, deviendra ainsi,

$$\frac{\delta p}{\rho} = \delta V + n^2 . \{y\delta y + z\delta z\};$$

équation possible, puisque ses deux membres sont des différences exactes. L'équation (K) du même n°. deviendra

$$o = dt.\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + u.dt.\left(\frac{d\rho}{dx}\right) + v.dt.\left(\frac{d\rho}{dy}\right) + \text{v}.dt.\left(\frac{d\rho}{dz}\right);$$

et il est visible que cette équation est satisfaite, si la masse fluide est homogène. Les équations du mouvement des fluides sont donc alors satisfaites, et par conséquent, ce mouvement est possible.

La force centrifuge à la distance $\sqrt{y^2 + z^2}$ de l'axe de rotation, est égale au quarré $n^2.(y^2 + z^2)$ de la vîtesse, divisé par cette distance; la fonction $n^2.(y\delta y + z\delta z)$ est donc le produit de la force centrifuge, par l'élément de sa direction; ainsi, en comparant l'équation précédente du mouvement du fluide, avec l'équation générale de l'équilibre des fluides, donnée dans le n°. 17; on voit que les conditions du mouvement dont il s'agit, se réduisent à celles de l'équilibre d'une masse fluide, sollicitée par les mêmes forces, et par la force centrifuge due au mouvement de rotation; ce qui est visible d'ailleurs.

Si la surface extérieure de la masse fluide est libre, on aura $\delta p = o$, à cette surface, et par conséquent,

$$o = \delta V + n^2.(y\delta y + z\delta z);$$

d'où il suit que la résultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de la surface extérieure, doit être perpendiculaire à cette surface; elle doit être de plus, dirigée vers l'intérieur de la masse fluide. Ces conditions étant remplies; une masse fluide homogène sera en équilibre, en supposant même qu'elle recouvre un solide de figure quelconque.

Le cas que nous venons d'examiner, est un de ceux dans lesquels la variation $u.\delta x+v.\delta y+\text{v}.\delta z$ n'est pas exacte; car alors cette variation devient $-n.(z\delta y-y\delta z)$; ainsi dans la théorie du flux et du reflux de la mer, on ne peut pas supposer que la variation dont il s'agit, est exacte; puisqu'elle ne l'est pas dans le cas très-simple, où la mer n'auroit d'autre mouvement que celui de rotation qui lui est commun avec la terre.

35. Déterminons maintenant, les oscillations d'une masse fluide recouvrant un sphéroïde doué d'un mouvement de rotation nt, autour de l'axe des x; et supposons-la très-peu dérangée de l'état d'équilibre, par l'action de forces très-petites. Soit à l'origine du mouvement, r la distance d'une molécule fluide, au centre de gravité du sphéroïde qu'elle recouvre, et que nous supposerons immobile; soit θ l'angle que le rayon r forme avec l'axe des x, et ϖ l'angle que le plan qui passe par l'axe des x et par ce rayon, forme avec le plan des x et des y. Supposons qu'après le temps t, le rayon r se change dans $r+\alpha s$, que l'angle θ se change dans $\theta+\alpha u$, et que l'angle ϖ se change dans $nt+\varpi+\alpha v$; αs, αu, et αv étant de très-petites quantités dont nous négligerons les quarrés et les produits; on aura

$$x=(r+\alpha s).\cos.(\theta+\alpha u);$$
$$y=(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u).\cos.(nt+\varpi+\alpha v);$$
$$z=(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u).\sin.(nt+\varpi+\alpha v).$$

Si l'on substitue ces valeurs, dans l'équation (F) du n°. 32, on aura, en négligeant le quarré de α,

$$\begin{aligned}&\alpha r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)-2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right\}\\&+\alpha r^2.\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)+2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{2n.\sin.^2\theta}{r}.\left(\frac{ds}{dt}\right)\right\}; \quad (L)\\&+\alpha\,\delta r.\left\{\left(\frac{dds}{dt^2}\right)-2nr.\sin.^2\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right\}\\&\qquad=\frac{n^2}{2}.\delta.\{(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u)\}^2+\delta V-\frac{\delta p}{\rho}.\end{aligned}$$

A la surface extérieure du fluide, on a $\delta p=0$; on a de plus, dans l'état d'équilibre,

$$0=\frac{n^2}{2}\delta.\{(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u)\}^2+(\delta V);$$

(δV) étant la valeur de δV qui convient à cet état. Supposons que le fluide dont il s'agit, soit la mer ; la variation (δV) sera le produit de la pesanteur multipliée par l'élément de sa direction. Nommons g la pesanteur, et αy l'élévation d'une molécule d'eau de sa surface, au-dessus de sa surface d'équilibre, surface que nous regarderons comme le véritable niveau de la mer. La variation (δV) croîtra par cette élévation, dans l'état de mouvement, de la quantité $-\alpha g.\delta y$; parce que la pesanteur est à fort peu près dirigée dans le sens des αy, et vers leur origine. En désignant ensuite par $\alpha\delta V'$, la partie de δV relative aux nouvelles forces qui dans l'état de mouvement, sollicitent la molécule, et qui dépendent, soit des changemens qu'éprouvent par cet état, les attractions du sphéroïde et du fluide, soit des attractions étrangères ; on aura à la surface,

$$\delta V = (\delta V) - \alpha g.\delta y + \alpha.\delta V'.$$

La variation $\frac{n^2}{2}.\delta.\{(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u)\}^2$ croît de la quantité $\alpha n^2.\delta y.r.\sin.^2\theta$, en vertu de la hauteur de la molécule d'eau, au-dessus du niveau de la mer ; mais cette quantité peut être négligée relativement au terme $-\alpha g.\delta y$, parce que le rapport $\frac{n^2.r}{g}$ de la force centrifuge à l'équateur, à la pesanteur, est une très-petite fraction égale à $\frac{1}{289}$. Enfin, le rayon r est à fort peu près constant à la surface de la mer, parce qu'elle diffère très-peu d'une surface sphérique ; on peut donc y supposer δr nulle. L'équation (L) devient ainsi, à la surface de la mer,

$$\begin{aligned}&r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) - 2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right\}\\ &+ r^2\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) + 2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du}{dt}\right) + 2n.\sin.^2.\theta.\left(\frac{ds}{dt}\right)\right\}\\ &= -g.\delta y + \delta V';\end{aligned}$$

les variations δy et $\delta V'$ étant relatives aux deux variables θ et ϖ.

Considérons présentement, l'équation relative à la continuité du fluide. Pour cela, concevons à l'origine du mouvement, un parallélipipède rectangle dont la hauteur soit dr, dont la largeur soit $rd\varpi.\sin.\theta$, et dont la longueur soit $rd\theta$. Nommons r', θ' et ϖ'

ce que deviennent r, θ et ϖ, après le temps t. En suivant le raisonnement du n°. 32, on trouvera qu'après ce temps, le volume de la molécule fluide est égal à un parallélipipède rectangle dont la hauteur est $\left(\frac{dr'}{dr}\right).\mathrm{d}r$; dont la largeur est

$$r'.\sin.\theta'.\left\{\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right).\mathrm{d}\varpi+\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right).\mathrm{d}r\right\},$$

en éliminant $\mathrm{d}r$, au moyen de l'équation

$$0=\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\mathrm{d}\varpi+\left(\frac{dr'}{dr}\right).\mathrm{d}r\,;$$

enfin, dont la longueur est $r'.\left\{\left(\frac{d\theta'}{dr}\right).\mathrm{d}r+\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right).\mathrm{d}\theta+\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right).\mathrm{d}\varpi\right\}$; en éliminant $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}\varpi$, au moyen des équations

$$0=\left(\frac{dr'}{dr}\right).\mathrm{d}r+\left(\frac{dr'}{d\theta}\right).\mathrm{d}\theta+\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\mathrm{d}\varpi\,;$$

$$0=\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right).\mathrm{d}r+\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right).\mathrm{d}\theta+\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right).\mathrm{d}\varpi.$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}\epsilon'=&\left(\frac{dr'}{dr}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dr'}{dr}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right)+\left(\frac{dr'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right)\\&-\left(\frac{dr'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\theta'}{dr}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right)+\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\theta'}{dr}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right)-\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right);\end{aligned}$$

le volume de la molécule après le temps t, sera, $\epsilon'.r'^2.\sin.\theta.\mathrm{d}r.d\theta.\mathrm{d}\varpi$; ainsi en nommant (ρ), la densité primitive de cette molécule, et ρ sa densité correspondante à t; on aura, en égalant l'expression primitive de sa masse, à son expression après le temps t,

$$\rho.\epsilon'r'^2.\sin.\theta'=(\rho).r^2.\sin.\theta\,;$$

c'est l'équation de la continuité du fluide. Dans le cas présent,

$$r'=r+\alpha s\,;\qquad \theta'=\theta+\alpha u\,;\qquad \varpi'=nt+\varpi+\alpha v\,;$$

on aura ainsi, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\epsilon'=1+\alpha.\left(\frac{ds}{dr}\right)+\alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right)+\alpha\left(\frac{dv}{d\varpi}\right).$$

Supposons qu'après le temps t, la densité primitive (ρ) du fluide se change en $(\rho)+\alpha\rho'$; l'équation précédente relative à la continuité du fluide, donnera

$$o=r^2.\left\{\rho'+(\rho).\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)+\left(\frac{dv}{d\varpi}\right)+\frac{u.\cos.\theta}{\sin.\theta}\right\}\right\}+(\rho).\left(\frac{d.r^2s}{dr}\right).$$

36. Appliquons ces résultats aux oscillations de la mer. Sa masse étant homogène, on a $\rho'=o$, et par conséquent,

$$o=\left(\frac{d.r^2s}{dr}\right)+r^2.\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)+\left(\frac{dv}{d\omega}\right)+\frac{u.\cos.\theta}{\sin.\theta}\right\}.$$

Supposons, conformément à ce qui paroît avoir lieu dans la nature, la profondeur de la mer très-petite relativement au rayon r du sphéroïde terrestre; représentons-la par γ, γ étant une fonction très-petite de θ et de ϖ, qui dépend de la loi de cette profondeur. Si l'on intègre l'équation précédente, par rapport à r, depuis la surface du solide que la mer recouvre, jusqu'à la surface de la mer; on voit que la valeur de s sera égale à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, plus à une très-petite fonction qui sera par rapport à u et à v, du même ordre de petitesse, que la fonction $\frac{\gamma}{r}$; or à la surface du solide que la mer recouvre, lorsque les angles θ et ϖ se changent dans $\theta+\alpha u$, et $nt+\varpi+\alpha v$, il est aisé de voir que la distance d'une molécule d'eau, contiguë à cette surface, au centre de gravité de la terre, ne varie que d'une quantité très-petite par rapport à αu et αv, et du même ordre que les produits de ces quantités par l'excentricité du sphéroïde recouvert par la mer : la fonction indépendante de r qui entre dans l'expression de s, est donc très-petite du même ordre; ainsi l'on peut négliger généralement s, vis-à-vis de u et de v. L'équation du mouvement de la mer à sa surface, donnée dans le n°. 35, devient par-là,

$$r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)-2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right\}$$

$$+r^2.\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv}{dt^2}\right)+2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}=-g.\delta y+\delta V';(M)$$

l'équation (L) du même n°. relative à un point quelconque de l'intérieur de la masse du fluide, donne dans l'état d'équilibre,

$$o = \frac{n^2}{2}.\delta.\{(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u)\}^2 + (\delta V) - \frac{(\delta p)}{\rho};$$

(δV) et (δp) étant les valeurs de δV et de δp, qui dans l'état d'équilibre, conviennent aux quantités $r+\alpha s$, $\theta+\alpha u$, et $\varpi+\alpha v$. Supposons que dans l'état de mouvement, on ait

$$\delta V = (\delta V) + \alpha.\delta V'; \quad \delta p = (\delta p) + \alpha.\delta p';$$

l'équation (L) donnera

$$\left\{\frac{d.\left(V' - \frac{p'}{\rho}\right)}{dr}\right\} = \left(\frac{dds}{dt^2}\right) - 2nr.\sin.^2\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

L'équation (M) nous montre que $n.\left(\frac{dv}{dt}\right)$ est du même ordre que y ou s, et par conséquent de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$; la valeur du premier membre de cette équation, est donc du même ordre; ainsi, en multipliant cette valeur, par dr, et en l'intégrant depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre, jusqu'à la surface de la mer; on aura $V' - \frac{p'}{\rho}$ égal à une fonction très-petite, de l'ordre $\frac{\gamma s}{r}$, plus à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, et que nous désignerons par λ; en n'ayant donc égard dans l'équation (L) du n°. 35, qu'aux deux variables θ et ϖ, elle se changera dans l'équation (M), avec la seule différence que le second membre se changera dans $\delta\lambda$. Mais λ étant indépendant de la profondeur à laquelle se trouve la molécule d'eau que nous considérons; si l'on suppose cette molécule très-voisine de la surface, l'équation (L) doit évidemment coincider avec l'équation (M); on a donc $\delta\lambda = \delta V' - g.\delta y$, et par conséquent,

$$\delta.\left\{V' - \frac{p'}{\rho}\right\} = \delta V' - g.\delta y;$$

la valeur de $\delta V'$ dans le second membre de cette équation, étant relative à la surface de la mer. Nous verrons dans la théorie du flux et du reflux de la mer, que cette valeur est à très-peu près la même, pour toutes les molécules situées sur le même rayon terrestre, depuis la surface du solide que la mer recouvre, jusqu'à la surface de la mer; on a donc relativement à toutes ces molécules, $\frac{\delta p'}{\rho} = g.\delta y$; ce qui donne p' égal à $\rho g y$ plus une fonction indépendante de θ, ϖ et r; or à la surface du niveau de la mer, la valeur de $\alpha p'$ est égale à la pression de la petite colonne d'eau αy, qui s'élève au-dessus de cette surface, et cette pression est égale à $\alpha \rho . g y$; on a donc, dans tout l'intérieur de la masse fluide, depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre, jusqu'à la surface du niveau de la mer, $p' = \rho g y$; ainsi un point quelconque de la surface du sphéroïde recouvert par la mer, est plus pressé que dans l'état d'équilibre, de tout le poids de la petite colonne d'eau, comprise entre la surface de la mer et la surface du niveau. Cet excès de pression devient négatif, dans les points où la surface de la mer s'abaisse au-dessous de la surface du niveau.

Il suit de ce que nous venons de voir, que si l'on n'a égard qu'aux variations de θ et de ϖ; l'équation (L) se change dans l'équation (M), pour toutes les molécules intérieures de la masse fluide. Les valeurs de u et de v relatives à toutes les molécules de la mer, situées sur le même rayon terrestre, sont donc déterminées par les mêmes équations différentielles; ainsi, en supposant, comme nous le ferons dans la théorie du flux et du reflux de la mer, qu'à l'origine du mouvement, les valeurs de u, $\left(\frac{du}{dt}\right)$, v, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ont été les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon; ces molécules resteront encore sur le même rayon, durant les oscillations du fluide. Les valeurs de r, u et v peuvent donc être supposées les mêmes à très-peu près, sur la petite partie du rayon terrestre, comprise entre le solide que la mer recouvre, et la surface de la mer; ainsi, en intégrant, par rapport à r, l'équation

$$o = \left(\frac{d.r^2 s}{dr}\right) + r^2.\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u.\cos.\theta}{\sin.\theta}\right\};$$

on aura

$$o = r^2 s - (r^2 s) + r^2 \gamma.\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u.\cos.\theta}{\sin.\theta}\right\};$$

$(r^2 s)$ étant la valeur de $r^2 s$, à la surface du sphéroïde recouvert par la mer. La fonction $r^2s-(r^2s)$ est égale à très-peu près à $r^2.\{s-(s)\}+2r\gamma(s)$, (s) étant ce que devient s, à la surface du sphéroïde ; on peut négliger le terme $2r\gamma.(s)$, vu la petitesse de γ et de (s) ; on aura ainsi,

$$r^2s-(r^2s)=r^2.[s-(s)].$$

Maintenant, la profondeur de la mer, correspondante aux angles $\theta+\alpha u$, et $nt+\varpi+\alpha v$, est $\gamma+\alpha.\{s-(s)\}$: si l'on fixe l'origine des angles θ et $nt+\varpi$, à un point et à un méridien fixes sur la surface de la terre, ce qui est permis, comme on le verra bientôt ; cette même profondeur sera $\gamma+\alpha u.\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)+\alpha v.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)$ plus l'élévation αy de la molécule fluide de la surface de la mer, au-dessus de sa surface de niveau ; on aura donc

$$s-(s)=y+u.\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)+v.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).$$

L'équation relative à la continuité du fluide, deviendra par conséquent,

$$y=-\left(\frac{d.\gamma u}{d\theta}\right)-\left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right)-\frac{\gamma u.\cos.\theta}{\sin.\theta}. \qquad (N)$$

On peut observer que dans cette équation, les angles θ et $nt+\varpi$ sont comptés relativement à un point et à un méridien fixes sur la terre, et que dans l'équation (M), ces mêmes angles sont comptés relativement à l'axe des x, et à un plan qui, passant par cet axe, auroit autour de lui, un mouvement de rotation, égal à n ; or cet axe et ce plan ne sont pas fixes à la surface de la terre, parce que l'attraction et la pression du fluide qui la recouvre, doivent altérer un peu leur position sur cette surface, ainsi que le mouvement de rotation du sphéroïde. Mais il est aisé de voir que ces altérations sont aux valeurs de αu et de αv, dans le rapport de la masse de la mer, à celle du sphéroïde terrestre ; ainsi, pour rapporter les angles θ et $nt+\varpi$, à un point et à un méridien invariables à la surface de ce sphéroïde, dans les deux équations (M) et (N) ; il suffit d'altérer u et v, de quantités de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$ et $\frac{\gamma v}{r}$, quantités que nous nous sommes permis de négliger ; on peut donc supposer dans ces équations, que αu et αv sont les mouvemens du fluide, en latitude et en longitude.

On peut observer encore, que le centre de gravité du sphéroïde étant supposé immobile, il faut transporter en sens contraire, aux molécules fluides, les forces dont il est animé par la réaction de la mer; mais le centre commun de gravité du sphéroïde et de la mer, ne changeant point, en vertu de cette réaction; il est clair que le rapport de ces forces à celles dont les molécules sont animées par l'action du sphéroïde, est du même ordre que le rapport de la masse fluide à celle du sphéroïde, et par conséquent, de l'ordre $\frac{\gamma}{r}$; on peut donc les négliger dans le calcul de $\delta V'$.

37. Considérons de la même manière, les mouvemens de l'atmosphère. Nous ferons dans cette recherche, abstraction de la variation de la chaleur, à différentes latitudes et à diverses hauteurs, ainsi que de toutes les causes irrégulières qui l'agitent, et nous n'aurons égard qu'aux causes régulières qui agissent sur elle, comme sur l'océan. Nous supposerons conséquemment, la mer recouverte d'un fluide élastique d'une température uniforme; nous supposerons encore, conformément à l'expérience, la densité de ce fluide, proportionnelle à sa pression. Cette supposition donne à l'atmosphère, une hauteur infinie; mais il est facile de s'assurer qu'à une très-petite hauteur, sa densité est si petite, qu'on peut la regarder comme nulle.

Cela posé, nommons s', u' et v', pour les molécules de l'atmosphère, ce que nous avons nommé s, u et v, pour les molécules de la mer; l'équation (L) du n°. 35, donnera

$$\alpha r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu'}{dt^2}\right)-2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv'}{dt}\right)\right\}$$
$$+\alpha r^2.\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv'}{dt^2}\right)+2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du'}{dt}\right)+\frac{2n.\sin.^2\theta}{r}.\left(\frac{ds'}{dt}\right)\right\}$$
$$+\alpha\delta r.\left\{\left(\frac{dds'}{dt^2}\right)-2nr.\sin.^2\theta.\left(\frac{ds'}{dt}\right)\right\}=\frac{n^2}{2}.\delta.\{(r+\alpha s').\sin.(\theta+\alpha u')\}^2$$
$$+\delta V-\frac{\delta p}{\rho}.$$

Considérons d'abord l'atmosphère dans l'état d'équilibre, dans lequel s', u' et v' sont nuls. L'équation précédente donne alors, en l'intégrant,

$$\frac{n^2}{2}.r^2.\sin.^2\theta+V-\int\frac{\delta p}{\rho}=\text{constante}.$$

La pression p étant supposée proportionnelle à la densité; nous ferons $p = l.g.\rho$, g étant la pesanteur dans un lieu déterminé, que nous supposerons être l'équateur, et l étant une quantité constante qui exprime la hauteur de l'atmosphère supposée par-tout de la même densité, qu'à la surface de la mer: cette hauteur est très-petite par rapport au rayon du sphéroïde terrestre, dont elle n'est pas la 720$^{\text{ième}}$ partie.

L'intégrale $\int \frac{\delta p}{\rho}$ est égale à $lg.\log.\rho$; l'équation précédente de l'équilibre de l'atmosphère devient par conséquent,

$$lg.\log.\rho = \text{constante} + V + \frac{n^2}{2}.r^2.\sin.^2\theta.$$

A la surface de la mer, la valeur de V est la même pour une molécule d'air, que pour la molécule d'eau qui lui est contiguë, parce que les forces qui sollicitent l'une et l'autre molécule, sont les mêmes; mais la condition de l'équilibre des mers, exige que l'on ait

$$V + \frac{n^2}{2}.r^2.\sin.^2\theta = \text{constante};$$

on a donc, à cette surface, ρ constant, c'est-à-dire que la densité de la couche d'air, contiguë à la mer, est par-tout la même, dans l'état d'équilibre.

Si l'on nomme R, la partie du rayon r, comprise entre le centre du sphéroïde, et la surface de la mer, et r' la partie comprise entre cette surface et une molécule d'air élevée au-dessus; r' sera aux quantités près de l'ordre $\frac{\left(\frac{n^2}{g}.r'\right)^2}{R}$, la hauteur de cette molécule au-dessus de la surface de la mer: nous négligerons les quantités de cet ordre. L'équation entre ρ et r donnera

$$lg.\log.\rho = \text{constante} + V + r'.\left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{r'^2}{2}.\left(\frac{ddV}{dr^2}\right) + \frac{n^2}{2}R^2.\sin.^2\theta$$
$$+ n^2Rr'.\sin.^2\theta;$$

les valeurs de V, $\left(\frac{dV}{dr}\right)$ et $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)$ étant relatives à la surface de la mer où l'on a,

$$\text{constante} = V + \frac{n^2}{2}.R^2.\sin.^2\theta;$$

la quantité $-\left(\frac{dV}{dr}\right)-n^2R.\sin.^2\theta$, est la pesanteur à cette même surface; nous la désignerons par g'. La fonction $\left(\frac{ddV}{dr^2}\right)$ étant multipliée par la quantité très-petite r'^2, nous pouvons la déterminer dans la supposition de la terre sphérique, et négliger la densité de l'atmosphère relativement à celle de la terre; nous aurons ainsi, à fort peu près,

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right)=g=\frac{m}{R^2};$$

m étant la masse de la terre; partant $\left(\frac{ddV}{dr^2}\right)=-\frac{2m}{R^3}=-\frac{2g'}{R}$; on aura donc $lg.\log.\rho=\text{constante}-r'g'-\frac{r'^2}{R}.g'$; d'où l'on tire

$$\rho=\Pi.c^{-\frac{r'g'}{lg}.\left(1+\frac{r'}{R}\right)},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et Π étant une constante visiblement égale à la densité de l'air à la surface de la mer. Nommons h et h' les longueurs du pendule à seconde, à la surface de la mer, sous l'équateur, et à la latitude de la molécule aérienne que nous considérons; on aura $\frac{g'}{g}=\frac{h'}{h}$, et par conséquent,

$$\rho=\Pi.c^{-\frac{r'h'}{lh}.\left(1+\frac{r'}{R}\right)}.$$

Cette expression de la densité de l'air, fait voir que les couches de même densité, sont par-tout également élevées au-dessus de la mer, à la quantité près $\frac{r'.(h'-h)}{h}$; mais dans le calcul exact des hauteurs des montagnes, par les observations du baromètre, cette quantité ne doit point être négligée.

Considérons présentement, l'atmosphère dans l'état de mouvement; et déterminons les oscillations d'une couche de niveau, ou de même densité dans l'état d'équilibre. Soit $\alpha\varphi$, l'élévation d'une molécule d'air au-dessus de la surface de niveau à laquelle elle appartient dans l'état d'équilibre; il est clair qu'en vertu de cette élévation, la valeur de δV sera augmentée de la variation différentielle $-\alpha g.\delta\varphi$; on aura ainsi, $\delta V=(\delta V)-\alpha g.\delta\varphi+\alpha\delta V'$;

(δV) étant la valeur de δV, qui dans l'état d'équilibre, correspond à la couche de niveau, et aux angles $\theta+\alpha u$, et $nt+\varpi+\alpha v$; et $\delta V'$ étant la partie de δV, due aux nouvelles forces qui dans l'état de mouvement, agitent l'atmosphère.

Soit $\rho=(\rho)+\alpha\rho'$, (ρ) étant la densité de la couche de niveau, dans l'état d'équilibre. Si l'on fait $\frac{l\rho'}{(\rho)}=y'$, on aura

$$\frac{\delta p}{\rho}=\frac{lg.\delta(\rho)}{(\rho)}+\alpha g.\delta y';$$

or on a dans l'état d'équilibre,

$$0=\frac{n^2}{2}.\delta.\{(r+\alpha s).\sin.(\theta+\alpha u)\}^2+(\delta V)-\frac{lg.\delta(\rho)}{(\rho)};$$

l'équation générale du mouvement de l'atmosphère, deviendra donc relativement aux couches de niveau, par rapport auxquelles δr est nul à très-peu près,

$$r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu'}{dt^2}\right)-2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv'}{dt}\right)\right\}$$
$$+r^2.\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv'}{dt^2}\right)+2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du'}{dt}\right)+\frac{2n.\sin.^2\theta}{r}.\left(\frac{ds'}{dt}\right)\right\}$$
$$=\delta V'-g.\delta\varphi-g.\delta y'+n^2r.\sin.^2\theta.\delta.\{s'-(s')\},$$

$\alpha(s')$ étant la variation de r, correspondante dans l'état d'équilibre, aux variations $\alpha u'$ et $\alpha v'$, des angles θ et ϖ.

Supposons que toutes les molécules d'air situées à l'origine, sur le même rayon terrestre, restent constamment sur un même rayon dans l'état de mouvement, ce qui a lieu, par ce qui précède, dans les oscillations de la mer; et voyons si cette supposition peut satisfaire aux équations du mouvement et de la continuité du fluide atmosphérique. Pour cela, il est nécessaire que les valeurs de u' et de v' soient les mêmes pour toutes ces molécules; or la valeur de $\delta V'$ est à très-peu près la même pour ces molécules, comme on le verra lorsque nous déterminerons, dans la suite, les forces d'où résulte cette variation; il est donc nécessaire que les variations $\delta\varphi$ et $\delta y'$ soient les mêmes pour ces molécules, et de plus, que les quantités $2nr.\delta\varpi.\sin.^2\theta.\left(\frac{ds'}{dt}\right)$, et $n^2r.\sin.^2\theta.\delta.\{s'-(s')\}$, puissent être négligées dans l'équation précédente.

A la surface de la mer, on a $\varphi=y$, αy étant l'élévation de la surface de la mer au-dessus de sa surface de niveau. Examinons si les suppositions de φ égal à y, et de y constant pour toutes les molécules d'air, situées sur le même rayon, peuvent subsister avec l'équation de la continuité du fluide. Cette équation, par le n°. 35, est,

$$0 = r^2 \cdot \left\{ \rho' + (\rho) \cdot \left\{ \left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' \cdot \cos.\theta}{\sin.\theta} \right\} \right\} + (\rho) \cdot \left(\frac{d.r^2 s'}{dr}\right);$$

d'où l'on tire

$$y = -l \cdot \left\{ \left(\frac{d.r^2 s'}{r^2 dr}\right) + \left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' \cdot \cos.\theta}{\sin.\theta} \right\}.$$

$r + \alpha s'$ est égal à la valeur de r de la surface de niveau, qui correspond aux angles $\theta + \alpha u$, et $\varpi + \alpha v$, plus à l'élévation de la molécule d'air au-dessus de cette surface; la partie de $\alpha s'$ qui dépend de la variation des angles θ et ϖ, étant de l'ordre $\frac{\alpha n^2 . u}{g}$, on peut la négliger dans l'expression précédente de y', et, par conséquent, supposer dans cette expression, $s' = \varphi$; si l'on fait ensuite $\varphi = y$, on aura $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$, puisque la valeur de φ est alors la même relativement à toutes les molécules situées sur le même rayon. De plus, y est, par ce qui précède, de l'ordre l, ou $\frac{n^2}{g}$; l'expression de y' deviendra ainsi,

$$y' = -l \cdot \left\{ \left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' . \cos.\theta}{\sin.\theta} \right\};$$

ainsi, u' et v' étant les mêmes pour toutes les molécules situées primitivement sur le même rayon, la valeur de y' sera la même pour toutes ces molécules. De plus, il est visible par ce que nous venons de dire, que les quantités $2nr . \delta\varpi . \sin.^2\theta . \left(\frac{ds'}{dt}\right)$, et $n^2 r . \sin.^2\theta . \delta . \{s' - (s')\}$, peuvent être négligées dans l'équation précédente du mouvement de l'atmosphère, qui peut alors être satisfaite, en supposant que u' et v' sont les mêmes pour toutes les molécules de l'air, situées primitivement sur le même rayon; la supposition que toutes ces molécules restent constamment sur un même rayon, durant les oscillations du fluide, peut donc subsister avec les équations du mouvement et de la continuité du fluide atmosphérique. Dans ce cas, les oscillations des diverses couches de niveau sont les mêmes, et se déterminent au moyen des équations,

$$r^2.\delta\theta.\left\{\left(\frac{ddu'}{dt^2}\right)-2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{dv'}{dt}\right)\right\}$$

$$+r^2.\delta\varpi.\left\{\sin.^2\theta.\left(\frac{ddv'}{dt^2}\right)+2n.\sin.\theta.\cos.\theta.\left(\frac{du'}{dt}\right)\right\}=\delta V'-g.\delta y'-g\delta y;$$

$$y'=-l.\left\{\left(\frac{du'}{d\theta}\right)+\left(\frac{dv'}{d\varpi}\right)+\frac{u'.\cos.\theta}{\sin.\theta}\right\}.$$

Ces oscillations de l'atmosphère doivent produire des oscillations analogues, dans les hauteurs du baromètre. Pour déterminer celles-ci au moyen des premières, considérons un baromètre fixe à une hauteur quelconque au-dessus de la surface de la mer. La hauteur du mercure est proportionnelle à la pression qu'éprouve sa surface exposée à l'action de l'air; elle peut donc être représentée par $lg.\rho$; mais cette surface est successivement exposée à l'action de diverses couches de niveau, qui s'élèvent et s'abaissent comme la surface de la mer; ainsi la valeur de ρ à la surface du mercure, varie, 1°. parce qu'elle appartient à une couche de niveau, qui dans l'état d'équilibre, étoit moins élevée, de la quantité αy; 2°. parce que la densité d'une couche augmente dans l'état de mouvement, de $\alpha\rho'$ ou de $\frac{\alpha(\rho).y'}{l}$. En vertu de la première cause, la variation de ρ est $-\alpha y.\left(\frac{d\rho}{dr}\right)$, ou $\frac{\alpha(\rho).y}{l}$; la variation totale de la densité ρ, à la surface du mercure, est donc $\alpha(\rho).\frac{(y+y')}{l}$. Il suit de-là, que si l'on nomme k la hauteur du mercure, dans le baromètre, relative à l'état d'équilibre; ses oscillations, dans l'état de mouvement, seront exprimées par la fonction $\frac{\alpha k.(y+y')}{l}$; elles sont donc semblables, à toutes les hauteurs au-dessus de la mer, et proportionnelles aux hauteurs du baromètre.

Il ne s'agit plus maintenant, pour déterminer les oscillations de la mer et de l'atmosphère, que de connoître les forces qui agitent ces deux masses fluides, et d'intégrer les équations différentielles précédentes; c'est ce que nous ferons dans la suite de cet ouvrage.

LIVRE II.

DE LA LOI DE LA PESANTEUR UNIVERSELLE, ET DU MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER.

De la loi de la pesanteur universelle, tirée des phénomènes.

1. Après avoir développé les loix du mouvement; nous allons en partant de ces loix, et de celles des mouvemens célestes, présentées avec détail dans l'ouvrage intitulé : *Exposition du systême du monde*, nous élever à la loi générale de ces mouvemens. Celui de tous les phénomènes, qui semble le plus propre à la faire découvrir, est le mouvement elliptique des planètes et des comètes autour du soleil; voyons ce qu'il donne sur cet objet. Pour cela, nommons x et y, les coordonnées rectangles d'une planète, dans le plan de son orbite, et fixons leur origine, au centre du soleil; nommons de plus, P et Q les forces dont cette planète est animée dans son mouvement relatif autour du soleil, parallèlement aux axes des x et des y, et supposons que ces forces tendent vers l'origine des coordonnées ; enfin, soit dt l'élément du temps que nous regarderons comme constant; on aura, par le Chapitre II du premier Livre,

$$o = \frac{ddx}{dt^2} + P; \qquad (1)$$

$$o = \frac{ddy}{dt^2} + Q. \qquad (2)$$

Si l'on ajoute la première de ces équations, multipliée par $-y$, à la seconde multipliée par x; on aura

$$o=\frac{d.(x\,dy-y\,dx)}{dt^2}+x.Q-y.P.$$

Il est aisé de voir que $x\,dy-y\,dx$ est le double de l'aire que le rayon vecteur de la planète décrit autour du soleil, dans l'instant dt; cette aire est proportionnelle à l'élément du temps, suivant la première loi de Kepler, en sorte que l'on a

$$x\,dy-y\,dx=c\,dt,$$

c étant une constante; la différentielle du premier membre de cette équation est donc nulle; ce qui donne

$$x.Q-y.P=o.$$

Il suit de-là que les forces P et Q sont entre elles dans le rapport de x à y; et qu'ainsi leur résultante passe par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le centre du soleil. D'ailleurs, la courbe décrite par la planète étant concave vers le soleil, il est visible que la force qui la fait décrire, tend vers cet astre.

La loi des aires proportionnelles aux temps employés à les décrire, nous conduit donc à ce premier résultat remarquable, savoir que la force qui sollicite les planètes et les comètes, est dirigée vers le centre du soleil,

2. Déterminons maintenant, la loi suivant laquelle cette force agit à différentes distances de cet astre. Il est clair que les planètes et les comètes s'approchant et s'éloignant alternativement du soleil, à chaque révolution; la nature du mouvement elliptique doit nous conduire à cette loi. Reprenons dans cette vue, les équations différentielles (1) et (2) du n°. précédent. Si l'on ajoute la première multipliée par dx, à la seconde multipliée par dy, on aura

$$o=\frac{dx.ddx+dy.ddy}{dt^2}+P\,dx+Q\,dy;$$

et en intégrant,

$$o=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}+2.\int(P\,dx+Q\,dy),$$

la constante arbitraire étant indiquée par le signe intégral, En substituant, au lieu de dt, sa valeur $\frac{xdy-ydx}{c}$, donnée par la loi de la proportionnalité des aires aux temps, on aura

$$0=\frac{c^2.(dx^2+dy^2)}{(xdy-ydx)^2}+2.\int(Pdx+Qdy).$$

Transformons, pour plus de simplicité, les coordonnées x et y, en rayon vecteur, et en angle traversé, conformément aux usages astronomiques. Soit r le rayon mené du centre du soleil à celui de la planète, ou son rayon vecteur; soit v l'angle qu'il forme avec l'axe des x; on aura

$$x=r.\cos.v\ ; \quad y=r.\sin.v\ ; \quad r=\sqrt{x^2+y^2}\ ;$$

d'où l'on tire,

$$dx^2+dy^2=r^2dv^2+dr^2\ ; \quad xdy-ydx=r^2dv.$$

Si l'on désigne ensuite par φ la force principale qui anime la planète; on aura, par le n°. précédent,

$$P=\varphi.\cos.v\ ; \quad Q=\varphi.\sin.v\ ; \quad \varphi=\sqrt{P^2+Q^2}\ ;$$

ce qui donne

$$Pdx+Qdy=\varphi dr\ ;$$

on aura donc

$$0=\frac{c^2.\{r^2dv^2+dr^2\}}{r^4dv^2}+2\int\varphi dr\ ;$$

d'où l'on tire

$$dv=\frac{c\,dr}{r.\sqrt{-c^2-2r^2\int\varphi dr}}. \qquad (3)$$

Cette équation donnera, au moyen des quadratures, la valeur de v en r, lorsque la force φ sera connue en fonction de r; mais si, cette force étant inconnue, la nature de la courbe qu'elle fait décrire, est donnée; alors, en différentiant l'expression précédente de $2\int\varphi dr$, on aura pour déterminer φ, l'équation

$$\varphi=\frac{c^2}{r^3}-\frac{c^2}{2}.\frac{d.\left\{\frac{dr^2}{r^4dv^2}\right\}}{dr}. \qquad (4)$$

Les orbes des planètes sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers; or si dans l'ellipse, on nomme ϖ l'angle que le grand axe fait avec l'axe des x; si, de plus, on fixe au foyer, l'origine des x, et que l'on désigne par a, le demi-grand axe, et par e, le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; on aura

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.(v-\varpi)};$$

équation qui devient celle d'une parabole, lorsque $e=1$, et a est infini; et qui appartient à l'hyperbole, lorsque e surpasse l'unité, et a est négatif. Cette équation donne

$$\frac{dr^2}{r^4\, dv^2} = \frac{2}{ar.(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2.(1-e^2)};$$

et par conséquent,

$$\varphi = \frac{c^2}{a.(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2};$$

ainsi les orbites des planètes et des comètes étant des sections coniques; la force φ est réciproque au quarré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil.

On voit de plus, que si la force φ est réciproque au quarré de la distance, ou exprimée par $\frac{h}{r^2}$, h étant un coefficient constant; l'équation précédente des sections coniques, satisfera à l'équation différentielle (4) entre r et v, que donne l'expression de φ, lorsqu'on y change φ dans $\frac{h}{r^2}$. On a alors $h = \frac{c^2}{a.(1-e^2)}$, ce qui forme une équation de condition entre les deux arbitraires a et e, de l'équation aux sections coniques; les trois arbitraires a, e et ϖ, de cette équation, se réduisent donc à deux seules arbitraires distinctes, et comme l'équation différentielle entre r et v, n'est que du second ordre, l'équation finie aux sections coniques, en est l'intégrale complète.

Il suit de-là que si la courbe décrite est une section conique, la force est en raison inverse du quarré des distances; et réciproquement, que si la force suit la raison inverse du quarré des distances, la courbe décrite est une section conique.

3. L'intensité de la force φ, relativement à chaque planète et à chaque comète, dépend du coefficient $\frac{c^2}{a.(1-e^2)}$; les loix de Kepler donnent encore le moyen de le déterminer. En effet, si

l'on nomme T le temps de la révolution d'une planète; l'aire que son rayon vecteur décrit pendant ce temps, étant la surface même de l'ellipse planétaire, elle sera $\pi . a^2 . \sqrt{1-e^2}$, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon; mais l'aire décrite pendant l'instant dt, est, par ce qui précède, $\frac{1}{2} c\,dt$; la loi de la proportionnalité des aires aux temps, donnera donc la proportion,

$$\tfrac{1}{2} . c\,dt : \pi a^2 . \sqrt{1-e^2} :: dt : T;$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{2\pi . a^2 . \sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Relativement aux planètes, la loi de Kepler, suivant laquelle les quarrés des temps de leurs révolutions, sont comme les cubes des grands axes de leurs ellipses, donne $T^2 = k^2 . a^3$, k étant le même pour toutes les planètes; on a donc

$$c = \frac{2\pi . \sqrt{a.(1-e^2)}}{k}.$$

$2a.(1-e^2)$ est le paramètre de l'orbite, et dans diverses orbites, les valeurs de c sont comme les aires tracées par les rayons vecteurs en temps égal; ces aires sont donc comme les racines quarrées des paramètres des orbites.

Cette proportion a également lieu relativement aux orbites des comètes, comparées soit entre elles, soit aux orbites des planètes; c'est un des points fondamentaux de leur théorie qui satisfait si exactement à tous leurs mouvemens observés. Les grands axes de leurs orbites, et les temps de leurs révolutions étant inconnus, on calcule le mouvement de ces astres, dans une orbe parabolique, et en exprimant par D leur distance périhélie, on suppose $c = \frac{2\pi . \sqrt{2D}}{k}$, ce qui revient à faire e égal à l'unité, et a infini, dans l'expression précédente de c; on a donc encore relativement aux comètes, $T^2 = k^2 . a^3$, en sorte que l'on peut déterminer les grands axes de leurs orbites, lorsque leurs révolutions sont connues.

Maintenant, l'expression de c donne

$$\frac{c^2}{a.(1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{k^2};$$

on a donc

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{k^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Le coefficient $\frac{4\pi^2}{k^2}$ étant le même pour toutes les planètes et les comètes, il en résulte que pour chacun de ces corps, la force φ est réciproque au quarré des distances au centre du soleil, et qu'elle ne varie d'un corps à l'autre, qu'à raison de ces distances ; d'où il suit qu'elle est la même pour tous ces corps supposés à égale distance du soleil.

Nous voilà donc conduits par les belles loix de Kepler, à regarder le centre du soleil, comme le foyer d'une force attractive qui s'étend à l'infini dans tous les sens, en décroissant en raison du quarré des distances. La loi de la proportionnalité des aires décrites par les rayons vecteurs, aux temps employés à les décrire, nous montre que la force principale qui sollicite les planètes et les comètes, est constamment dirigée vers le centre du soleil ; l'ellipticité des orbes planétaires, et les mouvemens à très-peu près paraboliques des comètes, prouvent que pour chaque planète et pour chaque comète, cette force est réciproque au quarré de la distance de ces astres au soleil ; enfin, de la loi de la proportionnalité des quarrés des temps des révolutions, aux cubes des grands axes des orbites, ou de celle de la proportionnalité des aires décrites en temps égal par les rayons vecteurs, dans différentes orbites, aux racines quarrées des paramètres de ces orbites, loi qui renferme la précédente et qui s'étend aux comètes ; il résulte que cette force est la même pour toutes les planètes et les comètes placées à égales distances du soleil, en sorte que dans ce cas, ces corps se précipiteroient vers lui, avec la même vîtesse.

4. Si des planètes nous passons aux satellites, nous trouvons que les loix de Kepler étant à-peu-près observées dans leurs mouvemens autour de leurs planètes, ils doivent graviter vers les centres de ces planètes, en rayon inverse du quarré de leurs distances à ces centres ; ils doivent pareillement graviter à-peu-près comme leurs planètes vers le soleil, afin que leur mouvement relatif autour des planètes, soit le même à-peu-près, que si ces planètes étoient immobiles. Les satellites sont donc sollicités vers les

planètes et vers le soleil, par des forces réciproques au quarré des distances. L'ellipticité des orbites des trois premiers satellites de Jupiter est peu considérable; mais l'ellipticité du quatrième est très-sensible. Le grand éloignement de Saturne a jusqu'ici empêché de reconnoître l'ellipticité des orbes de ses satellites, à l'exception du sixième dont l'orbe paroît sensiblement elliptique. Mais la loi de la gravitation des satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, se fait principalement sentir dans le rapport de leurs moyens mouvemens, à leurs moyennes distances au centre de ces planètes. Ce rapport consiste en ce que pour chaque système de satellites, les quarrés des temps de leurs révolutions sont comme les cubes de leurs moyennes distances au centre de la planète. Concevons donc qu'un satellite décrive une orbite circulaire d'un rayon égal à sa moyenne distance au centre de la planète principale; soit a cette distance, T le nombre de secondes que renferme la durée de sa révolution sydérale; π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon, $\frac{2a\pi}{T}$ sera le petit arc que décrit le satellite, pendant une seconde. S'il cessoit d'être retenu dans son orbite, par la force attractive de la planète, il s'éloigneroit de son centre par la tangente, d'une quantité égale au sinus verse de l'arc $\frac{2a\pi}{T}$, c'est-à-dire de la quantité $\frac{2a\pi^2}{T^2}$; cette force attractive le fait donc descendre de cette quantité, vers la planète. Relativement à un autre satellite dont a' est la moyenne distance au centre de la planète, et T' la durée de sa révolution, réduite en secondes, la chûte dans une seconde seroit $\frac{2a'\pi^2}{T'^2}$; or si l'on nomme φ et φ' les forces attractives de la planète aux distances a et a', il est clair qu'elles sont comme les quantités dont elles font descendre les deux satellites pendant une seconde; on a donc

$$\varphi : \varphi' :: \frac{2a\pi^2}{T^2} : \frac{2a'\pi^2}{T'^2}.$$

La loi des quarrés des temps des révolutions, proportionnels aux cubes des moyennes distances des satellites au centre de leur planète, donne $$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3 :$$

de ces deux proportions, il est facile de conclure

$$\varphi : \varphi' :: \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a'^2};$$

ainsi, les forces φ et φ' sont réciproques aux quarrés des distances a et a'.

5. La terre n'ayant qu'un satellite, l'ellipticité de l'orbe lunaire est le seul phénomène céleste qui puisse nous faire connoître la loi de sa force attractive; mais le mouvement elliptique de la lune est très-sensiblement troublé par les forces perturbatrices, et cela peut laisser quelques doutes sur la loi de la diminution de la force attractive de la terre, en raison du quarré des distances à son centre. A la vérité, l'analogie qui existe entre cette force et les forces attractives du Soleil, de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, nous porte à croire qu'elle suit la même loi de diminution; mais les expériences terrestres sur la pesanteur, offrent un moyen direct de constater cette loi.

Pour cela, nous allons déterminer la parallaxe lunaire, d'après les expériences sur la longueur du pendule à secondes, et la comparer aux observations célestes. Sur le parallèle dont le quarré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, l'espace que la pesanteur fait décrire dans une seconde, est, d'après les observations de la longueur du pendule, égale à $3^{\text{mètres}}, 65548$, comme on le verra dans le troisième livre : nous choisissons ce parallèle, parce que l'attraction de la terre sur les points correspondans de sa surface, est à très-peu près, comme à la distance de la lune, égale à la masse de la terre, divisée par le quarré de sa distance à son centre de gravité. Sur ce parallèle, la pesanteur est plus petite que l'attraction de la terre, des deux tiers de la force centrifuge due au mouvement de rotation à l'équateur; cette force est $\frac{1}{288}$ de la pesanteur; il faut donc augmenter l'espace précédent, de sa $432^{\text{ième}}$ partie, pour avoir l'espace entier dû à l'action de la terre, qui sur ce parallèle, est égale à sa masse divisée par le quarré du rayon terrestre : on aura ainsi, $3^{\text{me}}, 66394$, pour cet espace. A la distance de la lune, il doit être diminué dans le rapport du quarré du rayon du sphéroïde terrestre, au quarré de la distance de cet astre, et il est visible qu'il suffit pour cela, de le multiplier par le quarré du sinus de la parallaxe lunaire ; en désignant donc par x, ce sinus sous le parallèle que nous considérons ; on aura $x^2 . 3^{me}, 66394$, pour la hauteur dont la lune doit tomber dans une seconde, par l'attraction de la terre. Mais nous verrons dans la théorie de la lune, que l'action du soleil diminue sa pesanteur vers la terre, d'une quantité dont la partie constante est $\frac{1}{358}$ de cette pesanteur ; de plus, la lune, dans son mouvement relatif autour de la terre, est sollicitée par une force égale à la somme des masses de la terre et de la lune, divisée par le quarré de leur distance mutuelle ; il faut donc diminuer l'espace précédent, de $\frac{1}{358}$, et l'augmenter dans le rapport de la somme des masses de la terre et de la lune, à la masse de la terre ; or on verra dans le quatrième livre, que les phénomènes du flux et du reflux de la mer, donnent la masse de la lune égale à $\frac{1}{58,7}$ de celle de la terre ; on a donc $\frac{357}{358} . \frac{59,7}{58,7} . x^2 . 3^{me}, 66394$, pour l'espace dont la lune descend vers la terre, dans l'intervalle d'une seconde.

Maintenant, si l'on nomme a le rayon moyen de l'orbe lunaire, et T, la durée de la révolution sydérale de la lune, exprimée en secondes ; $\frac{2a\pi^2}{T^2}$ sera, comme on l'a vu, le sinus verse de l'arc qu'elle décrit pendant une seconde, et il exprime la quantité dont la lune descend vers la terre, dans cet intervalle. La valeur de a est égale au rayon terrestre sous le parallèle que nous considérons, divisé par le sinus de x ; ce rayon est égal à 6369514^{me} ; on a donc

$$a = \frac{6369514^{me}}{x};$$

mais pour avoir une valeur de a indépendante des inégalités du mouvement de la lune, il faut prendre pour sa parallaxe moyenne dont le sinus est x, la partie de cette parallaxe qui est indépendante de ces inégalités, et que l'on nomme pour cela, *constante de la parallaxe.* Ainsi, en prenant pour π, le rapport de 355 à 113, et en observant que $T = 2732166''$; l'espace moyen dont la lune descend vers la terre, sera

$$\frac{2 . (355)^2 . 6369514^{me}}{(113)^2 . x . (2732166)^2}.$$

En égalant les deux expressions que nous venons de trouver pour cet espace, on aura

$$x^3 = \frac{2.(355)^2.358.58,7.6369514}{(113)^2.357.59,7.3,66394.(2732166)^2};$$

d'où l'on tire 10536″,2, pour la constante de la parallaxe lunaire sous le parallèle dont il s'agit. Cette valeur est très-peu différente de la constante 10540,7 que Triesnecker a conclue par la comparaison d'un grand nombre d'observations d'éclipses et d'occultations d'étoiles par la lune; il est donc certain que la force principale qui retient la lune dans son orbite, est la gravité terrestre affoiblie en raison du quarré de la distance; ainsi, la loi de diminution de la pesanteur, qui, pour les planètes accompagnées de plusieurs satellites, est prouvée par la comparaison des temps de leurs révolutions, et de leurs distances, est démontrée pour la lune, par la comparaison de son mouvement avec celui des projectiles à la surface de la terre. Il en résulte que c'est au centre de gravité des corps célestes, que l'on doit fixer l'origine des distances, dans le calcul de leurs forces attractives sur les corps placés à leur surface, ou au-delà; puisque cela est prouvé pour la terre dont la force attractive est, comme on vient de le voir, de la même nature que celle de tous les corps célestes.

6. Le soleil et les planètes qui ont des satellites, sont par conséquent, doués d'une force attractive qui en décroissant à l'infini, réciproquement au quarré des distances, embrasse dans sa sphère d'activité, tous les corps. L'analogie nous porte à penser qu'une pareille force réside généralement dans toutes les planètes et dans les comètes; mais on peut s'en assurer directement de cette manière. C'est une loi constante de la nature, qu'un corps ne peut agir sur un autre, sans en éprouver une réaction égale et contraire; ainsi les planètes et les comètes étant attirées vers le soleil, elles doivent attirer cet astre suivant la même loi. Les satellites attirent, par la même raison, leurs planètes; cette propriété attractive est donc commune aux planètes, aux comètes et aux satellites, et par conséquent, on peut regarder la gravitation des corps célestes, les uns vers les autres, comme une propriété générale de cet univers.

Nous venons de voir qu'elle suit la raison inverse du quarré des distances;

distances; à la vérité, cette raison est donnée par les loix du mouvement elliptique, auxquelles les mouvemens célestes ne sont pas rigoureusement assujétis; mais on doit considérer que les loix les plus simples devant toujours être préférées, jusqu'à ce que les observations nous forcent de les abandonner; il est naturel de supposer d'abord que la loi de la gravitation est réciproque à une puissance de la distance, et l'on trouve, par le calcul, que la plus légère différence entre cette puissance et le quarré, deviendroit extrêmement sensible dans la position des périhélies des orbes planétaires, dans lesquels l'observation n'a fait appercevoir que des mouvemens presque insensibles dont nous développerons la cause. En général, on verra dans le cours de cet ouvrage, que la loi de la gravitation réciproque au quarré des distances, représente avec une extrême précision, toutes les inégalités observées des mouvemens célestes : cet accord, joint à la simplicité de cette loi, nous autorise à penser qu'elle est rigoureusement celle de la nature.

La gravitation est proportionnelle aux masses; car il résulte du n°. 3, que les planètes et les comètes étant supposées à la même distance du soleil, et abandonnées à leur gravité vers cet astre, elles tomberoient en temps égal, d'une égale hauteur; en sorte que leur pesanteur seroit proportionnelle à leur masse. Les mouvemens presque circulaires des satellites autour de leurs planètes, nous prouvent qu'ils pèsent comme ces planètes, vers le soleil, en raison de leurs masses; la plus légère différence à cet égard, seroit sensible dans le mouvement des satellites, et les observations n'ont fait découvrir aucune inégalité dépendante de cette cause. On voit donc que les comètes, les planètes, et leurs satellites, placés à la même distance du soleil, pèseroient vers cet astre, en raison de leurs masses; d'où il suit, en vertu de l'égalité de l'action à la réaction, qu'ils attireroient dans la même raison, le soleil, et qu'ainsi leur action sur cet astre, est proportionnelle à leurs masses divisées par le quarré de leurs distances à son centre.

La même loi s'observe sur la terre; on s'est assuré par des expériences très-précises faites au moyen du pendule, que sans la résistance de l'air, tous les corps se précipiteroient vers son centre, avec une égale vîtesse ; les corps terrestres pèsent donc sur la terre, en raison de leurs masses, ainsi que les planètes pèsent vers le soleil, et les satellites vers leurs planètes. Cette conformité de la nature avec elle-même, sur la terre et dans l'immensité des cieux, nous montre de la manière la plus frappante, que la pesanteur observée ici-bas, n'est qu'un cas particulier d'une loi générale répandue dans l'univers.

La propriété attractive des corps célestes ne leur appartient pas seulement en masse ; mais elle est propre à chacune de leurs molécules. Si le soleil n'agissoit que sur le centre de la terre, sans attirer particulièrement chacune de ses parties ; il en résulteroit dans l'océan, des oscillations incomparablement plus grandes et très-différentes de celles que l'on y observe ; la pesanteur de la terre vers le soleil, est donc le résultat des pesanteurs de toutes ses molécules qui par conséquent attirent le soleil, en raison de leurs masses respectives. D'ailleurs, chaque corps sur la terre pèse vers son centre, proportionnellement à sa masse ; il réagit donc sur elle, et l'attire suivant le même rapport. Si cela n'étoit pas, et si une partie quelconque de la terre, quelque petite qu'on la suppose, n'attiroit pas l'autre partie, comme elle en est attirée ; le centre de gravité de la terre seroit mu dans l'espace, en vertu de la pesanteur, ce qui est impossible.

Les phénomènes célestes, comparés aux loix du mouvement, nous conduisent donc à ce grand principe de la nature, savoir que toutes les molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison des masses, et réciproquement au quarré des distances. Déjà l'on entrevoit dans cette gravitation universelle, la cause des perturbations que les corps célestes éprouvent ; car les planètes et les comètes étant soumises à leur action réciproque, elles doivent s'écarter un peu des loix du mouvement elliptique, qu'elles suivroient exactement, si elles n'obéissoient qu'à l'action du soleil. Les satellites troublés dans leurs mouvemens autour de leurs planètes, par leur attraction mutuelle et par celle du soleil, s'écartent pareillement de ces loix. On voit encore que les molécules de chaque corps céleste, réunies par leur attraction, doivent former une masse à-peu-près sphérique, et que la résultante de leur action à la surface du corps, doit y produire tous les phénomènes de la pesanteur. On voit pareillement que le mouvement de rotation des corps célestes, doit altérer un peu la sphéricité de leur figure, et l'applatir aux pôles, et qu'alors, la résultante de leurs actions mutuelles, ne passant point exactement par leurs centres de gravité; elle doit produire dans leurs axes de rotation, des mouvemens semblables à ceux que l'observation y fait appercevoir. Enfin, on entrevoit que les molécules de l'océan, inégalement attirées par le soleil et la lune, doivent avoir un mouvement d'oscillation pareil au flux et au reflux de la mer. Mais le développement de ces divers effets de la pesanteur universelle, exige une profonde analyse. Pour les embrasser avec la plus grande généralité, nous allons donner les équations différentielles du mouvement d'un systême de corps soumis à leur attraction mutuelle, et rechercher les intégrales rigoureuses que l'on peut en obtenir. Nous profiterons ensuite des facilités que les rapports des masses et des distances des corps célestes nous présentent, pour avoir des intégrales de plus en plus approchées, et pour déterminer ainsi les phénomènes célestes, avec toute l'exactitude que les observations comportent.

CHAPITRE II.

Des équations différentielles du mouvement d'un systême de corps soumis à leur attraction mutuelle.

7. Soient m, m', m'', &c., les masses des différens corps du systême, considérés comme autant de points; soient x, y, z, les coordonnées rectangles du corps m; x', y', z', celles du corps m', et ainsi du reste. La distance de m' à m, étant

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

son action sur m sera, par la loi de la pesanteur universelle, égale à

$$\frac{m'}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

Si l'on décompose cette action, parallèlement aux axes des x, des y et des z; la force parallèle à l'axe des x, et dirigée en sens contraire de leur origine, sera

$$\frac{m.(x'-x)}{\left\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right\}^{\frac{5}{2}}};$$

ou

$$\frac{1}{m}.\left\{\frac{d.\frac{m.m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}}{dx}\right\}.$$

On aura pareillement,

$$\frac{1}{m}.\left\{\frac{d.\frac{m.m''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}}}{dx}\right\}$$

pour l'action de m'' sur m, décomposée parallèlement à l'axe des x, et ainsi du reste. Soit donc,

$$\lambda=\frac{m.m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}+\frac{m.m''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}}$$
$$+\frac{m'.m''}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}}+\ \&c.;$$

λ étant ainsi la somme des produits deux à deux, des masses m, m', m'', &c., divisées par leurs distances respectives; $\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$ exprimera la somme des actions des corps m', m'', &c., sur m, décomposées parallèlement à l'axe des x, en sens contraire de l'origine des coordonnées. En désignant donc par dt, l'élément du temps supposé constant; on aura par les principes de dynamique, exposés dans le livre précédent,

$$o = m.\frac{ddx}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx}\right).$$

On aura pareillement

$$o = m.\frac{ddy}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy}\right);$$

$$o = m.\frac{ddz}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz}\right).$$

Si l'on considère de la même manière, l'action des corps m, m'', &c., sur m'; celle des corps m, m', &c., sur m'', et ainsi du reste; on aura les équations

$$o = m'.\frac{ddx'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right); \quad o = m'.\frac{ddy'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy'}\right); \quad o = m'.\frac{ddz'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz'}\right);$$

$$o = m''.\frac{ddx''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx''}\right); \quad o = m''.\frac{ddy''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy''}\right); \quad o = m''.\frac{ddz''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz''}\right).$$

&c.

La détermination des mouvemens de m, m', m'', &c., dépend de l'intégration de ces équations différentielles; mais il n'a été possible jusqu'ici, de les intégrer complètement, que dans le seul cas où le système n'est composé que de deux corps. Dans les autres cas, on n'a pu obtenir qu'un petit nombre d'intégrales rigoureuses que nous allons développer.

8. Pour cela, considérons d'abord les équations différentielles en x, x', x'', &c.; en les ajoutant ensemble, et en observant que par la nature de la fonction λ, on a

$$o = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) + \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right) + \left(\frac{d\lambda}{dx''}\right) + \&c;$$

on aura, $o = \Sigma.m.\frac{ddx}{dt^2}$. On aura pareillement, $o = \Sigma.m.\frac{ddy}{dt^2}$;

$0 = \Sigma . m . \frac{ddz}{dt^2}$. Soient X, Y, Z, les trois coordonnées du centre de gravité du systême; on aura par la propriété de ce centre,

$$X = \frac{\Sigma . m . x}{\Sigma . m}; \quad Y = \frac{\Sigma . m . y}{\Sigma . m}; \quad Z = \frac{\Sigma . m . z}{\Sigma . m};$$

on aura donc,

$$0 = \frac{ddX}{dt^2}; \quad 0 = \frac{ddY}{dt^2}; \quad 0 = \frac{ddZ}{dt^2};$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$X = a + bt; \quad Y = a' + b't; \quad Z = a'' + b''t;$$

a, b, a', b', a'', b'', étant des constantes arbitraires. On voit par-là, que le mouvement du centre de gravité du systême, est rectiligne et uniforme, et qu'ainsi, il n'est point altéré par l'action réciproque des corps du systême; ce qui est conforme à ce que nous avons vu dans le chapitre V du premier livre.

Reprenons les équations différentielles du mouvement de ces corps. Si l'on multiplie les équations différentielles en y, y', y'', &c., respectivement par x, x', x'', &c., et qu'on les ajoute aux équations différentielles en x, x', x'', &c., multipliées respectivement par $-y$, $-y'$, $-y''$, &c.; on aura

$$\begin{aligned} 0 = m . \left(\frac{x\,ddy - y\,ddx}{dt^2} \right) + m' . \frac{\{x'ddy' - y'ddx'\}}{dt^2} + \text{\&c.} \\ + y . \left(\frac{d\lambda}{dx} \right) + y' . \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right) + \text{\&c.} \\ - x . \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) - x' . \left(\frac{d\lambda}{dy'} \right) - \text{\&c.}; \end{aligned}$$

mais la nature de la fonction λ, donne

$$\begin{aligned} 0 = y . \left(\frac{d\lambda}{dx} \right) + y' . \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right) + \text{\&c.} \\ - x . \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) - x' . \left(\frac{d\lambda}{dy'} \right) - \text{\&c.}; \end{aligned}$$

on aura donc, en intégrant l'équation précédente,

$$c = \Sigma . m . \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} \right).$$

On trouvera semblablement,

$$c' = \Sigma . m . \left(\frac{x dz - z dx}{dt} \right);$$

$$c'' = \Sigma . m . \left(\frac{y dz - z dy}{dt} \right);$$

c, c', c'', &c. étant des constantes arbitraires. Ces trois intégrales renferment le principe des aires, que nous avons exposé dans le Chapitre V du premier Livre.

Enfin, si l'on multiplie les équations différentielles en x, x', x'', &c., respectivement par dx, dx', dx'', &c.; celles en y, y', &c., respectivement par dy, dy', &c.; celles en z, z', &c., respectivement par dz, dz', &c., et qu'on les ajoute ensemble; on aura

$$0 = \Sigma . m . \frac{\{dx . ddx + dy . ddy + dz . ddz\}}{dt^2} - d\lambda,$$

et en intégrant,

$$h = \Sigma . m . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) - 2\lambda;$$

h étant une nouvelle arbitraire. Cette intégrale renferme le principe de la conservation des forces vives, exposé dans le Chapitre V du premier Livre.

Les sept intégrales précédentes sont les seules intégrales rigoureuses que l'on a pu obtenir jusqu'à présent : dans le cas où le système n'est composé que de deux corps, elles réduisent la détermination de leurs mouvemens, à des équations différentielles du premier ordre, que l'on peut intégrer, comme on le verra dans la suite; mais lorsque le systême est formé de trois ou d'un plus grand nombre de corps; il faut nécessairement recourir aux méthodes d'approximation.

9. Comme on ne peut observer que des mouvemens relatifs; on rapporte les mouvemens des planètes et des comètes, au centre du soleil, et les mouvemens des satellites, au centre de leurs planètes. Ainsi, pour comparer la théorie aux observations; il faut déterminer le mouvement relatif d'un systême de corps, autour d'un corps considéré comme le centre de leurs mouvemens.

Soit M ce dernier corps, m, m', m'', &c., étant les autres corps dont on cherche le mouvement relatif autour de M; soient ζ, Π et γ, les coordonnées rectangles de M; $\zeta+x$, $\Pi+y$, $\gamma+z$, celles de m; $\zeta+x'$, $\Pi+y'$, $\gamma+z'$, celles de m', &c.; il est visible que x, y, z, seront les coordonnées de m, par rapport à M; que x', y', z', seront celles de m', par rapport au même corps, et ainsi du reste. Nommons r, r', &c. les distances de m, m', &c. au corps M; en sorte que

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,; \qquad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,; \text{ \&c.}$$

et supposons

$$\lambda=\frac{m.m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}+\frac{m.m''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}}$$
$$+\frac{m'.m''}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}}+\text{\&c.}$$

Cela posé, l'action de m sur M, décomposée parallèlement à l'axe des x, et en sens contraire de leur origine, sera $\frac{mx}{r^3}$; celle de m' sur M décomposée suivant la même direction, sera $\frac{m'x'}{r'^3}$, et ainsi du reste. On aura donc, pour déterminer ζ, l'équation différentielle

$$0=\frac{dd'}{dt^2}-\Sigma.\frac{mx}{r^3}\,;$$

on aura pareillement

$$0=\frac{dd\Pi}{dt^2}-\Sigma.\frac{my}{r^3}\,;$$

$$0=\frac{dd\gamma}{dt^2}-\Sigma.\frac{mz}{r^3}.$$

L'action de M sur m, décomposée parallèlement à l'axe des x, et dirigée en sens contraire de leur origine, sera $-\frac{Mx}{r^3}$, et la somme des actions des corps m', m'', &c. sur m, décomposées suivant la même direction, sera $\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$; on aura donc

$$0=\frac{dd.(\zeta+x)}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}-\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right);$$

en

en substituant au lieu de $\frac{dd\zeta}{dt^2}$, sa valeur $\Sigma.\frac{mx}{r^3}$, on aura

$$o=\frac{ddx}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}+\Sigma.\frac{mx}{r^3}-\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right); \quad (1)$$

on aura pareillement

$$o=\frac{ddy}{dt^2}+\frac{My}{r^3}+\Sigma.\frac{my}{r^3}-\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dy}\right); \quad (2)$$

$$o=\frac{ddz}{dt^2}+\frac{Mz}{r^3}+\Sigma.\frac{mz}{r^3}-\frac{1}{m}.\left(\frac{d\lambda}{dz}\right); \quad (3)$$

Si l'on change successivement dans les équations (1), (2), (3), les quantités m, x, y, z, dans celles-ci, m', x', y', z'; m'', x'', y'', z'', &c., et réciproquement; on aura les équations du mouvement des corps m', m'', &c., autour de M.

Si l'on multiplie l'équation différentielle en ζ, par $M+\Sigma.m$; celle en x, par m; celle en x', par m'; et ainsi du reste; en les ajoutant ensemble, et en observant que par la nature de la fonction λ, on a

$$o=\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)+\left(\frac{d\lambda}{dx'}\right)+\&c.;$$

on aura

$$o=(M+\Sigma.m).\frac{dd\zeta}{dt^2}+\Sigma.m.\frac{ddx}{dt^2};$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\zeta=a+bt-\frac{\Sigma.mx}{M+\Sigma.m};$$

a et b étant deux constantes arbitraires. On aura pareillement

$$\Pi=a'+b't-\frac{\Sigma.my}{M+\Sigma.m};$$

$$\gamma=a''+b''t-\frac{\Sigma.mz}{M+\Sigma.m};$$

a', b', a'', b'', étant des constantes arbitraires : on aura ainsi le mouvement absolu de M dans l'espace, lorsque les mouvemens relatifs de m, m', &c., autour de lui, seront connus.

Si l'on multiplie l'équation différentielle en x, par

$$-my+m.\frac{\Sigma.my}{M+\Sigma.m};$$

et l'équation différentielle en y, par

$$mx - m.\frac{\Sigma.mx}{M+\Sigma.m};$$

si l'on multiplie partiellement l'équation différentielle en x', par

$$-m'y' + m'.\frac{\Sigma.my}{M+\Sigma.m};$$

et l'équation différentielle en y', par

$$m'x' - m'.\frac{\Sigma.mx}{M+\Sigma.m};$$

et ainsi du reste; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, en observant que la nature de la fonction λ, donne

$$0 = \Sigma.x.\left(\frac{d\lambda}{dy}\right) - \Sigma.y.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right);$$

$$0 = \Sigma.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right); \quad 0 = \Sigma.\left(\frac{d\lambda}{dy}\right);$$

on aura

$$0 = \Sigma.m.\frac{\{xddy - yddx\}}{dt^2} - \frac{\Sigma.mx}{M+\Sigma.m}.\Sigma.m.\frac{ddy}{dt^2} + \frac{\Sigma.my}{M+\Sigma.m}.\Sigma.m.\frac{ddx}{dt^2};$$

équation dont l'intégrale est

$$\text{const.} = \Sigma.m.\frac{(xdy - ydx)}{dt} - \frac{\Sigma.mx}{M+\Sigma.m}.\Sigma.m.\frac{dy}{dt} + \frac{\Sigma.my}{M+\Sigma.m}.\Sigma.m.\frac{dx}{dt};$$

ou

$$c = M.\Sigma.m.\frac{(xdy - ydx)}{dt} + \Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dy'-dy) - (y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right\}; \quad (4)$$

c étant une constante arbitraire. On parviendra de la même manière, aux deux intégrales suivantes :

$$c' = M.\Sigma.m.\frac{(xdz - zdx)}{dt} + \Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dz'-dz) - (z'-z).(dx'-dx)}{dt}\right\}; \quad (5)$$

$$c'' = M.\Sigma.m.\frac{(ydz - zdy)}{dt} + \Sigma.mm'.\left\{\frac{(y'-y).(dz'-dz) - (z'-z).(dy'-dy)}{dt}\right\}; \quad (6)$$

c', c'' étant deux nouvelles arbitraires.

Si l'on multiplie l'équation différentielle en x, par

$$2\,mdx - 2\,m.\frac{\Sigma m.dx}{M+\Sigma.m};$$

l'équation différentielle en y, par

$$2\,mdy - 2\,m.\frac{\Sigma.mdy}{M+\Sigma.m};$$

l'équation différentielle en z, par

$$2m\,dz - 2m.\frac{\Sigma.m\,dz}{M+\Sigma.m};$$

si l'on multiplie pareillement l'équation différentielle en x', par

$$2m'dx' - 2m'.\frac{\Sigma.m\,dx}{M+\Sigma.m};$$

l'équation différentielle en y', par

$$2m'dy' - 2m'.\frac{\Sigma.m\,dy}{M+\Sigma.m};$$

l'équation différentielle en z', par

$$2m'dz' - 2m'.\frac{\Sigma.m\,dz}{M+\Sigma.m};$$

et ainsi du reste; si l'on ajoute ensuite ces diverses équations, en observant que

$$0=\Sigma.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right); \qquad 0=\Sigma.\left(\frac{d\lambda}{dy}\right); \qquad 0=\Sigma.\left(\frac{d\lambda}{dz}\right);$$

on aura

$$0=2.\Sigma.m.\frac{(dx.ddx+dy.ddy+dz.ddz)}{dt^2}-\frac{2.\Sigma.m\,dx}{M+\Sigma.m}.\Sigma.\frac{m.ddx}{dt^2}$$
$$-\frac{2.\Sigma.m\,dy}{M+\Sigma.m}.\Sigma.\frac{m.ddy}{dt^2}-\frac{2.\Sigma.m\,dz}{M+\Sigma.m}.\Sigma.\frac{m.ddz}{dt^2}+2M.\Sigma.\frac{m\,dr}{r^2}-2.d\lambda;$$

ce qui donne en intégrant

$$\text{constante}=\Sigma.m.\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{(\Sigma.m\,dx)^2-(\Sigma.m\,dy)^2-(\Sigma.m\,dz)^2}{(M+\Sigma.m).dt^2}$$
$$-2M.\Sigma.\frac{m}{r}-2\lambda,$$

ou

$$h=M.\Sigma.m.\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}+\Sigma.mm'.\left\{\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2}\right\}$$
$$-\left\{2M.\Sigma.\frac{m}{r}+2\lambda\right\}.(M+\Sigma m); \quad (7)$$

h étant une constante arbitraire. Nous sommes déjà parvenus à ces diverses intégrales, dans le Chapitre V du premier Livre, relativement à un systême de corps qui réagissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque; mais vu leur utilité dans la théorie du systême du monde, nous avons cru devoir les démontrer ici de nouveau.

10. Ces intégrales étant les seules que l'on ait obtenues dans l'état actuel de l'analyse; on est forcé de recourir aux méthodes d'approximation, et de profiter des facilités qu'offre pour cet objet, la constitution du systême du monde. Une des principales tient à ce que le systême solaire est partagé en systêmes partiels, formés par les planètes et par leurs satellites : ces systêmes sont tels, que les distances des satellites à leur planète, sont considérablement plus petites que la distance de la planète au soleil: il en résulte que l'action du soleil étant à-peu-près la même sur la planète et sur ses satellites, ceux-ci se meuvent à-peu-près, comme s'ils n'obéissoient qu'à l'action de la planète. Il en résulte encore cette propriété remarquable, savoir que le mouvement du centre de gravité d'une planète et de ses satellites, est à fort peu près le même que si tous ces corps étoient réunis à ce centre.

Pour le démontrer, supposons que les distances mutuelles des corps m, m', m'', &c., soient très-petites par rapport à la distance de leur centre commun de gravité, au corps M. Soit

$$x = X + x_{,}\,; \qquad y = Y + y_{,}\,; \qquad z = Z + z_{,}\,;$$
$$x' = X + x'_{,}\,; \qquad y' = Y + y'_{,}\,; \qquad z' = Z + z'_{,}\,;$$
&c.;

X, Y, Z, étant les coordonnées du centre de gravité du systême des corps m, m', m'', &c.; l'origine de ces coordonnées étant, ainsi que celle des coordonnées x, y, z, x', y', z', &c., au centre de M. Il est clair que $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x'_{,}$, &c. seront les coordonnées de m, m', &c., relativement à leur centre commun de gravité; nous les supposerons très-petites du premier ordre par rapport à X, Y, Z. Cela posé, on aura, comme on l'a vu dans le premier Livre, la force qui sollicite le centre de gravité du systême, parallèlement à une droite quelconque, en prenant la somme des forces qui animent les corps, parallèlement à cette droite, multipliées respectivement par leurs masses, et en divisant cette somme, par la somme des masses. On a vu de plus, dans le même Livre, que l'action mutuelle des corps liés entre eux, d'une manière quelconque, n'altère point le mouvement du centre de gravité du systême, et par le n°. 8, l'attraction mutuelle des corps n'influe point sur ce mouvement;

il suffit donc dans la recherche des forces qui animent le centre de gravité du systême, d'avoir égard à l'action du corps M, étranger à ce systême.

L'action de M sur m, décomposée parallèlement à l'axe des x, et en sens contraire de leur origine, est $-\frac{M.x}{r^3}$; la force entière qui sollicite parallèlement à cette droite, le centre de gravité du systême des corps m, m', &c., est donc

$$-\frac{M.\Sigma.\frac{mx}{r^3}}{\Sigma.m}.$$

En substituant au lieu de x et de r, leurs valeurs, on a

$$\frac{x}{r^3}=\frac{X+x_{,}}{\{(X+x_{,})^2+(Y+y_{,})^2+(Z+z_{,})^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on néglige les quantités très-petites du second ordre, c'est-à-dire, les quarrés et les produits des variables $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x'_{,}$, &c.; que l'on désigne par R, la distance $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, du centre de gravité du systême, au corps M; on aura

$$\frac{x}{r^3}=\frac{X}{R^3}+\frac{x_{,}}{R^3}-\frac{3X.\{Xx_{,}+Yy_{,}+Zz_{,}\}}{R^5}.$$

En marquant successivement d'un trait, de deux traits, &c., dans le second membre de cette équation, les lettres $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; on aura les valeurs de $\frac{x'}{r'^3}$, $\frac{x''}{r''^3}$, &c.; mais on a, par la nature du centre de gravité,

$$0=\Sigma.mx_{,}\,; \qquad 0=\Sigma.my_{,}\,; \qquad 0=\Sigma.mz_{,}\,;$$

on aura donc, aux quantités près du second ordre,

$$-\frac{M.\Sigma.\frac{mx}{r^3}}{\Sigma.m}=-\frac{M.X}{R^3};$$

ainsi, le centre de gravité du systême est à très-peu près sollicité parallèlement à l'axe des x, par l'action du corps M, comme si tous les corps du systême étoient réunis à ce centre. Le même résultat a évidemment lieu relativement aux axes des y et des z; en sorte que les forces dont le centre de gravité du systême est animé parallèlement à ces axes, par l'action de M, sont $-\frac{M.Y}{R^3}$ et $-\frac{MZ}{R^3}$.

Lorsque l'on considère le mouvement relatif du centre de gravité du système autour de M, il faut lui transporter en sens contraire, la force qui sollicite ce corps. Cette force résultante de l'action de m, m', m'', &c., sur M, et décomposée parallèlement aux x, en sens contraire de leur origine, est $\Sigma.\frac{mx}{r^3}$; si l'on néglige les quantités du second ordre, cette fonction est, par ce qui précède, égale à

$$\frac{X.\Sigma.m}{R^3}.$$

Pareillement, les forces dont M est animé par l'action du système, parallèlement aux axes des y et des z, en sens contraire de leur origine, sont

$$\frac{Y.\Sigma.m}{R^3}, \text{ et } \frac{Z.\Sigma.m}{R^3}.$$

On voit ainsi, que l'action du système sur le corps M, est à très-peu près la même que si tous les corps de ce système étoient réunis à leur centre commun de gravité. En transportant à ce centre, et avec un signe contraire, les trois forces précédentes; ce point sera sollicité parallèlement aux axes des x, des y et des z, dans son mouvement relatif autour de M, par les trois forces suivantes :

$$-(M+\Sigma.m).\frac{X}{R^3}; \quad -\{M+\Sigma.m\}.\frac{Y}{R^3}; \quad -\{M+\Sigma.m\}.\frac{Z}{R^3}.$$

Ces forces sont les mêmes que si tous les corps m, m', m'', &c., étoient réunis à leur centre commun de gravité; ce centre se meut donc aux quantités près du second ordre, comme si tous ces corps y étoient réunis.

Il suit de-là, que si l'on a plusieurs systêmes dont les centres de gravité soient fort éloignés les uns des autres, relativement aux distances respectives des corps de chaque système; ces centres seront mus à fort peu près, comme si les corps de chaque système y étoient réunis; car l'action du premier système sur chaque corps du second système, est, par ce qui vient d'être dit, la même à très-peu près que si les corps du premier systême étoient réunis à leur centre commun de gravité ; l'action du premier système sur le centre de gravité du second, sera donc, par ce qui précède, la même que dans cette hypothèse ; d'où l'on peut généralement conclure que l'action réciproque des différens systêmes, sur leurs centres de gravité respectifs, est la même que si les corps de chaque système y étoient réunis, et qu'ainsi, ces centres se meuvent, comme dans le cas de cette réunion. Il est visible que ce résultat a également lieu, les corps de chaque système étant libres, ou liés entre eux d'une manière quelconque ; parce que leur action mutuelle n'influe point sur le mouvement de leur centre commun de gravité.

Le système d'une planète agit donc à très-peu près sur les autres corps du système solaire, comme si la planète et ses satellites étoient réunies à leur centre commun de gravité ; et ce centre est attiré par les différens corps du système solaire, comme dans cette hypothèse.

Chaque corps céleste étant la réunion d'une infinité de molécules douées d'un pouvoir attractif, et ses dimensions étant très-petites relativement à sa distance aux autres corps du système du monde ; son centre de gravité est à très-peu près attiré, comme si toute sa masse y étoit réunie ; et il agit lui-même sur ces différens corps, comme dans cette supposition ; on peut donc, dans la recherche du mouvement des centres de gravité des corps célestes, considérer ces différens corps comme autant de points massifs placés à leurs centres de gravité. Mais la sphéricité des planètes et de leurs satellites, rend cette supposition déjà fort approchée, beaucoup plus exacte encore. En effet, ces divers corps peuvent être considérés comme étant formés de couches à très-peu près sphériques, d'une densité variable, suivant une loi quelconque ; et nous allons faire voir que l'action d'une couche sphérique, sur un corps qui lui est extérieur, est la même que si sa masse étoit réunie à son centre. Pour cela, nous allons établir, sur les attractions des sphéroïdes, quelques propositions générales qui nous seront très-utiles dans la suite.

11. Soient x, y, z, les trois coordonnées du point attiré que nous désignerons par m; soit dM une molécule du sphéroïde,

et x', y', z', les coordonnées de cette molécule ; si l'on nomme ρ sa densité, ρ étant une fonction de x', y', z', indépendante de x, y, z ; on aura

$$dM = \rho . dx' . dy' . dz'.$$

L'action de dM sur m, décomposée parallèlement à l'axe des x, et dirigée vers leur origine, sera

$$\frac{\rho . dx' . dy' . dz' . (x - x')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

et par conséquent elle sera égale à

$$-\left\{\frac{d . \frac{\rho . dx' . dy' . dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{dx}\right\};$$

en nommant donc V, l'intégrale

$$\int \frac{\rho . dx' . dy' . dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

étendue à la masse entière du sphéroïde ; on aura $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$, pour l'action totale du sphéroïde sur le point m, décomposée parallèlement à l'axe des x, et dirigée vers leur origine.

V est la somme des molécules du sphéroïde, divisées par leurs distances respectives au point attiré ; pour avoir l'attraction du sphéroïde sur ce point, parallèlement à une droite quelconque, il faut donc considérer V comme fonction de trois coordonnées rectangles, dont l'une soit parallèle à cette droite, et différentier cette fonction relativement à cette coordonnée ; le coefficient de cette différentielle, pris avec un signe contraire, sera l'expression de l'attraction du sphéroïde, parallèlement à la droite donnée, et dirigée vers l'origine de la coordonnée qui lui est parallèle.

Si l'on représente par ϵ, la fonction $\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$; on aura

$$V = \int \epsilon . \rho . dx' . dy' . dz'.$$

L'intégration n'étant relative qu'aux variables x', y', z', il est clair que l'on aura

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = \int \rho . dx' . dy' . dz' . \left\{\left(\frac{dd\epsilon}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\epsilon}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\epsilon}{dz^2}\right)\right\};$$

Mais

mais on a

$$o = \left(\frac{dd\mathcal{C}}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\mathcal{C}}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\mathcal{C}}{dz^2}\right);$$

on aura donc pareillement

$$o = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right); \qquad (A)$$

cette équation remarquable nous sera de la plus grande utilité dans la théorie de la figure des corps célestes. On peut lui donner d'autres formes plus commodes dans diverses circonstances; concevons, par exemple, que de l'origine des coordonnées, on mène au point attiré, un rayon que nous nommerons r; soit θ l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, et ϖ l'angle que le plan formé par r et par cet axe, fait avec le plan dès x et des y; on aura

$$x = r.\cos.\theta\;; \quad y = r.\sin.\theta.\cos.\varpi\;; \quad z = r.\sin.\theta.\sin.\varpi;$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;; \quad \cos.\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;; \quad \text{tang.}\varpi = \frac{z}{y};$$

on pourra ainsi avoir les différences partielles de r, θ et ϖ, relativement aux variables x, y, z; et l'on en conclura les valeurs de $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)$, en différences partielles de V, relatives aux variables r, θ et ϖ. Comme nous ferons souvent usage de ces transformations des différences partielles; il est utile d'en rappeler ici le principe. En considérant V comme fonction des variables x, y, z, et ensuite, des variables r, θ et ϖ; on a

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right).\left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right).\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi}{dx}\right).$$

Pour avoir les différences partielles $\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)$, il ne faut faire varier que x, dans les expressions précédentes de r, $\cos.\theta$, et $\text{tang.}\varpi$; en différentiant donc ces expressions, on aura

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = \cos.\theta\;; \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = -\frac{\sin.\theta}{r}\;; \quad \left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = o;$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \cos.\theta.\left(\frac{dV}{dr}\right) - \frac{\sin.\theta}{r}.\left(\frac{dV}{d\theta}\right).$$

On aura donc ainsi, la différence partielle $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, en différences partielles de la fonction V, prises par rapport aux variables r, θ et ϖ. En différentiant de nouveau, cette valeur de $\left(\frac{dV}{dx}\right)$; on aura la différence partielle $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)$, en différences partielles de V, prises par rapport aux variables r, θ et ϖ. On aura, par le même procédé, les valeurs de $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)$, et $\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)$.

On transformera de cette manière, l'équation (A), dans la suivante:

$$o=\left(\frac{ddV}{d\theta^2}\right)+\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}\cdot\left(\frac{dV}{d\theta}\right)+\frac{\left(\frac{ddV}{d\varpi^2}\right)}{\sin.^2\theta}+r.\left(\frac{dd.rV}{dr^2}\right); \qquad (B)$$

et si l'on fait $\cos.\theta=\mu$, cette dernière équation deviendra

$$o=\left\{\frac{d.\left\{(1-\mu\mu).\left(\frac{dV}{d\mu}\right)\right\}}{d\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{ddV}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu}+r.\left(\frac{dd.rV}{dr^2}\right). \qquad (C)$$

12. Supposons maintenant que le sphéroïde soit une couche sphérique dont l'origine des coordonnées soit au centre; il est clair que V ne dépendra que de r, et qu'il ne renfermera ni μ ni ϖ; l'équation (C) donnera donc

$$o=\left(\frac{dd.rV}{dr^2}\right);$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$V=A+\frac{B}{r},$$

A et B étant deux constantes arbitraires. On a donc

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right)=\frac{B}{r^2}.$$

$-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ exprime, par ce qui précède, l'action de la couche sphérique sur le point m, décomposée suivant le rayon r, et dirigée vers le centre de la couche; or il est clair que l'action totale de la couche doit être dirigée suivant ce rayon; $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ exprime donc l'action totale de la couche sphérique sur le point m.

Supposons d'abord ce point placé au-dedans de la couche. S'il étoit au centre même, l'action de la couche seroit nulle; on a donc $-\left(\frac{dV}{dr}\right)=0$, ou $\frac{B}{r^2}=0$, lorsque $r=0$, ce qui donne $B=0$, et par conséquent $-\left(\frac{dV}{dr}\right)=0$, quel que soit r; d'où il suit qu'un point placé dans l'intérieur de la couche, n'en éprouve aucune action, ou, ce qui revient au même, il est également attiré de toutes parts.

Si le point m est situé au-dehors de la couche sphérique; il est visible qu'en le supposant infiniment éloigné de son centre, l'action de la couche sur ce point, sera la même que si toute la masse de la couche étoit réunie à ce centre; en nommant donc M la masse de cette couche; $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ ou $\frac{B}{r^2}$ deviendra dans ce cas, égal à $\frac{M}{r^2}$, ce qui donne $B=M$; on a donc généralement, par rapport aux points extérieurs,

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right)=\frac{M}{r^2};$$

c'est-à-dire que la couche sphérique les attire, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre.

Une sphère étant une couche sphérique dont le rayon de la surface intérieure est nul; on voit que son attraction sur un point placé à sa surface ou au-delà, est la même que si sa masse étoit réunie à son centre.

Ce résultat a encore lieu pour les globes formés de couches concentriques d'une densité variable du centre à la circonférence, suivant une loi quelconque; puisqu'il est vrai pour chacune de ces couches : ainsi, le soleil, les planètes et les satellites pouvant être considérés à très-peu près, comme des globes de cette nature, ils attirent à fort peu près les corps extérieurs, comme si l'on supposoit leurs masses réunies à leurs centres de gravité; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé par les observations, dans le n°. 5. A la vérité, la figure des corps célestes s'écarte un peu de la sphère; mais la différence est très-petite, et l'erreur qui en résulte sur la supposition précédente, est du même ordre que cette différence, relativement aux points voisins de leur surface; et relativement aux points éloignés, l'erreur est du même ordre que le produit de cette différence, par le quarré du rapport des rayons des corps attirans, à leurs distances aux points attirés; car on a vu, dans le n°. 10, que la considération seule de l'éloignement des points attirés, rend l'erreur de la supposition précédente, du même ordre que le quarré de ce rapport. Les corps célestes s'attirent donc à très-peu près, comme si leurs masses étoient réunies à leurs centres de gravité, non-seulement parce qu'ils sont fort éloignés les uns des autres, relativement à leurs dimensions respectives; mais encore parce que leurs figures diffèrent très-peu de la sphère.

La propriété dont les sphères jouissent dans la loi de la nature, d'attirer comme si leurs masses étoient réunies à leurs centres, est très-remarquable, et l'on peut être curieux de savoir si elle a lieu dans d'autres loix d'attraction. Pour cela, nous observerons que si la loi de la pesanteur est telle qu'une sphère homogène attire un point placé au-dehors, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre; le même résultat doit avoir lieu pour une couche sphérique d'une épaisseur constante; car si l'on enlève à une sphère, une couche sphérique d'une épaisseur constante, on formera une nouvelle sphère d'un plus petit rayon, mais qui aura, ainsi que la première, la propriété d'attirer, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre; or il est évident que ces deux sphères ne peuvent avoir cette propriété commune, qu'autant qu'elle l'est encore à la couche sphérique qui forme leur différence. Le problême se réduit donc à déterminer les loix d'attraction suivant lesquelles une couche sphérique d'une épaisseur infiniment petite et constante, attire un point extérieur, comme si toute sa masse étoit réunie à son centre.

Soit r la distance du point attiré au centre de la couche sphérique; u le rayon de cette couche, et du son épaisseur. Soit θ l'angle que le rayon u fait avec la droite r; ϖ l'angle que le plan qui passe par les deux droites r et u fait avec un plan fixe passant par la droite r; l'élément de la couche sphérique sera $u^2 du . d\varpi . d\theta . \sin. \theta$. Si l'on nomme ensuite f la distance de cet élément au point attiré, on aura

$$f^2 = r^2 - 2ru . \cos. \theta + u^2.$$

Représentons par $\varphi(f)$, la loi de l'attraction à la distance f; l'action de l'élément de la couche, sur le point attiré, décomposée parallèlement à r, et dirigée vers le centre de la couche, sera

$$u^2 du . d\varpi . \sin.\theta . \frac{(r - u.\cos.\theta)}{f} . \varphi(f);$$

mais on a

$$\frac{r - u.\cos.\theta}{f} = \left(\frac{df}{dr}\right);$$

ce qui donne à la quantité précédente, cette forme

$$u^2 . du . d\varpi . \sin.\theta . \left(\frac{df}{dr}\right) . \varphi(f);$$

partant, si l'on désigne $\int df . \varphi(f)$ par $\varphi_{,}(f)$, on aura l'action entière de la couche sphérique, sur le point attiré, au moyen de l'intégrale $u^2 . du . \int d\varpi . d\theta . \sin.\theta . \varphi_{,}(f)$, différentiée par rapport à r, et divisée par dr.

Cette intégrale doit être prise relativement à ϖ, depuis $\varpi = 0$, jusqu'à ϖ égal à la circonférence, et après cette intégration, elle devient

$$2\pi . u^2 . du . \int d\theta . \sin.\theta . \varphi_{,}(f);$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. Si l'on différencie la valeur de f par rapport à θ, on aura

$$d\theta . \sin.\theta = \frac{fdf}{ru};$$

et par conséquent,

$$2\pi . u^2 du . \int d\theta . \sin.\theta . \varphi_{,}(f) = 2\pi . \frac{u\,du}{r} . \int f df . \varphi_{,}(f).$$

L'intégrale relative à θ, doit être prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et à ces deux limites, on a $f = r - u$, et $f = r + u$; ainsi l'intégrale relative à f, doit être prise depuis $f = r - u$ jusqu'à $f = r + u$; soit donc $\int f df . \varphi_{,}(f) = \psi(f)$; on aura

$$\frac{2\pi . u\,du}{r} \int f df . \varphi_{,}(f) = \frac{2\pi . u\,du}{r} . \{\psi(r+u) - \psi(r-u)\}.$$

Le coefficient de dr, dans la différentielle du second membre de cette équation, prise par rapport à r, donnera l'attraction de la couche sphérique, sur le point attiré; et il est facile d'en conclure que dans la nature où $\varphi(f) = \frac{1}{f^2}$, cette attraction est égale à

$\frac{4\pi . u^2 du}{r^2}$; c'est-à-dire, qu'elle est la même que si toute la masse de la couche sphérique étoit réunie à son centre ; ce qui fournit une nouvelle démonstration de la propriété que nous avons établie précédemment sur l'attraction des sphères.

Déterminons maintenant $\varphi(f)$, d'après la condition que l'attraction de la couche est la même que si sa masse étoit réunie à son centre. Cette masse est égale à $4\pi . u^2 du$, et si elle étoit réunie à son centre, son action sur le point attiré, seroit $4\pi . u^2 du . \varphi(r)$; on aura donc

$$2\pi . u du . \left\{\frac{d . \left\{\frac{1}{r} . (\psi[r+u] - \psi[r-u])\right\}}{dr}\right\} = 4\pi . u^2 du . \varphi(r); \quad (D)$$

en intégrant par rapport à r, on aura

$$\psi(r+u) - \psi(r-u) = 2ru . \int dr . \varphi(r) + rU,$$

U étant une fonction de u et de constantes, ajoutée à l'intégrale $2u . \int dr . \varphi(r)$. Si l'on représente $\psi(r+u) - \psi(r-u)$, par R, on aura, en différentiant l'équation précédente,

$$\left(\frac{ddR}{dr^2}\right) = 4u . \varphi(r) + 2ru . \frac{d . \varphi(r)}{dr};$$

$$\left(\frac{ddR}{du^2}\right) = r . \left(\frac{ddU}{du^2}\right);$$

mais on a, par la nature de la fonction R,

$$\left(\frac{ddR}{dr^2}\right) = \left(\frac{ddR}{du^2}\right);$$

partant

$$2u . \left\{2\varphi(r) + r . \frac{d . \varphi(r)}{dr}\right\} = r . \left(\frac{ddU}{du^2}\right);$$

ou

$$\frac{2\varphi(r)}{r} + \frac{d . \varphi(r)}{dr} = \frac{1}{2u} . \left(\frac{ddU}{du^2}\right).$$

Ainsi, le premier membre de cette équation étant indépendant de u, et le second membre étant indépendant de r, chacun de ces membres doit être égal à une constante arbitraire que nous désignerons par $3A$; on a donc

$$\frac{2 . \varphi(r)}{r} + \frac{d . \varphi(r)}{dr} = 3A;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varphi(r) = A\,r + \frac{B}{r^2},$$

B étant une nouvelle constante arbitraire. Toutes les loix d'attraction dans lesquelles une sphère agit sur un point extérieur placé à la distance r de son centre, comme si toute sa masse étoit réunie à ce centre, sont donc comprises dans la formule générale

$$A\,r + \frac{B}{r^2};$$

il est aisé de voir qu'en effet, cette valeur satisfait à l'équation (D) quels que soient A et B.

Si l'on suppose $A=0$, on aura la loi de la nature, et l'on voit que dans le nombre infini des loix qui rendent l'attraction très-petite à de grandes distances, celle de la nature est la seule dans laquelle les sphères ont la propriété d'agir, comme si leurs masses étoient réunies à leurs centres.

Cette loi est encore la seule dans laquelle un corps placé au-dedans d'une couche sphérique, par-tout d'égale épaisseur, est également attiré de toutes parts. Il résulte de l'analyse précédente, que l'attraction de la couche sphérique dont l'épaisseur est du, sur un point placé dans son intérieur, a pour expression,

$$2\pi.udu.\left\{\frac{d.\frac{1}{r}\{\psi(u+r)-\psi(u-r)\}}{dr}\right\}.$$

Pour que cette fonction soit nulle, on doit avoir

$$\psi(u+r)-\psi(u-r)=r.U,$$

U étant une fonction de u, indépendante de r, et il est facile de voir que cela a lieu dans la loi de la nature ou $\varphi(f)=\frac{B}{f^2}$. Mais pour faire voir que cela n'a lieu que dans cette loi, nous désignerons par $\psi'(f)$, la différence de $\psi(f)$, divisée par df; nous désignerons encore par $\psi''(f)$, la différence de $\psi'(f)$, divisée par df, et ainsi de suite; nous aurons ainsi, en différentiant deux fois de suite, l'équation précédente, par rapport à r,

$$\psi''(u+r)-\psi''(u-r)=0.$$

Cette équation ayant lieu, quels que soient u et r, il en résulte que

$\psi''(f)$ doit être égal à une constante, quel que soit f, et qu'ainsi $\psi'''(f) = 0$; or on a, par ce qui précède,

$$\psi'(f) = f.\varphi_{,}(f),$$

d'où l'on tire

$$\psi'''(f) = 2.\varphi(f) + f.\varphi'(f);$$

on a donc

$$0 = 2.\varphi(f) + f.\varphi'(f);$$

ce qui donne en intégrant, $\varphi(f) = \frac{B}{f^2}$, et par conséquent, la loi de la nature.

13. Reprenons l'équation (C) du n°. 11. Si l'on pouvoit intégrer généralement cette équation; on auroit une expression de V, qui renfermeroit deux fonctions arbitraires que l'on détermineroit en cherchant l'attraction du sphéroïde sur un point situé dans une position qui facilite cette recherche, et en comparant cette attraction à son expression générale. Mais l'intégration de l'équation (C) n'est possible que dans quelques cas particuliers, tels que celui où le sphéroïde attirant est une sphère, ce qui réduit cette équation aux différences ordinaires; elle est encore possible dans le cas où ce sphéroïde est un cylindre dont la base est une courbe rentrante, et dont la longueur est infinie: on verra dans le troisième Livre, que ce cas particulier renferme la théorie des anneaux de Saturne.

Fixons l'origine des r, sur l'axe même du cylindre que nous supposerons d'une longueur infinie de chaque côté de cette origine. En nommant r' la distance du point attiré, à l'axe; on aura

$$r' = r.\sqrt{1-\mu^2}.$$

Il est visible que V ne dépend que de r' et de ϖ, puisqu'il est le même pour tous les points relativement auxquels ces deux variables sont les mêmes; il ne renferme donc μ, qu'autant que r' est fonction de cette variable; ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{d\mu}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right).\left(\frac{dr'}{d\mu}\right) = -\frac{r\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dV}{dr'}\right);$$

$$\left(\frac{ddV}{d\mu^2}\right) = \frac{r^2\mu^2}{1-\mu^2}.\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) - \frac{r}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}.\left(\frac{dV}{dr'}\right);$$

l'équation (C) devient ainsi,

$$0 = r'^2.\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) + \left(\frac{ddV}{d\varpi^2}\right) + r'.\left(\frac{dV}{dr'}\right);$$

d'où

d'où l'on tire en intégrant,

$$V = \varphi\{r'.\cos.\varpi + r'.\sqrt{-1}.\sin.\varpi\} + \psi\{r'.\cos.\varpi - r'.\sqrt{-1}.\sin.\varpi\};$$

$\varphi(r')$ et $\psi(r')$ étant des fonctions arbitraires de r', que l'on pourra déterminer, en cherchant l'attraction du cylindre, lorsque ϖ est nul, et lorsqu'il est égal à un angle droit.

Si la base du cylindre est un cercle, V sera évidemment une fonction de r', indépendante de ϖ; l'équation précédente aux différences partielles deviendra ainsi,

$$0 = r'^2\left(\frac{ddV}{dr'^2}\right) + r'.\left(\frac{dV}{dr'}\right);$$

ce qui donne en intégrant,

$$-\left(\frac{dV}{dr'}\right) = \frac{H}{r'},$$

H étant une constante. Pour la déterminer, nous supposerons r' extrêmement grand par rapport au rayon de la base du cylindre, ce qui permet de considérer le cylindre comme une ligne droite infinie. Soit A cette base, et z la distance d'un point quelconque de l'axe du cylindre, au point où cet axe est rencontré par r'; l'action du cylindre considéré comme concentré sur son axe, sera parallèlement à r', égale à

$$\int \frac{Ar'.dz}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$, jusqu'à $z = \infty$; ce qui réduit cette intégrale à $\frac{2A}{r'}$; c'est l'expression de $-\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, lorsque r' est très-considérable. En la comparant à la précédente, on a $H = 2A$, et l'on voit que quel que soit r', l'action du cylindre sur un point extérieur, est $\frac{2A}{r'}$.

Si le point attiré est au-dedans d'une couche cylindrique circulaire, d'une épaisseur constante, et d'une longueur infinie; on a encore $-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{H}{r'}$; et comme l'attraction est nulle, lorsque le point attiré est sur l'axe même de la couche, on a $H = 0$, et par conséquent, un point placé dans l'intérieur de la couche, est également attiré de toutes parts.

14. On peut étendre au mouvement d'un corps, les équations (A), (B) et (C) du n°. 11, et en tirer une équation de condition très-utile, soit pour vérifier les calculs de la théorie, soit pour vérifier la théorie même de la pesanteur universelle. Les équations différentielles (1), (2), (3) du n°. 9, qui déterminent le mouvement relatif de m autour de M, peuvent être mises sous cette forme;

$$\frac{ddx}{dt^2}=\left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \frac{ddy}{dt^2}=\left(\frac{dQ}{dy}\right); \quad \frac{ddz}{dt^2}=\left(\frac{dQ}{dz}\right); \quad (i)$$

Q étant égal à $\frac{M+m}{r}-\Sigma.\frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\frac{\lambda}{m}$; et il est facile de voir que l'on a

$$o=\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddQ}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddQ}{dz^2}\right); \quad (E)$$

si les variables x', y', z', x'', &c., que Q renferme, sont indépendantes des x, y et z.

Transformons les variables x, y, z, en d'autres plus commodes pour les usages astronomiques. r étant le rayon mené du centre de M à celui de m, nous nommerons v l'angle que la projection de ce rayon sur le plan des x et des y, fait avec l'axe des x; et θ, l'inclinaison de r sur le même plan; on aura

$$x=r.\cos.\theta.\cos.v;$$
$$y=r.\cos.\theta.\sin.v;$$
$$z=r.\sin.\theta.$$

L'équation (E) rapportée à ces nouvelles variables, sera par le n°. 11,

$$o=r^2.\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right)+2r.\left(\frac{dQ}{dr}\right)+\frac{\left(\frac{ddQ}{dv^2}\right)}{\cos.^2\theta}+\left(\frac{ddQ}{d\theta^2}\right)-\frac{\sin.\theta}{\cos.\theta}.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right); \quad (F)$$

si l'on multiplie la première des équations (i), par $\cos.\theta.\cos.v$; la seconde, par $\cos.\theta.\sin.v$; la troisième, par $\sin.\theta$; et si pour abréger, on fait

$$M'=\frac{ddr}{dt^2}-\frac{r.dv^2}{dt^2}.\cos.^2\theta-\frac{r.d\theta^2}{dt^2};$$

on aura, en les ajoutant,

$$M'=\left(\frac{dQ}{dr}\right).$$

Pareillement, si l'on multiplie la première des équations (i), par $-r.\cos.\theta.\sin.v$; la seconde, par $r.\cos.\theta.\cos.v$, et qu'ensuite on les ajoute, et que l'on suppose

$$N'=\frac{d.\left(r^2\frac{dv}{dt}.\cos.^2\theta\right)}{dt},$$

on aura

$$N'=\left(\frac{dQ}{dv}\right).$$

Enfin, si l'on multiplie la première des équations (i), par $-r.\sin.\theta.\cos.v$; la seconde, par $-r.\sin.\theta.\sin.v$; qu'on les ajoute à la troisième, multipliée par $\cos.\theta$, et que l'on fasse

$$P'=r^2.\frac{dd\theta}{dt^2}+r^2.\frac{dv^2}{dt^2}.\sin.\theta.\cos.\theta+\frac{2rdrd\theta}{dt^2};$$

on aura

$$P'=\left(\frac{dQ}{d\theta}\right).$$

Les valeurs de r, v et θ, renferment six arbitraires introduites par les intégrations. Considérons trois quelconques de ces arbitraires que nous désignerons par a, b, c; l'équation $M'=\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ donnera les trois suivantes:

$$\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right).\left(\frac{dr}{da}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,dv}\right).\left(\frac{dv}{da}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,d\theta}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right)=\left(\frac{dM'}{da}\right);$$
$$\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right).\left(\frac{dr}{db}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,dv}\right).\left(\frac{dv}{db}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,d\theta}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right)=\left(\frac{dM'}{db}\right);$$
$$\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right).\left(\frac{dr}{dc}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,dv}\right).\left(\frac{dv}{dc}\right)+\left(\frac{ddQ}{dr\,d\theta}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right)=\left(\frac{dM'}{dc}\right);$$

On tirera de ces équations, la valeur de $\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right)$, et si l'on fait

$$m=\left(\frac{dv}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right)-\left(\frac{dv}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right);$$
$$n=\left(\frac{dv}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right)-\left(\frac{dv}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right);$$
$$p=\left(\frac{dv}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right)-\left(\frac{dv}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right);$$

$$\varepsilon = \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{dv}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{dv}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right)$$
$$+\left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{dv}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{dv}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right)$$
$$+\left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{dv}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{dv}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right);$$

on aura

$$\varepsilon.\left(\frac{ddQ}{dr^2}\right) = m.\left(\frac{dM'}{da}\right) + n.\left(\frac{dM'}{db}\right) + p.\left(\frac{dM'}{dc}\right).$$

Si l'on fait pareillement

$$m' = \left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right);$$
$$n' = \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right);$$
$$p' = \left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{d\theta}{da}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{d\theta}{db}\right);$$

l'équation $N' = \left(\frac{dQ}{dv}\right)$, donnera

$$\varepsilon.\left(\frac{ddQ}{dv^2}\right) = m'.\left(\frac{dN'}{da}\right) + n'.\left(\frac{dN'}{db}\right) + p'.\left(\frac{dN'}{dc}\right).$$

Enfin, si l'on fait

$$m'' = \left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{dv}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{dv}{db}\right);$$
$$n'' = \left(\frac{dr}{dc}\right).\left(\frac{dv}{da}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{dv}{dc}\right);$$
$$p'' = \left(\frac{dr}{da}\right).\left(\frac{dv}{db}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right).\left(\frac{dv}{da}\right);$$

l'équation $P' = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$, donnera

$$\varepsilon.\left(\frac{ddQ}{d\theta^2}\right) = m''.\left(\frac{dP'}{da}\right) + n''.\left(\frac{dP'}{db}\right) + p''.\left(\frac{dP'}{dc}\right).$$

L'équation (F) deviendra ainsi,

$$
\begin{aligned}
0 = m.r^2\cos.^2\theta.\left(\frac{dM'}{da}\right) + nr^2.\cos.^2\theta.\left(\frac{dM'}{db}\right) + p.r^2.\cos.^2\theta.\left(\frac{dM'}{dc}\right) \\
+ m'.\left(\frac{dN'}{da}\right) + n'.\left(\frac{dN'}{db}\right) + p'.\left(\frac{dN'}{dc}\right) \qquad (G) \\
+ m''.\cos.^2\theta.\left(\frac{dP'}{da}\right) + n''.\cos.^2\theta.\left(\frac{dP'}{db}\right) + p''.\cos.^2\theta.\left(\frac{dP'}{dc}\right) \\
+ \mathcal{E}.\{2rM'.\cos.^2\theta - P'.\sin.\theta.\cos.\theta\}.
\end{aligned}
$$

Dans la théorie de la lune, on néglige les perturbations que son action produit dans le mouvement relatif du soleil autour de la terre, ce qui revient à regarder sa masse comme infiniment petite. Alors les variables x', y', z', relatives au soleil, sont indépendantes de x, y, z, et l'équation (G) a lieu dans cette théorie ; il faut donc que les valeurs trouvées pour r, v et θ, y satisfassent, ce qui donne un moyen de vérifier ces valeurs. Si les inégalités observées dans le mouvement de la lune, sont le résultat de l'attraction mutuelle de ces trois corps, le soleil, la terre et la lune, il faut que les valeurs de r, v & θ, tirées des observations, satisfassent à l'équation (G), ce qui donne un moyen de vérifier la théorie de la pesanteur universelle ; car les longitudes moyennes de la lune, de son périgée, et de son nœud ascendant, entrent dans ces valeurs, et l'on peut prendre pour a, b, c, ces longitudes.

Pareillement, si dans la théorie des planètes, on néglige le quarré des forces perturbatrices, ce qui est presque toujours permis ; alors, dans la théorie de la planète dont les coordonnées sont x, y, z, on peut supposer que les coordonnées x', y', z', x'', &c. des autres planètes, sont relatives à leur mouvement elliptique, et par conséquent, indépendantes de x, y, z ; l'équation (G) a donc encore lieu dans cette théorie.

15. Les équations différentielles du n°. précédent,

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{ddr}{dt^2} - \frac{r.dv^2}{dt^2}.\cos.^2\theta - r.\frac{d\theta^2}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dr}\right); \\
&\frac{d.\left(r^2\frac{dv}{dt}.\cos.^2\theta\right)}{dt} = \left(\frac{dQ}{dv}\right); \\
&r^2.\frac{dd\theta}{dt^2} + r^2.\frac{dv^2}{dt^2}.\sin.\theta.\cos.\theta + \frac{2rdr\,d\theta}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right).
\end{aligned}\right\} ; (H)
$$

ne sont qu'une combinaison des équations différentielles (i) du même n°.; mais elles sont plus commodes, et plus adaptées aux usages astronomiques. On peut leur donner d'autres formes qui peuvent être utiles dans diverses circonstances.

Au lieu des variables r et θ, considérons celles-ci u et s, u étant égal à $\frac{1}{r.\cos.\theta}$, ou à l'unité divisée par la projection du rayon vecteur, sur le plan des x et des y; et s étant égal à tang. θ, ou à la tangente de la latitude de m au-dessus du même plan. Si l'on multiplie la seconde des équations (H) par $r^2 dv.\cos.^2\theta$, et qu'ensuite, on l'intègre; on aura

$$\left(\frac{dv}{u^2 dt}\right)^2 = h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2};$$

h étant une constante arbitraire; on a donc

$$dt = \frac{dv}{u^2.\sqrt{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}}},$$

Si l'on ajoute la première des équations (H) multipliée par $-\cos.\theta$, à la troisième multipliée par $\frac{\sin.\theta}{r}$, on aura

$$-\frac{d^2.\frac{1}{u}}{dt^2} + \frac{1}{u}.\frac{dv^2}{dt^2} = u^2.\left(\frac{dQ}{du}\right) + us.\left(\frac{dQ}{ds}\right)\Big\};$$

d'où l'on tire

$$d.\left(\frac{du}{u^2 dt}\right) + \frac{dv^2}{u\,dt} = u^2.dt.\left\{\left(\frac{dQ}{du}\right) + \frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)\right\}.$$

En substituant pour dt, sa valeur précédente, et regardant dv comme constant, on aura

$$o = \frac{ddu}{dv^2} + u + \frac{\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{du}{u^2 dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u}.\left(\frac{dQ}{ds}\right)}{h^2 + 2.\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}}.$$

La troisième des équations (H) deviendra de la même manière, en y traitant dv comme constant,

$$o = \frac{dds}{dv^2} + v + \frac{\frac{ds}{dv}.\left(\frac{dQ}{dv}\right) - (1+ss).\left(\frac{dQ}{ds}\right) - us.\left(\frac{dQ}{du}\right)}{u^2.\left\{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right).\frac{dv}{u^2}\right\}},$$

On aura donc, au lieu des trois équations différentielles (H), les suivantes :

$$dt = \frac{dv}{u^2 \cdot \sqrt{h^2 + 2 \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}};$$

$$0 = \frac{ddu}{dv^2} + u + \frac{\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2 dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)}{h^2 + 2 \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}; \qquad (K)$$

$$0 = \frac{dds}{dv^2} + s + \frac{\frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - (1+ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)}{u^2 \cdot \left\{h^2 + 2 \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right\}}.$$

Si l'on veut éviter les fractions et les radicaux ; on pourra donner à ces équations, la forme suivante :

$$0 = \frac{ddt}{dv^2} + \frac{2du\,dt}{u\,dv^2} + u^2 \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dt^3}{dv^3};$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{ddu}{dv^2} + u\right) \cdot \left\{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right\} \\ & + \frac{1}{h^2} \cdot \left\{\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2 dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)\right\}; \end{aligned} \qquad (L)$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{dds}{dv^2} + s\right) \cdot \left\{1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right\} \\ & + \frac{1}{h^2 \cdot u^2} \cdot \left\{\frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - (1+ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)\right\}. \end{aligned}$$

En employant d'autres coordonnées, on formeroit de nouveaux systêmes d'équations différentielles : supposons, par exemple, que l'on change les coordonnées x et y, des équations (i) du n°. 14, en d'autres relatives à deux axes mobiles situés sur le plan de ces coordonnées, et dont le premier indique la longitude moyenne du corps m, tandis que le second lui est perpendiculaire. Soient $x_{,}$ et $y_{,}$ les coordonnées de m, relativement à ces axes, et désignons par

$nt+\varepsilon$, la longitude moyenne de m, ou l'angle que l'axe mobile des $x_{,}$ fait avec l'axe des x; on aura

$$x = x_{,}.\cos.(nt+\varepsilon) - y_{,}.\sin.(nt+\varepsilon);$$
$$y = x_{,}.\sin.(nt+\varepsilon) + y_{,}.\cos.(nt+\varepsilon);$$

d'où l'on tire, en supposant dt constant,

$$ddx.\cos.(nt+\varepsilon) + ddy.\sin.(nt+\varepsilon) = ddx_{,} - n^2x_{,}.dt^2 - 2ndy_{,}.dt;$$
$$ddy.\cos.(nt+\varepsilon) - ddx.\sin.(nt+\varepsilon) = ddy_{,} - n^2y_{,}.dt^2 + 2ndx_{,}.dt.$$

En substituant dans Q, au lieu de x et de y, leurs valeurs précédentes; on aura

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx_{,}}\right).\cos.(nt+\varepsilon) - \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right).\sin.(nt+\varepsilon);$$
$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right).\sin.(nt+\varepsilon) + \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right).\cos.(nt+\varepsilon);$$

Cela posé, les équations différentielles (i) donneront les trois suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x_{,}}{dt^2} - n^2x_{,} - 2n.\frac{dy_{,}}{dt} - \left(\frac{dQ}{dx_{,}}\right); \\ 0 &= \frac{d^2y_{,}}{dt^2} - n^2y_{,} + 2n.\frac{dx_{,}}{dt} - \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right); \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{dQ}{dz}\right); \end{aligned}\right\} \quad (M)$$

Après avoir donné les équations différentielles du mouvement d'un système de corps soumis à leur attraction mutuelle, et après en avoir déterminé les seules intégrales exactes que l'on ait pu obtenir jusqu'à présent; il nous reste à intégrer ces équations, par des approximations successives. Dans le système solaire, les corps célestes se meuvent à-peu-près, comme s'ils n'obéissoient qu'à la force principale qui les anime, et les forces perturbatrices sont peu considérables; on peut donc, dans une première approximation, ne considérer que l'action mutuelle de deux corps, savoir, celle d'une planète ou d'une comète et du soleil, dans la théorie des planètes et des comètes; et l'action mutuelle d'un satellite et de sa planète, dans la théorie des satellites. Nous commencerons ainsi

par

par donner une détermination rigoureuse du mouvement de deux corps qui s'attirent : cette première approximation nous conduira à une seconde dans laquelle nous aurons égard à la première puissance des forces perturbatrices ; ensuite, nous considérerons les quarrés et les produits de ces forces ; en continuant ainsi, nous déterminerons les mouvemens célestes avec toute la précision que les observations comportent.

CHAPITRE III.

Première approximation des mouvemens célestes, ou théorie du mouvement elliptique.

16. Nous avons déjà fait voir dans le premier Chapitre, qu'un corps attiré vers un point fixe, par une force réciproque au quarré de la distance, décrit une section conique; or dans le mouvement relatif du corps m autour de M, ce dernier corps étant considéré comme en repos, il faut transporter en sens contraire à m, l'action que m exerce sur M; ainsi, dans ce mouvement relatif, m est sollicité vers M, par une force égale à la somme des masses M et m, divisée par le quarré de leur distance; le corps m décrit donc une section conique autour de M. Mais l'importance de cet objet dans la théorie du système du monde, exige que nous le reprenions sous de nouveaux points de vue.

Pour cela, considérons les équations (K) du n°. 15. Si l'on fait $M+m=\mu$, il est visible, par le n°. 14, qu'en n'ayant égard qu'à l'action réciproque de M et de m, Q est égal à $\frac{\mu}{r}$, ou à $\frac{\mu.u}{\sqrt{1+ss}}$; les équations (K) deviennent ainsi,

$$dt=\frac{dv}{h.u^2};$$

$$0=\frac{ddu}{dv^2}+u-\frac{\mu}{h^2.(1+ss)^{\frac{3}{2}}};$$

$$0=\frac{dds}{dv^2}+s.$$

L'aire décrite pendant l'élément de temps dt, par la projection du rayon vecteur, étant égale à $\frac{1}{2}.\frac{dv}{u^2}$; la première de ces équations nous apprend que cette aire est proportionnelle à cet élément, et qu'ainsi, dans un temps fini, elle est proportionnelle au temps. La dernière équation donne en l'intégrant,

$$s = \gamma . \sin.(v - \theta),$$

γ et θ étant deux arbitraires. Enfin, la seconde donne par son intégration

$$u = \frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)} . \{\sqrt{1+ss} + e \cos.(v - \varpi)\} = \frac{\sqrt{1+ss}}{r};$$

e et ϖ étant deux nouvelles arbitraires. En substituant dans cette expression de u, au lieu de s, sa valeur en v, et substituant ensuite cette expression, dans l'équation $dt = \frac{dv}{h . u^2}$; l'intégrale de cette équation donnera t en fonction de v; on aura donc ainsi v, u et s, en fonctions du temps.

On peut simplifier considérablement ce calcul, en observant que la valeur de s indique que l'orbite est toute dans un plan dont γ est la tangente d'inclinaison sur le plan fixe, et dont θ est la longitude du nœud, comptée de l'origine de l'angle v. En rapportant donc à ce plan, le mouvement de m; on aura $s = 0$ et $\gamma = 0$, ce qui donne

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2} . \{1 + e . \cos.(v - \varpi)\}.$$

Cette équation est à une ellipse dans laquelle l'origine des r est au foyer : $\frac{h^2}{\mu . (1 - e^2)}$ est le demi-grand axe que nous désignerons par a; e est le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; enfin, ϖ est la longitude du périhélie. L'équation $dt = \frac{dv}{h . u^2}$, devient ainsi,

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}} . (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} . dv}{\sqrt{\mu} . \{1 + e . \cos.(v - \varpi)\}^2}.$$

Développons le second membre de cette équation, dans une série de cosinus de l'angle $v - \varpi$, et de ses multiples. Pour cela, nous commencerons par développer $\frac{1}{1 + e . \cos.(v - \varpi)}$, dans une série semblable. Si l'on fait

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}};$$

on aura

$$\frac{1}{1+e.\cos.(v-\varpi)}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.\left\{\frac{1}{1+\lambda.c^{(v-\varpi).\sqrt{-1}}}-\frac{\lambda.c^{-(v-\varpi).\sqrt{-1}}}{1+\lambda.c^{-(v-\varpi).\sqrt{-1}}}\right\};$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. En développant le second membre de cette équation, en série; savoir, le premier terme relativement aux puissances de $c^{(v-\varpi).\sqrt{-1}}$, et le second terme relativement aux puissances de $c^{-(v-\varpi).\sqrt{-1}}$, et en substituant ensuite, au lieu des exponentielles imaginaires, leurs expressions en sinus et cosinus; on trouvera

$$\frac{1}{1+e.\cos.(v-\varpi)}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$.\{1-2\lambda.\cos.(v-\varpi)+2\lambda^2.\cos.2(v-\varpi)-2\lambda^3.\cos.3(v-\varpi)+\&c.\}.$$

Nommons φ le second membre de cette équation, et faisons $q=\frac{1}{e}$; nous aurons généralement,

$$\frac{1}{\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^{m+1}}=\pm\frac{e^{-m-1}.d^m.\left(\frac{\varphi}{q}\right)}{1.2.3\ldots m.dq^m};$$

dq étant supposé constant, et les signes + ou — ayant lieu, suivant que m est pair ou impair. De-là, il est aisé de conclure que si l'on fait

$$\frac{1}{\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2}=(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$.\{1+E^{(1)}.\cos.(v-\varpi)+E^{(2)}.\cos.2(v-\varpi)+E^{(3)}.\cos.3(v-\varpi)+\&c.\};$$

on aura, quel que soit i,

$$E^{(i)}=\pm\frac{2e^i.\{1+i.\sqrt{1-e^2}\}}{(1+\sqrt{1-e^2})^i};$$

le signe + ayant lieu, si i est pair, et le signe — ayant lieu, si i est impair; en supposant donc $n=a^{-\frac{3}{2}}.\sqrt{\mu}$, on aura

$$ndt=dv.\{1+E^{(1)}.\cos.(v-\varpi)+E^{(2)}.\cos.2(v-\varpi)+E^{(3)}.\cos.3(v-\varpi)+\&c.\};$$

et en intégrant,

$$nt+\varepsilon=v+E^{(1)}.\sin.(v-\varpi)+\tfrac{1}{2}.E^{(2)}.\sin.2(v-\varpi)+\tfrac{1}{3}.E^{(3)}.\sin.3(v-\varpi)+\&c.$$

ε étant une arbitraire. Cette expression de $nt+\varepsilon$ est fort convergente, lorsque les orbites sont peu excentriques, telles que les orbites des planètes et des satellites ; et l'on peut, par le retour des suites, en conclure la valeur de v en t : nous nous occuperons de cet objet, dans les n^{os}. suivans.

Lorsque la planète revient au même point de son orbite, v est augmenté de la circonférence que nous représenterons toujours par 2π ; en nommant donc T le temps d'une révolution, on aura

$$T=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi.a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

Cette expression de T peut être immédiatement déduite de l'expression différentielle de dt, sans recourir aux séries. Reprenons en effet, l'équation $dt=\frac{dv}{h.u^2}$, ou $dt=\frac{r^2dv}{h}$. Elle donne $T=\frac{\int r^2dv}{h}$; $\int r^2dv$ est le double de la surface de l'ellipse, et par conséquent, il est égal à $2\pi.a^2.\sqrt{1-e^2}$; de plus, h^2 est égal à $\mu a.(1-e^2)$; on aura ainsi la même expression de T que ci-dessus.

Si l'on néglige les masses des planètes, relativement à celle du soleil, on a $\sqrt{\mu}=\sqrt{M}$; la valeur de $\sqrt{\mu}$ est alors la même pour toutes les planètes; T est donc proportionnel alors à $a^{\frac{3}{2}}$, et par conséquent, les quarrés des temps des révolutions, sont comme les cubes des grands axes des orbites. On voit que la même loi a lieu dans le mouvement des satellites, autour de leur planète, en négligeant leurs masses relativement à celle de la planète.

17. On peut encore intégrer de cette manière, les équations du mouvement de deux corps M et m, qui s'attirent en raison réciproque du quarré des distances. Reprenons les équations (1), (2) et (3) du n°. 9; elles deviennent, en ne considérant que l'action des deux corps M et m, et faisant $M+m=\mu$,

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{ddx}{dt^2}+\frac{\mu.x}{r^3} \\ 0&=\frac{ddy}{dt^2}+\frac{\mu.y}{r^3} \\ 0&=\frac{ddz}{dt^2}+\frac{\mu.z}{r^3} \end{aligned}\right\}. \qquad (O)$$

Les intégrales de ces équations donneront, en fonctions du temps t, les trois coordonnées x, y, z, du corps m, rapportées au centre de M: on aura ensuite, par le n°. 9, les coordonnées ζ, Π et γ du corps M, rapportées à un point fixe, au moyen des équations

$$\zeta = a + bt - \frac{mx}{M+m}; \quad \Pi = a' + b't - \frac{my}{M+m}; \quad \gamma = a'' + b''t - \frac{mz}{M+m}.$$

Enfin, on aura les coordonnées de m, par rapport au même point fixe, en ajoutant x à ζ, y à Π, et z à γ : on aura ainsi le mouvement relatif des corps M et m, et leur mouvement absolu dans l'espace. Tout se réduit donc à intégrer les équations différentielles (O).

Pour cela, nous observerons que si l'on a entre les n variables $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \ldots . x^{(n)}$, et la variable t dont la différence est supposée constante, un nombre n d'équations différentielles données par la suivante :

$$0 = \frac{d^i . x^{(s)}}{dt^i} + A . \frac{d^{i-1} . x^{(s)}}{dt^{i-1}} + B . \frac{d^{i-2} . x^{(s)}}{dt^{i-2}} \ldots . . + H . x^{(s)},$$

dans laquelle on suppose s successivement égal à 1, 2, 3, ... n; A, B, ... H étant des fonctions des variables $x^{(1)}, x^{(2)}$, &c., et de t, symétriques par rapport aux variables $x^{(1)}, x^{(2)} \ldots . x^{(n)}$, c'est-à-dire, telles qu'elles restent les mêmes, lorsque l'on y change une quelconque de ces variables dans une autre, et réciproquement; on peut supposer

$$x^{(1)} = a^{(1)} . x^{(n-i+1)} + b^{(1)} . x^{(n-i+2)} \ldots . . + h^{(1)} . x^{(n)};$$
$$x^{(2)} = a^{(2)} . x^{(n-i+1)} + b^{(2)} . x^{(n-i+2)} \ldots . . + h^{(2)} . x^{(n)};$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$x^{(n-i)} = a^{(n-i)} . x^{(n-i+1)} + b^{(n-i)} . x^{(n-i+2)} \ldots . . + h^{(n-i)} . x^{(n)},$$

$a^{(1)}, b^{(1)} \ldots . h^{(1)}; a^{(2)}, b^{(2)}$, &c., étant des arbitraires dont le nombre est $i . (n-i)$. Il est clair que ces valeurs satisfont au système proposé des équations différentielles : de plus, elles réduisent ces équations, à i équations différentielles entre les i variables $x^{(n-i+1)}$, $x^{(n-i+2)} \ldots . x^{(n)}$. Leurs intégrales introduiront i^2 nouvelles arbitraires qui, réunies aux $i . (n-i)$ précédentes, formeront les in arbitraires que doit donner l'intégration des équations différentielles proposées.

Si l'on applique ce théorême, aux équations (O); on voit que $z=ax+by$, a et b étant deux arbitraires. Cette équation est celle d'un plan passant par l'origine des coordonnées; ainsi l'orbite de m est toute entière dans un même plan.

Les équations (O) donnent

$$\left.\begin{aligned} o &= d.\left(r^3.\frac{ddx}{dt^2}\right)+\mu.dx \\ o &= d.\left(r^3.\frac{ddy}{dt^2}\right)+\mu.dy \\ o &= d.\left(r^3.\frac{ddz}{dt^2}\right)+\mu.dz \end{aligned}\right\} ; \qquad (O')$$

or en différentiant deux fois de suite, l'équation $rdr=xdx+ydy+zdz$, on a

$$\begin{aligned} r.d^3r+3\,dr.ddr = {} & x.d^3x+y.d^3y+z.d^3z \\ & +3.(dx.ddx+dy.ddy+.ddz), \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} d.\left(r^3.\frac{ddr}{dt^2}\right) = {} & r^2.\left\{x.\frac{d^3x}{dt^2}+y.\frac{d^3y}{dt^2}+z.\frac{d^3z}{dt^2}\right\} \\ & +3r^2.\left\{dx.\frac{ddx}{dt^2}+dy.\frac{d'dy}{dt^2}+dz.\frac{ddz}{dt^2}\right\}. \end{aligned}$$

En substituant dans le second membre de cette équation, au lieu de d^3x, d^3y, d^3z, leurs valeurs données par les équations (O'), et ensuite, au lieu de ddx, ddy, ddz, leurs valeurs données par les équations (O); on trouvera

$$o=d.\left(r^3.\frac{ddr}{dt^2}\right)+\mu\,dr.$$

Si l'on compare cette équation aux équations (O'); on aura, en vertu du théorême exposé ci-dessus, en considérant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, comme autant de variables particulières $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$; et r, comme fonction du temps t;

$$dr=\lambda.dx+\gamma.dy;$$

λ, γ, étant des constantes; et en intégrant,

$$r = \frac{h^2}{\mu} + \lambda x + \gamma y,$$

$\frac{h^2}{\mu}$ étant une constante. Cette équation combinée avec celles-ci,

$$z = ax + by \;; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

donne une équation du second degré, soit en x et y, soit en x et z, soit en y et z; d'où il suit que les trois projections de la courbe décrite par m autour de M, sont des lignes du second ordre, et qu'ainsi, cette courbe étant toute dans un même plan, elle est elle-même une ligne du second ordre, ou une section conique. Il est facile de s'assurer par la nature de ce genre de courbes, que le rayon vecteur r étant exprimé par une fonction linéaire des coordonnées x, y; l'origine de ces coordonnées doit être au foyer de la section. Maintenant l'équation $r = \frac{h^2}{\mu} + \lambda . x + \gamma . y$, donne en vertu des équations (O),

$$0 = \frac{ddr}{dt^2} + \mu . \frac{\left(r - \frac{h^2}{\mu}\right)}{r^3}.$$

En multipliant cette équation par dr, et en l'intégrant; on aura

$$r^2 . \frac{dr^2}{dt^2} - 2\mu r + \frac{\mu r^2}{a'} + h^2 = 0,$$

a' étant une constante arbitraire. De-là on tire

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2r - \frac{r^2}{a'} - \frac{h^2}{\mu}}};$$

cette équation donnera r en fonction de t; et comme x, y, z sont donnés par ce qui précède, en fonctions de r; on aura les coordonnées de m, en fonctions du temps.

18. On peut parvenir à ces diverses équations, par la méthode suivante qui a l'avantage de donner les arbitraires, en fonctions des coordonnées x, y, z, et de leurs premières différences; ce qui nous sera très-utile dans la suite.

Supposons que $V =$ constante, soit une intégrale du premier ordre

ordre des équations (O), V étant fonction de $x, y, z, \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$: nommons x', y', z' ces trois dernières quantités. L'équation $V =$ constante, donnera par sa différentiation,

$$o = \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dV}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dt} + \left(\frac{dV}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dV}{dx'}\right) \cdot \frac{dx'}{dt} + \left(\frac{dV}{dy'}\right) \cdot \frac{dy'}{dt} + \left(\frac{dV}{dz'}\right) \cdot \frac{dz'}{dt};$$

mais les équations (O) donnent

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}; \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}; \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

on a donc l'équation identique, aux différences partielles,

$$o = x' \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right) - \frac{\mu}{r^3} \cdot \left\{ x \cdot \left(\frac{dV}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dV}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dV}{dz'}\right) \right\}; \; (I)$$

Il est clair que toute fonction de x, y, z, x', y', z', qui substituée pour V, dans cette équation, la rend identiquement nulle, devient, en l'égalant à une constante arbitraire, une intégrale du premier ordre des équations (O).

Supposons

$$V = U + U' + U'' + \text{\&c.},$$

U étant fonction des trois variables x, y, z; U' étant fonction des six variables x, y, z, x', y' z', mais du premier ordre relativement à x', y', z'; U'' étant fonction des mêmes variables, et du second ordre relativement à x', y', z'; et ainsi de suite. Substituons cette valeur dans l'équation (I), et comparons séparément 1°. les termes sans x', y', z'; 2°. ceux qui renferment la première puissance de ces variables; 3°. ceux qui renferment leurs quarrés et leurs produits, et ainsi de suite; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
o &= x \cdot \left(\frac{dU'}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU'}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU'}{dz'}\right); \\
x' \cdot \left(\frac{dU}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU}{dz}\right) &= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left\{ x \cdot \left(\frac{dU''}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU''}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU''}{dz'}\right) \right\} \\
x' \cdot \left(\frac{dU'}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dU'}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU'}{dz}\right) &= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left\{ x \cdot \left(\frac{dU'''}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU'''}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU'''}{dz'}\right) \right\} \\
x' \cdot \left(\frac{dU''}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dU''}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU''}{dz}\right) &= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left\{ x \cdot \left(\frac{dU^{\text{IV}}}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU^{\text{IV}}}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU^{\text{IV}}}{dz'}\right) \right\} \\
\text{\&c.} &
\end{aligned}\right\} ; \; (I')$$

L'intégrale de la première de ces équations est, comme l'on sait par la théorie des équations à différences partielles,

$$U' = \text{fonct.}\{xy'-yx', \quad xz'-zx', \quad yz'-zy', \quad x, y, z\}.$$

La valeur de U' devant être linéaire en x', y', z'; nous la supposerons de cette forme :

$$U' = A.\{xy'-yx'\} + B.(xz'-zx') + C.(yz'-zy');$$

A, B, C étant des constantes arbitraires. Arrêtons ensuite la valeur de V au terme U'', en sorte que U''', U^{IV}, &c. soient nuls; la troisième des équations (I') deviendra

$$0 = x'.\left(\frac{dU'}{dx}\right) + y'.\left(\frac{dU'}{dy}\right) + z'.\left(\frac{dU'}{dz}\right).$$

La valeur précédente de U' satisfait encore à cette équation. La quatrième des équations (I') devient

$$0 = x'.\left(\frac{dU''}{dx}\right) + y'.\left(\frac{dU''}{dy}\right) + z'.\left(\frac{dU''}{dz}\right);$$

équation dont l'intégrale est

$$U'' = \text{fonct.}\{xy'-yx', \quad xz'-zx'; \quad yz'-zy', \quad x', y'\, z'\}.$$

Cette fonction doit satisfaire à la seconde des équations (I'), et le premier membre de cette équation multipliée par dt, est évidemment égal à dU; le second membre doit donc être la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z. Or il est facile de voir que l'on satisfait à-la-fois, à cette condition, à la nature de la fonction U'', et à la supposition que cette fonction doit être du second ordre en x', y', z'; en faisant

$$\begin{aligned} U'' = (D.y' - E.x').(xy'-yx') + (Dz' - Fx').(xz'-zx') \\ + (Ez' - Fy').(yz'-zy') + G.(x'^2+y'^2+z'^2); \end{aligned}$$

D, E, F, G étant des constantes arbitraires; et alors r étant égal à $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on a

$$U = -\frac{\mu}{r}.\{Dx + Ey + Fz + 2G\};$$

on aura donc ainsi les valeurs de U, U', U''; et l'équation $V =$ constante, deviendra

$$\text{const.} = -\frac{\mu}{r}.\{Dx+Ey+Fz+2G\}+(A+Dy'-Ex').(xy'-yx')$$
$$+(B+Dz'-Fx').(xz'-zx')+(C+Ez'-Fy').(yz'-zy')$$
$$+G.(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Cette équation satisfait à l'équation (I), et par conséquent aux équations différentielles (O), quelles que soient les arbitraires A, B, C, D, E, F, G. En les supposant toutes nulles, 1°. à l'exception de A; 2°. à l'exception de B; 3°. à l'exception de C, &c., et restituant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, au lieu de x', y', z'; on aura les intégrales

$$\left.\begin{aligned}
&c=\frac{xdy-ydx}{dt}; \quad c'=\frac{xdz-zdx}{dt}; \quad c''=\frac{ydz-zdy}{dt};\\
&0=f+x.\left\{\frac{\mu}{r}-\left(\frac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right)\right\}+\frac{ydy.dx}{dt^2}+\frac{zdz.dx}{dt^2};\\
&0=f'+y.\left\{\frac{\mu}{r}-\left(\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}\right)\right\}+\frac{xdx.dy}{dt^2}+\frac{zdz.dy}{dt^2};\\
&0=f''+z.\left\{\frac{\mu}{r}-\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)\right\}+\frac{xdx.dz}{dt^2}+\frac{ydy.dz}{dt^2};\\
&0=\frac{\mu}{a}-\frac{2\mu}{r}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2};
\end{aligned}\right\}; \quad (P)$$

c, c', c'', f, f', f'', et a étant des constantes arbitraires.

Les équations différentielles (O) ne peuvent avoir que six intégrales distinctes du premier ordre, au moyen desquelles, si l'on élimine les différences dx, dy, dz, on aura les trois variables x, y, z, en fonctions du temps t; il faut donc qu'au moins, l'une des sept intégrales précédentes rentre dans les six autres. On voit même *à priori*, que deux de ces intégrales doivent rentrer dans les cinq autres. En effet, puisque l'élément seul du temps entre dans ces intégrales; elles ne peuvent pas donner les variables x, y, z, en fonctions du temps, et par conséquent, elles sont insuffisantes pour déterminer complètement le mouvement de m autour de M. Examinons comment ces intégrales n'équivalent qu'à cinq intégrales distinctes.

Si l'on multiplie la quatrième des équations (P) par $\frac{zdy-ydz}{dt}$, et qu'on l'ajoute à la cinquième multipliée par $\frac{xdz-zdx}{dt}$; on aura

$$o=f.\left(\frac{zdy-ydz}{dt}\right)+f'.\left(\frac{xdz-zdx}{dt}\right)+z.\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right).\left\{\frac{\mu}{r}-\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right).\left\{\frac{xdx.dz}{dt^2}+\frac{ydy.dz}{dt^2}\right\}.$$

En substituant au lieu de $\frac{xdy-ydx}{dt}$, $\frac{xdz-zdx}{dt}$, $\frac{ydz-zdy}{dt}$, leurs valeurs données par les trois premières des équations (P); on aura

$$o=\frac{f'c'-fc''}{c}+z.\left\{\frac{\mu}{r}-\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)\right\}+\frac{xdx.dz}{dt^2}+\frac{ydy.dz}{dt^2}.$$

Cette équation rentre dans la sixième des intégrales (P), en y faisant $f''=\frac{f'c'-fc''}{c}$, ou, $o=fc''-f'c'+f''c$. Ainsi la sixième des intégrales (P) résulte des cinq premières, et les six arbitraires c, c', c'', f, f', f'', sont liées entre elles par l'équation précédente.

Si l'on prend les quarrés des valeurs de f, f', f'', données par les équations (P), qu'ensuite on les ajoute ensemble, et que pour abréger, on fasse $f^2+f'^2+f''^2=l^2$; on aura

$$l^2-\mu^2=\left\{r^2.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right\}.\left\{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}\right\};$$

mais si l'on carre les valeurs de c, c', c'', données par les mêmes équations, qu'ensuite on les ajoute, et que l'on fasse $c^2+c'^2+c''^2=h^2$; on aura

$$r^2.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2=h^2;$$

l'équation précédente devient ainsi,

$$o=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu^2-l^2}{h^2}.$$

En comparant cette équation, à la dernière des équations (P); on aura l'équation de condition,

$$\frac{\mu^2-l^2}{h^2}=\frac{\mu}{a}.$$

La dernière des équations (P) rentre conséquemment dans les six premières qui n'équivalent elles-mêmes qu'à cinq intégrales distinctes, les sept arbitraires c, c', c'', f, f', f'', et a étant liées par les deux équations de condition, précédentes. De-là il résulte que l'on aura l'expression la plus générale de V, qui satisfasse à l'équation (I), en prenant pour cette expression, une fonction arbitraire des valeurs de c, c', c'', f, et f', données par les cinq premières des équations (P).

19. Quoique ces intégrales soient insuffisantes pour déterminer x, y, z, en fonctions du temps ; elles déterminent cependant la nature de la courbe décrite par m, autour de M. En effet, si l'on multiplie la première des équations (P) par z, la seconde par $-y$, et la troisième par x ; on aura, en les ajoutant,

$$0 = cz - c'y + c''x,$$

équation à un plan dont la position dépend des constantes c, c', c''.

Si l'on multiplie la quatrième des équations (P) par x ; la cinquième par y, et la sixième par z, on aura

$$0 = fx + f'y + f''z + \mu r - r^2.\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \frac{r^2.dr^2}{dt^2};$$

mais on a par le n°. précédent,

$$r^2.\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2.dr^2}{dt^2} = h^2;$$

partant,

$$0 = \mu r - h^2 + fx + f'y + f''z.$$

Cette équation combinée avec celles-ci, $0 = c''x - c'y + cz$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; donne l'équation aux sections coniques, l'origine des r étant au foyer. Les planètes et les comètes décrivent donc à très-peu près autour du soleil, des sections coniques dont cet astre occupe un des foyers, et ces astres s'y meuvent de manière que les aires décrites par les rayons vecteurs, croissent comme les temps. En effet, si l'on nomme dv, l'angle infiniment petit, intercepté par les rayons r et $r + dr$, on aura

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2dv^2 + dr^2;$$

l'équation

$$r^2.\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2.dr^2}{dt^2} = h^2,$$

deviendra ainsi, $r^4dv^2 = h^2dt^2$; partant

$$dv = \frac{hdt}{r^2}.$$

On voit par-là, que l'aire élémentaire $\frac{1}{2}r^2dv$, décrite par le rayon vecteur r, est proportionnelle à l'élément de temps dt; l'aire décrite pendant un temps fini, est donc proportionnelle à ce temps. On voit encore, que le mouvement angulaire de m autour de M, est, à chaque point de l'orbite, réciproque au quarré du rayon vecteur; et comme on peut, sans erreur sensible, prendre des intervalles de temps très-courts, pour des instans infiniment petits; on aura, au moyen de l'équation précédente, les mouvemens horaires des planètes et des comètes, dans les divers points de leurs orbites.

Les élémens de la section conique décrite par m, sont les constantes arbitraires de son mouvement; ils sont par conséquent fonctions des arbitraires précédentes c, c', c'', f, f', f'', et $\frac{\mu}{a}$; déterminons ces fonctions. Soit θ l'angle que forme avec l'axe des x, l'intersection du plan de l'orbite avec celui des x et des y, intersection que l'on nomme *ligne des nœuds*; soit φ l'inclinaison mutuelle des deux plans. Si l'on nomme x' et y' les coordonnées de m, rapportées à la ligne des nœuds, comme axe des abscisses; on aura

$$x' = x.\cos.\theta + y.\sin.\theta;$$
$$y' = y.\cos.\theta - x.\sin.\theta.$$

On a d'ailleurs

$$z = y'.\operatorname{tang}.\varphi;$$

on aura donc

$$z = y.\cos.\theta.\operatorname{tang}.\varphi - x.\sin.\theta.\operatorname{tang}.\varphi.$$

En comparant cette équation à celle-ci,

$$0 = c''x - c'y + cz;$$

on aura

$$c' = c.\cos.\theta.\operatorname{tang}.\varphi;$$
$$c'' = c.\sin.\theta.\operatorname{tang}.\varphi;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}.\theta = \frac{c''}{c'};$$

$$\operatorname{tang}.\varphi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}.$$

Ainsi la position des nœuds, et l'inclinaison de l'orbite, sont déterminées en fonctions des constantes arbitraires c, c', c''.

Au périhélie, on a

$$r\,dr = 0\,; \quad \text{ou,}\ x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

soient donc X, Y, Z, les coordonnées de la planète à ce point; la quatrième et la cinquième des équations (P) du n°. précédent, donneront

$$\frac{Y}{X} = \frac{f'}{f}.$$

Mais si l'on nomme I, la longitude de la projection du périhélie, sur le plan des x et des y, cette longitude étant comptée de l'axe des x; on a

$$\frac{Y}{X} = \text{tang.}\,I;$$

partant,

$$\text{tang.}\,I = \frac{f'}{f};$$

ce qui détermine la position du grand axe de la section conique.

Si de l'équation $r^2.\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2dr^2}{dt^2} = h^2$, on élimine $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$, au moyen de la dernière des équations (P); on aura

$$2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2\,dr^2}{dt^2} = h^2\,;$$

mais dr est nul aux extrémités du grand axe; on a donc à ces points,

$$0 = r^2 - 2ar + \frac{a.h^2}{\mu}.$$

La somme des deux valeurs de r dans cette équation, est le grand axe de la section conique, et leur différence est le double de l'excentricité; ainsi, a est le demi-grand axe de l'orbite, ou la distance moyenne de m à M; et $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$ est le rapport de l'excentricité au demi grand axe. Soit e, ce rapport; on a, par le n°. précédent,

$$\frac{\mu}{a} = \frac{\mu^2 - l^2}{h^2}\,;$$

on aura donc $\mu e = l$. On connoîtra ainsi, tous les élémens qui déterminent la nature de la section conique, et sa position dans l'espace.

20. Les trois équations finies trouvées dans le n°. précédent, entre x, y, z et r, donnent x, y, z en fonctions de r; ainsi, pour avoir ces coordonnées en fonctions du temps, il suffit d'avoir le rayon vecteur r, dans une fonction semblable, ce qui exige une nouvelle intégration. Pour cela, reprenons l'équation

$$2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2 . dr^2}{dt^2} = h^2;$$

on a, par le n°. précédent,

$$h^2 = \frac{a}{\mu} . (\mu^2 - l^2) = a\mu . (1 - e^2);$$

on aura donc

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{\mu} . \sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a . (1 - e^2)}}.$$

Pour intégrer cette équation, soit $r = a . (1 - e . \cos . u)$; on aura

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}} . du}{\sqrt{\mu}} . (1 - e . \cos . u);$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$t + T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} . (u - e . \sin . u); \qquad (S)$$

T étant une constante arbitraire. Cette équation donne u, et par conséquent, r en fonction de t; et comme x, y, z, sont donnés en fonctions de r; on aura les valeurs de ces coordonnées, pour un instant quelconque.

Nous voilà donc parvenus à intégrer complètement les équations différentielles (O) du n°. 17; ce qui a introduit les six arbitraires a, e, I, θ, φ, et T; les deux premières dépendent de la nature de l'orbite; les trois suivantes dépendent de sa position dans l'espace; et la dernière est relative à la position du corps m, à une époque donnée, ou, ce qui revient au même, elle dépend de l'instant de son passage au périhélie.

Rapportons

Rapportons les coordonnées du corps m, à des coordonnées plus commodes pour les usages astronomiques, et pour cela, nommons v l'angle que le rayon vecteur r fait avec le grand axe, en partant du périhélie ; l'équation à l'ellipse sera

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v}.$$

L'équation $r = a.(1-e.\cos.u)$, du n°. précédent, indique que u est nul au périhélie, en sorte que ce point est l'origine des deux angles u et v ; et il est facile de s'assurer que l'angle u est formé par le grand axe de l'orbite, et par le rayon mené de son centre, au point où la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, est rencontrée par l'ordonnée menée du corps m, perpendiculairement sur le grand axe. Cet angle est ce que l'on nomme *anomalie excentrique*, et l'angle v est l'*anomalie vraie*. En comparant les deux expressions de r, on a

$$1 - e.\cos.u = \frac{1-e^2}{1+e.\cos.v} ;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}u.$$

Si l'on fixe l'origine du temps t, à l'instant même du passage du corps m, par le périhélie, T sera nul ; et en faisant pour abréger $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$, on aura, $nt = u - e.\sin.u$. En rassemblant ces équations du mouvement de m, autour de M ; on aura

$$\left.\begin{aligned} nt &= u - e.\sin.u \\ r &= a.(1-e.\cos.u) \\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}u \end{aligned}\right\} ; \qquad (f)$$

l'angle nt étant ce que l'on nomme *anomalie moyenne*. La première de ces équations donne u en fonction du temps t, et les deux autres donneront r et v, lorsque u sera déterminé. L'équation entre u et t est transcendante, et ne peut être résolue que par approximation. Heureusement, les circonstances des mouvemens célestes donnent lieu à des approximations rapides. En effet, les orbes des corps célestes sont où presque circulaires, ou fort excentriques, et dans ces deux cas, on peut déterminer u en t, par des formules très-convergentes que nous allons développer. Pour cela, nous donnerons sur la réduction des fonctions en séries, quelques théorêmes généraux qui nous seront utiles dans la suite.

21. Soit u une fonction quelconque de α, que l'on propose de développer par rapport aux puissances de α. En représentant ainsi cette suite,

$$u = \text{u} + \alpha . q_1 + \alpha^2 . q_2 + \alpha^3 . q_3 \ldots\ldots + \alpha^n . q_n + \alpha^{n+1} . q_{n+1} + \&\text{c}.$$

u, q_1, q_2, &c., étant des quantités indépendantes de α; il est clair que u est ce que devient u, lorsqu'on y suppose $\alpha = 0$, et que l'on a quel que soit n,

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = 1.2.3\ldots. n . q_n + 2.3\ldots(n+1) . \alpha . q_{n+1} + \&\text{c.};$$

la différence $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ étant prise en faisant varier tout ce qui dans u doit varier avec α. Partant, si l'on suppose après les différentiations, $\alpha = 0$, dans l'expression de $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$; on aura

$$q_n = \frac{\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)}{1.2.3\ldots. n}.$$

Si u est fonction des deux quantités α et α', et que l'on propose de le développer par rapport aux puissances et aux produits de α et de α'; en représentant ainsi cette suite,

$$\begin{aligned} u = \text{u} + \alpha . q_{1,0} + \alpha^2 . q_{2,0} &+ \&\text{c}. \\ + \alpha' . q_{0,1} + \alpha\alpha' . q_{1,1} &+ \&\text{c}. \\ + \alpha'^2 . q_{0,2} &+ \&\text{c}.; \end{aligned}$$

le coefficient $q_{n,n'}$, du produit $\alpha^n . \alpha'^{n'}$, sera pareillement égal à

$$\frac{\left(\frac{d^{n+n'} u}{d\alpha^n . d\alpha'^{n'}}\right)}{1.2.3\ldots. n.\ 1.2.3\ldots. n'};$$

α et α' étant supposés nuls après les différentiations.

En général, si u est fonction de α, α', α'', &c., et qu'en le développant dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de α, α', α'', &c., on représente par $\alpha^n.\alpha'^{n'}.\alpha''^{n''}$. &c. $q_{n,\,n',\,n'',\,\&c.}$, le terme de cette suite qui a pour facteur, le produit $\alpha^n.\alpha'^{n'}.\alpha''^{n''}$. &c.; on aura

$$q_{n,\,n',\,n'',\,\&c.}=\frac{\left(\dfrac{d^{n+n'+n''+\&c.}u}{d\alpha^n.d\alpha'^{n'}.d\alpha''^{n''}.\,\&c.}\right)}{1.2.3\ldots n.\,1.2.3\ldots n'.\,1.2.3\ldots n''.\,\&c.};$$

pourvu que l'on suppose α, α', α'', &c., nuls après les différentiations.

Supposons maintenant que u soit fonction de α, α', α'', &c., et des variables t, t', t'', &c.; si par la nature de cette fonction, ou par une équation aux différences partielles qui la représente, on parvient à obtenir

$$\left(\frac{d^{n+n'+\&c.}u}{d\alpha^n.d\alpha'^{n'}.\&c.}\right),$$

en fonction de u, et de ses différences prises par rapport à t, t', &c.; en nommant F cette fonction, lorsqu'on y change u dans u, u étant ce que devient u, lorsqu'on y suppose α, α', &c., égaux à zéro; il est visible que l'on aura $q_{n,\,n',\,\&c.}$, en divisant F par le produit $1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'$. &c.; on aura donc la loi de la série dans laquelle u est développé.

Soit d'abord u égal à une fonction quelconque de $t+\alpha$, $t'+\alpha'$, $t''+\alpha''$, &c., que nous désignerons par $\varphi(t+\alpha,\, t'+\alpha',\, t''+\alpha'',\, \&c.)$; dans ce cas, la différence quelconque $i^{\text{ème}}$ de u, prise par rapport à α, et divisée par $d\alpha^i$, est évidemment égale à cette même différence prise par rapport à t, et divisée par dt^i. La même égalité a lieu entre les différences prises par rapport à α' et t', ou par rapport à α'' et t'', &c.; d'où il suit que l'on a généralement

$$\left(\frac{d^{n+n'+n''+\&c.}.u}{d\alpha^n.d\alpha'^{n'}.d\alpha''^{n''}.\&c.}\right)=\left(\frac{d^{n+n'+n''+\&c.}.u}{dt^n.dt'^{n'}.dt''^{n''}.\&c.}\right).$$

En changeant dans le second membre de cette équation, u en u, c'est-à-dire, en $\varphi(t,\, t',\, t'',\, \&c.)$; on aura, par ce qui précède,

$$q_{n,\,n'\,n'',\,\&c.}=\frac{\left(\dfrac{d^{n+n'+n''+\&c.}.\varphi(t,\, t',\, t'',\, \&c.)}{dt^n.dt'^{n'}.dt''^{n''}.\&c.}\right)}{1.2.3\ldots n.\,1.2.3\ldots n'.\,1.2.3\ldots n''.\,\&c.}.$$

Si u est seulement fonction de $t+\alpha$, on aura

$$q_n = \frac{d^n.\varphi(t)}{1.2.3\ldots.n.dt^n};$$

partant

$$\varphi(t+\alpha) = \varphi(t) + \alpha.\frac{d.\varphi(t)}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d^2.\varphi(t)}{dt^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}.\frac{d^3.\varphi(t)}{dt^3} + \&c.; \qquad (i)$$

Supposons ensuite que u, au lieu d'être donné immédiatement en α et t, comme dans le cas précédent, soit une fonction de x, x étant donné par l'équation aux différences partielles, $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z.\left(\frac{dx}{dt}\right)$, dans laquelle z est une fonction quelconque de x. Pour réduire u dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de α, il faut déterminer la valeur de $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ dans le cas de $\alpha=0$; or on a, en vertu de l'équation proposée aux différences partielles,

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right).\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z.\left(\frac{du}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right);$$

on aura donc

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d.\int z\,du}{dt}\right); \quad (k)$$

En différentiant cette équation par rapport à α, on aura

$$\left(\frac{ddu}{d\alpha^2}\right) = \left(\frac{dd.\int z\,du}{d\alpha\,dt}\right);$$

or l'équation (k) donne en y changeant u en $\int z\,du$,

$$\left(\frac{d.\int z\,du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d.\int z^2 du}{dt}\right);$$

partant

$$\left(\frac{ddu}{d\alpha^2}\right) = \left(\frac{dd.\int z^2 du}{dt^2}\right).$$

En différentiant encore par rapport à α, on aura

$$\left(\frac{d^3u}{d\alpha^3}\right) = \left(\frac{d^3.\int z^2 du}{d\alpha\,dt^2}\right);$$

or l'équation (k) donne en y changeant u en $\int z^2 du$,

$$\left(\frac{d.\int z^2 du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d.\int z^3 du}{dt}\right);$$

partant

$$\left(\frac{d^3u}{d\alpha^3}\right) = \left(\frac{d^3.\int z^3 du}{dt^3}\right).$$

En suivant ce procédé, il est aisé d'en conclure généralement,

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^n.\int z^n du}{dt^n}\right) = \left(\frac{d^{n-1}.z^n\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}}\right).$$

Supposons maintenant, qu'en faisant $\alpha = 0$, on ait $x = T$, T étant une fonction de t; on substituera cette valeur de x, dans z et dans u. Soient Z et u, ce que deviennent alors ces quantités; on aura dans la supposition de $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \frac{d^{n-1}.Z^n.\frac{d\mathrm{u}}{dt}}{dt^{n-1}},$$

et par conséquent, on aura, par ce qui précède,

$$q_n = \frac{d^{n-1}.Z^n.\frac{d\mathrm{u}}{dt}}{1.2.3\ldots.n.dt^{n-1}};$$

ce qui donne

$$u = \mathrm{u} + \alpha Z.\frac{d\mathrm{u}}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d.\left(Z^2.\frac{d\mathrm{u}}{dt}\right)}{dt} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}.\frac{d^2.\left(Z^3.\frac{d\mathrm{u}}{dt}\right)}{dt^2} + \&c.; \quad (p)$$

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer la fonction de t et de α, que x représente; en intégrant l'équation aux différences partielles $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Pour cela, on observera que

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right).dt + \left(\frac{dx}{d\alpha}\right).d\alpha;$$

en substituant au lieu de $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$, sa valeur $z.\left(\frac{dx}{dt}\right)$, on aura

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right).\{dt + z\,d\alpha\} = \left(\frac{dx}{dt}\right).\{d.(t+\alpha z) - \alpha\left(\frac{dz}{dx}\right).dx\};$$

on aura donc

$$dx = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right).d.(t+\alpha z)}{1+\alpha.\left(\frac{dz}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right)};$$

ce qui donne en intégrant, $x = \varphi(t + \alpha z)$, $\varphi(t + \alpha z)$ étant une fonction arbitraire de $t + \alpha z$; en sorte que la quantité que nous avons nommée T, est égale à $\varphi(t)$. Ainsi, toutes les fois que l'on aura entre x et α, une équation réductible à cette forme, $x = \varphi(t + \alpha z)$; la valeur de u sera donnée par la formule (p), dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de α.

Supposons maintenant que u soit une fonction des deux variables x et x', ces variables étant données par les équations aux différences partielles,

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z.\left(\frac{dx}{dt}\right); \quad \left(\frac{dx'}{d\alpha'}\right) = z'.\left(\frac{dx'}{dt}\right);$$

dans lesquelles z et z' sont fonctions quelconques de x et x'. Il est facile de s'assurer que les intégrales de ces équations sont

$$x = \varphi(t + \alpha z); \quad x' = \psi(t' + \alpha' z');$$

$\varphi(t + \alpha z)$ et $\psi(t' + \alpha' z')$ étant des fonctions arbitraires, l'une de $t + \alpha z$, et l'autre, de $t' + \alpha' z'$. On a de plus

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z.\left(\frac{du}{dt}\right); \quad \left(\frac{du}{d\alpha'}\right) = z'.\left(\frac{du}{dt'}\right).$$

Cela posé, si l'on conçoit x' éliminé de u et de z, au moyen de l'équation $x' = \psi(t' + \alpha' z')$; u et z deviendront des fonctions de x, α', et t' sans α ni t; on aura donc par ce qui précède,

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^{n-1}.z^n.\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}}\right).$$

Si l'on suppose $\alpha = 0$, après les différentiations, et si de plus, on fait dans le second membre de cette équation $x = \varphi(t + \alpha z^n)$, et par conséquent $\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z^n.\left(\frac{du}{dt}\right)$; on aura dans ces suppositions

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^{n-1}.\left(\frac{du}{d\alpha}\right)}{dt^{n-1}}\right);$$

et par conséquent,

$$\left(\frac{d^{n+n'}.u}{d\alpha^n.d\alpha'^{n'}}\right) = \left(\frac{d^{n-1}.\left(\frac{d.\left(\frac{d^{n'}.u}{d\alpha'^{n'}}\right)}{d\alpha}\right)}{dt^{n-1}}\right).$$

On aura pareillement,

$$\left(\frac{d^{n'}.u}{d\alpha'^{n'}}\right)=\left(\frac{d^{n'-1}.\left(\frac{du}{dx'}\right)}{dt'^{n'-1}}\right);$$

en supposant α' nul après les différentiations, et en supposant de plus dans le second membre de cette équation, $x'=\psi(t'+\alpha'z'^{n'})$; on aura donc

$$\left(\frac{d^{n+n'}.u}{d\alpha^{n}.d\alpha'^{n'}}\right)=\left(\frac{d^{n+n'-2}\left(\frac{ddu}{d\alpha.dx'}\right)}{dt^{n-1}.dt'^{n'-1}}\right);$$

pourvu que l'on fasse α et α' nuls après les différentiations, et que de plus, on suppose dans le second membre de cette équation,

$$x=\varphi(t+\alpha z^{n})\;;\qquad x'=\psi(t'+\alpha'z'^{n'});$$

ce qui revient à supposer dans ce second membre, comme dans le premier,

$$x=\varphi(t+\alpha z)\;;\qquad x'=\psi(t'+\alpha'z'),$$

et à changer dans la différence partielle $\left(\frac{ddu}{dx\,d\alpha'}\right)$, de ce second membre, z en z^{n}, et z' en $z'^{n'}$. On aura ainsi dans ces suppositions, et en changeant de plus, z en Z, z' en Z', et u en u,

$$q_{n,n'}=\left(\frac{d^{n+n'-2}\left(\frac{ddu}{d\alpha\,d\alpha'}\right)}{1.2.3\ldots n.\,1.2.3\ldots n'.\,dt^{n-1}.dt'^{n'-1}}\right).$$

En suivant ce raisonnement, il est facile d'en conclure que si l'on a les r équations,

$$x=\varphi(t+\alpha z)\;;$$
$$x'=\psi(t'+\alpha'z')\;;$$
$$x''=\Pi(t''+\alpha''z'')\;;$$
&c.

z, z', z'', &c., étant des fonctions quelconques de x, x', x'', &c.; si l'on suppose u fonction des mêmes variables; on aura généralement

$$q_{n,n',n'',\&c.}=\left(\frac{d^{n+n'+n''+\&c.-r}\left(\frac{d^{r}u}{d\alpha.d\alpha'.d\alpha''.\&c.}\right)}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'.1.2.3.n''.\&c.\;dt^{n-1}.dt'^{n'-1}.dt''^{n''-1}.\&c.}\right);$$

pourvu que dans la différence partielle $\left(\frac{d^r u}{d\alpha . d\alpha' . d\alpha'' . \&c.}\right)$, on change z en z^n, z' en $z'^{n'}$, &c., et qu'ensuite on change z en Z, z' en Z', z'' en Z'', &c., & u en u.

S'il n'y a qu'une variable x, on aura

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z . \left(\frac{du}{dt}\right);$$

partant

$$q_n = \frac{d^{n-1} . \left\{Z^n . \left(\frac{d\mathrm{u}}{dt}\right)\right\}}{1.2.3 \ldots n . dt^{n-1}}.$$

S'il y a deux variables x et x'; on aura

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z . \left(\frac{du}{dt}\right);$$

en différentiant cette équation par rapport à α', on aura

$$\left(\frac{ddu}{d\alpha\, d\alpha'}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha'}\right) . \left(\frac{du}{dt}\right) + z . \left(\frac{ddu}{d\alpha' dt}\right);$$

or on a $\left(\frac{du}{d\alpha'}\right) = z' . \left(\frac{du}{dt'}\right)$; et en changeant dans cette équation, u en z, on a $\left(\frac{dz}{d\alpha'}\right) = z' . \left(\frac{dz}{dt'}\right)$; donc

$$\left(\frac{ddu}{d\alpha\, d\alpha'}\right) = z . \left(\frac{d . z' \left(\frac{du}{dt'}\right)}{dt}\right) + z' . \left(\frac{dz}{dt'}\right) . \left(\frac{du}{dt}\right).$$

En supposant dans le second membre de cette équation, α et α' nuls, et en y changeant z en Z^n, z' en $Z'^{n'}$, et u en u; on aura la valeur de $\left(\frac{ddu}{d\alpha\, d\alpha'}\right)$, dans les mêmes suppositions; ce qui donne

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n+n'-2} . \left\{ \begin{array}{l} Z^n . Z'^{n'} . \left(\frac{dd\mathrm{u}}{dt . dt'}\right) + Z'^{n'} . \left(\frac{d . Z^n}{dt'}\right) . \left(\frac{d\mathrm{u}}{dt}\right) \\ + Z^n . \left(\frac{d . Z'^{n'}}{dt}\right) . \left(\frac{d\mathrm{u}}{dt'}\right) \end{array} \right\}}{1.2.3 \ldots n . dt^{n-1} . 1.2.3 \ldots n' . dt'^{n'-1}}.$$

En

En continuant ainsi, on aura la valeur de $q_{n, n', n'', \&c.}$, pour un nombre quelconque de variables.

Quoique nous ayons supposé u, z, z', z'', &c., fonctions de x, x', x'', &c., sans t, t', t'', &c.; on peut cependant supposer qu'elles renferment ces dernières variables : mais alors en y désignant ces variables par $t_{,}$, $t'_{,}$, $t''_{,}$, &c., il faudra supposer $t_{,}$, $t'_{,}$, $t''_{,}$, &c., constans dans les différentiations, et restituer après ces opérations, t, t', &c., au lieu de $t_{,}$, $t'_{,}$, &c.

22. Appliquons ces résultats, au mouvement elliptique des planètes. Pour cela, nous reprendrons les équations (f) du n°. 20. Si l'on compare l'équation, $nt = u - e.\sin. u$, ou, $u = nt + e.\sin. u$, avec celle-ci, $x = \varphi(t + \alpha z)$; x se changera en u, t en nt, α en e, z en $\sin. u$, et $\varphi(t + \alpha z)$, en $nt + e.\sin. u$; la formule (p) du n°. précédent deviendra donc

$$\psi(u) = \psi(nt) + e.\psi'(nt).\sin. nt + \frac{e^2}{1.2}.\frac{d.\{\psi'(nt).\sin.^2 nt\}}{ndt}$$
$$+ \frac{e^3}{1.2.3}.\frac{d^2.\{\psi'(nt).\sin.^3 nt\}}{n^2dt^2} + \&c.; \quad (q)$$

$\psi'(nt)$ étant égal à $\frac{d.\psi(nt)}{ndt}$. Pour développer cette formule, nous observerons que c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on a

$$\sin.^i nt = \left(\frac{c^{nt.\sqrt{-1}} - c^{-nt.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^i; \quad \cos.^i nt = \left(\frac{c^{nt.\sqrt{-1}} + c^{-nt.\sqrt{-1}}}{2}\right)^i;$$

i étant quelconque. En développant les seconds membres de ces équations, et en substituant ensuite, au lieu de $c^{rnt.\sqrt{-1}}$ et de $c^{-rnt.\sqrt{-1}}$, leurs valeurs $\cos. rnt + \sqrt{-1}.\sin. rnt$, et $\cos. rnt - \sqrt{-1}.\sin. rnt$, r étant quelconque; on aura les puissances i de $\sin. nt$, et de $\cos. nt$, développées en sinus et cosinus de l'angle nt et de ses multiples; cela posé, on trouvera

$$\sin. nt + \frac{e}{1.2}\sin.^2 nt + \frac{e^2}{1.2.3}.\sin.^3 nt + \frac{e^3}{1.2.3.4}.\sin.^4 nt + \&c.$$

$$= \sin. nt - \frac{e}{1.2.2}.\{\cos. 2nt - 1\}$$
$$- \frac{e^2}{1.2.3.2^2}.\{\sin. 3nt - 3.\sin. nt\}$$
$$+ \frac{e^3}{1.2.3.4.2^3}.\left\{\cos. 4nt - 4.\cos. 2nt + \tfrac{1}{2}.\frac{4.3}{1.2}\right\}$$
$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.5.2^4}.\left\{\sin. 5nt - 5.\sin. 3nt + \frac{5.4}{1.2}.\sin. nt\right\}$$
$$- \frac{e^5}{1.2.3.4.5.6.2^5}.\left\{\cos. 6nt - 6.\cos. 4nt + \frac{6.5}{1.2}.\cos. 2nt - \tfrac{1}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3}\right\}$$
$$- \&c.$$

Soit P cette fonction ; on la multipliera par $\psi'(nt)$, et l'on différentiera chacun de ses termes, par rapport à t, un nombre de fois indiqué par la puissance de e qui le multiplie, dt étant supposé constant ; on divisera ces différentielles, par la puissance correspondante de ndt. Soit P' la somme de ces différentielles ainsi divisées ; la formule (q) deviendra

$$\psi(u) = \psi(nt) + eP'.$$

Il sera facile d'obtenir par cette méthode, les valeurs de l'angle u, et des sinus et cosinus de cet angle et de ses multiples. En supposant, par exemple, $\psi(u) = \sin. iu$; on aura $\psi'(nt) = i.\cos. int$. On multipliera la valeur précédente de P, par $i.\cos. int$, et l'on développera ce produit, en sinus et cosinus de l'angle nt et de ses multiples. Les termes multipliés par les puissances paires de e, seront des sinus, et les termes multipliés par les puissances impaires, seront des cosinus. On changera ensuite un terme quelconque de la forme $K.e^{2r}.\sin. snt$; dans $\pm Ke^{2r}.s^{2r}\sin. snt$, le signe $+$ ayant lieu, si r est pair, et le signe $-$ ayant lieu, si r est impair. On changera pareillement un terme quelconque de la forme $Ke^{2r+1}.\cos. snt$, dans $\mp Ke^{2r+1}.s^{2r+1}.\sin. snt$, le signe $-$ ayant lieu si r est pair, et le signe $+$ ayant lieu, si r est impair. La somme de tous ces termes sera la valeur de P', et l'on aura

$$\sin. iu = \sin. int + eP'.$$

Si l'on suppose $\psi(u) = u$, on aura $\psi'(nt) = 1$, et l'on trouvera

$$u = nt + e.\sin.nt + \frac{e^2}{1.2.2}.2.\sin.2nt + \frac{e^3}{1.2.3.2^2}.\{3^2.\sin..3nt - 3.\sin.nt\}$$
$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.2^3}.\{4^3.\sin.4nt - 4.2^3.\sin.2nt\}$$
$$+ \frac{e^5}{1.2.3.4.5.2^4}.\left\{5^4.\sin.5nt - 5.3^4.\sin.3nt + \frac{5.4}{1.2}.\sin.nt\right\}$$
$$+ \&c.$$

Cette série est fort convergente pour les planètes. Ayant ainsi déterminé u, pour un instant quelconque; on en tirera, au moyen des équations (f) du n°. 20, les valeurs correspondantes de r et de u; mais on peut avoir directement ces dernières quantités, en séries convergentes, de cette manière.

Pour cela, nous observerons que l'on a par le n°. 20, $r = a.(1 - e\cos.u)$; or si dans la formule (q), on suppose $\psi(u) = 1 - e.\cos.u$, on aura $\psi'(nt) = e.\sin.nt$, et par conséquent

$$1 - e.\cos.u = 1 - e.\cos.nt + e^2.\sin.^2nt + \frac{e^3}{1.2}.\frac{d.\sin.^3nt}{ndt} + \frac{e^4}{1.2.3}.\frac{d^2.\sin.^4nt}{n^2dt^2} + \&c.$$

On aura donc, par l'analyse précédente,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e.\cos.nt - \frac{e^2}{2}.\cos.2nt$$
$$- \frac{e^3}{1.2.2^2}.\{3.\cos.3nt - 3.\cos.nt\}$$
$$- \frac{e^4}{1.2.3.2^3}.\{4^2.\cos.4nt - 4.2^2.\cos.2nt\}$$
$$- \frac{e^5}{1.2.3.4.2^4}.\left\{5^3.\cos.5nt - 5.3^3.\cos.3nt + \frac{5.4}{1.2}.\cos.nt\right\}$$
$$- \frac{e^6}{1.2.3.4.5.2^5}.\left\{6^4.\cos.6nt - 6.4^4.\cos.4nt + \frac{6.5}{1.2}.2^4.\cos.2nt\right\}$$
$$- \&c.$$

Considérons présentement, la troisième des équations (f) du n°. 20; elle donne

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}v}{\cos.\frac{1}{2}v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\frac{\sin.\frac{1}{2}u}{\cos.\frac{1}{2}u}.$$

Z 2

En substituant dans cette équation, au lieu des sinus et des cosinus, leurs valeurs en exponentielles imaginaires, on aura

$$\frac{c^{v\sqrt{-1}}-1}{c^{v\sqrt{-1}}+1}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\left\{\frac{c^{u\sqrt{-1}}-1}{c^{u\sqrt{-1}}+1}\right\};$$

en supposant donc

$$\lambda=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}};$$

on aura

$$c^{v\cdot\sqrt{-1}}=c^{u\sqrt{-1}}\cdot\left\{\frac{1-\lambda\cdot c^{-u\sqrt{-1}}}{1-\lambda\cdot c^{u\sqrt{-1}}}\right\};$$

et par conséquent,

$$v=u+\frac{\log.(1-\lambda\cdot c^{-u\sqrt{-1}})-\log.(1-\lambda\cdot c^{u\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire, en réduisant les logarithmes, en séries,

$$v=u+2\lambda\cdot\sin.u+\frac{2\lambda^2}{2}\cdot\sin.2u+\frac{2\lambda^3}{3}\cdot\sin.3u+\frac{2\lambda^4}{4}\cdot\sin.4u+\text{\&c.}.$$

On aura par ce qui précède, u, $\sin.u$, $\sin.2u$, &c., en séries ordonnées par rapport aux puissances de e, et développées en sinus et cosinus de l'angle nt et de ses multiples; il ne s'agit donc, pour avoir v exprimé dans une suite semblable, que de développer les puissances successives de λ, en séries ordonnées par rapport aux puissances de e.

L'équation $u=2-\frac{e^2}{u}$, donnera par la formule (p) du n°. précédent,

$$\frac{1}{u^i}=\frac{1}{2^i}+\frac{i.e^2}{2^{i+2}}+\frac{i.(i+3)}{1.2}\cdot\frac{e^4}{2^{i+4}}+\frac{i.(i+3).(i+5)}{1.2.3}\cdot\frac{e^6}{2^{i+6}}+\text{\&c.};$$

et comme on a, $u=1+\sqrt{1-e^2}$; on aura

$$\lambda^i=\frac{e^i}{2^i}\cdot\left\{1+i.\left(\frac{e}{2}\right)^2+\frac{i.(i+3)}{1.2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^4+\frac{i.(i+3).(i+5)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^6+\text{\&c.}\right\}.$$

Cela posé, on trouvera, en ne portant l'approximation que jusqu'aux quantités de l'ordre e^6 inclusivement,

$$v = nt + \left\{2e - \frac{1}{4}.e^3 + \frac{5}{96}.e^5\right\}.\sin.nt + \left\{\frac{5}{4}.e^2 - \frac{11}{24}.e^4 + \frac{17}{192}.e^6\right\}.\sin.2nt$$
$$+ \left\{\frac{13}{12}.e^3 - \frac{43}{64}.e^5\right\}.\sin.3nt + \left\{\frac{103}{96}.e^4 - \frac{451}{480}.e^6\right\}.\sin.4nt$$
$$+ \frac{1097}{960}.e^5.\sin.5nt + \frac{1223}{960}.e^6.\sin.6nt.$$

Les angles v et nt sont ici comptés du périhélie; mais si l'on veut compter ces angles de l'aphélie, il est clair qu'il suffit de faire e négatif dans les expressions précédentes de r et de v. Il suffiroit encore d'augmenter dans ces expressions, l'angle nt, de la demi-circonférence, ce qui rend négatifs, les sinus et les cosinus des multiples impairs de nt; ainsi les résultats de ces deux méthodes devant être identiques, il faut que dans les expressions de r et de v, les sinus et les cosinus des multiples impairs de nt, soient multipliés par des puissances impaires de e, et que les sinus et cosinus des multiples pairs du même angle, soient multipliés par des puissances paires de cette quantité. C'est, en effet, ce que le calcul confirme *à posteriori*.

Supposons qu'au lieu de compter l'angle v, du périhélie; on fixe son origine, à un point quelconque; il est clair que cet angle sera augmenté d'une constante que nous désignerons par ϖ, et qui exprimera la longitude du périhélie. Si au lieu de fixer l'origine de t, à l'instant du passage au périhélie, on le fixe à un instant quelconque; l'angle nt sera augmenté d'une constante que nous désignerons par $\varepsilon - \varpi$; les expressions précédentes de $\frac{r}{a}$ et de v, deviendront ainsi,

$$\frac{r}{a} = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - (e - \tfrac{3}{8}e^3).\cos.(nt + \varepsilon - \varpi) - (\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{3}e^4).\cos.2(nt + \varepsilon - \varpi) - \&c.;$$
$$v = nt + \varepsilon + (2e - \tfrac{1}{4}e^3).\sin.(nt + \varepsilon - \varpi) + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4).\sin.2(nt + \varepsilon - \varpi) + \&c.;$$

v est la longitude vraie de la planète, et $nt + \varepsilon$ est sa longitude moyenne, ces deux longitudes étant rapportées au plan de l'orbite.

Rapportons maintenant le mouvement de la planète, à un plan fixe, peu incliné à celui de l'orbite. Soit φ l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, et θ la longitude du nœud ascendant de l'orbite, comptée sur le plan fixe; soit ϵ cette longitude comptée sur le plan de l'orbite, en sorte que θ soit la projection de ε; soit encore $v_{,}$ la projection de v sur le plan fixe. On aura

$$\text{tang.}(v_{,}-\theta)=\cos.\varphi.\text{tang.}(v-\varepsilon).$$

Cette équation donne $v_{,}$ en v, et réciproquement; mais on peut avoir ces deux angles l'un par l'autre, en séries fort convergentes, de cette manière.

On a conclu précédemment la série

$$\tfrac{1}{2}v=\tfrac{1}{2}u+\lambda.\sin.u+\frac{\lambda^2}{2}.\sin.2u+\frac{\lambda^3}{3}.\sin.3u+\&c.$$

de l'équation

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}u,$$

en faisant

$$\lambda=\frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}-1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+1}.$$

Si l'on change $\frac{1}{2}v$, en $v_{,}-\theta$; $\frac{1}{2}u$ en $v-\varepsilon$; et $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ en $\cos.\varphi$; on aura

$$\lambda=\frac{\cos.\varphi-1}{\cos.\varphi+1}=-\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

l'équation entre $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}u$, se changera dans l'équation entre $v_{,}-\theta$ et $v-\varepsilon$, et la série précédente donnera

$$\begin{aligned}v_{,}-\theta=v-\varepsilon&-\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.2(v-\varepsilon)+\tfrac{1}{2}.\text{tang.}^4\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.4(v-\varepsilon)\\&-\tfrac{1}{3}.\text{tang.}^6\tfrac{1}{2}\varphi.\cos.6.(v-\varepsilon)+\&c.\end{aligned}$$

Si dans l'équation entre $\frac{1}{2}v$ et $\frac{1}{2}u$, on change $\frac{1}{2}v$ en $v-\varepsilon$, $\frac{1}{2}u$ en $v_{,}-\theta$, et $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ en $\frac{1}{\cos.\varphi}$; on aura

$$\lambda=\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

et

$$\begin{aligned}v-\varepsilon=v_{,}-\theta&+\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.2(v_{,}-\theta)+\tfrac{1}{2}.\text{tang.}^4\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.4(v_{,}-\theta)\\&+\tfrac{1}{3}.\text{tang.}^6\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.6.(v_{,}-\theta)+\&c.\end{aligned}$$

On voit ainsi que les deux séries précédentes se changent réciproquement l'une dans l'autre, en changeant le signe de $\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi$, et en changeant l'un dans l'autre, les angles $v_{,}-\theta$, et $v-\mathcal{C}$. On aura $v_{,}-\theta$, en fonction de sinus et de cosinus de nt et de ses multiples, en observant que l'on a, par ce qui précède,

$$v = nt+\varepsilon+eQ,$$

Q étant une fonction des sinus de l'angle $nt+\varepsilon-\varpi$, et de ses multiples; et que la formule (i) du n°. 21, donne, quel que soit i,

$$\begin{aligned}\sin.i(v-\mathcal{C}) = \sin.i(nt+\varepsilon-\mathcal{C}+eQ) = &\left\{1-\frac{i^2e^2.Q^2}{1.2}+\frac{i^4e^4.Q^4}{1.2.3.4}-\&c.\right\} \\ &.\sin.i(nt+\varepsilon-\mathcal{C}) \\ +&\left\{ieQ-\frac{i^3e^3.Q^3}{1.2.3}+\frac{i^5e^5.Q^5}{1.2.3.4.5}-\&c.\right\} \\ &.\cos.i(nt+\varepsilon-\mathcal{C}).\end{aligned}$$

Enfin, s étant la tangente de la latitude de la planète, au-dessus du plan fixe; on a

$$s = \text{tang}.\varphi.\sin.(v_{,}-\theta);$$

et si l'on nomme $r_{,}$ le rayon vecteur r projeté sur le plan fixe, on aura

$$r_{,} = r.(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} = r.\{1-\tfrac{1}{2}s^2+\tfrac{3}{8}s^4-\&c.\};$$

on pourra donc ainsi déterminer $v_{,}$, s et $r_{,}$ en séries convergentes de sinus et de cosinus de l'angle nt, et de ses multiples.

23. Considérons présentement les orbites fort excentriques, telles que celles des comètes; et pour cela, reprenons les équations du n°. 20,

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v};$$

$$nt = u-e.\sin.u;$$

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\text{tang}.\tfrac{1}{2}u.$$

Dans le cas des orbites fort excentriques, e diffère très-peu de l'unité; nous supposerons ainsi, $1-e=\alpha$, α étant fort petit. Si l'on nomme D, la distance périhélie de la comète; on aura $D=a.(1-e)=\alpha a$; l'expression de r deviendra donc

$$r = \frac{(2-\alpha).D}{2.\cos.^2\frac{1}{2}v-\alpha.\cos.v} = \frac{D}{\cos.^2\frac{1}{2}v.\left\{1+\frac{\alpha}{2-\alpha}\text{tang}.^2\frac{1}{2}v\right\}};$$

ce qui donne, en réduisant en série,

$$r = \frac{D}{\cos.^2 \frac{1}{2} v} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} \cdot \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} v + \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right)^2 \cdot \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} v - \&c. \right\}.$$

Pour avoir le rapport de v au temps t; nous observerons que l'expression de l'arc par la tangente, donne

$$u = 2 . \text{tang.} \tfrac{1}{2} u . \{ 1 - \tfrac{1}{3} . \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{5} . \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} u - \&c. \};$$

or on a

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} v;$$

on aura donc

$$u = 2 . \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} v . \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} . \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right) . \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{5} . \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right)^2 . \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} v - \&c. \right\}$$

on a ensuite

$$\sin. u = \frac{2 . \text{tang.} \frac{1}{2} u}{1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} u} = 2 . \text{tang.} \tfrac{1}{2} u . \{ 1 - \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} u + \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} u - \&c. \};$$

d'où l'on tire

$$e . \sin. u = 2 . (1 - \alpha) . \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} v . \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} . \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} v + \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right)^2 . \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} v - \&c. \right\}.$$

En substituant ces valeurs de u et de $e . \sin. u$, dans l'équation $n t = u - e . \sin. u$; on aura le temps t, en fonction de l'anomalie v, par une suite très-convergente; mais avant que de faire cette substitution, nous observerons que l'on a par le n°. 20, $n = a^{-\frac{3}{2}} . \sqrt{\mu}$, et comme $D = \alpha a$, on aura

$$\frac{1}{n} = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\mu}}.$$

On trouvera, cela posé,

$$t = \frac{2 . D^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2-\alpha) . \mu}} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} v . \left\{ 1 + \frac{(\frac{2}{3} - \alpha)}{2 - \alpha} . \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} v - \frac{(\frac{4}{5} - \alpha) . \alpha}{(2-\alpha)^2} . \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} v + \&c. \right\}.$$

Si l'orbite est parabolique, $\alpha = 0$, et par conséquent

$$r = \frac{D}{\cos.^2 \frac{1}{2} v};$$

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} . \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} . \{ \text{tang.} \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} . \text{tang.}^3 \tfrac{1}{2} v \}.$$

Le

Le temps t, la distance D, et la somme μ des masses du soleil et de la comète, sont des quantités hétérogènes, qui pour être comparables, doivent être divisées chacune par des unités de leur espèce. Nous supposerons donc que la moyenne distance du soleil à la terre est l'unité de distance, en sorte que D est exprimé en parties de cette distance. Nous observerons ensuite que si l'on nomme T le temps d'une révolution sydérale de la terre que nous supposerons partir du périhélie; on aura dans l'équation $nt = u - e.\sin.u$, $u = 0$, au commencement de la révolution, et $u = 2\pi$, à la fin, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité; on aura donc $nT = 2\pi$; mais on a, $n = a^{-\frac{3}{2}}.\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu}$, à cause de $a = 1$; partant

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{T}.$$

La valeur de μ n'est pas exactement la même pour la terre, que pour la comète; puisque dans le premier cas, elle exprime la somme des masses du soleil et de la terre; au lieu que dans le second cas elle exprime la somme des masses du soleil et de la comète : mais les masses de la terre et de la comète étant beaucoup moindres que celle du soleil; on peut les négliger, et supposer que μ est le même pour tous ces corps, et qu'il exprime la masse du soleil. En substituant donc au lieu de $\sqrt{\mu}$, sa valeur $\frac{2\pi}{T}$, dans l'expression précédente de T; on aura

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}}.T}{\pi.\sqrt{2}}.\left\{\text{tang.}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}.\text{tang.}^3\tfrac{1}{2}v\right\}.$$

Cette équation ne renferme plus que des quantités comparables entre elles; elle donnera facilement t, lorsque v sera connu; mais pour avoir v, au moyen de t, il faut résoudre une équation du troisième degré, qui n'est susceptible que d'une seule racine réelle. On peut se dispenser de cette résolution, en faisant une table des valeurs de v, correspondantes à celles de t, dans une parabole dont la distance périhélie est l'unité, ou égale à la moyenne distance de la terre au soleil. Cette table donnera le temps correspondant à l'anomalie v, dans une parabole quelconque dont D est la distance périhélie, en multipliant par $D^{\frac{3}{2}}$, le temps qui répond à la même anomalie, dans la table. On aura l'anomalie v, correspondante au temps t, en divisant t par $D^{\frac{3}{2}}$, et en cherchant dans la table, l'anomalie qui répond au quotient de cette division.

Supposons maintenant que l'on cherche l'anomalie v, correspondante au temps t, dans une ellipse fort excentrique. Si l'on néglige les quantités de l'ordre α^2, et que l'on remette $1-e$, au lieu de α; l'expression précédente de t en v, dans l'ellipse, donnera

$$t=\frac{D^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}.\left\{\begin{array}{l}\text{tang.}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}.\text{tang.}^3\tfrac{1}{2}v \\ +(1-e).\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}v.\left\{\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}v-\tfrac{1}{5}.\text{tang.}^4\tfrac{1}{2}v\right\}\end{array}\right\}.$$

On cherchera, par la table du mouvement des comètes, l'anomalie qui répond au temps t, dans une parabole dont D seroit la distance périhélie; soit U cette anomalie, et $U+x$, l'anomalie vraie dans l'ellipse, correspondante au même temps, x étant un très-petit angle. Si l'on substitue dans l'équation précédente, $U+x$, au lieu de v, et que l'on réduise le second membre, en série ordonnée par rapport aux puissances de x; on aura, en négligeant le quarré de x, et le produit de x, par $1-e$,

$$t=\frac{D^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}.\left\{\begin{array}{l}\left\{\text{tang.}\tfrac{1}{2}U+\tfrac{1}{3}.\text{tang.}^3\tfrac{1}{2}U\right\}+\dfrac{x}{2.\cos.^4\tfrac{1}{2}U} \\ +\dfrac{(1-e)}{4}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}U.\left\{1-\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}U-\tfrac{4}{5}.\text{tang.}^4\tfrac{1}{2}U\right\}\end{array}\right\};$$

mais on a par la supposition,

$$t=\frac{D^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}.\left\{\text{tang.}\tfrac{1}{2}U+\tfrac{1}{3}.\text{tang.}^3\tfrac{1}{2}U\right\};$$

on aura donc, en substituant au lieu du petit arc x, son sinus,

$$\sin.x=\tfrac{1}{10}.(1-e).\text{tang.}\tfrac{1}{2}U.\left\{4-3.\cos.^2\tfrac{1}{2}U-6.\cos.^4\tfrac{1}{2}U\right\}.$$

Ainsi, en formant une table des logarithmes de la quantité,

$$\tfrac{1}{10}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}U.\left\{4-3.\cos.^2\tfrac{1}{2}U-6.\cos.^4\tfrac{1}{2}U\right\};$$

il suffira de leur ajouter le logarithme de $1-e$, pour avoir celui de $\sin.x$; on aura par conséquent, la correction à faire à l'anomalie U, calculée dans la parabole, pour avoir l'anomalie correspondante dans une ellipse fort excentrique.

24. Il nous reste à considérer le mouvement dans une orbite hyperbolique. Pour cela, nous observerons que dans l'hyperbole, le demi-grand axe a devient négatif, et l'excentricité e, surpasse l'unité. En faisant donc dans les équations (f) du n°. 20; $a = -a'$, et $u = \frac{u'}{\sqrt{-1}}$, et en substituant, au lieu des sinus et des cosinus, leurs valeurs en exponentielles imaginaires; la première de ces équations donnera

$$\frac{t.\sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}} = \frac{e}{2}.\{c^{u'} - c^{-u'}\} - u'.$$

La seconde deviendra

$$r = a'.\{\tfrac{1}{2}e.(c^{u'} + c^{-u'}) - 1\};$$

enfin, si l'on prend convenablement le signe du radical de la troisième équation, pour que v croisse avec t, et par conséquent, avec u'; on aura

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.\left\{\frac{c^{u'}-1}{c^{u'}+1}\right\}.$$

Supposons dans ces formules, $u' = \log.\,\text{tang.}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varpi)$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et le logarithme précédent étant hyperbolique; on aura

$$\frac{t.\sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}} = e.\,\text{tang.}\,\varpi - \log.\,\text{tang.}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \varpi);$$

$$r = a'.\left\{\frac{e}{\cos.\varpi} - 1\right\};$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varpi.$$

L'arc $\frac{t.\sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}}$ est le moyen mouvement angulaire durant le temps t, du corps m, supposé mû circulairement autour de M, à la distance a'. Cet arc est facile à déterminer, en le réduisant en parties du rayon : la première des équations précédentes, donnera par des essais, la valeur de l'angle ϖ, correspondante au temps t; les deux autres équations donneront ensuite les valeurs correspondantes de r et de v.

25. T exprimant la révolution sydérale d'une planète dont a est la moyenne distance au soleil ; la première des équations (f) du n°. 20, donnera $nT = 2\pi$; mais on a par le même n°. $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$; on aura donc

$$T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

Si l'on néglige les masses des planètes, par rapport à celle du soleil ; μ exprimera la masse de cet astre, et cette quantité sera la même pour toutes les planètes ; ainsi, pour une seconde planète dont a' et T' seroient la distance moyenne au soleil, et le temps de la révolution sydérale ; on aura encore

$$T' = \frac{2\pi \cdot a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}};$$

on aura donc

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3;$$

c'est-à-dire, que les quarrés des temps des révolutions de différentes planètes, sont entre eux, comme les cubes des grands axes de leurs orbites ; ce qui est une des loix découvertes par Kepler. On voit par l'analyse précédente, que cette loi n'est pas rigoureuse, et qu'elle n'a lieu qu'autant que l'on néglige l'action des planètes, les unes sur les autres et sur le soleil.

Si l'on prend pour mesure du temps, le moyen mouvement de la terre, et pour unité de distance, sa moyenne distance au soleil ; T sera dans ce cas égal à 2π, et l'on aura $a = 1$; l'expression précédente de T donnera donc $\mu = 1$; d'où il suit que la masse du soleil doit alors être prise pour unité de masse. On peut ainsi, dans la théorie des planètes et des comètes, supposer $\mu = 1$, et prendre pour unité de distance, la moyenne distance de la terre au soleil ; mais alors, le temps t est mesuré par l'arc correspondant du moyen mouvement sydéral de la terre.

L'équation

$$T = \frac{2\pi \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}},$$

donne un moyen fort simple de déterminer les rapports des masses des planètes qui ont des satellites, à la masse du soleil. En effet, M représentant cette masse, si l'on néglige la masse m de la planète vis à-vis de M; on aura

$$T = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}.$$

Si l'on considère ensuite un satellite d'une planète quelconque m'; que l'on désigne par p, la masse de ce satellite; par h, sa moyenne distance au centre de m', et par Υ, le temps de sa révolution sydérale; on aura

$$\Upsilon = \frac{2\pi . h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m' + p}};$$

partant,

$$\frac{m' + p}{M} = \frac{h^3}{a^3} . \left(\frac{T}{\Upsilon}\right)^2.$$

Cette équation donne le rapport de la somme des masses de la planète m' et de son satellite, à la masse M du soleil; en négligeant donc la masse du satellite, eu égard à celle de sa planète, ou en supposant le rapport de ces masses connu; on aura le rapport de la masse de la planète, à celle du soleil. Nous donnerons, en traitant la théorie des planètes, les valeurs des masses de celles autour desquelles on a observé des satellites.

CHAPITRE IV.

Détermination des élémens du mouvement elliptique.

26. Après avoir exposé la théorie générale du mouvement elliptique, et la manière de le calculer par des suites convergentes, dans les deux cas de la nature, celui des orbes presque circulaires, et le cas des orbes fort allongés; il nous reste à déterminer les élémens de ces orbes. Si les circonstances des mouvemens primitifs des corps célestes étoient données, on pourroit facilement en conclure ces élémens. En effet, si l'on nomme V la vîtesse de m, dans son mouvement relatif autour de M; on aura

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2};$$

et la dernière des équations (p) du n°. 18, donnera

$$V^2 = \mu.\left\{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right\}.$$

Pour faire disparoître μ, de cette expression; nous désignerons par U la vîtesse que m auroit, s'il décrivoit autour de M, un cercle d'un rayon égal à l'unité de distance. Dans cette hypothèse, on a $r = a = 1$, et par conséquent $U^2 = \mu$; donc

$$V^2 = U^2.\left\{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right\}.$$

Cette équation donnera le demi-grand axe a, de l'orbite, au moyen de la vîtesse primitive de m, et de sa distance primitive à M. a est positif dans l'ellipse; il est infini dans la parabole, et négatif dans l'hyperbole; ainsi l'orbite décrite par m, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que V est moindre, égal ou plus grand que $U.\sqrt{\frac{2}{r}}$. Il est remarquable que la direction du mouvement primitif, n'influe point sur l'espèce de la section conique.

Pour déterminer l'excentricité de l'orbite, nous observerons que si l'on nomme ε, l'angle que fait la direction du mouvement relatif de m, avec le rayon vecteur r; on a $\frac{dr^2}{dt^2} = V^2.\cos.^2.\varepsilon$. En substituant au lieu de V^2, sa valeur $\mu.\left\{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right\}$, on aura

$$\frac{dr^2}{dt^2}=\mu.\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).\cos.^2\varepsilon;$$

mais on a par le n°. 19,

$$2\mu r-\frac{\mu r^2}{a}-\frac{r^2dr^2}{dt^2}=\mu a.(1-e^2);$$

on aura donc

$$a.(1-e)^2=r^2.\sin.^2\varepsilon.\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right);$$

ce qui fera connoître l'excentricité ae de l'orbite.

L'équation aux sections coniques,

$$r=\frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v},$$

donne

$$\cos.v=\frac{a.(1-e^2)-r}{er}.$$

On aura ainsi l'angle v que le rayon vecteur r fait avec la distance périhélie, et par conséquent, on aura la position du périhélie. Les équations (f) du n°. 20, feront ensuite connoître l'angle u, et par son moyen, l'instant du passage par le périhélie.

Pour avoir la position de l'orbite, par rapport à un plan fixe passant par le centre de M, supposé immobile; soit φ l'inclinaison de l'orbite sur ce plan, et θ l'angle que le rayon r forme avec la ligne des nœuds; soit de plus, z l'élévation primitive de m, au-dessus du plan fixe, élévation supposée connue; on aura

$$r.\sin.\theta.\sin.\varphi=z;$$

en sorte que l'inclinaison φ de l'orbite sera connue, lorsque l'on aura déterminé θ. Pour cela, nommons λ, l'angle supposé connu que fait avec le plan fixe, la direction primitive du mouvement relatif de m; si l'on considère le triangle formé par cette direction prolongée jusqu'à la rencontre de la ligne des nœuds, par cette dernière ligne, et par le rayon r; en nommant l, le côté de ce triangle, opposé à l'angle β, on aura

$$=\frac{r.\sin.\beta}{\sin.(\beta+\varepsilon)};$$

on a ensuite $\frac{z}{l}=\sin.\lambda$; on aura donc

$$\operatorname{tang}.\beta=\frac{z.\sin.\varepsilon}{r.\sin.\lambda-z.\cos.\varepsilon}.$$

Les élémens de l'orbite de la planète étant déterminés par ces formules, en fonctions des coordonnées r et z, de la vîtesse de la planète et de la direction de son mouvement; on peut avoir les variations de ces élémens, correspondantes à des variations supposées dans la vîtesse et dans sa direction; et il sera facile, par les méthodes que nous donnerons dans la suite, d'en conclure les variations différentielles de ces élémens, dues à l'action de forces perturbatrices.

Reprenons l'équation

$$V^2=U^2.\left\{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right\}.$$

Dans le cercle $a=r$, et par conséquent $V=U.\sqrt{\frac{1}{r}}$; ainsi, les vîtesses des planètes dans des cercles différens, sont comme les racines quarrées de leurs rayons.

Dans la parabole, $a=\infty$, partant $V=\sqrt{\frac{2}{r}}$; les vîtesses dans les différens points de l'orbite, sont donc alors réciproques aux racines quarrées des rayons vecteurs, et la vîtesse à chaque point, est à celle qu'auroit la planète, si elle décrivoit un cercle d'un rayon égal au rayon vecteur r, comme $\sqrt{2}:1$.

Une ellipse infiniment applatie, se change en ligne droite, et dans ce cas, V exprime la vîtesse de m, s'il descendoit en ligne droite vers M. Supposons que m parte de l'état du repos, et que sa distance primitive à M soit r; supposons de plus, que parvenu à la distance r', il ait acquis la vîtesse V'; l'expression précédente de la vîtesse, donnera les deux équations suivantes;

$$0=\frac{2}{r}-\frac{1}{a}; \qquad V'^2=U^2.\left\{\frac{2}{r'}-\frac{1}{a}\right\};$$

d'où

d'où l'on tire

$$V' = U.\sqrt{\frac{2.(r-r')}{rr'}};$$

c'est l'expression de la vîtesse relative acquise par m, en partant de la distance r, et en tombant vers M, de la hauteur $r-r'$. On déterminera facilement, au moyen de cette formule, de quelle hauteur le corps m, mû dans une section conique, devroit tomber vers M, pour acquérir, en partant de l'extrémité du rayon vecteur r, une vîtesse relative égale à celle qu'il a à cette extrémité; car V étant cette dernière vîtesse, on a

$$V^2 = U^2.\left\{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right\};$$

mais le quarré de la vîtesse acquise en tombant de la hauteur $r-r'$, est $2U^2.\frac{(r-r')}{rr'}$; en égalant ces deux expressions, on aura donc

$$r-r' = \frac{r.(2a-r)}{4a-r}.$$

Dans le cercle $a=r$, et alors $r-r'=\frac{1}{3}r$; dans l'ellipse, on a $r-r'<\frac{1}{2}r$; a étant infini dans la parabole, on a $r-r'=\frac{1}{2}r$; et dans l'hyperbole, où a est négatif, on a $r-r'>\frac{1}{2}r$.

27. L'équation

$$0 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \mu.\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

est remarquable, en ce qu'elle donne la vîtesse indépendamment de l'excentricité de l'orbite. Elle est renfermée dans une équation plus générale qui existe entre le grand axe de l'orbite, la corde de l'arc elliptique, la somme des rayons vecteurs extrêmes, et le temps employé à décrire cet arc. Pour parvenir à cette dernière équation, nous reprendrons les équations du mouvement elliptique, données dans le n°. 20; en y supposant pour plus de simplicité $\mu=1$. Ces équations deviennent ainsi :

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v};$$

$$r = a.(1-e.\cos.u);$$

$$t = a^{\frac{3}{2}}.(u-e.\sin.u).$$

Supposons que r, v, u et t correspondent à la première extrémité de l'arc elliptique, et que r', v', u' et t' correspondent à l'autre extrémité; on aura

$$r' = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v'};$$

$$r' = a.(1-e.\cos.u');$$

$$t' = a^{\frac{3}{2}}.(u'-e.\sin.u').$$

Soit

$$t'-t = \mathrm{T}\ ; \qquad \frac{u'-u}{2} = \epsilon\ ; \qquad \frac{u'+u}{2} = \epsilon'\ ; \qquad r'+r = R\ ;$$

si l'on retranche l'expression de t, de celle de t', et si l'on observe que

$$\sin.u' - \sin.u = 2.\sin.\epsilon.\cos.\epsilon';$$

on aura

$$\mathrm{T} = 2a^{\frac{3}{2}}.\{\epsilon - e.\sin.\epsilon.\cos.\epsilon'\}.$$

Si l'on ajoute l'une à l'autre, les deux expressions de r et de r' en u et u', et si l'on observe que

$$\cos.u' + \cos.u = 2.\cos.\epsilon.\cos.\epsilon';$$

on aura

$$R = 2a.(1-e.\cos.\epsilon.\cos.\epsilon').$$

Maintenant, soit c la corde de l'arc elliptique; on a

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.\cos.(v-v');$$

mais les deux équations

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v}\ ; \qquad r = a.(1-e.\cos.u),$$

donnent celles-ci,

$$\cos.v = a.\frac{\{\cos.u - e\}}{r}\ ; \qquad \sin.v = \frac{a.\sqrt{1-e^2}.\sin.u}{r}.$$

On a pareillement

$$\cos.v' = \frac{a.(\cos.u'-e)}{r'}\ ; \qquad \sin.v' = \frac{a.\sqrt{1-e^2}.\sin.u'}{r'};$$

on aura donc

$$rr'.\cos.(v-v') = a^2.(e-\cos.u).(e-\cos.u') + a^2.(1-e^2).\sin.u.\sin.u';$$

et par conséquent,

$$c^2 = 2a^2.(1-e^2).\{1-\sin.u.\sin.u'-\cos.u.\cos.u'\}$$
$$+a^2e^2.(\cos.u-\cos.u')^2;$$

or on a

$$\sin.u.\sin.u'+\cos.u.\cos.u' = 2.\cos.^2\zeta-1;$$
$$\cos.u-\cos.u' = 2.\sin.\zeta.\sin.\zeta';$$

partant

$$c^2 = 4a^2.\sin.^2\zeta.(1-e^2.\cos.^2\zeta');$$

on a donc ainsi les trois équations suivantes,

$$R = 2a.\{1-e.\cos.\zeta.\cos.\zeta'\};$$
$$T = 2a^{\frac{3}{2}}.\{\zeta-e.\sin.\zeta.\cos.\zeta');$$
$$c^2 = 4a^2.\sin.^2\zeta.(1-e^2.\cos.^2\zeta').$$

La première de ces équations donne

$$e.\cos.\zeta' = \frac{2a-R}{2a.\cos.\zeta};$$

en substituant cette valeur de $e.\cos.\zeta'$, dans les deux autres, on aura

$$T = 2a^{\frac{3}{2}}.\left\{\zeta+\left(\frac{R-2a}{2a}\right).\text{tang}.\zeta\right\};$$
$$c^2 = 4a^2.\text{tang}.^2\zeta.\left\{\cos.^2\zeta-\left(\frac{2a-R}{2a}\right)^2\right\}.$$

Ces deux équations ne renferment point l'excentricité e; et si dans la première, on substitue au lieu de ζ, sa valeur donnée par la seconde; on aura T en fonction de c, R et a. On voit ainsi que le temps T ne dépend que du demi-grand axe, de la corde c, et de la somme R des rayons vecteurs extrêmes.

Si l'on fait

$$z = \frac{2a-R+c}{2a}; \quad z' = \frac{2a-R-c}{2a};$$

la dernière des équations précédentes donnera

$$\cos.2\zeta = zz'+\sqrt{(1-z^2).(1-z'^2)};$$

d'où l'on tire,

$$2\zeta = \text{arc}.\cos.z'-\text{arc}.\cos.z;$$

arc.cos.z désignant ici l'arc qui a z pour cosinus ; on a par conséquent

$$\text{tang.}\,\epsilon = \frac{\sin.(\text{arc}.\cos.z') - \sin.(\text{arc}.\cos.z)}{z+z'};$$

on a ensuite $z+z' = \frac{2a-R}{a}$; l'expression de T deviendra donc, en observant que si T est la durée de la révolution sydérale de la terre dont la moyenne distance au soleil, est prise pour unité, on a par le n°. 16, $T=2\pi$;

$$\text{T} = \frac{a^{\frac{3}{2}}.T}{2\pi}.\{\text{arc}.\cos.z' - \text{arc}.\cos.z - \sin.(\text{arc}.\cos.z') + \sin.(\text{arc}.\cos.z)\}. \quad (a)$$

Les mêmes cosinus pouvant appartenir à plusieurs arcs, cette expression de T est ambigue, et il faut bien distinguer les arcs auxquels répondent les cosinus z et z'.

Dans la parabole, le demi-grand axe a est infini, et l'on a

$$\text{arc}.\cos.z' - \sin.(\text{arc}.\cos.z') = \tfrac{1}{6}.\left(\frac{R+c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

En faisant c négatif, on aura la valeur de arc. cos. z—sin.(arc. cos. z) ; la formule (a) donnera donc pour le temps T employé à décrire l'arc sous-tendu par la corde c,

$$\text{T} = \frac{T}{12\pi}.\{(r+r'+c)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}\};$$

le signe — ayant lieu, lorsque les deux extrémités de l'arc parabolique sont situées du même côté de l'axe de la parabole, ou lorsque l'une d'elles étant située au-dessous, l'angle formé par les deux rayons vecteurs, est tourné vers le périhélie ; il faut employer le signe + dans les autres cas. T étant égal à $365^{\text{jours}},25638$, on a, $\frac{T}{12\pi} = 9^{\text{jours}},688754$.

Dans l'hyperbole, a est négatif ; z et z' deviennent plus grands que l'unité ; les arcs, arc.cos.z et arc.cos.z' sont imaginaires, et l'on a en logarithmes hyperboliques,

$$\text{arc}.\cos.z = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\log.(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$\text{arc}.\cos.z' = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\log.(z'+\sqrt{z'^2-1});$$

la formule (a) devient ainsi, en y changeant a dans $-a$,

$$\text{T}=\frac{a^{\frac{3}{2}}T}{2\pi}.\left\{\sqrt{z'^2-1}\mp\sqrt{z^2-1}-\log.(z'+\sqrt{z'^2-1})\pm\log.(z+\sqrt{z^2-1})\right\}.$$

La formule (a) donne le temps qu'un corps emploie à descendre en ligne droite vers le foyer, en partant d'une distance donnée, avec une vîtesse donnée : il suffit pour cela, de supposer l'ellipse qu'il décrit alors, infiniment applatie. Si l'on suppose, par exemple, que le corps parte de l'état du repos, à la distance $2a$ du foyer, et que l'on cherche le temps T, qu'il emploie à s'en approcher à la distance c; on aura dans ce cas, $R=2a+r$; $r=2a-c$; ce qui donne $z'=-1$; $z=\frac{c-a}{a}$; la formule (a) donnera donc

$$\text{T}=\frac{a^{\frac{3}{2}}T}{2\pi}.\left\{\pi-\text{arc.cos.}\left(\frac{c-a}{a}\right)+\sqrt{\frac{2ac-c^2}{a^2}}\right\}.$$

Il y a cependant une différence essentielle entre le mouvement elliptique vers le foyer, et le mouvement dans une ellipse infiniment applatie. Dans le premier cas, le corps parvenu au foyer, passe au-delà, et s'en éloigne à la même distance dont il étoit parti; dans le second cas, le corps parvenu au foyer, revient au point d'où il étoit parti. Une vîtesse tangentielle à l'aphélie, quelque petite qu'elle soit, suffit pour produire cette différence qui n'influe point sur le temps que le corps emploie à descendre vers le foyer.

28. Les observations ne faisant pas connoître les circonstances du mouvement primitif des corps célestes; on ne peut pas déterminer par les formules du n°. 26, les élémens de leurs orbites. Il est nécessaire pour cet objet, de comparer entre elles, leurs positions respectives observées à différentes époques; ce qui présente d'autant plus de difficultés, que l'on n'observe point ces corps, du centre de leurs mouvemens. Relativement aux planètes, on peut, au moyen de leurs oppositions ou de leurs conjonctions, avoir leur longitude telle qu'on l'observeroit du centre même du soleil. Cette considération jointe à la petite excentricité et au peu d'inclinaison de leurs orbites à l'écliptique, donne un moyen fort simple d'avoir leurs élémens. Mais dans l'état actuel de l'astro-

nomie, les élémens de ces orbites n'ont besoin que de corrections très-légères; et comme les variations des distances des planètes à la terre, ne sont jamais assez grandes pour les dérober à nos regards; on peut les observer sans cesse, et rectifier par la comparaison d'un grand nombre d'observations, les élémens de leurs orbites, et les erreurs mêmes dont les observations sont susceptibles. Il n'en est pas ainsi des comètes; nous ne les voyons que vers leur périhélie: si les observations de leur apparition sont insuffisantes pour déterminer leurs élémens; nous n'avons alors aucun moyen de suivre ces astres par la pensée, dans l'immensité de l'espace, et quand la suite des siècles les ramène vers le soleil, il nous est impossible de les reconnoître; il est donc important de pouvoir déterminer par les seules observations de l'apparition d'une comète, les élémens de son orbite; mais ce problême pris en rigueur, surpasse les forces de l'analyse, et l'on est obligé de recourir aux méthodes d'approximation, pour avoir les premières valeurs des élémens, que l'on peut corriger ensuite avec toute la précision que les observations comportent.

Si l'on faisoit usage d'observations éloignées entre elles, les éliminations conduiroient à des calculs impraticables; il faut donc se borner à ne considérer que des observations voisines, et avec cette restriction même, le problême présente encore de grandes difficultés. Après y avoir réfléchi, il m'a paru qu'au lieu d'employer directement les observations, il est plus avantageux d'en tirer des données qui offrent un résultat exact et simple, et je me suis assuré que celles qui remplissent le mieux cette condition, sont la longitude et la latitude géocentriques de la comète, à un instant donné, et leurs premières et secondes différences divisées par les puissances correspondantes de l'élément du temps; car au moyen de ces données, on peut déterminer rigoureusement et avec facilité, les élémens, sans recourir à aucune intégration, et par la seule considération des équations différentielles de l'orbite. Cette manière d'envisager le problême, permet d'ailleurs d'employer un grand nombre d'observations voisines, et de comprendre ainsi, un intervalle considérable entre les observations extrêmes, ce qui est très-utile pour diminuer l'influence des erreurs dont ces observations sont toujours susceptibles, à cause de la nébulosité qui environne les comètes. Je vais d'abord présenter les formules nécessaires pour conclure les différences premières de la longitude et de la latitude, d'un nombre quelconque d'observations voisines; je déterminerai ensuite les élémens de l'orbite d'une comète, au moyen de ces différences; enfin, j'exposerai le moyen qui m'a paru le plus simple, pour corriger ces élémens, par trois observations éloignées entre elles.

29. Soit à une époque donnée, α la longitude géocentrique d'une comète, et θ sa latitude boréale géocentrique, les latitudes australes devant être supposées négatives. Si l'on désigne par s, le nombre des jours écoulés depuis cette époque; la longitude et la latitude géocentrique de la comète après cet intervalle, seront exprimées en vertu de la formule (i) du n°. 21, par les deux suites,

$$\alpha + s.\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) + \frac{s^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right) + \&c.;$$

$$\theta + s.\left(\frac{d\theta}{ds}\right) + \frac{s^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right) + \&c.$$

On déterminera les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, &c., θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, &c., au moyen de plusieurs longitudes et de plusieurs latitudes géocentriques observées. Pour y parvenir de la manière la plus simple, considérons la suite infinie qui exprime la longitude géocentrique. Les coefficiens des puissances de s, dans cette suite, doivent être déterminés par la condition qu'elle doit représenter chaque longitude observée, en y substituant pour s, le nombre des jours qui lui correspond; on aura ainsi autant d'équations que d'observations; et si le nombre de celles-ci est n, on ne pourra déterminer à leur moyen, dans la suite infinie, que n quantités α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, &c. Mais on doit observer que s étant supposé fort petit, on peut négliger les termes multipliés par s^n, s^{n+1}, &c., ce qui réduit la suite infinie, à ses n premiers termes que l'on pourra déterminer par les n observations. Ces déterminations ne seront qu'approchées, et leur exactitude dépendra de la petitesse des termes que l'on néglige; elles seront d'autant plus précises, que s sera plus petit, et que l'on emploiera un plus grand nombre d'observations. La théorie des interpolations se réduit donc à trouver une fonction rationnelle et entière de s, qui soit telle, qu'en y substituant pour s, le nombre des jours qui correspondent à chaque observation, elle se change dans la longitude observée.

Représentons par 6, $6'$, $6''$, &c., les longitudes observées de la comète, et par i, i', i'', &c., les nombres des jours dont elles suivent l'époque donnée; ces nombres doivent être supposés négatifs pour les observations antérieures à cette époque. Si l'on fait

$$\frac{6'-6}{i'-i}=\delta 6\,; \qquad \frac{6''-6'}{i''-i'}=\delta 6'\,; \qquad \frac{6'''-6''}{i'''-i''}=\delta 6''\,; \qquad \&c.;$$

$$\frac{\delta 6'-\delta 6}{i''-i}=\delta^2 6\,; \qquad \frac{\delta 6''-\delta 6'}{i'''-i'}=\delta^2 6'\,; \qquad \&c.;$$

$$\frac{\delta^2 6'-\delta^2 6}{i'''-i}=\delta^3 6\,; \qquad \&c.;$$

$$\&c.;$$

la fonction cherchée sera

$$6+(s-i).\delta 6+(s-i).(s-i').\delta^2 6+(s-i).(s-i').(s-i'').\delta^3 6+\&c.;$$

car il est facile de s'assurer que si l'on fait successivement $s=i$, $s=i'$; $s=i''$, &c., elle se changera dans 6, $6'$, $6''$, &c.

Maintenant, si l'on compare la fonction précédente, à celle-ci,

$$\alpha+s.\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)+\frac{s^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)+\&c.;$$

on aura, en égalant les coefficiens des puissances semblables de s,

$$\alpha=6-i.\delta 6+i.i'.\delta^2 6-i.i'.i''.\delta^3 6+\&c.;$$

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)=\delta 6-(i+i').\delta^2 6+(ii'+ii''+i'i'').\delta^3 6-\&c.;$$

$$\tfrac{1}{2}.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)=\delta^2.6-(i+i'+i'').\delta^3 6+\&c.;$$

les différences ultérieures de α nous seront inutiles. Les coefficiens de ces expressions sont alternativement positifs et négatifs; le coefficient de $\delta^r 6$ est, abstraction faite du signe, le produit r à r, des r quantités i, i', i''....$i^{(r-1)}$, dans la valeur de α; il est la somme des produits des mêmes quantités, $r-1$ à $r-1$, dans la valeur de $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$;

enfin

enfin il est la somme des produits de ces quantités, $r-2$ a $r-2$, dans la valeur de $\frac{1}{2}.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$.

Si l'on nomme γ, γ', γ'', &c., les latitudes géocentriques observées de la comète; on aura les valeurs de θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$, &c., en changeant dans les expressions précédentes de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, &c., les quantités β, β', β'', &c., en γ, γ', γ'', &c.

Ces expressions sont d'autant plus précises, qu'il y a plus d'observations, et que les intervalles qui les séparent, sont plus petits; on pourroit donc employer toutes les observations voisines de l'époque choisie, si elles étoient exactes; mais les erreurs dont elles sont toujours susceptibles, conduiroient à un résultat fautif; ainsi pour diminuer l'influence de ces erreurs, il faut augmenter l'intervalle des observations extrêmes, à mesure que l'on emploie plus d'observations. On pourra de cette manière, avec cinq observations, embrasser un intervalle de trente-cinq ou quarante degrés, ce qui doit conduire à des valeurs très-approchées de la longitude et de la latitude géocentriques, et de leurs premières et secondes différences.

Si l'époque que l'on choisit, est telle qu'il y ait un nombre égal d'observations avant et après, de manière que chaque longitude qui la suit, ait une longitude correspondante qui la précède du même intervalle; cette condition rendra les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, et $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, plus approchées, et il est facile de s'assurer que de nouvelles observations prises à égales distances de part et d'autre de l'époque, ne feroient qu'ajouter à ces valeurs, des quantités qui seroient, par rapport à leurs derniers termes, du même ordre que le rapport de $s^2.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ à α. Cette disposition symétrique a lieu, lorsque toutes les observations étant équidistantes, on fixe l'époque, au milieu de l'intervalle qu'elles comprennent; il y a donc de l'avantage à employer de semblables observations. En général, il sera toujours avantageux de fixer l'époque, vers le milieu de cet intervalle; parce que le nombre de jours qui la séparent des observations extrêmes, étant moins considérable, les approximations sont plus convergentes. On simplifiera encore le calcul, en fixant l'époque, à l'instant même d'une des observations; ce qui donnera immédiatement les valeurs de α et de θ.

Lorsque l'on aura déterminé par ce qui précède, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, et $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$; on en conclura de cette manière, les différences premières et secondes de α et de θ, divisées par les puissances correspondantes de l'élément du temps. Si l'on néglige les masses des planètes et des comètes, vis-à-vis celle du soleil, prise pour unité de masse; si, de plus, on prend pour unité de distance, sa moyenne distance à la terre; le moyen mouvement de la terre autour du soleil, sera par le n°. 23, la mesure du temps t; soit donc λ le nombre de secondes que la terre décrit dans un jour, en vertu de son moyen mouvement sydéral; le temps t correspondant au nombre s de jours, sera λs; on aura donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}\right);\qquad \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right).$$

Les observations donnent en logarithmes des tables, $\log.\lambda=4{,}0394622$; de plus, $\log.\lambda^2=\log.\lambda+\log.\frac{\lambda}{R}$, R étant le rayon du cercle, réduit en secondes; d'où résulte $\log.\lambda^2=2{,}2750444$; partant, si l'on réduit en secondes, les valeurs de $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$; on aura les logarithmes de $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, en retranchant des logarithmes de ces valeurs, les logarithmes, 4,0394622, et 2,2750444. On aura pareillement les logarithmes de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, en retranchant respectivement les mêmes logarithmes, des logarithmes de leurs valeurs réduites en secondes.

C'est de la précision des valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, que dépend l'exactitude des résultats suivans, et comme leur formation est très-simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec le plus de précision qu'il est possible. Déterminons présentement, au moyen de ces valeurs, les élémens de l'orbite de la comète, et pour généraliser ces résultats, considérons le mouvement d'un système de corps animés par des forces quelconques.

30. Soient x, y, z, les coordonnées rectangles du premier corps; x', y', z', celles du second corps, et ainsi de suite. Concevons que le premier corps soit sollicité parallèlement aux axes des x, des y et des z, par les forces X, Y et Z, que nous supposerons tendre à diminuer ces variables. Concevons pareillement que le second corps soit sollicité parallèlement aux mêmes axes, par les forces X', Y', Z', et ainsi de suite. Les mouvemens de tous ces corps seront donnés par les équations différentielles du second ordre,

$$0=\frac{ddx}{dt^2}+X\,; \qquad 0=\frac{ddy}{dt^2}+Y\,; \qquad 0=\frac{ddz}{dt^2}+Z\,;$$

$$0=\frac{ddx'}{dt^2}+X'\,; \qquad 0=\frac{ddy'}{dy^2}+Y'\,; \qquad 0=\frac{ddz'}{dt^2}+Z'.$$

&c.

Si le nombre de ces corps est n, ces équations seront au nombre $3n$, et leurs intégrales finies renfermeront $6n$ arbitraires qui seront les élémens des orbites des différens corps.

Pour déterminer ces élémens par les observations, nous transformerons les coordonnées de chaque corps, en d'autres dont l'origine soit à l'observateur. En supposant donc un plan passant par l'œil de l'observateur, et dont la situation soit toujours parallèle à elle-même, tandis que l'observateur se meut sur une courbe donnée; nous nommerons ρ, ρ', ρ'', &c., les distances de l'observateur aux différens corps, projetées sur ce plan; α, α', α'', &c., les longitudes apparentes de ces corps, rapportées au même plan, et θ, θ', θ'', &c., leurs latitudes apparentes. Les variables x, y, z, seront données en fonctions de ρ, α, θ et des coordonnées de l'observateur. Pareillement, x', y', z', seront donnés en fonctions de ρ', α', θ', et des coordonnées de l'observateur, et ainsi de suite. D'ailleurs, si l'on suppose que les forces X, Y, Z, X', Y', Z', &c.,

Cc 2

sont dues à l'action réciproque des corps du système, et à des attractions étrangères; elles seront données en fonctions de ρ, ρ', ρ'', &c.; α, α', α'', &c.; θ, θ', θ'', &c.; et de quantités connues; les équations différentielles précédentes seront ainsi entre ces nouvelles variables, et leurs premières et secondes différences; or les observations font connoître, pour un instant donné, les valeurs de α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$; α', $\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)$, &c.; il ne restera donc d'inconnues, que les valeurs de ρ, ρ', ρ'', &c., et leurs premières et secondes différences. Ces inconnues sont au nombre $3n$, et comme on a $3n$ équations différentielles, on pourra les déterminer. On aura même cet avantage, que les premières et secondes différences de ρ, ρ', ρ'', &c., ne se présenteront dans ces équations, que sous une forme linéaire.

Les quantités α, θ, ρ, α', θ', ρ', &c., et leurs premières différences divisées par dt, étant connues; on aura, pour un instant donné, les valeurs de x, y, z, x', y', z', &c., et de leurs premières différences divisées par dt. Si l'on substitue ces valeurs dans les $3n$ intégrales finies des équations précédentes, et dans les différences premières de ces intégrales; on aura $6n$ équations au moyen desquelles on pourra déterminer les $6n$ arbitraires de ces intégrales, ou les élémens des orbites des différens corps.

31. Appliquons cette méthode au mouvement des comètes. Pour cela, nous observerons que la force principale qui les anime, est l'attraction du soleil; nous pouvons ainsi, faire abstraction de toute autre force. Cependant, si la comète passoit assez près d'une grosse planète, pour en éprouver un dérangement sensible, la méthode précédente feroit connoître encore sa vîtesse et sa distance à la terre; mais ce cas étant excessivement rare, nous n'aurons egard, dans les recherches suivantes, qu'à l'action du soleil.

Si l'on prend pour unité de masse, celle du soleil, et pour unité de distance, sa moyenne distance à la terre; si de plus, on fixe au centre du soleil, l'origine des coordonnées x, y, z, d'une comète dont nous nommerons r, le rayon vecteur; les équations différentielles (O) du n°. 17, deviendront, en négligeant la masse de la comète vis-à-vis de celle du soleil,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{ddx}{dt^2} + \frac{x}{r^3}; \\ 0 &= \frac{ddy}{dt^2} + \frac{y}{r^3}; \\ 0 &= \frac{ddz}{dt^2} + \frac{z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

Supposons que le plan des x et des y, soit le plan même de l'écliptique ; que l'axe des x soit la ligne menée du centre du soleil, au premier point d'ariès, à une époque donnée ; que l'axe des y soit la ligne menée du centre du soleil au premier point du cancer, à la même époque ; enfin, que les z positifs soient du même côté que le pôle boréal de l'écliptique. Nommons ensuite x' et y' les coordonnées de la terre, et R son rayon vecteur ; cela posé,

Transformons les coordonnées x, y, z, en d'autres relatives à l'observateur ; et pour cela, nommons α, la longitude géocentrique de la comète, θ sa latitude géocentrique, et ρ sa distance au centre de la terre, projetée sur l'écliptique ; nous aurons

$$x = x' + \rho.\cos.\alpha\ ; \qquad y = y' + \rho.\sin.\alpha\ ; \qquad z = \rho.\text{tang}.\theta.$$

Si l'on multiplie la première des équations (k), par $\sin.\alpha$, et que l'on en retranche la seconde multipliée par $\cos.\alpha$, on aura

$$0 = \sin.\alpha.\frac{ddx}{dt^2} - \cos.\alpha.\frac{ddy}{dt^2} + \frac{x\sin.\alpha - y.\cos.\alpha}{r^3};$$

d'où l'on tire, en substituant pour x et y, leurs valeurs précédentes,

$$0 = \sin.\alpha.\frac{ddx'}{dt^2} - \cos.\alpha.\frac{ddy'}{dt^2} + \frac{x'.\sin.\alpha - y'.\cos.\alpha}{r^3}$$
$$- 2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right).$$

La terre étant retenue dans son orbite, comme la comète, par l'attraction du soleil, on a

$$0 = \frac{ddx'}{dt^2} + \frac{x'}{R^3}\ ; \qquad 0 = \frac{ddy'}{dt^2} + \frac{y'}{R^3};$$

ce qui donne

$$\sin.\alpha.\frac{ddx'}{dt^2} - \cos.\alpha.\frac{ddy'}{dt^2} = \frac{y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha}{R^3};$$

on aura donc

$$o=(y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha).\left\{\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right\}-2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)-\rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right).$$

Soit A la longitude de la terre vue du soleil; on aura

$$x'=R.\cos.A\ ;\qquad y'=R.\sin.A\ ;$$

partant

$$y'.\cos.\alpha - x'.\sin.\alpha = R.\sin.(A-\alpha)\ ;$$

l'équation précédente donnera ainsi,

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)=\frac{R.\sin.(A-\alpha)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left\{\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right\}-\frac{\rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}. \qquad (1)$$

Cherchons maintenant une seconde expression de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$. Pour cela, nous multiplierons la première des équations (k), par tang. $\theta.\cos.\alpha$; la seconde, par tang. $\theta.\sin.\alpha$; et nous retrancherons la troisième équation, de la somme de ces deux produits; nous aurons ainsi,

$$o=\text{tang.}\,\theta.\left\{\cos.\alpha.\frac{ddx}{dt^2}+\sin.\alpha.\frac{ddy}{dt^2}\right\}+\text{tang.}\,\theta.\frac{\{x.\cos.\alpha+y.\sin.\alpha\}}{r^3}-\frac{ddz}{dt^2}-\frac{z}{r^3}.$$

Cette équation deviendra, en y substituant pour x, y, z, leurs valeurs,

$$o=\text{tang.}\,\theta.\left\{\left(\frac{ddx'}{dt^2}+\frac{x'}{r^3}\right).\cos.\alpha+\left(\frac{ddy'}{dt^2}+\frac{y'}{r^3}\right).\sin.\alpha\right\}-\frac{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}{\cos.^2\theta}$$
$$-\rho.\left\{\frac{\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)}{\cos.^2\theta}+\frac{2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\sin.\theta}{\cos.^3\theta}+\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.\text{tang.}\,\theta\right\};$$

or on a

$$\left(\frac{ddx'}{dt^2}+\frac{x'}{r^3}\right).\cos.\alpha+\left(\frac{ddy'}{dt^2}+\frac{y'}{r^3}\right).\sin.\alpha=(x'.\cos.\alpha+y'.\sin.\alpha).\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)$$
$$=R.\cos.(A-\alpha).\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right\};$$

partant

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}\rho.\left\{\frac{\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} + 2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\text{tang.}\,\theta + \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right\}$$

$$+\frac{R.\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta.\text{cos.}\,(A-\alpha)}{2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}.\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right\}; \qquad (2)$$

si l'on retranche cette valeur de ρ, de la première, et que l'on suppose

$$\mu' = \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right).\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\text{tang.}\,\theta + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3.\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta.\text{cos.}\,(A-\alpha) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right).\text{sin.}\,(A-\alpha)};$$

on aura

$$\rho = \frac{R}{\mu'}.\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right\}. \qquad (3)$$

La distance projetée ρ de la comète à la terre, étant toujours positive; cette équation fait voir que la distance r de la comète au soleil, est plus petite ou plus grande que la distance R du soleil à la terre, suivant que μ' est positif ou négatif: ces deux distances sont égales, si $\mu' = 0$.

On peut, par l'inspection seule d'un globe céleste, déterminer le signe de μ'; et par conséquent, si la comète est plus près ou plus loin que la terre, du soleil. Pour cela, imaginons un grand cercle qui passe par deux positions géocentriques, et infiniment voisines de la comète. Soit γ l'inclinaison de ce cercle à l'écliptique, et λ, la longitude de son nœud ascendant; on aura

$$\text{tang.}\,\gamma.\text{sin.}\,(\alpha-\lambda) = \text{tang.}\,\theta;$$

d'où l'on tire

$$d\theta.\text{sin.}\,(\alpha-\lambda) = d\alpha.\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta.\text{cos.}\,(\alpha-\lambda);$$

en différentiant encore, on aura

$$0 = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\frac{dd\theta}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right).\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\text{tang.}\,\theta$$
$$+\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3.\text{sin.}\,\theta.\text{cos.}\,\theta;$$

$dd\theta_{,}$ étant la valeur de $dd\theta$, qui auroit lieu, si le mouvement apparent de la comète continuoit dans le grand cercle. La valeur de μ' devient ainsi, en y substituant pour $d\theta$, sa valeur $\frac{d\alpha . \sin . \theta . \cos . \theta . \cos . (\alpha - \lambda)}{\sin . (\alpha - \lambda)}$,

$$\mu' = \frac{\left\{\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{dd\theta_{,}}{dt^2}\right)\right\} . \sin . (\alpha - \lambda)}{\sin . \theta . \cos . \theta . \sin . (A - \lambda)}.$$

La fonction $\frac{\sin . (\alpha - \lambda)}{\sin . \theta . \cos . \theta}$ est constamment positive; la valeur de μ' est donc positive ou négative, suivant que $\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{dd\theta_{,}}{dt^2}\right)$ est de même signe, ou d'un signe contraire à $\sin . (A - \lambda)$; or $A - \lambda$ est égal à deux angles droits, plus à la distance du soleil, au nœud ascendant du grand cercle; d'où il est facile de conclure que μ' sera positif ou négatif, suivant que dans une troisième position géocentrique de la comète, infiniment voisine des deux premières, la comète s'écartera du grand cercle, du même côté où se trouve le soleil, ou du côté opposé. Concevons donc que par deux positions géocentriques très-voisines de la comète, on fasse passer un grand cercle de la sphère; si dans une troisième position géocentrique consécutive et très-voisine des deux premières, la comète s'écarte de ce grand cercle, du même côté que le soleil, ou du côté opposé, elle sera plus près, ou plus loin du soleil, que la terre; elle en sera également éloignée, si elle continue de paroître dans ce grand cercle; ainsi les diverses inflexions de sa route apparente, nous éclairent sur les variations de sa distance au soleil.

Pour éliminer r, de l'équation (3), et pour réduire cette équation à ne renfermer que l'inconnue ρ; nous observerons que l'on a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, en substituant au lieu de x, y, z, leurs valeurs en ρ, α et θ; on aura

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2\rho . \{x' . \cos . \alpha + y' . \sin . \alpha\} + \frac{\rho^2}{\cos .^2 \theta};$$

mais on a, $x' = R . \cos . A$; $y' = R . \sin . A$; partant

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos .^2 \theta} + 2R . \rho . \cos . (A - \alpha) + R^2,$$

Si

Si l'on carre les deux membres de l'équation (3) mise sous cette forme,

$$r^3.\{\mu' R^2 \rho + 1\} = R^3\,;$$

on aura, en substituant au lieu de r^2, sa valeur,

$$\left\{\frac{\rho}{\cos.^2\theta} + 2R\rho.\cos.(A-\alpha) + R^2\right\}^3.\{\mu' R^2 \rho + 1\}^2 = R^6\,; \qquad (4)$$

équation dans laquelle il n'y a que ρ d'inconnue, et qui monte au septième degré, parce que le terme tout connu du premier membre étant égal à R^6, l'équation entière est divisible par ρ. Ayant ainsi déterminé ρ, on aura $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$, au moyen des équations (1) et (2). En substituant, par exemple, dans l'équation (1), au lieu de $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$, sa valeur $\frac{\mu'\rho}{R}$, donnée par l'équation (3); on aura

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\,\frac{\rho}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left\{\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) + \mu'.\sin.(A-\alpha)\right\}.$$

L'équation (4) est souvent susceptible de plusieurs racines réelles et positives : en faisant passer son second membre dans le premier, et en la divisant ensuite par ρ, son dernier terme sera

$$2.R^5.\cos.^6\theta.\,\{\mu' R^3 + 3.\cos.(A-\alpha)\}\,;$$

ainsi l'équation en ρ étant du septième degré, ou d'un degré impair, elle aura au moins deux racines réelles positives, si $\mu' R^3 + 3.\cos.(A-\alpha)$ est positif; car elle doit toujours, par la nature du problême, avoir une racine positive, et elle ne peut alors avoir ses racines positives, en nombre impair. Chaque valeur réelle et positive de ρ, donne une section conique différente, pour l'orbite de la comète; on aura donc autant de ces courbes qui satisfont à trois observations voisines, que ρ aura de valeurs réelles et positives, et pour déterminer le véritable orbite de la comète, il faudra recourir à une nouvelle observation.

32. La valeur de ρ, tirée de l'équation (4), seroit rigoureuse, si α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ étoient exactement connus; mais ces quantités ne sont qu'approchées. A la vérité, on peut en

approcher de plus en plus, par la méthode exposée précédemment, en faisant usage d'un grand nombre d'observations, ce qui donne l'avantage de considérer d'assez grands intervalles, et de compenser les unes par les autres, les erreurs des observations. Mais cette méthode a l'inconvénient analytique d'employer plus de trois observations, dans un problême où trois suffisent. On peut obvier à cet inconvénient, de la manière suivante, et rendre notre solution aussi approchée que l'on voudra, en ne considérant que trois observations.

Pour cela, supposons que α et θ, représentent la longitude et la latitude géocentrique de l'observation intermédiaire; si l'on substitue dans les équations (k) du n°. précédent, au lieu de x, y, z, leurs valeurs $x'+\rho.\cos.\alpha$; $y'+\rho.\sin.\alpha$; et $\rho.\text{tang}.\theta$; elles donneront $\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, en fonctions de ρ, α et θ, de leurs premières différences, et des quantités connues. Si l'on différentie ces fonctions, on aura $\left(\frac{d^3\rho}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$ et $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, en fonctions de ρ, α, θ, et de leurs premières et secondes différences. On pourra en éliminer la seconde différence de ρ, au moyen de sa valeur, et sa première différence, au moyen de l'équation (2) du n°. précédent. En continuant de différentier successivement, les valeurs de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, et en éliminant les différences de α, et de θ supérieures aux secondes différences, et toutes les différences de ρ; on aura les valeurs de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4}{dt^3}\right)$, &c., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^3}\right)$, &c., en fonctions de ρ, α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$; cela posé,

Soient $\alpha_{,}$, α, α', les trois longitudes géocentriques observées de la comète; $\theta_{,}$, θ, θ' ses trois latitudes géocentriques correspondantes; soit i le nombre des jours qui séparent la première de la seconde observation, et i', celui des jours qui séparent la seconde observation de la troisième; enfin, soit λ l'arc que la terre décrit dans un jour, par son moyen mouvement sydéral; on aura par le n°. 29,

$$\alpha_{,}=\alpha-i.\lambda.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{i^2.\lambda^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)-\frac{i^3.\lambda^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)+\text{ \&c.};$$

$$\alpha'=\alpha+i'.\lambda.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{i'^2.\lambda^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\frac{i'^3.\lambda^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)+\text{ \&c};$$

$$\theta_{,}=\theta-i.\lambda.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{i^2.\lambda^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)-\frac{i^3.\lambda^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)+\text{ \&c.};$$

$$\theta'=\theta+i'.\lambda.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{i'^2.\lambda^2}{1.2}.\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)+\frac{i'^3.\lambda^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)+\text{ \&c.}$$

Si l'on substitue dans ces séries, au lieu de $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right)$, &c., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^4}\right)$, &c., leurs valeurs obtenues par ce qui précède; on aura quatre équations entre les cinq inconnues ρ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$. Ces équations seront d'autant plus exactes, que l'on aura considéré un plus grand nombre de termes dans ces séries. On aura ainsi, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, en fonctions de ρ et de quantités connues; et en les substituant dans l'équation (4) du n°. précédent, elle ne renfermera plus que l'inconnue ρ. Au reste, cette méthode que je n'expose ici que pour montrer comment on peut obtenir des valeurs de plus en plus approchées de ρ, en n'employant que trois observations, exigeroit des calculs pénibles dans la pratique, et il est à-la-fois plus exact et plus simple d'en considérer un plus grand nombre, par la méthode du n°. 29.

33. Lorsque les valeurs de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ seront déterminées, on aura celles de x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, au moyen des équations

$$x=R.\cos.A+\rho.\cos.\alpha;\quad y=R.\sin.A+\rho.\sin.\alpha;\quad z=\rho.\text{tang.}\theta;$$

et de leurs différentielles divisées par dt,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{dR}{dt}\right).\cos.A-R.\left(\frac{dA}{dt}\right).\sin.A+\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\cos.\alpha-\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\sin.\alpha;$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dR}{dt}\right).\sin.A+R.\left(\frac{dA}{dt}\right).\cos.A+\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\sin.\alpha+\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\cos.\alpha;$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\text{tang.}\,\theta+\frac{\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos.^2\theta}.$$

Les valeurs de $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{dR}{dt}\right)$, sont données par la théorie du mouvement de la terre : pour en faciliter le calcul, soit E, l'excentricité de l'orbite terrestre, et H la longitude de son périhélie ; on a par la nature du mouvement elliptique,

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)=\frac{\sqrt{1-E^2}}{R^2}\;;\qquad R=\frac{1-E^2}{1+E.\cos.(A-H)}.$$

Ces deux équations donnent

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{E.\sin.(A-H)}{\sqrt{1-E^2}}\;;$$

soit R' le rayon vecteur de la terre, correspondant à la longitude A de cette planète, augmentée d'un angle droit ; on aura

$$R'=\frac{1-E^2}{1-E.\sin.(A-H)}\;;$$

d'où l'on tire

$$E.\sin.(A-H)=\frac{R'-1+E^2}{R'}\;;$$

partant,

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{R'+E^2-1}{R'.\sqrt{1-E^2}}.$$

Si l'on néglige le quarré de l'excentricité de l'orbite terrestre, qui est très-petit, on aura

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)=\frac{1}{R^2}\;;\qquad\left(\frac{dR}{dt}\right)=R'-1\;;$$

les valeurs précédentes de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ deviendront ainsi

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = (R'-1).\cos.A - \frac{\sin.A}{R} + \left(\frac{d\rho}{dt}\right).\cos.\alpha - \rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\sin.\alpha\,;$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = (R'-1).\sin.A + \frac{\cos.A}{R} + \left(\frac{d\rho}{dt}\right).\sin.\alpha + \rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\cos.\alpha\,;$$

R, R', et A étant donnés immédiatement par les tables du soleil, le calcul des six quantités x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sera facile, lorsque ρ et $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ seront connus. On en tirera les élémens de l'orbite de la comète, de cette manière.

Le secteur infiniment petit, que la projection du rayon vecteur de la comète sur le plan de l'écliptique, décrit durant l'élément du temps dt, est $\frac{xdy - ydx}{2}$; et il est visible que ce secteur est positif ou négatif, suivant que le mouvement de la comète est direct ou rétrograde; ainsi, en formant la quantité $x.\left(\frac{dy}{dt}\right) - y.\left(\frac{dx}{dt}\right)$, elle indiquera par son signe, le sens du mouvement de la comète.

Pour déterminer la position de l'orbite, nommons φ, son inclinaison à l'écliptique, et I la longitude du nœud qui seroit ascendant, si le mouvement de la comète étoit direct; nous aurons

$$z = y.\cos.I.\tang.\varphi - x.\sin.I.\tang.\varphi.$$

Ces deux équations donnent

$$\tang.I = \frac{y.\left(\frac{dz}{dt}\right) - z.\left(\frac{dy}{dt}\right)}{x.\left(\frac{dz}{dt}\right) - z.\left(\frac{dx}{dt}\right)}\,;$$

$$\tang.\varphi = \frac{y.\left(\frac{dz}{dt}\right) - z.\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\sin I.\left\{x.\left(\frac{dy}{dt}\right) - y.\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}.$$

φ devant toujours être positif et moindre qu'un angle droit, cette condition détermine le signe de sin. I; or la tangente de I, et le signe de son sinus étant déterminés, l'angle I est entièrement déterminé. Cet angle est la longitude du nœud ascendant de l'orbite, si le mouvement est direct; mais il faut lui ajouter deux angles droits, pour avoir la longitude de ce nœud, si le mouvement est rétrograde. Il seroit plus simple de ne considérer que des mouvemens directs, en faisant varier l'inclinaison φ des orbites, depuis zéro jusqu'à deux angles droits; car il est visible qu'alors, les mouvemens rétrogrades répondent à une inclinaison plus grande qu'un angle droit. Dans ce cas, tang. φ est du même signe que $x\left(\frac{dy}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ce qui détermine sin. I, et par conséquent l'angle I, qui exprime toujours la longitude du nœud ascendant.

a et ea étant le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite, on a, par les nos. 18 et 19, en y faisant $\mu=1$,

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

$$a.(1-e^2)=2r-\frac{r^2}{a}-\left\{x.\left(\frac{dx}{dt}\right)+y.\left(\frac{dy}{dt}\right)+z.\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\}^2.$$

La première de ces équations détermine le demi-grand axe de l'orbite, et la seconde détermine son excentricité. Le signe de la fonction $x.\left(\frac{dx}{dt}\right)+y.\left(\frac{dy}{dt}\right)+z.\left(\frac{dz}{dt}\right)$, fait connoître si la comète a déjà passé par son périhélie; car elle s'en approche, si cette fonction est négative; dans le cas contraire, la comète s'éloigne de ce point.

Soit T l'intervalle de temps compris entre l'époque et le passage de la comète par le périhélie; les deux premières des équations (f) du no. 20, donneront, en observant que μ étant supposé égal à l'unité, on a $n=a^{-\frac{3}{2}}$,

$$r=a.(1-e.\cos.u)\ ; \qquad T=a^{\frac{3}{2}}.(u-e.\cos.u).$$

La première de ces équations donne l'angle u, et la seconde fait connoître T. Ce temps ajouté ou retranché de l'époque, suivant que la comète s'approche ou s'éloigne du périhélie, donnera l'instant de son passage par ce point. Les valeurs de x et de y, déterminent l'angle que la projection du rayon vecteur r fait avec l'axe des x, et puisque l'on connoît l'angle I formé par cet axe, et par la ligne des nœuds, on aura l'angle que forme cette dernière ligne avec la projection de r; d'où l'on tirera, au moyen de l'inclinaison φ de l'orbite, l'angle formé par la ligne des nœuds et par le rayon r. Mais l'angle u étant connu, on aura, au moyen de la troisième des équations (f) du n°. 20, l'angle v que forme ce rayon, avec la ligne des absides; on aura donc l'angle compris entre les deux lignes des absides et des nœuds, et par conséquent, la position du périhélie. Tous les élémens de l'orbite seront ainsi déterminés.

34. Ces élémens sont donnés, par ce qui précède, en fonctions de ρ, $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ et des quantités connues; et comme $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$ est donné en ρ par le n°. 31; les élémens de l'orbite seront fonctions de ρ et de quantités connues. Si l'un d'eux étoit donné, on auroit une nouvelle équation, au moyen de laquelle on pourroit déterminer ρ; cette équation auroit un diviseur commun avec l'équation (4) du n°. 31; et en cherchant ce diviseur par les méthodes ordinaires, on parviendroit à une équation du premier degré en ρ; on auroit de plus, une équation de condition entre les données des observations, et cette équation seroit celle qui doit avoir lieu, pour que l'élément donné puisse appartenir à l'orbite de la comète.

Appliquons maintenant, cette considération, à la nature. Pour cela, nous observerons que les orbites des comètes sont des ellipses très-allongées, qui se confondent sensiblement avec une parabole, dans la partie dans laquelle ces astres sont visibles; on peut donc supposer sans erreur sensible, $a = \infty$, et par conséquent, $\frac{1}{a} = 0$; l'expression de $\frac{1}{a}$ du n°. précédent, donnera ainsi,

$$0 = \frac{2}{r} - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}.$$

Si l'on substitue ensuite, au lieu de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ leurs valeurs trouvées dans le même n°.; on aura après toutes les réductions, et en négligeant le quarré de $R' - 1$,

$$0=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\text{tang.}\,\theta+\frac{\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos.^2\theta}\right\}^2$$

$$+2.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\left\{(R'-1).\cos.(A-\alpha)-\frac{\sin.(A-\alpha)}{R}\right\} \qquad (5)$$

$$+2\rho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left\{(R'-1).\sin.(A-\alpha)+\frac{\cos.(A-\alpha)}{R}\right\}+\frac{1}{R^2}-\frac{2}{r};$$

en substituant dans cette équation, au lieu de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ sa valeur

$$-\frac{\rho}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left\{\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)+\mu'.\sin.(A-\alpha)\right\},$$

trouvée dans le n°. 31; en faisant ensuite

$$4.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.B=4.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^4+\left\{\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)+\mu'.\sin.(A-\alpha)\right\}^2$$

$$+\left\{\text{tang.}\,\theta.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)+\mu'.\text{tang.}\,\theta.\sin.(A-\alpha)-\frac{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos.^2\theta}\right\}^2;$$

$$C=\frac{\left\{\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)+\mu'.\sin.(A-\alpha)\right\}}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left\{\frac{\sin.(A-\alpha)}{R}-(R'-1).\cos.(A-\alpha)\right\}$$

$$+2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left\{(R'-1).\sin.(A-\alpha)+\frac{\cos.(A-\alpha)}{R}\right\};$$

on aura

$$0=B.\rho^2+C.\rho+\frac{1}{R^2}-\frac{2}{r};$$

et par conséquent

$$r^2.\left\{B.\rho^2+C.\rho+\frac{1}{R^2}\right\}^2=4;$$

cette équation n'est que du sixième degré, et sous ce rapport, elle est plus simple que l'équation (4) du n°. 31; mais elle est particulière à la parabole, au lieu que l'équation (4) s'étend à toute espèce de section conique.

35. On voit par l'analyse précédente, que la détermination des orbes paraboliques des comètes, conduisant à plus d'équations que

que d'inconnues, on peut, en combinant diversement ces équations, former autant de méthodes différentes, pour calculer ces orbes. Examinons celles dont on doit attendre le plus de précision dans les résultats, ou qui participent le moins, aux erreurs des observations.

C'est principalement sur les valeurs des différences secondes $\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)$, que ces erreurs ont une influence sensible; en effet, il faut, pour les déterminer, prendre les différences finies des longitudes et des latitudes géocentriques de la comète, observées dans un court intervalle de temps; or ces différences étant moindres que les différences premières, les erreurs des observations en sont une plus grande partie aliquote; d'ailleurs, les formules du n°. 29 qui déterminent, par la comparaison des observations, les valeurs de α, θ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, donnent avec plus de précision, les quatre premières de ces quantités, que les deux dernières; il y a donc de l'avantage à s'appuyer le moins qu'il est possible, sur les différences secondes de α et de θ; et comme on ne peut pas les rejeter toutes deux à-la-fois, la méthode qui n'emploie que la plus grande, doit conduire aux résultats les plus précis; cela posé,

Reprenons les équations trouvées dans les n^{os}. 31 et 34.

$$r^2 = \frac{\rho^2}{\cos.^2\theta} + 2R.\rho.\cos.(A-\alpha) + R^2\,;$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{R.\sin.(A-\alpha)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}.\left\{\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right\} - \frac{\rho.\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)}{2.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}\,; \qquad (L)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}\rho.\left\{\frac{\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} + 2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\operatorname{tang.}\theta + \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.\sin.\theta.\cos.\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right\}$$
$$+ \frac{R.\sin.\theta.\cos.\theta.\cos.(A-\alpha)}{2.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}.\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right\}\,;$$

$$o = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left\{ \left(\frac{d\rho}{dt}\right) . \text{tang.}\,\theta + \frac{\rho . \left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos.^2\theta} \right\}^2$$
$$+ 2 . \left(\frac{d\rho}{dt}\right) . \left\{ (R' - 1) . \cos.(A - \alpha) - \frac{\sin.(A - \alpha)}{R} \right\}$$
$$+ 2\rho . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . \left\{ (R' - 1) . \sin.(A - \alpha) + \frac{\cos.(A - v)}{R} \right\} + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}.$$

Si l'on veut rejeter $\left(\frac{dd\theta}{dt^2}\right)$, on ne considèrera que la première, la seconde et la quatrième de ces équations; en éliminant $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$, de la dernière, au moyen de la seconde, on formera une équation qui délivrée de fractions, renfermera un terme multiplié par $r^6\rho^2$, et d'autres termes affectés des puissances paires et impaires de ρ et de r. Si l'on met dans un membre, tous les termes affectés des puissances paires de r, et dans l'autre membre, tous les termes affectés de ses puissances impaires, et que l'on carre chacun de ces membres, pour n'avoir que des puissances paires de r; le terme multiplié par $r^6\rho^2$, en produira un multiplié par $r^{12}\rho^4$; en substituant donc, au lieu de r^2, sa valeur donnée par la première des équations (L), on aura une équation finale du seizième degré en ρ. Mais au lieu de former cette équation, pour la résoudre ensuite; il sera plus simple de satisfaire par des essais, aux trois équations précédentes.

Si l'on veut rejeter $\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)$; il faudra considérer la première, la troisième et la quatrième des équations (L). Ces trois équations conduisent encore à une équation finale du seizième degré en ρ; et l'on peut facilement y satisfaire par des essais.

Les deux méthodes précédentes me paroissent être les plus exactes que l'on puisse employer dans la détermination des orbes paraboliques des comètes; il est même indispensable d'y recourir, si le mouvement de la comète en longitude ou en latitude, est insensible ou trop petit, pour que les erreurs des observations n'altèrent pas sensiblement sa seconde différence : dans ce cas, il faudra rejeter celle des équations (L), qui contient cette différence. Mais quoique dans ces méthodes, on n'emploie que trois de ces équations; cependant, la quatrième est utile, pour déterminer parmi toutes les valeurs réelles et positives de ρ, qui satisfont au système des trois autres équations, celle qui doit être admise.

36. Les élémens de l'orbite d'une comète, déterminés par ce qui précède, seroient exacts, si les valeurs de α, θ, et de leurs premières et secondes différences, étoient rigoureuses; car nous avons eu égard, d'une manière fort simple, à l'excentricité de l'orbe terrestre, au moyen du rayon vecteur R' de la terre, correspondant à son anomalie vraie, augmentée d'un angle droit; nous nous sommes permis seulement de négliger le quarré de cette excentricité, comme une trop petite fraction, pour que son omission puisse influer sensiblement sur les résultats. Mais θ, α, et leurs différences, sont toujours susceptibles de quelque inexactitude, soit à cause des erreurs des observations, soit parce que nous n'avons tiré ces différences, des observations, que d'une maniere approchée. Il est donc nécessaire de corriger les élémens, au moyen de trois observations éloignées entre elles, ce que l'on peut faire d'une infinité de manières; car si l'on connoît à-peu-près, deux quantités relatives au mouvement d'une comète, telles que les rayons vecteurs correspondans à deux observations, ou la position du nœud et l'inclinaison de l'orbite; en calculant les observations, d'abord avec ces quantités, et ensuite avec d'autres quantités qui en soient très-peu différentes; la loi des différences entre les résultats, fera aisément connoître les corrections que ces quantités doivent subir. Mais parmi les combinaisons deux à deux, des quantités relatives au mouvement des comètes; il en est une qui doit offrir le calcul le plus simple, et qui par cette raison, mérite d'être recherchée; il importe, en effet, dans un problême aussi compliqué, d'épargner au calculateur, toute opération superflue. Les deux élémens qui m'ont paru présenter cet avantage, sont la distance périhélie, et l'instant du passage de la comète par ce point; non-seulement, ils sont faciles à déduire des valeurs de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$; mais il est très-aisé de les corriger par les observations, sans être obligé, à chaque variation qu'on leur fait subir, de déterminer les autres élémens correspondans de l'orbite.

Reprenons l'équation trouvée dans le n°. 19.

$$a.(1-e^2)=2r-\frac{r^2}{a}-\frac{r^2.dr^2}{dt^2};$$

$a.(1-e^2)$ est le demi-paramètre de la section conique dont a est le demi-grand axe, et ea l'excentricité ; dans la parabole, où a est infini, et e égal à l'unité, $a.(1-e^2)$ est le double de la distance périhélie ; soit D cette distance : l'équation précédente devient relativement à cette courbe,

$$D=r-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2.$$

$\frac{rdr}{dt}$ est égal à $\frac{\frac{1}{2}d.r^2}{dt^2}$; en substituant au lieu de r^2, sa valeur $\frac{\rho^2}{\cos.^2\theta}+2R\rho.\cos.(A-\alpha)+R^2$, et au lieu de $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{dA}{dt}\right)$, leurs valeurs trouvées dans le n°. 33, on aura

$$\begin{aligned}\frac{rdr}{dt}=\frac{\rho}{\cos.^2\theta}.\left\{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)+\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\text{tang.}\,\theta\right\}+R.\left(\frac{d\rho}{dt}\right).\cos.(A-\alpha)\\+\rho.\left\{(R'-1).\cos.(A-\alpha)-\frac{\sin.(A-\alpha)}{R}\right\}\\+\rho.R.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\sin.(A-\alpha)+R.(R'-1).\end{aligned}$$

Soit P, cette quantité ; si elle est négative, le rayon vecteur r va en diminuant, et par conséquent, la comète tend vers son périhélie ; mais elle s'en éloigne, si P est positif. On a ensuite

$$D=r-\tfrac{1}{2}.P^2;$$

la distance angulaire v de la comète à son périhélie, se déterminera par l'équation polaire de la parabole,

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}v=\frac{D}{r};$$

enfin, on aura le temps employé à décrire l'angle v, par la table du mouvement des comètes. Ce temps, ajouté ou retranché de celui de l'époque, suivant que P est négatif ou positif, donnera l'instant du passage de la comète par le périhélie.

37. En rassemblant ces divers résultats, on aura la méthode suivante, pour déterminer les orbes paraboliques des comètes.

Méthode générale pour déterminer les orbes des comètes.

Cette méthode sera divisée en deux parties ; dans la première, nous donnerons le moyen d'obtenir à-peu-près la distance périhélie de la comète, et l'instant de son passage au périhélie ; dans la seconde, nous déterminerons exactement, tous les élémens de l'orbite, en supposant ceux-ci à-peu-près connus.

Détermination approchée de la distance périhélie de la comète, et de l'instant de son passage au périhélie.

On choisira trois, quatre, ou cinq, &c., observations de la comète, également éloignées les unes des autres, autant qu'il sera possible; on pourra embrasser avec quatre observations, un intervalle de 30°; avec cinq observations, un intervalle de 36° ou 40°; et ainsi du reste; mais il faudra toujours que l'intervalle compris entre les observations, soit d'autant plus considérable, qu'elles sont en plus grand nombre, afin de diminuer l'influence de leurs erreurs; cela posé,

Soient ϵ, ϵ', ϵ'', &c., les longitudes géocentriques successives de la comète; γ, γ', γ'', les latitudes correspondantes, ces latitudes étant supposées positives ou négatives, suivant qu'elles sont boréales ou australes. On divisera la différence $\epsilon'-\epsilon$, par le nombre des jours qui séparent la première, de la seconde observation : on divisera pareillement la différence $\epsilon''-\epsilon'$, par le nombre de jours qui séparent la seconde, de la troisième observation; on divisera encore la différence $\epsilon'''-\epsilon''$, par le nombre des jours qui séparent la troisième, de la quatrième observation ; et ainsi de suite. Soient $\delta\epsilon$, $\delta\epsilon'$, $\delta\epsilon''$, ces quotiens.

On divisera la différence $\delta\epsilon'-\delta\epsilon$, par le nombre des jours qui séparent la première observation, de la troisième ; on divisera pareillement la différence $\delta\epsilon''-\delta\epsilon'$, par le nombre des jours qui séparent la seconde observation, de la quatrième; on divisera encore la différence $\delta\beta''' - \delta\beta''$, par le nombre des jours qui séparent la troisième observation, de la cinquième; et ainsi de suite. Soient $\delta^2\beta$, $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$, &c., ces quotiens.

On divisera la différence $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$, par le nombre des jours qui séparent la première observation, de la quatrième; on divisera pareillement $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$, par le nombre des jours qui séparent la seconde observation, de la cinquième, et ainsi de suite. Soient $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$, &c., ces quotiens. On continuera ainsi, jusqu'à ce que l'on parvienne à $\delta^{n-1}.\beta$, n étant le nombre des observations employées.

Cela fait; on prendra une époque moyenne, ou à-peu-près moyenne entre les instans des deux observations extrêmes, et en nommant i, i', i'', i''', &c., le nombre des jours dont elle précède chaque observation, i, i', i'', &c., devant être supposés négatifs pour les observations antérieures à cette époque; la longitude de la comète, après un petit nombre z de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule suivante:

$$\begin{aligned}&\beta - i.\delta\beta + ii'.\delta^2\beta - ii'i''.\delta^3\beta + \&c.\\ &+z.\{\delta\beta - (i+i').\delta^2\beta + (ii'+ii''+i'i'').\delta^3\beta - (ii'i''+ii'i'''+ii''i'''+i'i''i''').\delta^4\beta + \&c.\};\quad (p)\\ &+z^2.\{\delta^2\beta - (i+i'+i'').\delta^3\beta + (ii'+ii''+ii'''+i'i''+i'i'''+i''i''').\delta^4\beta - \&c.\}.\end{aligned}$$

Les coefficiens de $-\delta\beta$, $+\delta^2\beta$, $-\delta^3\beta$, &c., dans la partie indépendante de z, sont 1°. le nombre i; 2°. le produit des deux nombres i, et i'; 3°. le produit des trois nombres i, i', i'', &c.

Les coefficiens de $-\delta^2\beta$, $+\delta^3\beta$, $-\delta^4\beta$, &c., dans la partie multipliée par z, sont 1°. la somme des deux nombres i, et i'; 2°. la somme des produits deux à deux, des trois nombres i, i', i''; 3°. la somme des produits trois à trois, des quatre nombres i, i', i'', i''', &c.

Les coefficiens de $-\delta^3\beta$, $+\delta^4\beta$, $-\delta^5\beta$, &c., dans la partie multipliée par z^2, sont 1°. la somme des trois nombres i, i', i''; 2°. la somme des produits deux à deux, des quatre nombres i, i', i', i'''; 3°. la somme des produits trois à trois, des cinq nombres i, i', i'', i''', i , &c.

Au lieu de former ces produits, il est aussi simple de développer la fonction

$$\beta+(z-i).\delta\beta+(z-i).(z-i').\delta^2\beta+(z-i).(z-i').(z-i'').\delta^3\beta+\&c.$$

en rejetant les puissances de z supérieures au quarré, ce qui donnera la formule précédente.

Si l'on opère d'une manière semblable, sur les latitudes géocentriques observées de la comète; sa latitude géocentrique, après le nombre z de jours comptés depuis l'époque, sera exprimée par la formule (p), en y changeant β en γ. Nommons (q) ce que devient cette formule par ce changement; cela posé,

α sera la partie indépendante de z, dans la formule (p); θ sera la partie indépendante de z, dans la formule (q).

En réduisant en secondes, le coefficient de z, dans la formule (p), et en retranchant du logarithme tabulaire de ce nombre de secondes, le logarithme 4,0394622; on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par a.

En réduisant en secondes, le coefficient de z^2, dans la même formule, et en retranchant du logarithme de ce nombre de secondes, le logarithme 1,9740144; on aura le logarithme d'un nombre que nous désignerons par b.

En réduisant pareillement en secondes, les coefficiens de z et de z^2, dans la formule (q), et en retranchant respectivement, des logarithmes de ces nombres de secondes, les logarithmes 4,0394622, et 1,9740144; on aura les logarithmes de deux nombres que nous nommerons h et l.

C'est de la précision des valeurs de a, b, h, l, que dépend l'exactitude de la méthode; et comme leur formation est très-simple, il faut choisir et multiplier les observations, de manière à les obtenir avec toute la précision que les observations comportent. Il est aisé de voir que ces valeurs ne sont que les quantités $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, que nous avons exprimées pour plus de simplicité, par les lettres précédentes.

Si le nombre des observations est impair, on pourra fixer l'époque à l'instant de l'observation moyenne; ce qui dispensera de calculer les parties indépendantes de z, dans les deux formules précédentes ; car il est visible que ces parties sont alors respectivement égales à la longitude et à la latitude de l'observation moyenne.

Ayant ainsi déterminé les valeurs de α, a, b, θ, h et l; on déterminera la longitude du soleil, à l'instant que l'on a choisi pour époque ; soit E cette longitude, R la distance correspondante de la terre au soleil, et R' la distance qui répond à E augmenté d'un angle droit ; on formera les équations suivantes :

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos.^2\theta} - 2Rx.\cos(E-\alpha) + R^2 ; \qquad (1)$$

$$y = \frac{R.\sin.(E-\alpha)}{2a} \cdot \left\{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right\} - \frac{bx}{2a} ; \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x.\left\{h.\text{tang}.\theta + \dfrac{l}{2h} + \dfrac{a^2.\sin.\theta.\cos.\theta}{2h}\right\} \\ \quad + \dfrac{R.\sin.\theta.\cos.\theta}{2h}.\cos.(E-\alpha).\left\{\dfrac{1}{R^3} - \dfrac{1}{r^3}\right\} \end{array}\right\} ; \qquad (3)$$

$$\begin{array}{l} 0 = y^2 + a^2x^2 + \left(y.\text{tang}.\theta + \dfrac{hx}{\cos.^2\theta}\right)^2 + 2y.\left\{\dfrac{\sin.(E-\alpha)}{R} - (R'-1).\cos.(E-\alpha)\right\} ; (4) \\ \quad - 2ax.\left\{(R'-1).\sin.(E-\alpha) + \dfrac{\cos.(E-\alpha)}{R}\right\} + \dfrac{1}{R^2} - \dfrac{2}{r}. \end{array}$$

Pour tirer de ces équations, les valeurs des inconnues x, y et r; on considérera d'abord si, abstraction faite du signe, b est plus grand ou plus petit que l. Dans le premier cas, on fera usage des équations (1), (2) et (4). On formera une première hypothèse pour x, en le supposant, par exemple, égal à l'unité ; et l'on en conclura, au moyen des équations (1) et (2), les valeurs de r et de y. On substituera ensuite, ces valeurs dans l'équation (4), et si le reste est nul, ce sera une preuve que la valeur de x a été bien choisie ; mais si ce reste est négatif, on augmentera la valeur de x, et on la diminuera, si le reste est positif. On aura ainsi, au moyen d'un petit nombre d'essais, les valeurs de x, y et r. Mais comme ces inconnues peuvent être susceptibles de plusieurs valeurs réelles et positives ; il faudra choisir celle qui satisfait exactement, ou à-peu-près à l'équation (3).

Dans

Dans le second cas, c'est-à-dire, si l'on a $l>b$, on fera usage des équations (1), (3) et (4), et alors, ce sera l'équation (2) qui servira de vérification.

Ayant ainsi les valeurs de x, y et r; on formera la quantité

$$\begin{aligned}P= & \frac{x}{\cos.^2\theta}.\{y+hx.\text{tang.}\,\theta\}-Ry.\cos.(E-\alpha)\\ & +x.\left\{\frac{\sin.(E-\alpha)}{R}-(R'-1).\cos.(E-\alpha)\right\}-Rax.\sin.(E-\alpha)\\ & +R.(R'-1).\end{aligned}$$

La distance périhélie D de la comète, sera

$$D=r-\tfrac{1}{2}.P^2\,;$$

le cosinus de son anomalie v sera donné par l'équation

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}v=\frac{D}{r}\,;$$

et l'on en conclura, par la table du mouvement des comètes, le temps employé à parcourir l'angle v. Pour avoir l'instant du passage au périhélie, il faudra ajouter ce temps, à l'époque, si P est négatif, et l'en soustraire, si P est positif; parce que, dans le premier cas, la comète s'approche du périhélie, au lieu que dans le second cas, elle s'en éloigne.

Ayant ainsi, à-peu-près, la distance périhélie de la comète, et l'instant de son passage au périhélie; on pourra les corriger par la méthode suivante, qui a l'avantage d'être indépendante de la connoissance approchée des autres élémens de l'orbite.

Détermination exacte des élémens de l'orbite, lorsque l'on connoît à-peu-près la distance périhélie de la comète, et l'instant de son passage au périhélie.

On choisira d'abord trois observations éloignées de la comète; en partant ensuite, de la distance périhélie de la comète, et de l'instant de son passage au périhélie, déterminés par ce qui précède, on calculera les trois anomalies de la comète, et les rayons vecteurs correspondans aux instans des trois observations. Soient

v, v', v'' ces anomalies, celles qui précèdent le passage au périhélie, devant être supposées négatives; soient de plus r, r', r'', les rayons vecteurs correspondans de la comète; $v'-v$, $v''-v$, seront les angles compris entre r et r', et entre r et r''; soit U le premier de ces angles, et U' le second. Nommons encore α, α', α'', les trois longitudes géocentriques observées de la comète, et rapportées à un équinoxe fixe; θ, θ', θ'', ses trois latitudes géocentriques, les latitudes australes devant être supposées négatives; soient ϵ, ϵ', ϵ'', ses trois longitudes héliocentriques correspondantes, et ϖ, ϖ', ϖ'', ses trois latitudes héliocentriques. Enfin, nommons E, E', E'', les trois longitudes correspondantes du soleil; R, R', R'', ses trois distances au centre de la terre.

Concevons que la lettre S indique le centre du soleil; T celui de la terre; C, le centre de la comète, et C', sa projection sur le plan de l'écliptique. L'angle STC' est la différence des longitudes géocentriques du soleil et de la comète; en ajoutant le logarithme du cosinus de cet angle, au logarithme du cosinus de la latitude géocentrique de la comète, on aura le logarithme du cosinus de l'angle STC; on connoîtra donc dans le triangle STC, le côté ST, ou R; le côté SC ou r, et l'angle STC: on aura ainsi, par la trigonométrie, l'angle CST. On aura ensuite la latitude héliocentrique ϖ de la comète, au moyen de l'équation

$$\sin.\varpi = \frac{\sin.\theta.\sin.CST}{\sin.CTS}.$$

L'angle TSC' est le côté d'un triangle sphérique rectangle dont l'hypoténuse est l'angle TSC, et dont un des côtés est l'angle ϖ; d'où l'on tirera facilement l'angle TSC', et par conséquent, la longitude géocentrique ϵ de la comète.

On aura de la même manière, ϖ', ϵ', ϖ'', ϵ''; et les valeurs de ϵ, ϵ', ϵ'', feront connoître si le mouvement de la comète est direct ou rétrograde.

Si l'on imagine les deux arcs de latitude ϖ et ϖ', réunis au pôle de l'écliptique, ils y feront un angle égal à $\epsilon'-\epsilon$; et dans le triangle sphérique formé par cet angle, et par les côtés $\frac{\pi}{2}-\varpi$, et $\frac{\pi}{2} - \varpi'$, π étant la demi-circonférence, le côté opposé à l'angle $\epsilon' - \epsilon$ sera l'angle au soleil, compris entre les deux rayons vecteurs r et r'. On le déterminera aisément, par la trigonométrie sphérique, ou par la formule suivante :

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} V = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (\varpi + \varpi') - \cos.^2 \tfrac{1}{2} (\epsilon' - \epsilon) . \cos. \varpi . \cos. \varpi',$$

dans laquelle V représente cet angle; en sorte que si l'on nomme A l'angle dont le sinus quarré est $\cos.^2 . \frac{1}{2} (\epsilon' - \epsilon) . \cos. \varpi . \cos. \varpi'$, et que l'on obtiendra facilement par les tables, on aura

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} V = \cos. (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' + A) . \cos. (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' - A).$$

Si l'on nomme pareillement V' l'angle formé par les deux rayons vecteurs r et r'', on aura

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} V' = \cos. (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' + A') . \cos. (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' - A'),$$

A' étant ce que devient A, lorsque l'on y change ϖ' et ϵ' dans ϖ'' et ϵ''.

Maintenant, si la distance périhélie de la comète, et l'instant du passage de la comète au périhélie, étoient exactement déterminés, et si les observations étoient rigoureuses, on auroit

$$V = U \; ; \qquad V' = U' \; ;$$

mais comme cela n'arrivera presque jamais, on supposera

$$m = U - V \; ; \qquad m' = U' - V'.$$

Nous observerons ici que le calcul du triangle STC, donne pour l'angle CST, deux valeurs différentes : le plus souvent, la nature du mouvement de la comète, fera connoître celle dont on doit faire usage, sur-tout si ces deux valeurs sont fort différentes; car alors l'une d'elles placera la comète, plus loin que l'autre, de la terre, et il sera facile de juger, par le mouvement apparent de la comète, à l'instant de l'observation, laquelle doit être préférée. Mais s'il reste de l'incertitude à cet égard, on pourra toujours la lever, en observant de choisir la valeur qui rend V et V' peu différens de U et de U'.

On fera ensuite une seconde hypothèse dans laquelle, en conservant le même instant du passage par le périhélie, que ci-dessus, on fera varier la distance périhélie, d'une petite quantité, par exemple, de la cinquantième partie de sa valeur, et l'on cherchera dans cette hypothèse, les valeurs de $U-V$ et de $U'-V'$; soit alors

$$n=U-V\ ;\qquad n'=U'-V'.$$

Enfin, on formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie, que dans la première, on fera varier d'un demi-jour, ou d'un jour, plus ou moins, l'instant du passage par le périhélie. On cherchera dans cette nouvelle hypothèse, les valeurs de $U-V$, et de $U'-V'$. Soit alors

$$p=U-V\ ;\qquad p'=U'-V'.$$

Cela posé, si l'on nomme u le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie, pour avoir la véritable, et t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie, pour avoir le véritable instant; on aura les deux équations suivantes :

$$(m-n).u+(m-p).t=m\ ;$$
$$(m'-n').u+(m'-p').t=m'\ ;$$

d'où l'on tirera u et t, et par conséquent, la distance périhélie corrigée, et le véritable instant du passage de la comète au périhélie.

Les corrections précédentes supposent que les élémens déterminés par la première approximation, sont assez approchés, pour traiter comme infiniment petites, leurs erreurs. Mais si la seconde approximation ne paroissoit pas encore suffisante, on pourroit recourir à une troisième, en opérant sur les élémens déjà corrigés, comme on l'a fait sur les premiers; il faudroit seulement avoir l'attention de leur faire subir de plus petites variations. Il suffira même de calculer par ces élémens corrigés, les valeurs de $U-V$, et de $U'-V'$; en les désignant par M et M', on les substituera pour m et m', dans les seconds membres des deux équations précédentes; on aura ainsi deux nouvelles équations qui donneront les valeurs de u et de t, relatives aux corrections de ces nouveaux élémens.

Ayant ainsi la vraie distance périhélie, et le véritable instant du passage de la comète au périhélie; on en conclura de cette manière, les autres élémens de l'orbite.

Soit j la longitude du nœud qui seroit ascendant, si le mouvement de la comète étoit direct, et φ l'inclinaison de l'orbite; on aura, en comparant la première et la dernière observation,

$$\text{tang.}\, j = \frac{\text{tang.}\varpi.\text{sin.}\,6'' - \text{tang.}\,\varpi''.\text{sin.}\,6}{\text{tang.}\varpi.\text{cos.}\,6'' - \text{tang.}\,\varpi''.\text{cos.}\,6};$$

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\text{tang.}\,\varpi''}{\text{sin.}\,(6''-j)}.$$

Comme on peut comparer ainsi deux à deux, les trois observations; il sera plus exact de choisir celles qui donnent aux fractions précédentes, les plus grands numérateurs et les plus grands dénominateurs.

Tang. j pouvant appartenir également aux deux angles j et $\pi+j$, j étant le plus petit des angles positifs auxquels appartient sa valeur; pour déterminer celui des deux angles qu'il faut choisir, on observera que φ est positif et moindre qu'un angle droit; et qu'ainsi sin. $(6''-j)$ doit être du même signe que tang. ϖ''. Cette condition déterminera l'angle j, et cet angle sera la position du nœud ascendant, si le mouvement de la comète est direct; mais si ce mouvement est rétrograde, il faudra ajouter deux angles droits à l'angle j, pour avoir la position de ce nœud.

L'hypoténuse du triangle sphérique dont $6''-j$ et ϖ'' sont les côtés, est la distance de la comète, à son nœud ascendant, dans la troisième observation; et la différence entre v'' et cette hypoténuse, est l'intervalle entre le nœud et le périhélie, compté sur l'orbite.

Si l'on veut donner à la théorie d'une comète, toute la précision que les observations comportent; il faut l'établir sur l'ensemble des meilleures observations, ce que l'on pourra faire ainsi. Marquons d'un trait, de deux traits, &c., les lettres m, n, p, relatives à la seconde observation, à la troisième, &c., comparées toutes à la première observation; on formera les équations

$$(m-n).u+(m-p).t=m;$$
$$(m'-n').u+(m'-p').t=m';$$
$$(m''-n'').u+(m''-p'').t=m'';$$
&c.

En combinant ensuite ces équations, de la manière la plus avantageuse pour déterminer u et t, on aura les corrections de la distance périhélie, et de l'instant du passage au périhélie, fondées sur l'ensemble de ces observations. On en conclura les valeurs de ϵ, ϵ', ϵ'', &c., ϖ, ϖ', ϖ'', &c., et l'on aura

$$\text{tang.}\, j = \frac{\text{tang.}\,\varpi.\,\{\sin.\epsilon' + \sin.\epsilon'' + \&c.\} - \sin.\epsilon.\,\{\text{tang.}\,\varpi' + \text{tang.}\,\varpi'' + \&c\}}{\text{tang.}\,\varpi.\,\{\cos.\epsilon' + \cos.\epsilon'' + \&c.\} - \cos.\epsilon.\,\{\text{tang.}\,\varpi' + \text{tang.}\,\varpi'' + \&c.\}};$$

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\text{tang.}\,\varpi' + \text{tang.}\,\varpi'' + \&c.}{\sin.(\epsilon' - j) + \sin.(\epsilon'' - j) + \&c.}.$$

38. Il existe un cas, à la vérité, fort rare, dans lequel l'orbite d'une comète peut être déterminée d'une manière rigoureuse et simple : c'est le cas où la comète a été observée dans ses deux nœuds. La droite qui joint ses deux positions observées, passe alors par le centre du soleil, et se confond avec la ligne des nœuds. La longueur de cette droite est déterminée par le temps écoulé entre les deux observations ; en nommant T, ce temps réduit en décimales de jour, et en désignant par c, la droite dont il s'agit, on aura, par le n°. 27,

$$c = \frac{1}{2}.\sqrt[3]{\frac{T^2}{(9^j,688724)^2}}.$$

Soit maintenant ϵ la longitude héliocentrique de la comète, au moment de la première observation ; soit r son rayon vecteur ; ρ sa distance à la terre, et α, sa longitude géocentrique. Soit encore R, le rayon de l'orbe terrestre, au même instant, et E la longitude correspondante du soleil ; on aura

$$r.\sin.\epsilon = \rho.\sin.\alpha - R.\sin.E;$$
$$r.\cos.\epsilon = \rho.\cos.\alpha - R.\cos.E.$$

$\pi + \epsilon$ sera la longitude héliocentrique de la comète, à l'instant de la seconde observation ; et si l'on marque d'un trait, les quantités r, α, ρ, R et E, relatives à ce même instant ; on aura

$$r'.\sin.\epsilon = R'.\sin.E' - \rho'.\sin.\alpha';$$
$$r'.\cos.\epsilon = R'.\cos.E' - \rho'.\cos.\alpha',$$

Ces quatre équations donnent

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\rho.\sin.\alpha - R.\sin.E}{\rho.\cos.\alpha - R.\cos.E} = \frac{\rho'.\sin.\alpha' - R'.\sin.E'}{\rho'.\cos.\alpha' - R'.\cos.E'};$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \frac{RR'.\sin.(E-E') - R.\rho.\sin.(\alpha - E')}{\rho.\sin.(\alpha' - \alpha) - R.\sin.(\alpha' - E)}.$$

On a ensuite

$$(r+r').\sin.\theta = \rho.\sin.\alpha - \rho'.\sin.\alpha' - R.\sin.E + R'.\sin.E'$$
$$(r+r').\cos.\theta = \rho.\cos.\alpha - \rho'.\cos.\alpha' - R.\cos.E + R'.\cos.E'.$$

En carrant ces deux équations, en les ajoutant ensuite, et substituant c, au lieu de $r+r'$, on aura

$$\begin{aligned} c^2 = {} & R^2 - 2RR'.\cos.(E'-E) + R'^2 \\ & + 2\rho.\{R'.\cos.(\alpha - E') - R.\cos.(\alpha - E)\} \\ & + 2\rho'.\{R.\cos.(\alpha' - E) - R'.\cos.(\alpha' - E')\} \\ & + \rho^2 - 2\rho\rho'.\cos.(\alpha' - \alpha) + \rho'^2. \end{aligned}$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de ρ' sa valeur précédente en ρ, on aura une équation en ρ, du quatrième degré, que l'on pourra résoudre par les méthodes connues; mais il sera plus simple de supposer à ρ une valeur quelconque, d'en conclure la valeur de ρ', de substituer ces valeurs de ρ et de ρ' dans l'équation précédente, et de voir si elles y satisfont. Un petit nombre d'essais suffira pour déterminer avec précision, ρ et ρ'.

Au moyen de ces quantités, on aura θ, r et r'. Si l'on nomme v l'angle que le rayon r fait avec la distance périhélie que nous désignerons par D; $\pi - v$ sera l'angle formé par cette même distance, et par le rayon r'; on aura ainsi par le n°. 23,

$$r = \frac{D}{\cos.^2 \frac{1}{2} v}; \qquad r' = \frac{D}{\sin.^2 \frac{1}{2} v};$$

ce qui donne

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{r}{r'}; \qquad D = \frac{rr'}{r+r'}.$$

On aura donc l'anomalie v de la comète, à l'instant de la première observation, et sa distance périhélie D, d'où il est facile de conclure la position du périhélie, et l'instant du passage de la comète par ce point. Ainsi, des cinq élémens de l'orbite de la comète, quatre sont connus, savoir, la distance périhélie, la position du périhélie, l'instant du passage de la comète par ce point, et la position du nœud. Il ne restera plus à connoître que l'inclinaison de l'orbite; mais pour cela, il sera nécessaire de recourir à une troisième observation qui servira d'ailleurs à choisir parmi les différentes racines réelles et positives de l'équation en ρ, celle dont on doit faire usage.

39. La supposition du mouvement parabolique des comètes, n'est pas rigoureuse; elle est même infiniment peu probable, vu le nombre infini des cas qui donnent un mouvement elliptique ou hyperbolique, relativement à ceux qui déterminent le mouvement parabolique. D'ailleurs, une comète mue dans un orbe soit parabolique, soit hyperbolique, ne seroit visible qu'une fois; ainsi, l'on peut supposer avec vraisemblance, que les comètes qui décrivent ces courbes, s'il en existe quelques-unes, ont depuis long-temps disparu; en sorte que nous n'observons aujourd'hui, que celles qui, mues dans des orbes rentrans, sont ramenées sans cesse, à des intervalles plus ou moins grands, dans les régions de l'espace, voisines du soleil. On pourra par la méthode suivante, déterminer à quelques années près, la durée de leurs révolutions, lorsque l'on aura un grand nombre d'observations très-précises, avant et après le passage au périhélie.

Pour cela, supposons que l'on ait quatre ou un plus grand nombre de bonnes observations qui embrassent toute la partie visible de l'orbite, et que l'on ait déterminé par la méthode précédente, la parabole qui satisfait à-peu-près, à ces observations. Soient v, v', v'', v''', &c., les anomalies correspondantes; r, r', r'', r''', &c., les rayons vecteurs correspondans. Soit encore

$$v'-v=U\,; \qquad v''-v=U'\,; \qquad v'''-v=U''\,; \qquad \text{\&c.};$$

cela posé, on calculera par la méthode précédente, avec la parabole déjà trouvée, les valeurs de U, U', U'', &c., V, V', V'', &c.; soit

$$m=U-V\,;\; m'=U'-V'\,;\; m''=U''-V''\,;\; m'''=U'''-V'''\,;\; \text{\&c.}$$

On

On fera ensuite varier d'une très-petite quantité, la distance périhèlie dans cette parabole; soit dans cette hypothèse,

$$n = U - V; \quad n' = U' - V'; \quad n'' = U'' - V''; \quad n''' = U''' - V'''; \quad \&c.$$

On formera une troisième hypothèse dans laquelle, en conservant la même distance périhélie, que dans la première, on fera varier d'une très-petite quantité, l'instant du passage par le périhélie; soit alors

$$p = U - V; \quad p' = U' - V'; \quad p'' = U'' - V''; \quad p''' = U''' - V'''; \quad \&c.$$

Enfin, on calculera avec la distance périhélie, et l'instant du passage de la comète au périhélie, de la première hypothèse, l'angle v et le rayon vecteur r, en supposant l'orbe elliptique, et la différence $1 - e$, de son excentricité, d'avec l'unité, égale à une très-petite quantité, par exemple, à $\frac{1}{10}$. Pour avoir la valeur de l'angle v, dans cette hypothèse, il suffira, par le n°. 23, d'ajouter à l'anomalie v, calculée dans la parabole de la première hypothèse, un petit angle dont le sinus est

$$\tfrac{1}{10}.(1-e).\text{tang.}\tfrac{1}{2}v.\left\{4 - 3.\cos.^2\tfrac{1}{2}v - 6.\cos.^4\tfrac{1}{2}v\right\}.$$

En substituant ensuite dans l'équation

$$r = \frac{D}{\cos.^2\frac{1}{2}v}.\left\{1 - \frac{(1-e)}{2}.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}v\right\};$$

au lieu de v, cette anomalie ainsi calculée dans l'ellipse; on aura le rayon vecteur r, correspondant. On calculera de la même manière, v', r', v'', r'', v''', r''', &c.; d'où l'on tirera les valeurs de U, U', U'', U''', &c., et par le n°. 37, celles de V, V', V'', &c. Soit dans ce cas,

$$q = U - V; \quad q' = U' - V'; \quad q'' = U'' - V''; \quad q''' = U''' - V'''; \quad \&c.$$

Nommons enfin, u le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans la distance périhélie, pour avoir la véritable; t le nombre par lequel on doit multiplier la variation supposée dans l'instant du passage par le périhélie, pour avoir ce véritable instant; et s le nombre par lequel on doit multiplier la valeur supposée pour $1-e$, pour avoir la véritable; on formera les équations,

$$(m-n).u+(m-p).t+(m-q).s=m;$$
$$(m'-n').u+(m'-p').t+(m'-q').s=m';$$
$$(m''-n'').u+(m''-p'').t+(m''-q'').s=m'';$$
$$(m'''-n''').u+(m'''-p''').t+(m'''-q''').s=m''';$$
&c.

On déterminera, au moyen de ces équations, les valeurs de u, t, s; d'où l'on tirera la vraie distance périhélie, le véritable instant du passage de la comète au périhélie, et la vraie valeur de $1-e$. Soit D, la distance périhélie, et a, le demi-grand axe de l'orbite; on aura $a=\frac{D}{1-e}$; le temps de la révolution sydérale de la comète sera exprimé par un nombre d'années sydérales, égal à $a^{\frac{3}{2}}$, ou à $\left(\frac{D}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}}$, la moyenne distance du soleil à la terre étant prise pour unité. On aura ensuite par le n°. 37, l'inclinaison de l'orbite, et la position du nœud.

Quelque précision que l'on apporte dans les observations, elles laisseront toujours de l'incertitude sur la durée de la révolution des comètes. La méthode la plus exacte pour la déterminer, consiste à comparer les observations d'une comète, dans deux révolutions consécutives; mais ce moyen n'est praticable, que lorsque la suite des temps ramène la comète vers son périhélie.

CHAPITRE V.

Méthodes générales pour déterminer par des approximations successives, les mouvemens des corps célestes.

40. Nous n'avons considéré dans la première approximation des mouvemens des corps célestes, que les forces principales qui les animent, et nous en avons déduit les loix du mouvement elliptique. Nous aurons égard, dans les recherches suivantes, aux forces perturbatrices de ce mouvement. L'action de ces forces ne fait qu'ajouter des petits termes, aux équations différentielles du mouvement elliptique, dont nous avons donné précédemment les intégrales finies : il faut maintenant déterminer par des approximations successives, les intégrales des mêmes équations augmentées des termes dûs à l'action des forces perturbatrices. Voici, pour cet objet, une méthode générale, quels que soient le nombre et le degré des équations différentielles dont on se propose de trouver des intégrales de plus en plus approchées.

Supposons que l'on ait entre les n variables y, y', y'', &c., et la variable t dont l'élément dt est regardé comme constant, les n équations différentielles

$$0 = \frac{d^iy}{dt^i} + P + \alpha . Q;$$

$$0 = \frac{d^iy'}{dt^i} + P' + \alpha . Q';$$

&c.

P, Q, P', Q', &c., étant des fonctions de t, y, y', &c., et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$ inclusivement, et α étant un très-petit coefficient constant qui, dans la théorie des mouvemens célestes, est de l'ordre des forces perturbatrices. Supposons ensuite que l'on ait les intégrales finies de ces équations, lorsque Q, Q', &c.

sont nuls : en les différentiant chacune, $i-1$ fois de suite, elles formeront avec leurs différentielles, in équations au moyen desquelles on pourra déterminer, par l'élimination, les arbitraires c, c', c'', &c., en fonctions de t, y, y', y'', &c., et de leurs différences, jusqu'à l'ordre $i-1$. En désignant donc par V, V', V'', &c., ces fonctions, on aura

$$c=V\ ; \qquad c'=V'\ ; \qquad c''=V''\ ; \qquad \&c.$$

Ces équations sont les in intégrales de l'ordre $i-1$, que les équations différentielles doivent avoir, et qui par l'élimination des différences des variables, donnent leurs intégrales finies.

Maintenant, si l'on différentie les intégrales précédentes de l'ordre $i-1$, on aura

$$0=dV\ ; \qquad 0=dV'\ ; \qquad 0=dV''\ ; \qquad \&c.$$

or il est clair que ces dernières équations étant différentielles de l'ordre i, sans renfermer d'arbitraires; elles ne peuvent être que les sommes des équations

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P\ ; \qquad 0=\frac{d^iy'}{dt^i}+P'\ ; \qquad \&c.,$$

multipliées chacune par des facteurs convenables, pour que ces sommes soient des différences exactes; en nommant donc Fdt, $F'dt$, &c., les facteurs qui doivent multiplier respectivement ces équations, pour former la suivante $0=dV$; en nommant pareillement Hdt, $H'dt$, &c., les facteurs qui doivent multiplier respectivement les mêmes équations, pour former celle-ci $0=dV'$, et ainsi du reste; on aura

$$dV=F.dt.\left\{\frac{d^iy}{dt^i}+P\right\}+F'dt.\left\{\frac{d^iy'}{dt^i}+P'\right\}+\ \&c.\ ;$$

$$dV'=Hdt.\left\{\frac{d^iy}{dt^i}+P\right\}+H'dt.\left\{\frac{d^iy'}{dt^i}+P'\right\}+\ \&c.\ ;$$

&c.

F, F', &c., H, H', &c., sont des fonctions de t, y, y', y'', &c., et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$: il est facile de les déterminer, lorsque V, V', &c., sont connus; car F est évidemment le coefficient de $\frac{d^iy}{dt^i}$, dans la différentielle de V; F' est le coefficient de $\frac{d^iy'}{dt^i}$, dans la même différentielle, et ainsi de suite. Pareillement, H, H', &c., sont les coefficiens de $\frac{d^iy}{dt^i}$, $\frac{d^iy'}{dt^i}$, &c., dans la différentielle de V'; ainsi, puisque l'on est supposé connoître les fonctions V, V', &c.; en les différentiant uniquement par rapport à $\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, $\frac{d^{i-1}y'}{dt^{i-1}}$, &c., on aura les facteurs par lesquels on doit multiplier les équations différentielles,

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P\ ; \quad 0=\frac{dy'}{dt^i}+P'\ ; \quad \&c.;$$

pour avoir des différences exactes; cela posé,

Reprenons les équations différentielles

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q\ ; \quad 0=\frac{d^iy'}{dt^i}+P'+\alpha.Q'\ ; \quad \&c.$$

Si l'on multiplie la première par Fdt, la seconde par $F'dt$, et ainsi du reste; on aura en les ajoutant,

$$0=dV+\alpha dt.\{FQ+F'Q'+\ \&c.\};$$

on aura de la même manière,

$$0=dV'+\alpha dt.\{HQ+H'Q'+\ \&c.\};$$
$$\&c.$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$c-\alpha.\int dt.\{FQ+F'Q'+\ \&c.\}=V;$$
$$c'-\alpha.\int dt.\{HQ+H'Q'+\ \&c.\}=V';$$
$$\&c.;$$

on aura ainsi in équations différentielles qui seront de la même forme que dans le cas où Q, Q', &c., sont nuls, avec la seule différence que les arbitraires c, c', c'', &c., doivent être changées dans

$$c-\alpha.\int dt.\{FQ+F'Q'+\&c.\};\ c'-\alpha.\int dt.\{HQ+H'Q'+\&c.\};\&c.$$

Or si, dans la supposition de Q, Q', &c., égaux à zéro, on élimine des in intégrales de l'ordre $i-1$, les différences des variables y, y', &c.; on aura les n intégrales finies des équations proposées; on aura donc ces mêmes intégrales, lorsque Q, Q', &c., ne sont pas nuls, en changeant dans les premières intégrales, c, c', &c., dans $c - \alpha.\int dt.\{FQ + \text{\&c.}\}$; $c' - \alpha.\int dt.\{HQ + \text{\&c.}\}$; &c.

41. Si les différentielles

$$dt.\{FQ + F'Q' + \text{\&c.}\}, \qquad dt.\{HQ + H'Q' + \text{\&c.}\}, \text{\&c.},$$

sont exactes; on aura par la méthode précédente, les intégrales finies des équations différentielles proposées : mais cela n'a lieu que dans quelques cas particuliers, dont le plus étendu et le plus intéressant est celui dans lequel ces équations sont linéaires. Supposons ainsi P, P', &c., fonctions linéaires de y, y', &c., et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$, sans aucun terme indépendant de ces variables, et considérons d'abord le cas dans lequel Q, Q', &c., sont nuls. Les équations différentielles étant linéaires, leurs intégrales successives seront pareillement linéaires, en sorte que $c = V$, $c' = V'$, &c, étant les in intégrales de l'ordre $i-1$, des équations différentielles linéaires

$$0 = \frac{d^iy}{dt^i} + P\,; \qquad 0 = \frac{d^iy'}{dt^i} + P'\,; \qquad \text{\&c.};$$

V, V', &c., peuvent être supposés des fonctions linéaires de y, y', &c., et de leurs différences, jusqu'à l'ordre $i-1$. Pour le faire voir, supposons dans les expressions de y, y', &c., la constante arbitraire c égale à une quantité déterminée, plus à l'indéterminée δc; la constante arbitraire c' égale à une quantité déterminée, plus à l'indéterminée $\delta c'$, &c.; en réduisant ces expressions en séries ordonnées par rapport aux puissances et aux produits de δc, $\delta c'$, &c., on aura par les formules du n°. 21,

$$y = Y + \delta c.\left(\frac{dY}{dc}\right) + \delta c'.\left(\frac{dY}{dc'}\right) + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{\delta c^2}{1.2}.\left(\frac{d^2Y}{dc^2}\right) + \text{\&c.};$$

$$y' = Y' + \delta c.\left(\frac{dY'}{dc}\right) + \delta c'.\left(\frac{dY'}{dc'}\right) + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{\delta c^2}{1.2}.\left(\frac{d^2Y'}{dc^2}\right) + \text{\&c.};$$

&c.

$Y, Y', \left(\frac{dY}{dc}\right)$, &c., étant des fonctions de t, sans arbitraires. En substituant ces valeurs, dans les équations différentielles proposées, il est clair que δc, $\delta c'$, &c., étant indéterminés, les coefficiens des premières puissances de chacun d'eux, doivent être nuls dans ces diverses équations ; or ces équations étant linéaires, on aura évidemment les termes affectés des premières puissances de δc, $\delta c'$, &c., en y substituant $\left(\frac{dY}{dc}\right).\delta c + \left(\frac{dY'}{dc'}\right).\delta c' +$ &c., au lieu de y ; $\left(\frac{dY'}{dc}\right).\delta c + \left(\frac{dY'}{dc'}\right).\delta c' +$ &c., au lieu de y', &c. Ces expressions de y, y', &c., satisfont donc séparément aux équations différentielles proposées ; et comme elles renferment les in arbitraires δc, $\delta c'$, &c., elles en sont les intégrales complètes. On voit ainsi que les arbitraires existent sous une forme linéaire, dans les expressions de y, y', &c., et par conséquent aussi, dans leurs différentielles ; d'où il est aisé de conclure que les variables y, y', &c., et leurs différences, peuvent être supposées sous une forme linéaire, dans les intégrales successives des équations différentielles proposées.

Il suit de-là, que F, F', &c., étant les coefficiens de $\frac{d^i y}{dt^i}$, $\frac{d^i y'}{dt^i}$, &c., dans la différentielle de V; H, H', &c., étant les coefficiens des mêmes différences, dans la différentielle de V', et ainsi du reste ; ces quantités sont fonctions de la seule variable t. Partant, si l'on suppose Q, Q', &c., fonctions de t seul, les différences $dt.\{FQ + F'Q' + \text{\&c.}\}$; $dt.\{HQ + H'Q' + \text{\&c.}\}$; &c., seront exactes.

De-là résulte un moyen simple d'avoir les intégrales d'un nombre quelconque n d'équations différentielles linéaires de l'ordre i, et qui renferment des termes quelconques αQ, $\alpha Q'$, &c., fonctions de la seule variable t ; lorsque l'on sait intégrer les mêmes équations, dans le cas où ces termes sont nuls ; car alors, si l'on différencie leurs n intégrales finies, $i-1$ fois de suite, on aura in équations qui donneront par l'élimination, les valeurs des in arbitraires c, c', &c., en fonctions de t, y, y', &c., et des différences de ces variables jusqu'à l'ordre $i-1$. On formera ainsi, les in équations $c=V$; $c'=V'$, &c.; cela posé, F, F', &c., seront les coefficiens de $\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$, $\frac{d^{i-1}y'}{dt^{i-1}}$, &c., dans V; H, H', &c., seront les coefficiens des mêmes différences dans V', et ainsi du reste; on aura donc les intégrales finies des équations différentielles linéaires,

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q\,; \qquad 0=\frac{d^iy'}{dt^i}+P'+\alpha.Q'\,; \quad \&c.,$$

en changeant dans les intégrales finies de ces équations privées de leurs derniers termes αQ, $\alpha Q'$, &c., les arbitraires c, c', &c., dans $c-\alpha.\int dt.\{FQ+F'Q'+\&c.\}$, $c'-\alpha.\int dt.\{HQ+H'Q'+\&c.\}$; &c.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle linéaire

$$0=\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y+\alpha.Q.$$

L'intégrale finie de l'équation $0=\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y$, est

$$y=\frac{c}{a}.\sin.at+\frac{c'}{a}.\cos.at\,;$$

c et c' étant arbitraires. Cette intégrale donne en la différentiant,

$$\frac{dy}{dt}=c.\cos.at-c'.\sin.at,$$

Si l'on combine cette différentielle, avec l'intégrale elle-même, on formera les deux intégrales du premier ordre,

$$c=ay.\sin.at+\frac{dy}{dt}.\cos.at\,;$$

$$c'=ay.\cos.at-\frac{dy}{dt}.\sin.at\,;$$

ainsi l'on aura dans ce cas,

$$F=\cos.at\,; \qquad H=-\sin.at\,;$$

l'intégrale complète de la proposée, sera donc

$$y=\frac{c}{a}.\sin.at+\frac{c'}{a}.\cos.at-\frac{\alpha.\sin.at}{a}.\int Qdt.\cos.at+\frac{\alpha.\cos.at}{a}.\int Qdt.\sin.at.$$

Il est facile d'en conclure que si Q est composé de termes de la forme

forme $K.\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}(mt+\varepsilon)$, chacun de ces termes produira dans la valeur de y, le terme correspondant

$$\frac{\alpha K}{m^2-a^2}.\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}(mt+\varepsilon).$$

Si m est égal à a, le terme $K.\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}(mt+\varepsilon)$ produira dans y, 1°. le terme $-\frac{\alpha K}{4a^2}.\begin{smallmatrix}\sin.\\ \cos.\end{smallmatrix}(at+\varepsilon)$, qui étant compris dans les deux termes $\frac{c}{a}.\sin.at+\frac{c'}{a}.\cos.at$, peut être négligé ; 2°. le terme $\begin{smallmatrix}+\\ -\end{smallmatrix}\frac{\alpha Kt}{2a}.\begin{smallmatrix}\cos.\\ \sin.\end{smallmatrix}(at+\varepsilon)$, le signe $+$ ayant lieu, si le terme de l'expression de Q est un sinus, et le signe — ayant lieu, si ce terme est un cosinus. On voit ainsi comment l'arc t se produit hors des signes *sinus* et *cosinus*, dans les valeurs de y, y', &c., par les intégrations successives, quoique les équations différentielles ne le renferment point sous cette forme. Il est clair que cela aura lieu, toutes les fois que les fonctions FQ, $F'Q'$, &c., HQ, $H'Q'$, &c., renfermeront des termes constans.

42. Si les différences $dt.\{FQ+\&c.\}$, $dt.\{HQ+\&c.\}$, &c., ne sont pas exactes, l'analyse précédente ne donnera point leurs intégrales rigoureuses ; mais elle offre un moyen simple d'avoir des intégrales de plus en plus approchées, lorsque α est fort petit, et lorsque l'on a les valeurs de y, y', &c., dans la supposition de α nul. En différentiant ces valeurs, $i-1$ fois de suite, on formera les équations différentielles de l'ordre $i-1$,

$$c=V\ ;\qquad c'=V'\ ;\qquad \&c.$$

Les coefficiens de $\frac{d^iy}{dt^i}$, $\frac{d^iy'}{dt^i}$, dans les différentielles de V, V', &c., étant les valeurs de F, F', &c., H, H', &c. ; on les substituera dans les fonctions différentielles

$$dt.(FQ+F'Q'+\&c.)\ ;\qquad dt.(HQ+H'Q'+\&c.)\ ;\qquad \&c.$$

Ensuite, on substituera dans ces fonctions, au lieu de y, y', &c., leurs premières valeurs approchées ; ce qui rendra ces différences, fonctions de t, et des arbitraires c, c', &c. Soient Tdt, $T'dt$, &c.,

ces fonctions. Si l'on change dans les premières valeurs approchées de y, y', &c., les arbitraires c, c', &c., respectivement dans $c - \alpha.\int T dt$, $c' - \alpha.\int T' dt$, &c., on aura les secondes valeurs approchées de ces variables.

On substituera de nouveau, ces secondes valeurs, dans les fonctions différentielles

$$dt.(FQ + \&c.)\;;\qquad dt.(HQ + \&c.)\;;\quad \&c.;$$

or il est visible que ces fonctions sont alors ce que deviennent celles-ci, $T dt$, $T' dt$, &c., lorsque l'on y change les arbitraires c, c', &c., dans $c - \alpha.\int T dt$, $c' - \alpha.\int T' dt$, &c. Soient donc $T_{\prime}$, $T'_{\prime}$, &c., ce que deviennent T, T', &c., par ces changemens : on aura les troisièmes valeurs approchées de y, y', &c., en changeant dans les premières, c, c', &c., respectivement dans $c - \alpha.\int T_{\prime}.dt$, $c' - \alpha.\int T'_{\prime}.dt$; &c.

Nommons pareillement $T_{\prime\prime}$, $T'_{\prime\prime}$, &c., ce que deviennent T, T', &c., lorsque l'on y change c, c', &c., dans $c - \alpha.\int T_{\prime} dt$, $c' - \alpha.\int T'_{\prime} dt$, &c. : on aura les quatrièmes valeurs approchées de y, y', &c., en changeant dans les premières valeurs approchées de ces variables, c, c', &c., dans $c - \alpha.\int T_{\prime\prime}.dt$, $c' - \alpha.\int T'_{\prime\prime}.dt$, &c.; et ainsi de suite.

Nous verrons ci-après, que la détermination des mouvemens célestes, dépend presque toujours d'équations différentielles de la forme

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + a^2.y + \alpha.Q,$$

Q étant une fonction rationnelle et entière de y, de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps représenté par t. Voici le moyen le plus facile d'intégrer cette équation.

On supposera d'abord, α nul, et l'on aura par le n°. précédent, une première valeur de y.

On substituera cette valeur dans Q qui deviendra ainsi, une fonction rationnelle et entière de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à t. En intégrant ensuite, l'équation différentielle, on aura une seconde valeur de y, approchée jusqu'aux quantités de l'ordre α inclusivement.

On substituera de nouveau, cette valeur dans Q; et en intégrant l'équation différentielle, on aura une troisième valeur approchée de y, et ainsi de suite.

Cette manière d'intégrer par approximation, les équations différentielles des mouvemens célestes, quoique la plus simple de toutes, a cependant l'inconvénient de donner dans les expressions des variables y, y', &c., des arcs de cercle hors des signes *sinus* et *cosinus*, dans le cas même où ces arcs n'existent point dans les valeurs rigoureuses de ces variables; on conçoit en effet, que si ces valeurs renferment des sinus ou des cosinus d'angles de l'ordre αt, ces sinus ou cosinus doivent se présenter sous la forme de séries, dans les valeurs approchées que l'on trouve par la méthode précédente; puisque ces dernières valeurs sont ordonnées par rapport aux puissances de α. Ce développement en séries, des sinus et cosinus d'angles de l'ordre αt, cesse d'être exact, lorsque par la suite des temps, l'arc αt devient considérable; les valeurs approchées de y, y', &c., ne peuvent donc point s'étendre à un temps illimité. Comme il importe d'avoir des valeurs qui embrassent les siècles passés et à venir; le retour des arcs de cercle que renferment les valeurs approchées, aux fonctions qui les produisent par leur développement en série, est un problême délicat, et intéressant d'analyse. Voici, pour le résoudre, une méthode générale et fort simple.

43. Considérons l'équation différentielle de l'ordre i,

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q\,;$$

α étant très-petit, et P et Q étant des fonctions algébriques de y, $\frac{dy}{dt}\ldots\ldots\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$; et de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement à t. Supposons que l'on ait l'intégrale complète de cette équation différentielle, dans le cas de $\alpha=0$, et que la valeur de y, donnée par cette intégrale, ne renferme point l'arc t, hors des signes *sinus* et *cosinus*; supposons ensuite qu'en intégrant cette équation par la méthode précédente d'approximation, lorsque α n'est pas nul, on ait

$$y=X+t.Y+t^2.Z+t^3.S+\text{\&c.}$$

X, Y, Z, &c., étant des fonctions périodiques de t, qui renferment les i arbitraires c, c', c'', &c.; et les puissances de t, dans cette expression de y, s'étendant à l'infini par les approximations successives. Il est visible que les coefficiens de ces puissances décroîtront avec d'autant plus de rapidité, que α sera plus petit. Dans la théorie des mouvemens des corps célestes, α exprime l'ordre des forces perturbatrices, relativement aux forces principales qui les animent.

Si l'on substitue la valeur précédente de y, dans la fonction $\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q$; elle prendra cette forme, $k+k't+k''t^2+$ &c.; k, k', k'', &c., étant des fonctions périodiques de t; mais par la supposition, la valeur de y satisfait à l'équation différentielle

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q;$$

on doit donc avoir identiquement,

$$0=k+k't+k''t^2+\text{ \&c.}$$

Si k, k', k'', &c., n'étoient pas nuls, cette équation donneroit, par le retour des suites, l'arc t, en fonction de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à t; en supposant donc α infiniment petit, on auroit t égal à une fonction finie de sinus et de cosinus d'angles semblables, ce qui est impossible; ainsi les fonctions k, k', &c., sont identiquement nulles.

Maintenant, si l'arc t n'est élevé qu'à la première puissance, sous les signes *sinus* et *cosinus*, comme cela a lieu dans la théorie des mouvemens célestes, cet arc ne sera point produit par les différences successives de y; en substituant donc la valeur précédente de y, dans la fonction $\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q$, la fonction $k+k't+$&c., dans laquelle elle se transforme, ne contiendra l'arc t, hors des signes *sin.* et *cos.*, qu'autant qu'il est déjà renfermé dans y; ainsi, en changeant dans l'expression de y, l'arc t, hors des signes périodiques, dans $t-\theta$, θ étant une constante quelconque, la fonction $k+k't+$ &c., se changera dans $k+k'.(t-\theta)+$ &c.; et puisque cette dernière fonction est identiquement nulle, en vertu des équations identiques $k=0$, $k'=0$; &c.; il en résulte que l'expression

$$y=X+(t-\theta).Y+(t-\theta)^2.Z+ \&c.,$$

satisfait encore à l'équation différentielle

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P+\alpha.Q.$$

Quoique cette seconde valeur de y semble renfermer $i+1$ arbitraires, savoir les i arbitraires c, c', c'', &c., et l'arbitraire θ; cependant, elle ne peut en contenir que le nombre i, qui soient distinctes entre elles. Il est donc nécessaire, que par un changement convenable dans les constantes c, c', c'', &c., l'arbitraire θ puisse disparoître de cette seconde expression de y, et qu'ainsi, elle coincide avec la première. Cette considération va nous fournir le moyen d'en faire disparoître les arcs de cercle, hors des signes périodiques.

Donnons à la seconde expression de y, la forme suivante:

$$y=X+(t-\theta).R.$$

Puisque nous supposons que θ disparoît de y, on aura $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)=0$, et par conséquent,

$$R=\left(\frac{dX}{d\theta}\right)+(t-\theta).\left(\frac{dR}{d\theta}\right).$$

En différentiant successivement cette équation, on aura

$$2.\left(\frac{dR}{d\theta}\right)=\left(\frac{ddX}{d\theta^2}\right)+(t-\theta).\left(\frac{ddR}{d\theta^2}\right);$$

$$3.\left(\frac{ddR}{d\theta^2}\right)=\left(\frac{d^3X}{d\theta^3}\right)+(t-\theta).\left(\frac{d^3R}{d\theta^3}\right);$$

&c.

d'où il est facile de conclure, en éliminant R, et ses différentielles, de l'expression précédente de y,

$$y=X+(t-\theta).\left(\frac{dX}{d\theta}\right)+\frac{(t-\theta)^2}{1.2}.\left(\frac{ddX}{d\theta^2}\right)+\frac{(t-\theta)^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3X}{d\theta^3}\right)+ \&c.$$

X est fonction de t, et des constantes c, c', c'', &c.; et comme ces constantes sont fonctions de θ, X est une fonction de t et de θ, que nous pouvons représenter par $\varphi(t, \theta)$. L'expression de y est, par la formule (i) du n°. 21, le développement de la fonction $\varphi(t, \theta+t-\theta)$, suivant les puissances de $t-\theta$; on a donc $y=\varphi(t,t)$;

d'où il suit que l'on aura y, en changeant θ en t, dans X. Le problême se réduit ainsi à déterminer X, en fonction de t et de θ, et par conséquent, à déterminer c, c', c'', &c., en fonctions de θ.

Pour cela, reprenons l'équation

$$y = X + (t-\theta).Y + (t-\theta)^2.Z + (t-\theta)^3.S + \&c.$$

Puisque la constante θ est supposée disparoître de cette expression de y, on aura l'équation identique

$$o = \left(\frac{dX}{d\theta}\right) - Y + (t-\theta).\left\{\left(\frac{dY}{d\theta}\right) - 2Z\right\} + (t-\theta)^2.\left\{\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) - 3S\right\} + \&c. \quad (a)$$

En appliquant à cette équation, le raisonnement que nous avons fait sur celle-ci, $o = k + k't + k''t^2 + \&c.$; on voit que les coefficiens des puissances successives de $t-\theta$, doivent se réduire d'eux-mêmes à zéro. Les fonctions X, Y, Z, &c., ne renferment θ, qu'autant qu'il est contenu dans c, c', &c.; en sorte que pour former les différences partielles $\left(\frac{dX}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)$, &c., il suffit de faire varier c, c', &c., dans ces fonctions, ce qui donne,

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = \left(\frac{dX}{dc}\right).\frac{dc}{d\theta} + \left(\frac{dX}{dc'}\right).\frac{dc'}{d\theta} + \left(\frac{dX}{dc''}\right).\frac{dc''}{d\theta} + \&c.;$$

$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = \left(\frac{dY}{dc}\right).\frac{dc}{d\theta} + \left(\frac{dY}{dc'}\right).\frac{dc'}{d\theta} + \left(\frac{dY}{dc''}\right).\frac{dc''}{d\theta} + \&c,$$

&c.

Maintenant, il peut arriver que quelques-unes des arbitraires c, c', c'', &c., multiplient l'arc t dans les fonctions périodiques X, Y, Z, &c.; la différentiation de ces fonctions relativement à θ, ou ce qui est la même chose, relativement à ces arbitraires, développera cet arc, et le fera sortir hors des signes des fonctions périodiques; les différences $\left(\frac{dX}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)$, &c., seront alors de cette forme :

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = X' + t.X'';$$

$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = Y' + t.Y'';$$

$$\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) = Z' + t.Z'';$$

&c.

X', X'', Y', Y'', Z', Z'', &c., étant des fonctions périodiques de t, et renfermant de plus, les arbitraires c, c', c'', &c., et leurs premières différences divisées par $d\theta$, différences qui n'entrent dans ces fonctions, que sous une forme linéaire; on aura donc

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = X' + \theta X'' + (t-\theta).X'';$$
$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = Y' + \theta.Y'' + (t-\theta).Y'';$$
$$\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) = Z' + \theta.Z'' + (t-\theta).Z'';$$
&c.

En substituant ces valeurs dans l'équation (a), on aura

$$\begin{aligned} 0 = {} & X' + \theta X'' - Y \\ & + (t-\theta).\{Y' + \theta.Y'' + X'' - 2Z\} \\ & + (t-\theta)^2.\{Z' + \theta.Z'' + Y'' - 3S\} + \&c.; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en égalant séparément à zéro, les coefficiens des puissances de $t-\theta$,

$$0 = X' + \theta.X'' - Y;$$
$$0 = Y' + \theta.Y'' + X'' - 2Z;$$
$$0 = Z' + \theta.Z'' + Y'' - 3S;$$
&c.

Si l'on différentie la première de ces équations, $i-1$ fois de suite, par rapport à t, on en tirera autant d'équations entre les quantités c, c', c'', &c., et leurs premières différences divisées par $d\theta$; en intégrant ensuite ces nouvelles équations, par rapport à θ, on aura ces constantes, en fonctions de θ. Presque toujours, l'inspection seule de la première des équations précédentes, suffira pour avoir les équations différentielles en c, c', c'', &c., en comparant séparément les coefficiens des sinus et des cosinus qu'elle renferme; car il est visible que les valeurs de c, c', &c., étant indépendantes de t, les équations différentielles qui les déterminent, doivent pareillement en être indépendantes. La simplicité que cette considération apporte dans les calculs, est un des principaux avantages de cette méthode. Le plus souvent, ces équations ne seront intégrables que par des approximations successives, qui pourront introduire l'arc θ, hors des signes périodiques, dans les valeurs de c, c', &c., alors même que cet arc ne se rencontre point ainsi dans les intégrales rigoureuses; mais on le fera disparoître par la méthode que nous venons d'exposer.

Il peut arriver que la première des équations précédentes, et ses $i-1$ différentielles en t, ne donnent point un nombre i d'équations distinctes, entre les quantités c, c', c'', &c., et leurs différences. Dans ce cas, il faudra recourir à la seconde équation et aux suivantes.

Lorsque l'on aura ainsi déterminé les valeurs de c, c', c'', &c., en fonctions de θ; on les substituera dans X, et en y changeant ensuite θ en t, on aura la valeur de y, sans arcs de cercle, hors des signes périodiques, lorsque cela est possible. Si cette valeur en conservoit encore, ce seroit une preuve qu'ils existent dans l'intégrale rigoureuse.

44. Considérons présentement, un nombre quelconque n d'équations différentielles,

$$0=\frac{d^i y}{dt^i}+P+\alpha.Q\ ; \qquad 0=\frac{d^i y'}{dt^i}+P'+\alpha.Q'\ ; \quad \&c.$$

P, Q, P', Q', &c., étant des fonctions de y, y', &c., de leurs différentielles, jusqu'à l'ordre $i-1$, et de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement à la variable t dont la différence est supposée constante. Supposons que les intégrales approchées de ces équations soient

$$\begin{aligned} y &= X+t.Y+t^2.Z+t^3.S+\&c.; \\ y' &= X_,+t.Y_,+t^2.Z_,+t^3.S_,+\&c.; \\ &\&c. \end{aligned}$$

X, Y, Z, &c., $X_,$, $Y_,$, $Z_,$, &c., étant des fonctions périodiques de t, et renfermant les in arbitraires c, c', c'', &c. On aura comme dans le n°. précédent,

$$\begin{aligned} 0 &= X'+\theta.X''-Y; \\ 0 &= Y'+\theta.Y''+X''-2Z; \\ 0 &= Z'+\theta.Z''+Y''-3S; \\ &\&c. \end{aligned}$$

La valeur de y', donnera pareillement, des équations de cette forme,

$$0 = X'_{,} + \theta . X''_{,} - Y_{,} ;$$
$$0 = Y'_{,} + \theta . Y''_{,} + X''_{,} - 2 Z_{,} ;$$
&c.

Les valeurs de y'', y''', &c., fourniront des équations semblables. On déterminera par ces diverses équations, en choisissant les plus simples et les plus approchées, les valeurs de c, c', c'', en fonctions de θ : en substituant ces valeurs dans X, $X_{,}$, &c., et en y changeant ensuite θ en t, on aura les valeurs de y, y', &c., sans arcs de cercle hors des signes périodiques, lorsque cela est possible.

45. Reprenons la méthode que nous avons exposée dans le n°. 40. Il en résulte que, si au lieu de supposer les paramètres c, c', c'', &c., constans, on les fait varier en sorte que l'on ait

$$dc = -\alpha dt . \{FQ + F'Q' + \text{\&c.}\} ;$$
$$dc' = -\alpha dt . \{HQ + H'Q' + \text{\&c.}\} ;$$
&c.

on aura toujours les in intégrales de l'ordre $i-1$,

$$c = V ; \qquad c' = V' ; \qquad c'' = V'' ; \qquad \text{\&c.}$$

comme dans le cas de α nul ; d'où il suit que non-seulement les intégrales finies, mais encore toutes les équations dans lesquelles il n'entrera que des différences inférieures à l'ordre i, conserveront la même forme, dans le cas de α nul, et dans celui de α quelconque ; puisque ces équations peuvent résulter de la comparaison seule des intégrales précédentes, de l'ordre $i-1$. On pourra donc également, dans ces deux cas, différentier $i-1$ fois de suite, les intégrales finies, sans faire varier c, c', &c. ; et comme on est libre de faire varier tout, à-la-fois, il en résultera des équations de condition entre les paramètres c, c', &c., et leurs différences.

Dans les deux cas de α nul, et de α quelconque, les valeurs de y, y', &c., et de leurs différences jusqu'à l'ordre $i-1$ inclusivement, sont les mêmes fonctions de t, et des paramètres c, c', c'', &c. ; soit donc Y, une fonction quelconque des variables y, y', y'', &c., et de leurs différentielles inférieures à l'ordre $i-1$, et nommons T, la fonction de t, dans laquelle elle se change, lorsque l'on y substitue, au lieu de ces variables et de leurs différences, leurs valeurs en t. On pourra différentier l'équation $Y=T$, en y regardant les paramètres c, c', c'', &c., comme constans; on pourra même ne prendre que la différence partielle de Y, relativement à une seule ou à plusieurs des variables y, y', &c., pourvu que l'on ne fasse varier dans T, que ce qui varie avec elles. Dans toutes ces différentiations, les paramètres c, c', c'', &c., peuvent toujours être traités comme constans; puisqu'en substituant pour y, y', &c., et leurs différences, leurs valeurs en t, on aura des équations identiquement nulles, dans les deux cas de α nul, et de α quelconque.

Lorsque les équations différentielles sont de l'ordre $i-1$, il n'est plus permis, en les différentiant, de traiter les paramètres c, c', c'', &c., comme constans. Pour différentier ces équations, considérons l'équation $\varphi=0$, φ étant une fonction différentielle de l'ordre $i-1$, et qui renferme les parametres c, c', c'', &c.: soit $\delta\varphi$, la différence de cette fonction, prise en regardant c, c', &c., comme constans, ainsi que les différences $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y'$, &c. Soit S le coefficient de $\frac{d^iy}{dt^{i-1}}$ dans la différence entière de φ: soit S' le coefficient de $\frac{d^iy'}{dt^{i-1}}$, dans cette même différence, et ainsi du reste. L'équation $\varphi=0$, différentiée, donnera

$$0=\delta\varphi+\left(\frac{d\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.$$
$$+S.\frac{d^iy}{dt^{i-1}}+S'.\frac{d^iy'}{dt^{i-1}}+\&c.;$$

en substituant au lieu de $\frac{d^iy}{dt^{i-1}}$, sa valeur $-dt.\{P+\alpha.Q\}$; au lieu de $\frac{d^iy'}{dt^{i-1}}$, sa valeur $-dt.\{P'+\alpha.Q'\}$, &c.; on aura

$$0=\delta\varphi+\left(\frac{d\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.$$
$$-dt.\{SP+S'P'+\&c.\}-\alpha dt.\{SQ+S'Q'+\&c.\};\quad (t)$$

Dans la supposition de α nul, les paramètres c, c', c'', &c., sont constans; on a ainsi,

$$0=\delta\varphi-dt.\{SP+S'P'+\&c.\}.$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de c, c', c'', &c., leurs valeurs V, V', V'', &c.; on aura une équation différentielle de l'ordre $i-1$, sans arbitraires, ce qui est impossible, à moins que cette équation ne soit identiquement nulle. La fonction

$$\delta\varphi - dt.\{SP + S'P' + \text{\&c.}\}$$

devient donc identiquement nulle, en vertu des équations $c = V$; $c' = V'$, &c.; et comme ces équations ont encore lieu, lorsque les paramètres c, c', c'', &c., sont variables, il est visible que dans ce cas, la fonction précédente est encore identiquement nulle; l'équation (t) deviendra donc

$$\begin{aligned} o = \left(\frac{d\varphi}{dc}\right).dc + \left(\frac{d\varphi}{dc'}\right).dc' + \text{\&c.} \\ -\alpha dt.\{SQ + S'Q' + \text{\&c.}\}; \qquad (x) \end{aligned}$$

On voit ainsi que pour différentier l'équation $\varphi = o$, il suffit de faire varier dans φ, les paramètres c, c'; &c., et les différences $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y'$, &c., et de substituer après les différentiations, $-\alpha Q$, $-\alpha Q'$, &c., au lieu des quantités $\frac{d^iy}{dt^i}$, $\frac{d^iy'}{dt^i}$, &c.

Soit $\psi = o$, une équation finie entre y, y', &c., et la variable t; si l'on désigne par $\delta\psi$, $\delta^2\psi$, &c., les différences successives de ψ, prises en regardant c, c', &c., comme constans; on aura par ce qui précède, dans le cas même où c, c', &c., sont variables, les équations suivantes :

$$\psi = o; \quad \delta\psi = o; \quad \delta^2\psi = o \ldots\ldots \delta^{i-1}\psi = o;$$

en changeant donc successivement dans l'équation (x), la fonction φ en ψ, $\delta\psi$, $\delta^2\psi$, &c.; on aura

$$o = \left(\frac{d\psi}{dc}\right).dc + \left(\frac{d\psi}{dc'}\right).dc' + \text{\&c.};$$

$$o = \left(\frac{d.\delta\psi}{dc}\right).dc + \left(\frac{d.\delta\psi}{dc'}\right).dc' + \text{\&c.}$$

....

$$\begin{aligned} o = \left(\frac{d.\delta^{i-1}\psi}{dc}\right).dc + \left(\frac{d.\delta^{i-1}\psi}{dc'}\right).dc' + \text{\&c.} \\ -\alpha dt.\left\{Q.\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + Q'.\left(\frac{d\psi}{dy'}\right) + \text{\&c.}\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi les équations $\psi=0$, $\psi'=0$, &c., étant supposées être les n intégrales finies des équations différentielles,

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P\ ; \qquad 0=\frac{d^iy'}{dt^i}+P'\ ; \qquad \&c.;$$

on aura les in équations au moyen desquelles on pourra déterminer les paramètres c, c', c'', &c., sans qu'il soit nécessaire de former pour cela les équations $c=V$; $c'=V'$; &c.; mais lorsque les intégrales seront sous cette dernière forme, la détermination de c, c', &c., sera plus simple.

45. Cette méthode de faire varier les paramètres, est d'une grande utilité dans l'analyse et dans ses applications. Pour en montrer un nouvel usage, considérons l'équation différentielle

$$0=\frac{d^iy}{dt^i}+P;$$

P étant fonction de t, y, de ses différences jusqu'à l'ordre $i-1$, et des quantités q, q', &c., qui sont fonctions de t. Supposons que l'on ait l'intégrale finie de cette équation différentielle, dans la supposition de q, q', &c., constans, et représentons par $\varphi=0$, cette intégrale qui renfermera i arbitraires c, c', &c. : désignons par $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, $\delta^3\varphi$, &c., les différences successives de φ, prises en regardant q, q', &c., comme constans, ainsi que les paramètres c, c', &c. Si l'on fait varier toutes ces quantités, la différence de φ sera

$$\delta\varphi+\left(\frac{d\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.+\left(\frac{d\varphi}{dq}\right).dq+\left(\frac{d\varphi}{dq'}\right).dq'+\&c.;$$

en faisant donc

$$0=\left(\frac{d\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.+\left(\frac{d\varphi}{dq}\right).dq+\left(\frac{d\varphi}{dq'}\right).dq'+\&c.;$$

$\delta\varphi$ sera encore la première différence de φ, dans le cas de c, c', &c., q, q', &c., variables. Si l'on fait pareillement;

$$0=\left(\frac{d.\delta\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d.\delta\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.+\left(\frac{d.\delta\varphi}{dq}\right).dq+\left(\frac{d.\delta\varphi}{dq'}\right).dq'+\&c.;$$

. . . .

$$0=\left(\frac{d.\delta^{i-1}\varphi}{dc}\right).dc+\left(\frac{d.\delta^{i-1}\varphi}{dc'}\right).dc'+\&c.+\left(\frac{d.\delta^{i-1}\varphi}{dq}\right).dq+\left(\frac{d.\delta^{i-1}\varphi}{dq'}\right).dq'+\&c.;$$

$\delta^2\varphi$, $\delta^3\varphi$.... $\delta^i\varphi$, seront encore les différences secondes, troisièmes.... $i^{\text{ièmes}}$ de φ, lorsque c, c', &c., q, q', &c., sont supposés variables.

Maintenant, dans le cas de c, c', &c., q, q', &c., constans, l'équation différentielle

$$o=\frac{d^iy}{dt^i}+P,$$

est le résultat de l'élimination des paramètres c, c', &c., au moyen des équations

$$\varphi=o\,; \qquad \delta\varphi=o\,; \qquad \delta^2\varphi=o\,; \quad ....\delta^i\varphi=o;$$

ainsi, ces dernières équations ayant encore lieu lorsque q, q', &c., sont supposés variables, l'équation $\varphi=o$, satisfait encore, dans ce cas, à l'équation différentielle proposée, pourvu que les paramètres c, c', &c., soient déterminés au moyen des i équations différentielles précédentes; et comme leur intégration donne i constantes arbitraires, la fonction φ renfermera ces arbitraires, et l'équation $\varphi=o$, sera l'intégrale complète de la proposée.

Cette manière de faire varier les arbitraires, peut être employée avec avantage, lorsque les quantités q, q', &c., varient avec une grande lenteur; parce que cette considération rend, en général, beaucoup plus facile, l'intégration par approximation, des équations différentielles qui déterminent les paramètres variables c, c', &c.

CHAPITRE VI.

Seconde approximation des mouvemens célestes, ou théorie de leurs perturbations.

46. Appliquons maintenant les méthodes précédentes, aux perturbations des mouvemens célestes, pour en conclure les expressions les plus simples, de leurs inégalités périodiques et séculaires. Reprenons pour cela les équations différentielles (1), (2) et (3) du n°. 9, qui déterminent le mouvement relatif de m autour de M. Si l'on fait

$$R = \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m''.(xx''+yy''+zz'')}{(x''^2+y''^2+z''^2)^{\frac{3}{2}}} + \&\text{c.} - \frac{\lambda}{m};$$

λ étant par le n°. cité, égal à

$$\frac{mm'}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{mm''}{\{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{m'm''}{\{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2\}^{\frac{1}{2}}} + \&\text{c.};$$

Si de plus, on suppose $M+m=\mu$; et $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$; &c., on aura

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{ddx}{dt^2} + \frac{\mu.x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ 0 &= \frac{ddy}{dt^2} + \frac{\mu.y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right) \\ 0 &= \frac{ddz}{dt^2} + \frac{\mu.z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \end{aligned}\right\}; \qquad (P)$$

La somme de ces trois équations multipliées respectivement par dx, dy, dz, donne en l'intégrant,

$$0 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int dR; \qquad (Q)$$

la différentielle dR étant uniquement relative aux coordonnées x, y, z, du corps m, et a étant une constante arbitraire qui, lorsque R est nul, devient par les n^{os}. 18 et 19, le demi-grand axe de l'ellipse décrite par m autour de M.

Les équations (P) multipliées respectivement par x, y, z, et ajoutées à l'intégrale (Q), donneront

$$0=\tfrac{1}{2}.\frac{d^2.r^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2.\int dR.+x.\left(\frac{dR}{dx}\right)+y.\left(\frac{dR}{dy}\right)+z.\left(\frac{dR}{dz}\right); \quad (R)$$

Maintenant, on peut concevoir les masses perturbatrices m', m'', &c., multipliées par un coefficient α; et alors, la valeur de r sera fonction du temps t et de α. Si l'on développe cette fonction, par rapport aux puissances de α; et que l'on fasse $\alpha=1$, après ce développement; elle sera ordonnée par rapport aux puissances et aux produits des masses perturbatrices. Désignons par la caractéristique δ placée devant une quantité, la différentielle de cette quantité, prise par rapport à α, et divisée par $d\alpha$. Lorsque l'on aura déterminé δr, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de α; on aura le rayon r, en multipliant cette suite par $d\alpha$, en l'intégrant ensuite par rapport à α, et en ajoutant à cette intégrale, une fonction de t indépendante de α, fonction qui est évidemment la valeur de r dans le cas où les forces perturbatrices sont nulles, et où le corps m décrit une section conique. La détermination de r se réduit donc à former et à intégrer l'équation différentielle qui détermine δr.

Pour cela, reprenons l'équation différentielle (R), et faisons, pour plus de simplicité,

$$x.\left(\frac{dR}{dx}\right)+y.\left(\frac{dR}{dy}\right)+z.\left(\frac{dR}{dz}\right)=r.R';$$

en la différentiant par rapport à α, on aura

$$0=\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+\frac{\mu.r\delta r}{r^3}+2\int\delta.dR+\delta.rR'; \qquad (S)$$

Nommons dv l'arc infiniment petit intercepté entre les deux rayons vecteurs r et $r+dr$; l'élément de la courbe décrite par m autour de M, sera $\sqrt{dr^2+r^2dv^2}$; on aura ainsi $dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2dv^2$; et l'équation ($Q$) deviendra

$$0=\frac{r^2dv^2+dr^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2.\int dR.$$

En éliminant $\frac{\mu}{a}$, de cette équation, au moyen de l'équation (R), on aura

$$\frac{r^2\,dv^2}{dt^2}=\frac{r.ddr}{dt^2}+\frac{\mu}{r}+r.R'\,;$$

d'où l'on tire, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{2r^2dv.d.\delta v}{dt^2}=\frac{r.dd.\delta r-\delta r.ddr}{dt^2}-\frac{3\mu.r\delta r}{r^3}+r.\delta R'-R'.\delta r.$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $\frac{\mu.r\delta r}{r^3}$ sa valeur tirée de l'équation (S), on aura

$$d.\delta v=\frac{d.(dr.\delta r+2r.d\delta r)+dt^2.\{3.\int\delta.dR+2r.\delta R'+R'.\delta r\}}{r^2dv}\,;\quad (T)$$

On pourra, au moyen des équations (S) et (T), avoir aussi exactement que l'on voudra, les valeurs de δr et de δv; mais on doit observer que dv étant l'angle intercepté entre les rayons r et $r+dr$, l'intégrale v de ces angles n'est pas dans un même plan. Pour en conclure la valeur de l'angle décrit autour de M, par la projection du rayon vecteur r sur un plan fixe, désignons par $v_{,}$ ce dernier angle, et nommons s la tangente de la latitude de m au-dessus de ce plan; $r.(1+ss)^{-\frac{1}{2}}$ sera l'expression du rayon vecteur projeté, et le quarré de l'élément de la courbe décrite par m, sera

$$\frac{r^2.dv_{,}^2}{1+ss}+dr^2+\frac{r^2ds^2}{(1+ss)^2}\,;$$

mais le quarré de cet élément est $r^2dv^2+dr^2$; on aura donc, en égalant ces deux expressions,

$$dv_{,}=\frac{dv.\sqrt{(1+ss)^2-\frac{ds^2}{dv^2}}}{\sqrt{1+ss}}.$$

On déterminera ainsi $dv_{,}$, au moyen de dv, lorsque s sera connu.

Si

Si l'on prend pour plan fixe, le plan de l'orbite de m, à une époque donnée, s et $\frac{ds}{dv}$ seront visiblement de l'ordre des forces perturbatrices; en négligeant donc les quarrés et les produits de ces forces, on aura $v = v_{,}$. Dans la théorie des planètes et des comètes, on peut négliger ces quarrés et ces produits, à l'exception de quelques termes de cet ordre, que des circonstances particulières rendent sensibles, et qu'il sera facile de déterminer, au moyen des équations (S) et (T). Ces dernières équations prennent une forme plus simple, lorsque l'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices. En effet, on peut alors considérer δr et δv, comme les parties de r et de v dues à ces forces; δR, $\delta . rR'$ sont ce que deviennent R et rR', lorsque l'on y substitue au lieu des coordonnées des corps, leurs valeurs relatives au mouvement elliptique : nous pouvons les désigner par ces dernières quantités assujéties à cette condition. L'équation (S) devient ainsi,

$$0 = \frac{d^2 . r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu . r\delta r}{r^3} + 2 . \int dR + rR'.$$

Le plan fixe des x et des y étant supposé celui de l'orbite de m, à une époque donnée, z sera de l'ordre des forces perturbatrices; et puisque l'on néglige le quarré de ces forces, on pourra négliger la quantité $z . \left(\frac{dR}{dz}\right)$. De plus, le rayon r ne diffère de sa projection, que de quantités de l'ordre z^2. L'angle que ce rayon fait avec l'axe des x, ne diffère de sa projection, que de quantités du même ordre; cet angle peut donc être supposé égal à v, et l'on a aux quantités près du même ordre,

$$x = r . \cos . v \; ; \qquad y = r . \sin . v \; ;$$

d'où l'on tire

$$x . \left(\frac{dR}{dx}\right) + y . \left(\frac{dR}{dy}\right) = r . \left(\frac{dR}{dr}\right);$$

et par conséquent $r . R' = r . \left(\frac{dR}{dr}\right)$. Il est facile de s'assurer par la différentiation, que si l'on néglige le quarré de la force perturbatrice, l'équation différentielle précédente donnera, en vertu des deux premières des équations (P),

$$r.\delta r = \frac{x.\int y dt.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} - y.\int x dt.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}}{\left(\frac{x dy - y dx}{dt}\right)}$$

Dans le second membre de cette équation, les coordonnées peuvent se rapporter au mouvement elliptique, ce qui donne $\frac{xdy - ydx}{dt}$ constant et égal par le n°. 19, à $\sqrt{\mu.a(1-e^2)}$, ae étant l'excentricité de l'orbite de m. Si l'on substitue dans l'expression de $r\delta r$, au lieu de x et de y, leurs valeurs $r.\cos.v$, et $r.\sin.v$, et au lieu de $\frac{x dy - y dx}{dt}$, la quantité $\sqrt{\mu a.(1-e^2)}$; enfin, si l'on observe que par le n°. 20, $\mu = n^2 a^3$; on aura

$$\delta r = \frac{\left\{\begin{array}{l} a.\cos.v.\int n\,dt.r.\sin.v.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} \\ -a.\sin.v.\int ndt.r.\cos.v.\left\{2.\int \mathrm{d}R + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\} \end{array}\right\}}{\mu.\sqrt{1-e^2}}; \quad (X)$$

l'équation (T) donne en l'intégrant, et en négligeant le quarré des forces perturbatrices,

$$\delta v = \frac{\frac{2r.d.\delta r + dr.\delta r}{a^2 n\,dt} + \frac{3a}{\mu}.\int\int ndt.\mathrm{d}R + \frac{2a}{\mu}.\int n\,dt.r.\left(\frac{dR}{dr}\right)}{\sqrt{1-e^2}}; \qquad (Y)$$

Cette expression donnera facilement les perturbations du mouvement de m en longitude, lorsque celles du rayon vecteur seront déterminées.

Il nous reste à déterminer les perturbations du mouvement en latitude. Pour cela, nous reprendrons la troisième des équations (P): en l'intégrant comme nous avons intégré l'équation (S), et faisant $z = r\delta s$, nous aurons

$$\delta s = \frac{a.\cos.v.\int ndt.r.\sin.v.\left(\frac{dR}{dz}\right) - a.\sin.v.\int ndt.r.\cos.v.\left(\frac{dR}{dz}\right)}{\mu.\sqrt{1-e^2}}; (Z)$$

δs est la latitude de m au-dessus du plan de son orbite primitive: si l'on veut rapporter le mouvement de m, sur un plan peu incliné à cette orbite ; en nommant s sa latitude, lorsqu'il est supposé ne point quitter le plan de cette orbite, $s+\delta s$ sera à très-peu près la latitude de m, au-dessus du plan proposé.

47. Les formules (X), (Y) et (Z), ont l'avantage de présenter sous une forme finie, les perturbations ; ce qui est très-utile dans la théorie des comètes, dans laquelle ces perturbations ne peuvent être déterminées que par des quadratures. Mais le peu d'excentricité et d'inclinaison respective des orbites des planètes, permet de développer leurs perturbations, en séries convergentes de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps, et d'en former des tables qui peuvent servir pour un temps indéfini. Alors, au lieu des expressions précédentes de δr et de δs, il est plus commode de faire usage des équations différentielles qui déterminent ces variables. En ordonnant ces équations par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, on peut toujours réduire la détermination des valeurs de δr et de δs, à l'intégration d'équations de la forme

$$0=\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y+Q;$$

équations dont nous avons donné les intégrales dans le n°. 42. Mais on peut donner immédiatement cette forme très-simple, aux équations différentielles précédentes, par la méthode suivante.

Reprenons l'équation (R) du n°. précédent, en y faisant pour abréger,

$$Q=2.\int \mathrm{d}R+r.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

elle devient ainsi,

$$0=\tfrac{1}{2}.\frac{d^2.r^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+Q; \qquad (R')$$

Dans le cas du mouvement elliptique, où $Q=0$, r^2 est par le n°. 22, fonction de $e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$, ae étant l'excentricité de l'orbite, et $nt+\varepsilon-\varpi$ étant l'anomalie moyenne de la planète m. Soit $e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)=u$; et supposons $r^2=\varphi(u)$; on aura

$$0=\frac{d^2u}{dt^2}+n^2.u.$$

Dans le cas du mouvement troublé, nous pouvons supposer encore, $r^2 = \varphi(u)$; mais u ne sera plus égal à $e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$; il sera donné par l'équation différentielle précédente augmentée d'un terme dépendant des forces perturbatrices. Pour déterminer ce terme, nous observerons que si l'on fait $u = \psi(r^2)$, on aura

$$\frac{ddu}{dt^2}+n^2.u = \frac{d^2.r^2}{dt^2}.\psi'(r^2)+\frac{4r^2dr^2}{dt^2}.\psi''(r^2)+n^2.\psi(r^2),$$

$\psi'(r^2)$ étant la différentielle de $\psi(r^2)$ divisée par $d.r^2$, et $\psi''(r^2)$ étant la différentielle de $\psi'(r^2)$ divisée par $d.r^2$. L'équation (R') donne $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ égal à une fonction de r, plus à une fonction dépendante de la force perturbatrice. Si l'on multiplie cette équation, par $2rdr$, et qu'ensuite on l'intègre; on aura $\frac{r^2dr^2}{dt^2}$ égal à une fonction de r, plus à une fonction dépendante de la force perturbatrice. En substituant ces valeurs de $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ et de $\frac{r^2dr^2}{dt^2}$, dans l'expression précédente de $\frac{d^2u}{dt^2}+n^2u$; la fonction de r, indépendante de la force perturbatrice, disparoîtra d'elle-même, puisqu'elle est identiquement nulle, lorsque cette force est nulle; on aura donc la valeur de $\frac{ddu}{dt^2}+n^2u$, en substituant dans son expression, au lieu de $\frac{d^2.r^2}{dt^2}$ et de $\frac{r^2dr^2}{dt^2}$, les parties de leurs expressions, qui dépendent de la force perturbatrice. Or, en n'ayant égard qu'à ces parties, l'équation (R') et son intégrale, donnent

$$\frac{d^2.r^2}{dt^2} = -2Q;$$

$$\frac{4r^2dr^2}{dt^2} = -8.\int Qrdr;$$

partant

$$\frac{ddu}{dt^2}+n^2u = -2Q.\psi'(r^2)-8.\psi''(r^2).\int Q.rdr.$$

Maintenant, de l'équation $u=\psi(r^2)$, on tire $du = 2rdr.\psi'(r^2)$;

celle-ci $r^2=\varphi(u)$, donne $2rdr=du.\varphi'(u)$, et par conséquent,

$$\psi'(r^2)=\frac{1}{\varphi'(u)}.$$

En différentiant cette dernière équation, et substituant $\varphi'(u)$ au lieu de $\frac{2rdr}{du}$, on aura

$$\psi''(r^2)=-\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3},$$

$\varphi''(u)$ étant égal à $\frac{d.\varphi'(u)}{du}$, de même que $\varphi'(u)$ est égal à $\frac{d.\varphi(u)}{du}$. Cela posé; si l'on fait

$$u=e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+\delta u,$$

l'équation différentielle en u deviendra

$$0=\frac{dd.\delta u}{dt^2}+n^2.\delta u-\frac{4.\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3}.\int Q\,du.\varphi'(u)+\frac{2Q}{\varphi'(u)};$$

et si l'on néglige le quarré de la force perturbatrice, u pourra être supposé égal à $e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$, dans les termes dépendans de Q.

La valeur de $\frac{r}{a}$ trouvée dans le n°. 22, donne, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre e^3 inclusivement,

$$r=a.\{1+e^2-u.(1-\tfrac{3}{2}e^2)-u^2-\tfrac{3}{2}u^3\};$$

d'où l'on tire

$$r^2=a^2.\{1+2e^2-2u.(1-\tfrac{1}{2}e^2)-u^2-u^3\}=\varphi(u).$$

Si l'on substitue cette valeur de $\varphi(u)$, dans l'équation différentielle en δu, et que l'on restitue au lieu de Q, sa valeur $2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$, et $e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$, au lieu de u; on aura aux quantités près de l'ordre e^3,

$$\begin{aligned}0=&\frac{d^2.\delta u}{dt^2}+n^2\delta u\\&-\frac{1}{a^2}.\{1+\tfrac{1}{4}e^2-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)-\tfrac{1}{4}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}.\left\{2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\};\quad(X)\\&-\frac{2e}{a^2}.\int ndt.\left[\sin.(nt+\varepsilon-\varpi).[1+e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)].\left\{2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

Lorsque l'on aura déterminé δu, au moyen de cette équation différentielle ; on aura δr, en différentiant l'expression de r, par rapport à la caractéristique δ, ce qui donne

$$\delta r = -a\delta u.\{1+\tfrac{3}{4}e^2+2e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{9}{4}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}.$$

Cette valeur de δr donnera la valeur de δv, au moyen de la formule (Y) du n°. précédent.

Il nous reste à déterminer δs ; or si l'on compare les formules (X) et (Z) du n°. précédent, on voit que δr se change en δs, en changeant dans son expression, $2.\int dR + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$ en $\left(\frac{dR}{dz}\right)$; d'où il suit que pour avoir δs, il suffit de faire ce changement, dans l'équation différentielle en δu, et de substituer ensuite la valeur de δu, donnée par cette équation, et que nous désignerons par $\delta u'$, dans l'expression de δr. On aura ainsi,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2.\delta u'}{dt^2} + n^2.\delta u' \\ & - \frac{1}{a^2}.\{1+\tfrac{1}{4}e^2 - e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi) - \tfrac{1}{4}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}.\left(\frac{dR}{dz}\right) \\ & - \frac{2e}{a^2}.\int ndt.\left\{\sin.(nt+\varepsilon-\varpi).\{1+e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\}.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\}; (Z') \end{aligned}$$

$$\delta s = -a\delta u'.\{1+\tfrac{3}{4}e^2+2e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{9}{4}e^2.\cos.(2nt+2\varepsilon-2\varpi)\}.$$

Le système des équations (X'), (Y), (Z') donnera d'une manière fort simple, le mouvement troublé de m, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice. La considération des termes dus à cette puissance, étant à très-peu près, suffisante dans la théorie des planètes ; nous allons en tirer des formules commodes pour déterminer le mouvement de ces corps.

48. Il est nécessaire pour cela, de développer la fonction R en série. Si l'on n'a égard qu'à l'action de m sur m', on a par le n°. 46,

$$R = \frac{m'.(xx'+yy'+zz')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

Cette fonction est entièrement indépendante de la position du plan des x et des y ; car le radical $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$, exprimant la distance de m à m', il en est indépendant; la fonction $x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-2xx'-2yy'-2zz'$ en est donc pareillement indépendante; mais les carrés $x^2+y^2+z^2$, et $x'^2+y'^2+z'^2$, des rayons vecteurs, ne dépendent point de cette position; la quantité $xx'+yy'+zz'$ n'en dépend donc pas, et par conséquent la fonction R en est indépendante. Supposons dans cette fonction,

$$x=r.\cos.v\;;\qquad y=r.\sin.v\;;$$
$$x'=r'.\cos.v'\;;\qquad y'=r'.\sin.v'\;;$$

on aura

$$R=\frac{m'.\{rr'.\cos.(v'-v)+zz'\}}{(r'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'}{\{r^2-2rr'.\cos.(v'-v)+r'^2+(z'-z)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Les orbes des planètes étant presque circulaires et peu inclinés les uns aux autres, on peut choisir le plan des x et des y, de manière que z et z' soient très-petits. Dans ce cas, r et r' diffèrent très-peu des demi grands axes a et a' des orbes elliptiques; nous supposerons donc

$$r=a.(1+u_{,})\;;\qquad r'=a'.(1+u_{,}')\;;$$

$u_{,}$ et $u_{,}'$ étant des petites quantités. Les angles v et v' différant peu des longitudes moyennes $nt+\varepsilon$, et $n't+\varepsilon'$, nous supposerons

$$v=nt+\varepsilon+v_{,}\;;\qquad v'=n't+\varepsilon'+v_{,}'\;;$$

$v_{,}$ et $v_{,}'$ étant des angles peu considérables. Ainsi, en réduisant R dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de $u_{,}$, $v_{,}$, z, $u_{,}'$, $v_{,}'$ et z'; cette série sera fort convergente. Soit

$$\frac{a}{a'^2}.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)-\{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\tfrac{1}{2}.A^{(0)}+A^{(1)}.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+A^{(2)}.\cos.2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+A^{(3)}.\cos.3(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\&c.;$$

on peut donner à cette série, la forme $\frac{1}{2}.\Sigma.A^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$, la caractéristique Σ des intégrales finies, étant relative au nombre i, et devant s'étendre à tous les nombres entiers depuis $i=-\infty$, jusqu'à $i=\infty$; la valeur $i=0$ étant comprise dans ce nombre infini de valeurs: mais alors, il faut observer que $A^{(-i)}=A^{(i)}$. Cette forme a l'avantage de servir à exprimer d'une manière fort simple, non-seulement la série précédente, mais encore le produit de cette série, par le sinus ou le cosinus d'un angle quelconque $ft+\varpi$; car il est facile de voir que ce produit est égal à

$$\tfrac{1}{2}.\Sigma.A^{(i)}.\begin{matrix}\text{sin.}\\ \text{cos.}\end{matrix}\left\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+ft+\varpi\right\}.$$

Cette propriété nous fournira des expressions très-commodes des perturbations du mouvement des planètes. Soit pareillement

$$\{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\tfrac{1}{2}.\Sigma.B^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$

$B^{(-i)}$ étant égal à $B^{(i)}$. Cela posé, on aura par les théorèmes du n°. 21,

$$\begin{aligned}
R= & \frac{m'}{2}.\Sigma.A^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'}{2}.u_{,}.\Sigma.a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right).\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'}{2}.u_{,}'.\Sigma.a'.\left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right).\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&-\frac{m'}{2}.(v_{,}'-v_{,}).\Sigma.iA^{(i)}.\sin.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'}{4}.u_{,}^2.\Sigma.a^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right).\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'}{2}.u_{,}u_{,}'.\Sigma.aa'.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da\,da'}\right).\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'}{4}.u_{,}'^2.\Sigma.a'^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da'^2}\right).\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&-\frac{m'}{2}.(v_{,}'-v_{,}).u_{,}.\Sigma.ia.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right).\sin.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&-\frac{m'}{2}.(v_{,}'-v_{,}).u_{,}'.\Sigma.ia'.\left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right).\sin.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&-\frac{m'}{4}.(v_{,}'-v_{,})^2.\Sigma.i^2.A^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'.zz'}{a'^3}-\frac{3m'az'^2}{2a'^4}.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\frac{m'.(z'-z)^2}{4}.\Sigma.B^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\
&+\&c.
\end{aligned}$$

Si

Si l'on substitue dans cette expression de R, au lieu de $u_{\prime}$, $u_{\prime}'$ $v_{\prime}$, $v_{\prime}'$, z et z', leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, valeurs qui sont fonctions de sinus et de cosinus des angles $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$, et de leurs multiples; R sera exprimé par une suite infinie de cosinus de la forme $m'k.\cos.(i'n't-int+A)$, i et i' étant des nombres entiers.

Il est visible que l'action des corps m'', m''', &c. sur m, produira dans R, des termes analogues à ceux qui résultent de l'action de m', et que l'on obtiendra, en changeant dans l'expression précédente de R, tout ce qui est relatif à m', dans les mêmes quantités relatives à m'', m''', &c.

Considérons un terme quelconque, $m'k.\cos.(i'n't-int+A)$ de l'expression de R. Si les orbites étoient circulaires, et dans un même plan, on auroit $i'=i$; donc i' ne peut surpasser i, ou en être surpassé, qu'au moyen des sinus ou des cosinus des expressions de $u_{\prime}$, $v_{\prime}$, z, $u_{\prime}'$, $v_{\prime}'$, z', qui en se combinant avec les sinus et les cosinus de l'angle $n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon$, et de ses multiples, produisent des sinus et des cosinus d'angles dans lesquels i' est différent de i.

Si l'on regarde les excentricités et les inclinaisons des orbites, comme des quantités très-petites du premier ordre; il résulte des formules du n°. 22, que dans les expressions de $u_{\prime}$, $v_{\prime}$, z ou rs, s étant la tangente de la latitude de m, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle tel que $f.(nt+\varepsilon)$, est exprimé par une série dont le premier terme est de l'ordre f; le second terme, de l'ordre $f+2$; le troisième terme, de l'ordre $f+4$; et ainsi de suite. Il en est de même du coefficient du sinus ou du cosinus de l'angle $f'.(n't+\varepsilon')$, dans les expressions de $u_{\prime}'$, $v_{\prime}'$, z'. Il suit de-là que i et i' étant supposés positifs, et i' plus grand que i; le coefficient k, dans le terme $m'k.\cos.(i'n't-int+A)$, est de l'ordre $i'-i$, et que dans la série qui l'exprime, le premier terme est de l'ordre $i'-i$, le second terme est de l'ordre $i'-i+2$, et ainsi de suite; en sorte que cette série est fort convergente. Si i étoit plus grand que i', les termes de la série seroient successivement des ordres $i-i'$, $i-i'+2$, &c.

Nommons ϖ la longitude du périhélie de l'orbite de m, et θ

celle de son nœud ; nommons pareillement ϖ' la longitude du périhélie de l'orbite de m', et θ' celle de son nœud ; ces longitudes étant comptées sur un plan très-peu incliné à celui des orbites. Il résulte des formules du n°. 22, que dans les expressions de $u_{,}$, $v_{,}$ et z, l'angle $nt+\varepsilon$ est toujours accompagné de $-\varpi$, ou de $-\theta$; et que dans les expressions de $u_{,}'$, $v_{,}'$ et z', l'angle $n't+\varepsilon'$ est toujours accompagné de $-\varpi'$, ou de $-\theta'$; d'où il suit que le terme $m'k.\cos.(i'n't-int+A)$ est de cette forme,

$$m'k.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta-g'''\theta'),$$

g, g', g'', g''' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et tels que l'on a

$$0=i'-i-g-g'-g''-g'''.$$

Cela résulte encore de ce que la valeur de R et ses différens termes sont indépendans de la position de la droite d'où l'on compte les longitudes. De plus, dans les formules du n°. 22, le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle ϖ, a toujours pour facteur, l'excentricité e de l'orbite de m ; le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle 2ϖ, a pour facteur, le quarré e^2, de cette excentricité, et ainsi de suite. Pareillement, le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle θ, a pour facteur $\text{tang}.\frac{1}{2}\varphi$, φ étant l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan fixe. Le coefficient du sinus et du cosinus de l'angle 2θ, a pour facteur $\text{tang}.^2\frac{1}{2}\varphi$, et ainsi du reste ; d'où il résulte que le coefficient k a pour facteur, $e^g.e'^{g'}.\text{tang}.^{g''}(\frac{1}{2}\varphi).\text{tang}.^{g'''}(\frac{1}{2}\varphi')$; les nombres g, g', g'', g''' étant pris positivement dans les exposans de ce facteur. Si tous ces nombres sont positifs en eux-mêmes, ce facteur sera de l'ordre $i'-i$, en vertu de l'équation

$$0=i'-i-g-g'-g''-g''' ;$$

mais si l'un d'eux, tel que g, est négatif et égal à $-g$, ce facteur sera de l'ordre $i'-i+2g$. En ne conservant donc, parmi les termes de R, que ceux qui dépendans de l'angle $i'n't-int$, sont de l'ordre $i'-i$, et en rejetant tous ceux qui dépendans du même angle, sont des ordres $i'-i+2$, $i'-i+4$, &c. ; l'expression de R sera composée de termes de la forme

$$H.e^g.e'^{g'}.\text{tang}.^{g''}(\tfrac{1}{2}\varphi).\text{tang}.^{g'''}(\tfrac{1}{2}\varphi').\cos.(i'n't-int$$
$$+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g.\varpi-g'.\varpi'-g''.\theta-g'''.\theta'),$$

H étant un coefficient indépendant des excentricités et des inclinaisons des orbites, et les nombres g, g', g'', g''' étant tous positifs, et tels que leur somme soit égale à $i'-i$.

Si l'on substitue dans R, $a.(1+u_{\prime})$, au lieu de r, on aura

$$r.\left(\frac{dR}{dr}\right)=a.\left(\frac{dR}{da}\right).$$

Si dans cette même fonction, on substitue, au lieu de $u_{\prime}$, $v_{\prime}$ et z, leurs valeurs données par les formules du n°. 22, on aura

$$\left(\frac{dR}{dv}\right)=\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right),$$

pourvu que l'on suppose $\varepsilon-\varpi$ et $\varepsilon-\theta$ constans, dans la différentielle de R, prise par rapport à ε; car alors $u_{\prime}$, $v_{\prime}$ et z sont constans dans cette différentielle, et comme on a $v=nt+\varepsilon+v_{\prime}$, il est clair que l'équation précédente a lieu. On pourra donc obtenir facilement les valeurs de $r.\left(\frac{dR}{dr}\right)$ et de $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, qui entrent dans les équations différentielles des nos. précédens, lorsque l'on aura la valeur de R développée en série de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps t. La différentielle dR sera pareillement très-facile à déterminer, en observant de ne faire varier dans R, que l'angle nt, et de supposer l'angle $n't$ constant; puisque dR est la différence de R, prise en supposant constantes, les coordonnées de m', qui sont fonctions de $n't$.

49. La difficulté du développement de R en série, se réduit à former les quantités $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, et leurs différences prises, soit relativement à a, soit relativement à a'. Pour cela, considérons généralement la fonction $(a^2-2aa'.\cos.\theta+a'^2)^{-s}$, et développons-la suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples. Si l'on fait $\frac{a}{a'}=\alpha$, elle deviendra $a'^{-2s}.\{1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2\}^{-s}$. Soit

$$(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2)^{-s}=\tfrac{1}{2}.b_s^{(0)}+b_s^{(1)}.\cos.\theta+b_s^{(2)}.\cos.2\theta$$
$$+b_s^{(3)}.\cos.3\theta+\ \&c.$$

$b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, &c., étant des fonctions de α et de s. Si l'on prend les différences logarithmiques des deux membres de cette équation, par rapport à la variable θ, on aura

$$\frac{-2s.\alpha.\sin.\theta}{1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2}=\frac{-b_s^{(1)}.\sin.\theta-2b_s^{(2)}.\sin.2\theta-\&c.}{\frac{1}{2}.b_s^{(0)}+b_s^{(1)}.\cos.\theta+b_s^{(2)}.\cos.2\theta+\&c.}.$$

En multipliant en croix, et comparant les cosinus semblables, on trouve généralement

$$b_s^{(i)}=\frac{(i-1).(1+\alpha^2).b_s^{(i-1)}-(i+s-2).\alpha.b_s^{(i-2)}}{(i-s).\alpha}; \qquad (a)$$

on aura ainsi, $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, &c., lorsque l'on connoîtra $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$.

Si l'on change s en $s+1$, dans l'expression précédente de $(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2)^{-s}$, on aura

$$(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2)^{-s-1}=\tfrac{1}{2}.b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)}.\cos.\theta+b_{s+1}^{(2)}.\cos.2\theta$$
$$+b_{s+1}^{(3)}.\cos.3\theta+\&c.$$

En multipliant les deux membres de cette équation, par $1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2$, et en substituant, au lieu de $(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2)^{-s}$, sa valeur en série; on aura

$$\tfrac{1}{2}.b_s^{(0)}+b_s^{(1)}.\cos.\theta+b_s^{(2)}.\cos.2\theta+\&c$$
$$=(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2).\left\{\tfrac{1}{2}.b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)}.\cos.\theta+b_{s+1}^{(2)}.\cos.2\theta+b_{s+1}^{(3)}.\cos.3\theta+\&c.\right\};$$

d'où l'on tire, en comparant les cosinus semblables,

$$b_s^{(i)}=(1+\alpha^2).b_{s+1}^{(i)}-\alpha.b_{s+1}^{(i-1)}-\alpha.b_{s+1}^{(i+1)}.$$

La formule (a) donne

$$b_{s+1}^{(i+1)}=\frac{i.(1+\alpha^2).b_{s+1}^{(i)}-(i+s).\alpha b_{s+1}^{(i-1)}}{(i-s).\alpha};$$

l'expression précédente de $b_s^{(i)}$, deviendra ainsi,

$$b_s^{(i)} = \frac{2s.\alpha.b_{s+1}^{(i-1)} - s.(1+\alpha^2).b_{s+1}^{(i)}}{i-s}.$$

En changeant i en $i+1$, dans cette équation, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{2s.\alpha.b_{s+1}^{(i)} - s.(1+\alpha^2).b_{s+1}^{(i+1)}}{i-s+1};$$

et si l'on substitue au lieu de $b_{s+1}^{(i+1)}$, sa valeur précédente, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s.(i+s).\alpha.(1+\alpha^2).b_{s+1}^{(i-1)} + s.\{2.(i-s).\alpha^2 - i.(1+\alpha^2)^2\}.b_{s+1}^{(i)}}{(i-s).(i-s+1).\alpha}.$$

Ces deux expressions de $b_s^{(i)}$, et de $b_s^{(i+1)}$, donnent

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{(i+s)}{s}.(1+\alpha^2).b_s^{(i)} - 2.\frac{(i-s+1)}{s}.\alpha b_s^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2}; \quad (b)$$

en substituant au lieu de $b_s^{(i+1)}$, sa valeur tirée de l'équation (a), on aura

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{(s-i)}{s}.(1+\alpha^2).b_s^{(i)} + \frac{2.(i+s-1)}{s}.\alpha.b_s^{(i-1)}}{(1-\alpha^2)^2}; \quad (c)$$

expression que l'on peut conclure de la précédente, en y changeant i dans $-i$, et en observant que $b^{(i)} = b^{(-i)}$. On aura donc, au moyen de cette formule, les valeurs de $b_{s+1}^{(0)}$; $b_{s+1}^{(1)}$, $b_{s+1}^{(2)}$, &c., lorsque celles de $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, &c., seront connues.

Nommons pour abréger, λ la fonction $1-2\alpha.\cos\theta+\alpha^2$. Si l'on différentie par rapport à α, l'équation

$$\lambda^{-s} = \tfrac{1}{2}.b_s^{(0)} + b_s^{(1)}.\cos.\theta + b_s^{(2)}.\cos.2\theta + \&c.;$$

on aura

$$-2s.(\alpha - \cos.\theta).\lambda^{-s-1} = \tfrac{1}{2}.\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}.\cos.\theta + \frac{db_s^{(2)}}{d\alpha}.\cos.2\theta + \&c.;$$

mais on a

$$-\alpha + \cos.\theta = \frac{1-\alpha^2-\lambda}{2\alpha};$$

on aura donc

$$\frac{s.(1-\alpha^2)}{\alpha}.\lambda^{-s-1}-\frac{s.\lambda^{-s}}{\alpha}=\tfrac{1}{2}.\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}+\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}.\cos.\theta+\&c.;$$

d'où l'on tire généralement,

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}=\frac{s.(1-\alpha^2)}{\alpha}.b_{s+1}^{(i)}-\frac{s.b_s^{(i)}}{\alpha}.$$

En substituant au lieu de $b_{s+1}^{(i)}$, sa valeur donnée par la formule (b); on aura

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}=\left\{\frac{i+(i+2s).\alpha^2}{\alpha.(1-\alpha^2)}\right\}.b_s^{(i)}-\frac{2.(i-s+1)}{1-\alpha^2}.b_s^{(i+1)}.$$

Si l'on différentie cette équation, on aura

$$\frac{ddb_s^{(i)}}{d\alpha^2}=\left\{\frac{i+(i+2s).\alpha^2}{\alpha.(1-\alpha^2)}\right\}.\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}+\left\{\frac{2.(i+s).(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{i}{\alpha^2}\right\}.b_s^{(i)}$$
$$-\frac{2.(i-s+1)}{1-\alpha^2}.\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha}-\frac{4.(i-s+1).\alpha}{(1-\alpha^2)^2}.b_s^{(i+1)}.$$

En différentiant encore, on aura

$$\frac{d^3.b_s^{(i)}}{d\alpha^3}=\left\{\frac{i+(i+2s).\alpha^2}{\alpha.(1-\alpha^2)}\right\}.\frac{ddb_s^{(i)}}{d\alpha^2}+2.\left\{\frac{2.(i+s).(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{i}{\alpha^2}\right\}.\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}$$
$$+\left\{\frac{4.(i+s).\alpha.(3+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}+\frac{2i}{\alpha^3}\right\}.b_s^{(i)}-\frac{2.(i-s+1)}{1-\alpha^2}.\frac{dd.b_s^{(i+1)}}{d\alpha^2}$$
$$-\frac{8.(i-s+1).\alpha}{(1-\alpha^2)^2}.\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha}-\frac{4.(i-s+1).(1+3\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3}.b_s^{(i+1)}.$$

On voit ainsi que pour déterminer les valeurs de $b_s^{(i)}$ et de ses différences successives, il suffit de connoître celles de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$. On déterminera ces deux quantités, de la manière suivante.

Si l'on nomme c, le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on pourra mettre l'expression de λ^{-s}, sous cette forme,

$$\lambda^{-s}=\left(1-\alpha.c^{\theta.\sqrt{-1}}\right)^{-s}.\left(1-\alpha.c^{-\theta.\sqrt{-1}}\right)^{-s}.$$

En développant le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $c^{\theta.\sqrt{-1}}$, et de $c^{-\theta.\sqrt{-1}}$; il est visible que les deux exponentielles $c^{i\theta.\sqrt{-1}}$, et $c^{-i\theta.\sqrt{-1}}$ auront le même coefficient que nous désignerons par k. La somme des deux termes $k.c^{i\theta.\sqrt{-1}}$, et $k.c^{-i\theta.\sqrt{-1}}$ est $2k.\cos.i\theta$; ce sera la valeur de $b_s^{(i)}.\cos.i\theta$; on aura donc $b_s^{(i)}=2k$. Maintenant l'expression de λ^{-s} est égale au produit des deux séries

$$1+s\alpha.c^{\theta.\sqrt{-1}}+\frac{s.(s+1)}{1.2}.\alpha^2.c^{2\theta.\sqrt{-1}}+\&c.;$$

$$1+s\alpha.c^{-\theta.\sqrt{-1}}+\frac{s.(s+1)}{1.2}.\alpha^2.c^{-2\theta.\sqrt{-1}}+\&c.;$$

en multipliant donc ces deux séries l'une par l'autre, on aura dans le cas de $i=0$,

$$k=1+s^2.\alpha^2+\left(\frac{s.(s+1)}{1.2}\right)^2.\alpha^4+\&c.;$$

et dans le cas de $i=1$,

$$k=\alpha.\left\{s+s.\frac{s.(s+1)}{1.2}.\alpha^2+\frac{s.(s+1)}{1.2}.\frac{s.(s+1).(s+2)}{1.2.3}.\alpha^4+\&c.\right\};$$

partant

$$b_s^{(0)}=2\;.\left\{1+s^2.\alpha^2+\left(\frac{s.(s+1)}{1.2}\right)^2.\alpha^4+\left(\frac{s.(s+1).(s+2)}{1.2.3}\right)^2.\alpha^6+\&c.\right\}$$

$$b_s^{(1)}=2\alpha.\left\{s+s.\frac{s.(s+1)}{1.2}.\alpha^2+\frac{s.(s+1)}{1.2}.\frac{s.(s+1).(s+2)}{1.2.3}.\alpha^4+\&c.\right\}.$$

Pour que ces séries soient convergentes, il faut que α soit moindre que l'unité; c'est ce que l'on peut toujours faire, en prenant pour α, le rapport de la plus petite des distances a et a', à la plus grande; ainsi ayant supposé $\alpha=\frac{a}{a'}$, nous supposerons a plus petit que a'.

Dans la théorie du mouvement des corps m, m', m'', &c., on a besoin de connoître les valeurs de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$, lorsque $s=\frac{1}{2}$ et $s=\frac{3}{2}$. Dans ces deux cas, ces valeurs sont peu convergentes, si α n'est pas une petite fraction. Ces séries convergent avec plus de rapidité, lorsque $s = -\frac{1}{2}$, et l'on a

$$\tfrac{1}{2} b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 . \alpha^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 . \alpha^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 . \alpha^6 + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 . \alpha^8 + \&c.$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\alpha . \left\{ 1 - \frac{1.1}{2.4} . \alpha^2 - \frac{1}{4} . \frac{1.1.3}{2.4.6} . \alpha^4 - \frac{1.3}{4.6} . \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} . \alpha^6 - \frac{1.3.5}{4.6.8} . \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} . \alpha^8 - \&c. \right\}.$$

Dans la théorie des planètes et des satellites, il suffira de prendre la somme des onze ou douze premiers termes, en négligeant les termes suivans, ou plus exactement, en les sommant comme une progression géométrique dont la raison est $1 - \alpha^2$. Lorsque l'on aura ainsi déterminé $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, on aura $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ en faisant $i = 0$, et $s = -\frac{1}{2}$, dans la formule (b), et l'on trouvera

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1 + \alpha^2) . b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 6\,\alpha . b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Si dans la formule (c), on suppose $i = 1$, et $s = -\frac{1}{2}$, on aura

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2\,\alpha . b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 3 . (1 + \alpha^2) . b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Au moyen de ces valeurs de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, on aura par les formules précédentes, les valeurs de $b^{(i)}_{\frac{1}{2}}$, et de ses différences partielles, quel que soit le nombre i; et l'on en conclura les valeurs de $b^{(i)}_{\frac{3}{2}}$, et de ses différences. Les valeurs de $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ peuvent être déterminées fort simplement, par les formules suivantes;

$$b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = \frac{b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}\,; \qquad b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = -3 . \frac{b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Maintenant, pour avoir les quantités $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, &c., et leurs différences; on observera que par le n°. précédent, la série

$$\tfrac{1}{2} . A^{(0)} + A^{(1)} . \cos.\theta + A^{(2)} . \cos. 2\theta + \&c.,$$

résulte

résulte du développement de la fonction

$$\frac{a\cos.\theta}{a'^2}-(a^2-2aa'.\cos.\theta+a'^2)^{-\frac{1}{2}},$$

dans une suite de cosinus de l'angle θ et de ses multiples : en faisant $\frac{a}{a'}=\alpha$, cette même fonction se réduit à

$$-\frac{1}{2a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(0)}+\left(\frac{a}{a'^2}-\frac{1}{a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\right).\cos.\theta-\frac{1}{a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(2)}.\cos.2\theta-\&c.;$$

ce qui donne généralement

$$A^{(i)}=-\frac{1}{a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(i)};$$

lorsque i est zéro, ou plus grand que 1, abstraction faite du signe. Dans le cas de $i=1$, on a

$$A^{(1)}=\frac{a}{a'^2}-\frac{1}{a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(1)}.$$

On a ensuite,

$$\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)=-\frac{1}{a'}.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}.\left(\frac{d\alpha}{da}\right);$$

or on a $\left(\frac{d\alpha}{da}\right)=\frac{1}{a'}$; partant

$$\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)=-\frac{1}{a'^2}.\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha};$$

et dans le cas de $i=1$, on a

$$\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)=\frac{1}{a'^2}.\left\{1-\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right\}.$$

Enfin, on a, dans le cas même de $i=1$,

$$\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right)=-\frac{1}{a'^3}.\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(\,)}}{d\alpha^2};$$

$$\left(\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\right)=-\frac{1}{a'^4}.\frac{d^3.b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3};$$

&c.

Pour avoir les différences de $A^{(i)}$ relatives à a', on observera que $A^{(i)}$ étant une fonction homogène en a et a', de la dimension -1, on a par la nature de ce genre de fonctions,

$$a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+a'.\left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right)=-A^{(i)};$$

d'où l'on tire,

$$a'.\left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right)=-A^{(i)}-a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right);$$

$$a'.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da\,da'}\right)=-2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)-a.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right);$$

$$a'^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da'^2}\right)=\quad 2.A^{(i)}+4a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+a^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right);$$

$$a'^2.\left(\frac{d^3A^{(i)}}{da'^2da}\right)=\quad 6.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+6a.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right)+a^2.\left(\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\right);$$

$$a'^3.\left(\frac{d^3A^{(i)}}{da'^3}\right)=-6.A^{(i)}-18a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)-9a^2.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right)-a^3.\left(\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\right);$$

&c.

On aura $B^{(i)}$ et ses différences, en observant que par le n°. précédent, la série

$$\tfrac{1}{2}.B^{(0)}+B^{(1)}.\cos.\theta+B^{(2)}.\cos.2\theta+\text{\&c.},$$

est le développement de la fonction $a'^{-3}.(1-2\alpha.\cos.\theta+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$, suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples; or cette fonction ainsi développée, est égale à

$$a'^{-3}.\left\{\tfrac{1}{2}.b_{\frac{3}{2}}^{(0)}+b_{\frac{3}{2}}^{(1)}.\cos.\theta+b_{\frac{3}{2}}^{(2)}.\cos.2\theta+\text{\&c.}\right\};$$

on a donc généralement;

$$B^{(i)}=\frac{1}{a'^3}.b_{\frac{3}{2}}^{(i)};$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dB^{(i)}}{da}\right)=\frac{1}{a'^4}.\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha};\qquad \left(\frac{ddB^{(i)}}{da^2}\right)=\frac{1}{a'^5}.\frac{ddb_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2};\quad \text{\&c.}$$

De plus, $B^{(i)}$ étant une fonction homogène de a et de a', de la dimension -3, on a

$$a.\left(\frac{dB^{(i)}}{da}\right)+a'.\left(\frac{dB^{(i)}}{da'}\right)=-3B^{(i)};$$

d'où il est facile de conclure les différences partielles de $B^{(i)}$ prises relativement à a', au moyen de ses différences partielles en a.

Dans la théorie des perturbations de m', par l'action de m, les valeurs de $A^{(i)}$ et de $B^{(i)}$, sont les mêmes que ci-dessus, à l'exception de $A^{(1)}$, qui dans cette théorie devient $\frac{a'}{a^2}-\frac{1}{a'}.b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$. Ainsi, le calcul des valeurs de $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, et de leurs différences, sert à-la-fois pour les théories des deux corps m et m'.

50. Après cette digression sur le développement de R en série, reprenons les équations différentielles (X'), (Y) et (Z') des nos. 46 et 47, et déterminons à leur moyen, les valeurs de δr, δv, et δs, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Si dans les orbes elliptiques, on suppose

$$r=a.(1+u_{,})\;; \qquad r'=a'.(1+u'_{,})\;;$$
$$v=nt+\varepsilon+v_{,}\;; \qquad v'=n't+\varepsilon'+v'_{,}\;;$$

on aura par le n°. 22,

$$u_{,}=-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)\;; \qquad u'_{,}=-e'.\cos.(n't+\varepsilon'-\varpi')\;;$$
$$v_{,}=2e.(\sin.nt+\varepsilon-\varpi)\;; \qquad v'_{,}=2e'.\sin.(n't+\varepsilon'-\varpi')\;;$$

$nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$, étant les longitudes moyennes de m et de m'; a et a' étant les demi-grands axes de leurs orbites; e et e' étant les rapports des excentricités aux demi-grands axes; enfin, ϖ et ϖ' étant les longitudes de leurs périhélies. Toutes ces longitudes peuvent être rapportées indifféremment aux plans mêmes des orbites, ou à un plan qui leur est fort peu incliné; puisque l'on néglige les quantités de l'ordre des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. En substituant les valeurs précédentes, dans l'expression de R du n°. 48, on aura

Mm

$$R = \frac{m'}{2} . \Sigma . A^{(i)} . \cos . i . (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ a . \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) + 2i . A^{(i)} \right\} . e . \cos . \{ i . (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi \}$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ a' . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) - 2(i-1) . A^{(i-1)} \right\} . e' . \cos . \{ i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi' \};$$

le signe Σ des intégrales finies, s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de i, en y comprenant la valeur $i = 0$. De-là on tire,

$$2 . \int \mathrm{d}R + r . \left(\frac{dR}{dr} \right) =$$

$$2m' . g + \frac{m'}{2} . a . \left(\frac{dA^{(0)}}{da} \right) + \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ a . \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) + \frac{2n}{n - n'} . A^{(i)} \right\} . \cos . i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} . \left\{ a^2 . \left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2} \right) + 3a . \left(\frac{dA^{(0)}}{da} \right) \right\} . e . \cos . (nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$- \frac{m'}{2} . \left\{ aa' . \left(\frac{ddA^{(1)}}{da\, da'} \right) + 2a . \left(\frac{dA^{(1)}}{da} \right) + 2a' . \left(\frac{dA^{(1)}}{da'} \right) + 4A^{(1)} \right\} . e' . \cos . (nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} a^2 . \left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2} \right) + (2i+1) . a . \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) \\ + \frac{2 . (i-1) . n}{i . (n - n') - n} . \left\{ a . \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) + 2i . A^{(i)} \right\} \end{array} \right\} . e . \cos . \{ i . (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi \}$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} aa' . \left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da\, da'} \right) - 2 . (i-1) a . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da} \right) \\ + \frac{2 . (i-1) . n}{i . (n - n') - n} . \left\{ a' . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'} \right) - 2(i-1) . A^{(i-1)} \right\} \end{array} \right\} . e' . \cos . \{ i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi' \};$$

le signe intégral Σ s'étendant, comme dans ce qui suit, à toutes les valeurs entières, positives ou négatives de i, la seule valeur $i = 0$, étant exceptée, parce que nous avons fait sortir hors de ce signe, les termes dans lesquels $i = 0$: $m'g$ est une constante ajoutée à l'intégrale $\int \mathrm{d}R$. En faisant donc

$$C = \tfrac{1}{2} a^3 . \left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2} \right) + 3a^2 . \left(\frac{dA^{(0)}}{da} \right) + 6ag;$$

$$D = \tfrac{1}{2} a^2 a' . \left(\frac{ddA^{(1)}}{da\, da'} \right) + a^2 . \left(\frac{dA^{(1)}}{da} \right) + aa' . \left(\frac{dA^{(1)}}{da'} \right) + 2aA^{(1)};$$

$$C^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{ddA^{(i)}}{da^2}\right) + \frac{(2i+1)}{2}.a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)$$
$$+\frac{\{i(n-n')-3n\}}{2.\{i.(n-n')-n\}}.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}$$
$$+\frac{(i-1).n}{i.(n-n')-n}.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+2i.aA^{(i)}\right\};$$

$$D^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^2a'.\left(\frac{ddA^{(i-1)}}{da\,da'}\right)-(i-1).a^2.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$$
$$+\frac{(i-1).n}{i.(n-n')-n}.\left\{aa'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)-2.(i-1)aA^{(i-1)}\right\};$$

en prenant ensuite pour unité, la somme des masses $M+m$, et observant que par le n°. 20, $\frac{M+m}{a^3}=n^2$; l'équation (X') deviendra

$$0=\frac{d^2.\delta u}{dt^2}+n^2.\delta u-2n^2m'ag-\frac{n^2m'}{2}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$
$$-\frac{n^2m'}{2}.\Sigma.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+n^2m'.C.e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+n^2m'.D.e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$+n^2m'.\Sigma.C^{(i)}.e.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}$$
$$+n^2m'.\Sigma.D^{(i)}.e'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\};$$

et en intégrant,

$$\delta u=2m'ag+\frac{m'}{2}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$
$$-\frac{m'}{2}.n^2.\Sigma.\frac{\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}}{i^2.(n-n')^2-n^2}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+m'.f_{,}.e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+m'.f'_{,}.e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$-\frac{m'}{2}.C.nt.e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)-\frac{m'}{2}.D.nt.e'.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$+m'.\Sigma.\frac{C^{(i)}.n^2}{\{i(n-n')-n\}^2-n^2}.e.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}$$
$$+m'.\Sigma.\frac{D^{(i)}.n^2}{\{i(n-n')-n\}^2-n^2}.e'.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\},$$

$f_{,}$ et $f'_{,}$ étant deux arbitraires. L'expression de δr en δu, trouvée dans le n°. 47, donnera

$$\frac{\delta r}{a} = -2m'.ag - \frac{m'}{2}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

$$+\frac{m'}{2}.n^2.\Sigma.\left\{\frac{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}}{i^2.(n-n')^2-n^2}\right\}.\cos.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$-m'.fe.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi) - m'.f'e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+\tfrac{1}{2}.m'C.nt.e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{1}{2}.m'D.nt.e'.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+m'.n^2.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}}{i^2.(n-n')^2-n^2}-\dfrac{C^{(i)}}{\{i(n-n')-n\}^2-n^2}\right\}\\ \times e.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\}\end{array}\right\}$$

$$-m'.n^2.\Sigma.\frac{D^{(i)}}{\{i(n-n')-n\}^2-n^2}.e'.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\},$$

f et f' étant des arbitraires dépendantes de $f_{,}$ et de $f'_{,}$.

Cette valeur de δr, substituée dans la formule (Y) du n°. 46, donnera δv, ou les perturbations du mouvement de la planète en longitude; mais on doit observer que nt exprimant le moyen mouvement de m, le terme proportionnel au temps t, doit disparoître de l'expression de δv. Cette condition détermine la constante g, et l'on trouve

$$g = -\tfrac{1}{3}a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).$$

Nous aurions pu nous dispenser d'introduire dans la valeur de δr, les arbitraires f et f', puisqu'elles peuvent être censées comprises dans les élémens e, et ϖ du mouvement elliptique; mais alors, l'expression de δv, auroit renfermé des termes dépendans de l'anomalie moyenne, et qui n'auroient point été compris dans ceux que donne le mouvement elliptique : or il est plus commode de faire disparoître ces termes, de l'expression de la longitude, pour les introduire dans l'expression du rayon vecteur; nous déterminerons ainsi $f_{,}$ et $f'_{,}$ de manière à remplir cette condition. Cela posé, si l'on substitue au lieu de $a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)$ sa valeur $-A^{(i-1)}-a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$, on aura

$$C = a^2 \cdot \left(\frac{d\,A^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$D = a\,A^{(1)} - a^2 \cdot \left(\frac{d\,A^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(1)}}{da^2}\right);$$

$$D^{(i)} = \frac{(i-1).(2i-1).n}{n - i.(n-n')} \cdot a\,A^{(i-1)} + \frac{\{i^2.(n-n')-n\}}{n-i.(n-n')} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{d\,A^{(i-1)}}{da}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(i-1)}}{da^2}\right);$$

$$f = \tfrac{2}{3} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{4} a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$f' = \tfrac{1}{4} \cdot \left\{a.A^{(1)} - a^2 \cdot \left(\frac{d\,A^{(1)}}{da}\right) + a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(1)}}{da^2}\right)\right\};$$

soit de plus,

$$E^{(i)} = -\frac{3n}{n-n'} \cdot a\,A^{(i)} + \frac{\{i^2.(n-n').\{n+i.(n-n')\} - 3n^2\}}{i^2.(n-n')^2 - n^2}$$
$$\times \left\{a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a\,A^{(i)}\right\} + \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{dd\,A^{(i)}}{da^2}\right);$$

$$F^{(i)} = \frac{(i-1).n}{n-n'} \cdot a\,A^{(i)} + \frac{\left\{\frac{in}{2} \cdot \{n+i(n-n')\} - 3n^2\right\}}{i^2.(n-n')^2 - n^2}$$
$$\times \left\{a^2 \cdot \left(\frac{d\,A^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a\,A^{(i)}\right\} - \frac{2n^2.E^{(i)}}{n^2 - \{n-i.(n-n')\}^2};$$

$$G^{(i)} = \frac{(i-1).(2i-1).na.A^{(i-1)} + (i-1).na^2.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)}{2.\{n-i(n-n')\}}$$
$$- \frac{2n^2.D^{(i)}}{n^2 - \{n-i(n-n')\}^2};$$

on aura

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{m'.n^2}{2} \cdot \Sigma \cdot \frac{\left\{a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a\,A^{(i)}\right\}}{i^2.(n-n')^2 - n^2} \cdot \cos.i.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$- m'.fe.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi) - m'.f'e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$+ \tfrac{1}{2} m'C.nt.e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2} m'.D.nt.e'.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+n^2.m'.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{E^{(i)}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.e.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\} \\ +\dfrac{D^{(i)}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.e'.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\}\end{array}\right\};$$

$$\delta v=\frac{m'}{2}.\Sigma.\left\{\frac{n^2}{i.(n-n')^2}.a.A^{(i)}+\frac{2n^3.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}}{i(n-n').\{i^2.(n-n')^2-n^2\}}\right\}.\sin.i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$+m'.C.nt.e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)+m'D.nt.e'.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+nm'.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{F^{(i)}}{n-i(n-n')}.e.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\} \\ +\dfrac{G^{(i)}}{n-i(n-n')}.e'.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'\}\end{array}\right\};$$

le signe intégral Σ s'étendant dans ces expressions, à toutes les valeurs entières positives et négatives de i, la seule valeur $i=0$ étant exceptée.

On doit observer ici, que dans le cas même où la série représentée par $\Sigma.A^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ est peu convergente, ces expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv, le deviennent par les diviseurs qu'elles acquièrent. Cette remarque est d'autant plus importante, que sans elle, il eût été impossible d'exprimer analytiquement, les perturbations réciproques des planètes, dont les rapports des distances au soleil, diffèrent peu de l'unité.

Ces expressions peuvent être mises sous la forme suivante qui nous sera utile dans la suite; soit

$$h=e.\sin.\varpi\,; \qquad h'=e'.\sin.\varpi'\,;$$
$$l=e.\cos.\varpi\,; \qquad l'=e'.\cos.\varpi'\,;$$

on aura

$$\frac{\delta r}{a}=\frac{m'}{6}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\frac{m'n^2}{2}.\Sigma.\left\{\frac{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.a.A^{(i)}}{i^2.(n-n')^2-n^2}\right\}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$-m'.(hf+h'f').\cos.(nt+\varepsilon)-m'.(lf+l'f').\sin.(nt+\varepsilon)$$

$$+\frac{m'}{2}.\{l.C+l'D\}.nt.\sin.(nt+\varepsilon)-\frac{m'}{2}.\{h.C+h'.D\}.nt.\cos.(nt+\varepsilon)$$

+

$$+n^2 m'.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\{hE^{(i)}+h'.D^{(i)}\}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\} \\ +\dfrac{\{l.E^{(i)}+l'.D^{(i)}\}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\}\end{array}\right\};$$

$$\delta v=\frac{m'}{2}.\Sigma.\left\{\frac{n^2}{i.(n-n')^2}.aA^{(i)}+2n^3.\frac{\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right\}}{i.(n-n').\{i^2.(n-n')^2-n^2\}}\right\}.\sin.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$+m'.\{h.C+h'.D\}.nt.\sin.(nt+\varepsilon)+m'.\{l.C+l'.D\}.nt.\cos.(nt+\varepsilon)$$

$$+n.m'.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(l.F^{(i)}+l'.G^{(i)})}{n-i.(n-n')}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\} \\ -\dfrac{\{hF^{(i)}+h'G^{(i)}\}}{n-i.(n-n')}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\}\end{array}\right\};$$

en réunissant ces expressions de δr et de δv, aux valeurs de r et de v, relatives au mouvement elliptique, on aura les valeurs entières du rayon vecteur de m, et de son mouvement en longitude.

51. Considérons présentement, le mouvement de m, en latitude. Pour cela, reprenons la formule (Z') du n°. 47. Si l'on néglige le produit des inclinaisons par les excentricités des orbites, elle devient

$$0=\frac{d^2\delta u'}{dt^2}+n^2.\delta u'-\frac{1}{a^2}.\left(\frac{dR}{dz}\right);$$

l'expression de R du n°. 48, donne, en prenant pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de m,

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)=\frac{m'z'}{a'^3}-\frac{m'z'}{2}.\Sigma.B^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$

la valeur de i s'étendant à tous les nombres entiers positifs et négatifs, en y comprenant même $i=0$. Soit γ, la tangente de l'inclinaison de l'orbite de m', sur l'orbite primitive de m, et Π la longitude du nœud ascendant de la première de ces orbites, sur la seconde; on aura à très-peu près,

$$z'=a'.\gamma.\sin.(n't+\varepsilon'-\Pi);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)=\frac{m'}{a'^2}.\gamma.\sin.(n't+\varepsilon'-\Pi)-\frac{m'}{2}.a'B^{(1)}.\gamma.\sin.(nt+\varepsilon-\Pi)$$
$$-\frac{m'}{2}.a'.\Sigma.B^{(i-1)}.\gamma.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\Pi\},$$

la valeur de i s'étendant ici, comme dans ce qui va suivre, à tous les nombres entiers positifs et négatifs, la seule valeur $i=0$ étant exceptée. L'équation différentielle en $\delta u'$, deviendra donc, en multipliant la valeur de $\left(\frac{dR}{dz}\right)$, par n^2a^3 qui est égal à l'unité,

$$0=\frac{dd.\delta u'}{dt^2}+n^2.\delta u'-m'.n^2.\frac{a}{a'^2}.\gamma.\sin.(n't+\varepsilon'-\Pi)$$
$$+\frac{m'.n^2}{2}.aa'.B^{(1)}.\gamma\sin.(nt+\varepsilon-\Pi)$$
$$+\frac{m'.n^2}{2}.aa'.\Sigma.B^{(i-1)}.\gamma.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\Pi\};$$

d'où l'on tire en intégrant, et en observant que par le n°. 47, $\delta s=-a.\delta u'$,

$$\delta s=-\frac{m'.n^2}{n^2-n'^2}.\frac{a^2}{a'^2}.\gamma.\sin.(n't+\varepsilon'-\Pi)$$
$$-\frac{m'.a^2a'}{4}.B^{(1)}.nt.\gamma.\cos.(nt+\varepsilon-\Pi)$$
$$+\frac{m'.n^2.a^2a'}{2}.\Sigma.\frac{B^{(i-1)}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.\gamma.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\Pi\}.$$

Pour avoir la latitude de m, au-dessus d'un plan fixe peu incliné à celui de son orbite primitive; en nommant φ l'inclinaison de cette orbite sur le plan fixe, et θ la longitude de son nœud ascendant sur le même plan; il suffira d'ajouter à δs, la quantité tang. φ. sin. $(v-\theta)$, ou tang. φ. sin. $(nt+\varepsilon-\theta)$, en négligeant l'excentricité de l'orbite. Nommons φ' et θ', ce que deviennent φ et θ relativement à m'. Si m étoit en mouvement sur l'orbite primitive de m', la tangente de sa latitude seroit tang. φ'. sin. $(nt+\varepsilon-\theta')$; elle seroit, tang. φ. sin. $(nt+\varepsilon-\theta)$, si m continuoit de se mouvoir sur son orbite primitive. La différence de ces deux tangentes est à très-peu près la tangente de la latitude de m, au-dessus du plan de son orbite primitive, en le supposant mû sur le plan de l'orbite primitive de m'; on a donc

$$\text{tang.}\varphi'.\sin.(nt+\varepsilon-\theta')-\text{tang.}\varphi.\sin.(nt+\varepsilon-\theta)=\gamma.\sin.(nt+\varepsilon-\Pi).$$

Soit

$$\text{tang.}\varphi.\sin.\theta=p\ ;\qquad \text{tang.}\varphi'.\sin.\theta'=p'\ ;$$
$$\text{tang.}\varphi.\cos.\theta=q\ ;\qquad \text{tang.}\varphi'.\cos.\theta'=q'\ ;$$

on aura

$$\gamma.\sin.\Pi=p'-p\ ;\qquad \gamma.\cos.\Pi=q'-q\ ;$$

et par conséquent, si l'on désigne par s, la latitude de m au-dessus du plan fixe, on aura à très-peu près,

$$\begin{aligned}
s=\;&q.\sin(nt+\varepsilon)-p.\cos.(nt+\varepsilon)\\
&-\frac{m'.a^2a'}{4}.(p'-p).B^{(1)}.nt.\sin.(nt+\varepsilon)\\
&-\frac{m'a^2a'}{4}.(q'-q).B^{(1)}.nt.\cos.(nt+\varepsilon)\\
&-\frac{m'.n^2}{n^2-n'^2}.\frac{a^2}{a'^2}.\left\{(q'-q).\sin.(n't+\varepsilon')-(p'-p).\cos.(n't+\varepsilon')\right\}\\
&+\frac{m'.n^2.a^2a'}{2}.\Sigma.\left\{\begin{aligned}&\frac{(q'-q).B^{(i-1)}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.\sin.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\}\\ &\frac{-(p'-p).B^{(i-1)}}{n^2-\{n-i(n-n')\}^2}.\cos.\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\}\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}$$

52. Rassemblons présentement, les formules que nous venons de trouver. Nommons (r) et (v), les parties du rayon vecteur et de la longitude v sur l'orbite, qui dépendent du mouvement elliptique; on aura

$$r=(r)+\delta r\ ;\qquad v=(v)+\delta v.$$

La valeur précédente de s, sera la latitude de m au-dessus du plan fixe; mais il sera plus exact d'employer au lieu de ses deux premiers termes qui sont indépendans de m', la valeur de la latitude qui auroit lieu dans le cas où m ne quitteroit point le plan de son orbite primitive. Ces expressions renferment toute la théorie des planètes, lorsque l'on néglige les quarrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, ce qui est le plus souvent permis. Elles ont d'ailleurs l'avantage d'être sous une forme très-simple, qui laisse facilement appercevoir la loi de leurs différens termes.

Quelquefois, on aura besoin de recourir aux termes dépendans des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons, et même des puissances et des produits supérieurs. On pourra déterminer ces termes, par l'analyse précédente : la considération qui les rend nécessaires, facilitera toujours leur détermination. Les approximations dans lesquelles on y auroit égard, introduiroient de nouveaux termes qui dépendroient de nouveaux argumens. Elles reproduiroient encore les argumens que donnent les approximations précédentes, mais avec des coefficiens de plus en plus petits, suivant cette loi qu'il est aisé de conclure du développement de R en série, donné dans le n°. 48; *un argument qui dans les approximations successives, se trouve pour la première fois parmi les quantités d'un ordre quelconque r, n'est reproduit que par les quantités des ordres $r+2$, $r+4$, &c.*

Il suit de-là, que les coefficiens des termes de la forme $t.\frac{\sin.}{\cos.}.(nt+\varepsilon)$, qui entrent dans les expressions de r, v et s, sont approchés jusqu'aux quantités du troisième ordre, c'est-à-dire, que l'approximation dans laquelle on auroit égard aux quarrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, n'ajouteroit rien à leurs valeurs; elles ont donc toute la précision que l'on peut desirer; ce qu'il est d'autant plus essentiel d'observer, que de ces coefficiens, dépendent les variations séculaires des orbites.

Les divers termes des perturbations de r, v, s, sont compris dans la forme

$$k.\frac{\sin.}{\cos.}\{i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+rnt+r\varepsilon\},$$

r étant un nombre entier positif ou zéro, et k étant une fonction des excentricités et des inclinaisons des orbites de l'ordre r, ou d'un ordre supérieur : on peut juger par-là, de quel ordre est un terme dépendant d'un angle donné.

Il est clair que l'action des corps m'', m''', &c., ne fait qu'ajouter aux valeurs précédentes de r, v et s, des termes analogues à ceux qui résultent de l'action de m', et qu'en négligeant le quarré de la force perturbatrice, les sommes de tous ces termes donneront les valeurs entières de r, v et s. Cela suit de la nature des formules (X'), (Y) et (Z'), qui sont linéaires relativement aux quantités dépendantes de la force perturbatrice.

Enfin, on aura les perturbations de m', produites par l'action de m; en changeant dans les formules précédentes, a, n, h, l, ε, ϖ, p, q et m', en a', n', h', l', ε', ϖ', p', q' et m, et réciproquement.

CHAPITRE VII.

Des inégalités séculaires des mouvemens célestes.

53. Les forces perturbatrices du mouvement elliptique introduisent dans les expressions de r, $\frac{dv}{dt}$ et s, du chapitre précédent, le temps t, hors des signes *sinus* et *cosinus*, ou sous la forme d'arcs de cercle qui en croissant indéfiniment, doivent à la longue, rendre ces expressions fautives; il est donc essentiel de faire disparoître ces arcs, et d'avoir les fonctions qui les produisent par leur développement en série. Nous avons donné pour cet objet, dans le Chapitre V, une méthode générale de laquelle il résulte que ces arcs naissent des variations du mouvement elliptique, qui sont alors fonctions du temps. Ces variations s'exécutant avec une grande lenteur, elles ont été désignées sous le nom *d'inégalités séculaires.* Leur théorie est un des points les plus intéressans du système du monde : nous allons la présenter ici, avec l'étendue qu'exige son importance.

On a par le Chapitre précédent,

$$r = a.\left\{\begin{array}{l} 1 - h.\sin.(nt+\varepsilon) - l.\cos.(nt+\varepsilon) - \&c. \\ + \frac{m'}{2}.\{l.C + l'.D\}.nt.\sin.(nt+\varepsilon) \\ - \frac{m'}{2}.\{h.C + h'.D\}.nt.\cos.(nt+\varepsilon) + m'.S \end{array}\right\};$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = {} & n + 2nh.\sin.(nt+\varepsilon) + 2nl.\cos.(nt+\varepsilon) + \&c. \\ & - m'.\{l.C + l'D\}.n^2t.\sin.(nt+\varepsilon) \\ & + m'.\{h.C + h'D\}.n^2t.\cos.(nt+\varepsilon) + m'T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = {} & q.\sin.(nt+\varepsilon) - p.\cos.(nt+\varepsilon) + \&c. \\ & - \frac{m'}{4}.a^2a'.(p'-p).B^{(1)}.nt.\sin.(nt+\varepsilon) \\ & - \frac{m'}{4}.a^2a'.(q'-q).B^{(1)}.nt.\cos.(nt+\varepsilon) + m'.\chi; \end{aligned}$$

S, T, χ étant des fonctions périodiques du temps t. Considérons d'abord l'expression de $\frac{dv}{dt}$, et comparons-la à l'expression de y du n°. 43. L'arbitraire n multipliant l'arc t, sous les signes périodiques, dans l'expression de $\frac{dv}{dt}$; on doit alors faire usage des équations suivantes, trouvées dans le n°. 43,

$$\begin{aligned}
&0 = X' + \theta . X'' - Y;\\
&0 = Y' + \theta . Y'' + X'' - 2 . Z;\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}$$

Voyons ce que deviennent ici, X, X', X'', Y, &c. : en comparant l'expression de $\frac{dv}{dt}$, à celle de y du n°. cité, on trouve

$$X = n + 2nh . \sin.(nt+\varepsilon) + 2nl . \cos.(nt+\varepsilon) + m' . T;$$
$$Y = m' . n^2 . \{h . C + h'D\} . \cos.(nt+\varepsilon) - m' . n^2 . \{l . C + l' . D\} . \sin.(nt+\varepsilon).$$

Si l'on néglige le produit des différences partielles des constantes, par les masses perturbatrices, ce qui est permis, puisque ces différences sont de l'ordre de ces masses; on aura par le n°. 43,

$$\begin{aligned}
X' = \left(\frac{dn}{d\theta}\right) . \{1 + 2h . \sin.(nt+\varepsilon) + 2l . \cos.(nt+\varepsilon)\}&\\
+ 2n . \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right) . \{h . \cos.(nt+\varepsilon) - l . \sin.(nt+\varepsilon)\}&\\
+ 2n . \left(\frac{dh}{d\theta}\right) . \sin.(nt+\varepsilon) + 2n\left(\frac{dl}{d\theta}\right) . \cos.(nt+\varepsilon)&;
\end{aligned}$$

$$X'' = 2n . \left(\frac{dn}{d\theta}\right) . \{h . \cos.(nt+\varepsilon) - l . \sin.(nt+\varepsilon)\}.$$

l'équation, $0 = X' + \theta . X'' - Y$, deviendra ainsi,

$$\begin{aligned}
0 = \left(\frac{dn}{d\theta}\right) . \{1 + 2h . \sin.(nt+\varepsilon) + 2l . \cos.(nt+\varepsilon)\}&\\
+ 2n . \left(\frac{dh}{d\theta}\right) . \sin.(nt+\varepsilon) + 2n . \left(\frac{dl}{d\theta}\right) . \cos.(nt+\varepsilon)&\\
+ 2n . \left\{\theta . \left(\frac{dn}{d\theta}\right) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)\right\} . \{h . \cos.(nt+\varepsilon) - l . \sin.(nt+\varepsilon)\}&\\
- m' . n^2 \{h . C + h' . D\} . \cos.(nt+\varepsilon) + m' . n^2 . \{l . C + l' . D\} . \sin.(nt+\varepsilon)&.
\end{aligned}$$

En égalant séparément, à zéro, les coefficiens des sinus et des cosinus semblables, on aura

$$0=\left(\frac{dn}{d\theta}\right);$$

$$0=\left(\frac{dh}{d\theta}\right)-l.\left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)+\frac{m'.n}{2}.\{l.C+l'.D\};$$

$$0=\left(\frac{dl}{d\theta}\right)+h.\left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)-\frac{m'.n}{2}.\{h.C+h'D\}.$$

Si l'on intègre ces équations, et si dans leurs intégrales, on change θ en t; on aura par le n°. 43, les valeurs des arbitraires, en fonctions de t, et l'on pourra effacer les arcs de cercle, des expressions de $\frac{dv}{dt}$ et de r; mais au lieu de ce changement, on peut tout de suite changer θ en t, dans ces équations différentielles. La première de ces équations, nous montre que n est constant, et comme l'arbitraire a, de l'expression de r, en dépend, en vertu de l'équation $n^2=\frac{1}{a^3}$; a est pareillement constant. Les deux autres équations ne suffisent pas pour déterminer h, l, ε. On aura une nouvelle équation, en observant que l'expression de $\frac{dv}{dt}$, donne en l'intégrant, $\int n\,dt$, pour la valeur de la longitude moyenne de m; or nous avons supposé cette longitude égale à $nt+\varepsilon$; on a donc $nt+\varepsilon=\int ndt$, ce qui donne

$$t.\frac{dn}{dt}+\frac{d\varepsilon}{dt}=0;$$

et comme on a $\frac{dn}{dt}=0$; on aura pareillement $\frac{d\varepsilon}{dt}=0$. Ainsi les deux arbitraires n et ε sont constantes; les arbitraires h et l seront par conséquent déterminées au moyen des équations différentielles,

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{m'.n}{2}.\{l.C+l'.D\}; \quad (1)$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{m'.n}{2}.\{h.C+h'.D\}; \quad (2)$$

La considération de l'expression de $\frac{dv}{dt}$ nous ayant suffi pour déterminer

terminer les valeurs de n, a, h, l et ε; on voit *à priori*, que les équations différentielles entre les mêmes quantités, qui résultent de l'expression de r, doivent coincider avec les précédentes. C'est ce dont il est facile de s'assurer *à posteriori*, en appliquant à cette expression, la méthode du n°. 43.

Considérons maintenant l'expression de s. En la comparant à celle de y du n°. cité; on aura

$$X = q.\sin.(nt+\varepsilon) - p.\cos.(nt+\varepsilon) + m'.\chi$$

$$Y = \frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(p-p').\sin.(nt+\varepsilon)$$

$$+ \frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(q-q').\cos.(nt+\varepsilon).$$

n et ε étant constans, par ce qui précède; on aura par le n°. 43,

$$X' = \left(\frac{dq}{d\theta}\right).\sin.(nt+\varepsilon) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right).\cos.(nt+\varepsilon)$$

$$X'' = 0.$$

L'équation $0 = X' + \theta.X'' - Y$, devient ainsi,

$$0 = \left(\frac{dq}{d\theta}\right).\sin.(nt+\varepsilon) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right).\cos.(nt+\varepsilon)$$

$$- \frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(p-p').\sin.(nt+\varepsilon)$$

$$- \frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(q-q').\cos.(nt+\varepsilon);$$

d'où l'on tire, en comparant les coefficiens des sinus et des cosinus semblables, et en changeant θ en t, pour avoir directement p et q en fonctions de t,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(q-q'); \qquad (3)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'.n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(p-p'); \qquad (4)$$

Lorsque l'on aura déterminé p et q par ces équations; on les substituera dans l'expression précédente de s, en effaçant les termes qui contiennent des arcs de cercle, et l'on aura

$$s = q.\sin.(nt+\varepsilon) - p.\cos.(nt+\varepsilon) + m'.\chi.$$

54. L'équation $\frac{dn}{dt}=0$, que nous venons de trouver, est d'une grande importance dans la théorie du système du monde, en ce qu'elle nous montre que les moyens mouvemens des corps célestes, et les grands axes de leurs orbites, sont inaltérables; mais cette équation n'est approchée que jusqu'aux quantités de l'ordre $m'.h$, inclusivement. Si les quantités de l'ordre $m'.h^2$ et des ordres suivans, produisoient dans $\frac{dv}{dt}$, un terme de la forme $2\,k\,t$, k étant une fonction des élémens des orbites de m et de m'; il en résulteroit dans l'expression de v, le terme kt^2, qui en altérant la longitude de m, proportionnellement au quarré du temps, deviendroit à la longue, extrêmement sensible. On n'auroit plus alors, $\frac{dn}{dt}=0$; mais au lieu de cette équation, on auroit par le n°. précédent, $\frac{dn}{dt}=2\,k$; il est donc très-important de savoir s'il existe dans l'expression de v, des termes de la forme $k.t^2$. Nous allons démontrer que si l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, quelque loin que l'on porte d'ailleurs, les approximations, relativement aux puissances des excentricités et des inclinaisons des orbites; l'expression de v ne renfermera point de termes semblables.

Reprenons pour cela, la formule (X) du n°. 46,

$$\delta r=\frac{a.\cos.v.\int ndt.r\sin.v.\left\{2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}-a.\sin.v.\int ndt.r\cos.v.\left\{2.\int dR+r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right\}}{\mu.\sqrt{1-e^2}}.$$

Considérons la partie de δr, qui renferme des termes multipliés par t^2, ou pour plus de généralité, considérons les termes qui étant multipliés par le sinus ou par le cosinus d'un angle $\alpha t+\epsilon$, dans lequel α est très-petit, ont en même temps α^2 pour diviseur. Il est clair qu'en supposant $\alpha=0$, il en résultera un terme multiplié par t^2, en sorte que ce second cas renferme le premier. Les termes qui ont α^2 pour diviseur, ne peuvent évidemment résulter que d'une double intégration; ils ne peuvent donc être produits que par la partie de δr, qui renferme le double signe intégral $\int$. Examinons d'abord le terme

$$\frac{2a.\cos.v.\int n\,dt.(r.\sin.v.\int \mathrm{d}R)}{\mu.\sqrt{1-e^2}}.$$

Si l'on fixe l'origine de l'angle v, au périhélie; on a dans l'orbite elliptique, par le n°. 20,

$$r = \frac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos.v},$$

et par conséquent,

$$\cos.v = \frac{a.(1-e^2)-r}{er};$$

d'où l'on tire en différentiant,

$$r^2 dv.\sin.v = \frac{a.(1-e^2)}{e}.dr;$$

mais on a par le n°. 19,

$$r^2.dv = dt.\sqrt{\mu a(1-e^2)} = a^2.n\,dt.\sqrt{1-e^2};$$

on aura donc

$$\frac{a n\,d t.r.\sin.v}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{r\,dr}{e}.$$

Le terme $\frac{2a.\cos.v.\int n\,dt.\{r.\sin.v.\int \mathrm{d}R\}}{\mu.\sqrt{1-e^2}}$, deviendra ainsi,

$$\frac{2.\cos.v}{\mu.e}.\int(r\,dr.\int \mathrm{d}R), \text{ ou } \frac{\cos.v}{\mu.e}.\{r^2.\int \mathrm{d}R - \int r^2.\mathrm{d}R\}.$$

Il est visible que cette dernière fonction ne renfermant plus de doubles intégrales, il ne peut en résulter aucun terme qui ait α^2 pour diviseur.

Considérons présentement le terme

$$-\frac{2a.\sin.v.\int n\,dt.\{r.\cos.v.\int \mathrm{d}R\}}{\mu.\sqrt{1-e^2}};$$

de l'expression de δr. En substituant pour $\cos.v$, sa valeur précédente en r, ce terme devient

$$\frac{2.\sin.v.\int n\,dt.\{r-a.(1-e^2)\}.\int \mathrm{d}R}{\mu e.\sqrt{1-e^2}}.$$

On a par le n°. 22,

$$r = a.\{1 + \tfrac{1}{2}e^2 + e.\chi'\},$$

χ' étant une suite infinie de cosinus de l'angle $nt+\varepsilon$, et de ses multiples ; on aura donc

$$\frac{\int n\,dt}{e}.\{r - a(1-e^2)\}.\int \mathrm{d}R = a.\int n\,dt.\{\tfrac{3}{2}e + \chi'\}.\int \mathrm{d}R.$$

Nommons χ'' l'intégrale $\int \chi' n\,dt$; on aura

$$a.\int ndt.\{\tfrac{3}{2}e + \chi'\}.\int \mathrm{d}R = \tfrac{3}{2}.ae.\int ndt.\int \mathrm{d}R + a\chi''.\int \mathrm{d}R - a.\int \chi''.\mathrm{d}R.$$

Ces deux derniers termes ne renfermant point le double signe intégral, il ne peut en résulter aucun terme qui ait α^2 pour diviseur ; en n'ayant donc égard qu'aux termes de ce genre, on aura

$$-\frac{2a.\sin.v.\int ndt.\{r.\cos.v.\int \mathrm{d}R\}}{\mu.\sqrt{1-e^2}} = \frac{3a^2e.\sin.v.\int ndt.\int \mathrm{d}R}{\mu.\sqrt{1-e^2}} = \frac{dr}{ndt}.\frac{3.a}{\mu}.\int ndt.\int \mathrm{d}R;$$

et le rayon r deviendra

$$(r) + \left(\frac{dr}{ndt}\right).\frac{3a}{\mu}.\int n\,dt.\int \mathrm{d}R;$$

(r) et $\left(\dfrac{dr}{ndt}\right)$ étant les expressions de r et de $\dfrac{dr}{ndt}$, relatives au mouvement elliptique. Ainsi, pour avoir égard dans l'expression du rayon vecteur, à la partie des perturbations, qui est divisée par α^2; il suffit d'augmenter de la quantité $3a.\int ndt.\int \mathrm{d}R$, la longitude moyenne $nt+\varepsilon$, de cette expression relative au mouvement elliptique.

Voyons comment on doit avoir égard à cette partie des perturbations, dans l'expression de la longitude v. La formule (Y) du n°. 46, donne en y substituant $\dfrac{3a}{\mu}.\dfrac{dr}{ndt}.\int ndt.\int \mathrm{d}R$, au lieu de δr, et en n'ayant égard qu'aux termes divisés par α^2,

$$\delta v = \frac{\left\{\dfrac{2r\,ddr + dr^2}{a^2n^2dt^2} + 1\right\}}{\sqrt{1-e^2}}.\frac{3a}{\mu}.\int n\,dt.\int \mathrm{d}R;$$

or on a par ce qui précède,

$$dr = \frac{ae.ndt.\sin.v}{\sqrt{1-e^2}}; \qquad r^2dv = a^2n\,dt.\sqrt{1-e^2};$$

d'où il est facile de conclure, en substituant pour cos. v, sa valeur précédente en r,

$$\frac{\frac{2rddr+dr^2}{a^2n^2dt^2}+1}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{dv}{ndt};$$

en n'ayant donc égard qu'à la partie des perturbations, qui a pour diviseur μ^2, la longitude v deviendra

$$(v)+\left(\frac{dv}{ndt}\right).\frac{3a}{\mu}.\int ndt.\int \mathrm{d}R;$$

(v) et $\left(\frac{dv}{ndt}\right)$ étant les parties de v et de $\frac{dv}{ndt}$, relatives au mouvement elliptique. Ainsi, pour avoir égard à cette partie des perturbations, dans l'expression de la longitude de m, on doit suivre la même règle que nous venons de donner pour y avoir égard dans l'expression du rayon vecteur ; c'est-à-dire, qu'il faut augmenter dans l'expression elliptique de la longitude vraie, la longitude moyenne $nt+\varepsilon$, de la quantité $\frac{3a}{\mu}.\int ndt.\int \mathrm{d}R$.

La partie constante de l'expression de $\left(\frac{dv}{ndt}\right)$, développée en série de cosinus de l'angle $nt+\varepsilon$ et de ses multiples, se réduisant à l'unité, comme on l'a vu dans le n°. 22 ; il en résulte, dans l'expression de la longitude, le terme $\frac{3a}{\mu}.\int ndt.\int \mathrm{d}R$. Si $\mathrm{d}R$ renfermoit un terme constant $km'.ndt$; ce terme produiroit dans l'expression de la longitude v, le suivant $\frac{3}{2}.\frac{a.m'}{\mu}.kn^2t^2$. L'existence de semblables termes dans cette expression, se réduit donc à voir si $\mathrm{d}R$ renferme un terme constant.

Lorsque les orbites sont peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres ; on a vu, n°. 48, que R peut toujours se réduire dans une suite infinie de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps t. On peut les représenter généralement, par le terme $km'.\cos.\{i'n't+int+A\}$, i et i' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, ou zéro. La différentielle de ce terme, prise uniquement par rapport au moyen mouvement de m, est $-ik.m'.ndt.\sin.\{i'n't+int+A\}$; c'est la partie de dR, relative à ce terme : elle ne peut pas être constante, à moins que l'on ait $0=i'n'+in$; ce qui suppose les moyens mouvemens des corps m et m', commensurables entre eux; et comme cela n'a point lieu dans le système solaire, on doit en conclure que la valeur de dR ne renferme point de termes constans, et qu'ainsi, en ne considérant que la première puissance des masses perturbatrices, les moyens mouvemens des corps célestes, sont uniformes, ou ce qui revient au même, $\frac{dn}{dt}=0$. La valeur de a étant liée à celle de n, au moyen de l'équation $n^2=\frac{\mu}{a^3}$; il en résulte que si l'on néglige les quantités périodiques, les grands axes des orbites sont constans.

Si les moyens mouvemens des corps m et m', sans être exactement commensurables, approchent cependant beaucoup de l'être ; il existera dans la théorie de leurs mouvemens, des inégalités d'une longue période, et qui pourront devenir fort sensibles, à raison de la petitesse du diviseur α^2. Nous verrons dans la suite, que ce cas est celui de Jupiter et de Saturne. L'analyse précédente donnera d'une manière fort simple, la partie des perturbations qui dépend de ce diviseur. Il en résulte qu'il suffit alors de faire varier la longitude moyenne $nt+\varepsilon$, ou $\int ndt$, de la quantité $\frac{3a}{\mu}.\int ndt.\int dR$; ce qui revient à faire croître n, dans l'intégrale $\int ndt$, de la quantité $\frac{3an}{\mu}.\int dR$; or en considérant l'orbite de m, comme une ellipse variable, on a $n^2=\frac{\mu}{a^3}$; la variation précédente de n, introduit donc dans le demi-grand axe a de l'orbite, la variation $-\frac{2a^2.\int dR}{\mu}$.

Si l'on porte dans la valeur de $\frac{dv}{dt}$, la précision jusqu'aux quantités de l'ordre des quarrés des masses perturbatrices, on trouvera des termes proportionnels au temps; mais en considérant avec attention, les équations différentielles du mouvement des corps m, m', &c., on s'assurera facilement que ces termes sont en même temps, de l'ordre des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. Cependant, comme tout ce qui affecte le moyen mouvement, peut à la longue, devenir fort sensible; nous aurons dans la suite, égard à ces termes, et nous verrons qu'ils produisent les équations séculaires observées dans le mouvement de la lune.

55. Reprenons maintenant les équations (1) et (2) du n°. 53, et supposons

$$(0,1) = -\frac{m'.n.C}{2}; \qquad \boxed{0,1} = \frac{m'.n.D}{2};$$

elles deviendront,

$$\frac{dh}{dt} = (0,1).l - \boxed{0,1}.l';$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0,1).h + \boxed{0,1}.h'.$$

Les expressions de $(0,1)$ et de $\boxed{0,1}$, peuvent être déterminées fort simplement, de cette manière. En substituant, au lieu de C et de D, leurs valeurs déterminées dans le n°. 50, on aura

$$(0,1) = -\frac{m'.n}{2}.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}.a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\};$$

$$\boxed{0,1} = \frac{m'.n}{2}.\left\{aA^{(1)} - a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2}.a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)\right\}.$$

On a par le n°. 49,

$$a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}.a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right) = -\alpha^2.\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}.\alpha^3.\frac{ddb^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2};$$

on obtiendra facilement, par le même n°., $\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ et $\frac{ddb^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$, en fonctions de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$; et ces quantités sont données en fonctions linéaires de $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$; on trouvera, cela posé,

$$a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right) = \frac{3\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{2.(1-\alpha^2)^2};$$

partant

$$(0,1) = -\frac{3m'.n.\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4.(1-\alpha^2)^2}.$$

Soit

$$(a^2-2aa'.\cos.\theta+a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a,a')+(a,a')'.\cos.\theta+(a,a')''.\cos.2\theta+\&c.;$$

on aura par le n°. 49,

$$(a,a') = \tfrac{1}{2}a'.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}\ ; \qquad (a,a')' = a'.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}},\ \&c.;$$

on aura donc

$$(0,1) = -\frac{3m'.na^2a'.(a,a')'}{4.(a'^2-a^2)^2}.$$

on a ensuite, par le n°. 49,

$$a\,A^{(1)} - a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right) = -\alpha.\left\{b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha.\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha^2.\frac{ddb^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right\};$$

en substituant au lieu de $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ et de ses différences, leurs valeurs en $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, on trouvera la fonction précédente égale à

$$-\frac{3\alpha.\left\{(1+\alpha^2).b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\alpha.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}\right\}}{(1-\alpha^2)^2};$$

partant

$$\boxed{0,1} = -\frac{3\alpha.m'n.\left\{(1+\alpha^2).b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\alpha.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}\right\}}{2.(1-\alpha^2)^2};$$

ou

$$\boxed{0,1} = -\frac{3m'.an.\left\{(a^2+a'^2).(a,a')'+aa'.(a,a')\right\}}{2.(a'^2-a^2)^2};$$

on aura donc ainsi des expressions fort simples de $(0,1)$ et de $\boxed{0,1}$, et il est facile de se convaincre par les valeurs en séries, de $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ et de $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, données dans le n°. 49, que ces expressions sont positives, si n est positif, et négatives, si n est négatif.

Nommons $(0,2)$ et $\boxed{0,2}$, ce que deviennent $(0,1)$ et $\boxed{0,1}$, lorsque

lorsque l'on y change a' et m' dans a'' et m''. Nommons pareillement $(0,3)$ et $\boxed{0,3}$, ce que deviennent ces mêmes quantités, lorsque l'on y change a' et m', en a''' et m'''; et ainsi de suite. Désignons de plus, par h'', l''; h''', l'''; &c. les valeurs de h et de l, relatives aux corps m'', m''', &c.; on aura, en vertu des actions réunies des différens corps m', m'', m''', &c., sur m,

$$\frac{dh}{dt}=\{(0,1)+(0,2)+(0,3)+\&c.\}.l-\boxed{0,1}.l'-\boxed{0,2}.l''-\&c.;$$

$$\frac{dl}{dt}=-\{(0,1)+(0,2)+0,3)+\&c.\}.h+\boxed{0,1}.h'+\boxed{0,2}.h''+\&c.$$

Il est clair que $\frac{dh'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$; $\frac{dh''}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$; &c., seront déterminés par des expressions semblables à celles de $\frac{dh}{dt}$ et de $\frac{dl}{dt}$, et qu'il est facile de conclure de celles-ci, en y changeant successivement, ce qui est relatif à m, dans ce qui a rapport à m', m'', &c., et réciproquement. Soient donc

$$(1,0),\ \boxed{1,0}\ ;\qquad (1,2),\ \boxed{1,2}\ ;\quad \&c.,$$

ce que deviennent

$$(0,1),\ \boxed{0,1}\ ;\qquad (0,2),\ \boxed{0,2}\ ;\quad \&c.,$$

lorsque l'on y change ce qui est relatif à m, dans ce qui est relatif à m', et réciproquement; soient encore,

$$(2,0),\ \boxed{2,0}\ ;\qquad (2,1),\ \boxed{2,1}\ ;\quad \&c.,$$

ce que deviennent

$$(0,2),\ \boxed{0,2}\ ;\qquad (0,1),\ \boxed{0,1}\ ;\quad \&c.,$$

lorsque l'on y change ce qui est relatif à m, dans ce qui est relatif à m'', et réciproquement; et ainsi de suite. Les équations différentielles précédentes rapportées successivement aux corps m, m', m'', &c., donneront pour déterminer h, l, h', l', h'', l'', &c., le système suivant d'équations,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \{(0,1)+(0,2)+(0,3)+\&c.\}.l-\boxed{0,1}.l'-\boxed{0,2}.l''-\boxed{0,3}.l'''-\&c.\\
\frac{dl}{dt} &= -\{(0,1)+(0,2)+(0,3)+\&c.\}.h+\boxed{0,1}.h'+\boxed{0,2}.h''+\boxed{0,3}.h'''+\&c.\\
\frac{dh'}{dt} &= \{(1,0)+(1,2)+(1,3)+\&c.\}.l'-\boxed{1,0}.l-\boxed{1,2}.l''-\boxed{1,3}.l'''-\&c.\\
\frac{dl'}{dt} &= -\{(1,0)+(1,2)+(1,3)+\&c.\}.h'+\boxed{1,0}.h+\boxed{1,2}.h''+\boxed{1,3}.h'''+\&c.\\
\frac{dh''}{dt} &= \{(2,0)+(2,1)+(2,3)+\&c.\}.l''-\boxed{2,0}.l-\boxed{2,1}.l'-\boxed{2,3}.l'''-\&c.\\
\frac{dl''}{dt} &= -\{(2,0)+(2,1)+(2,3)+\&c.\}.h''+\boxed{2,0}.h+\boxed{2,1}.h'+\boxed{2,3}.h'''+\&c.\\
\&c.&
\end{aligned}\right\}\;(A)$$

Les quantités $(0,1)$ et $(1,0)$, $\boxed{0,1}$ et $\boxed{1,0}$, ont entre elles des rapports remarquables qui peuvent en faciliter le calcul, et qui nous seront utiles dans la suite. On a par ce qui précède,

$$(0,1)=-\frac{3m'.na^2.a'.(a,a')'}{4.(a'^2-a^2)^2}.$$

Si dans cette expression de $(0,1)$, on change m' en m, n en n', a en a', et réciproquement ; on aura l'expression de $(1,0)$, qui sera par conséquent,

$$(1,0)=-\frac{3m.n'a'^2.a.(a',a)'}{4.(a'^2-a^2)^2};$$

mais on a $(a,a')'=(a',a)'$, puisque l'une et l'autre de ces quantités résulte du développement de la fonction $(a^2-2aa'.\cos.\theta+a'^2)^{\frac{1}{2}}$ dans une série ordonnée suivant les cosinus de l'angle θ et de ses multiples ; on aura donc

$$(0,1).m.n'a'=(1,0).m'.na\,;$$

or on a, en négligeant les masses m, m', &c., vis-à-vis de M,

$$n^2=\frac{M}{a^3}\;;\qquad n'^2=\frac{M}{a'^3}\;;\quad \&c.;$$

partant

$$(0,1).m.\sqrt{a}=(1,0).m'.\sqrt{a'}\,;$$

équation d'où l'on tirera facilement $(1,0)$, lorsque $(0,1)$ sera déterminé. On trouvera de la même manière,

$$\boxed{0,1}.m.\sqrt{a}=\boxed{1,0}.m'.\sqrt{a'}.$$

Ces deux équations subsisteroient encore dans le cas où n et n' auroient des signes contraires; c'est-à-dire, si les deux corps m et m' circuloient en différens sens; mais alors, il faudroit donner le signe de n, au radical $\sqrt{a}$, et le signe de n', au radical $\sqrt{a'}$.

Des deux équations précédentes, résultent évidemment celles-ci,

$$(0,2).m.\sqrt{a}=(2,0).m''.\sqrt{a''};\ \boxed{0,2}.m.\sqrt{a}=\boxed{2,0}.m''.\sqrt{a''};\ \&c.$$
$$(1,2).m'.\sqrt{a'}=(2,1).m''.\sqrt{a''};\ \boxed{1,2}.m'.\sqrt{a'}=\boxed{2,1}.m''.\sqrt{a''};\ \&c.$$

56. Maintenant, pour intégrer les équations (A) du n°. précédent, nous ferons

$$\begin{aligned} h&=N.\sin.(gt+\epsilon); & l&=N.\cos.(gt+\epsilon);\\ h'&=N'.\sin.(gt+\epsilon); & l'&=N'.\cos.(gt+\epsilon);\\ &\&c. \end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans les équations (A), on aura

$$\left.\begin{aligned} N\,g&=\{(0,1)+(0,2)+\&c.\}.N-\boxed{0,1}.N'-\boxed{0,2}.N''-\&c.\\ N'g&=\{(1,0)+(1,2)+\&c.\}.N'-\boxed{1,0}.N-\boxed{1,2}.N''-\&c.\\ N''g&=\{(2,0)+(2,1)+\&c.\}.N''-\boxed{2,0}.N-\boxed{2,1}.N'-\&c.\\ &\&c. \end{aligned}\right\};\ (B)$$

Si l'on suppose le nombre des corps m, m', m'', &c., égal à i; ces équations seront au nombre i, et en éliminant les constantes N, N', &c., on aura une équation finale en g, du degré i, que l'on obtiendra facilement de cette manière.

Nommons φ la fonction

$$\begin{aligned} &N^2.m.\sqrt{a}.\{g-(0,1)-(0,2)-\&c.\}\\ &+N'^2.m'.\sqrt{a'}.\{g-(1,0)-(1,2)-\&c.\}\\ &+\&c.\\ &+2N.m.\sqrt{a}.\{\boxed{0,1}.N'+\boxed{0,2}.N''+\&c.\}\\ &+2N'.m'.\sqrt{a'}.\{\boxed{1,2}.N''+\boxed{1,3}.N'''+\&c.\}\\ &+2N''.m''.\sqrt{a''}.\{\boxed{2,3}.N'''+\&c.\}\\ &+\&c. \end{aligned}$$

Les équations (B) se réduisent en vertu des relations données dans le n°. précédent, à celles-ci,

$$\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)=0\,;\quad \left(\frac{d\varphi}{dN'}\right)=0\,;\quad \left(\frac{d\varphi}{dN''}\right)=0\,;\quad \&c.$$

en considérant donc N, N', N'', &c., comme autant de variables, φ sera un *maximum*. De plus, φ étant une fonction homogène de ces variables, de la seconde dimension; on a

$$N.\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)+N'.\left(\frac{d\varphi}{dN'}\right)+\ \&c.=2\varphi;$$

on a donc $\varphi=0$, en vertu des équations précédentes.

Présentement, on peut déterminer ainsi le *maximum* de la fonction φ. On différentiera d'abord cette fonction, relativement à N, et l'on substituera dans φ, au lieu de N, sa valeur tirée de l'équation $\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)=0$, valeur qui sera une fonction linéaire des quantités N', N'', &c.: on aura de cette manière une fonction rationnelle, entière et homogène, de la seconde dimension, en N', N'', &c.: soit $\varphi^{(1)}$ cette fonction. On différentiera $\varphi^{(1)}$ relativement à N', et l'on substituera dans $\varphi^{(1)}$, au lieu de N', sa valeur tirée de l'équation $\left(\frac{d\varphi^{(1)}}{dN'}\right)=0$: on aura une fonction homogène et de la seconde dimension, en N'', N''', &c.: soit $\varphi^{(2)}$ cette fonction. En continuant ainsi, on parviendra à une fonction $\varphi^{(i-1)}$ de la seconde dimension, en $N^{(i-1)}$, et qui sera par conséquent, de la forme $(N^{(i-1)})^2.k$; k étant une fonction de g et de constantes. Si l'on égale à zéro, la différentielle de $\varphi^{(i-1)}$ prise par rapport à $N^{(i-1)}$, on aura $k=0$; ce qui donnera une équation en g du degré i, et dont les diverses racines donneront autant de systêmes différens pour les indéterminées N, N', N'', &c.: l'indéterminée $N^{(i-1)}$ sera l'arbitraire de chaque systême, et l'on aura sur-le-champ, le rapport des autres indéterminées N, N', &c., du même systême, à celle-ci, au moyen des équations précédentes, prises dans un ordre inverse, savoir,

$$\left(\frac{d\varphi^{(i-2)}}{dN^{(i-2)}}\right)=0\,;\quad \left(\frac{d\varphi^{(i-3)}}{dN^{(i-3)}}\right)=0\,;\quad \&c.$$

Soient g, g_1, g_2, &c., les i racines de l'équation en g: soit N, N', N'', &c., le système des indéterminées, relatif à la racine g : soit $N_{,}$, $N_{,}'$, $N_{,}''$, &c., le système des indéterminées, relatif à la racine g_1, et ainsi de suite : on aura par la théorie connue des équations différentielles linéaires,

$$h = N \,.\sin.(gt+\epsilon) + N_1 \,.\sin.(g_1 t+\epsilon_1) + N_2 \,.\sin.(g_2 t+\epsilon_2) + \&c.;$$

$$h' = N' .\sin.(gt+\epsilon) + N_1' .\sin.(g_1 t+\epsilon_1) + N_2' .\sin.(g_2 t+\epsilon_2) + \&c.;$$

$$h'' = N'' .\sin.(gt+\epsilon) + N_1'' .\sin.(g_1 t+\epsilon_1) + N_2'' .\sin.(g_2 t+\epsilon_2) + \&c.;$$

&c.,

ϵ, ϵ_1, ϵ_2, &c., étant des constantes arbitraires. En changeant dans ces valeurs de h, h', h'', &c., les sinus en cosinus; on aura les valeurs de l, l', l'', &c. Ces différentes valeurs renferment deux fois autant d'arbitraires, qu'il y a de racines g, g_1, g_2, &c.; car chaque système d'indéterminées renferme une arbitraire, et de plus, il y a i arbitraires ϵ, ϵ_1, ϵ_2, &c.; ces valeurs sont par conséquent, les intégrales complètes des équations (A) du n°. précédent.

Il ne s'agit plus maintenant, que de déterminer les constantes N, N_1, &c.; N', N_1', &c.; ϵ, ϵ_1, &c. Les observations ne donnent point immédiatement ces constantes; mais elles font connoître à une époque donnée, les excentricités e, e', &c., des orbites, et les longitudes ϖ, ϖ', &c., de leurs périhélies, et par conséquent, les valeurs de h, h', &c., l, l', &c. : on en tirera ainsi les valeurs des constantes précédentes. Pour cela, nous observerons que si l'on multiplie la première, la troisième, la cinquième, &c., des équations différentielles (A) du n°. précédent, respectivement par $N.m.\sqrt{a}$, $N'.m'.\sqrt{a'}$, &c.; on aura en vertu des équations (B), et des relations trouvées dans le n°. précédent, entre $(0,1)$ et $(1,0)$, $(0,2)$ et $(2,0)$, &c.,

$$N.\frac{dh}{dt}.m.\sqrt{a} + N'.\frac{dh'}{dt}.m'.\sqrt{a'} + N''.\frac{dh''}{dt}.m''.\sqrt{a''} + \&c.$$
$$= g.\{N.l.m.\sqrt{a} + N'.l'.m'.\sqrt{a'} + N''.l''.m''.\sqrt{a''} + \&c.\}.$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de h, h', &c., l, l', &c.,

leurs valeurs précédentes ; on aura, en comparant les coefficiens des mêmes cosinus,

$$0 = N.N_{,}.m.\sqrt{a} + N'.N_{,}'.m'.\sqrt{a'} + N''.N_{,}''.m''.\sqrt{a''} + \&c.\,;$$
$$0 = N.N_{2}.m.\sqrt{a} + N'.N_{2}'.m'.\sqrt{a'} + N''.N_{2}''.m''.\sqrt{a''} + \&c.$$
&c.

Cela posé, si l'on multiplie les valeurs précédentes de h, h', &c., respectivement par $N.m\cdot\sqrt{a}$, $N'\cdot m'\cdot\sqrt{a'}$, &c. ; on aura en vertu de ces dernières équations,

$$N\cdot mh\cdot\sqrt{a} + N'\cdot m'h'\cdot\sqrt{a'} + N''\cdot m''h''\cdot\sqrt{a''} + \&c.$$
$$= \{N^2.m\cdot\sqrt{a} + N'^2.m'\cdot\sqrt{a'} + N''^2\cdot m''\cdot\sqrt{a''} + \&c.\}\,.\sin.(gt+\epsilon).$$

On aura pareillement,

$$N\cdot m\,l.\sqrt{a} + N'.m'l'\cdot\sqrt{a'} + N''\cdot m''l''\cdot\sqrt{a''} + \&c.$$
$$= \{N^2\cdot m\cdot\sqrt{a} + N'^2.m'\cdot\sqrt{a'} + N''^2\cdot m''\cdot\sqrt{a''} + \&c.\}\,.\cos.(gt+\epsilon).$$

En fixant l'origine du temps t, à l'époque pour laquelle les valeurs de h, l, h', l', &c., sont supposées connues ; les deux équations précédentes donnent

$$\text{tang.}\,\epsilon = \frac{N.hm.\sqrt{a} + N'.h'm'.\sqrt{a'} + N''.h''m''.\sqrt{a''} + \&c.}{N.lm.\sqrt{a} + N'.l'm'.\sqrt{a'} + N''.l''m''.\sqrt{a''} + \&c.}.$$

Cette expression de tang. ϵ ne renferme point d'indéterminée ; car quoique les constantes N, N', N'', &c., dépendent de l'indéterminée $N^{(i-1)}$; cependant, comme leurs rapports à cette indéterminée sont connus par ce qui précède, elle disparoît de l'expression de tang. ϵ. Ayant ainsi déterminé ϵ, on aura $N^{(i-1)}$, au moyen de l'une des deux équations qui donnent tang. ϵ ; et l'on en conclura le système des indéterminées N, N', N'', &c., relatif à la racine g. En changeant dans les expressions précédentes, cette racine successivement en g_1, g_2, g_3, &c., on aura les valeurs des arbitraires relatives à chacune de ces racines.

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de h, l, h', l', &c. ; on en tirera les valeurs des excentricités e, e', &c. des orbites, et des longitudes ϖ, ϖ', &c., de leurs périhélies, au moyen des équations

$$e^2 = h^2 + l^2\ ; \qquad e'^2 = h'^2 + l'^2\ ; \qquad \text{\&c.}$$

$$\text{tang.}\,\varpi = \frac{h}{l}\ ; \qquad \text{tang.}\,\varpi' = \frac{h'}{l'}\ ; \qquad \text{\&c.}$$

on aura ainsi,

$$e^2 = N^2 + N_1^2 + N_2^2 + \text{\&c.} + 2NN_1.\cos.\{(g_1 - g).t + \epsilon_1 - \epsilon\}$$
$$+ 2NN_2.\cos.\{(g_2 - g).t + \epsilon_2 - \epsilon\} + 2N_1N_2.\cos.\{(g_2 - g_1).t + \epsilon_2 - \epsilon_1\} + \text{\&c.}$$

Cette quantité est constamment plus petite que $(N + N_1 + N_2 + \text{\&c.})^2$, lorsque les racines g, g_1, &c., sont toutes réelles et inégales, en prenant positivement les quantités N, N_1, &c. On aura pareillement,

$$\text{tang.}\,\varpi = \frac{N.\sin.(gt + \epsilon) + N_1.\sin.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2.\sin.(g_2 t + \epsilon_2) + \text{\&c.}}{N.\cos.(gt + \epsilon) + N_1.\cos.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2.\cos.(g_2 t + \epsilon_2) + \text{\&c.}};$$

d'où il est facile de conclure,

$$\text{tang.}(\varpi - gt - \epsilon) = \frac{N_1.\sin.\{(g_1 - g).t + \epsilon_1 - \epsilon\} + N_2.\sin.\{(g_2 - g).t + \epsilon_2 - \epsilon\} + \text{\&c.}}{N + N_1.\cos.\{(g_1 - g).t + \epsilon_1 - \epsilon\} + N_2.\cos.\{(g_2 - g).t + \epsilon_2 - \epsilon\} + \text{\&c.}}.$$

Lorsque la somme $N_1 + N_2 + \text{\&c.}$, des coefficiens des cosinus de ce dénominateur, pris tous positivement, est moindre que N, $\text{tang.}(\varpi - gt - \epsilon)$ ne peut jamais devenir infini; l'angle $\varpi - gt - \epsilon$ ne peut donc jamais alors atteindre le quart de la circonférence; en sorte que le vrai moyen mouvement du périhélie est dans ce cas, égal à gt.

57. Il suit de ce qui précède, que les excentricités des orbites et les positions de leurs grands axes, sont assujéties à des variations considérables, qui changent à la longue, la nature de ces orbites, et dont les périodes dépendantes des racines g, g_1, g_2, &c., embrassent relativement aux planètes, un grand nombre de siècles. On peut ainsi considérer les excentricités, comme des ellipticités variables, et les mouvemens des périhélies, comme n'étant pas uniformes. Ces variations sont très-sensibles dans les satellites de Jupiter, et nous verrons dans la suite, qu'elles expliquent les inégalités singulières observées dans le mouvement du troisième satellite. Mais les variations des excentricités ont-elles des limites,

et les orbites sont-elles constamment peu différentes du cercle? C'est ce qu'il importe d'examiner. Nous venons de voir, que si les racines de l'équation en g sont toutes réelles et inégales, l'excentricité e de l'orbite de m, est toujours moindre que la somme $N + N_1 + N_2 +$ &c., des coefficiens des sinus de l'expression de h, pris positivement; et comme ces coefficiens sont supposés fort petits, la valeur de e sera toujours peu considérable. En n'ayant donc égard qu'aux variations séculaires, on voit que les orbites des corps m, m', m'', &c., ne feront que s'applatir plus ou moins, en s'éloignant peu de la forme circulaire; mais les positions de leurs grands axes éprouveront des variations considérables. Ces axes seront constamment de la même grandeur, et les moyens mouvemens qui en dépendent, seront toujours uniformes, comme on l'a vu dans le n°. 54. Les résultats précédens, fondés sur le peu d'excentricité des orbites, subsisteront sans cesse, et pourront s'étendre à tous les siècles passés et à venir; en sorte que l'on peut alors affirmer que dans aucun temps, les orbites des planètes et des satellites n'ont été et ne seront considérablement excentriques, du moins, si l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle. Mais il n'en seroit pas de même, si quelques-unes des racines g, g_1, g_2, &c., étoient égales ou imaginaires: les sinus et les cosinus des expressions de h, l, h', l', &c., correspondans à ces racines, se changeroient alors en arcs de cercle ou en exponentielles, et comme ces quantités croissent indéfiniment avec le temps, les orbites finiroient à la longue, par être fort excentriques; la stabilité du système planétaire seroit alors détruite, et les résultats que nous avons trouvés, cesseroient d'avoir lieu. Il est donc très-intéressant de s'assurer que les racines g, g_1, g_2, &c., sont toutes réelles et inégales. C'est ce que l'on peut démontrer d'une manière fort simple, pour le cas de la nature, dans lequel les corps m, m', m'', &c., du système, circulent tous dans le même sens.

Reprenons les équations (A) du n°. 55. Si l'on multiplie la première par $m.\sqrt{a}.h$; la seconde, par $m.\sqrt{a}.l$; la troisième, par $m'.\sqrt{a'}.h'$; la quatrième, par $m'.\sqrt{a'}.l'$; &c., et qu'ensuite on les ajoute ensemble; les coefficiens de hl, $h'l'$, $h''l''$, &c., seront nuls dans cette somme; le coefficient de $h'l - hl'$ sera $\boxed{0,1}.m.\sqrt{a}$

$-\boxed{1,0}.m'.\sqrt{a'}$, et il sera nul, en vertu de l'équation $\boxed{0,1}.m.\sqrt{a} = \boxed{1,0}.m'.\sqrt{a'}$, trouvée dans le n°. 55. Les coefficiens de $h''l-hl'$, $h''l'-h'l''$, &c., seront nuls par la même raison; la somme des équations (A) ainsi préparées, se réduira donc à l'équation suivante :

$$\left(\frac{hdh+ldl}{dt}\right).m.\sqrt{a}+\left(\frac{h'dh'+l'dl'}{dt}\right).m'.\sqrt{a'}+\text{\&c.}=0;$$

et par conséquent à celle-ci,

$$0=ede.m.\sqrt{a}+e'de'.m'.\sqrt{a'}+\text{\&c.}$$

En intégrant cette équation, et en observant que par le n°. 54, les demi grands axes a, a', &c., sont constans; on aura

$$e^2.m.\sqrt{a}+e'^2.m'.\sqrt{a'}+e''^2.m''.\sqrt{a''}+\text{\&c.}=\text{constante}; \quad (u)$$

Maintenant, les corps m, m', m'', &c., étant supposés circuler dans le même sens, les radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$, &c., doivent être pris positivement dans l'équation précédente, comme on l'a vu dans le n°. 55; tous les termes du premier membre de cette équation sont donc positifs, et par conséquent, chacun d'eux est moindre que la constante du second membre; or en supposant à une époque quelconque, les excentricités très-petites, cette constante sera fort petite; chacun des termes de l'équation restera donc toujours fort petit, et ne pourra pas croître indéfiniment; les orbites seront toujours à fort peu près circulaires.

Le cas que nous venons d'examiner, est celui des planètes et des satellites du système solaire; puisque tous ces corps circulent dans le même sens, et qu'à l'époque où nous sommes, leurs orbites sont peu excentriques. Pour ne laisser aucun doute sur ce résultat important, nous observerons que si l'équation qui détermine g, renfermoit des racines imaginaires, quelques-uns des sinus et des cosinus des expressions de h, l, h', l', &c., se changeroient en exponentielles; ainsi l'expression de h contiendroit un nombre fini de termes de la forme $P.c^{ft}$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et P étant une quantité réelle, puisque h ou $e.\sin.\varpi$ est une quantité réelle. Soient $Q.c^{ft}$, $P'.c^{ft}$, $Q'.c^{ft}$, $P''.c^{ft}$, &c., les termes correspondans de l, h', l', h'', &c.; Q, P', Q', P'', &c., étant encore des quantités réelles : l'expression de e^2 renfermera le terme $(P^2+Q^2).c^{2ft}$; l'expression de e'^2 renfermera le terme $(P'^2+Q'^2).c^{2ft}$, et ainsi de suite ; le premier membre de l'équation (u) renfermera donc le terme

$$\{(P^2+Q^2).m.\sqrt{a}+(P'^2+Q'^2).m'.\sqrt{a'}+(P''^2+Q''^2).m''.\sqrt{a''}+\&c.\}.c^{2ft}.$$

Si l'on suppose que c^{ft} soit la plus grande des exponentielles que contiennent h, l, h', l', &c., c'est-à-dire celle dans laquelle f est le plus considérable ; c^{2ft} sera la plus grande des exponentielles que renfermera le premier membre de l'équation précédente : le terme précédent ne pourra donc être détruit par aucun autre terme de ce premier membre ; ainsi pour que ce membre se réduise à une constante, il faut que le coefficient de c^{2ft} soit nul, ce qui donne

$$0=(P^2+Q^2).m.\sqrt{a}+(P'^2+Q'^2).m'.\sqrt{a'}+(P''^2+Q''^2).m''.\sqrt{a''}+\&c.$$

Lorsque $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$, &c., ont le même signe, ou, ce qui revient au même, lorsque les corps m, m', m'', circulent dans le même sens, cette équation est impossible, à moins que l'on ne suppose $P=0$, $Q=0$, $P'=0$, &c. ; d'où il suit que les quantités h, l, h', l', &c., ne renferment point d'exponentielles, et qu'ainsi, l'équation en g ne contient point de racines imaginaires.

Si cette équation avoit des racines égales ; les expressions de h, l, h', l', &c., renfermeroient, comme l'on sait, des arcs de cercle, et l'on auroit dans l'expression de h, un nombre fini de termes de la forme $P.t^r$. Soient $Q.t^r$, $P'.t^r$, $Q'.t^r$, &c., les termes correspondans de l, h', l', &c. ; P, Q, P', Q', &c., étant des quantités réelles ; le premier membre de l'équation (u) renfermera le terme

$$\{(P^2+Q^2).m.\sqrt{a}+(P'^2+Q'^2).m'.\sqrt{a'}+(P''^2+Q''^2).m''.\sqrt{a''}+\&c.\}.t^{2r}.$$

Si t^r est la plus haute puissance de t, que contiennent les valeurs de h, l, h', l', &c. ; t^{2r} sera la plus haute puissance de t, renfermée dans le premier membre de l'équation (u) ; ainsi pour que ce membre puisse se réduire à une constante, il faut que l'on ait

$$0=(P^2+Q^2).m.\sqrt{a}+(P'^2+Q'^2).m'.\sqrt{a'}+\&c. ;$$

ce qui donne $P=0$, $Q=0$, $P'=0$, $Q'=0$; &c. Les expressions de h, l, h', l', &c., ne renferment donc ni exponentielles, ni arcs de cercle, et par conséquent, toutes les racines de l'équation en g, sont réelles et inégales.

Le système des orbites de m, m', m'', &c., est donc parfaitement stable relativement à leurs excentricités; ces orbites ne font qu'osciller autour d'un état moyen d'ellipticité, dont elles s'écartent peu, en conservant les mêmes grands axes: leurs excentricités sont toujours assujéties à cette condition, savoir que la somme de leurs quarrés multipliés respectivement par les masses des corps, et par les racines quarrées des grands axes, est constamment la même.

58. Lorsque l'on aura déterminé par ce qui précède, les valeurs de e et de ϖ; on les substituera dans tous les termes des expressions de r, et $\frac{dv}{dt}$, données dans les n^{os}. précédens, en effaçant les termes qui renferment le temps t, hors des signes *sinus* et *cosinus*. La partie elliptique de ces expressions sera la même que dans le cas de l'orbite non troublée, avec la seule différence que l'excentricité et la position du périhélie, seront variables; mais les périodes de ces variations étant fort longues, à raison de la petitesse des masses m, m', m'', &c., relativement à M; on pourra supposer ces variations proportionnelles au temps, pendant un grand intervalle qui, pour les planètes, peut s'étendre à plusieurs siècles, avant et après l'époque où l'on fixe l'origine du temps. Il est utile, pour les usages astronomiques, d'avoir sous cette forme, les variations séculaires des excentricités et des périhélies des orbites: on peut facilement les conclure des formules précédentes. En effet, l'équation $e^2 = h^2 + l^2$, donne $ede = hdh + ldl$; or en n'ayant égard qu'à l'action de m', on a par le n°. 55,

$$\frac{dh}{dt} = (0,1).l - \boxed{0,1}.l';$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0,1).h + \boxed{0,1}.h';$$

partant

$$\frac{ede}{dt} = \boxed{0,1}.\{h'l - hl'\};$$

mais on a $h'l - hl' = ee'.\sin.(\varpi' - \varpi)$; on aura donc

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0,1}.e'.\sin.(\varpi' - \varpi);$$

ainsi, en ayant égard à l'action réciproque des différens corps m', m'', &c., on aura

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0,1}.e'.\sin.(\varpi' - \varpi) + \boxed{0,2}.e''.\sin.(\varpi'' - \varpi) + \&c.;$$

$$\frac{de'}{dt} = \boxed{1,0}.e.\sin.(\varpi - \varpi') + \boxed{1,2}.e''.\sin.(\varpi'' - \varpi') + \&c.;$$

$$\frac{de''}{dt} = \boxed{2,0}.e.\sin.(\varpi - \varpi'') + \boxed{2,1}.e'.\sin.(\varpi' - \varpi'') + \&c.;$$

&c.

L'équation $\text{tang.}\,\varpi = \frac{h}{l}$, donne en la différentiant,

$$e^2.d\varpi = l.dh - h.dl.$$

En n'ayant égard qu'à l'action de m', et substituant pour dh et dl, leurs valeurs, on aura

$$\frac{e^2.d\varpi}{dt} = (0,1).(h^2 + l^2) - \boxed{0,1}.\{hh' + ll'\};$$

ce qui donne

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) - \boxed{0,1}.\frac{e'}{e}.\cos.(\varpi' - \varpi);$$

on aura donc, en vertu des actions réciproques des corps m, m', m'', &c.,

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) + (0,2) + \&c. - \boxed{0,1}.\frac{e'}{e}.\cos.(\varpi' - \varpi) - \boxed{0,2}.\frac{e''}{e}.\cos.(\varpi'' - \varpi) - \&c.;$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = (1,0) + (1,2) + \&c. - \boxed{1,0}.\frac{e}{e'}.\cos.(\varpi - \varpi') - \boxed{1,2}.\frac{e''}{e'}.\cos.(\varpi'' - \varpi') - \&c.;$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = (2,0) + (2,1) + \&c. - \boxed{2,0}.\frac{e}{e''}.\cos.(\varpi - \varpi'') - \boxed{2,1}.\frac{e'}{e''}.\cos.(\varpi' - \varpi'') - \&c.$$

&c.

Si l'on multiplie ces valeurs de $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, &c., $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, &c., par le temps t; on aura les expressions différentielles des variations séculaires des excentricités et des périhélies, et ces expressions qui ne sont rigoureuses que lorsque t est infiniment petit, pourront cependant servir pendant un long intervalle, relativement aux planètes. Leur comparaison avec des observations précises et éloignées entre elles, est le moyen le plus exact de déterminer les masses des planètes qui n'ont point de satellites. On a pour un temps quelconque t, l'excentricité e égale à $e + t.\frac{de}{dt} + \frac{t^2}{1.2}.\frac{dde}{dt^2} + \&c.$; e, $\frac{de}{dt}$, $\frac{dde}{dt^2}$, &c., étant relatifs à l'origine du temps t, ou à l'époque. La valeur précédente de $\frac{de}{dt}$ donnera en la différentiant, et en observant que a, a', &c., sont constans, les valeurs de $\frac{dde}{dt^2}$, $\frac{d^3e}{dt^3}$, &c.; on pourra donc continuer aussi loin que l'on voudra, la série précédente, et par le même procédé, la série relative à ϖ: mais relativement aux planètes, il suffira, dans la comparaison des observations les plus anciennes qui nous soient parvenues, d'avoir égard au quarré du temps, dans les expressions en séries, de e, e', &c., ϖ, ϖ', &c.

59. Considérons présentement les équations relatives à la position des orbites. Reprenons pour cela les équations (3) et (4) du n°. 53,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m'n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(q-q');$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'n}{4}.a^2a'.B^{(1)}.(p-p').$$

On a par le n°. 49,

$$a^2a'.B^{(1)} = \alpha^2.b_{\frac{3}{2}}^{(1)};$$

on a ensuite par le même n°.,

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = -\frac{3.b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2};$$

on aura donc

$$\frac{m'n}{4}.a^2a'.B^{(1)} = -\frac{3m'.n.\alpha^2b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{4.(1-\alpha^2)^2}.$$

Le second membre de cette équation est ce que nous avons désigné par $(0, 1)$ dans le n°. 55; on aura ainsi,

$$\frac{dp}{dt} = (0, 1) \cdot (q' - q) ;$$

$$\frac{dq}{dt} = (0, 1) \cdot (p - p') ;$$

De-là, il est aisé de conclure que les valeurs de q, p, q', p', &c., seront déterminées par le système suivant d'équations différentielles,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dq}{dt} &= \{(0,1)+(0,2)+\&c.\} \cdot p - (0,1) \cdot p' - (0,2) \cdot p'' - \&c. \\
\frac{dp}{dt} &= -\{(0,1)+(0,2)+\&c.\} \cdot q + (0,1) \cdot q' + (0,2) \cdot q'' + \&c. \\
\frac{dq'}{dt} &= \{(1,0)+(1,2)+\&c.\} \cdot p' - (1,0) \cdot p - (1,2) \cdot p'' - \&c. \\
\frac{dp'}{dt} &= -\{(1,0)+(1,2)+\&c.\} \cdot q' + (1,0) \cdot q + (1,2) \cdot q'' + \&c. \\
\frac{dq''}{dt} &= \{(2,0)+(2,1)-\&c.\} \cdot p'' - (2,0) \cdot p - (2,1) \cdot p' - \&c. \\
\frac{dp''}{dt} &= -\{2,0)+(2,1)+\&c.\} \cdot q'' + (2,0) \cdot q + (2,1) \cdot q' + \&c. \\
\&c.
\end{aligned}\right\} ; (C)$$

Ce système d'équations est semblable à celui des équations (A) du n°. 55 : il coincideroit entièrement avec lui, si dans les équations (A), on changeoit h, l, h', l', &c., en q, p, q', p', &c., et si l'on supposoit $\boxed{0,1} = (0, 1)$; $\boxed{1,0} = (1, 0)$, &c. ; ainsi, l'analyse dont nous avons fait usage dans le n°. 56, pour intégrer les équations (A), s'applique aux équations (C). On supposera donc

$$q = N \cdot \cos.(gt + \epsilon) + N_1 \cdot \cos.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2 \cdot \cos.(g_2 t + \epsilon_2) + \&c. ;$$

$$p = N \cdot \sin.(gt + \epsilon) + N_1 \cdot \sin.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2 \cdot \sin.(g_2 t + \epsilon_2) + \&c. ;$$

$$q' = N' \cdot \cos.(gt + \epsilon) + N_1' \cdot \cos.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2' \cdot \cos.(g_2 t + \epsilon_2) + \&c. ;$$

$$p' = N' \cdot \sin.(gt + \epsilon) + N_1' \cdot \sin.(g_1 t + \epsilon_1) + N_2' \cdot \sin.(g_2 t + \epsilon_2) + \&c. ;$$

&c.

et l'on aura par le n°. 56, une équation en g du degré i, et dont les diverses racines seront g, g_1, g_2, &c. Il est facile de voir qu'une de ces racines est nulle; car il est clair que l'on satisfait aux équations (C), en y supposant p, p', p'', &c., égaux et constans, ainsi que q, q', q'', &c.; ce qui exige que l'une des racines de l'équation en g, soit zéro, et ce qui l'abaisse au degré $i-1$. Les arbitraires N, N_1, N', &c. β, β_1, &c., se détermineront par la méthode exposée dans le n°. 56. Enfin, on trouvera par l'analyse du n°. 57,

$$\text{const.} = (p^2+q^2).m.\sqrt{a} + (p'^2+q'^2).m'.\sqrt{a'} + \&c.;$$

d'où l'on conclura, comme dans le n°. cité, que les expressions de p, q, p', q', &c., ne renferment ni arcs de cercle, ni exponentielles, lorsque les corps m, m', m'', &c., circulent dans le même sens; et qu'ainsi, l'équation en g, a toutes ses racines réelles et inégales.

On peut obtenir deux autres intégrales des équations (C). En effet, si l'on multiplie la première de ces équations par $m.\sqrt{a}$, la troisième, par $m'.\sqrt{a'}$, la cinquième, par $m''.\sqrt{a''}$, &c.; on aura en vertu des relations trouvées dans le n°. 55,

$$0 = \frac{dq}{dt}.m.\sqrt{a} + \frac{dq'}{dt}.m'.\sqrt{a'} + \&c.;$$

ce qui donne en intégrant,

$$\text{constante} = q.m.\sqrt{a} + q'.m'.\sqrt{a'} + \&c. \qquad (1)$$

On trouvera de la même manière,

$$\text{constante} = p.m.\sqrt{a} + p'.m'.\sqrt{a'} + \&c. \qquad (2)$$

Nommons φ l'inclinaison de l'orbite de m, sur le plan fixe, et θ, la longitude du nœud ascendant de cette orbite sur le même plan; la latitude de m sera à très-peu près, tang. φ.sin. $(nt+\varepsilon-\theta)$. En comparant cette valeur à celle-ci, q.sin. $(nt+\varepsilon)-p$.cos. $(nt+\varepsilon)$, on aura

$$p = \text{tang.}\,\varphi.\text{sin.}\,\theta; \qquad q = \text{tang.}\,\varphi.\text{cos.}\,\theta;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\,\varphi = \sqrt{p^2+q^2}; \qquad \text{tang.}\,\theta = \frac{p}{q};$$

on aura donc l'inclinaison de l'orbite de m, et la position de son nœud, au moyen des valeurs de p et de q. En marquant successivement d'un trait, de deux traits, &c., relativement à m', m'', &c., les valeurs de tang. φ et de tang. θ; on aura les inclinaisons des orbites de m', m'', &c., et les positions de leurs nœuds, au moyen des quantités p', q', p'', q'', &c.

La quantité $\sqrt{p^2+q^2}$, est moindre que la somme $N+N_1+N_2+$&c., des coefficiens des sinus de l'expression de q; ainsi, ces coefficiens étant fort petits, puisque l'orbite est supposée peu inclinée au plan fixe, son inclinaison sur ce plan, sera toujours peu considérable; d'où il suit que le système des orbites est aussi stable relativement à leurs inclinaisons, que par rapport à leurs excentricités. On peut donc considérer les inclinaisons des orbites, comme des quantités variables comprises entre des limites déterminées, et les mouvemens des nœuds, comme n'étant pas uniformes. Ces variations sont très-sensibles dans les satellites de Jupiter, et nous verrons dans la suite, qu'elles expliquent les phénomènes singuliers observés dans l'inclinaison de l'orbite du quatrième satellite.

Des expressions précédentes de p et de q, résulte ce théorême :

Que l'on imagine un cercle dont l'inclinaison au plan fixe soit N, et dont $gt+\mathcal{C}$ soit la longitude du nœud ascendant; que sur ce premier cercle, on imagine un second cercle qui lui soit incliné de N_1, et dont $g_1t+\mathcal{C}_1$ soit la longitude de son intersection avec le premier cercle; que sur ce second cercle, on imagine un troisième cercle, qui lui soit incliné de N_2, et dont $g_2t+\mathcal{C}_2$ soit la longitude de son intersection avec le second cercle, et ainsi de suite; la position du dernier cercle sera celle de l'orbite de m.

En appliquant la même construction, aux expressions de h et de l du n°. 56; on voit que la tangente de l'inclinaison du dernier cercle sur le plan fixe, est égale à l'excentricité de l'orbite de m, et que la longitude de l'intersection de ce cercle, avec le même plan, est égale à celle du périhélie de l'orbite de m.

60. Il est utile, pour les usages astronomiques, d'avoir les variations différentielles des nœuds et des inclinaisons des orbites. Pour cela, reprenons les équations du n°. précédent,

$$\text{tang.}\,\varphi = \sqrt{p^2+q^2}\;; \qquad \text{tang.}\,\theta = \frac{p}{q}.$$

En

En les différentiant, on aura

$$d\varphi = dp.\sin.\theta + dq.\cos.\theta\,;$$

$$d\theta = \frac{dp.\cos.\theta - dq.\sin.\theta}{\tang.\varphi}.$$

Si l'on substitue pour dp et dq, leurs valeurs données par les équations (C) du n°. précédent, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = (0,1).\tang.\varphi'.\sin.(\theta - \theta') + (0,2).\tang.\varphi''.\sin(\theta - \theta'') + \&c.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\{(0,1) + (0,2) + \&c.\} + (0,1).\frac{\tang.\varphi'}{\tang.\varphi}.\cos.(\theta - \theta')$$
$$+ (0,2).\frac{\tang.\varphi''}{\tang.\varphi}.\cos.(\theta - \theta'') + \&c.\,;$$

on aura pareillement,

$$\frac{d\varphi'}{dt} = (1,0).\tang.\varphi.\sin.(\theta' - \theta) + (1,2).\tang.\varphi''.\sin.(\theta' - \theta'') + \&c.;$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -\{(1,0) + (1,2) + \&c.\} + (1,0).\frac{\tang.\varphi}{\tang.\varphi'}.\cos.(\theta' - \theta)$$
$$+ (1,2).\frac{\tang.\varphi''}{\tang.\varphi'}.\cos.(\theta' - \theta'') + \&c.$$

&c.

Les Astronomes rapportent les mouvemens célestes, à l'orbite mobile de la terre; c'est en effet, du plan de cette orbite, que nous les observons; il importe donc de connoître les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, relativement à l'écliptique. Supposons ainsi, que l'on veuille déterminer les variations différentielles des nœuds et des inclinaisons des orbites, relativement à l'orbite de l'un des corps m, m', m'', &c., par exemple, à l'orbite de m. Il est clair que $q.\sin.(n't + \varepsilon') - p.\cos.(n't + \varepsilon')$ seroit la latitude de m' au-dessus du plan fixe, s'il étoit en mouvement sur l'orbite de m. Sa latitude au-dessus du même plan, est $q'.\sin.(n't + \varepsilon') - p'.\cos.(n't + \varepsilon')$; or la différence de ces deux latitudes est à très-peu près la latitude de m' au-dessus de l'orbite de m; en nommant donc $\varphi_{\prime}'$ l'inclinaison, et $\theta_{\prime}'$ la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite de m, on aura par ce qui précède,

$$\tang.\varphi_{\prime}' = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}\,; \qquad \tang.\theta_{\prime}' = \frac{p' - p}{q' - q}.$$

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'orbite de m, à une époque donnée; on aura à cette époque, $p=0$, $q=0$; mais les différentielles dp et dq ne seront pas nulles; ainsi l'on aura

$$d\varphi_{\prime}'=(dp'-dp).\sin.\theta'+(dq'-dq).\cos.\theta';$$

$$d\theta_{\prime}'=\frac{(dp'-dp).\cos.\theta'-(dq'-dq).\sin.\theta'}{\text{tang}.\varphi'}.$$

En substituant pour dp, dq, dp', dq', &c., leurs valeurs données par les équations (C) du n°. précédent; on aura

$$\frac{d\varphi_{\prime}'}{dt}=\{(1,2)-(0,2)\}.\text{tang}.\varphi''.\sin.(\theta'-\theta'')$$
$$+\{(1,3)-(0,3)\}.\text{tang}.\varphi'''.\sin.(\theta'-\theta''')+\text{\&c.};$$

$$\frac{d\theta_{\prime}'}{dt}=-\{(1,0)+(1,2)+(1,3)+\text{\&c.}\}-(0,1)$$
$$+\{(1,2)-(0,2)\}.\frac{\text{tang}.\varphi''}{\text{tang}.\varphi'}.\cos.(\theta'-\theta'')$$
$$+\{(1,3)-(0,3)\}.\frac{\text{tang}.\varphi'''}{\text{tang}.\varphi'}.\cos.(\theta'-\theta''')+\text{\&c.}$$

Il est facile de conclure de ces expressions, les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites des autres corps m'', m''', &c., sur l'orbite mobile de m.

61. Les intégrales trouvées précédemment, des équations différentielles qui déterminent les variations des élémens des orbites, ne sont qu'approchées, et les relations qu'elles donnent entre tous ces élémens, n'ont lieu qu'en supposant les excentricités des orbites et leurs inclinaisons, fort petites. Mais les intégrales (4), (5), (6) et (7), auxquelles nous sommes parvenus dans le n°. 9, donnent ces mêmes rapports, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons. Pour cela, nous observerons que $\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}$ est le double de l'aire décrite durant l'instant dt, par la projection du rayon vecteur de la planète m, sur le plan des x et des y. Dans le mouvement elliptique, si l'on néglige la masse de la planète, vis-à-vis de celle du soleil, prise pour unité; on a par les n^{os}. 19 et 20, relativement au plan de l'orbite de m,

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{dt}=\sqrt{a.(1-e^2)}.$$

Pour rapporter au plan fixe, l'aire sur l'orbite, il faut la multiplier par le cosinus de l'inclinaison φ, de l'orbite à ce plan; on aura donc par rapport à ce plan,

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=\cos.\varphi.\sqrt{a.(1-e^2)}=\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi}};$$

on aura pareillement,

$$\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}=\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi'}};$$

&c.

Ces valeurs de $xdy-ydx$, $x'dy'-y'dx'$, &c., peuvent être employées, lorsque l'on fait abstraction des inégalités du mouvement des planètes, pourvu que l'on considère les élémens e, e', &c., φ, φ', &c., comme variables, en vertu des inégalités séculaires; l'équation (4) du n°. 9, donnera donc alors

$$c=m.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi}}+m'.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi'}}+\&c.$$
$$+\Sigma.mm'.\left\{\frac{(x'-x).(dy'-dy)-(y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right\}.$$

En négligeant ce dernier terme qui reste toujours de l'ordre mm', on aura

$$c=m.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi}}+m'.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi'}}+\&c.$$

Ainsi, quels que soient les changemens que la suite des temps apporte aux valeurs de e, e', &c., φ, φ', &c., en vertu des variations séculaires; ces valeurs doivent toujours satisfaire à l'équation précédente.

Si l'on néglige les quantités très-petites de l'ordre e^4 ou $e^2\varphi^2$, cette équation donnera

$$c=m.\sqrt{a}+m'.\sqrt{a'}+\&c.-\tfrac{1}{2}.m.\sqrt{a}.\{e^2+\text{tang.}^2\varphi\}$$
$$-\tfrac{1}{2}.m'.\sqrt{a'}.\{e'^2+\text{tang.}^2\varphi'\}-\&c.;$$

et par conséquent, si l'on néglige les quarrés de e, e', φ, &c., on aura $m.\sqrt{a}+m'.\sqrt{a'}+$ &c. constant. On a vu précédemment, que si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, a, a', &c. sont constans séparément; l'équation précédente donnera donc, en négligeant les quantités très-petites de l'ordre e^4, ou $e^2\varphi^2$,

$$\text{const.} = m.\sqrt{a}.\{e^2 + \text{tang.}^2\varphi\} + m'.\sqrt{a'}.\{e'^2 + \text{tang.}^2\varphi'\} + \&c.;$$

Dans la supposition des orbites presque circulaires, et peu inclinées les unes aux autres, les variations séculaires des excentricités des orbites, sont par le n°. 55, déterminées au moyen d'équations différentielles indépendantes des inclinaisons, et qui par conséquent sont les mêmes que si les orbites étoient dans un même plan; or on a dans cette hypothèse, $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, &c.; l'équation précédente devient ainsi,

$$\text{const.} = e^2 m.\sqrt{a} + e'^2 m'.\sqrt{a'} + e''^2.m''.\sqrt{a''} + \&c.;$$

équation à laquelle nous sommes déjà parvenus dans le n°. 57.

Pareillement, les variations séculaires des inclinaisons des orbites, sont par le n°. 59, déterminées au moyen d'équations différentielles indépendantes des excentricités, et qui par conséquent sont les mêmes que si les orbites étoient circulaires; or on a dans cette hypothèse, $e = 0$, $e' = 0$, &c.; partant, on aura

$$\text{const.} = m.\sqrt{a}.\text{tang.}^2\varphi + m'.\sqrt{a'}.\text{tang.}^2\varphi' + m''.\sqrt{a''}.\text{tang.}^2\varphi'' + \&c.,$$

équation à laquelle nous sommes parvenus dans le n°. 59.

Si l'on suppose, comme dans ce dernier n°.,

$$p = \text{tang.}\,\varphi.\sin.\theta; \qquad q = \text{tang.}\,\varphi.\cos.\theta;$$

il est facile de s'assurer que l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan des x et des y, étant φ, et la longitude de son nœud ascendant, comptée de l'axe des x, étant θ; le cosinus de l'inclinaison de cette orbite sur le plan des x et des z, sera

$$\frac{q}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2\varphi}}.$$

En multipliant cette quantité par $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$, ou par sa valeur $\sqrt{a.(1-e^2)}$, on aura la valeur de $\frac{x\,dz - z\,dx}{dt}$; l'équation (5) du n°. 9, donnera donc, en négligeant les quantités de l'ordre m^2,

$$c' = m.q.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi}} + m'.q'.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi'}} + \&c.$$

On trouvera pareillement que l'équation (6) du n°. 9, donne

$$c'' = m.p.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi}} + m'.p'.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang.}^2\varphi'}} + \&c.$$

Si dans ces deux équations, on néglige les quantités de l'ordre e^3, ou $e^2.\varphi$; elles deviennent

$$\text{const.} = mq.\sqrt{a} + m'q'.\sqrt{a'} + \&c.$$
$$\text{const.} = mp.\sqrt{a} + m'p'.\sqrt{a'} + \&c.;$$

équations auxquelles nous sommes déjà parvenus dans le n°. 59.

Enfin, l'équation (7) du n°. 9, donnera, en observant que par le n°. 18, $\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}$, et en négligeant les quantités de l'ordre mm',

$$\text{const.} = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c.$$

Ces diverses équations subsistent eu égard aux inégalités à très-longues périodes, qui peuvent affecter les élémens des orbites de m, m', &c. Nous avons observé dans le n°. 54, que le rapport des moyens mouvemens de ces corps, peuvent introduire dans les expressions des grands axes des orbites considérées comme variables, des inégalités dont les argumens proportionnels au temps, croissent avec beaucoup de lenteur, et qui ayant pour diviseurs, les coefficiens du temps t, dans ces argumens, peuvent devenir sensibles. Or il est visible qu'en n'ayant égard qu'aux termes qui ont de semblables diviseurs, et en considérant les orbites comme des ellipses dont les élémens varient à raison de ces termes, les intégrales (4), (5), (6) et (7) du n°. 9, donneront toujours les relations que nous venons de trouver entre ces élémens; parce que les termes de l'ordre mm' que nous avons négligés dans ces intégrales, pour en conclure ces relations, n'ont point pour diviseurs, les très-petits coefficiens dont nous venons de parler, ou du moins, ils ne les renferment, que multipliés par une puissance des forces perturbatrices, supérieure à celle que l'on considère.

62. Nous avons observé dans les n°s. 21 et 22 du premier Livre, que dans le mouvement d'un système de corps, il existe un

plan invariable ou conservant toujours une situation parallèle, qu'il est facile de retrouver dans tous les temps, par cette condition, que la somme des masses du système, multipliées respectivement par les projections des aires décrites par leurs rayons vecteurs, dans un temps donné, est un *maximum*. C'est principalement dans la théorie du système solaire, que la recherche de ce plan est importante, vu les mouvemens propres des étoiles et de l'écliptique, qui rendent très-difficile aux Astronomes, la détermination précise des mouvemens célestes. Si l'on nomme γ l'inclinaison de ce plan invariable, sur celui des x et des y, et Π la longitude de son nœud ascendant; il résulte de ce que nous avons démontré dans les nos. 21 et 22 du premier Livre, que l'on aura

$$\text{tang.}\,\gamma.\,\text{sin.}\,\Pi = \frac{c''}{c}\,; \qquad \text{tang.}\,\gamma.\,\text{cos.}\,\Pi = \frac{c'}{c}\,;$$

et par conséquent,

$$\text{tang.}\gamma.\text{sin.}\Pi = \frac{m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\text{sin.}\varphi.\text{sin.}\theta + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\text{sin.}\varphi'.\text{sin.}\theta' + \&\text{c.}}{m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\text{cos.}\varphi + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\text{cos.}\varphi' + \&\text{c.}}$$

$$\text{tang.}\gamma.\text{cos.}\Pi = \frac{m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\text{sin.}\varphi.\text{cos.}\theta + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\text{sin.}\varphi'.\text{cos.}\theta' + \&\text{c.}}{m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\text{cos.}\varphi + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\text{cos.}\varphi' + \&\text{c.}}.$$

On déterminera facilement, au moyen de ces valeurs, les deux angles γ et Π. On voit que pour déterminer le plan invariable, il faudroit connoître les masses des comètes, et les élémens de leurs orbites; heureusement, ces masses paroissent être fort petites, en sorte que l'on peut, sans erreur sensible, négliger leur action sur les planètes; mais le temps seul peut nous éclairer sur ce point. On peut observer ici, que relativement à ce plan invariable, les valeurs de p, q, p', q', &c., ne renferment point de termes constans; car il est visible, par les équations (C) du no. 59, que ces termes sont les mêmes pour p, p', p'', &c., et qu'ils sont encore les mêmes pour q, q', q'', &c.; et comme relativement au plan invariable, les constantes des premiers membres des équations (1) et (2) du no. 59, sont nuls; les termes constans disparoissent en vertu de ces équations, des expressions de p, p', &c, q, q', &c.

Considérons le mouvement de deux orbites, en les supposant inclinées l'une à l'autre, d'un angle quelconque; on aura par le n°. 61,

$$c' = \sin.\varphi.\cos.\theta.m.\sqrt{a.(1-e^2)} + \sin.\varphi'.\cos.\theta'.m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)};$$

$$c'' = \sin.\varphi.\sin.\theta.m.\sqrt{a.(1-e^2)} + \sin.\varphi'.\sin.\theta'.m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)};$$

Supposons que le plan fixe auquel on rapporte le mouvement des orbites, soit le plan invariable dont nous venons de parler, et par rapport auquel les constantes des premiers membres de ces équations, sont nulles, comme on l'a vu dans les n^{os}. 21 et 22 du premier Livre. Les angles φ et φ' étant positifs, les équations précédentes donnent les suivantes :

$$m.\sqrt{a.(1-e^2)}.\sin.\varphi = m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varphi';$$

$$\sin.\theta = -\sin.\theta'; \qquad \cos.\theta = -\cos.\theta';$$

d'où l'on tire $\theta' = \theta +$ la demi-circonférence; les nœuds des orbites sont par conséquent sur la même ligne; mais le nœud ascendant de l'une coincide avec le nœud descendant de l'autre; en sorte que l'inclinaison mutuelle des deux orbites, est égale à $\varphi + \varphi'$.

On a par le n°. 61,

$$c = m.\sqrt{a(1-e^2)}.\cos.\varphi + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\cos.\varphi';$$

en combinant cette équation avec la précédente entre $\sin.\varphi$ et $\sin.\varphi'$, on aura

$$2mc.\cos.\varphi.\sqrt{a.(1-e^2)} = c^2 + m^2.a.(1-e^2) - m'^2.a'.(1-e'^2).$$

Si l'on suppose les orbites circulaires, ou du moins, assez peu excentriques pour que l'on puisse négliger les quarrés de leurs excentricités; l'équation précédente donnera φ constant : par la même raison, φ' sera constant; les inclinaisons des plans des orbites sur le plan fixe, et sur elles-mêmes, seront donc alors constantes, et ces trois plans auront toujours une intersection commune. Il en résulte que la variation moyenne instantanée de cette intersection est toujours la même; puisqu'elle ne peut être qu'une fonction de ces inclinaisons. Lorsqu'elles sont fort petites, on trouvera facilement par le n°. 60, et en vertu de la relation précédente entre $\sin.\varphi$ et $\sin.\varphi'$, que pour le temps t, le mouvement de cette intersection est $-\{(0,1)+(1,0)\}.t.$

La position du plan invariable auquel nous venons de rapporter le mouvement des orbites, est facile à déterminer pour un instant quelconque ; car il ne s'agit que de partager l'angle de l'inclinaison mutuelle des orbites, en deux angles φ et φ', tels que l'on ait l'équation précédente entre sin. φ et sin. φ'. En désignant donc par ϖ, cette mutuelle inclinaison, on aura

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin.\varpi}{m.\sqrt{a.(1-e^2)}+m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\cos.\varpi}.$$

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Seconde méthode d'approximation des mouvemens célestes.

63. On a vu dans le Chapitre II, que les coordonnées des corps célestes, rapportées aux foyers des forces principales qui les animent, sont déterminées par des équations différentielles du second ordre. Nous avons intégré ces équations dans le Chapitre III, en n'ayant égard qu'aux forces principales, et nous avons fait voir que dans ce cas, les orbites sont des sections coniques dont les élémens sont les constantes arbitraires introduites par les intégrations. Les forces perturbatrices n'ajoutant que de petites inégalités, au mouvement elliptique; il est naturel de chercher à ramener aux loix de ce mouvement, le mouvement troublé des corps célestes. Si l'on applique aux équations différentielles du mouvement elliptique, augmentées des petits termes dus aux forces perturbatrices, la méthode d'approximation exposée dans le n°.45; on pourra encore considérer les mouvemens célestes dans les orbites rentrantes, comme étant elliptiques; mais les élémens de ce mouvement, seront variables, et l'on aura leurs variations par cette méthode. Il en résulte que les équations du mouvement, étant différentielles du second ordre, non-seulement leurs intégrales finies, mais encore leurs intégrales infiniment petites du premier ordre, sont les mêmes que dans le cas des ellipses invariables; en sorte que l'on peut différentier les équations finies du mouvement elliptique, en traitant les élémens de ce mouvement, comme constans. Il résulte encore de la même méthode, que les équations de ce mouvement, différentielles du premier ordre, peuvent être différentiées, en n'y faisant varier que les élémens des orbites, et les premières différences des coordonnées; pourvu qu'au lieu des différences secondes de ces coordonnées, on ne substitue que la partie de leurs valeurs, due aux forces perturbatrices.

Ces résultats peuvent être immédiatement tirés de la considération du mouvement elliptique.

Pour cela, concevons une ellipse passant par une planète et par l'élément de la courbe qu'elle décrit, et dont le centre du soleil occupe le foyer. Cette ellipse est celle que la planète décriroit invariablement, si les forces perturbatrices cessoient d'agir sur elle. Ses élémens sont constans pendant l'instant dt; mais ils varient d'un instant à l'autre. Soit donc $V=0$, une équation finie à l'ellipse invariable, V étant fonction des coordonnées rectangles x, y, z, et des paramètres c, c', &c., qui sont fonctions des élémens du mouvement elliptique. Cette équation aura encore lieu pour l'ellipse variable; mais les paramètres c, c', &c., ne seront plus constans. Cependant, puisque cette ellipse appartient à l'élément de la courbe décrite par la planète, durant l'instant dt; l'équation $V=0$ aura encore lieu pour le premier et le dernier point de cet élément, en regardant c, c', &c., comme constans. On peut donc différentier cette équation une première fois, en n'y faisant varier que x, y, z, ce qui donne

$$0=\left(\frac{dV}{dx}\right).dx+\left(\frac{dV}{dy}\right).dy+\left(\frac{dV}{dz}\right).dz\,; \qquad (i)$$

On voit ainsi la raison pour laquelle les équations finies de l'ellipse invariable, peuvent, dans le cas de l'ellipse variable, être différentiées une première fois, en traitant les paramètres comme constans. Par la même raison, toute équation différentielle du premier ordre, à l'ellipse invariable, a également lieu pour l'ellipse variable; car soit $V'=0$ une équation de cet ordre, V' étant fonction de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et des paramètres c, c', &c. Il est clair que toutes ces quantités sont les mêmes pour l'ellipse variable, que pour l'ellipse invariable qui coincide avec elle, pendant l'instant dt.

Présentement, si nous considérons la planète, à la fin de l'instant dt, ou au commencement de l'instant suivant; la fonction V ne variera de l'ellipse relative à l'instant dt, à l'ellipse consécutive, que par la variation des paramètres, puisque les coordonnées x, y, z, relatives à la fin du premier instant, sont les mêmes pour ces deux ellipses ; ainsi, la fonction V étant nulle, on a

$$o = \left(\frac{dV}{dc}\right).dc + \left(\frac{dV}{dc'}\right).dc' + \&c. ; \qquad (i')$$

Cette équation peut se déduire encore de l'équation $V = o$, en y faisant varier à la fois, x, y, z, c, c', &c. ; car si l'on retranche l'équation (i), de cette différentielle, on aura l'équation (i').

En différentiant l'équation (i), on aura une nouvelle équation en dc, dc', &c., qui avec l'équation (i'), servira à déterminer les paramètres c, c', &c. C'est ainsi que les Géomètres qui se sont occupés les premiers, de la théorie des perturbations célestes, ont déterminé les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites : mais on peut simplifier cette différentiation, de la manière suivante.

Considérons généralement l'équation différentielle du premier ordre $V' = o$, équation qui, comme on vient de le voir, convient également à l'ellipse variable, et à l'ellipse invariable qui, dans l'instant dt, coincide avec elle. Dans l'instant suivant, cette équation convient encore aux deux ellipses, mais avec cette différence, que c, c', &c., restent les mêmes dans le cas de l'ellipse invariable, au lieu qu'ils changent avec l'ellipse variable. Soit V'' ce que devient V', lorsque l'ellipse est supposée invariable ; soit $V'_{\prime}$ ce que devient cette même fonction, dans le cas de l'ellipse variable. Il est clair que pour avoir V'', il faut changer dans V', les coordonnées x, y, z, qui sont relatives au commencement du premier instant dt, dans celles qui sont relatives au commencement du second instant ; il faut ensuite, augmenter les différences premières dx, dy, dz, respectivement des quantités ddx, ddy, ddz, relatives à l'ellipse invariable, l'élément dt du temps, étant supposé constant.

Pareillement, pour avoir $V'_{\prime}$, il faut changer dans V', les coordonnées x, y, z, dans celles qui sont relatives au commencement du second instant, et qui sont encore les mêmes dans les deux ellipses ; il faut ensuite augmenter dx, dy, dz, respectivement des quantités ddx, ddy, ddz ; enfin, il faut changer les paramètres c, c', &c., dans $c+dc$, $c'+dc'$; &c.

Les valeurs de ddx, ddy, ddz, ne sont pas les mêmes dans les deux ellipses ; elles sont augmentées, dans le cas de l'ellipse variable, des quantités dues aux forces perturbatrices. On voit ainsi que les deux fonctions V'' et $V'_{\prime}$ ne diffèrent qu'en ce que dans la seconde, les paramètres c, c', &c., croissent de dc, dc', &c.; et les valeurs de ddx, ddy, ddz, relatives à l'ellipse invariable, y sont augmentées des quantités dues aux forces perturbatrices. On formera donc $V'_{\prime}-V''$, en différentiant V', dans la supposition de x, y, z, constans, et de dx, dy, dz, c, c', &c., variables, pourvu que dans cette différentielle, on substitue pour ddx, ddy, ddz, &c., les parties de leurs valeurs, uniquement dues aux forces perturbatrices.

Maintenant, si dans la fonction $V''-V'$, on substitue au lieu de ddx, ddy, ddz, leurs valeurs relatives au mouvement elliptique, on aura une fonction de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c, c', &c., qui dans le cas de l'ellipse invariable, est nulle; cette fonction est donc encore nulle dans le cas de l'ellipse variable. On a évidemment dans ce dernier cas, $V'_{\prime}-V'=0$; puisque cette équation est la différentielle de l'équation $V'=0$: en en retranchant l'équation $V''-V'=0$, on aura $V'_{\prime}-V''=0$. Ainsi l'on peut dans ce cas, différentier l'équation $V'=0$, en n'y faisant varier que dx, dy, dz, c, c', &c., pourvu que l'on substitue pour ddx, ddy, ddz, les parties de leurs valeurs, relatives aux forces perturbatrices. Ces résultats sont exactement les mêmes que ceux auxquels nous sommes parvenus dans le n°. 45, par des considérations purement analytiques ; mais vu leur importance, nous avons cru devoir les déduire ici, de la considération du mouvement elliptique. Cela posé,

64. Reprenons les équations (P) du n°. 46,

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{ddx}{dt^2}+\frac{\mu . x}{r^3}+\left(\frac{dR}{dx}\right); \\ 0&=\frac{ddy}{dt^2}+\frac{\mu . y}{r^3}+\left(\frac{dR}{dy}\right); \\ 0&=\frac{ddz}{dt^2}+\frac{\mu . z}{r^3}+\left(\frac{dR}{dz}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (P)$$

Si l'on suppose $R=0$, on aura les équations du mouvement elliptique, que nous avons intégrées dans le Chapitre III. Nous sommes parvenus dans le n°. 18, aux sept intégrales suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
c=\dfrac{xdy-ydx}{dt}; \quad c'=\dfrac{xdz-zdx}{dt}; \quad c''=\dfrac{ydz-zdy}{dt}; \\
0=f+x.\left\{\dfrac{\mu}{r}-\left(\dfrac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right)\right\}+\dfrac{ydy.dx}{dt^2}+\dfrac{zdz.dx}{dt^2}; \\
0=f'+y.\left\{\dfrac{\mu}{r}-\left(\dfrac{dx^2+dz^2}{dt^2}\right)\right\}+\dfrac{xdx.dy}{dt^2}+\dfrac{zdz.dy}{dt^2}; \\
0=f''+z.\left\{\dfrac{\mu}{r}-\left(\dfrac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)\right\}+\dfrac{xdx.dz}{dt^2}+\dfrac{ydy.dz}{dt^2}; \\
0=\dfrac{\mu}{a}-\dfrac{2\mu}{r}+\left(\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right).
\end{array}\right\} \quad (p)$$

Ces intégrales donnant les arbitraires, en fonctions des coordonnées et de leurs premières différences ; elles sont sous une forme très-commode, pour déterminer les variations de ces arbitraires. Les trois premières intégrales donnent en les différentiant, et en ne faisant varier par le n°. précédent, que les paramètres c, c', c'', et les premières différences des coordonnées,

$$dc=\frac{x.ddy-y.ddx}{dt}; \quad dc'=\frac{x.ddz-z.ddx}{dt}; \quad dc''=\frac{y.ddz-z.ddy}{dt}.$$

En substituant, au lieu de ddx, ddy, ddz, les parties de leurs valeurs dues aux forces perturbatrices, et qui en vertu des équations différentielles (P), sont $-dt^2.\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dy}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dz}\right)$; on aura

$$dc=dt.\left\{y.\left(\frac{dR}{dx}\right)-x.\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\};$$

$$dc'=dt.\left\{z.\left(\frac{dR}{dx}\right)-x.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\};$$

$$dc''=dt.\left\{z.\left(\frac{dR}{dy}\right)-y.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\}.$$

On a vu dans les n^{os}. 18 et 19, que les paramètres c, c', c'', déterminent trois élémens de l'orbite elliptique, savoir, l'inclinaison φ

de l'orbite, sur le plan des x et des y, et la longitude θ de son nœud, au moyen des équations

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}\,; \qquad \text{tang.}\,\theta = \frac{c''}{c'}\,;$$

et le demi-paramètre $a.(1-e^2)$, de l'ellipse, au moyen de l'équation

$$\mu a.(1-e^2) = c^2 + c'^2 + c''^2.$$

Ces mêmes équations subsistent encore dans le cas de l'ellipse variable, pourvu que l'on détermine c, c', c'', au moyen des équations différentielles précédentes. On aura ainsi le paramètre de l'ellipse variable, son inclinaison sur le plan fixe des x et des y, et la position de son nœud.

Les trois premières des équations (p) nous ont donné dans le n°. 19, l'intégrale finie, $0 = c''x - c'y + cz$: cette équation subsiste encore dans le cas de l'ellipse troublée, ainsi que sa première différence, $0 = c''.dx - c'.dy + c.dz$, prise en regardant c, c', c'', comme constans.

Si l'on différentie la quatrième, la cinquième et la sixième des intégrales (p), en n'y faisant varier que les paramètres f, f', f'', et les différences dx, dy, dz ; si l'on substitue ensuite, au lieu de ddx, ddy, ddz, les quantités $-dt^2.\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dy}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dz}\right)$, on aura

$$df = dy.\left\{y.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\} + dz.\left\{z.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\}$$
$$+ (y\,dx - x\,dy).\left(\frac{dR}{dy}\right) + (z\,dx - x\,dz).\left(\frac{dR}{dz}\right);$$

$$df' = dx.\left\{x.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dx}\right)\right\} + dz.\left\{z.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\}$$
$$+ (x\,dy - y\,dx).\left(\frac{dR}{dx}\right) + (z\,dy - y\,dz).\left(\frac{dR}{dz}\right);$$

$$df'' = dx.\left\{x.\left(\frac{dR}{dz}\right) - z.\left(\frac{dR}{dx}\right)\right\} + dy.\left\{y.\left(\frac{dR}{dz}\right) - z.\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\}$$
$$+ (x\,dz - z\,dx).\left(\frac{dR}{dx}\right) + (y\,dz - z\,dy).\left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Enfin, la septième des intégrales (p), différentiée de la même manière, donnera la variation du demi-grand axe a, au moyen de l'équation

$$d.\frac{\mu}{a} = 2.\mathrm{d}R,$$

la différentielle $\mathrm{d}R$ se rapportant aux seules coordonnées x, y, z, du corps m.

Les valeurs de f, f', f'', déterminent la longitude de la projection du périhélie de l'orbite, sur le plan fixe, et le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; car I étant la longitude de cette projection, on a par le n°. 19,

$$\text{tang.}\, I = \frac{f'}{f};$$

et e étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, on a par le même n°.,

$$\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}.$$

Ce rapport peut encore être déterminé, en divisant le demi-paramètre $a.(1-e^2)$, par le demi-grand axe a : le quotient retranché de l'unité, donnera la valeur de e^2.

Les intégrales (p) ont donné par l'élimination, dans le n°. 19, l'intégrale finie, $0 = \mu r - h^2 + fx + f'y + f''z$: cette équation subsiste encore dans le cas de l'ellipse troublée, et elle détermine à chaque instant, la nature de l'ellipse variable. On peut la différentier, en regardant f, f', f'', comme constans, ce qui donne

$$0 = \mu\, dr + f\,dx + f'dy + f''dz.$$

Le demi-grand axe a donne le moyen mouvement de m, ou plus exactement, ce qui dans l'orbite troublée, répond au moyen mouvement dans l'orbite non troublée; car on a par le n°. 20, $n = a^{-\frac{3}{2}}.\sqrt{\mu}$; de plus, si l'on désigne par ζ le moyen mouvement de m, on a dans l'orbite elliptique invariable $d\zeta = n\,dt$: cette équation a également lieu dans l'ellipse variable, puisqu'elle est différentielle du premier ordre. En la différentiant, on aura $dd\zeta = dn.dt$; or on a

$$dn = \frac{3an}{2\mu}.d.\frac{\mu}{a} = \frac{3an.\mathrm{d}R}{\mu},$$

partant

$$dd\zeta = \frac{3an.dt.\mathrm{d}R}{\mu};$$

et en intégrant,

$$\zeta = \frac{3}{\mu}.\int\int an\,dt.\mathrm{d}R.$$

Enfin, on a vu dans le n°. 18, que les intégrales (p) n'équivalent qu'à cinq intégrales distinctes, et qu'elles donnent entre les sept paramètres, c, c', c'', f, f', f'', et e, les deux équations de condition,

$$0 = fc'' - f'c' + f''c;$$

$$0 = \frac{\mu}{a} + \frac{f^2 + f'^2 + f''^2 - \mu^2}{c^2 + c'^2 + c''^2};$$

ces équations ont donc encore lieu dans le cas de l'ellipse variable, pourvu que les paramètres soient déterminés par ce qui précède. On peut d'ailleurs s'en assurer facilement *à posteriori*.

Nous venons de déterminer cinq élémens de l'orbite troublée, savoir, son inclinaison, la position de ses nœuds, son demi-grand axe qui donne son moyen mouvement, son excentricité, et la position du périhélie. Il nous reste à déterminer le sixième élément du mouvement elliptique, celui qui dans l'ellipse non troublée, répond à la position de m, à une époque donnée. Pour cela, reprenons l'expression de dt du n°. 16,

$$\frac{dt.\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv.(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+e.\cos(v-\varpi)\}^2},$$

Cette équation développée en série, nous a donné dans le n°. cité,

$$n\,dt = dv.\{1 + E^{(1)}.\cos.(v-\varpi) + E^{(2)}.\cos.2(v-\varpi) + \&c.\}.$$

En intégrant cette équation dans la supposition de e et de ϖ constans, on aura

$$\int n\,dt + \varepsilon = v + E^{(1)}.\sin.(v-\varpi) + \frac{E^{(2)}}{2}.\sin.2.(v-\varpi) + \&c.;$$

ε étant une arbitraire. Cette intégrale est relative à l'ellipse invariable : pour l'étendre à l'ellipse troublée, il faut qu'en y faisant tout

tout varier jusqu'aux arbitraires ϵ, e et ϖ qu'elle renferme, sa différentielle coincide avec la précédente; ce qui donne

$$d\epsilon = de.\left\{\left(\frac{dE^{(1)}}{de}\right).\sin.(v-\varpi)+\tfrac{1}{2}.\left(\frac{dE^{(2)}}{de}\right).\sin.2(v-\varpi)+\&c.\right\}$$
$$-d\varpi.\{E^{(1)}.\cos.(v-\varpi)+E^{(2)}.\cos.2(v-\varpi)+\&c.\}.$$

$v-\varpi$ est l'anomalie vraie de m, comptée sur l'orbite, et ϖ est la longitude du périhélie, comptée pareillement sur l'orbite. Nous avons déterminé précédemment, la longitude I de la projection du périhélie sur le plan fixe; or on a par le n°. 22, en changeant v en ϖ, et $v_{,}$ en I dans l'expression de $v-6$, de ce n°.,

$$\varpi - 6 = I - \theta + \text{tang.}^2.\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.2(I-\theta)+\&c.$$

En supposant ensuite v et $v_{,}$ nuls dans cette même expression, on a

$$6 = \theta + \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.2\theta + \&c.$$

partant

$$\varpi = I + \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\{\sin.2\theta+\sin.2(I-\theta)\}+\&c.;$$

ce qui donne

$$d\varpi = dI.\{1+2\,\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\cos.2(I-\theta)+\&c.\}$$
$$+2\,d\theta.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\{\cos.2\theta-\cos.2(I-\theta)+\&c.\}$$
$$+\frac{d\varphi.\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi}{\cos.^2.\frac{1}{2}\varphi}.\{\sin.2\theta+\sin.2(I-\theta)+\&c.\}.$$

Ainsi, les valeurs de dI, $d\theta$ et $d\varphi$ étant déterminées par ce qui précède; on aura celle de $d\varpi$, d'où l'on tirera la valeur de $d\epsilon$.

Il suit de-là que les expressions en séries, du rayon vecteur, de sa projection sur le plan fixe, de la longitude rapportée soit sur le plan fixe, soit sur l'orbite, et de la latitude, que nous avons données dans le n°. 22, pour le cas de l'ellipse invariable, ont également lieu dans le cas de l'ellipse troublée, pourvu que l'on y change nt, en $\int n\,dt$, et que l'on détermine les élémens de l'ellipse variable, par les formules précédentes. Car, puisque les équations finies entre r, v, s, x, y, z, et $\int n\,dt$, sont les mêmes dans les deux cas, et que les expressions en séries, du n°. 22, résultent de ces équations, par des opérations analytiques entièrement indépendantes de la constance ou de la variabilité des élémens; il est clair que ces expressions ont encore lieu dans le cas des élemens variables.

Lorsque les ellipses sont fort excentriques, telles que les orbites des comètes; il faut changer un peu l'analyse précédente. L'inclinaison φ de l'orbite sur le plan fixe, la longitude θ de son nœud ascendant, le demi-grand axe a, le demi-paramètre $a.(1-e^2)$, l'excentricité e, et la longitude I du périhélie sur le plan fixe, pourront être déterminés par ce qui précède. Mais les valeurs de ϖ et de $d\varpi$ étant données en séries ordonnées par rapport aux puissances de tang. $\frac{1}{2}\varphi$; il faut pour les rendre convergentes, choisir le plan fixe, de manière que tang. $\frac{1}{2}\varphi$ soit peu considérable, et ce qu'il y a de plus simple pour cet objet, consiste à prendre pour plan fixe, celui de l'orbite de m, à une époque donnée.

La valeur précédente de $d\varepsilon$, est exprimée par une série qui n'est convergente que dans le cas où l'excentricité de l'orbite est peu considérable; on ne peut donc pas l'employer dans le cas présent. Pour y suppléer, reprenons l'équation

$$\frac{dt.\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{dv.(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2}.$$

Si l'on fait $1-e=\alpha$, on a par l'analyse du n°. 23, dans le cas de l'ellipse invariable,

$$t+T=\frac{2a^{\frac{3}{2}}.(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(2-\alpha)^2.\sqrt{\mu}}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}.(v-\varpi).\left\{1+\frac{(\frac{1}{3}-\alpha)}{2-\alpha}.\text{tang.}^2.\tfrac{1}{2}(v-\varpi)+\&\text{c.}\right\};$$

T étant une arbitraire. Pour étendre cette équation, à l'ellipse variable; il faut la différentier, en ne faisant varier que T, le demi-paramètre $a.(1-e^2)$, α et ϖ. On aura ainsi une équation différentielle qui déterminera T; et les équations finies qui ont lieu dans le cas de l'ellipse invariable, subsisteront encore dans le cas de l'ellipse troublée.

65. Considérons particulièrement les variations des élémens de l'orbite de m, dans le cas des orbites peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres. Nous avons donné dans le n°. 48, la manière de développer alors R, en série de sinus et de cosinus de la forme $m'k.\cos.(i'n't-int+A)$, k et A étant des fonctions

des excentricités et des inclinaisons des orbites, des positions de leurs nœuds et de leurs périhélies, des longitudes des corps à une époque donnée, et des grands axes. Lorsque les ellipses sont variables, toutes ces quantités doivent être supposées varier conformément à ce qui précède; il faut de plus, changer dans le terme précédent, l'angle $i'n't - int$, en $i'.\int n'dt - i.\int ndt$, ou ce qui revient au même, en $i'\zeta' - i\zeta$.

Maintenant, on a par le n°. précédent,

$$\frac{\mu}{a} = 2.\int \mathrm{d}R;$$

$$\zeta = \int ndt = \frac{3}{\mu}.\int\int a\,n\,dt.\mathrm{d}R.$$

La différence $\mathrm{d}R$ étant prise uniquement par rapport aux coordonnées x, y, z, du corps m, on ne doit faire varier dans le terme $m'k.\cos.(i'\zeta' - i\zeta + A)$ de l'expression de R, développée en série, que ce qui dépend du mouvement de ce corps; d'ailleurs, R étant une fonction finie de x, y, z, x', y', z', on peut, par le n°. 63, supposer les élémens de l'orbite, constans dans la différence $\mathrm{d}R$; il suffit donc de faire varier ζ dans le terme précédent, et comme la différence de ζ est ndt, on aura $im'.kndt.\sin.(i'\zeta' - i\zeta + A)$, pour le terme de $\mathrm{d}R$, qui correspond au terme précédent de R. Ainsi, en n'ayant égard qu'à ce terme, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{2im'}{\mu}.\int k\,n\,dt.\sin.(i'\zeta' - i\zeta + A);$$

$$\zeta = \frac{3im'}{\mu}.\int\int a\,k\,n^2dt^2.\sin.(i'\zeta' - i\zeta + A).$$

Si l'on néglige les quarrés et les produits des masses perturbatrices, on pourra dans l'intégration de ces termes, supposer les élémens du mouvement elliptique constans, ce qui change ζ en nt, et ζ' en $n't$; d'où l'on tire

$$\frac{1}{a} = -\frac{2im'n.k}{\mu.(i'n' - in)}.\cos.(i'n't - int + A);$$

$$\zeta = -\frac{3im'an^2k}{\mu.(i'n' - in)^2}.\sin.(i'n't - int + A).$$

On voit par-là, que si $i'n' - in$ n'est pas nul, les quantités a et ζ

ne renferment que des inégalités périodiques, en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; or i et i' étant des nombres entiers, l'équation $i'n'-in=0$, ne peut pas avoir lieu, quand les moyens mouvemens de m et de m' sont incommensurables, ce qui est le cas des planètes, et ce que l'on peut admettre généralement, puisque n et n' étant des constantes arbitraires susceptibles de toutes les valeurs possibles, leur rapport exact de nombre à nombre, est infiniment peu vraisemblable.

Nous sommes donc conduits à ce résultat remarquable, savoir, que les grands axes des orbites des planètes et leurs moyens mouvemens, ne sont assujétis qu'à des inégalités périodiques dépendantes de leur configuration entre elles, et qu'ainsi, en négligeant ces quantités, leurs grands axes sont constans, et leurs moyens mouvemens sont uniformes : résultat conforme à celui que nous avons trouvé par une autre méthode, dans le n°. 54.

Si les moyens mouvemens nt et $n't$, sans être exactement commensurables, approchent beaucoup d'être dans le rapport de i' à i; le diviseur $i'n'-in$, est fort petit, et il peut en résulter dans ζ et ζ', des inégalités qui croissant avec une grande lenteur, pourront donner lieu aux observateurs, de penser que les moyens mouvemens des deux corps m et m' ne sont pas uniformes. Nous verrons dans la théorie de Jupiter et de Saturne, que cela est arrivé relativement à ces deux planètes : leurs moyens mouvemens sont tels que deux fois celui de Jupiter, est à fort peu près égal à cinq fois celui de Saturne; en sorte que $5n'-2n$ n'est pas la soixante-quatorzième partie de n. La petitesse de ce diviseur, rend très-sensible, le terme de l'expression de ζ, dépendant de l'angle $5n't-2nt$, quoiqu'il soit de l'ordre $i'-i$, ou du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, comme on l'a vu dans le n°. 48. L'analyse précédente donne la partie la plus sensible de ces inégalités; car la variation de la longitude moyenne dépend de deux intégrations, tandis que les variations des autres élémens du mouvement elliptique, ne dépendent que d'une seule intégration; il n'y a conséquemment, que les termes de l'expression de la longitude moyenne, qui puissent avoir le quarré $(in'-in)^2$, pour diviseur; en n'ayant donc égard qu'à ces termes qui, vu la petitesse de ce diviseur, doivent être les plus considérables, il suffira, dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, d'accroître de ces termes, la longitude moyenne.

Quand on a les inégalités de ce genre, que l'action de m' produit dans le moyen mouvement de m; il est facile d'en conclure les inégalités correspondantes que l'action de m produit dans le moyen mouvement de m'. En effet, si l'on n'a égard qu'à l'action mutuelle des trois corps M, m et m'; la formule (7) du n°. 9, donne

$$\begin{aligned}\text{const.} = m.\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2} + \frac{m'.(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}{dt^2}\\ - \frac{\{(mdx+m'dx')^2+(mdy+m'dy')^2+(mdz+m'dz')^2\}}{(M+m+m').dt^2} \qquad (a)\\ - \frac{2Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{2Mm'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{2mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.\end{aligned}$$

La dernière des intégrales (p) du n°. précédent, donne en y substituant pour $\frac{\mu}{a}$, l'intégrale $2\int dR$,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{2.(M+m)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2.\int dR.$$

Si l'on nomme ensuite R', ce que devient R, lorsque l'on considère l'action de m sur m', on aura

$$R' = \frac{m.(xx'+yy'+zz')}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}};$$

$$\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2} = \frac{2.(M+m')}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - 2.\int d'R';$$

la caractéristique différentielle d' ne se rapportant qu'aux coordonnées x', y', z' du corps m'. En substituant au lieu de $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ et de $\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}$, ces valeurs dans l'équation (a); on aura

$$\begin{aligned}m.\int dR + m'.\int d'R' = \text{const.} - \frac{\{(mdx+m'dx')^2+(mdy+m'dy')^2+(mdz+m'dz')^2\}}{2.(M+m+m').dt^2}\\ + \frac{m^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'^2}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.\end{aligned}$$

Il est visible que le second membre de cette équation ne renferme point de termes de l'ordre des quarrés et des produits des masses m et m', qui aient pour diviseur $i'n'-in$; en n'ayant donc égard qu'à ces termes, on aura

$$m.\int \mathrm{d}R+m'.\int \mathrm{d}'R'=0;$$

ainsi, en ne considérant que les termes qui ont pour diviseur $(i'n'-in)^2$, on aura

$$\frac{3.\int\int a'n'dt.\mathrm{d}'R'}{M+m'}=-\frac{m.(M+m).a'n'}{m'.(M+m').an}.\frac{3.\int\int andt.\mathrm{d}R}{M+m};$$

or on a

$$\zeta=\frac{3.\int\int andt.\mathrm{d}R}{M+m};\qquad \zeta'=\frac{3.\int\int a'n'dt.\mathrm{d}'R'}{M+m'};$$

on aura donc

$$m'.(M+m').an.\zeta'+m.(M+m).a'n'.\zeta=0.$$

On a ensuite,

$$n=\frac{\sqrt{M+m}}{a^{\frac{3}{2}}};\qquad n'=\frac{\sqrt{M+m'}}{a'^{\frac{3}{2}}};$$

en négligeant donc m et m', vis-à-vis de M, on aura

$$m.\sqrt{a}.\zeta+m'.\sqrt{a'}.\zeta'=0;$$

ou

$$\zeta'=-\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.\zeta.$$

Ainsi, les inégalités de ζ, qui ont pour diviseur $(i'n'-in)^2$, feront connoître celles de ζ', qui ont le même diviseur. Ces inégalités sont, comme l'on voit, affectées de signe contraire, si n et n' sont de même signe, ou, ce qui revient au même, si les deux corps m et m' tournent dans le même sens; elles sont d'ailleurs dans un rapport constant; d'où il suit que si elles paroissent accélérer le moyen mouvement de m, elles paroîtront retarder celui de m' suivant la même loi, et l'accélération apparente de m, sera au retardement apparent de m', comme $m'\sqrt{a'}$ est à $m.\sqrt{a}$. L'accélération du moyen mouvement de Jupiter, et le rallentissement de celui de Saturne, que la comparaison des observations modernes aux anciennes, avoit fait connoître à Halley, étant à fort peu près dans ce rapport; je conclus du théorême précédent, qu'ils sont dus à l'action mutuelle de ces deux planètes, et puisqu'il est constant que cette action ne peut produire dans les moyens mouvemens, aucune altération indépendante de la configuration des planètes, je ne balançai point à croire qu'il existe dans la théorie de Jupiter et de Saturne, une grande inégalité périodique, d'une fort longue période. En considérant ensuite que cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter, est à très-peu près égal à zéro; il me parut vraisemblable que le phénomène observé par Halley, avoit pour cause, une inégalité dépendante de cet argument. La détermination de cette inégalité vérifia cette conjecture.

La période de l'argument $i'n't - int$, étant supposée fort longue; les élémens des orbites de m et de m' éprouvent dans cet intervalle, des variations sensibles auxquelles il est essentiel d'avoir égard dans la double intégrale $\int\int akn^2dt^2 . \sin.(i'n't - int + A)$. Pour cela, nous donnerons à la fonction $k.\sin.(i'n't - int + A)$, la forme $Q.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + Q'.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$, Q et Q' étant de fonctions des élémens des orbites; nous aurons ainsi,

$$\int\int akn^2dt^2 . \sin.(i'n't - int + A) =$$

$$-\frac{n^2a.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)}{(i'n' - in)^2} . \left\{ Q - \frac{2.dQ'}{(i'n' - in).dt} - \frac{3.ddQ}{(i'n' - in)^2.dt^2} + \frac{4.d^3Q'}{(i'n' - in)^3.dt^3} + \&c. \right\}$$

$$-\frac{n^2a.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)}{(i'n' - in)^2} . \left\{ Q' + \frac{2.dQ}{(i'n' - in).dt} - \frac{3.ddQ'}{(i'n' - in)^2.dt^2} - \frac{4.d^3Q}{(i'n' - in)^3.dt^3} + \&c. \right\}.$$

Les termes de ces deux séries, décroissant très-rapidement, vû la lenteur des variations séculaires des élémens elliptiques; on peut dans chaque série, s'en tenir aux deux premiers termes. En y substituant ensuite, au lieu des élémens des orbites, leurs valeurs ordonnées par rapport aux puissances du temps, et ne conservant que sa première puissance; la double intégrale précédente pourra être transformée dans un seul terme de la forme

$$(F + E.t).\sin.(i'n't - int + A + H.t)$$

Relativement à Jupiter et à Saturne, cette expression pourra servir pendant plusieurs siècles avant et après l'instant que l'on aura choisi pour époque.

Les grandes inégalités dont nous venons de parler, en produisent de sensibles parmi les termes dépendans de la seconde puissance des masses perturbatrices. En effet, si dans la formule

$$\zeta = \frac{3im'}{\mu}.\int\int akn^2.dt^2.\sin.(i'\zeta' - i\zeta + A),$$

on substitue pour ζ et ζ' leurs valeurs

$$nt - \frac{3i.m'an^2.k}{\mu.(i'n'-in)^2}.\sin.(i'n't - int + A);$$

$$n't + \frac{3i.man^2.k}{\mu.(i'n'-in)^2}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}}.\sin.(i'n't - int + A),$$

il en résultera parmi les termes de l'ordre m^2, le suivant :

$$-\frac{9i^2.m'^2.a^2.n^4.k^2}{8.\mu^2.(i'n'-in)^4}.\frac{\{i.m'.\sqrt{a'} + i'.m.\sqrt{a}\}}{m'.\sqrt{a'}}.\sin.2(i'n't - int + A).$$

La valeur de ζ' renferme le terme correspondant qui est au précédent, dans le rapport de $m.\sqrt{a}$ à $-m'.\sqrt{a'}$,

$$\frac{9i^2.m'^2.a^2.n^4.k^2}{8.\mu^2.(i'n'-in)^4}.\{i.m'\sqrt{a'} + i'.m\sqrt{a}\}.\frac{m.\sqrt{a}}{m'^2.a'}.\sin.2.(i'n't - int + A).$$

66. Il peut arriver que les inégalités du moyen mouvement, les plus sensibles, ne se rencontrent que parmi les termes de l'ordre des quarrés des masses perturbatrices. Si l'on considère trois corps m, m', m'', circulant autour de M, l'expression de dR relative aux termes de cet ordre, renfermera des inégalités de la forme $k.\sin.(int - i'n't + i''n''t + A)$; or si l'on suppose les moyens mouvemens nt, $n't$, $n''t$, tels que $in - i'n' + i''n''$ soit une fraction extrêmement petite de n, il en résultera une inégalité très-sensible dans la valeur de ζ. Cette inégalité peut même rendre rigoureusement nulle, la quantité $in - i'n' + i''n''$, et établir ainsi une équation de condition entre les moyens mouvemens et les longitudes moyennes des trois corps m, m', m''. Ce cas très-singulier ayant lieu dans le système des satellites de Jupiter; nous allons en développer l'analyse.

Si

Si l'on prend M pour unité de masse, et si l'on néglige m, m', m'', vis-à-vis de M, on aura

$$n^2=\frac{1}{a^3}\,; \qquad n'^2=\frac{1}{a'^3}\,; \qquad n''^2=\frac{1}{a''^3}.$$

On a ensuite;

$$d\zeta=n\,dt\,; \qquad d\zeta'=n'\,dt\,; \qquad d\zeta''=n''\,dt\,;$$

partant,

$$\frac{dd\zeta}{dt}=-\tfrac{3}{2}.n^{\frac{1}{3}}.\frac{da}{a^2}\,; \quad \frac{dd\zeta'}{dt}=-\tfrac{3}{2}.n'^{\frac{1}{3}}.\frac{da'}{a'^2}\,; \quad \frac{dd\zeta''}{dt}=-\tfrac{3}{2}.n''^{\frac{1}{3}}.\frac{da''}{a''^2}.$$

On a vu dans le n°. 61, que si l'on n'a égard qu'aux inégalités qui ont de très-longues périodes, on a

$$\text{constante}=\frac{m}{a}+\frac{m'}{a'}+\frac{m''}{a''}\,;$$

ce qui donne

$$0=m.\frac{da}{a^2}+m'.\frac{da'}{a'^2}+m''.\frac{da''}{a''^2}.$$

On a vu dans le même n°., que si l'on néglige les quarrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a

$$\text{constante}=m.\sqrt{a}+m'.\sqrt{a'}+m''.\sqrt{a''}\,;$$

ce qui donne

$$0=m.\frac{da}{\sqrt{a}}+m'.\frac{da'}{\sqrt{a'}}+m''.\frac{da''}{\sqrt{a''}}.$$

De ces diverses équations, il est aisé de conclure,

$$\frac{dd\zeta}{dt}=-\tfrac{3}{2}.n^{\frac{1}{3}}.\frac{da}{a^2}\,;$$

$$\frac{dd\zeta'}{dt}=\tfrac{3}{2}.\frac{m.n'^{\frac{4}{3}}}{m'.n}.\frac{(n-n'')}{(n'-n'')}.\frac{da}{a^2}\,;$$

$$\frac{dd\zeta''}{dt}=-\tfrac{3}{2}.\frac{m.n''^{\frac{4}{3}}}{m''.n}.\frac{(n-n')}{(n'-n'')}.\frac{da}{a^2}.$$

Enfin, l'équation $\frac{\mu}{a}=2\int dR$, du n°. 64, donne

$$-\frac{da}{a^2}=2.dR.$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer dR.

On a par le n°. 46, en négligeant les quarrés et les produits des inclinaisons des orbites,

$$R = \frac{m'.r}{r'^2}.\cos.(v'-v) - m'.(r^2 - 2rr'.\cos.(v'-v) + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{m''.r}{r''^2}.\cos.(v''-v) - m''.(r^2 - 2rr''.\cos.(v''-v) + r''^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe cette fonction dans une série ordonnée par rapport aux cosinus de $v'-v$, de $v''-v$, et de leurs multiples; on aura une expression de cette forme,

$$R = \frac{m'}{2}.(r,r')^{(0)} + m'.(r,r')^{(1)}.\cos.(v'-v) + m'.(r,r')^{(2)}.\cos.2(v'-v) + m'.(r,r')^{(3)}.\cos.3(v'-v) + \&c.$$

$$+ \frac{m''}{2}.(r,r'')^{(0)} + m''.(r,r'')^{(1)}.\cos.(v''-v) + m''.(r,r'')^{(2)}.\cos.2(v''-v) + m''.(r,r'')^{(3)}.\cos.3(v''-v) + \&c.;$$

d'où l'on tire

$$dR = \left\{ \begin{array}{l} dr.\left\{ \begin{array}{l} \frac{m'}{2}.\left(\frac{d.(r,r')^{(0)}}{dr}\right) + m'.\left(\frac{d.(r,r')^{(1)}}{dr}\right).\cos.(v'-v) + m'.\left(\frac{d.(r,r')^{(2)}}{dr}\right).\cos.2.(v'-v) + \&c. \\ + \frac{m''}{2}.\left(\frac{d.(r,r'')^{(0)}}{dr}\right) + m''.\left(\frac{d.(r,r'')^{(1)}}{dr}\right).\cos.(v''-v) + m''.\left(\frac{d.(r,r'')^{(2)}}{dr}\right).\cos.2.(v''-v) + \&c. \end{array} \right\} \\ + dv.\left\{ \begin{array}{l} m'.(r,r')^{(1)}.\sin.(v'-v) + 2m'.(r,r')^{(2)}.\sin.2(v'-v) + \&c. \\ + m''(r,r'')^{(1)}.\sin.(v''-v) + 2m''.(r,r'')^{(2)}.\sin.2(v''-v) + \&c. \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Supposons, conformément à ce que les observations indiquent dans le système des trois premiers satellites de Jupiter, que $n-2n'$ et $n'-2n''$ soient des fractions très-petites de n, et que leur différence $(n-2n')-(n'-2n'')$, ou $n-3n'+2n''$, soit incomparablement plus petite que chacune d'elles. Il résulte des expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv, du n°. 50, que l'action de m' produit dans le rayon vecteur et dans la longitude de m, une inégalité très-sensible dépendante de l'argument $2.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$. Les termes relatifs à cette inégalité, ont pour diviseur $4.(n'-n)^2-n^2$, ou $(n-2n').(3n-2n')$, et ce diviseur est très-petit, à raison de la petitesse du facteur $n-2n'$. On voit encore, par la considération des mêmes expressions, que l'action de m produit dans le rayon vecteur, et dans la longitude de m', une inégalité dépendante de l'argument $(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, et qui ayant pour diviseur $(n' - n)^2 - n'^2$, ou $n.(n - 2n')$, est fort sensible. On voit pareillement que l'action de m'' sur m', produit dans les mêmes quantités, une inégalité considérable dépendante de l'argument $2.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon')$. Enfin on voit que l'action de m' produit dans le rayon vecteur et dans la longitude de m'', une inégalité considérable dépendante de l'argument $n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon'$. Ces inégalités ont été reconnues d'abord par les observations; nous les développerons avec étendue, dans la théorie des satellites de Jupiter: leur grandeur par rapport aux autres inégalités, permet de négliger celles-ci, dans la question présente. Nous supposerons donc,

$$\delta r = m'.E'.\cos.2.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$
$$\delta v = m'.F'.\sin.2.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$
$$\delta r' = m''.E''.\cos.2.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + m.G.\cos.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$
$$\delta v' = m''.F''.\sin.2.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') + m.H.\sin.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$
$$\delta r'' = m'.G'.\cos.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon');$$
$$\delta v'' = m''.H'.\sin.(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon').$$

Il faut maintenant substituer dans l'expression précédente de dR, au lieu de r, v, r', v', r'', v'', les valeurs de $a + \delta r$, $nt + \varepsilon + \delta v$, $a' + \delta r'$, $n't + \varepsilon' + \delta v'$, $a'' + \delta r''$, $n''t + \varepsilon'' + \delta v''$, et ne conserver que les termes dépendans de l'argument $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$; or il est facile de voir que la substitution des valeurs de δr, δv, $\delta r''$, $\delta v''$, ne peut produire aucun terme semblable. Il n'en est pas ainsi de la substitution des valeurs de $\delta r'$, et de $\delta v'$: le terme $m'.(r, r')^{(1)}.dv.\sin.(v' - v)$ de l'expression de dR, produit la quantité suivante,

$$-\frac{m'.m''.ndt}{2}.\left\{E''.\left(\frac{d(a,a')^{(1)}}{da'}\right) - F''.(a,a')^{(1)}\right\}.\sin.(nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''):$$

c'est la seule quantité de ce genre, que renferme l'expression de dR. Les expressions de $\frac{\delta r}{a}$ et de δv, du n°. 50, appliquées à l'action de m'' sur m', donnent, en ne conservant que les termes qui ont $n'-2n''$, pour diviseur, et en observant que n'' est à très-peu près égal à $\frac{1}{2}n'$,

$$\frac{E''}{a'}=\tfrac{1}{2}n'^2.\frac{\left\{a'^2.\left(\frac{d(a',a'')^{(2)}}{da'}\right)+\frac{2n''}{n'-n''}.a'.(a',a'')^{(2)}\right\}}{(n'-2n'').(3n'-2n'')};$$

$$F'=\frac{2E''}{a'};$$

on aura donc

$$\mathrm{d}R=\frac{m'.m''.n\,dt}{2}.E''.\left\{\frac{2.(a,a')^{(1)}}{a'}-\left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da'}\right)\right\}$$
$$\times\sin.(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'')=-\tfrac{1}{2}.\frac{da}{a^2}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{da}{a^2}$, dans les valeurs de $\frac{dd\zeta}{dt}$, $\frac{dd\zeta'}{dt}$, et $\frac{dd\zeta''}{dt}$, et faisant pour abréger,

$$\mathcal{C}=\tfrac{3}{2}.E''.\left\{2.(a,a')^{(1)}-a'.\left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da'}\right)\right\}.\left\{\frac{a}{a'}.m'.m''+\frac{9}{4}.m.m''+\frac{a''}{4a'}.m.m'\right\};$$

on aura, à cause de n à très-peu près égal à $2n'$, et de n' à très-peu près égal à $2n''$,

$$\frac{dd\zeta}{dt^2}-3.\frac{dd\zeta'}{dt^2}+2.\frac{dd\zeta''}{dt^2}=\mathcal{C}.n^2.\sin.(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'');$$

ou plus exactement,

$$\frac{dd\zeta}{dt^2}-3.\frac{dd\zeta'}{dt^2}+2.\frac{dd\zeta''}{dt^2}=\mathcal{C}.n^2.\sin.(\zeta-3.\zeta'+2.\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'');$$

en sorte que si l'on suppose

$$V=\zeta-3.\zeta'+2.\zeta''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'';$$

on aura

$$\frac{ddV}{dt^2}=\mathcal{C}.n^2.\sin.V.$$

Les moyennes distances a, a', a''. variant très-peu, ainsi que la quantité n; on peut dans cette équation, considérer $\mathcal{C}n^2$, comme une quantité constante. En l'intégrant, on a

$$dt=\frac{\pm dV}{\sqrt{c-2\mathcal{C}n^2.\cos.V}},$$

c étant une constante arbitraire. Les différentes valeurs dont cette constante est susceptible, donnent lieu aux trois cas suivans.

Si c est positif et plus grand que $\pm 2\zeta n^2$, l'angle V croîtra sans cesse, et cela doit arriver, si, à l'origine du mouvement, $(n-3n'+2n'')^2$ est plus grand que $\pm 2\zeta n^2.(1\mp\cos. V)$, les signes supérieurs ou inférieurs ayant lieu suivant que ζ est positif ou négatif. Il est facile de s'assurer, et nous le ferons voir particulièrement dans la théorie des satellites de Jupiter, que ζ est une quantité positive relativement aux trois premiers satellites de Jupiter; en supposant donc $\mp\varpi=\pi-V$, π étant la demi-circonférence, on aura

$$dt=\frac{d\varpi}{\sqrt{c+2\zeta n^2.\cos.\varpi}}.$$

Dans l'intervalle depuis $\varpi=0$, jusqu'à $\varpi=\frac{\pi}{2}$; le radical $\sqrt{c+2\zeta n^2.\cos.\varpi}$ est plus grand que $\sqrt{2\zeta n^2}$, lorsque c est égal ou plus grand que $2\zeta n^2$; on a donc dans cet intervalle, $\varpi>nt.\sqrt{2\zeta}$; ainsi, le temps t que l'angle ϖ emploie à parvenir de zéro à l'angle droit, est moindre que $\frac{\pi}{2n.\sqrt{2\zeta}}$. La valeur de ζ dépend des masses m, m', m'': les inégalités observées dans les mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, et dont nous avons parlé ci-dessus, donnent entre leurs masses, et celle de Jupiter, des rapports d'où il résulte que $\frac{\pi}{2n.\sqrt{2\zeta}}$ est au-dessous de deux années, comme on le verra dans la théorie de ces satellites; ainsi l'angle ϖ emploieroit moins de deux ans à parvenir de zéro à l'angle droit; or les observations des satellites de Jupiter, donnent depuis leur découverte, ϖ constamment nul, ou insensible; le cas que nous examinons, n'est donc point celui des trois premiers satellites de Jupiter.

Si la constante c est moindre que $\pm 2\zeta n^2$, l'angle V ne fera qu'osciller; il n'atteindra jamais deux angles droits, si ζ est négatif, parce qu'alors le radical $\sqrt{c-2\zeta n^2.\cos.V}$ deviendroit imaginaire; il ne sera jamais nul, si ζ est positif. Dans le premier cas, sa valeur sera alternativement plus grande et plus petite que zéro; dans le second cas, elle sera alternativement plus grande et plus petite que deux angles droits. Toutes les observations des trois premiers satellites de Jupiter, nous prouvent que ce second cas est celui de ces astres; ainsi la valeur de β doit être positive relativement à eux; et comme la théorie de la pesanteur donne β positif, on peut regarder ce phénomène, comme une nouvelle confirmation de cette théorie.

Reprenons l'équation

$$dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2 . \cos . \varpi}}.$$

L'angle ϖ étant toujours très-petit, suivant les observations, nous pouvons supposer $\cos . \varpi = 1 - \frac{1}{2} . \varpi^2$; l'équation précédente donnera en l'intégrant,

$$\varpi = \lambda . \sin . (nt\sqrt{\beta} . + \gamma),$$

λ et γ étant deux constantes arbitraires que l'observation peut seule déterminer. Jusqu'ici, elle n'a point fait reconnoître cette inégalité; ce qui prouve qu'elle est très-petite.

De l'analyse précédente, résultent les conséquences suivantes. Puisque l'angle $nt - 3n't + 2n't + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ ne fait qu'osciller de part et d'autre de deux angles droits, sa valeur moyenne est égale à deux angles droits; on aura donc, en n'ayant égard qu'aux quantités moyennes, $n - 3n' + 2n'' = 0$; c'est-à-dire, que *le moyen mouvement du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième, est exactement et constamment égal à zéro.* Il n'est pas nécessaire que cette égalité ait eu lieu exactement à l'origine, ce qui seroit infiniment peu vraisemblable; il suffit qu'elle ait été fort approchée, et que $n - 3n' + 2n''$ ait été moindre, abstraction faite du signe, que $\lambda . n\sqrt{\beta}$; et alors, l'attraction mutuelle des trois satellites, a suffi pour rendre cette égalité rigoureuse.

On a ensuite $\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ égal à deux angles droits; ainsi, *la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement et constamment égale à deux angles droits.* En vertu de ce théorême, les valeurs précédentes de $\delta r'$ et de $\delta v'$ se réduisent aux suivantes :

$$\delta r' = (mG - m''E'').\cos.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$
$$\delta v' = (mH - m''F'').\sin.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Les deux inégalités du mouvement de m' dues aux actions de m et de m'', se confondent par conséquent dans une seule, et seront constamment réunies. Il résulte encore du même théorême, que ces trois premiers satellites ne peuvent jamais être éclipsés à-la-fois; ils ne peuvent être ensemble vus de Jupiter, ni en opposition, ni en conjonction avec le soleil ; car les théorêmes précédens ont également lieu par rapport aux moyens mouvemens synodiques, et aux longitudes moyennes synodiques des trois satellites, comme il est facile de s'en assurer. Ces deux théorêmes subsistent malgré les altérations que les moyens mouvemens des satellites reçoivent, soit par une cause semblable à celle qui altère le moyen mouvement de la lune, soit par la résistance d'un milieu très-rare. Il est clair que ces diverses causes ne font qu'ajouter à la valeur de $\frac{ddV}{dt^2}$, une quantité de la forme $\frac{dd\psi}{dt^2}$, et qui ne peut devenir sensible que par les intégrations ; en supposant donc $V = \pi - \varpi$, et ϖ très-petit, l'équation différentielle en V deviendra

$$0 = \frac{dd\varpi}{dt^2} + \beta n^2 . \varpi + \frac{dd\psi}{dt^2}.$$

La période de l'angle $nt.\sqrt{\beta}$ étant d'un très-petit nombre d'années, tandis que les quantités renfermées dans $\frac{dd\psi}{dt^2}$, sont, ou constantes, ou embrassent plusieurs siècles ; on aura à très-peu près, en intégrant l'équation précédente,

$$\varpi = \lambda.\sin.(nt.\sqrt{\beta} + \gamma) - \frac{dd\psi}{\beta.n^2.dt^2}.$$

Ainsi la valeur de ϖ sera toujours très-petite, et les équations séculaires des moyens mouvemens des trois premiers satellites, seront toujours coordonnées par l'action mutuelle de ces astres, de manière que l'équation séculaire du premier, plus deux fois celle du troisième, soit égale à trois fois celle du second.

Les théorêmes précédens donnent entre les six constantes n, n', n'', ε, ε', ε'', deux équations de condition qui réduisent ces arbitraires à quatre; mais les deux arbitraires λ et γ, de la valeur de ϖ, les remplacent. Cette valeur se distribue entre les trois satellites, de manière qu'en nommant p, p', p'', les coefficiens de $\sin.(nt.\sqrt{\zeta}+\gamma)$, dans les expressions de v, v', v''; ces coefficiens sont dans le rapport des valeurs précédentes de $\frac{dd\zeta}{dt^2}$, $\frac{dd\zeta'}{dt^2}$ et $\frac{dd\zeta''}{dt^2}$; et de plus, on a $p-3p'+2p''=\lambda$. De-là résulte, dans les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, une inégalité qui ne diffère pour chacun d'eux, que par son coefficient, et qui forme dans ces mouvemens, une espèce de libration dont l'étendue est arbitraire. Les observations ont fait voir qu'elle est insensible.

67. Considérons présentement les variations des excentricités et des périhélies des orbites. Pour cela, reprenons les expressions de df, df', df'' trouvées dans le n°. 64 : en nommant r le rayon vecteur de m, projeté sur le plan des x et des y; v l'angle que cette projection fait avec l'axe des x; et s la tangente de la latitude de m, au-dessus du même plan; on aura

$$x=r.\cos.v\;;\qquad y=r.\sin.v\;;\qquad z=rs\;;$$

d'où il est facile de conclure

$$x.\left(\frac{dR}{dy}\right)-y.\left(\frac{dR}{dx}\right)=\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

$$x.\left(\frac{dR}{dz}\right)-z.\left(\frac{dR}{dx}\right)=(1+s^2).\cos.v.\left(\frac{dR}{ds}\right)-rs.\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right)+s.\sin.v.\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

$$y.\left(\frac{dR}{dz}\right)-z.\left(\frac{dR}{dy}\right)=(1+s^2).\sin.v.\left(\frac{dR}{ds}\right)-rs.\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right)-s.\cos.v.\left(\frac{dR}{dv}\right).$$

On a de plus, par le n°. 64,

$$xdy-ydx=cdt\;;\quad xdz-zdx=c'dt\;;\quad ydz-zdy=c''dt\;;$$

les équations différentielles en f, f', f'', deviendront ainsi,

df

$$df = -dy.\left(\frac{dR}{dv}\right) - dz.\left\{(1+s^2).\cos.v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + s.\sin.v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\}$$
$$-cdt.\left\{\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\sin.v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right\} - \frac{c'dt}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$df' = dx.\left(\frac{dR}{dv}\right) - dz.\left\{(1+s^2).\sin.v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - s.\cos.v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\}$$
$$+cdt.\left\{\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\cos.v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right\} - \frac{c''dt}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$df'' = dx.\left\{(1+s^2).\cos.v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + s.\sin.v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\}$$
$$+dy.\left\{(1+s^2).\sin.v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - s.\cos.v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\}$$
$$+c'dt.\left\{\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\cos.v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right\}$$
$$+c''dt.\left\{\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\sin.v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right\}.$$

Les quantités c', c'' dépendent, comme on l'a vu dans le n°. 64, de l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan fixe, en sorte que ces quantités se réduiroient à zéro, si cette inclinaison étoit nulle; d'ailleurs, il est aisé de voir par la nature de R, que $\left(\frac{dR}{ds}\right)$ est de l'ordre des inclinaisons des orbites; en négligeant donc les quarrés et les produits de ces inclinaisons, les expressions précédentes de df et de df' deviendront

$$df = -dy.\left(\frac{dR}{dv}\right) - cdt.\left\{\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\};$$

$$df' = dx.\left(\frac{dR}{dv}\right) + cdt.\left\{\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin.v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right\};$$

or on a

$$dx = d.(r.\cos.v); \quad dy = d.(r.\sin.v); \quad cdt = xdy - ydx = r^2dv;$$

on aura donc

$$df = -\{dr.\sin.v + 2rdv.\cos.v\}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - r^2dv.\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$df' = \{dr.\cos.v - 2rdv.\sin.v\}.\left(\frac{dR}{dv}\right) + r^2dv.\cos.v.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Ces équations seront plus exactes, si l'on prend pour plan fixe des x et des y, celui de l'orbite de m, à une époque donnée; car alors c', c'' et s sont de l'ordre des forces perturbatrices; ainsi les quantités que l'on néglige, sont de l'ordre des quarrés des forces perturbatrices multipliées par le quarré de l'inclinaison respective des deux orbites de m et de m'.

Les valeurs de r, dr, dv, $\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, restent visiblement les mêmes, quelle que soit la position du point d'où l'on compte les longitudes; mais en diminuant v, d'un angle droit, sin. v se change dans $-$cos. v, et cos. v se change dans sin. v; l'expression de df se change par conséquent, dans celle de df'; d'où il suit qu'ayant développé la valeur de df, dans une suite de sinus et de cosinus d'angles croissans proportionnellement au temps, on aura la valeur de df', en diminuant dans la première, les angles ε, ε', ϖ, ϖ', θ et θ', d'un angle droit.

Les quantités f et f' déterminent la position du périhélie, et l'excentricité de l'orbite; en effet, on a vu dans le n°. 64, que

$$\text{tang.}\, I = \frac{f'}{f};$$

I étant la longitude du périhélie, rapportée au plan fixe. Lorsque ce plan est celui de l'orbite primitive de m, on a aux quantités près de l'ordre des quarrés des forces perturbatrices multipliées par le quarré de l'inclinaison respective des orbites, $I = \varpi$, ϖ étant la longitude du périhélie sur l'orbite; on aura donc alors,

$$\text{tang.}\, \varpi = \frac{f'}{f};$$

ce qui donne

$$\sin.\, \varpi = \frac{f'}{\sqrt{f^2+f'^2}}; \qquad \cos.\, \varpi = \frac{f}{\sqrt{f^2+f'^2}}.$$

On a ensuite, par le n°. 64,

$$\mu e = \sqrt{f^2+f'^2+f''^2}; \quad f'' = \frac{f'c'-fc''}{c};$$

ainsi, c' et c'' étant dans la supposition précédente, de l'ordre des forces perturbatrices, f'' est du même ordre, et en négligeant les termes du quarré de ces forces, on aura $\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2}$. Si l'on substitue au lieu de $\sqrt{f^2 + f'^2}$, sa valeur μe, dans les expressions de sin. ϖ, et de cos. ϖ, on aura

$$\mu e . \sin . \varpi = f' \;; \qquad \mu e . \cos . \varpi = f;$$

ces deux équations détermineront l'excentricité et la position du périhélie, et l'on en tirera facilement,

$$\mu^2 . e de = f df + f' df' \;; \qquad \mu^2 e^2 . d\varpi = f df' - f' df.$$

En prenant pour le plan des x et des y, celui de l'orbite de m; on a par les n^{os}. 19 et 20, dans le cas des ellipses invariables,

$$r = \frac{a . (1 - e^2)}{1 + e . \cos . (v - \varpi)} \;; \qquad dr = \frac{r^2 dv . e . \sin . (v - \varpi)}{a . (1 - e^2)};$$

$$r^2 dv = a^2 n dt . \sqrt{1 - e^2} \;;$$

et par le n°. 63, ces équations subsistent encore dans le cas des ellipses variables; les expressions de df et de df' deviendront ainsi,

$$df = -\frac{a n dt}{\sqrt{1 - e^2}} . \left\{2 . \cos . v + \tfrac{3}{2} e . \cos . \varpi + \tfrac{1}{2} e . \cos . (2v - \varpi)\right\} . \left(\frac{dR}{dv}\right)$$
$$- a^2 n dt . \sqrt{1 - e^2} . \sin . v . \left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$df' = -\frac{a n dt}{\sqrt{1 - e^2}} . \left\{2 . \sin . v + \tfrac{3}{2} e . \sin . \varpi + \tfrac{1}{2} e . \sin . (2v - \varpi)\right\} . \left(\frac{dR}{dv}\right)$$
$$+ a^2 n dt . \sqrt{1 - e^2} . \cos . v . \left(\frac{dR}{dr}\right);$$

partant

$$e d\varpi = -\frac{a n dt}{\mu . \sqrt{1 - e^2}} . \sin . (v - \varpi) . \left\{2 + e . \cos . (v - \varpi)\right\} . \left(\frac{dR}{dv}\right)$$
$$+ \frac{a^2 . n dt . \sqrt{1 - e^2}}{\mu} . \cos . (v - \varpi) . \left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$de = -\frac{a n dt}{\mu . \sqrt{1 - e^2}} . \left\{2 . \cos . (v - \varpi) + e + e . \cos .^2 (v - \varpi)\right\} . \left(\frac{dR}{dv}\right)$$
$$- \frac{a^2 n dt}{\mu} . \sqrt{1 - e^2} . \sin . (v - \varpi) . \left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Cette expression de de peut être mise sous une forme plus commode dans quelques circonstances. Pour cela, nous observerons que $dr.\left(\frac{dR}{dr}\right) = \mathrm{d}R - dv.\left(\frac{dR}{dv}\right)$: en substituant pour r et dr, leurs valeurs précédentes, on aura

$$r^2 dv.e.\sin.(v-\varpi).\left(\frac{dR}{dr}\right) = a.(1-e^2).\mathrm{d}R - a.(1-e^2).dv.\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

or on a

$$r^2 dv = a^2 n\,dt.\sqrt{1-e^2}\,; \qquad dv = \frac{ndt.\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

partant

$$a^2 n\,dt.\sqrt{1-e^2}.\sin.(v-\varpi).\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

$$= \frac{a.(1-e^2)}{e}.\mathrm{d}R - \frac{an\,dt}{e.\sqrt{1-e^2}}.\{1+e.\cos.(v-\varpi)\}^2.\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

l'expression précédente de de donnera ainsi,

$$e\,de = \frac{an\,dt.\sqrt{1-e^2}}{\mu}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{a.(1-e^2)}{\mu}.\mathrm{d}R.$$

On peut parvenir fort simplement à cette formule, de la manière suivante. On a par le n°. 64,

$$\frac{dc}{dt} = y.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dy}\right) = -\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

mais on a par le même n°., $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, ce qui donne

$$dc = \frac{da.\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{2a} - \frac{e\,de.\sqrt{\mu a}}{\sqrt{1-e^2}}\,;$$

partant

$$e\,de = \frac{an\,dt.\sqrt{1-e^2}}{\mu}.\left(\frac{dR}{dv}\right) + a.(1-e^2).\frac{da}{2a^2}\,;$$

on a ensuite, par le n°. 64,

$$\frac{\mu\,da}{2a^2} = -\mathrm{d}R\,;$$

On aura ainsi pour $e\,de$, la même expression que ci-dessus.

68. Nous avons vu dans le n°. 65, que si l'on néglige les quarrés des forces perturbatrices ; les variations du grand axe et du moyen mouvement, ne renferment que des quantités périodiques dépendantes de la configuration des corps m, m', m'', &c., entre eux. Il n'en est pas ainsi des variations des excentricités et des inclinaisons : leurs expressions différentielles contiennent des termes indépendans de cette configuration, et qui, s'ils étoient rigoureusement constans, produiroient par l'intégration, des termes proportionnels au temps, qui rendroient à la longue, les orbites fort excentriques, et très-inclinées les unes aux autres ; ainsi, les approximations précédentes, fondées sur le peu d'excentricité et d'inclinaison respective des orbites, deviendroient insuffisantes et même fautives. Mais les termes constans en apparence, qui entrent dans les expressions différentielles des excentricités et des inclinaisons, sont fonctions des élémens des orbites, en sorte qu'ils varient avec une extrême lenteur, à raison des changemens qu'ils y introduisent. On conçoit qu'il doit en résulter dans ces élémens, des inégalités considérables, indépendantes de la configuration mutuelle des corps du systême, et dont les périodes dépendent des rapports des masses m, m', &c., à la masse M. Ces inégalités sont celles que nous avons nommées précédemment, *inégalités séculaires*, et que nous avons considérées dans le Chapitre VII. Pour les déterminer par cette méthode, reprenons la valeur de df du n°. précédent,

$$df = -\frac{a\,n\,dt}{\sqrt{1-e^2}}.\left\{2.\cos.v+\tfrac{3}{2}e.\cos.\varpi+\tfrac{1}{2}e.\cos.(2v-\varpi)\right\}.\left(\frac{dR}{dv}\right)$$
$$-a^2n\,dt.\sqrt{1-e^2}.\sin.v.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Nous négligerons dans le développement de cette équation, les quarrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites ; et parmi les termes dépendans des excentricités et des inclinaisons, nous ne conserverons que ceux qui sont constans : nous supposerons ensuite, comme dans le n°. 48,

$$r = a.(1+u_{,})\ ; \qquad r' = a'.(1+u_{,}')\ ;$$
$$v = nt+\varepsilon+v_{,}\ ; \qquad v' = n't+\varepsilon'+v_{,}'.$$

Cela posé; si l'on substitue pour R, sa valeur trouvée dans le n°. 48; si l'on considère ensuite, que l'on a par le même n°.,

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)=\frac{a}{r}.\left(\frac{dR}{da}\right)=(1-u_{,}).\left(\frac{dR}{da}\right);$$

enfin, si l'on substitue, au lieu de $u_{,}$, $u'_{,}$, $v_{,}$ et $v'_{,}$, leurs valeurs $-e.\cos.(nt+\varepsilon-\varpi)$, $-e'.\cos.(n't+\varepsilon'-\varpi')$, $2e.\sin.(nt+\varepsilon-\varpi)$, et $2e'.\sin.(n't+\varepsilon'-\varpi')$, données par le n°. 22; en ne conservant que les termes constans parmi ceux qui dépendent de la première puissance des excentricités des orbites, et en négligeant les quarrés des excentricités et des inclinaisons, on trouvera

$$df=\frac{am'ndt}{2}.e.\sin.\varpi.\left\{a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}a^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\}$$
$$+am'ndt.e'.\sin.\varpi'.\left\{A^{(1)}+\tfrac{1}{2}a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+\tfrac{1}{4}aa'.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da\,da'}\right)\right\}$$
$$-am'ndt.\Sigma.\left\{i.A^{(i)}+\tfrac{1}{2}.a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right\}.\sin.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\};$$

le signe intégral Σ s'étendant dans cette expression, comme dans la valeur de R du n°. 48, à toutes les valeurs entières positives et négatives de i, en y comprenant même la valeur $i=0$.

On aura par le n°. précédent, la valeur de df', en diminuant dans celle de df, les angles ε, ε', ϖ et ϖ', d'un angle droit; d'où l'on tire,

$$df'=-\frac{am'ndt}{2}.e.\cos.\varpi.\left\{a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}a^2.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\}.$$
$$-am'ndt.e'.\cos.\varpi'.\left\{A^{(1)}+\tfrac{1}{2}a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)+\tfrac{1}{4}aa'.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da\,da'}\right)\right\}$$
$$+am'ndt.\Sigma.\left\{i.A^{(i)}+\tfrac{1}{2}a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right\}.\cos.\{i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon\}.$$

Nommons, pour abréger, X la partie de l'expression de df, renfermée sous le signe Σ, et Y la partie de l'expression de df', renfermée sous le même signe. Faisons de plus, comme dans le n°. 55,

$$(0,1)=-\frac{m'.n}{2}.\left\{a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)+\tfrac{1}{2}.a^3.\left(\frac{ddA^{(0)}}{da^2}\right)\right\};$$
$$\boxed{0,1}=\frac{m'.n}{2}.\left\{aA^{(1)}-a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)-\tfrac{1}{2}.a^3.\left(\frac{ddA^{(1)}}{da^2}\right)\right\}.$$

observons ensuite, que le coefficient de $e'dt.\sin.\varpi'$, dans l'expression de df, se réduit à $\boxed{0,1}$, lorsque l'on y substitue, au lieu des différences partielles de $A^{(1)}$ en a', leurs valeurs en différences partielles relatives à a; enfin, supposons comme dans le n°. 50,

$$e.\sin.\varpi = h \;; \qquad e'.\sin.\varpi' = h' \;;$$

$$e.\cos.\varpi = l \;; \qquad e'.\cos.\varpi' = l' \;;$$

ce qui donne par le n°. précédent, $f = \mu l$; $f' = \mu h$; ou simplement $f = l$, $f' = h$, en prenant pour unité de masse, M, et négligeant m, eu égard à M; nous aurons

$$\frac{dh}{dt} = (0,1).l - \boxed{0,1}.l' + am'n.Y \;;$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0,1).h + \boxed{0,1}.h' - am'n.X.$$

De-là, il est aisé de conclure que si l'on nomme (Y), la somme des termes analogues à $am'n.Y$, dus à l'action de chacun des corps m', m'', &c., sur m; si l'on nomme pareillement (X), la somme des termes analogues à $-am'n.X$, dus aux mêmes actions; enfin, si l'on marque successivement, d'un trait, de deux traits, &c., ce que deviennent les quantités (X), (Y), h et l, relativement aux corps m', m'', &c.; on aura le système suivant d'équations différentielles,

$$\frac{dh}{dt} = \{(0,1) + (0,2) + \&c.\}.l - \boxed{0,1}.l' - \boxed{0,2}.l'' - \&c. + (Y) \;;$$

$$\frac{dl}{dt} = -\{(0,1) + (0,2) + \&c.\}.h + \boxed{0,1}.h' + \boxed{0,2}.h'' + \&c. + (X) \;;$$

$$\frac{dh'}{dt} = \{(1,0) + (1,2) + \&c.\}.l' - \boxed{1,0}.l - \boxed{1,2}.l'' - \&c. + (Y') \;;$$

$$\frac{dl'}{dt} = -\{(1,0) + (1,2) + \&c.\}.h' + \boxed{1,0}.h + \boxed{1,2}.h'' + \&c. + (X') \;;$$

&c.

Pour intégrer ces équations, nous observerons que chacune des quantités h, l, h', l', &c., est formée de deux parties; l'une dépendante de la configuration mutuelle des corps m, m', &c.; l'autre indépendante de cette configuration, et qui renferme les variations séculaires de ces quantités. On aura la première partie, en considérant que si l'on n'a égard qu'à elle seule, h, l, h', l', &c., sont de l'ordre des masses perturbatrices, et par conséquent, $(0,1).h$, $(0,1).l$, &c., sont de l'ordre des quarrés de ces masses; en négligeant donc les quantités de cet ordre, on aura

$$\frac{dh}{dt}=(Y)\,; \qquad \frac{dl}{dt}=(X)\,;$$

$$\frac{dh'}{dt}=(Y')\,; \qquad \frac{dl'}{dt}=(X')\,;$$

partant

$$h=\int(Y).dt\,; \quad l=\int(X).dt\,; \quad h'=\int(Y').dt\,; \quad \&c.$$

Si l'on prend ces intégrales, en n'ayant point égard à la variabilité des élémens des orbites, et que l'on nomme Q, ce que devient alors $\int(Y).dt$; en nommant δQ, la variation de Q, due à celle des élémens, on aura

$$\int(Y).dt=Q-\int\delta Q\,;$$

or Q étant de l'ordre des masses perturbatrices, et les variations des élémens des orbites, étant du même ordre, δQ est de l'ordre des quarrés de ces masses; ainsi, en négligeant les quantités de cet ordre, on aura

$$\int(Y).dt=Q.$$

On peut donc prendre les intégrales $\int(Y).dt$, $\int(X).dt$, $\int(Y').dt$, &c., en supposant les élémens des orbites, constans, et regarder ensuite, ces élémens comme variables dans les intégrales; on aura ainsi d'une manière fort simple, les parties périodiques des expressions de h, l, h', &c.

Pour avoir les parties de ces expressions, qui renferment les inégalités séculaires; on observera qu'elles sont données par l'intégration des équations différentielles précédentes privées de leurs derniers termes, (Y), (X), &c.; car il est clair que la substitution des parties périodiques de h, l, h', &c., en fera disparoître ces termes. Mais en privant ces équations, de leurs derniers termes, elles retombent dans les équations différentielles (A) du n°. 55, que nous avons considérées précédemment avec beaucoup d'étendue.

69. Nous avons observé dans le n°. 65, que si les moyens mouvemens nt et $n't$, des deux corps m et m', sont à fort peu près dans le rapport de i' à i, en sorte que $i'n'-in$, soit une très-petite quantité; il peut en résulter dans les moyens mouvemens de ces corps, des inégalités fort sensibles. Ce rapport des moyens mouvemens, peut aussi produire des variations sensibles dans les excentricités des orbites, et dans la position de leurs périhélies. Pour les déterminer, nous reprendrons l'équation trouvée dans le n°. 67,

$$ede = \frac{andt.\sqrt{1-e^2}}{\mu}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{a.(1-e^2)}{\mu}.\mathrm{d}R.$$

Il résulte de ce que nous avons dit dans le n°. 48, que si l'on prend pour plan fixe, celui de l'orbite de m, à une époque donnée, ce qui permet de négliger dans R, l'inclinaison φ de l'orbite m, sur ce plan; tous les termes de l'expression de R dépendans de l'angle $i'n't-int$, seront compris dans la forme suivante,

$$m'k.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta');$$

i, i', g, g', g'' étant des nombres entiers tels que l'on a, $0=i'-i-g-g'-g''$. Le coefficient k a pour facteur $e^g.e'^{g'}.(\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\varphi')^{g''}$, g, g', g'' étant pris positivement dans ces exposans : de plus, si l'on suppose i et i' positifs, et i' plus grand que i; on a vu dans le n°. 48, que les termes de R qui dépendent de l'angle $i'n't-int$, sont de l'ordre $i'-i$, ou d'un ordre supérieur de deux, de quatre, &c., unités; en n'ayant donc égard qu'aux termes de l'ordre $i'-i$, k sera de la forme $e^g.e'^{g'}.(\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\varphi)^{g''}.Q$, Q étant une fonction indépendante des excentricités et de l'inclinaison respective des orbites. Les nombres g, g', g'', renfermés sous le signe *cos.*, sont alors positifs; car si l'un d'eux, g, par exemple, étoit négatif et égal à $-f$, k seroit de l'ordre $f+g'+g''$; mais l'équation $0=i'-i-g-g'-g''$, donne $f+g'+g''=i'-i+2f$; ainsi k seroit d'un ordre supérieur à $i'-i$, ce qui est contre la supposition. Cela posé, on a par le n°. 48, $\left(\frac{dR}{dv}\right)=\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, pourvu que dans cette dernière différence partielle, on fasse $\varepsilon-\varpi$, constant; le terme de $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, correspondant au terme précédent de R, est donc

$$m'.(i+g).k.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta').$$

Le terme correspondant de dR est

$$m'.ink.dt.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g'\theta')\,;$$

en n'ayant donc égard qu'à ces termes, et en négligeant e^2 vis-à-vis de l'unité, l'expression précédente de ede, donnera

$$de=\frac{m'andt}{\mu}.\frac{gk}{e}.\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g'\theta')\,;$$

or on a

$$\frac{gk}{e}=g.e^{g-1}.e'^{g'}.(\tang\tfrac{1}{2}\varphi')^{g''}.Q=\left(\frac{dk}{de}\right);$$

on aura donc en intégrant,

$$e=-\frac{m'an}{\mu.(i'n'-in)}.\left(\frac{dk}{de}\right).\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon-g\varpi-g'\varpi'-g''\theta').$$

Maintenant, la somme de tous les termes de R, qui dépendent de l'angle $i'n't-int$, étant représentée par la quantité suivante,

$$m'.P.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)+m'.P'.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\,;$$

la partie correspondante de e sera,

$$\frac{m'.an}{\mu.(i'n'-in)}.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)+\left(\frac{dP'}{de}\right).\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right\}.$$

Cette inégalité peut devenir fort sensible, si le coefficient $i'n'-in$, est très-petit, comme cela a lieu dans la théorie de Jupiter et de Saturne. A la vérité, elle n'a pour diviseur, que la première puissance de $i'n'-in$, tandis que l'inégalité correspondante, du moyen mouvement, a pour diviseur, la seconde puissance de cette quantité, comme on l'a vu dans le n°. 65; mais $\left(\frac{dP}{de}\right)$ et $\left(\frac{dP'}{de}\right)$ étant d'un ordre inférieur à P et P', l'inégalité de l'excentricité peut être considérable, et même surpasser celle du moyen mouvement, si les excentricités e et e' sont très-petites; nous en verrons des exemples dans la théorie des satellites de Jupiter.

Déterminons présentement, l'inégalité correspondante du mouvement du périhélie. Pour cela, reprenons les deux équations,

$$ede = \frac{fdf + f'df'}{\mu^2}; \qquad e^2 d\varpi = \frac{fdf' - f'df}{\mu^2};$$

auxquelles nous sommes parvenus dans le n°. 67. Ces équations donnent

$$df = \mu\, de.\cos.\varpi - \mu e\, d\varpi.\sin.\varpi;$$

ainsi, en n'ayant égard qu'à l'angle $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'$, on aura

$$df = m'.andt.\left(\frac{dk}{de}\right).\cos.\varpi.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$$
$$- \mu e\, d\varpi.\sin.\varpi.$$

Représentons par

$$-m'.andt.\left\{\left(\frac{dk}{de}\right) + k'\right\}.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'),$$

la partie de $\mu e\, d\varpi$, qui dépend du même angle; on aura

$$df = m'.andt.\left\{\left(\frac{dk}{de}\right) + \tfrac{1}{2}k'\right\}.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g-1).\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$$
$$- \frac{m'.andt}{2}.k'.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g+1).\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Il est aisé de voir par la dernière des expressions de df, données dans le n°. 67, que le coefficient de ce dernier sinus, a pour facteur $e^{g+1}.e'^{g'}.(\text{tang}.\tfrac{1}{2}\varphi)^{g''}$; k' est donc d'un ordre supérieur de deux unités, à celui de $\left(\frac{dk}{de}\right)$; ainsi, en le négligeant vis-à-vis de $\left(\frac{dk}{de}\right)$, on aura

$$-\frac{m'.andt}{\mu}.\left(\frac{dk}{de}\right).\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'),$$

pour le terme de $e\,d\varpi$, qui correspond au terme

$$m'k.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'),$$

de l'expression de R. Il suit de-là, que la partie de ϖ, qui correspond à la partie de R, exprimée par

$$m'P.\sin.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m'P'.\cos.(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon),$$

est égale à

$$\frac{m'.an}{\mu.(i'n'-in).e}.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon''-i\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right\};$$

on aura donc ainsi, d'une manière fort simple, les variations de l'excentricité et du périhélie, dépendantes de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon$. Elles sont liées à la variation ζ du moyen mouvement, qui y correspond, de manière que la variation de l'excentricité est

$$\frac{1}{3in}.\left(\frac{dd\zeta}{de\,dt}\right);$$

et la variation de la longitude du périhélie, est

$$\frac{(i'n'-in)}{3\,in.e}.\left(\frac{d\zeta}{de}\right).$$

La variation correspondante, de l'excentricité de l'orbite de m', due à l'action de m, sera

$$-\frac{1}{3i'n'.e'}.\left(\frac{dd\zeta'}{de'\,dt}\right),$$

et la variation de la longitude de son périhélie, sera

$$-\frac{(i'n'-in)}{3i'n'.e'}.\left(\frac{d\zeta'}{de'}\right),$$

et comme on a par le n°. 65, $\zeta'=-\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.\zeta$, ces variations seront

$$\frac{m.\sqrt{a}}{3i'n'.m'.\sqrt{a'}}.\left(\frac{dd\zeta}{de'.dt}\right),\quad \text{et}\ \frac{(i'n'-in).m.\sqrt{a}}{3i'n'.e'.m'.\sqrt{a'}}.\left(\frac{d\zeta}{de'}\right).$$

Lorsque la quantité $i'n'-in$, est fort petite, l'inégalité dépendante de l'angle $i'n't-int$, en produit une sensible dans l'expression du moyen mouvement, parmi les termes dépendans des quarrés des masses perturbatrices; nous en avons donné l'analyse dans le n°. 65. Cette même inégalité produit dans les expressions de de et de $d\varpi$, des termes de l'ordre du quarré de ces masses, et qui n'étant fonctions que des élémens des orbites, ont une influence sensible sur les variations séculaires de ces élémens. Considérons, en effet, l'expression de de, dépendante de l'angle $i'n't-int$. On a, par ce qui précède,

$$de=-\frac{m'.an.dt}{\mu}.\left\{\left(\frac{dP}{de}\right).\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right\}.$$

Par le n°. 65, le moyen mouvement nt doit être augmenté de

$$\frac{3m'an^2i}{(i'n'-in)^2.\mu}.\{P.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-P'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\},$$

et le moyen mouvement $n't$, doit être augmenté de

$$-\frac{3m'an^2i}{(i'n'-in)^2.\mu}.\frac{m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.\{P.\cos.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-P'.\sin.(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\}.$$

En vertu de ces accroissemens, la valeur de de, sera augmentée de la fonction

$$-\frac{3m'.a^2.in^3.dt}{2\mu^2.\sqrt{a'}.(i'n'-in)^2}.\{i.m'.\sqrt{a'}+i'.m.\sqrt{a}\}.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right\};$$

et la valeur de $d\varpi$ sera augmentée de la fonction

$$\frac{3m'a^2.i.n^3.dt}{2\mu^2.\sqrt{a'}.(i'n'-in)^2.e}.\{i.m'.\sqrt{a'}+i'.m.\sqrt{a}\}.\left\{P.\left(\frac{dP}{de}\right)+P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)\right\}.$$

On trouvera pareillement que la valeur de de' sera augmentée de la fonction

$$-\frac{3ma^2.\sqrt{a}.in^3.dt}{2\mu^2.a'.(i'n'-in)^2}.\{i.m'.\sqrt{a'}+i'.m.\sqrt{a}\}.\left\{P.\left(\frac{dP'}{de'}\right)-P'.\left(\frac{dP}{de'}\right)\right\};$$

et que la valeur de $d\varpi'$ sera augmentée de la fonction

$$\frac{3ma^2.\sqrt{a}.in^3.dt}{2\mu^2a'.(i'n'-in)^2.e'}.\{i.m'.\sqrt{a'}+i'.m.\sqrt{a}\}.\left\{P.\left(\frac{dP}{de'}\right)+P'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)\right\}.$$

Ces différens termes sont sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et dans celle des satellites de Jupiter. Les variations de e, e', ϖ et ϖ', relatives à l'angle $i'n't-int$, peuvent encore introduire quelques termes constans de l'ordre du quarré des masses perturbatrices, dans les différentielles de, de', $d\varpi$ et $d\varpi'$, et dépendans des variations de e, e', ϖ et ϖ', relatives au même angle; il sera facile d'y avoir égard par l'analyse précédente. Enfin il sera facile, par notre analyse, de déterminer les termes des expressions de e, ϖ, e' et ϖ', qui dépendans de l'angle $i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon$, n'ont point $i'n'-in$, pour diviseur, et ceux qui dépendans du même angle et du double de cet angle, sont de l'ordre du quarré des forces perturbatrices. Ces différens termes sont assez considérables dans la théorie de Jupiter et de Saturne, pour y avoir égard : nous les développerons avec l'étendue qu'ils exigent, lorsque nous nous occuperons de cette théorie.

70. Déterminons les variations des nœuds et des inclinaisons des orbites, et pour cela, reprenons les équations du n°. 64,

$$dc = dt.\left\{y.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dy}\right)\right\};$$

$$dc' = dt.\left\{z.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\};$$

$$dc'' = dt.\left\{z.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dz}\right)\right\}.$$

Si l'on n'a égard qu'à l'action de m', la valeur de R du n°. 46 donne

$$y.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dy}\right) = m'.\{x'y - xy'\}.\left\{\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

$$z.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dz}\right) = m'.\{x'z - xz'\}.\left\{\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

$$z.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dz}\right) = m'.\{y'z - z'y\}.\left\{\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Soit maintenant,

$$\frac{c''}{c} = p\;; \qquad \frac{c'}{c} = q\;;$$

les deux variables p et q détermineront, par le n°. 64, la tangente de l'inclinaison φ de l'orbite de m, et la longitude θ de son nœud, au moyen des équations

$$\text{tang.}\,\varphi = \sqrt{p^2+q^2}\;; \qquad \text{tang.}\,\theta = \frac{p}{q}.$$

Nommons p', q', p'', q'', &c., ce que deviennent p et q, relativement aux corps m', m'', &c. : on aura par le n°. 64,

$$z = qy - px\;; \qquad z' = q'y' - p'x'\;; \quad \&c.$$

La valeur précédente de p, différentiée, donne

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}.\left\{\frac{dc'' - p\,dc}{dt}\right\};$$

en substituant au lieu de dc et de dc'', leurs valeurs, on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'}{c}.\{(q-q').yy'+(p'-p).x'y\}.\left\{\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

On trouvera pareillement

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'}{c}.\{(p'-p).xx'+(q-q').xy'\}.\left\{\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Si l'on substitue pour x, y, x', y', leurs valeurs $r.\cos.v$, $r.\sin.v$, $r'.\cos.v'$, $r'.\sin.v'$; on aura

$$\begin{aligned}(q-q').yy'+(p'-p).x'y = {} & \left(\frac{q'-q}{2}\right).rr'.\{\cos.(v'+v)-\cos.(v'-v)\} \\ & + \left(\frac{p'-p}{2}\right).rr'.\{\sin.(v'+v)-\sin.(v'-v)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p'-p).xx'+(q-q').xy' = {} & \left(\frac{p'-p}{2}\right).rr'.\{\cos.(v'+v)+\cos(v'-v)\} \\ & + \left(\frac{q-q'}{2}\right).rr'.\{\sin.(v'+v)+\sin.(v'-v)\}.\end{aligned}$$

En négligeant les excentricités et les inclinaisons des orbites, on a

$$r=a\,; \quad v=nt+\varepsilon\,; \quad r'=a'\,; \quad v'=n't+\varepsilon'\,;$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a'^3} - \frac{1}{\{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{\frac{3}{2}}};$$

on a de plus, par le n°. 48,

$$\frac{1}{\{a^2-2aa'.\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2\}^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}.\Sigma.B^{(i)}.\cos.i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$

le signe intégral Σ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives et négatives de i, en y comprenant la valeur $i=0$; on aura ainsi, en négligeant les termes de l'ordre des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites,

$$\frac{dp}{dt}=\frac{(q'-q)}{2c}\cdot\frac{m'a}{a'^2}\cdot\{\cos.(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)-\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\}$$

$$+\frac{(p'-p)}{2c}\cdot\frac{m'a}{a'^2}\cdot\{\sin.(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)-\sin.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\}$$

$$+\frac{(q'-q)}{4c}\cdot m'.aa'.\Sigma.B^{(i)}.\{\cos.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]-\cos.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}$$

$$+\frac{(p'-p)}{4c}\cdot m'.aa'.\Sigma.B^{(i)}.\{\sin.[(i+1).(n't+nt-\varepsilon'-\varepsilon)]-\sin.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\};$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{(p'-p)}{2c}\cdot\frac{m'a}{a'^2}\cdot\{\cos.(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)+\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\}$$

$$+\frac{(q'-q)}{2c}\cdot\frac{m'a}{a'^2}\cdot\{\sin.(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon)+\sin.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\}$$

$$+\frac{(p-p')}{4c}\cdot m'.aa'.\Sigma.B^{(i)}.\{\cos.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]+\cos.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}$$

$$+\frac{(q'-q)}{4c}\cdot m'.aa'.\Sigma.B^{(i)}.\{\sin.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]+\sin.[(i+1).(n't-nt+\varepsilon'\varepsilon)+2nt+2\varepsilon]\}.$$

La valeur $i=-1$, donne dans l'expression de $\frac{dp}{dt}$, la quantité constante $\frac{(q'-q)}{4c}.m'.aa'.B^{(-1)}$; tous les autres termes de l'expression de $\frac{dp}{dt}$, sont périodiques: en désignant par P, leur somme, et observant que $B^{(-1)}=B^{(1)}$, par le n°. 48; on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{(q'-q)}{4c}.m'.aa'.B^{(1)}+P.$$

On trouvera par le même procédé, que si l'on désigne par Q, la somme de tous les termes périodiques de l'expression de $\frac{dq}{dt}$, on aura

$$\frac{dq}{dt}=\frac{(p-p')}{4c}.m'.aa'.B^{(1)}+Q.$$

Si l'on néglige les quarrés des excentricités et des inclinaisons des orbites, on a par le n°. 64, $c=\sqrt{\mu a}$; en supposant ensuite $\mu=1$ on a $n^2a^3=1$, ce qui donne $c=\frac{1}{an}$; la quantité $\frac{m'.aa'.B^{(1)}}{4c}$, devient

vient ainsi, $\frac{m'.a^2a'.nB^{(1)}}{4}$, ce qui par le n°. 59 est égal à $(0,1)$; on aura ainsi,

$$\frac{dp}{dt} = (0,1).(q'-q)+P;$$

$$\frac{dq}{dt} = (0,1).(p-p')+Q.$$

Il suit de-là, que si l'on désigne par (P) et (Q), la somme de toutes les fonctions P et Q, relatives à l'action des différens corps m', m'', &c., sur m; si l'on désigne pareillement par (P'), (Q'), (P''), (Q''), &c., ce que deviennent (P) et (Q), lorsque l'on y change successivement les quantités relatives à m, dans celles qui sont relatives à m'. m'', &c., et réciproquement; on aura pour déterminer les variables p, q, p', q', p'', q'', &c., le système suivant d'équations différentielles,

$$\frac{dp}{dt} = -\{(0,1)+(0,2)+\&c.\}.q+(0,1).q'+(0,2).q''+\&c.+(P);$$

$$\frac{dq}{dt} = \{(0,1)+(0,2)+\&c.\}.p-(0,1).p'-(0,2).p''-\&c.+(Q);$$

$$\frac{dp'}{dt} = -\{(1,0)+(1,2)+\&c.\}.q'+(1,0).q+(1,2).q''+\&c.+(P');$$

$$\frac{dq'}{dt} = \{(1,0)+(1,2)+\&c.\}.p'-(1,0).p-(1,2).p''-\&c.+(Q');$$

&c.

L'analyse du n°. 68, donne pour les parties périodiques de p, q, p', q', &c.,

$$p = \int (P).dt\,; \qquad q = \int (Q).dt\,;$$
$$p' = \int (P').dt\,; \qquad q' = \int (Q').dt\,;$$

on aura ensuite les parties séculaires des mêmes quantités, en intégrant les équations différentielles précédentes, privées de leurs derniers termes (P), (Q), (P'), &c.; et alors, on retombera dans les équations (C) du n°. 59, que nous avons considérées avec assez d'étendue, pour nous dispenser de revenir sur cet objet.

71. Reprenons les équations du n°. 64.

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\sqrt{c'^2+c''^2}}{c}\,; \qquad \text{tang.}\,\theta = \frac{c''}{c'}\,;$$

d'où résultent celles-ci,

$$\frac{c'}{c} = \text{tang.}\,\varphi.\cos.\theta\,; \qquad \frac{c''}{c} = \text{tang.}\,\varphi.\sin.\theta.$$

En les différentiant, on aura

$$d.\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{c}.\{dc'.\cos.\theta + dc''.\sin.\theta - dc.\text{tang.}\,\varphi\}\,;$$

$$d\theta.\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{c}.\{dc''.\cos.\theta - dc'.\sin.\theta\}.$$

Si l'on substitue dans ces équations, au lieu de $\frac{dc}{dt}, \frac{dc'}{dt}; \frac{dc''}{dt}$, leurs valeurs $y.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dy}\right)$, $z.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x.\left(\frac{dR}{dz}\right)$, $z.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dz}\right)$, et au lieu de ces dernières quantités, leurs valeurs données dans le n°. 67; si l'on observe de plus, que $s = \text{tang.}\,\varphi.\sin.(v-\theta)$; on aura

$$d.\text{tang.}\,\varphi = \frac{dt.\text{tang.}\,\varphi.\cos.(v-\theta)}{c}.\left\{r.\left(\frac{dR}{dr}\right).\sin.(v-\theta) + \left(\frac{dR}{dv}\right).\cos(v-\theta)\right\}$$
$$- \frac{(1+s^2).dt}{c}.\cos.(v-\theta).\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$d\theta.\text{tang.}\,\varphi = \frac{dt.\text{tang.}\,\varphi.\sin.(v-\theta)}{c}.\left\{r.\left(\frac{dR}{dr}\right).\sin(v-\theta) + \left(\frac{dR}{dv}\right).\cos.(v-\theta)\right\}$$
$$- \frac{(1+s^2).dt}{c}.\sin.(v-\theta).\left(\frac{dR}{ds}\right).$$

Ces deux équations différentielles détermineront directement l'inclinaison de l'orbite et le mouvement des nœuds. Elles donnent,

$$\sin.(v-\theta).d.\text{tang.}\,\varphi - d\theta.\cos.(v-\theta).\text{tang.}\,\varphi = 0\,;$$

équation qui peut se déduire encore de celle-ci, $s = \text{tang.}\,\varphi.\sin.(v-\theta)$; en effet, cette dernière équation étant finie, on peut par le n°. 63, la différentier, soit en regardant φ et θ, comme constans, soit en les traitant comme variables; en sorte que sa différentielle prise en ne faisant varier que φ et θ, est nulle; d'où résulte l'équation différentielle précédente.

Supposons maintenant que le plan fixe soit extrêmement peu incliné à l'orbite de m, en sorte que nous puissions négliger les quarrés de s et de tang. φ; on aura

$$d\,.\,\text{tang.}\,\varphi = -\frac{dt}{c}.\cos.(v-\theta).\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$d\theta.\text{tang.}\,\varphi = -\frac{dt}{c}.\sin.(v-\theta).\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

en faisant donc comme précédemment,

$$p = \text{tang.}\,\varphi.\sin.\theta\ ; \qquad q = \text{tang.}\,\varphi.\cos.\theta\ ;$$

on aura, au lieu des deux équations différentielles précédentes, les suivantes,

$$dq = -\frac{dt}{c}.\cos.v.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$dp = -\frac{dt}{c}.\sin.v.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

or on a $s = q.\sin v. - p.\cos.v$, ce qui donne

$$\left(\frac{dR}{ds}\right) = \frac{1}{\sin.v}.\left(\frac{dR}{dq}\right)\ ; \qquad \left(\frac{dR}{ds}\right) = -\frac{1}{\cos.v}.\left(\frac{dR}{dp}\right);$$

partant

$$dq = \frac{dt}{c}.\left(\frac{dR}{dp}\right);$$

$$dp = -\frac{dt}{c}.\left(\frac{dR}{dq}\right).$$

On a vu dans le n°. 48, que la fonction R est indépendante de la position du plan fixe des x et des y; en supposant donc tous les angles de cette fonction, rapportés à l'orbite de m, il est visible que R sera fonction de ces angles, et de l'inclinaison respective des deux orbites, inclinaison que nous désignerons par $\varphi_{\prime}'$. Soit $\theta_{\prime}'$ la longitude du nœud de l'orbite de m', sur l'orbite de m; et supposons que $m'k.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^g.\cos.(i'n't - int + A - g.\theta_{\prime}')$, soit un terme de R, dépendant de l'angle $i'n't - int$: on aura par le n°. 60,

$$\text{tang.}\,\varphi_{\prime}'.\sin.\theta_{\prime}' = p' - p\ ; \qquad \text{tang.}\,\varphi_{\prime}'.\cos.\theta_{\prime}' = q' - q\ ;$$

d'où l'on tire

$$(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g}.\sin.g\theta_{\prime}' = \frac{\{q'-q+(p'-p).\sqrt{-1}\}^{g} - \{(q'-q)-(p'-p).\sqrt{-1}\}^{g}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\text{tang.}\,\varphi_{\prime}'.\cos.g\,\theta_{\prime}' = \frac{\{q'-q+(p'-p).\sqrt{-1}\}^{g} + \{q'-q-(p'-p).\sqrt{-1}\}^{g}}{2};$$

En n'ayant donc égard qu'au terme précédent de R, on aura

$$\left(\frac{dR}{dp}\right) = -g.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g-1}.m'k.\sin.\{i'n't - int + A - (g-1).\theta_{\prime}'\};$$

$$\left(\frac{dR}{dq}\right) = -g.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g-1}.m'k.\cos.\{i'n't - int + A - (g-1).\theta_{\prime}'\}.$$

Si l'on substitue ces valeurs, dans les expressions précédentes de dp et de dq, et si l'on observe que l'on a à très-peu près, $c = \frac{\mu}{an}$; on aura

$$p = \frac{g.m'k.an}{\mu.(i'n'-in)}.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g-1}.\sin.\{i'n't - int + A - (g-1).\theta_{\prime}'\};$$

$$q = \frac{g.m'k.an}{\mu.(i'n'-in)}.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g-1}.\cos.\{i'n't - int + A - (g-1).\theta_{\prime}'\}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $s = q.\sin.v - p.\cos.v$, on aura

$$s = \frac{-g.m'k.an}{\mu.(i'n'-in)}.(\text{tang.}\,\varphi_{\prime}')^{g-1}.\sin.\{i'n't - int - v + A - (g-1).\theta_{\prime}'\}.$$

Cette expression de s est la variation de la latitude, correspondante au terme précédent de R : il est clair qu'elle est la même, quel que soit le plan fixe auquel on rapporte les mouvemens de m et de m', pourvu qu'il soit peu incliné au plan des orbites ; on aura donc ainsi la partie de l'expression de la latitude, que la petitesse du diviseur $i'n'-in$ peut rendre sensible. A la vérité, cette inégalité de la latitude, ne renfermant ce diviseur, qu'à la première puissance ; elle est sous ce rapport, moins sensible que l'inégalité correspondante de la longitude moyenne, qui renferme le quarré de ce diviseur ; mais d'un autre côté, tang.$\varphi_{\prime}'$ s'y trouve élevé à une puissance moindre d'une unité ; remarque analogue à celle que nous avons faite dans le n°. 69, sur l'inégalité correspondante des excentricités des orbites. On voit ainsi, que toutes ces inégalités sont liées entre elles, et à la partie correspondante de R, par des rapports très-simples.

Si l'on différentie les expressions précédentes de p et de q, et si dans les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ et de $\frac{dq}{dt}$, qui en résultent, on fait croître les angles nt et $n't$, des inégalités des moyens mouvemens, dépendantes de l'angle $i'n't - int$; il en résultera dans ces différentielles, des quantités qui seront uniquement fonctions des élémens des orbites, et qui peuvent influer d'une manière sensible, sur les variations séculaires des inclinaisons et des nœuds, quoique de l'ordre des quarrés des masses perturbatrices; ce qui est analogue à ce que nous avons dit dans le n°. 69, sur les variations séculaires des excentricités et des aphélies.

72. Il nous reste à considérer la variation de la longitude ε de l'époque. On a par le n°. 64,

$$d\varepsilon = de.\left\{\left(\frac{dE^{(1)}}{de}\right).\sin.(v-\varpi)+\tfrac{1}{2}.\left(\frac{dE^{(2)}}{de}\right).\sin.2(v-\varpi)+\&c.\right\}$$
$$-d\varpi.\left\{E^{(1)}.\cos.(v-\varpi)+E^{(2)}.\cos.2(v-\varpi)+\&c.\right\};$$

en substituant pour $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, &c., leurs valeurs en séries ordonnées suivant les puissances de e, séries qu'il est facile de conclure de l'expression générale de $E^{(i)}$ du n°. 16; on aura

$$\begin{aligned}d\varepsilon = &-2de.\sin.(v-\varpi)+2e.d\varpi.\cos.(v-\varpi)\\ &+ede.\{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}e^2+\&c.\}.\sin.2(v-\varpi)-e^2d\varpi.\{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}e^2+\&c.\}.\cos.2(v-\varpi)\\ &-e^2de.\{1+\&c.\}.\sin.3(v-\varpi)+e^3.d\varpi.\{1+\&c.\}.\cos.3(v-\varpi)\\ &+\&c.\end{aligned}$$

Si l'on substitue pour de et $ed\varpi$, leurs valeurs données dans le n°. 67, on trouvera, en ne portant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre e^2 inclusivement,

$$d\varepsilon = \frac{a^2.ndt}{\mu}.\sqrt{1-e^2}.\{2-\tfrac{3}{2}e.\cos.(v-\varpi)+e^2.\cos.2(v-\varpi)\}.\left(\frac{dR}{dr}\right)$$
$$-\frac{andt}{\mu.\sqrt{1-e^2}}.e.\sin.(v-\varpi).\{1+\tfrac{1}{2}e.\cos.(v-\varpi)\}.\left(\frac{dR}{dv}\right).$$

L'expression générale de $d\varepsilon$, contient des termes de la forme $m'k.ndt.\cos(i'n't-int+A)$, et par conséquent l'expression de ε en contient de la forme $\frac{m'.k.n}{i'n'-in}.\sin.(i'n't-int+A)$; mais il est facile de se convaincre que le coefficient k dans ces termes, est de l'ordre $i'-i$, et qu'ainsi, ces termes sont du même ordre que ceux de la longitude moyenne, qui dépendent du même angle. Ceux-ci ayant pour diviseur, le quarré de $i'n'-in$; on voit que l'on peut négliger à leur égard, les termes correspondans de ε, lorsque $i'n'-in$ est une très-petite quantité.

Si dans les termes de l'expression de $d\varepsilon$, qui sont uniquement fonctions des élémens des orbites, on substitue au lieu de ces élémens, les parties séculaires de leurs valeurs; il est clair qu'il en résultera des termes constans, et d'autres termes affectés des sinus et des cosinus des angles dont dépendent les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons des orbites. Les termes constans produiront dans l'expression de ε, des termes proportionnels au temps, et qui se confondront avec le moyen mouvement de m. Quant aux termes affectés de sinus et de cosinus, ils acquerront par l'intégration, dans l'expression de ε, de très-petits diviseurs du même ordre que les forces perturbatrices; en sorte que ces termes étant à-la-fois multipliés et divisés par ces forces, ils pourront devenir sensibles, quoique de l'ordre des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons. Nous verrons dans la théorie des planètes, que ces termes y sont insensibles; mais ils sont très-sensibles dans la théorie de la lune et des satellites de Jupiter, et c'est de ces termes, que dépendent leurs équations séculaires.

On a vu dans le n°. 65, que le moyen mouvement de m, a pour expression $\frac{3}{\mu}.\int\int andt.\mathrm{d}R$, et que si l'on n'a égard qu'à la première puissance des masses perturbatrices, $\mathrm{d}R$ ne renferme que des quantités périodiques. Mais si l'on considère les quarrés et les produits de ces masses, cette différentielle peut contenir des termes qui sont uniquement fonctions des élémens des orbites. En y substituant au lieu de ces élémens, les parties séculaires de leurs valeurs; il en résultera des termes affectés des sinus et des cosinus des angles dont dépendent les variations séculaires des orbites. Ces termes acquerront par la double intégration, dans l'expression du moyen mouvement, de très-petits diviseurs qui seront de l'ordre des quarrés et des produits des masses perturbatrices; en sorte qu'étant à-la-fois multipliés et divisés par les quarrés et les produits de ces masses, ils pourront devenir sensibles, quoiqu'ils soient de l'ordre des quarrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites. Nous verrons encore que ces termes sont insensibles dans la théorie des planètes.

73. Les élémens de l'orbite de m, étant déterminés par ce qui précède; on les substituera dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, que nous avons données dans le nº. 22: on aura ainsi les valeurs de ces trois variables au moyen desquelles les Astronomes déterminent la position des corps célestes. En réduisant ensuite ces valeurs, en séries de sinus et de cosinus; on aura une suite d'inégalités dont on formera des tables, et l'on pourra ainsi calculer avec facilité, la position de m, à un instant quelconque.

Cette méthode fondée sur la variation des paramètres, est très-utile dans la recherche des inégalités qui par les rapports des moyens mouvemens des corps du système, acquièrent de grands diviseurs, et par-là, deviennent fort sensibles. Ce genre d'inégalités affecte principalement, les élémens elliptiques des orbites; en déterminant donc les variations qui en résultent dans ces élémens, et en les substituant dans l'expression du mouvement elliptique; on aura, de la manière la plus simple, toutes les inégalités que ces diviseurs rendent sensibles.

La méthode précédente est encore utile dans la théorie des comètes: nous n'appercevons ces astres, que dans une très-petite partie de leur cours, et les observations ne font connoître que la partie de l'ellipse qui se confond avec l'arc de l'orbite qu'elles décrivent pendant leurs apparitions; ainsi, en déterminant la nature de l'orbite considérée comme une ellipse variable, on aura les changemens que cette ellipse subit dans l'intervalle de deux apparitions consécutives de la même comète; on pourra donc annoncer son retour, et lorsqu'elle reparoît, comparer la théorie aux observations.

Après avoir donné les méthodes et les formules pour déterminer par des approximations successives, les mouvemens des centres de gravité des corps célestes; il nous reste à les appliquer aux différens corps du système solaire : mais l'ellipticité de ces corps influant d'une manière sensible, sur les mouvemens de plusieurs d'entre eux, il convient, avant que d'en venir aux applications numériques, de nous occuper de la figure des corps célestes, dont la considération est d'ailleurs aussi intéressante par elle-même, que celle de leurs mouvemens.

FIN DU TOME PREMIER.