RECUEIL
DES PIECES
QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation en M. DCC. XX.

TOME NEUVIEME.

Qui contient les Pieces de 1764, 1765, 1766, 1770 & 1772.

A PARIS;

Chez PANCKOUCKE, rue des Poitevins, à l'Hôtel de Thou.

M. DCC. LXXVII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

RECUEIL

DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

TOME NEUVIEME.

AVERTISSEMENT,

Au sujet des Pieces qui composent ce neuvieme Volume.

PAR l'Avertissement qui se trouve dans le huitieme Volume de cette Collection, publié au mois de Mars 1771, on voit que la Piece couronnée en 1764, devoit commencer le neuvieme Volume, & c'est celui que nous publions aujourd'hui; il s'étend jusqu'à 1772, & terminera la Collection des Pieces des Prix: l'Académie a décidé qu'à l'avenir ces Ouvrages seront imprimés chaque année dans le Volume des *Mémoires présentés par des Savans Etrangers*, & l'on a déjà commencé, en insérant les deux Pieces de 1774, dans le septieme Volume de ces Mémoires qui est pour l'année 1773, & qui a été publié par l'Académie au mois de Mai 1776.

En terminant ce Recueil des Prix, très-digne de l'attention des Savans par l'importance des Pieces qui le composent, nous croyons devoir donner ici une notice des neuf Volumes, afin que chacun puisse juger de ce qu'il doit avoir pour que la Collection soit complète, cela sera d'autant plus utile, que les premiers Volumes sont devenus très-rares, & qu'il y a plusieurs Pieces détachées & imprimées séparément.

DANS LE PREMIER VOLUME, on trouve d'abord la Piece qui remporta le Prix de 1720, sur le Mouvement, par M. CROUZAS; ensuite une Dissertation sur cette question: *Quelle seroit la meilleure maniere de conserver sur mer l'égalité du mouvement d'une pendule?* par M. MASSY.

Après une interruption qui dura jusqu'en 1724, on proposa en 1724 & 1726, la Question du choc des corps & de la communication du mouvement.

Les Pieces de MAC-LAURIN, de JEAN BERNOULLI & du P. MAZIERE, Oratorien, furent imprimées, avec un Traité des petits Tourbillons de la matiere subtile, pour servir d'éclaircissement à la Piece du P. MAZIERE.

Pour 1725, Discours sur la maniere la plus parfaite de conserver sur mer l'égalité du mouvement des Clepsidres ou Sabliers, par M. DANIEL BERNOULLI, célebre Géometre, qui a remporté plusieurs autres Prix depuis 1725.

1727. De la Mâture des Vaisseaux, par M. BOUGUER.

DANS LE TOME II, suite de 1727, *De implantatione malorum*, Piece qui avoit eu l'*Accessit*, de même que le Mémoire de la Mâture des Vaisseaux, par M. CAMUS.

1728. *De causa gravitatis Physica generali disquisitio Physica experimentalis.* GEORG. BERNN. BULEFINGER.

1729. De la Méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des Astres, par BOUGUER.

1730. Nouvelles Penſées ſur le Syſtême de Deſcartes & ſur la manière d'en déduire les Orbites & les Aphelies des Planetes, par J. BERNOULLI.

1731. De la méthode d'obſerver en mer la déclinaiſon de la Bouſſole, par BOUGUER.

1732 & 1734. Sur la cauſe de l'inclinaiſon des Orbites des Planetes, par BOUGUER; il y en a une ſeconde Edition de 1748.

1733. De la meilleure maniere de meſurer ſur mer le chemin du Vaiſſeau, par le Marquis POLENI.

DANS LE TOME III, on trouve deux Mémoires ſur les inclinaiſons des Orbites des Planetes, par JEAN BERNOULLI & DANIEL BERNOULLI; un ſur la propagation de la Lumiere, de JEAN BERNOULLI; & quatre Pieces ſur la forme & la fabrication des Ancres, pour le Prix de 1735 & 1737, par JEAN BERNOULLI, DANIEL BERNOULLI, POLENI & TRESAGUET.

DANS LE TOME IV, cinq Pieces ſur la nature du Feu, par M. EULER, le P. LOZERAN DU FIESC, M. le Comte de CREQUY, Madame la Marquiſe DU CHATELET & M. DE VOLTAIRE.

Prix de 1740, ſur la cauſe du Flux & du Reflux de la mer, quatre Pieces de MAC-LAURIN, EULER, DANIEL BERNOULLI & du P. CAVALLERI; les trois premieres ont été réimprimées dans le Commentaire des PP. JACQUIER & LE SEUR, ſur NEWTON, & ſont encore ce qu'il y a de mieux ſur cette matiere.

DANS LE TOME V, ſur le Cabeſtan, Prix de 1739-41, il y a ſept Pieces, dont quatre partagerent le Prix, & trois eurent l'*Acceſſit*, elles forment 296 pages *in*-4°.

1743. Sur l'inclinaiſon de l'Aiman, par DANIEL BERNOULLI & L. EULER.

1744-46. Sur l'Aiman, trois Pieces de M. EULER, de M. DU FOUR & de MM. DANIEL & JEAN BERNOULLI, conjointement entre les deux freres.

TOME VI. Ce Volume publié en 1750, contient en 526 pages *in*-4°. les Pieces qui concoururent en 1745 & 1747, ſur la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, au nombre de cinq, dont la premiere eſt de M. DANIEL BERNOULLI, les autres ſans nom d'Auteurs.

TOME VII, publié en 1769. Piece du Prix de 1748, ſur les inégalités de Saturne, par M. EULER; imprimée ſéparément en 1749, chez M. Delatour.

1751. Sur la nature des courans, par M. BERNOULLI.

1752. Sur les inégalités de Jupiter, par M. EULER.

1753. Sur la manière de ſuppléer à l'action du Vent, par M. BERNOULLI.

1755. Sur le Roulis & le Tangage, par M. CHAUCHOT, imprimée ſéparément chez Delatour.

1759. Sur le Roulis & le Tangage, par M. GROIGNARD.

1760. Sur la perfection des Verreries, par M. D'ANTIC.

1761. Sur l'Arrimage, deux Pieces, de M. J. A. EULER & de M. l'Abbé BOSSUT.

Ainsi ce Volume contient sept Pieces, sans compter les deux qui avoient été imprimées séparément, & qu'on peut y réunir.

TOME VIII, publié au mois d'Avril 1771.

1753. Sur la maniere de suppléer à l'action du Vent, deux *Accessit*, par M. EULER & M. MATHON DE LA COUR.

1756. Sur les inégalités de la Terre, par M. L. EULER.

1757. Sur le Roulis & le Tangage, par M. BERNOULLI.

1759. Sur le Roulis & le Tangage, par M. L. EULER.

1760. Sur les altérations du moyen mouvement des Planètes, par M. CHARLES EULER, second fils du célebre L. EULER.

1762. Sur la résistance de l'Ether, une Piece de M. l'Abbé BOSSUT, qui remporta le Prix, imprimée séparément à Charleville en 1766, & une de J. A. EULER, qui eut l'*Accessit*.

Ainsi ce huitieme Volume contient sept Pieces, indépendamment de celle de M. l'Abbé BOSSUT, qu'on peut y réunir.

TOME IX, publié au mois de Décembre 1776.

Prix de 1764, sur la Libration de la Lune, par M. DE LA GRANGE; quatre Pieces de 1766, sur l'Arrimage du Navire, par M. l'Abbé BOSSUT, M. BOURDÉ DE VILLEHUET, M. GROIGNARD & un Auteur anonyme.

1766. Sur les inégalités des Satellites de Jupiter, par M. DE LA GRANGE.

1768 & 1770. Sur la Théorie de la Lune, & spécialement l'Equation Séculaire, par MM. LÉONARD EULER & J. A. son fils, conjointement.

1772. Sur la Théorie de la Lune, un Mémoire de M. L. EULER, & un de M. DE LA GRANGE.

Ainsi ce neuvieme Volume contient neuf Pieces & finit à 1772.

Le Prix de 1773 avoit pour objet la perfection des Horloges Marines, & M. LE ROY se propose de publier son Mémoire séparément, ainsi il n'entrera point dans cette Collection qui se trouve finie, puisque l'on a vu ci-devant que les Pieces de 1774 sont déjà imprimées, comme les autres le seront à l'avenir, dans les *Mémoires présentés à l'Académie par les Savans Etrangers*. Mais la Collection des neuf Volumes des Prix, formera désormais une partie intéressante des Ouvrages de l'Académie, qui composent jusqu'à présent 115 Volumes *in*-4°. Nous ne comptons pas dans ce nombre quelques Ouvrages particuliers qui se distribuent comme suite des Mémoires de l'Académie; savoir, la Figure de la Terre de M. CASSINI, ses Elémens d'Astronomie en deux Volumes & sa Méridienne vérifiée; les Infiniment petits de M. DE FONTENELLE; l'Optique de M. BOUGUER, & les Mémoires de Calcul intégral de M. FONTAINE. Ce qui formeroit en tout 122 Volumes, y compris les deux Volumes de Mémoires pour 1772.

A Paris le 25 Novembre 1776. DE LA LANDE.

On trouvera sur la page suivante une Figure qui manque dans le Tome VII de ce Recueil, & que l'Auteur nous a adressée pour la placer dans ce Volume.

Prix de 1761

Recherches sur l'Arrimage des Vaisseaux

Tome VII.^me du Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des sciences de Paris

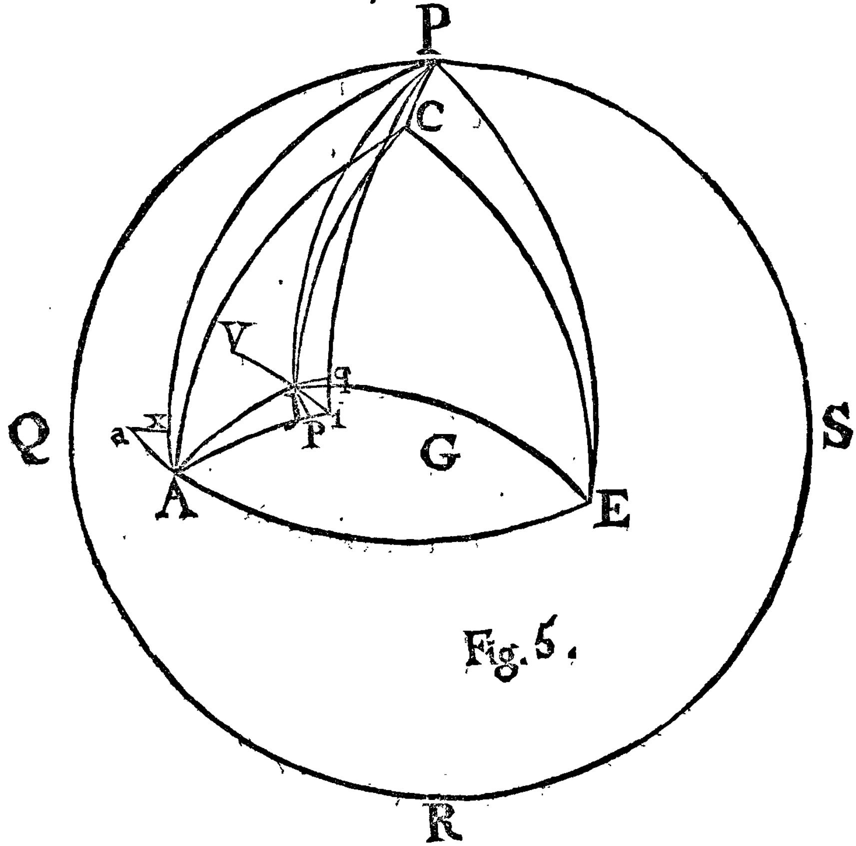


Fig. 5.

Figure cinquieme de la Piece de M. Jean Albert Euler: où elle est citée au §. 71. pag. 41. et au §. 88. pag. 49

Dans cette Figure, au lieu de la lettre X *lisez* α.

RECHERCHES

SUR

LA LIBRATION DE LA LUNE,

Dans lesquelles on tâche de résoudre la Question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'année 1764.

I.

CET écrit a pour objet d'examiner les différens mouvemens apparens, ou réels que la Lune peut avoir autour de son centre. Je suppose d'abord que cette Planette à une figure quelconque; & je cherche le mouvement qu'elle doit recevoir de l'action de la terre & du soleil. Quoi qu'un très-grand Geomètre ait déja donné des méthodes & des formules générales, qui peuvent aisément s'appliquer à la recherche dont il s'agit ici, néanmoins il m'a paru plus commode de reprendre la question en entier, & de la résoudre par une méthode que je crois nouvelle à plusieurs égards, & qui est d'un usage simple & général pour tous les Problêmes de Dynamique. Cette méthode me conduit naturellement à trois équations générales, qui reviennent au même, pour le fond, que celles qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie de 1754, pag. 424, 425; & pour en faciliter la comparaison à ceux qui voudront prendre la peine de la faire, j'expose en peu de mots les principales différences qu'il y a entr'elles par rapport à la diversité des dénominations. D'après ces équations, j'examine quels changemens l'action de la terre & du soleil doit produire dans la rotation de la Lune, & dans la position de son axe. Après avoir prouvé, que l'action du soleil est presque insensible par rapport à celle de la terre, je trouve qu'en supposant, avec M. Newton, que la Lune est un sphéroïde allongé vers la terre, cette Planette doit faire autour de son axe une espece de balancement ou de vibration, par lequel sa vitesse de rotation est tantôt accélerée, tantôt retardée; & j'explique alors avec facilité pourquoi la Lune doit nous montrer toujours à-peu-près la même face, quoique elle n'ait point reçu d'abord, comme il est très-naturel de l'imaginer, une rotation exactement égale à son mouvement moyen autour de la terre. Je fais voir ensuite que l'axe de cette Planette doit être sujet à un mouvement semblable à celui de la terre, comme M. d'Alembert l'a déja démontré dans la supposition que la Lune soit un sphéroïde homogéne & elliptique dans tous les sens; mais je differe essentiellement de lui sur la quantité de la précession & de la nutation qui doit avoir lieu dans cette hypothese; je donne la raison de la différence qui se trouve entre nos résultats en faisant voir que les formules qui sont vraies pour la terre ne s'appliquent pas indistinctement à la Lune, comme le suppose cet Auteur. Je fais voir de plus que la figure de la Lune pourroit aussi être telle que la préceffion de fes points équinoxiaux fût exactement, ou à très-peu près égale au mouvement des nœuds de la Lune ; comme l'a trouvé M. Caffini ; & dans ce cas je démontre qu'il ne doit plus y avoir de nutation fenfible dans l'axe de cette Planette. Au refte, c'eft aux Aftronomes feuls à nous inftruire pleinement la-deffus ; mais pour les mettre plus à portée de connoître ces différens mouvemens, je propofe des méthodes que je crois affez fimples pour déterminer, par le moyen des obfervations des tâches de la Lune, la pofition de fon axe de rotation, & la quantité de fa libration tant apparente que réelle.

Tels font, en abrégé, les points principaux de la Differtation fuivante. L'Académie Royale des Sciences ayant propofé pour le fujet du Prix de l'année prochaine: » Si » on peut expliquer par quelque raifon phyfique pour- » quoi la Lune nous préfente toujours à-peu-près la mê- » me face ; & comment on peut déterminer par les ob- » fervations & par la théorie fi l'axe de cette Planette eft » fujet à quelque mouvement propre, femblable à celui » qu'on connoît dans l'axe de la terre, & qui produit la » préceffion des équinoxes, & la nutation « ; j'ofe lui préfenter le fruit de mon travail fur cette importante matiere. S'il ne répond pas entierement aux vues de cette fçavante Compagnie, au moins fervira-t-il à jetter de nouvelles lumieres fur un des principaux phenomènes céleftes.

I.

Comme il n'eft queftion ici que du mouvement que la Lune doit avoir autour de fon centre de gravité, en vertu de l'action du foleil & de la terre, il eft évident qu'on peut regarder le centre de la Lune comme immobile par rapport à la terre & au foleil, en tranfportant à ces deux Planettes en fens contraire le mouvement que la Lune a réellement autour d'elles, c'eſt-à-dire en imaginant que la Terre & le Soleil ſe meuvent autour du centre de la Lune ſuppoſé fixe, comme les verroit un Obſervateur placé dans ce centre.

Cela poſé, j'imagine par le centre de la Lune un plan parallele à l'écliptique, auquel je rapporte la poſition des centres de la Terre & du Soleil, comme auſſi celle de tous les points de la maſſe de la Lune; pour cela ayant mené du centre de cette Planette dans le plan dont je parle, une ligne fixe & dirigée vers le premiers point d'Aries, laquelle ſert d'axe commun à toutes les abſciſſes.

Soient x l'abſciſſe & y l'ordonnée rectangle qui répondent à la projection du centre de la Terre ſur ce plan, & ſoit z l'autre coordonnée rectangle qui exprime la diſtance du centre de la Terre au point qui en eſt la projection.

Soient auſſi $x'\,y'\,z'$ les coordonnées ſemblables pour la poſition du centre du Soleil.

Enfin ſoient X l'abciſſe & Y, Z les deux ordonnées correſpondantes à un point quelconque α de la maſſe de la Lune.

Il eſt viſible 1°. que la diſtance de ce point au centre de la Terre ſera exprimé par $\sqrt{(\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2+\overline{z-Z}^2)}$, quantité que j'appelle R pour abréger.

2°. Que la diſtance du même point au centre du Soleil ſera exprimée de même par la quantité $\sqrt{(\overline{x'-X}^2+\overline{y'-Y}^2+\overline{z'-Z}^2)}$ que j'appelle R'.

Donc ſi on nomme T la maſſe de la Terre, & S celle du Soleil, chaque point α de la Lune ſera tiré par deux forces, l'une dans la direction de la ligne R & $=\frac{T}{R^2}$; l'autre ſuivant la ligne R' & $=\frac{S}{R'^2}$.

De plus, ſi on prend l'élément du tems dt pour conſtant, on aura $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$, $\frac{d^2Z}{dt^2}$ pour les forces accélératrices dont le point α eſt ſollicité ſuivant la direction des eſpaces dX, dY, dZ, qu'il parcourt dans l'inſtant dt, & il faudra, par le principe général de la Dynamique que ces forces priſes en ſens contraire, & combinées avec les forces $\frac{T}{R^2}$, $\frac{S}{R'^2}$ tiennent le ſyſtême de tous les points α, c'eſt-à-dire la maſſe entiere de la Lune en équilibre autour de ſon centre de gravité ſuppoſé fixe.

I I I.

C'eſt un principe généralement vrai en Statique que, ſi un ſyſtême quelconque de tant de corps ou de points que l'on veut, tirés chacun par des puiſſances quelconques eſt en équilibre ; & qu'on donne à ce ſyſtême un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourre un eſpace infiniment petit ; la ſomme des puiſſances, multipliées chacune par l'eſpace que le point, où elle eſt appliquée, parcourt ſuivant la direction de cette même puiſſance, ſera toujours $= 0$.

Dans la queſtion préſente, ſi on imagine que les lignes X, Y, Z, R, R', deviennent, en variant infiniment peu la poſition de la Lune autour de ſon centre, $X + \delta X$, $Y + \delta Y$, $Z + \delta Z$, $R + \delta R$, $R' + \delta R'$, il eſt facile de voir que les différences δX, δY, δZ, δR, $\delta R'$, exprimeront les eſpaces parcourus en même tems par le point α dans des directions oppoſées à celles des puiſſances $\alpha \frac{d^2 X}{dt^2}$, $\alpha \frac{d^2 Y}{dt^2}$, $\alpha \frac{d^2 Z}{dt^2}$, $\alpha \frac{T}{R^2}$; $\alpha \frac{S}{R'^2}$, qui ſont cenſées agir ſur ce point ; on aura donc, pour les conditions de l'équilibre, l'équation générale.

$$\int \left(\alpha \frac{d^2 X}{dt^2} \times - \delta X + \alpha \frac{d^2 Y}{dt^2} \times - \delta Y + \alpha \frac{d^2 Z}{dt^2} \times - \delta Z + \alpha \frac{T}{R^2} \times - \delta R + \alpha \frac{S}{R'^2} \times - \delta R' \right) = 0.$$

Savoir, en changeant les ſignes.

$$\frac{1}{dt^2}\int \alpha\,(d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z)$$

$$+ T\int\frac{\alpha\delta R}{R^2} + S\int\frac{\alpha\delta R'}{R'^2} = 0 \ldots\ldots\ldots (A)$$

Les quantités δX, δY, δZ, δR, $\delta R'$, ne ſont autre choſe que les différentielles des lignes X, Y Z : priſes à l'ordinaire & affectées de la caractériſtique δ au lieu de la commune d, pour les diſtinguer des autres différentielles des mêmes lignes qui ont rapport au mouvement réel du corps.

Quant au ſigne d'intégration $\int$ il eſt mis pour marquer la ſomme de toutes les formules ſemblables qui répondent à tous les élémens α de la maſſe de la Lune.

I V.

SCHOLIE. Le principe de Statique que je viens d'expoſer n'eſt, dans le fond qu'une généraliſation de celui qu'on nomme communément le principe des vîteſſes virtuelles, & qui eſt reconnu depuis longtems par les Géomètres pour le principe fondamental de l'équilibre. M. Jean Bernouilli eſt le premier, que je ſache, qui ait enviſagé ce principe ſous un point de vue général & applicable à toutes les queſtions de Statique, comme on le peut voir dans la Section IX. de la nouvelle Mecanique de M. Varignon, où cet habile Géomètre, après avoir rapporté, d'après M. Bernouilli, le principe dont il s'agit, fait voir par différentes applications, qu'il conduit aux mêmes concluſions que celui de la compoſition des forces.

C'eſt auſſi ce même principe qui ſert de baſe à celui que M. de Maupertuis a donné dans les Mémoires de l'Académie de 1740, ſous le nom de Loi du Repos ; & que M. Euler a développé enſuite & rendu très-général dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1751.

Enfin c'eſt de ce principe que dépend celui de la conſervation des forces vives, comme M. d'Alembert l'a remarqué le premier à la fin de ſa Dynamique; ce qui peut d'ailleurs ſe démontrer généralement ainſi. Soit un ſyſtême quelconque de tant de corps qu'on voudra m, m', m'', &c. qui peſent, ou qui ſoient attirés vers des centres par des forces quelconques; ſoient P, Q, R, &c. les forces qui agiſſent ſur le corps m, & p, q, r, &c. les diſtances reſpectives de ce corps, aux centres de ſes forces; ſoient auſſi P', Q', R', &c. P'', Q'', R'', &c. &c. les forces des corps m', m'', &c. & p', q', r', &c. p'', q'', r'' &c. &c. leurs diſtances aux centres des forces; ſi l'on imagine que tous ces corps ſe meuvent, durant un inſtant quelconque dt, par les eſpaces ds, ds' ds'', &c. avec les vîteſſes v, v', v'', &c. il faudra, par le principe général de la Dynamique, que le ſyſtême des corps m, m', m'', &c. animés chacun des forces $-\frac{m\,dv}{dt}$, $-\frac{m'dv'}{dt}$, $-\frac{m''dv''}{dt}$, &c. dans la direction même des eſpaces ds, ds', ds'' ſoit en équilibre avec les forces mP, mQ, mR, &c. $m'P'$, $m'Q'$, $m'R'$, &c. $m''P''$, $m''Q''$, $m''R''$, &c. &c. Or ſi l'on conſidére le ſyſtême pendant que les corps changent infiniment peu de poſition, en parcourant les eſpaces ds, ds', ds'', &c. il eſt clair que dp, dq, dr, &c. dp', dq', dr', &c. dp'', dq'', dr'', &c. &c. exprimeront les eſpaces parcourus par chacun des corps, dans des directions contraires à celles des forces P, Q, R, &c. P', Q', R', &c. &c. on aura donc, par le principe de l'équilibre dont nous parlons.

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{m\,dv}{dt}\times ds+mP\times-dp+mQ\times-dp+mR\times-dr+\text{\&c.}\\
-\frac{m'dv'}{dt}\times ds'+m'P'\times-dp'+m'Q'\times-dq'+m'R\times-dr'+\text{\&c.}\\
-\frac{m''dv''}{dt}\times ds''+m''P''\times-dp''+m''Q''\times-dq''+m''R\times d-dr''+\text{\&c.}\\
\quad\text{\&c.}
\end{array}\right\}=0$$

Mettant, au lieu de dt, ses valeurs $\frac{ds}{v}$, $\frac{ds'}{v'}$, $\frac{ds''}{v''}$, &c. & intégrant, on aura

$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \&c. = mV^2 + m'V''^2 + m''V''^2 + \&c.$$
$$- 2m\int (Pdp + Qdq + Rdr + \&c.)$$
$$- 2m'\int (P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \&c.$$
$$- 2m''\int (P''dp'' + Q''dq + R''dr'' + \&c.) - \&c.$$

V, V', V'' &c. étant les valeurs primitives de v, v', v'', &c. & cette équation renferme, comme on le voit, la conservation des forces vives prise dans toute son étendue.

Au reste, le Principe de Statique que je viens d'exposer, étant combiné avec le Principe Dynamique donné par M. d'Alembert, constitue une espece de formule générale qui renferme la solution de tous les problêmes qui regardent le mouvement des corps. Car on aura toujours une équation semblable à l'équation (A), art. préc., & toute la difficulté ne consistera plus qu'à trouver l'expression analytique des forces qu'on suppose agir sur les corps, & des lignes suivant lesquelles ces forces agissent, en n'employant dans ces expressions que le plus petit nombre possible de variables indéterminées, de maniere que leurs différentielles désignées par le δ soient entierement indépendantes les unes des autres; après quoi faisant séparément égaux à zéro, les termes qui se trouveront multipliés par chacune des différentielles dont je parle, on aura tout d'un coup autant d'équations particulieres qu'il en faudra pour la solution du problême; comme on le verra dans les articles qui suivent.

V.

Soient présentement l'inclinaison du plan de l'équateur lunaire par rapport à celui de l'écliptique. . . π.

La longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire, c'est-à-dire l'angle que l'intersection de cet équateur,

teur, avec l'écliptique, ou avec le plan parallèle à l'écliptique, & paſſant par le centre de la Lune fait avec l'axe des abſciſſes (art. II.) . . . . ε.

La diſtance d'un méridieu lunaire pris à volonté ſur la ſurface de la Lune, & qu'on appellera dorénavant le premier méridien, au nœud deſcendant de l'équateur, cette diſtance étant comptée à l'ordinaire ſur l'équateur & ſelon la ſuite des ſignes. . . . . ω.

Il eſt aiſé de voir que ces trois variables ſuffiront pour determiner à chaque inſtant, la ſituation de la Lune par rapport à ſon centre qui eſt cenſé immobile; auſſi ce ſeront les ſeules qu'il faudra faire varier dans les différentielles des lignes X, Y, Z, R, R'.

Soit de plus le rayon ou la diſtance d'un point quelconque α au centre de gravité de la Lune. . . . . . . r.

L'angle que ce rayon fait avec le plan de l'équateur, ou la diſtance du point α à l'équateur comptée ſur le méridien qui paſſe par ce point . . . . P.

L'angle que le méridien paſſant par le point α fait avec le premier méridien, c'eſt-à-dire la diſtance entre ces deux méridiens comptée ſur l'équateur en allant d'Occident en Orient. . . . . Q.

Il eſt viſible que ces trois nouvelles indéterminées ne dêpendent nullement de la poſition de la Lune ſur ſon centre, mais ſeulement de la ſituation particuliere de chacun de ces points α par rapport à tous les autres. Ainſi ces quantités r, P, Q, ne ſeront variables dans nos formules que relativement aux intégrations indiquées par le ſigne $\int$ dans l'équation (A).

Au reſte il eſt bon de remarquer d'avance que, comme on ſuppoſe que le centre de rotation de la Lune ſoit dans ſon centre même de gravité, on aura par la propiété connue de ce centre les trois conditions ſuivantes: $\int \alpha\, r \sin. P = 0$; $\int \alpha\, r \cos. P \sin. Q = 0$; $\int \alpha\, r \cos. P \cos. Q = 0$. . . . . (B).

VI.

Maintenant pour avoir les valeurs des coordonnées X, Y, Z exprimées en r, P, Q, ω, ε, π, je considere que l'angle P peut être regardé comme exprimant la declinaison du point α vu du centre de la Lune, & rapporté à l'équateur lunaire ; & que dans cette supposition, l'angle $Q+\omega$, que je nommerai Q' pour abréger sera l'ascension droite du même point comptée à l'ordinaire depuis le nœud descendant de l'équateur. Donc en rapportant le point α au plan de l'écliptique lunaire (j'appelle ainsi le plan que nous avons imaginé parallèle à l'écliptique, & passant par le centre de la Lune) lequel est incliné à l'équateur de l'angle π, on trouvera facilement, par les formules de la trigonometrie, sa latitude que j'appellerai p, & sa longitude que je nommerai q' ; car on aura, comme il aisé de le démontrer.

$$\left.\begin{aligned} \sin. p &= \sin. P \cos. \pi - \cos. P \sin. Q' \sin. \pi \\ \sin. q' &= \frac{\sin. P \sin. \pi + \cos. P \sin. Q' \cos. \pi}{\cos. p} \\ \cos. q' &= \frac{\cos. P \cos. Q'}{\cos. p} \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

Mais il est clair d'autre part que l'angle p n'est autre chose que l'angle fait par le rayon r avec le plan des X & Y ; & que $q'+\varepsilon$, que je nomme q, est l'angle que la projection de r sur ce plan fait avec l'axe des X ; on aura donc, comme il est facile de le concevoir même sans figure : $Z = r \sin. p$.

$$\left.\begin{aligned} Y &= r \cos. p \sin. q = r \cos. p \cos. q' \sin. \varepsilon \\ &\qquad\qquad + r \cos. p \sin. q' \cos. \varepsilon \\ X &= r \cos. p \cos. q = r \cos. p \cos. q' \cos. \varepsilon \\ &\qquad\qquad - r \cos. p \sin. q' \sin. \varepsilon \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

& substituant pour $\sin. p$, & pour $\sin. q'$, & $\cos. q'$ leurs valeurs, ci-devant,

$$\left.\begin{aligned} X &= r\,cos.P\,cos.Q'\,cos.\,\varepsilon - r\,cos.P\,sin.\,Q'\,sin.\,\varepsilon\,cos.\,\varpi \\ &\qquad - r\,sin.\,P\,sin.\,\varepsilon\,sin.\,\pi \\ Y &= r\,cos.\,P\,cos.Q'\,sin.\,\varepsilon + r\,cos.\,P\,sin.\,Q'\,cos.\varepsilon\,cos.\,\varpi \\ &\qquad + r\,sin.\,P.\,cos.\,\varepsilon\,sin.\,\pi \\ Z &= r\,sin.\,P\,cos.\,\pi - r\,cos.\,P\,sin.\,Q'\,sin.\,\pi \end{aligned}\right\}\ldots(E).$$

où l'on se ressouviendra que $Q' = Q + \omega$.

VII.

On différentiera d'abord ces valeurs de X, Y, Z, en faisant varier seulement ω, ε, π (Art. V.), & en mettant la caractéristique δ au lieu de la d, pour avoir celles de δX, δY, δZ; on différentiera ensuite les mêmes valeurs X, Y, Z deux fois à l'ordinaire, pour avoir les differentio-différentielles d^2X, d^2Y, d^2Z; après quoi on fera les produits $d^2X\delta X$, $d^2Y\delta Y$, $d^2Z\delta Z$; & l'on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, & mis pour $sin.Q'\,cos.\,Q'$, $sin.\,Q'^2\,cos.\,Q'^2$, leurs valeurs $\frac{1}{2}sin.\,2\,Q'$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos.\,2\,Q'$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos.\,2\,Q'$.

$d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2\,cos.\,P^2\,[\,d^2\omega + d\,(cos.\,\pi\,d\varepsilon) + \frac{1}{2}sin.\,2\,Q'\,(sin.\,\pi^2\,d\varepsilon^2 - d\pi^2) + cos.\,2\,Q'\,sin.\,\pi\,d\pi\,d\varepsilon\,]\,\delta\omega + r^2\,sin.\,P\,cos.\,P\,[\,sin.\,Q'\,(sin.\,\pi^2\,d^2\varepsilon + 2\,cos.\,\pi\,d\varpi\,d\varepsilon) + cos.\,Q'\,(d^2\pi - sin.\,\pi\,cos.\,\pi\,d\varepsilon^2)\,]\,\delta\omega + r^2\,cos.\,P^2\,[\,d.\,(cos.\,\pi\,d\omega + d\varepsilon - \frac{1}{2}sin.\,\pi^2\,d\varepsilon) - sin.\,2\,Q'\,\Big(sin.\,\pi^2\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}\,d\,(sin.\,\pi\,d\pi)\Big) + cos.\,2\,Q'\,\Big(\frac{1}{2}\,d.(sin.\,\pi^2\,d\varepsilon) - sin.\,\pi\,d\omega\,d\varepsilon\Big)\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,sin.\,P\,cos.\,P\,[\,sin.\,Q'\Big(sin.\,\varpi\,d^2\omega + d.(sin.\,2\,\pi\,d\varepsilon)\Big) + cos.\,Q'\Big(sin.\,\pi\,d\omega^2 + sin.\,2\,\pi\,d\varepsilon\,d\omega + d.\,(cos.\,\pi\,d\pi)\Big)\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,sin.\,P^2\,[\,d.\,(sin.\,\pi^2\,d\varepsilon)\,]\,\delta\varepsilon + r^2\,cos.\,P^2\,[\,sin.\,\pi\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}sin.\,\pi\,cos.\,\pi\,d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,d^2\pi + sin.\,2\,Q'\,(d\omega\,d\pi - \frac{1}{2}sin.\,\pi\,d^2\varepsilon) - cos.\,2\,Q'\,(sin.\,\pi\,d\omega\,d\varepsilon + \frac{1}{2}sin.\,\pi\,cos.\,\pi\,d\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,d^2\,\pi)\,]\,\delta\pi + r^2\,sin.\,P\,cos.\,P\,[\,-sin.\,Q' \times (2\,cos.\,\pi\,d\omega\,d\varepsilon + d\varepsilon^2\,cos.\,2\,\pi + d\omega^2) + cos.\,Q' \times d.$

$(d\omega + cof.\,\pi\, d\,\varepsilon)]\,\delta\pi + r^2 fin.\, P^2\,[d^2\pi - fin.\,\pi\, cof.\,\varpi\, d\,\varepsilon^2]$ $\delta\pi$.

On multipliera cette quantité par α, & on en prendra l'intégrale en faifant varier feulement r, P, Q, (Art. V.); l'on aura ainfi la valeur de $\int \alpha\,(d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$ qu'il faudra fubftituer dans l'équation (A), Art. III.

VIII.

Remarque. Il y a plufieurs moyens d'abréger le calcul de la valeur de $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$; en voici un qui quoique indirect eft néanmoins préférable par fa fimplicité & fa généralité. On commencera par chercher la valeur de $dX^2 + dY^2 + dZ^2$; & pour ce j'obferverai dans la fuppofition préfente, que la valeur de X devient celle de Y, en mettant fimplement $-cof.\,\varepsilon$ à la place de $fin.\,\varepsilon$, & $fin.\,\varepsilon$ à la place de $cof.\,\varepsilon$, c'eft-à-dire en augmentant l'angle ε de 90°; ce qui aura par conféquent lieu auffi dans les valeurs de dX^2, & de dY^2; d'où il s'enfuit que dès que l'on aura la valeur de dX, on en pourra tirer tout de fuite celle de $dX^2 + dY^2$ en négligeant fimplement dans le quarré de dX tous les termes qui renfermeroient $fin.\,\varepsilon\, cof.\,\varepsilon$, & effaçant dans les autres les quarrés $fin.\,\varepsilon^2$, & $cof.\,\varepsilon^2$; après cela il n'y aura plus qu'à faire le quarré de dZ, & l'on aura après quelques réductions :

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = r^2\, cof.\, P^2\,[\,d\omega^2 + 2\, cof.\,\pi\, d\omega\, d\varepsilon + d\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2} fin.\,\pi^2\, d\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\, d\pi^2 + \tfrac{1}{2}\, cof.\, 2\,Q'\,(fin.\,\pi^2\, d\varepsilon^2 - d\pi^2) + fin.\, 2\,Q'\, fin.\,\pi\, d\pi\, d\varepsilon\,] + 2\, r^2 fin.\, P\, cof.\, P\,[\,fin.\, Q' \times (fin.\,\pi\, d\omega\, d\varepsilon + fin.\,\pi\, cof.\,\pi\, d\varepsilon^2) + cof.\, Q'\,(d\omega\, d\pi + cof.\,\pi\, d\varepsilon\, d\pi)\,] + r^2 fin.\, P^2\,[\,fin.\,\pi^2\, d\varepsilon^2 + d\pi^2\,].$$

Je différentie à préfent cette équation par δ, c'eft-à-dire en affectant les différentielles de δ au lieu de d; j'aurai après avoir divifé par 2, $dX \delta dX + dY \delta dY + dZ \delta dZ$

$= r^2 cos. P^2 [d\omega \delta d\omega + cos. \pi d\varepsilon \delta d\omega + cos. \pi d\omega \delta d\varepsilon -$ $sin. \pi d\omega d\varepsilon \delta\pi$ &c. Je ne mets pas cette différentielle en entier parce que je ne veux que donner une idée de la méthode que je propose. Maintenant je considere que δdX est la même chose que $d\delta X$, comme il est aisé de s'en convaincre en considérant la nature du calcul différentiel ; il en est de même des autres différentes affectées de δd; on peut dont mettre par tout $d\delta$ au lieu de δd ; & l'on aura $dXd\delta X + dYd\delta Y + dZd\delta Z = r^2 cos. P^2$ $[d\omega d\delta\omega + cos. \pi d\varepsilon d\delta\omega + cos. \pi d\omega d\delta\varepsilon - sin. \pi d\omega$ $d\varepsilon\delta\pi$ &c. On prendra l'intégrale de cette équation, & regardant les différences affectées de δ comme de simples variables on fera disparoître leurs différentielles par l'opération assez connue des intégrations par parties ; ce qui donnera $dX\delta X + dY\delta Y + dZ\delta Z - \int(d^2X\delta X +$ $d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z) = r^2 cos. P^2 [d\omega\delta\omega + cos. \pi d\varepsilon\delta\omega$ $+ cos. \pi d\omega\delta\varepsilon$ &c. $- \int(cos. P^2] d^2\omega\delta\omega + d. (cos. \pi d\varepsilon)$ $\delta\omega + d. (cos. \pi d\omega)\delta\varepsilon + sin. \pi d\omega d\varepsilon\delta\pi$ &c.$)$. Or, il est aisé de comprendre que cette équation doit être identique ; & que par conséquent il faut que la partie algébrique du premier membre soit égale à la partie algébrique du second, & la partie intégrale à la partie intégrale ; donc, n'ayant égard qu'à la partie intégrale de l'un & de l'autre membre, & ôtant le signe $\int$ on aura sur le champ $d^2X\delta X + d^2Y\delta Y + d^2Z\delta Z = r^2 cos. P^2 [d^2\pi\delta\omega + d.$ $(cos. \pi d\varepsilon)\delta\omega + d. (cos. \pi d\omega)\delta\varepsilon + sin. \pi d\omega d\varepsilon\delta\pi$ &c.

On peut remarquer encore que cette valeur ne différe de celle de $dX\delta dX + dY\delta dY + dZ\delta dZ$, qu'en ce que la lettre d qui étoit après la δ dans les différentielles affectées de δd se trouve maintenant devant les quantités mêmes qui multiplient ces différentielles ; & que les autres termes qui ne renferment point de semblables différentielles, ont des signes contraires. Ainsi ayant la valeur de $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ on aura facilement celle de

$d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$ dont on a beſoin dans la ſolution de tous les problêmes de Dinamique qu'on voudra traiter ſuivant notre méthode.

I X.

Juſqu'ici la poſition de l'axe de rotation, autour duquel nous ſuppoſons que la Lune tourne en décrivant d'occident en orient l'angle ω, eſt abſolument arbitraire, & nous pourrons prendre telle ligne qu'il nous plaira pourvu qu'elle paſſe par le centre de gravité ; mais le calcul ſera beaucoup ſimplifié ſi on ſuppoſe, qu'abſtraction faite des forces étrangeres, la rotation de la Lune doive être uniforme, & ſon axe une ligne fixe & invariable. Voyons donc les conditions qui réſultent de ces ſuppoſitions ; pour cela il n'y a qu'à faire $T = o$, & $S = o$ dans l'équation (A) ; ce qui la réduit à $\frac{1}{dt^2} \int (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z) \alpha = o$ & il faudra que cette équation ſoit vraie en faiſant $d^2 \omega = o$, $d \varepsilon = o$ & $d \pi = o$; or, dans ce cas on aura (Art. VII.) $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z = r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{coſ.}\, Q' \mathit{ſin.}\, \pi \, d\omega^2 \delta \varepsilon - r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{ſin.}\, Q' \, d\omega^2 \delta \pi$; donc l'équation à vérifier ſera $\frac{\mathit{ſin.}\, \pi \, d\omega^2 \delta \varepsilon}{dt^2} \int \alpha r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{coſ.}\, Q' + \frac{d\omega^2 \delta \pi}{dt^2} \int \alpha r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{ſin.}\, Q' = o$, laquelle donne ſéparément les deux ſuivantes (IV. à la fin) $\int \alpha r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{coſ.}\, Q' = o$; & $\int \alpha r^2 \mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{ſin.}\, Q' = o$. ($F$)

Telles ſont les conditions néceſſaires pour que la Lune puiſſe d'elle-même tourner uniformément autour d'un axe fixe ; par conſéquent ſi on ſuppoſe, comme les obſervations de la Libration paroiſſent le démontrer, que ces conditions ayent lieu dans la rotation de la Lune, il faudra négliger dans la valeur de $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$ (Art. VII.) tous les termes où ſe trouvent $\mathit{ſin.}\, P \mathit{coſ.}\, P \mathit{coſ.}\, Q'$,

& $\sin. P \cos. P \sin. Q'$; & pour avoir l'intégrale $\int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$, il n'y aura plus qu'à mettre au lieu de Q' sa valeur $Q + \omega$; ce qui donne $\cos. 2\, Q' = \cos. 2\, Q \cos. 2\, \omega - \sin. 2\, Q \sin. 2\, \omega$, $\sin. 2\, Q' = \cos. 2\, Q \sin. 2\, \omega + \sin. 2\, Q \cos. 2\, \omega$; en supposant pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} \int \alpha\, r^2 \cos. P^2 = H \,;\, \int \alpha\, r^2 \sin. P^2 = K \,; \\ \int \alpha\, r^2 \cos. P^2 \cos. 2\, Q = M \,;\, \int \alpha\, r^2 \cos. P^2 \sin. 2\, Q = N \end{array}\right\} (G)$$

On trouvera pour la valeur de $\frac{1}{dt^2} \int \alpha\, (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$ une expression de cette forme $\Omega \delta \omega + E \delta \epsilon + \Pi \delta \pi$; dans laquelle

$$\Omega = \frac{d(d\omega + \cos. \pi\, d\epsilon)}{dt^2} \times H + \frac{\sin. \pi^2 d\epsilon^2 - d\pi^2}{2\, dt^2} \times (M \sin. 2\omega + N \cos. 2\, \omega)$$
$$+ \frac{\sin. \pi\, d\pi\, d\epsilon}{dt^2} \times (M \cos. 2\, \omega - \sin. 2\, \omega).$$

$$E = \frac{d(\cos. \pi\, d\omega + d\epsilon)}{dt^2} \times H + \frac{d(\sin. \pi^2\, d\epsilon)}{dt^2} \times (K - \tfrac{1}{2} H)$$
$$- \frac{\sin \pi^2\, d\omega\, d\epsilon + \frac{1}{2} d. (\sin. \pi\, d\pi)}{dt^2} \times (M \sin. 2\, \omega + N \cos. 2\, \omega)$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} d(\sin. \pi^2\, d\epsilon) - \sin. \pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times (M \cos. 2\, \omega - N \sin. 2\, \omega)$$

$$\Pi = \frac{\sin. \pi\, d\omega\, d\epsilon}{dt^2} \times H + \frac{d^2 \pi}{dt^2} \times (\tfrac{1}{2} H + K) + \frac{\sin. \pi \cos. \pi\, d\epsilon}{dt^2} \times (\tfrac{1}{2} H - K)$$
$$+ \frac{d\omega\, d\pi - \frac{1}{2} \sin. \pi\, d^2 \epsilon}{dt^2} \times (M \sin. 2\, \omega + N \cos. 2\, \omega)$$
$$- \frac{\sin. \pi\, d\omega\, d\epsilon + \frac{1}{2} d^2 \pi + \frac{1}{2} \sin. \pi \cos. \pi\, d\epsilon^2}{dt^2} \times (M \cos. 2\, \omega - N \sin. 2\, \omega).$$

X.

SCHOLIE I. On auroit tort de croire que les conditions $\int \alpha\, r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q = 0$, & $\int \alpha\, r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = 0$, rendîssent notre solution moins générale ; car je vais démontrer que dans quel corps que ce soit, on peut toujours trouver trois axes qui passent par le centre de gravité, par rapport à chacun desquels ces deux équations ayent lieu en même tems.

Pour cela imaginons pour un moment que la position de la Lune, que je considérerai ici comme un corps quelconque, soit fixe par rapport au plan de son écliptique; & cherchons la position du plan de l'équateur de maniere que l'on ait $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' = 0$, $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = 0$; on aura d'abord en combinant les formules (C) de l'Art. VI. $\sin. P = \sin. \pi \cos. p \sin. q + \cos. \pi \sin. p$; $\cos. P \sin. Q = \cos. \pi \cos. p \sin. q - \sin. \pi \sin. p$; $\cos. P \cos. Q' = \cos. p \cos. q'$; donc $\sin. P \cos. P \sin. Q' = \sin. \pi \cos. \pi (\cos. p^2 \sin. q^2 - \sin. p^2) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) \cos. p \sin. p \sin. q'$ = en mettant pour q' sa valeur $q - \varepsilon$ afin que l'angle q ait une origine fixe) $\sin. \pi \cos. \pi (\cos. p^2 \sin. q^2 \cos. \varepsilon^2 - 2 \cos. p^2 \sin. q \cos. q \sin. \varepsilon \cos. \varepsilon + \cos. p^2 \cos. q^2 \sin. \varepsilon^2 - \sin. p^2) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) \times (\cos. p \sin. p \sin. q \cos. \varepsilon - \cos. p \sin. p \cos. q \sin. \varepsilon)$ & $\sin. P \cos. P \cos. Q' = \sin. \pi \cos. p^2 \sin. q' \cos. q' + \cos. \pi \sin. p \cos. p \cos. q' = \sin. \pi \cos. p^2 \sin. q \cos. q (\cos. \varepsilon^2 - \sin. \varepsilon^2) + \sin. \pi \sin. \varepsilon \cos. \varepsilon (\cos. p^2 \sin. q^2 - \cos. p^2 \cos. q^2) + \cos. \pi (\sin. p \cos. p \sin. q \sin. \varepsilon + \sin. p \cos. p \cos. q \cos. \varepsilon)$. Donç si l'on fait pour abréger:

$\int \alpha r^2 \cos. p^2 \sin. q^2 = A$; $\int \alpha r^2 \cos. p^2 \cos. q^2 = B$; $\int \alpha r^2 \cos. p^2 \sin. q \cos. q = C$; $\int \alpha r^2 \cos. p \sin. p \sin. q = D$; $\int \alpha r^2 \cos. p \sin. p \cos. q = E$; $\int \alpha r^2 \sin. p^2 = F$; on aura $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = \sin. \pi \cos. \pi (A \cos. \varepsilon^2 - 2 C \sin. \varepsilon \cos. \varepsilon + B \sin. \varepsilon^2 - F) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2)(D \cos. \varepsilon - E \sin. \varepsilon) = 0$; & $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' = \sin. \pi \left((A - B) \sin. \varepsilon \cos. \varepsilon + C (\cos. \varepsilon^2 - \sin. \varepsilon^2) \right) + \cos. \pi (D \sin. \varepsilon + E \cos. \varepsilon) = 0$; deux équations d'où l'on tirera les valeurs de ε, & π.

La

La première nous done

$\frac{tang.\,\pi}{1 - tang.\,\pi^2} = \frac{E\,fin.\,\varepsilon - D\,cof.\,\varepsilon}{A\,cof.\,\varepsilon^2 - 2C\,fin.\,\varepsilon\,cof.\,\varepsilon + B\,fin.\,\varepsilon^2 - F}$, & la feconde nous donne auffi $tang.\,\pi = \frac{-D\,fin.\,\varepsilon - E\,cof.\,\varepsilon}{(A-B)\,fin.\,\varepsilon\,cof.\,\varepsilon + C\,(cof.\,\varepsilon^2 - fin.\,\varepsilon^2}$ donc chaffant $tang.\,\pi$, & faifant $fin.\,\varepsilon = x$, on aura, après les réductions, une équation de cette forme $ax + bx^3 + f\sqrt{1 - x^2} + gx^2\sqrt{1 - x^2} = 0$; dans laquelle

$a = CDR - EHK - C^2E - 2CHD + 2D^2E - E^3$,

$b = -2CDK - EHK + 3CDH + 2EH^2 + 2C^2E - 3DE - E^3$;

$f = CEK - C^2D + E^2D$;

$g = DHK - 2CEK + 3CEH + 2C^2D + D^3 - H^2D - 3E^2D$;

K étant $= A - F$, & $H = A - B$; cette équation étant dégagée des fignes radicaux, devient celle-ci

$x^6 + \frac{2ab + 2bg - g^2}{b^2 + g^2}x^4 + \frac{a^2 + f^2 - 2fg}{b^2 + g^2}x^2 - \frac{f^2}{b^2 + g^2} = 0$, laquelle ayant fon dernier terme négatif, & ne renfermant aucune puiffance impaire de x, aura néceffairement, come l'on fait, au moins deux racines réelles & égales, l'une pofitive & l'autre négative; donc puifque

$tang.\,\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}} = -\frac{f + gx^2}{x + gx^3}$, on aura au moins une valeur réelle de $tang.\,\varepsilon$, & par conféquent de l'angle ε; & cette valeur étant fubftituée dans l'expreffion de $tang.\,\pi$ ci-deffus, on aura l'angle π correfpondant. Ayant les angles ε, & π, on aura, comme on le voit, la pofition du plan cherché de l'Équateur, par rappart au plan donné de l'Écliptique. Si $D = 0$, & $E = 0$, alors $tang.\,\pi = 0$, & le plan cherché tomberoit dans le plan donné, ce qui eft évident, parce que les deux équations $\int \alpha r^2\,cof.\,p\,fin\,p\,fin.\,q = 0$; $\int \alpha r^2\,cof.\,p\,fin.\,p\,cof.\,q = 0$, font analogues aux équations de condition $\int \alpha r^2\,cof.\,P\,fin.\,P\,fin.\,Q' = 0$; & $\int \alpha r^2\,cof.\,P\,fin.\,P\,cof.\,Q' = 0$; mais en reprenant les équations qui résultent immédiatement de ces deux dernières équations, & y mettant $D=0$ & $E=0$, on trouve $\sin.\pi \cos.\pi (A \cos.\varepsilon^2 - 2C \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon + B \sin.\varepsilon^2 - F) = 0$; & $\sin.\pi (\overline{A-B} \times \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon + C \times \overline{\cos.\varepsilon^2 - \sin.\varepsilon^2}) = 0$, équations qui, outre la racine $\varpi=0$, donnent enbore $\cos.\varpi = 0$ & $(A-B) \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon + C (\cos.\varepsilon^2 - \sin.\varepsilon^2) = 0$; savoir en faisant $tang.\varepsilon = t$, $t^2 + \frac{B-A}{C} t - 1 = 0$, dont les deux racines sont nécessairement réelles, à cause du dernier terme négatif: de-là il s'ensuit que si, après avoir trouvé par les équations ci-dessus, la position du plan cherché, on regarde maintenant ce plan comme donné, on trouvera encore deux atres plans qui auront la même propriété, & dont la position par rapport à celui-la sera déterminé par les équations $\cos.\pi = 0$; & $t^2 + \frac{B-A}{C} t - 1 = 0$. Donc 1.° ces deux derniers plans couperont le premier à angles droits: 2.° ils se couperont l'un l'autre avec un angle égal à la différence des angles qui ont pour tangentes les deux racines de l'équation en t; c'est-à dire, qu'en nommant t', & t'' ces racines, la tangente de l'angle en question sera $= \frac{t'-t''}{1+t't''} =$ (à cause de $t't'' = -1$) $\frac{t'-t''}{0} = \infty$.

X I.

SCHOLIE II. A l'égard des quantités H, K, M, N de l'art IX, (G); il est clair que leur valeur dépeud entièrement de la figure & de la constitution intérieure de la Lune; car, soit D la densité d'une particule quelconque α, on trouvera aisément $\alpha = Dr^2 \cos.P dQ dP dr$, & l'on aura $H = \int Dr^4 dr \cos.P^3 dP dQ$; $K = \int Dr^4 dr \sin.P^2 \cos.P dP dQ$; $M = \int Dr^4 dr \cos.P \; dP \cos.2Q dQ$; $N = \int Dr^4 dr \cos.P^3 dP \sin.2Q dQ$: & pour avoir la valeur complette de ces intégrales, il faudra, après avoir substitué pour D sa valeur en r, P & Q, intégrer 1.° en faisant varier r, & en mettant, après l'intégration, sa valeur en P & en Q, qui dépend de la figure de la Lune; 2.° en faisant varier Q & en mettant, après l'intégration $Q = c$, c étant circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; 3.° en faisant varier P; & en mettant, après l'intégration, $P = \frac{c}{4}$, & doublant les termes. Comme la figure de la Lune est sensiblement sphérique, on ne s'éloignera pas de la vérité en la regardant comme formée de différentes couches à-peu-près sphériques, & dont chacune soit par-tout de la même densité; soit donc $r'(1+e\xi)$ le rayon variable d'une couche quelconque de densité uniforme; r' étant le rayon de cette couche, qui est perpendiculaire au plan de l'Équateur; e une quantité constante très-petite, & ξ une fonction quelconque de r, P & Q, qui soit nulle, lorsque $P = 90°$. On remarquera 1.° que la quantité D sera une fonction de r' seulement; 2.° que si on néglige les quarrés & les puissances plus hautes de e, on aura $r^4dr = r'^4dr' + e\frac{d(r'^5\xi)}{dr'}dr' =$ (en faisant pour abréger $\frac{d(r'^5\xi)}{dr'} = X$) $r'^4dr' + eXdr'$; d'où il suit qu'on aura

$$\left.\begin{aligned}
H &= \int Dr'^4dr'\cos.P^3\,dPdQ + e\int DXdr'\cos.P^3\,dPdQ \\
K &= \int Dr'^4dr'\sin.P^2\cos.P\,dPdQ + e\int DXdr'\sin.P^2\cos.P\,dPdQ \\
M &= \int Dr'^4dr'\cos.P^3\cos.2Q\,dPdQ + e\int DXdr'\cos.P^3\cos.2Q\,dPdQ \\
N &= \int Dr'^4dr'\cos.P^3\,dP\sin.2Q\,dQ + e\int DXdr'\cos.P^3\,dP\sin.2Q\,dQ
\end{aligned}\right\}\ldots(H)$$

Soit $\int Dr'^4dr' = F$; on aura

$$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dPdQ = F\int\cos.P^3dPdQ = cF\int\cos.P^3dP = \tfrac{4}{3}cF;$$

on trouvera de la même manière

$$\int Dr'^4dr'\sin.P^2\cos.P\,dPdQ = \tfrac{2}{3}cF;$$

$$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dP\cos.2Q\,dQ = 0; \text{ \&}$$

$$\int Dr'^4dr'\cos.P^3dP\sin.2Q\,dQ = 0; \text{ on aura donc}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}H=\frac{4}{3}CF+e\int DXdr'\cos.P^2dPdQ=\frac{4}{3}CF\\ K=\frac{2}{3}CF+e\int DXdr'\sin.P^2\cos.PdPdQ=\frac{2}{3}CF\end{array}\right\}\text{à très-peu-près}\\ M=e\int DXdr'\cos.P\,dP\cos.2QdQ\\ N=e\int DXdr'\cos.P^2dP\sin.2QdQ\end{array}\right\}\ldots(\mathrm{I})$$

D'où l'on voit 1.° que les quantités H & K sont des quantités finies; 2.° que les quantités M & N sont des quantités très petites par rapport à H & K, étant de l'ordre de e; 3.° que la quantité $K-\frac{1}{2}H$ est aussi une quantité très-petite du même ordre, étant

$=e\int DXdr'(\sin.P^2-\frac{1}{2}\cos.P^2)\cos.PdPdQ$.

Quant à la masse de la Lune, on la trouve en intégrant l'expression de α, savoir $Dr^2dr\cos.PdPdQ=$ (dans la supposition présente) $Dr'^2dr'\cos.PdPdQ+eDX'dr'\cos.PdPdQ$; & son intégrale sera $2c\int Dr'^2dr'+e\int DX'dr'\cos.PdPdQ$, en prenant ici X' pour la valeur de $\frac{d.(r'^2\xi)}{dr'}$.

Donc nommant cette masse L, on aura aux quantités de l'ordre de e près, $L=2c\int Dr'^2dr'$; d'où $\int Dr'^2dr'=\frac{L}{2c}$. Or quoique sans connoître la valeur de D on ne puisse déterminer le rapport de F ou de $\int Dr'^4dr'$ à $\int Dr'^2dr'$; on peut néanmoins trouver des limites entre lesquelles ce rapport doit nécessairement demeurer. Il est clair 1.° que si f exprime la valeur de r' à la surface, $\int Dr'^4dr'<f^2\int Dr'^2dr'$, parce que r'^4 est toujours $<f^2r'^2$. De plus on a $\int Dr'^4dr'=\frac{1}{5}Df^5-\frac{1}{5}\int r'^5dD$, & $\int Dr'^2dr'=\frac{1}{3}Df^3-\frac{1}{3}\int r'^3dD$; ce qui donne $3f^2\int Dr'^2dr'-5\int Dr'^4dr'=\int r'^3(r'^2-f^2)dD=$ à une quantité positive, si dD est négatif, & à une quantité négative, si dD est positif, parce que $r'^2<f^2$; donc 2.° si la densité diminue du centre à la circonférence, $\int Dr'^4dr'<\frac{3}{5}f^2\int Dr'^2dr'$; mais si elle augmente,

$\int Dr'^4 dr' > \frac{5}{5} f^2 \int Dr'^4 dr'$; ainſi dans ce dernier cas, la valeur de F ſera contenue entre les limites $\frac{f^2 L}{2c}$, & $\frac{3}{5} \times \frac{f^2 L}{2c}$. Si la denſité étoit par-tout la même, on auroit alors $F = \frac{3}{5} . \frac{f^2 L}{2c}$.

V I I.

SCHOLIE III. On peut au reſte déterminer la figure de la Lune, par la théorie, en ſupoſant qu'elle ait été originairement fluide, & qu'elle ait conſervé, en ſe durciſſant, la forme qu'elle auroit dû prendre, en vertu de la gravitation mutuelle de ſes parties, combinée avec la force centrifuge, & avec l'attraction de la Terre. Pour cela, nous ſupoſerons que le premier méridien de la Lune, d'où l'on commence à compter les angles Q, ſoit celui qui paſſe par la Terre, lorſque le lieu moyen de cette planète eſt égal à ſon lieu vrai, & nous regarderons l'attraction de la Terre comme agiſſant dans le ſens du diamètre de l'Équateur qui ſe trouve dans le premier méridien; ce qui eſt vrai à-très-peu-près, à cauſe que la Lune nous préſente toujours ſenſiblement la même face. Or ſoit φ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur de la Lune & ρ la diſtance moyenne du centre de la Lune à la Terre, on trouvera généralement pour la figure de chaque couche $\xi = A \cos. P^2 + B \cos. P^2 \cdot \cos. Q$, & les deux quantités A & B ſeront déterminées par les deux équations ſuivantes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{e} \times \frac{5 L \varphi r'^5}{4 c f^3} - \frac{5 L r'^5 A}{2c} + \int D d(A r'^5) + r'^5 (\beta - \int D d A) = 0 \\ &\frac{1}{e} \times \frac{3T}{2\rho^3} \times \frac{5 r'^5}{2c} - \frac{5 L r'^5 B}{2c} + \int D d(B r'^5) + r'^5 (\eta - \int D d B) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (K)$$

β & η étant égales à ce que deviennent $\int DdA$ & $\int DdB$, lorſque $r' = f$; la démonſtration de ces formules eſt facile à trouver par les principes établis par MM. Clairaut & d'Alembert; je ne la donne point ici, pour ne pas m'écarter trop de mon objet principal. On aura donc dans cette hypothèse

$$X = \frac{d(r'^5 \xi)}{dr'} = \frac{d(A r'^5)}{dr'} \cos. P^2 + \frac{d(B r'^5)}{dr'} \cos. P^2 \cos. Q^2 ;$$

& par conséquent on trouvera

$$\int DXdr' \cos. P^3 dPdQ = \tfrac{16}{15} c \int Dd(Ar'^5) + \tfrac{16}{30} c \int Dd(r'^5 B),$$

$$\int DXdr' \sin. P^2 \cos. PdPdQ = \tfrac{4}{15} c \int Dd(r'^5 A) + \tfrac{2}{15} c \int Dd(r'^5 B);$$

$$\int DXdr' \cos. P^3 dP \cos. 2QdQ = \tfrac{4}{15} c \int Dd(r'^5 B) ; \&$$

$$\int DXdr' \cos. P^3 dP \sin. 2QdQ = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Par-là on aura } M = \frac{4ec}{15} \int Dd(r'^5 B) ;\ N = 0 , \\ K - \frac{1}{2} H = -\frac{4ec}{15} \int Dd(r'^5 A) - \frac{2ec}{15} \int Dd(r'^5 B). \end{array}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{L})$$

Si on suppose $D = 1$, on aura alors $M = \frac{4ecf^5 B'}{15}$, $N = 0$, & $K - \frac{1}{2} H = -\frac{4ecf^5}{15} (A' + \frac{1}{2} B')$, en prenant A' & B' pour les valeurs de A & B, lorsque $r' = f$. Mais si l'on veut avoir égard aux conditions de l'équilibre, on aura, par les équations (K), quelque soit d'ailleurs la densité D,

$$\int Dd(r'^5 A) = \frac{5Lf^2 A'}{2c} - \frac{5L\varphi f^2}{4ce} ; \& \int Dd(r'^5 B) = \frac{5Lf^2 B'}{2c} - \frac{3T}{2p^3} \times \frac{5f^5}{2ce},$$

en mettant $r' = f$. Si l'on supposoit de plus la densité constante & $= 1$, on auroit $Ae = \frac{5L\varphi}{10L - 4cf^3} =$ (à cause de $L = \frac{2cf^3}{3}$ dans cette hypothèse) $\frac{5}{4}\varphi$; & $B'e = \frac{15Tf^3}{2p^3(5L - 2cf^3)}$ $=$ (par la même raison) $\frac{15Tf^3}{4p^3 L}$. Du reste on remarquera que $e(A' + B')$ sera dans ce cas l'ellipticité du premier méridien, & eA' celle du méridien qui est à 90° de là ; d'où il suit que les deux demi-axes de l'Équateur seront $f(1 + eA' + eB')$, & $f(1 + eA')$; & que son ellipticité sera, à-très-peu-près, $= eB'$.

XIII.

Il reste encore à trouver la valeur des deux termes $\int \frac{\alpha\delta R}{R^3}$, & $\int \frac{\alpha\delta I'}{R'^3}$ de l'équation (A). Pour cela soient

Le rayon de l'orbite la Terre autour de la Lune, projetté sur le plan de l'écliptique lunaire ; ou ce qui revient au même, le rayon de l'orbite de la Lune autour de la Terre, réduit à l'écliptique . . . . ρ

La longitude de la terre, vue du centre de la Lune ; ce qui est la même chose que la longitude de la Lune vue du centre de la Terre & augmentée de 180° v

La tangente de la latitude de la Terre, vue de la Lune, & supposée au-dessus de l'écliptique lunaire, laquelle est égale mais de signe contraire à celle de la Lune vue de la Terre . . . . λ

On aura, comme, il est très-facile de le concevoir, $x=\rho \cos. v$, $y=\rho \cos. v$, $z=\rho\lambda$; & si ζ exprime la longitude du nœud ascendant de la Lune, & i l'inclinaison de l'orbite, la valeur de λ sera, suivant les dénominations qu'on vient de poser, $=-i \sin.(v-180°-\zeta)=i \sin.(v-\zeta)$

Soient aussi le rayon de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre . . . . ρ'

sa longitude . . . . v'

Il est visible qu'on aura $x'-x=\rho' \cos v'$; $y'-y=\rho' \sin. v'$; & $z'=z$; savoir $x'=\rho' \cos. v'+\rho \cos. v$; $y=\rho' \sin. v'+\rho \sin. v$, & $z'=z=\rho\lambda$.

On fera donc toutes ces substitutions dans l'expression de R & de R', art. II, & l'on aura, après quelques réductions fort simples,

$$R^2=\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho(X\cos. v+Y\sin. v+Z\lambda)+X^2+Y^2+Z^2=$$

(en substituant pour X, Y, Z, leurs valeurs art. VI, (E), & réduisant)

$$\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho r\, \text{fin.}P\left(\text{fin}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{fin.}\pi+\lambda\,\text{cof.}\,\pi\right)$$
$$-2\rho r\,\text{cof.}P\,\text{fin.}\,Q'\left(\text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi-\lambda\,\text{fin.}\,\pi\right)$$
$$-\rho r\,\text{cof.}P\,\text{cof.}\;Q'\,\text{cof.}(\upsilon-\varepsilon)+q^2.$$

On aura de même $R'^2=\rho'^2+2\rho'\rho\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho'(X\,\text{cof.}\,\upsilon'+Y\,\text{fin.}\,\upsilon')-2\rho(X\,\text{cof.}\,\upsilon+Y\,\text{fin.}\,\upsilon+Z\lambda)+X^2+Y^2+Z^2=\rho'^2+2\rho'\rho\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho' r\,\text{fin.}\,P\,\text{fin.}(\upsilon'-\varepsilon)\,\text{fin.}\,\pi-2\rho' r\,\text{cof.}\,P\,\text{fin.}\,Q'\,\text{fin}\,(\upsilon'-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi-2\rho r\,\text{cof.}\,P\,\text{cof.}\,Q'\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\varepsilon)-2\rho r\,\text{fin.}\,P\left(\text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{fin.}\,\pi+\lambda\,\text{cof.}\,\pi\right)-2\rho r\,\text{cof.}\,P\,\text{fin.}\,Q'\left(\text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi-\lambda\,\text{fin.}\,\pi\right)-2\rho r\,\text{cof.}\,P\,\text{cof.}\,Q'\,\text{cof.}\,(\upsilon-\varepsilon)+r^2$.

Subſtituant au lieu de Q', ſa valeur $Q+\omega$, & faiſant, pour abréger, après avoir développé les *ſinus* & les *coſinus* de $Q+\omega$,

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma &= \text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{fin.}\,\pi+\lambda\,\text{cof.}\,\pi.\\
\Delta &= \text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi+\text{cof}\,\omega\,\text{cof.}\,(\upsilon-\varepsilon)-\lambda\,\text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,\pi.\\
\Lambda &= \text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\upsilon-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\Pi-\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}(\upsilon-\varepsilon)-\lambda\,\text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,\pi\\
\Gamma' &= \text{fin.}\,(\upsilon'-\varepsilon)\,\text{fin.}\,\pi.\\
\Delta' &= \text{fin.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\upsilon'-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi+\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\varepsilon).
\end{aligned}\right\}\ldots(M)$$

$\Lambda'=\text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,(\upsilon'-\varepsilon)\,\text{cof.}\,\pi-\text{fin.}\,\omega\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\varepsilon)$. On aura

$$R^2=\rho^2(1+\lambda^2)-2\rho r\,\text{fin.}\,P\times\Gamma-2\rho r\,\text{cof.}\,P\,\text{cof.}\,Q\times\Delta-2\rho r\,\text{cof.}\,P\,\text{fin.}\,Q\times\Lambda+r^2.$$

$$R'^2=\rho'^2+2\rho'\rho\,\text{cof.}\,(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2)-2r\,\text{fin.}\,P\,(\rho'\Gamma'+\rho\Gamma)-2r\,\text{cof.}\,P\,\text{cof.}\,Q\,(\rho'\Delta'+\rho\Delta)-2r\,\text{cof.}\,P\,\text{fin.}\,Q\,(\rho'\Lambda'+\rho\Lambda)+r^2.$$

XIV.

Je différencie maintenant la valeur de R^2 qu'on vient de trouver, en faiſant varier ſeulement ω, ε, π, & en écrivant δ au lieu de d, j'aurai, en retenant les lettres Γ, Δ, Λ, & diviſant par 2

$$R\delta R=-\rho r(\text{fin.}\,P\times\delta\Gamma+\text{cof.}\,P\,\text{cof.}\,Q\times\delta\Delta+\text{cof.}\,P\,\text{fin.}\,Q\times\delta\Lambda);$$

on

On a de plus, en négligeant les quarrés & les autres puissances de r vis-à-vis de ρ $\frac{1}{R^3} = \frac{1}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\rho r}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(\sin. P \times \Gamma + \cos. P \cos. Q \times \Delta + \cos. P \sin. Q \times \Lambda)$.

On multipliera donc ensemble ces valeurs de $R\delta R$, & de $\frac{1}{R^3}$, en ayant attention de rejetter tous les termes qui renfermeroient $r \sin. P$, $r \cos. P \sin. Q$, $r \cos. P \cos. Q$, $r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q$, & $r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q$; par la raison que l'intégrale de ces termes, après avoir été multipliés par α, est $=0$ (art. V, (B); art. IX, (F)); on multipliera ensuite chaque terme du produit par α, & on en prendra l'intégrale, en se souvenant que l'on a $\int \alpha r^2 \cos. P^2 = H$, $\int \alpha r^2 \sin. P^2 = K$, $\int \alpha r^2 \cos. P^2 \cos. 2Q = M$, $\int \alpha r^2 \cos. P^2 \sin. 2Q = N$ (art. IX, (G)); ce qui donne $\int \alpha r^2 \cos. P^2 \cos. Q^2 = \frac{1}{2}(H+M)$; $\int \alpha r^2 \cos. P^2 \sin. Q^2 = \frac{1}{2}(K - M$, & $\int \alpha r^2 \cos. P^2 \sin. Q \cos. Q = \frac{1}{2} N$.

Par ce moyen on aura

$$\int \frac{\alpha \delta R}{R^2} = \frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \Big(K \Gamma \delta \Gamma + \tfrac{1}{2} H (\Delta \delta \Delta + \Lambda \delta \Lambda) + \tfrac{1}{2} M (\Delta \delta \Delta - \Lambda \delta \Lambda) + \tfrac{1}{2} N (\Lambda \delta \Delta + \Delta \delta \Lambda) \Big)$$

Or on trouve, par la différentiation des valeurs de Γ, Δ, Λ, art. précédent,

$\delta \Gamma = -\cos. (\upsilon - \varepsilon) \sin. \pi \delta \varepsilon + \big(\sin (\upsilon - \varepsilon) \cos. \pi - \lambda \sin. \pi\big) \delta \pi$.

$\delta \Delta = \big(\cos. \omega \sin. (\upsilon - \varepsilon) \cos. \pi - \sin. \omega \cos. (\upsilon - \varepsilon) - \lambda \cos. \omega \sin. \pi\big) \delta \omega - \big(\sin. \omega \cos (\upsilon - \varepsilon) \cos \pi - \cos \omega \sin. (\upsilon - \varepsilon)\big) \delta \varepsilon - \big(\sin. \omega \sin. (\upsilon - \varepsilon) \sin. \pi - \lambda \sin. \omega \cos. \pi\big) \delta \pi$.

Savoir, comme il est facile de le voir, par la seule inspection des formules (M), art. précédent;

$\delta \Delta = \Lambda \delta \omega + (\Lambda \cos. \pi + \Gamma \cos. \omega \sin. \pi) \delta \varepsilon - \Gamma \sin. \omega \delta \pi$.

On a de même

$\delta \Lambda = -\Delta \delta \omega - (\Delta \cos. \pi + \Gamma \sin. \omega \sin. \pi) \delta \varepsilon - \Gamma \cos. \omega \delta \pi$; donc

$$\Delta\delta\Delta+\Lambda\delta\Lambda=\Gamma(\Delta\cos.\omega-\Lambda\sin.\omega)\sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Delta\sin\omega+\Lambda\cos.\omega)\delta\pi.$$

$$\Delta\delta\Delta-\Lambda\delta\Lambda=2\Delta\Lambda\delta\omega+2\Delta\Lambda\cos.\pi\delta\varepsilon+\Gamma(\Delta.\cos.\omega+\Lambda\sin.\omega)\sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Delta\sin.\omega-\Gamma\cos.\omega)\delta\pi.$$

$$\Lambda\delta\Delta+\Delta\delta\Lambda=(\Lambda^2-\Delta^2)\delta\omega+(\Lambda^2-\Delta^2)\cos.\pi\delta\varepsilon+\Gamma(\Lambda\cos.\omega-\Delta\sin.\omega)\sin.\pi\delta\varepsilon-\Gamma(\Lambda\sin.\omega+\Delta\cos.\omega)\delta\pi.$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$\int\frac{\alpha\delta R}{R^2}=-\frac{3\rho^2}{\rho^5(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}(\Omega'\delta\omega+E'\delta\varepsilon+\Pi'\delta\pi)$, on aura

$$\Omega'=M\Delta\Lambda+\tfrac{1}{2}N(\Lambda^2-\Delta^2).$$

$$E'=(-K+\tfrac{1}{2}H)\Gamma\cos.(\upsilon-\varepsilon)\sin.\pi+\tfrac{1}{2}M[2\Delta\Lambda\cos.\pi+\Gamma(\Delta\cos.\omega+\Lambda\sin.\omega)\sin.\pi]+\tfrac{1}{2}N[(\Lambda^2-\Delta^2)\cos.\pi+\Gamma(\Lambda\cos.\omega-\Delta\sin.\omega)\sin.\pi]$$

$$\Pi'=(K-\tfrac{1}{2}H)\Gamma[\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\pi-\lambda\sin.\pi]-\tfrac{1}{2}M\Gamma[\Delta\sin.\omega-\Lambda\cos.\omega]-\tfrac{1}{2}N\Gamma[\Lambda\sin.\omega+\Delta\cos.\omega].$$

On remarquera que dans ces formules j'ai mis pour $\Delta\cos.\omega-\Lambda\sin.\omega$ sa valeur $\cos.(\upsilon-\varepsilon)$, & pour $\Delta\sin.\omega+\Lambda\cos.\omega$, $\sin.(\upsilon-\varepsilon)\cos.\pi-\lambda\sin.\pi$; mais j'ai conservé dans les autres termes les lettres Γ, Δ, Λ, tant pour rendre les expressions moins composées, que pour les raisons qu'on verra plus bas.

XV.

On cherchera d'une manière semblable la valeur de $\int\frac{\alpha\delta R'}{R'^2}$; & pour cela il suffira de remarquer 1.° que dans l'expression de R'^2 (art. XIII), on peut négliger les termes $\rho\Gamma$, $\rho\Delta$, $\rho\Lambda$ vis-à-vis de $\rho'\Gamma'$, $\rho'\Delta'$, $\rho'\Lambda'$, parce que le rayon ρ' de l'orbite du soleil est incomparablement plus grand que le rayon ρ de l'orbite de la Lune. 2.° Que la valeur de

R'^2 ne différera, après cela, de celle de R^2, qu'en ce qu'il y aura aulieu de $\rho^2(1+\lambda^2)$, $\rho'^2+2\rho'\rho\,cof.(\upsilon'-\upsilon)+\rho^2(1+\lambda^2)$, quantité qu'on peut réduire par la même raifon à ρ'^2; & au lieu des Γ, Δ, Λ, ρ, & λ; Γ', Δ', Λ', ρ' & zéro : d'où il s'enfuit que fi l'on fait pareillement

$\int\frac{\alpha\delta R'}{R'^2}=-\frac{3\rho'^2}{\rho'^5}(\Omega''\delta\omega+\mathrm{E}''\delta\epsilon+\Pi''\delta\pi)$, on trouvera auffi

$$\Omega''=M\Delta'\Lambda'+\tfrac{1}{2}N(\Lambda'^2-\Delta'^2)$$

$$\mathrm{E}''=(K-\tfrac{1}{2}H)\,\Gamma'cof.(\upsilon-\epsilon)\,fin.\pi+\tfrac{1}{2}M[2\,\Delta'\Lambda'cof.\pi+\Gamma'(\Delta'\,cof.\,\omega-\Lambda'fin.\omega)\,fin.\pi]+\tfrac{1}{2}N[(\Lambda'^2-\Delta'^2)cof.\pi+\Gamma'(\Lambda'cof.\omega-\Delta'\,fin.\,\omega)fin.\pi].$$

$$\Pi''=(K-\tfrac{1}{2}H)\Gamma'\times fin.(\upsilon'-\epsilon)cof.\pi-\tfrac{1}{2}M\Gamma'[\Delta'fin.\omega-\Lambda'cof.\omega]-\tfrac{1}{2}N\,\Gamma'[\Lambda'fin.\,\omega+\Delta'cof.\,\omega].$$

X V I.

Remarque. La valeur de R de l'art. XIII nous fournit un moyen commode & fimple de trouver la pofition du centre apparent de la Lune par rapport à fon équateur & à fon premier méridien. Car comme la quantité R exprime la diftance de chaque poinr α de la Lune au centre de la Terre, il eft évident qu'elle fera la plus petite, lorfque le rayon r fera dans la ligne qui joint les centres de la Lune & de la Terre, c'eft-à-dire qui paffe par le centre apparent de la Lune : donc fi on fait

La diftance du centre apparent de la Lune au plan de l'équateur Lunaire . . . . ψ

La diftance du méridien qui paffe par le centre apparent au premier méridien . . . . θ

Il n'y aura qu'à mettre, dans l'expreffion de R, ψ au lieu de P, & θ au lieu de Q; & faire enfuite fa différentielle égale à zéro, en regardant ψ & θ comme variables; ce qui donera

$-2pr(\Gamma \cos.\psi - \Delta \cos.\theta \sin.\psi - \Lambda \sin.\theta \sin.\psi) d\psi + 2pr(\Delta \cos.\psi \sin.\theta - \Lambda \cos.\psi \cos.\theta) d\theta = 0$; d'où l'on tire séparément les deux équations $\Gamma \cos.\psi - \Delta \cos.\theta \sin.\psi - \Lambda \sin.\theta \sin.\psi = 0$; $\Delta \cos.\psi \sin.\theta - \Lambda \cos.\psi \cos.\theta = 0$; la dernière donne d'abord $\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta} = \frac{\Lambda}{\Delta}$; d'où $\sin.\theta = \frac{\Lambda}{\sqrt{(\Lambda^2 + \Delta^2)}}$ & $\cos.\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Lambda^2 + \Delta^2)}}$; ensuite la première nous donnera $\frac{\sin.\psi}{\cos.\psi} = \frac{\Gamma}{\Delta \cos.\theta + \Lambda \sin.\theta} =$ (en substituans pour $\sin.\theta$ & $\cos.\theta$ les valeurs qu'on vient de trouver) $\frac{\Gamma}{\sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)}}$; d'où l'on tire $\sin.\psi = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\Gamma^2 + \Delta^2 + \Delta^2}}$; & $\cos.\psi = \frac{\sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)}}{\sqrt{(\Gamma^2 + \Delta^2 + \Lambda^2)}}$; mais on a par les valeurs de Γ, Δ, Λ ; art. XIII (M), $\Gamma^2 + \Delta^2 + \Lambda^2 = 1 + \lambda^2$; donc substituant cette valeur, on aura $\Gamma = \sin.\psi \sqrt{1 + \lambda^2}$; $\sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)} = \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2}$; & par-là $\Delta = \cos.\theta \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2}$; $\Lambda = \sin.\theta \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2}$. Ainsi l'on aura les valeurs de Γ, Δ, Λ, exprimées par les angles θ & ψ, & *vice-versâ* on aura ces angles exprimés par les quantités Γ, Δ, Λ ; c'est-à-dire par les angles ω, ε, π & υ.

On trouvera de la même manière, en changeant simplement Γ, Δ, Λ, en $\Gamma', \Delta', \Lambda'$, & faisant $\lambda = 0$, les angles θ' & ψ' qui donnent le centre apparent de la Lune vue du Soleil, c'est-à-dire du centre de l'hémisphère éclairé ; & combinant ces angles avec les angles θ & ψ, il sera aisé de déterminer généralement les phases de cette Planète.

XVII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Il faut maintenant substituer dans l'équation (A) les valeurs que nous avons trouvées (art. IX, XIV & XV) ; ce qui la changera en celle-ci

$$\left(\Omega - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho'^3} \times \Omega''\right) \delta\omega + \left(E - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \times E' - \frac{3S}{\rho'^3} \times E''\right) \delta\varepsilon$$

$+\left(\Pi-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda_{,})^{\frac{5}{2}}}\times\Pi'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi''\right)\delta\pi=0$; laquelle devant être vraie, quelles que soient les valeurs des différentielles $\delta\omega$, $\delta\varepsilon$, $\delta\pi$ (art. III & IV), nous fournit les trois suivantes.

$$\Omega-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\times\Omega'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Omega''=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$E-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\times E'-\frac{3S}{\rho'^3}\times E''=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Pi-\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\times\Pi'-\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi''=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

La première de ces équations servira à déterminer les loix de la rotation de la Lune autour de son axe ; la seconde à déterminer la nutation, & la troisième à déterminer la précession.

XVIII.

SCHOLIE. Les équations (1), (2), (3), que nous venons de trouver répondent exactement aux équations (G), (H), (K) données par M. d'Alembert, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1754, pag. 424, 425, pour la précession des équinoxes & la nutation de l'axe de la Terre, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune.

Pour en faire la comparaison, on remarquera

1.° Que les angles P, ε, π, dans les formules de M. d'Alembert, répondent dans les nôtres aux complémens des angles ω, ε, π.

2.° Que les lignes f & $a-b$ dans celles-là, ont dans celle-ci pour valeurs $r\,cos.P$ & $r\,sin.P$; & que les angles X'' sont la même chose que les complémens des angles Q'.

3.° Que les angles V', X', V, X répondent aux complémens des angles $\psi-180°$, $Q-\theta$, $\psi'-180°$, $Q-\theta'$.

4.° Que les angles υ', & υ répondent ici aux angles $\upsilon-(\varepsilon+270°)$, $\upsilon'-(\varepsilon+270°)$.

Enfin on mettra dans les formules citées T au lieu de L, & ρ, ρ' & $-\lambda$, au lieu de u', u, & p'.

XIX.

Résolution de l'Équation

$$\Omega - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho^{3'}} \times \Omega'' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

J'obſerverai d'abord qu'en regardant la Lune comme peu différente d'un globe, ainſi qu'elle l'eſt en effet, les quantités M, N ſont incomparablement plus petites que les quantités H, K (art. XI); d'où il ſuit que dans l'expreſſion de Ω (art. IX), on peut négliger les termes qui renferment M & N vis-à-vis de ceux qui renferment H; ce qui la réduit à $\frac{d(d\omega + cof.\pi d\varepsilon)}{dt^2} \times H$. J'obſerve enſuite qu'au lieu de l'angle ω, qui repréſente le mouvement de rotation de la Lune, il eſt beaucoup plus commode d'employer l'angle θ (art. XVI), lequel eſt toujours néceſſairement très-petit, à cauſe que la Lune montre toujours à-peu-près la même face à la Terre. Or pour trouver la valeur de ω en θ, on aura recours aux formules de l'article cité, & l'onremarquera 1.° que $\Delta fin.\omega + \Lambda cof.\omega = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\psi$ $(cof.\theta fin.\omega + fin.\theta\, cof.\omega) = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\psi fin.(\omega+\theta)$; & que de même $\Delta cof.\omega - \Lambda fin.\omega = \sqrt{1+\lambda^2}\, cof.\psi\, cof.(\omega+\theta)$. 2.° Que $\Delta fin.\omega + \Lambda\, cof.\omega =$ (en ſubſtituant pour Δ & pour Λ leurs valeurs, art. XIV, (M)) $fin.(\upsilon-\varepsilon)\, cof.\pi - \lambda fin.\pi$; & que $\Delta\, cof.\omega - \Lambda fin.\omega =$ (par les mêmes ſubſtitutions) $cof.(\upsilon-\varepsilon)$; d'où il s'enſuit que l'on aura $\frac{fin.(\omega+\theta)}{cof.(\omega+\theta)} =$ $\frac{fin.(\upsilon-\varepsilon)cof.\pi - \lambda fin.\pi}{cof.(\upsilon-\varepsilon)}$, ou bien $tang.(\omega+\theta) = tang.(\upsilon-\varepsilon)\, cof.\pi$ $-\lambda fin.\pi fec.(\upsilon-\varepsilon) = tang.(\upsilon-\varepsilon) - 2 fin.(\frac{\pi}{2})^2\, tang.(\upsilon-\varepsilon) -$

$\lambda \, \text{fin.}\, \pi \, \text{fec.}\, (\upsilon - \varepsilon)$, parce que $\text{fin.}\, (\frac{\pi}{2})^2 =$ (comme l'on fait) $\frac{1 - \text{cof.}\, \pi}{2}$. 3.° Que la quantité λ, qui dénote la tangente de la latitude de la Lune (art. XIII) eſt toujours une quantité aſſez petite, puiſque ſa plus grande valeur eſt d'environ *tang.* 5° 9'. 4.° Que l'angle π qui repréſente l'inclinaiſon de l'éqvateur lunaire à l'écliptique (art. V) eſt auſſi très-petit ; car ſuivant les obſervations de M. Caſſini, on a $\pi = 2° \, 30'$, & ſuivant celles de M. Mayer, on a ſeulement $\pi = 1° \, 29'$. D'où il s'enſuit qu'on aura à-très-peu-près $\text{tang.}\, (\omega + \theta) = \text{tang.} (\upsilon - \varepsilon)$, & par conſéquent $\omega + \theta = \upsilon - \varepsilon$, ou, ſi on veut faïre le calcul plus exactement, en ne négligeant que les quantités de l'ordre $\text{fin.}\, \pi^4$, & de $\lambda^2 \, \text{fin.}\, \pi^2$, $\omega + \theta = \upsilon - \varepsilon - \frac{2\, \overline{\text{fin.}\, \frac{\pi}{2}}^2 \, \text{tang.} (\upsilon - \varepsilon)}{1 + \text{tang.}\, \overline{\upsilon - \varepsilon)}^2} - \frac{\lambda \, \text{fin.}\, \pi \, \text{fec.}\, (\upsilon - \varepsilon)}{1 + \text{tang.} \overline{(\upsilon - \varepsilon)}^2} = \upsilon - \varepsilon$ $= \upsilon - \varepsilon - \text{fin.} (\frac{\pi}{2})^2 \, \text{fin.} (2\upsilon - 2\varepsilon) - \lambda \, \text{fin.}\, \pi \, \text{cof.}\, (\upsilon - \varepsilon)$.

Mais nous nous contenterons ici de prendre ſimplement $\upsilon - \varepsilon$ pour la valeur de $\omega + \theta$, ce qui nous donnera $\omega = \upsilon - \varepsilon - \theta$; $d\omega = d\upsilon - d\varepsilon - d\theta$; & $d\omega + \text{cof.}\, \pi \, d\varepsilon = d\upsilon - (1 - \text{cof.}\, \pi) d\varepsilon - d\theta$ $= d\upsilon - 2 \overline{\text{fin.}\, \pi}^2 \, d\varepsilon - d\theta =$ (en négligeant, comme on vient de le faire, les termes de l'orde de $\overline{\text{fin.} \frac{1}{2} \pi}^2$) $d\upsilon - d\theta$. Faiſant donc cette ſubſtitution dans la valeur de Ω ci-deſſus, on aura $\Omega = \frac{d^2 \upsilon - d^2 \theta}{dt^2} \times H$.

Soit maintenant V le mouvement moyen de la Lune autour de la Terre, on aura, en regardant l'orbite de cette planète comme circulaire, $\frac{dV^2}{dt^2} = \frac{T}{\rho^3 (1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$, (il faudroit mettre à la vérité $T + L$ au lieu de T; mais la différence qui en réſulte eſt trop petite pour qu'il ſoit néceſſaire d'en tenir compte ici). Donc $\frac{3T}{\rho^3 (1 + \lambda)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\, dV^2}{dt^2} \times \frac{1 + \lambda^2}{1} =$ (en négligeant le quarré de la quantité très-petite λ) $\frac{3\, dV^2}{dt^2}$.

On trouvera de même en nommant V' le mouvement moyen de la Terre autour du Soleil $\frac{3S}{\rho'^3} = \frac{3dV'^2}{dt^2}$; mais on remarquera que $V' =$ à-très-peu-près $\frac{V}{13\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\frac{3dV'^2}{dt^2} =$ environ $\frac{1}{180} \times \frac{3dV^2}{dt^2}$; d'où il s'enfuit qu'on peut négliger entièrement le terme $\frac{3dV'^2}{dt^2} \times \Omega''$ venant de l'action du Soleil, vis-à-vis du terme $\frac{3dV^2}{dt^2} \times \Omega'$ qui vient de l'action de la Terre, desorte que l'équation (1) deviendra simplemet, après avoir fait les substitutions précédentes, & divisé par $\frac{dt^2}{H}$, $-d^2\theta + d^2\upsilon - \frac{3dV^2}{H}\Omega' = 0$. . . . . (4).

Or par l'art. XIV, on a $\Omega' = M\Delta\Lambda + \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2)$; & par l'art. XVI, $\Delta = cof.\theta\, cof.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$, $\Lambda = fin.\theta\, cof.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$; donc puisque $fin.\theta\, cof.\theta = \frac{1}{2} fin.2\theta$ & $fin.\theta^2 - cof.\theta^2 = -cof.2\theta$, on aura $\Omega' = \frac{1}{2} cof.\psi\sqrt{1+\lambda^2}\,(M fin.2\theta - N cof.2\theta$; mais on a, par le même art. XVI, $fin.\psi\sqrt{1+\lambda^2} = \Gamma =$ (art. XIII, (M)) $fin.(\upsilon - \varepsilon) fin.\pi + \lambda cof.\pi$; d'où l'on tire $cof.\psi\sqrt{1+\lambda^2}$ $= \sqrt{(1 + \lambda^2 fin.\pi^2 - 2\lambda fin.\pi cof.\pi fin.(\upsilon-\varepsilon) - fin.\pi^2 fin.(\upsilon-\varepsilon)^2)}$ $= 1$, en négligeant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les termes où se trouvent les quantités très petites λ & $fin.\pi$ formant des produits de de deux ou de plusieurs dimensions.

De plus si on suppose, ce qui est permis, que le premier méridien de la Lune soit celui qui passe par la Terre, lorsque le lieu vrai de cette planète est égal à son lieu moyen, il est clair que l'angle θ qui représente la distance du méridien, qui passe par le centre apparent de la Lune, à son premier méridien (XVI) sera toujours très-petit; car, suivant les observations de la libration, cet angle ne va guères au-delà de 8°; par conséquent on aura à-très-peu-près peu-près, & avec une exactitude suffisante pour notre objet, $\sin. 2\theta = 2\theta$, & $\cos. 2\theta = 1$. Donc enfin $\Omega' = -\frac{1}{2}N + M\theta$.

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de d^2v; pour cela, on remarquera que $v - 180^\circ =$ à la longitude vraie de la Lune, (art. XIII); par conséquent, si on appelle m le rapport du mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune, à son mouvement moyen, & qu'on n'ait égard qu'à sa première inégalité, on aura $v - 180^\circ = long.\ moy. - a \sin mV$; a étant, suivant M. Clairaut, $6^\circ\ 19'$, & m un nombre très-peu différent de l'unité; d'où l'on tire

$d^2v = m^2 a \sin. mV dV^2$.

Faisant donc ces substitutions dans l'équation (4) ci-dessus, on la changera en celle-ci:

$-d^2\theta - \frac{3M}{H}\theta dV^2 + \frac{3N}{2H}dV^2 + m^2 a \sin. mV dV^2 = 0$, d'où l'on aura, par les méthodes connues.

$$\theta = \frac{N}{2M}\left[1 - \cos.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)\right] + C\sin.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right) - \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}}\sin mV. \quad (5);$$

C est l'une des deux constantes indéterminées introduites par la double intégration; l'autre ayant été supposée telle que l'angle θ soit nul lorsque $V = 0$, c'est-à-dire lorsque le lieu vrai de la Lune est le même que son lieu moyen.

De-là il est facile de voir que si on veut tenir compte des autres inégalités du mouvement vrai de la Lune, & qu'on suppose pour cela

$v - 180^\circ = long.\ moy. - a\sin. mV - b\sin. nV - c\sin. pV$ &c.

on trouvera pareillement

$$\theta = C\sin.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right) + \frac{N}{2M} \times \left[1 - \cos.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)\right]$$

$$- \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}}\sin. mV - \frac{n^2 b}{n^2 - \frac{3M}{H}}\sin. nV \text{ \&c.}$$

X X.

Conséquences qui résultent de la formule précédente, par rapport à la libration de la Lune, & à sa rotation.

Comme l'Équateur Lunaire n'est que très-peu incliné à l'écliptique, il est clair que l'angle θ représentera, sans erreur sensible, la libration de la Lune en longitude; d'où l'on voit que cette libration différera un peu de celle qui a été supposée jusqu'à présent par les Astronomes. Pour en faire la comparaison avec plus de facilité, on mettra l'expression de θ sous la forme suivante:

$$\theta = -a \sin. mV - b \sin. nV - \&c.$$

$$-\frac{3M}{H} \times \frac{a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV - \frac{3M}{H} \times \frac{b}{n^2 - \frac{3M}{H}} \sin. nV - \&c.$$

$$+ C \sin. \left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right) + \frac{N}{2M} \times \left[1 - \cos.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)\right].$$

& l'on remarquera qu'elle comprend, pour ainsi dire, trois sortes de librations.

La première est représentée par les tesmes $-a \sin. mV$ $-b \sin. nV$ &c. qui expriment la différence entre le mouvement vrai & le mouvement moyen de la Lune; ainsi cette libration est purement optique; & c'est la seule qu'on ait observée jusqu'ici.

La seconde est contenue dans les termes

$-\frac{3M}{H} \times \frac{a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV - \frac{3M}{H} \times \frac{b}{n^2 - \frac{3M}{H}} \sin. nV -$ &c: & vient en partie de l'irrégularité du mouvement de la Lune, & en partie de la non-sphéricité de cette Planète; mais elle sera presqu'insensible, en supposant, comme on l'a fait au commencement de l'article précédent, M incomparablement plus petite que H; & cela doit en effet être ainsi; autrement il seroit impossible que les Astronomes ne s'en fussent pas encore apperçus.

La troisième enfin est celle qui est représentée par les termes $C\,fin.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})+\frac{N}{2M}\times\left[1-cof.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})\right]$, & qui ne dépend aucunement du mouvement de la Lune autour de la Terre; mais simplement de sa figure non sphérique. Elle sera la plus grande, lorsque $tang.(V\sqrt{\frac{3M}{H}})=-\frac{2CM}{N}$; & alors sa valeur sera $\frac{N\pm\sqrt{N^2+4C^2M^2}}{2M}$; le signe $+$ a lieu lorsque la libration se fait dans le sens de la rotation de la Lune, c'est-à-dire d'occident en orient par rapport au centre de la Lune, & d'orient en occident par rapport à la Terre; & le signe $-$ est pour la libration du côté opposé; d'où l'on voit que ces deux librations ne seront jamais égales, excepté que $N=0$, auquel cas elles seront entièrement analogues aux oscillations d'un pendule simple de la longueur $\frac{H}{3M}$, qui décriroit des arcs $=2C$.

Au reste, soit que $N=0$, ou non, la durée d'une libration entière, composée d'une allée & d'un retour, sera toujours égale à la durée d'une oscillation totale du même pendule, ou bien, elle sera au tems périodique de la Lune comme $1:\sqrt{\frac{3M}{H}}$

A l'égard de la rotation de la Lune, comme on a trouvé dans l'art. XIX, $\omega+\theta=$, à-très-peu-près, $\upsilon-\varepsilon$, on aura, en substituant les valeurs de υ & de θ, $\omega=long.\,moy.$

$$☾+180^\circ-\varepsilon+\frac{3M}{H}\times\frac{a}{m^2-\frac{3M}{H}}fin.\,mV+\frac{3M}{H}\times\frac{b}{n^2-\frac{3M}{H}}fin.\,nV\ \&c.$$

$$-C\,fin.(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}})-\frac{N}{2M}\times\left[1+cof.(V\sqrt{\tfrac{3M}{H}})\right].$$

D'où l'on voit

1.° Que la rotation moyenne de la Lune eſt égale à ſon mouvement moyen autour de la Terre, moins le mouvement moyen de ſes points équinoxiaux; condition néceſſaire pour que cette planète nous préſente toujours à peu près la même face.

2.° Que la viteſſe de la rotation vraie de la Lune eſt variable; cette viteſſe étant à celle du mouvement moyen autour de la Terre dans le rapport de $d\omega$ à dV, c'eſt-à-dire, de

$$1-\frac{d\epsilon}{dV}+\frac{3M}{H}\times\frac{ma}{m^2-\frac{3M}{H}}\,cof.\,mV+\frac{3M}{H}\times\frac{nb}{n^2-\frac{3M}{H}}\,cof.\,mV\ \&c.$$

$$-C\sqrt{\frac{3M}{H}}\times cof.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right)-\frac{N}{2M}\times\sqrt{\frac{3M}{H}}\times fin.\left(V\sqrt{\frac{3M}{H}}\right),$$

à 1.

Ainſi faiſant $V=0$, on a

$$2-\frac{d\epsilon}{dV}+\frac{3M}{H}\times\frac{ma}{m^2-\frac{3M}{H}}+\frac{3M}{H}\times\frac{nb}{n^2-\frac{3M}{H}}\ \&c.\ -C\sqrt{\frac{3M}{H}},$$ pour la valeur de la viteſſe primitive de rotation, qui aura dû être imprimée a la Lune au commencement de ſon mouvement. Donc, à cauſe de l'indéterminée C, il eſt clair que cette viteſſe aura pu être quelconque, pourvû qu'elle différât très-peu de 1, c'eſt-à-dire de la viteſſe du mouvement moyen, & que d'ailleurs la valeur de M ne ſoit pas nulle, ni négative.

X X I.

Remarque. Juſqu'ici les Aſtronomes avoient toujours ſuppoſé que la Lune tournoit autour de ſon centre d'un mouvemement parfaitement uniforme; & ils avoient été obligés, en conſéquence, pour ſauver le phœnomène de la non-rotation apparente de cette Planète, d'imaginer qu'elle eût reçu d'abord une viteſſe de rotation exactement égale à celle de ſon mouvement moyen autour de la Terre, ou plutôt de celui de ses points équinoxiaux ; ce qui étoit néanmoins très difficile à comprendre. Il me semble que la théorie précédente fournit un dénouement tout simple de ce paradoxe, ou, pour mieux dire, ce paradoxe n'a point lieu dans la théorie que je viens de donner de la rotation de la Lune. Ainsi je puis à cet égard, me flatter d'avoir pleinement satisfait à la première partie de la question proposée par l'Académie.

XXII.

SCHOLIE. Si on suppose la Lune homogène, & que sa figure soit celle d'un sphéroïde dont l'équateur & les méridiens seroient des ellipses, comme dans l'art. XII, on trouvera (art. XI & XII), $H = \frac{4}{5}cF =$ (en faisant $D = 1$) $\frac{4cf^5}{15}$, $M = \frac{4cf^5 eB'}{15}$, & $N = 0$; d'où l'on aura $\frac{M}{H} = eB' =$ à l'ellipticité de l'équateur, c'est-à-dire à la quantité dont le demi axe de l'équateur, qui est à peu près dans la même ligne que le centre de la Terre surpasse l'autre demi axe ; cette quantité étant supposée divisée par le rayon de la Lune ; donc suivant l'art. XX, la Lune fera réellement autour de son axe, en vertu de l'action de la Terre, des oscillations exprimées par la formule $C \sin. (V\sqrt{3eB'})$.

Si on veut que l'allongement de la Lune vers la Terre ait été produit par l'action même de la Terre sur cette Planète supposée fluide ; alors on aura (art. XII) $eB' = \frac{15f^3}{4\rho^3} \times \frac{T}{L}$.

Pour évaluer cette expression, nous ferons, avec M. Clairaut, $\frac{T}{L} = 67$; & avec M. de Lalande $\frac{f}{f'} = \frac{3}{11}$ (f' est le rayon de la Terre) ; ensuite nous prendrons $\rho = 60f'$, ce qui donnera $\frac{f}{\rho} = \frac{3}{11.60}$; de-là je trouve $eB' = \frac{236}{100000000}$;

& $\sqrt{3eB'} = \frac{8414}{1000000}$. Donc le tems d'une oscillation totale sera de $\frac{1000000}{8414}$ mois périodiques = environ 3848 jours.

On peut regarder au reste tout ce que nous venons de dire sur la libration de la Lune comme un commentaire de la Prop. XXXVIII, liv. 3, *Princ. Math.*

XXIII.

Résolution de l'Équation

$$E - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} \times E' - \frac{3S}{\rho'^3} \times E'' = 0 \ldots (2).$$

On aura d'abord, en négligeant dans la valeur de E (art. IX) les termes qui renferment les quantités très-petites M, N, & $K - \frac{1}{2}H$, $E = \frac{d(\cos.\pi\, d\omega + d\varepsilon)}{dt^2} \times H$; expression qu'on peut mettre sous cette forme $\frac{\cos.\pi\, d(\cos.\, d\omega + \cos.\pi\, d\varepsilon)}{dt^2} \times H$ $- \frac{\sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H + \frac{\sin.\pi^2\, d^2\varepsilon + \sin.\pi \cos.\pi\, d\pi\, d\varepsilon}{dt^2} \times H$, ou simplement à cause de $\sin.\pi$ très-petit, & de $d\pi$, & $d\varepsilon$ très-petits aussi par rapport à $d\omega$, comme on le verra dans la suite, $\frac{\cos.\pi\, d(d\omega + \cos.\pi\, d\varepsilon)}{dt^2} \times H - \frac{\sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H$; c'est-à-dire, (art. XIX) $E = \Omega \cos.\pi - \frac{\sin.\pi\, d\pi\, d\omega}{dt^2} \times H$.

En second lieu, on aura (art. XIV) $E' = -(K - \frac{1}{2}H)$ $\Gamma \cos.(\upsilon - \varepsilon) \sin.\pi + M \Delta\Lambda \sin.\pi + \frac{1}{2}M\Gamma(\Delta \cos.\omega + \Lambda \sin.\omega) \sin.\pi$ $+ \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2) \cos.\pi + \frac{1}{2}N\Gamma(\Lambda \cos.\omega - \Delta \sin.\omega) \sin.\pi$; c'est-à-dire, en substituant pour Δ & pour Λ, les expressions $\cos.\theta \cos.\psi \sqrt{1+\lambda^2}$, (art. XIV), & mettant Ω' à la place de $M\Delta\Lambda + \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2)$, art. XIV, $E' = \Omega' \cos.\pi + \Gamma \sin.\pi$ $(\frac{1}{2}H - K \times \cos.(\upsilon - \varepsilon) + \frac{1}{2}M \cos.\psi \sqrt{1+\lambda^2} \cos.(\omega - \theta) - \frac{1}{2}N \cos.\psi$ $\sqrt{1+\lambda^2} \sin.(\omega - \theta))$.

On mettra ici, comme dans l'art. XIX, 1 au lieu de $cos. \psi \sqrt{1+\lambda^2}$ & $\upsilon-\varepsilon-\theta$ au lieu de ω, c'eſt-à-dire $\upsilon-\varepsilon-2\theta$ au lieu de $\omega-\vartheta$, oubien ſimplement $\upsilon-\varepsilon$, à cauſe que l'angle θ eſt toujours très-petit, & l'on aura:

$$E'=\Omega' cos. \pi+\Gamma fin. \pi\left(\overline{\tfrac{1}{2}H-K+\tfrac{1}{2}M}\times cos.(\upsilon-\varepsilon)-\tfrac{1}{2}N fin.(\upsilon-\varepsilon)\right).$$

On ſubſtituera donc ces valeurs dans l'équation propoſée (2), & ôtant ce qui ſe détruit en vertu de l'équation (1), on aura, après avoir mis $\frac{3dV^2}{dt^2}$ au lieu de $\frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}$ & effacé les termes qui contiennent $\frac{3S}{\rho'^3}$ comme dans l'art. XIX, l'équation

$$-d\pi d\omega-\frac{3(H-2K+M)}{2H}\Gamma cos.(\upsilon-\varepsilon)dV^2+\frac{3N}{2H}\Gamma fin.(\upsilon-\varepsilon)dV^2=0 \ldots (6).$$

Or $\Gamma=fin.(\upsilon-\varepsilon) fin. \pi+\lambda cos. \pi$ (art. XIII) & $\lambda=i\, fin.(\upsilon-\zeta)$, article cité; donc $\Gamma cos.(\upsilon-\varepsilon)=\frac{1}{2} fin.(2\upsilon-2\varepsilon) fin. \pi-\frac{1}{2}i\, cos.(2\upsilon-\varepsilon-\zeta) cos. \pi+\frac{1}{2}i\, cos.(\zeta-\varepsilon) cos. \pi$. De plus $\omega=\upsilon-\varepsilon-\theta$, & $d\omega=d\upsilon-d\varepsilon-d\theta=$ à-très-peu-près, $dV(1+\mu)$, μ étant le rapport de la préceſſion moyenne des points équinoxiaux lunaires au mouvement moyen V; en faiſant ces ſubſtitutions, on remarquera que les termes qui renferment les angles $\zeta-\varepsilon$ deviendront, par l'intégration, beaucoup plus grands que les autres. parce qu'ils auront alors pour diviſeur la quantité très-petite $\mu-p$, p exprimant le rapport du mouvement rétrograde moyen des nœuds de la Lune, à ſon mouvement moyen V; donc n'ayant égard qu'aux termes dont nous parlons, on changera l'équation (6) en celle-ci

$$d\pi=-\frac{3(H-2K+M)i\, cos. \pi}{4(1+\mu)H} fin.(\zeta-\varepsilon)\, dV+\frac{3Ni\, cos. \pi}{4(1+\mu)H} cos.(\zeta-\varepsilon)\, dV+\frac{3N fin. \pi}{4(1+\mu)H}dV. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

D'où l'on tire, en prenant ϖ pour la valeur moyenne de π,

$$\pi = \varpi + \frac{3(H-2K+M)i\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}cof.(\zeta-\varepsilon) + \frac{3Ni\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}$$
$$fin.(\zeta-\varepsilon) + \frac{4(1+\mu)H}{3N\,fin.\varpi}V \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8).$$

Et en ſuppoſant que π', ζ', ε' ſoient les valeurs de π, ζ, ε, lorſque $V=0$, on aura

$$\varpi = \pi' - \frac{3(H-2K+M)i\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}cof.(\zeta'-\varepsilon') - \frac{3Ni\,cof.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H}$$
$$fin.(\zeta'-\varepsilon').$$

XXIV.

Réſolution de l'Équation

$$\Pi - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\times\Pi' - \frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi'' = 0 \;.\;.\;.\;.\;(3).$$

1.° La valeur de Π eſt, par l'article IX, (en négligeant les termes multipliés par les conſtantes très-petites M, N, $\frac{1}{2}H-K$) $\frac{fin.\pi\, d\omega\, d\varepsilon}{dt^2}\times H + \frac{d^2\pi}{dt^2}\times(\frac{1}{2}H+K)$.

2.° La valeur de Π' eſt, par l'article XIV, (en mettant au lieu de $\Delta fin.\omega - \Lambda cof.\omega$, $fin.(\upsilon-\varepsilon)$, & au lieu de $\Lambda fin.\omega + \Delta cof.\omega$, $cof.(\upsilon-\varepsilon)$, comme dans l'article précédent, & négligeant de plus la quantité infiniment petite du ſecond ordre $\lambda fin.\pi$, comme on l'a fait toujours) $((K-\frac{1}{2}H)cof.\pi - \frac{1}{2}M)\Gamma fin.(\upsilon-\varepsilon) - \frac{1}{2}N\Gamma cof.(\upsilon-\varepsilon)$.

3.° On mettra, comme dans l'article précédent au lieu $\Gamma fin.(\upsilon-\varepsilon)$, $\frac{1}{2}fin.\pi + \frac{1}{2}i\,cof.(\zeta-\varepsilon)cof.\pi$, au lieu de $\Gamma cof.(\upsilon-\varepsilon)$, $\frac{1}{2}i\,fin.(\zeta-\varepsilon)cof.\pi$, au lieu de $d\omega$, $(1+\mu)dV$, & au lieu de $\frac{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}{3T}$, $\frac{3dV^2}{dt^2}$; on effacera le terme $\frac{3S}{\rho'^3}\times\Pi'$, par les raiſons alléguées, article XIX, & diviſant toute l'équation (3) par $\frac{fin.\pi\, d\omega}{dt^2}\times H$, on aura

$d\varepsilon =$

$$d\varepsilon = -\frac{H+2K}{2H(1+\mu)}\times\frac{d^2\pi}{\sin.\pi\, dV}+3\frac{(2K-H)\cos.\pi-M}{4(1+\mu)H}dV$$

$$+3\frac{(2K-H)\cos.\pi-M}{4(1+\mu)H}\times\frac{\cos.\pi}{\sin.\pi}\times i\cos.(\zeta-\varepsilon)\,dV-3\frac{Ni\cos.\pi}{4(1+\mu)H\sin.\pi}$$

$$\sin.(\zeta-\varepsilon)\,dV.$$

Ce qui donne en intégrant, après avoir mis ϖ au lieu de π,

$$\varepsilon=\eta-\frac{H+2K}{2(1+\mu)H}\times\frac{d\varpi}{\sin.\varpi\, dV}+3\frac{(2K-H)\cos.\varpi-M}{4(1+\mu)H}V$$

$$+3\frac{(2K-H)\cos.\varpi-M}{4(1+\mu)(\mu-p)H}\times\frac{\cos.\varpi}{\sin.\varpi}\times i\sin.(\zeta-\varepsilon)+3\frac{Ni\cos.\varpi}{4(1+\mu)(\mu-p)H\sin.\varpi}$$

$$\cos.(\zeta-\varepsilon).\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9).$$

η étant $=\varepsilon'-3\frac{(2K-H)\cos.\varpi-M}{3(1+\mu)(\mu-p)H}\times\frac{\cos.\varpi}{\sin.\varpi}\,i\sin.(\zeta'-\varepsilon')$

$$-3\frac{4(1+\mu)(\mu-p)H\sin.\varpi}{Ni\cos.\varpi}\cos.(\zeta'-\varepsilon').$$

On remarquera que la valeur de $\frac{d\varpi}{dV}$ peut être négligée, parce qu'elle ne contiendra plus le divifenr $\mu-p$ qui fe trouve dans les autres termes.

X X V.

Conféquences qui réfultent des formules précédentes (8), (9), par rapport à la préceffion des équinoxes & à la nutation de l'axe de la Lune.

Si on fait, ce qui eft permis, $H-2K+M=h\cos.g$, & $N=h\sin.g$; favoir $h=\sqrt{(\overline{H-2K+M}^2+N^2)}$ & $\tang.g=\frac{N}{H-2K+M}$, & qu'on mette 1 au lieu de $\cos.\varpi$, on aura, en négligeant μ vis-à-vis de 1,

$$\pi=\varpi+\frac{3hi}{4(\mu-p)H}\cos.(\zeta-\varepsilon-g)+\frac{3N\sin.\varpi}{4H}V$$

$$\epsilon = \eta - \frac{3(H-2K+M)}{4H}V - \frac{3hi}{4(\mu-p)\,\text{ſin.}\,\varpi\, H}\,\text{ſin.}(\zeta-\epsilon-g).$$

D'où l'on voit 1.° que ſi N n'eſt pas $=0$, l'inclinaiſon de l'Équateur ſera ſujette à une diminution ou augmentation conſtante ſelon que N ſera poſitive ou négative.

2.° Que la valeur de μ, c'eſt à-dire la préceſſion moyenne des équinoxes ſera $\frac{3(H-2K+M}{4H}$.

3.° Que le pole de l'équateur de la Lune décrira, pendant une révolution des nœuds de l'orbite par rapport aux nœuds de l'Équateur, un petit cercle dont le rayon ſera $\frac{3hi}{4(p-\mu)H}$.

Mais ſi $\mu=p$, c'eſt-à-dire ſi le mouvement des points équinoxiaux de la Lune eſt égal au mouvement des nœuds de l'orbite, comme l'a trouvé M. Caſſini; les formules précédentes ne ſerviront plus, mais il faudra mettre d'abord au lieu de ϖ ſa valeur $\pi' - \frac{3hi}{3(\mu-p)H}\,\text{coſ.}(\zeta'-\epsilon'-g)$; & au lieu de η ſa valeur $\epsilon' + \frac{3hi}{4(\mu-p)\,\text{ſin.}\,\varpi\, H}\,\text{ſin.}(\zeta'-\epsilon'-g)$; on mettra enſuite au lieu de ϵ, $\epsilon'+\mu V$, & au lieu de ζ, $\zeta'-pV$; après quoi, regardant $(\mu-p)V$ comme une quantité infiniment petite, on aura

$$\text{coſ.}(\zeta-\epsilon-g) = \text{coſ.}(\zeta'-\epsilon'-g) - (\mu-p)V\,\text{ſin.}(\zeta'-\epsilon'-g);\ \&$$
$$\text{ſin.}(\zeta-\epsilon-g) = \text{ſin.}(\zeta'-\epsilon'-g) + (\mu-p)V\,\text{coſ.}(\zeta'-\epsilon'-g);\ \&$$

les valeurs de ϵ & de π deviendront les ſuivantes

$$\pi = \pi' + \left(\frac{3N\,\text{ſin.}\,\varpi}{4H} - \frac{3hi}{4H}\,\text{ſin.}(\zeta'-\epsilon'-g)\right)V.$$

$$\epsilon = \epsilon' - \left(\frac{3(H-2K+M)}{4H} + \frac{4hi}{4\,\text{ſin.}\,\varpi\, H}\,\text{coſ.}(\zeta'-\epsilon'-g)\right)V.$$

D'où il s'enſuit que $\mu = \frac{3(H-2K+M)}{4H} + \frac{3hi}{4\,\text{ſin.}\,\varpi\, H}$

$cos.(\zeta'-\epsilon'-g)$; & qu'il n'y aura plus de nutation ſenſible dans l'axe de la Lune.

XXVI.

Remarque. Il eſt bon de remarquer que, ſi on vouloit appliquer à la Terre regardée comme un ſphéroïde quelconque les formules (8) & (9), il faudroit effacer par-tout les lettres M & N; la raiſon de cela eſt que l'angle θ n'étant plus alors très-petit par rapport à v, il ne feroit plus permis de mettre, comme nous l'avons fait, $sin.(v-\epsilon)$; & $cos.(v-\epsilon)$ au lieu de $\Delta sin.\omega - \Lambda cos.\omega$, & de $\Lambda sin.\omega + \Delta cos.\omega$ dans les expreſſions de E′ & de Π′; mais il faudroit ſubſtituer pour Λ & pour Δ leurs valeurs (art. XIII, (M)); cependant comme les termes venant de ces ſubſtitutions feroient tous multipliés par $sin. 2\omega$, ou $cos. 2\omega$, & que ω feroit dans ce cas beaucoup plus grand que V, étant à-très-peu-près dans le rapport de 27 à 1; il eſt clair que ces termes pourroient être négligés entièrement comme devant être, après l'intégration, conſidérablement plus petits que les autres. M. d'Alembert a fait le premier cette importante obſervation, ſans laquelle il eût été comme impoſſible de réſoudre le problême de la préceſſion des équinoxes dans la Terre conſidérée comme une ſphéroïde à méridiens diſſemblables; mais elle n'a plus lieu à l'égard de la Lune, dans laquelle $\omega =$ à-peu-près V; & c'eſt ce qui fait que nos réſultats diffèrent un peu de ceux de ce grand Géomètre, comme on va le voir.

XXVIII.

SCHOLIE I. En ſuppoſant la Lune homogène, & de figure elliptique, comme dans l'article XXII, on aura $H = \frac{4cf^5}{15}$, $M = \frac{4cf^5}{15} e B'$, $N = 0$, & $K - \frac{1}{2} H = -\frac{4cf^5}{15}(e A'$

$+\frac{1}{2}eB')$, article XII; donc, article XXV, $g=0$;

$L=H-2K+M=\frac{8cf^5}{15}(eA'+eB')$, & $\frac{L}{H}=2eA'+2eB'$;

donc, $\pi=\varpi+\frac{3i(eA'+eB')}{2(\mu-p)}cof.(\zeta-\varepsilon)$,

$\varepsilon=\eta-\mu V-\frac{3i(eA'+eB')}{2(\mu-p)fin.\varpi}fin(\zeta-\varepsilon)$, & $\mu=\frac{3e(A'+B')}{2}$.

Où l'on remarquera que $eA'+eB'$ repréſente l'ellipticité du premier méridien, c'eſt-à dire l'allongement de la Lune (dans le ſens de la ligne qui joint le centre de la Lune & de la Terre à-très-peu-près), par rapport au demi-axe de la Lune; & que par conſéquent le mouvement de l'axe de cette Planète dépend en ce cas uniquement de la quantité de cet allongement.

Par la théorie de la figure de la Lune, on a, art. XII, $eB'=\frac{15f^3T}{4p^3L}=\frac{236}{100000000}$ (art. XXII), & $eA'=\frac{5}{4}\varphi$; or φ exprime le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur de la Lune; donc ſi on nomme φ' ce même rapport ſous l'équateur de la Terre, f' le rayon de la Terre, t, t' les tems de la rotation de la Lune & de la Terre, on voit facilement qu'on aura

$\varphi:\varphi'=\frac{f}{t^2}\times\frac{T}{f'^2}:\frac{f'}{t'^2}\times\frac{L}{f^2}$; ce qui donne $\varphi=\frac{f^3}{f'^3}\times\frac{T}{L}\times\frac{t'^2}{t^2}\times\varphi'$;

mettant au lieu de φ', $\frac{1}{288}$; au lieu de $\frac{f}{f'}$, $\frac{3}{11}$; au lieu de $\frac{T}{L}$, 67; & au lieu de $\frac{t'}{t}$, $\frac{1}{27\frac{1}{3}}$, je trouve $\varphi=\frac{6326}{10000000000}$; d'où $eA=\frac{79}{100000000}$, & par conſéquent $eA'+eB'=\frac{315}{100000000}$; donc $\mu=\frac{471}{100000000}$. & multipliant ce nombre par $360°$, on aura en ſecondes $61''$ pour la préceſſion moyenne des points équinoxiaux lunaires dans un mois périodique.

Pour avoir la nutation, il faut multiplier μ par $\frac{i}{\mu-p}$, ou bien par $\frac{i}{p}$ ſimplement, à cauſe de μ extrêmement petit, Or en prenant pour la tangente i de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, $tang.\ 5^\circ, 9'$, & pour le rapport p du mouvement moyen des nœuds au mouvement périodique de la Lune $\frac{1^\circ, 26', 43''}{360^\circ}$, je trouve la nutation de l'axe $=3', 39''$; & diviſant ce nombre par $\mathit{ſin.}\ \varpi$, (en prenant pour ϖ, 2°, valeur moyenne entre celles de M. Caſſini & de M. Mayer) j'ai $1^\circ, 44', 15''$ pour la plus grande équation de la préceſſion.

Selon M. d'Alembert (Voyez le dernier Mémoire de ſes Opuſcules) la préceſſion moyenne des équinoxes dans l'hypothèſe préſente eſt ſeulement de $\frac{3(eA'+\frac{1}{2}eB')}{2}$; & la nutation eſt auſſi diminuée à proportion : c'eſt ce qui fait que nos réſultats ne s'accordent point; mais j'ai donné ci-deſſus, art. XVII, la raiſon de cette différence entre les formules de ce grand Géomètre & les miennes.

XXIX.

SCHOLIE II. Voyons maintenant quelle devroit être la valeur de $eA'+eB'$, pour que la préceſſion moyenne des équinoxes lunaires fût égale au mouvement des nœuds de la Lune; dans ce cas on aura, (art. XXV), $\mu=p=$ $\frac{3(H-2K+M}{4H}+\frac{3hi}{4\,\mathit{ſin.}\,\varpi\,H}\mathit{coſ.}(\zeta'-\epsilon'-g)=\frac{3}{2}(eA'+eB')\times$ $(1+\frac{i}{\mathit{ſin.}\,\varpi}\mathit{coſ.}(\zeta'-\epsilon'))$; donc $eA'+eB'=\frac{2p}{3(1+\frac{i}{\mathit{ſin.}\,\varpi}\mathit{coſ.}(\zeta'-\epsilon'))}$.

Donc ſi l'on veut, avec M. de Caſſini, que le nœud deſcendant de l'équateur lunaire ſoit toujours au même point que le nœud aſcendant de l'orbite de la Lune, on fera $\epsilon'=\zeta'$, & l'on aura $eA'+eB'=\frac{2p}{3(1+\frac{i}{\mathit{ſin.}\,\varpi})}=\frac{747}{1000000}$; & dans ce cas, il n'y aura plus de nutation ſenſible dans l'axe

XXX.

SCHOLIE III. Au reste, quelle que soit la valeur de $eA' + eB'$: pourvû qu'elle surpasse $\frac{747}{10000000}$, je dis que le mouvement des équinoxes lunaires deviendra toujours, de lui-même égal au mouvement des nœuds de la Lune; car il est clair que l'on pourra toujours trouver un angle $\zeta' - \epsilon'$ tel que l'on ait $eA' + eB' = \frac{2p}{3\left(1 + \frac{i}{\sin.\varpi} \cos.(\zeta' - \epsilon')\right)}$; donc lorsque les nœuds de l'équateur & de l'orbite, à force de s'éloigner, seront parvenus à la distance $= \zeta' - \epsilon'$ entr'eux, le nœud de l'équateur recevra un mouvement égal à celui de l'orbite.

Il est vrai que l'inclinaison de l'axe sera sujette à une augmentation ou diminution constante, selon que $\epsilon' > \zeta'$, ou $< \zeta'$, en vertu de laquelle la valeur $\sin.\pi$ changera un peu, & l'équation $eA' + eB' = \frac{2p}{3\left(1 + \frac{i}{\sin.\varpi} \cos.(\zeta' - \epsilon')\right)}$ cessera d'être vraie; mais elle se rétablira ensuite par la variation de la distance $\zeta' - \epsilon'$. Peut-être pourroit-on démontrer, par ce raisonnement, que les nœuds de l'équateur lunaire devront enfin coïncider pour toujours avec ceux de l'orbite.

XXXI.

SCHOLIE IV. Un moyen de déterminer si le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire est exactement égal à celui des nœuds de l'orbite, ce seroit d'observer pendant une longue suite de révolutions de la Lune, la quantité de sa plus grande libration en latitude. Car il est clair que cette libration peut être représentée sans erreur sensible par l'angle que nous avons nommé ψ, (article XVI), à cause que l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique eſt extrêmement petite; or $\mathit{ſin.}\psi = \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, art. cité, $= \frac{\mathit{ſin.}(v-\epsilon)\,\mathit{ſin.}\pi + \lambda\,\mathit{coſ.}\pi}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, art. XIII, $=$ (en mettant pour λ ſa valeur $i\,\mathit{ſin.}(v-\zeta)$) $\frac{\mathit{ſin.}(v-\epsilon)\,\mathit{ſin.}\pi + i\,\mathit{ſin.}(v-\zeta)\,\mathit{coſ.}\pi}{\sqrt{1+i^2\,\mathit{ſin.}(v-\zeta)^2}}$. Donc ſi $\zeta=\epsilon$, on aura $\mathit{ſin.}\psi = \frac{\mathit{ſin.}(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i^2\,\mathit{ſin.}(v-\zeta)^2)}} \times (\mathit{ſin.}\pi + i\,\mathit{coſ.}\pi)$, & comme $v = \mathit{long.}☾ + 180$ (art. XIII), & $\zeta = \mathit{long.}☊$, lorſque la Lune ſera dans ſes plus grandes latitudes boréales, on aura $v - 180 - \zeta = 90$, ſavoir $v-\zeta = 270$, & $\mathit{ſin.}(v-\zeta) = -1$; on trouvera de même $\mathit{ſin.}(v-\zeta)=1$ pour les plus grandes latitudes méridionales; donc la libration totale en latitude ſera $2\frac{\mathit{ſin.}\pi + i\,\mathit{coſ.}\pi}{\sqrt{1+i^2}}$, ce qui va à $\frac{1}{4}$ environ du rayon de la Lune. Soit maintenant $\epsilon >$, ou $< \zeta$, il eſt évident qu'après quelques révolutions de la Lnne, on devra avoir $\epsilon = \zeta + 180°$; & alors $\mathit{ſin.}\psi$ ſera $= \frac{\mathit{ſin.}(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i\,\mathit{ſin.}(v-\zeta)^2)}} \times (-\mathit{ſin.}\pi + i\,\mathit{coſ.}\pi)$; & la libration totale $= 2\frac{-\mathit{ſin.}\pi + i\,\mathit{coſ.}\pi}{\sqrt{(1+i^2)}} = \frac{1}{9}$ ſeulement du rayon de la Lune.

XXXII.

SCHOLIE V. Je finirai ces recherches par expoſer une méthode par laquelle, ayant trois obſervations d'une même tache de la Lune, on pourra connoître la poſition de l'équateur de cette Planète par rapport à l'écliptique. Soit (comme dans l'article XIII), $v - 180°$ la longitude du centre de la Lune, & λ ſa latitude ſuppoſée auſtrale; $U - 180°$ la longitude de la tache, & $\lambda - b$ la tangente de ſa latitude, dans une obſervation quelconque; il eſt facile de voir, en conservant les suppositions & les noms de l'article II, que l'on aura

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{x}{\rho}=cos.v;\ \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{y}{\rho}=sin.v;\ \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{z}{\rho}=\lambda;$$

& de même

$$\frac{y-Y}{\sqrt{(\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2)}}=sin.U;\ \frac{z-Z}{\sqrt{(\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2)}}=\lambda-l;$$ or

$\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2=$ à-très-peu-près $x^2+y^2-2xX-2yY$ $=\rho^2-2xX-2yY$; donc en négligeant les quarrés, & les puissances plus hautes de X, Y, aussi bien que leurs produits, on aura $\frac{y-Y}{\sqrt{(\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2)}}=\frac{y}{\rho}-\frac{Y}{\rho}+\frac{xyX}{\rho^3}+\frac{y^2Y}{\rho^3}=$ (en mettant $sin.v$ & $cos.v$ au lieu de $\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$), $sin.v+cos.v$ $\frac{X sin.v-Y cos.v}{\rho}$; par conséquent si on fait $sin.U=sin.v-S$, on aura l'équation

$$(1) \ldots\ldots \frac{\rho S}{cos.v}=Y cos.v-X sin.v.$$

On trouvera de la même manière $\frac{z-Z}{\sqrt{(\overline{x-X}^2+\overline{y-Y}^2)}}=\frac{z}{\rho}$ $-\frac{Z}{\rho}+\frac{zxX}{\rho^3}+\frac{zyY}{\rho^3}=\lambda-\frac{Z}{\rho}+\frac{\lambda}{\rho}\times(X cos.v+Y sin.v)=$, (hypot:), $\lambda-l$; ce qui donnera

$$(2) \ldots\ldots \frac{Z-\rho l}{\lambda}=X cos.v+Y sin.v.$$

Il faut tirer de ces deux équations les valeurs de X, Y, Z; & pour cela on remarquera que, r étant le rayon de la Lune, on aura $X^2+Y^2+Z^2=r^2$; & que $\overline{Y cos.v-X sin.v}^2+\overline{X cos.v+Y sin.v}^2=X^2+Y^2=r^2-Z^2$; on aura donc

$r^2-Z^2=$

$r^2 - Z^2 = \frac{(Z - pl)^2}{\lambda^2} + \frac{p^2 S^2}{cos. v^2}$, d'où l'on tire, en faisant pour abréger $h = \sqrt{(\overline{1+\lambda^2} \times r^2 - \frac{p^2 S^2}{cos. v^2} - p^2 l^2)}$, $Z = \frac{pl + h\lambda}{+\lambda^2}$;

Ayant la valeur de Z, on trouvera aussitôt celle de X, & de Y, par les équations (1), (2) car

$X = \frac{Z - pl}{\mu} cos. v - pS \; tang. v$; $Y = \frac{Z - pl}{\lambda} fin. v + pS$.

On fera le même calcul pour chacune des deux autres observations, & l'on appellera X', Y', Z'; X'', Y'', Z'', les valeurs correspondantes de X, Y, Z.

Maintenant on a (article VI, (D)) $Z = r \; fin. p$, $Y = r \; cos. p \; fin. q$, $X = r \; cos. p \; cos. q$; de plus en combinant les deux premières formules (C), $fin. P = fin. p \; cos. \pi + cos. p \; fin. q' fin. \pi$, = (en mettant au lieu de q', $q - \varepsilon$) $fin. p \; cos. \pi + cos. p \; fin. q \; cos. \varepsilon \; fin. \pi - cos. p \; cos. q \; fin. \varepsilon \; fin. \pi$; donc substituant pour $fin. p$, $cos. p \; fin. q$, $cos. p \; cos. q$, leurs valeurs $\frac{Z}{r}$, $\frac{Y}{r}$, $\frac{X}{r}$, on aura

(3) . . . . $r \, fin. P = Z cos. \pi + Y cos. \varepsilon \, fin. \pi - X fin. \varepsilon \, fin. \pi$.

Et de même pour les deux autres observations.

(4) . . . . . . $r \, fin. P = Z' cos. \pi + Y' cos. \varepsilon \, fin. \pi - X' fin. \varepsilon \, fin. \pi$.

(5) . . . . . . $r \, fiu. P = Z'' cos. \pi + Y'' cos. \varepsilon \, fin. \pi - X'' fin. \varepsilon \, fin. \pi$

en supposant que la position de l'équateur demeure la même.

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), & l'équation (5) de l'équation (4) on aura deux nouvelles équations

6).$(Z - Z') cos. \pi + (Y - Y') cos. \varepsilon \, fi. \pi - (X - X') fin \; \varepsilon \, fin. \pi = 0$

$$(7).(Z'-Z'')\cos.\pi+(Y'-Y'')\cos.\varepsilon\sin.\pi-(X'-X'')\sin.\varepsilon\sin.\pi=0$$

d'où l'on tire $\frac{(X-X')\sin\varepsilon-(Y-Y')\cos.\varepsilon}{Z-Z'}=\frac{\cos.\pi}{\sin.\pi}=$ $\frac{(X'-X'')\sin.\varepsilon-(Y'-Y'')\cos.\varepsilon}{Z'-Z''}$; & par conſéquent

$$tang.\varepsilon=\left(\frac{Y-Y'}{Z-Z'}-\frac{Y'-Y''}{Z'-Z''}\right):\left(\frac{X-X'}{Z-Z'}-\frac{X'-X''}{Z'-Z''}\right);$$

Connoiſſant ε, on trouvera π par la formule

$$tang.\pi=\frac{Z-Z'}{(X-X')\sin.\varepsilon-(Y-Y')\cos.\varepsilon}.$$

FIN.

DE L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

MÉMOIRE pour concourir au prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1765.

Par M. GROIGNARD, Constructeur en chef des vaisseaux du Roi & de la Compagnie des Indes, au Port de l'Orient.

MÉMOIRE

SUR L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX.

Qui dubiis auſus committere flatibus alnum,
Quas natura negat præbuit arte vias.

POUR me conformer aux vues de l'Académie, & diſcuter avec ordre le ſujet qu'elle propoſe, je diviſerai ce Mémoire en trois Chapitres.

Le premier traitera des méthodes uſitées dans les Ports, pour leſter ou arrimer les vaiſſeaux de toutes ſortes de grandeur, & de différentes eſpèces.

Le ſecond, des poids & de la diſtribution des matières qu'on employe, & de l'effet qu'elles produiſent ſur le ſillage, ſur les lignes d'eau, ſur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & ſur les autres qualités d'un vaiſſeau.

Le troiſième, des inconvéniens de ces méthodes & des remedes qu'on pourroit y apporter.

L'objet de ce Mémoire étant des plus intéreſſans, & devant être à la portée de tous les Marins, j'eſſayerai de le traiter de la façon la plus ſimple, & la plus praticable, & de le rendre auſſi utile à la Marine du Roi, qu'à celle de la Compagnie des Indes & des Marchands.

CHAPITRE I.

Des méthodes usitées dans les Ports pour arrimer & lester les vaisseaux de toutes sortes de grandeurs, & de différentes espèces.

ARRIMER un vaisseau, c'est le charger, ou placer dans sa calle, dans ses soutes, entre-ponts & gaillards les différentes matières ou effets qu'exigent son espèce & sa destination.

Comme ces effets peuvent être plus ou moins pesans relativement à la capacité ou au déplacement d'eau du vaisseau, & plus ou moins avantageusement placés relativement à sa stabilité, on se sert de lest, ou de matières plus ou moins pesantes, comme la pierre, le fer ou le plomb, pour augmenter le déplacement ou la stablilité, & c'est ce qu'on appelle lester un vaisseau.

L'arrimage & lestage des vaisseaux doit donc varier suivant leurs espèces & leurs destinations. On ne finiroit pas si on vouloit entreprendre de détailler toutes les espèces de vaisseaux & les différens arrimages qu'exigeroient leurs différens armemens.

Je me bornerai à parler des espèces de vaisseaux les plus connues, les plus en usage, & les plus nécessaires au service du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, & je donnerai pour ces espèces de vaisseaux des principes applicables à toutes les autres.

De l'arrimage des vaisseaux de Roi.

JE prends pour exemple un vaisseau de soixante-quatorze canons.

La Calle.

L'arrimage des vaiſſeaux de Roi eſt le plus connu, & celui qui peut le moins varier, parce que chaque choſe y eſt toujours la même, & à ſa même place diſtincte.

Dans la partie la plus baſſe du vaiſſeau que l'on appelle la calle, ſont à-peu-près ſur le même plan, & ſucceſſivement à commencer par l'arrière ou l'étambot juſques en avant ou l'étrave.

1.° Les coffres & la ſoute aux poudres; cette ſoute occupe à-peu-près une eſpace de 5 à 6 pieds de hauteur & de 41 pieds de longueur à prendre du dehors de l'étambot: elle doit contenir en barils & en gargouſſes la quantité de poudres néceſſaires pour fournir au moins ſoixante coups pour chaque canon; cette ſoute eſt terminée par deux cloiſons à un pied de diſtance l'une de l'autre; & cet intervalle entre les deux cloiſons eſt ordinairement rempli de ſable ou de terre pour préſerver les poudres du feu ou de l'humidité voiſine.

2.° Sur l'avant & joignant la ſoute aux poudres, eſt la cave du Capitaine de 8 à 9 pieds de hauteur & 5 à 6 pieds de longueur: cette cave doit contenir la quantité de vin néceſſaire à la table du Capitaine pour 6 à 7 mois de campagne; elle eſt terminée par une ſimple cloiſon qui prend tout le travers ou la largeur du Vaiſſeau.

3.° La calle au vin & proviſions de l'équipage de 8 à 9 pieds de hauteur, & 24 à 26 pieds de longueur. Cette calle ou cave doit contenir le vin & partie des proviſions de l'équipage pour 6 à 7 mois de campagne, elle eſt terminée par une cloiſon joignant l'archipompe, & ſur l'avant, & à-peu-près de la grandeur de l'archipompe eſt le parquet ou coffre aux boulets. Ce coffre monte juſques à la hauteur du faux-pont eſt diviſé par caſes, & doit contenir tous les boulets de différens calibres, à l'exception de ceux que l'on met dans de petits parquets entre les batteries, pour les avoir ſous la main. On embarque la quantité de boulets pour au moins ſoixante coups par canon.

4.° La calle à eau de 8 à 9 pieds de hauteur & de 48 à 50 pieds de longueur; elle doit contenir en piéces de quatre, de trois, de deux, & d'une barrique, la quantité d'eau pour deux mois & demi ou trois mois au plus, à raiſon d'une barrique par jour pour cent hommes. Il ne ſeroit pas poſſible d'en prendre davantage ſans trop charger le vaiſſeau, & l'on renouvelle cette eau dans les relaches. Cette calle à eau eſt terminée pour une ſimple cloiſon en travers du vaiſſeau

5.° La foſſe aux cables de 8 à 9 pieds de hauteur & de 22 à 24 pieds de longueur; elle doit contenir tous les cables, grelins; auſſières &c. néceſſaires à l'armement & au rechange du vaiſſeau.

6.° En avant de la cloiſon de la foſſe aux cables, & vis-à-vis du mât de mizaine, ſont deux petits coffres à poudre qui ſe terminent ſur l'extrémité, ou ſur l'avant du vaiſſeau, l'on y met dans un combat des gargouſſes pour accélérer le ſervice des canons de l'avant.

Le leſt ſe place dans la calle au-deſſous des piéces à eau, à vin & des cables.

Le Faux-pont.

Au deſſus & à la longueur des ſoutes à poudre, eſt un plancher ou platte-forme ſur laquelle ſont établis le rechange du maître Canonnier de 5 à 6 pieds de longueur, & cinq ſoutes à pain, dont une en travers du vaiſſeau ſur l'arrière, & deux de chaque côté ſéparées par un courroir ſuivant la longueur du vaiſſeau, pour communiquer de l'une à l'autre, & pouvoir deſcendre dans la ſoute aux poudres au moyen de deux écoutilles pratiquées ſur ce plancher, l'une en avant, & l'autre en arrière de l'archi-pompe d'artimon. Ces ſoutes à pain contiennent la quantité de biſcuit néceſſaire à l'équipage.

Au deſſus & à la longueur de la cave du Capitaine & de la cave au vin de l'équipage, eſt un plancher ſur lequel ſont établies pluſieurs ſoutes à grain & à légumes, ſéparées par un grand courroir au milieu, pour pouvoir au moyen de deux écoutilles deſcendre dans la cave du Capitaine & dans la cave au vin.

C'eſt ſur ce plancher que l'on appelle la platte-forme du maître-valet que ſe fait la diſtribution journalière des vivres, & c'eſt dans ces ſoutes diviſées en pluſieurs compartimens que ſont placées les proviſions, légumes & grains du Capitaine & du Commis.

Au-deſſus & à la longueur de la calle à eau, eſt un plancher volant, ou couvert de planches levatis, ſur lequel on établit les ſoutes du Chirurgien, du Pilote, du Charpentier, le théatre des malades ou bleſſés dans un combat, & la ſoute à voile de 5 à 6 pieds de longueur tout en travers du vaiſſeau & joignant la cloiſon de la foſſe aux cables.

Au deſſus & à la longueur de la foſſe aux cables & coffres à poudres de l'avant, ſont la plate-forme du cable daffourche, la foſſe à Léon, & quelques ſoutes pour les rechanges des maîtres d'équipage, calfats &c. & pour des grains.

Tous ces différens planchers joints enſemble, & prolongés depuis l'avant juſqu'à l'arrière du vaiſſeau, à l'exception du plancher des ſoutes à pain qui eſt deux à trois pieds plus bas que tous les autres, forment ce qu'on appelle le *faux-pont*. Tout autour de ce faux-pont à trois pieds de diſtance du bord, régne un eſpace vide ou galleries pour voir dans un combat les boulets qui pourroient percer le vaiſſeau à fleur d'eau, & boucher les trous des boulets avec des tapons de calibre.

Le

Le premier Pont.

A cinq pieds & demi de hauteur, au-dessus du faux-pont, sous poutre ou sous beaux, est un autre plancher, prolongé depuis l'arrière jusqu'à l'avant du vaisseau, que l'on appelle le premier-pont.

Sur ce premier pont, à commencer par l'arrière, est la sainte-barbe de 24 à 25 pieds de longueur, terminée par une cloison que l'on peut démonter dans un combat.

Dans la sainte-barbe sont établies de chaque côté les chambres, de l'Écrivain & du maître Canonnier, & les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c.

Depuis la cloison de la sainte-barbe, jusqu'en avant du vaisseau, sont établis le cabestan, le four, le parc à moutons, les bittes, la gatte ou compartiment pour recevoir les eaux qui entrent par les écubiers, & tous les lits ou hamacs des matelots suspendus au-dessous des beaux ou poutres du second-pont.

Ce premier pont est percé de plusieurs trous, écoutilles ou panneaux, de grandeur convenable pour pouvoir descendre sur les différens planchers, ou compartimens du faux-pont, & y embarquer les piéces de quatre ou autres effets qui doivent être placés dans ces compartimens ou dans la calle.

C'est ce premier pont qui porte le poids immense de la première batterie de 28 canons de 36, montés sur leurs affuts avec palants & ustensilles nécessaires.

Le second Pont.

Sur le second pont, à commencer par l'arrière, est la grande-chambre ou salle à manger de 20 à 22 pieds de longueur, terminée par une cloison qui peut se démonter dans un combat; dans la grande chambre joignant cette cloiſon & de chaque côté du vaiſſeau, ſont pratiquées quatre ou ſix chambres en toile, qui peuvent auſſi ſe démonter.

En avant de cette grande chambre, eſt le poſte des Gardes de la Marine, l'office, la boucherie, & ſur le même pont, ſous le gaillard d'avant, ſont les cuiſines, les potagers, & un petit four pour la table du Capitaine.

C'eſt le ſecond Pont qui porte le poids de la ſeconde batterie de 30 canons de 18 liv. de la Chaloupe, Canots, & mâts d'hune de rechange, que l'on place ordinairement entre les deux gaillards.

La hauteur du premier au ſecond pont, ou de l'*entrepont* pour un vaiſſeau de 74 canons, eſt de 5 pieds 8 à 10 pouces ſous beau ou ſous poutre au milieu.

Les Gaillards.

A cinq pieds 6 à 8 pouces au-deſſus du ſecond pont ſous poutre, eſt ſur l'arrière du vaiſſeau un plancher de 80. à 85 pieds de longueur qu'on appelle le *gaillard d'arrière* qui eſt prolongé juſques ſur l'avant du grand mât, & ſur l'avant du vaiſſeau eſt un autre plancher à-peu-près de même hauteur de 40 à 42 pieds de longueur qu'on nomme le *gaillard d'avant.*

Sur le gaillard d'arrière ſont établies la chambre de Conſeil ou de parade de 18 pieds de longueur, & en avant de cette chambre de Conſeil, & de chaque côté du vaiſſeau, ſix chambres pour le Capitaine, & les cinq premiers Officiers: entre ces chambres & ſur l'arrière du mât d'artimon, eſt la roue du gouvernail, & l'habitacle où ſont les bouſſolles ou compas de route.

En avant du mât d'artimon, ſur le Gaillard d'arrière, ſont au milieu les cages à poules & à dindes, & ſur les côtés 10 canons de 8 l.

Sur le gaillard d'avant ſont le petit cabeſtan, les boſſoirs qui ſupportent les ancres & ſix canons de 8 liv.

La Dunette.

A cinq pieds huit pouces ou ſix pieds au-deſſus du gaillard d'arrière ſous poutre ou ſous barrot, eſt un plancher de 35 pieds de longueur prolongé juſques en avant du mât d'artimont, ſur lequel ſont établies ſur l'arrière & de chaque côté, quatre cabanes de 4 pieds de hauteur & 6 pieds de longueur, chacune, pour le logement des Maîtres & Pilotes; en avant de ces cabanes, ſont des cages à poules.

C'eſt ſur cette Dunette, qui eſt l'endroit le plus élevé du vaiſſeau qu'on établit la mouſquéterie dans un combat.

Le détail que je viens de fa re des emménagemens ou diſtributions des différentes parties de la calle, du faux-pont, entre-pont, &c. d'un vaiſſeau de guerre de 74 canons, peut convenir également aux vaiſſeaux du Roi de tous les rangs, en imaginant ces diſtributions relatives à la différente grandeur des vaiſſeaux, & même des frégates qui n'ont qu'un pont, une batterie, & une Dunete de moins que les vaiſſeaux, & qui d'ailleurs ſont également emménagées, à peu de choſe près.

On trouvera dans les différens Traités de conſtruction, Dictionnaires de Marine, & ſur-tout dans le Traité de M. Duhamel, des plans & coupes de différents vaiſſeaux de guerre, frégates & flutes qui repréſentent les emménagemens & diſtributions de ces bâtimens, que j'ai cru inutile de retracer ici.

D'après ce que je viens de dire des emménagemens & des diſtributions des différentes parties d'un vaiſſeau de guerre &c. l'arrimage des vaiſſeaux & frégates du Roi doit paroître d'autant plus aiſé, que chaque choſe a ſa place diſtincte, & que chaque place eſt plus grande à proportion, que ce quelle doit contenir.

Cela ſeroit exactement vrai s'il n'étoit queſtion pour faire un bon arrimage, que de placer ce que le vaiſſeau doit porter ; cette condition n'eſt pas la plus difficile à remplir : il faut qu'un vaiſſeau de guerre tout chargé ou arrimé, ait de la batterie, porte bien la voile, marche bien, gouverne bien, ait les mouvemens doux, & tout cela dépend beaucoup de la quantité, de l'eſpèce & de la poſition de ſon leſt, qui eſt la ſeule choſe qui paroiſſe indéterminée & la plus néceſſaire à l'arrimage d'un vaiſſeau de guerre ; elle demande les plus ſérieuſes combinaiſons, puiſque c'eſt de là que dépendent toutes ſes bonnes qualités. C'eſt ce qui ſera le ſujet du ſecond Chapitre ; je me bornerai à dire dans celui-ci que la bonne façon d'arrimer un vaiſſeau de guerre, eſt de lui donner la quantité & l'eſpèce de leſt proportionnée à ſa capacité ou déplacement, & à ſa ſtabilité, & de diſtribuer ce leſt de façon que chaque choſe à embarquer miſe à la place que j'ai ci-deſſus déſignée, le vaiſſeau ou la frégate ſoit au tirant d'eau, ait la hauteur de la batterie propoſée & toutes les autres qualités que l'on peut en attendre.

Comme il eſt très-difficile de rencontrer au juſte ce tirant d'eau, ou l'aſſiette du vaiſſeau, ſur-tout à ceux qui n'ont pas encore navigué, on conſerve une certaine quantité de leſt portatif que l'on place après l'arrimage ſur l'avant ou ſur l'arrière du vaiſſeau dans des endroits que l'on ménage exprès dans la calle, afin de pouvoir, au moyen de ce nouveau leſt, corriger la différence du tirant d'eau. On peut auſſi faire déplacer quelques futailles dans la calle à eau qui n'eſt jamais pleine, ſi ce leſt portatif ne ſuffit pas pour mettre le vaiſſeau en aſſiette.

De l'arrimage des vaiſſeaux de la Compagnie des Indes.

La Compagnie des Indes à trois eſpèces de vaiſſeaux relatifs à ſes objets de commerce.

Les vaisseaux pour l'Isle de France, Pondichery, &c. peuvent être du port de 1200 tonneaux, sans comprendre le poids de leur cocque, & de la force des vaisseaux du Roi de 64 Canons.

Les vaisseaux pour la Chine sont de 900 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur & de la force des vaisseaux de 50 canons.

Ceux pour Bengale ou pour la côte, sont de 600 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur, & de la force d'une frégate de 26 canons; l'objet des vaisseaux de la Compagnie étant de porter & rapporter des provisions & autres munitions & marchandises relatives à son commerce, le chargement de ces vaisseaux varie suivant les besoins & les denrées des colonies; soit en partant de l'Orient, soit en revenant des différens lieux d'ou ils rapportent des marchandises différentes.

Ces trois espèces de vaisseaux sont différemment emménagés que ceux du Roi, seulement dans leur calle & dans leur entrepont.

Il n'y a dans leur calle sur l'arrière, qu'une petite soute à poudre & au-dessus des soutes à pain; & sur l'avant qu'une calle à eau. Ces soutes & cette calle à eau, qui n'occupent, pour ainsi dire, que la partie irrégulière des façons de l'arrière & de l'avant du vaisseau, n'ont que la longueur strictement nécessaire pour contenir la poudre, le biscuit, & l'eau pour trois mois à un équipage bien moins nombreux qu'aux vaisseaux du Roi: ces vaisseaux portent ordinairement des vivres pour 18 mois que dure leur campagne.

On a jugé à propos de placer la calle à eau sur l'avant de ces vaisseaux, parce que cette partie étant plus exposée aux égouts, aux voyes d'eau, & à l'humidité, & d'une figure très-irrégulière, est moins propre à l'arrimage & à la conservation des marchandises légères & précieuses, & que la calle à eau placée comme dans les vaisseaux de guerre, au milieu de la longueur de la calle & de ces mêmes marchandiſes, leur communiqueroit de l'humidité, &c.

Ces raiſons ont prévalu ſur les inconvéniens qui réſultent de la poſition de la calle à eau ſur l'étrave ou ſur l'avant du vaiſſeau. Le poids immenſe de cette eau tend à faire plonger & à délier cette partie, & rend les mouvemens de tangage fort durs : on eſt en même-temps obligé de mettre beaucoup de leſt de fer, ou les effets les plus lourds, ſur la partie de l'arrière du vaiſſeau, pour balancer le poids de la calle à eau ſur l'avant, qui joint à celui des cambuſes, des ancres, mât de mizaine, du beaupré, &c. ne peut que contribuer à faire promptement arquer, & délier ces vaiſſeaux.

L'eſpace immenſe de la calle, compris entre la cloiſon des ſoutes à pain, & celle de la calle à eau, eſt ordinairement occupé par cent ou cent cinquante tonneaux de leſt de fer & de pierres, ou fer de cargaiſon. Sur ce leſt de fer & de pierre, ſont établis deux ou trois plans de futailles ou piéces de deux remplies de différens vins & eau-de-vie, & tous ces plans ſont prolongés ordinairement depuis la cloiſon de la calle à eau, juſqu'à la diſtance de 8 à 12 pieds de la cloiſon des ſoutes à pain & à poudre ; l'on met dans ce vide de 8 à 12 pieds, du charbon de terre, & au-deſſus du charbon de terre, juſqu'à la hauteur du pont, de la poudre en barrils pour les colonies, que l'on maſque avec des piéces de toile à voile.

Au-deſſus de ces plans de vin & eau-de-vie, on met d'abord joignant la cloiſon de la calle à eau, en venant ſur l'arrière, des barrils de brays, goudron, cordages, caiſſes d'armes, d'habillemens de troupes, toiles & autres effets relatifs aux beſoins & commerce des colonies, & l'on finit de remplir & de bonder la calle avec des farines ou autres effets les plus légers.

Il n'y a point de faux-pont dans les vaisseaux de la Compagnie, mais seulement quelques barrots ou poutres dans la calle environ à cinq pieds au-dessous du premier pont, sur lesquels on place quelquefois des mâts bruts pour servir au vaisseaux dans les colonies, & pour pouvoir faire entrer & sortir ces mâts, on pratique, à-peu-près à la hauteur de ces barrots, dans l'arcasse ou sur l'arrière du vaisseau, un sabord de charge & un courroir entre les soutes à pain, du côté où est placé ce sabord.

Sur le premier pont des vaisseaux de la Compagnie, est, comme aux vaisseaux du Roi, la sainte-barbe avec les chambres de l'Écrivain, du maître Canonnier, les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c. Mais comme la calle de ces vaisseaux n'est presque occupée que des effets de cargaison, on est obligé de se servir de ce premier pont pour mettre les vivres qui ne peuvent être placés dans la calle; ainsi en avant de la sainte-barbe, sont pratiquées au milieu du vaisseau, des soutes à grain & à légumes. Il y a aussi un parc à moutons, à double étage pour de plus longues campagnes, & tout en avant du vaisseau, & au dessus de la calle à eau, sont des cambuses ou soutes pour les provisions du Capitaine, du Commis, pour la distribution journalière des vivres, les soutes des Maîtres Charpentiers, Calfats, Maîtres-d'équipage, le poste du Chirurgien, des malades, &c. sont aussi sur ce premier pont.

Le reste de ce premier pont est ordinairement rempli de barrils de farine, des coffres & hardes des équipages, des voiles, des cables, cordages, &c. parce qu'il n'y a point de canons ou de première batterie, quand ces vaisseaux ne sont point armés en guerre.

Le second pont, gaillards & dunettes de ces vaisseaux sont à-peu-près emménagés comme les vaisseaux du Roi, à cela près, que tout est, à proportion, plus resserré, plus multiplié, & relatif aux plus longues campagnes, & que le cabestan & les écubiers sont établis sur le second pont.

On voit par ce que je viens de dire de l'arrimage des vaiſſeaux de la Compagnie, que ces trois eſpèces de bâtimens, en partant de l'Orient, doivent toujours être très-chargés & ſubmergés, parce que les effets qui compoſent leur arrimage ſont très-lourds, & rempliſſent toujours tout l'eſpace de leur calle & de leur entrepont, eſpace que l'on rend d'autant plus conſidérable, qu'il ne doit contenir, au retour des mêmes vaiſſeaux, que des marchandiſes légeres, & d'un grand volume, comme le thé, le caffé, le poivre, le coton, &c.

La conſtruction des vaiſſeaux de la Compagnie, demande donc plus de combinaiſon, que celle des vaiſſeaux de guerre, puiſqu'ils doivent être faits de façon, à pouvoir être chargés de marchandiſes lourdes pour l'approviſionnement des colonies, & à rapporter beaucoup de marchandiſes légères pour augmenter les profits & dédommager la Compagnie de leur armement; l'arrimage de ces vaiſſeaux demande auſſi plus de combinaiſon dans ces différens cas.

Pour bien arrimer un vaiſſeau de la Compagnie partant de l'Orient, chargé de marchandiſes ou effets très lourds, il faut combiner les différentes parties qui doivent compoſer ſon chargement, éloigner des extrémités du vaiſſeau les effets les plus lourds qui n'ont point de place decidée, les placer le plus bas qu'il eſt poſſible, pour baiſſer le centre de gravité, & diminuer d'autant la quantité de leſt qu'on eſt obligé de donner à ce vaiſſeau pour lui faire porter la voile; & le mettre en aſſiette ou en différence; parce que ce leſt eſt un poids inutile qui ne ſert qu'à augmenter le déplacement d'eau du vaiſſeau, la réſiſtance du fluide, & à tenir la place d'autres effets beaucoup plus néceſſaires que l'on pourroit porter.

On peut auſſi diminuer la quantité & le volume du leſt, en augmentant ſa peſanteur ſpécifique, & pour de pareils vaiſſeaux, le leſt de fer & de plomb doit être préféré au leſt de pierre,

Pour

Pour bien arrimer ce même vaiſſeau venant de la Chine, où les marchandiſes occupent à proportion beaucoup plus de place qu'elles ne pèſent, on ne ſçauroit avoir trop d'attention à ne point perdre de terrein; pour cet effet les Chinois font des caiſſes de thé de différentes grandeurs & figures relatives à la courbure des côtés du vaiſſeau; & après avoir mis dans le fond la quantité de leſt de fer, de pierre, & de caiſſes de porcelaine néceſſaires pour ſuppléer au défaut de la péſanteur du thé, & pour faire un grenier ou une plate forme aſſez élevée pour empêcher que l'eau ou l'humidité ne ſe communique au thé, on remplit exactement de pluſieurs rangs de caiſſes de thé, de hauteur & figures convenables toute la calle du vaiſſeau, depuis la cloiſon des ſoutes à pain & à poudre, juſqu'à la cloiſon de la calle à eau, que l'on diminue le plus qu'il eſt poſſible.

On a attention, avant d'arrimer le thé, de faire calfater la cloiſon de la calle à eau, de la tapiſſer de nates, ainſi que les côtés du vaiſſeau, & l'on prend toutes les précautions néceſſaires pour empêcher les égoûts & l'humidité.

On remplit auſſi de caiſſes de thé la partie de l'entre-pont compriſe entre la ſainte-barbe, & les environs de l'archipompe.

On arrime à peu-près de la même façon les vaiſſeaux de la Compagnie chargés de café, & autres marchandiſes légères; c'eſt-à-dire, que pour bien arrimer ces vaiſſeaux il faut proportionner la quantité & l'eſpèce du leſt à la peſanteur ſpécifique des matières qui compoſent leur chargement, & à la ſtabilité qui leur eſt néceſſaire, & diſtribuer ce leſt relativement à l'aſſiette de ces vaiſſeaux.

De l'Arrimage des Vaisseaux marchands.

LES vaisseaux marchands sont à peu-près emménagés comme les vaisseaux de la Compagnie.

L'arrimage ou le chargement des vaisseaux marchands est relatif à l'objet de leur destination, & de leur commerce.

On porte chez l'étranger les denrées du pays, & l'on rapporte celles de l'étranger : Il est de l'intérêt des Armateurs de porter & de rapporter le plus qu'il est possible, pour diminuer les frais de transport ; l'on ne peut rien ajouter à l'expérience & à l'attention qu'ont les Arrimeurs des différens ports marchands pour tirer parti de l'espace de la calle & de l'entrepont des vaisseaux faits, pour ainsi dire, pour l'objet du commerce de chaque pays : Ceux destinés pour porter des effets de grandeur connue, ont une longueur & hauteur de calle & entrepont proportionnées, pour loger, comme dans un coffre, une certaine quantité de rangs les uns sur les autres ; par exemple, de barriques de sucre, de jarres d'huile, de balles de caffé, &c.

En général, tous ces arrimages n'ont rien de recherché, puisqu'il n'est question que d'entasser piéces sur piéces, avec le plus de précision & d'attention ; sur tout lorsque ces pieces ne sont pas susceptibles de pression, comme le sont les balles de laine, de coton, &c.

L'arrimage de ces marchandises, susceptibles de pression, qu'on appelle estiver à *grillou* ou à *traou*, demande plus d'attention, de précision, est moins ordinaire, & mérite d'être cité.

Pour arrimer ou estiver à *grillou*, on garnit les balles en dessus & en dessous de languettes ou coins de bois fort larges; on fait prendre à ces balles, sous un pressoir avec ces mêmes languettes que l'on arrête, la forme d'un coin:

on introduit ensuite ces balles, ainsi formées en coin, avec ces languettes, entre les rangs de celles qui ont d'abord été rangées successivement dans la calle & entassées jusqu'à la hauteur du pont; de façon que sur un rang de six balles de hauteur, on introduit cinq autres balles pressées en coin, au moyen du traou ou bellier que l'on pousse avec différentes manœuvres frappées au cabestan; & quand ces balles, ainsi pressées, ont été introduites a force entre les autres, on retire les languettes au moyen d'une manœuvre frappée à chaque bout de ces languettes, & virée au cabestan. On fait entrer, par ce moyen 1000 à 1100 balles dans la calle & entrepont d'un vaisseau, qui n'en auroient contenu que 600. Cette façon d'arrimer est très-ingénieuse, & demande beaucoup plus de temps & d'attention; mais tous ces arrimages des vaisseaux Marchands exigent moins de théorie, que ceux des vaisseaux du Roi & de la Compagnie des Indes, parce qu'on n'a en vue que de faire porter aux vaisseaux Marchands le plus qu'il est possible, sans faire attention aux inconvéniens qui peuvent en résulter par rapport aux qualités de ces vaisseaux, qui, faits au hazard, & par des Charpentiers ou Constructeurs ignorans, ne peuvent qu'être très-mauvais voiliers, & être arrimés au hazard. Ce n'est que la pratique qui a fait connoitre à peu-près la figure & la façon d'arrimer ces vaisseaux pour leur faire passablement porter la voile avec les chargemens connus, & toujours les mêmes pour lesquels ils sont construits. Mais si l'on avoit à arrimer des vaisseaux Marchands faits par d'habiles Constructeurs, dont on connoîtroit les capacités, la stabilité & le tirant d'eau ou l'assiette, tout ce que j'ai dit au sujet des différentes façons d'arrimer les vaisseaux de la Compagnie des Indes, suffiroit pour le bon arrimage de ces bons vaisseaux Marchands, qui seroient aussi utiles au Commerce qu'à l'État.

CHAPITRE II.

Du poids & de la diſtribution des Matières qu'on emploie dans l'Arrimage des Vaiſſeaux, & de l'effet qu'elles produiſent ſur le ſillage, ſur les lignes d'eau, ſur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & ſur les autres qualités du Vaiſſeau.

LE poids des matières qu'on emploie dans l'arrimage des vaiſſeaux du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, &c, doit toujours être égal à la capacité ou au déplacement d'eau du vaiſſeau ; ainſi, pour connoître d'avance le poids de ces mâtieres, il faut connoître le déplacement d'eau auquel il doit être comparé.

La figure de la carène ou de la partie du vaiſſeau qui entre dans l'eau étant très-irrégulière, on la diviſe en pluſieurs tranches. On réduit enſuite, en pieds cubes, la ſolidité de chaque tranche ſuppoſée homogène, & l'on ajoute enſemble la ſomme des pieds cubes de toutes ces tranches, pour avoir la ſolidité entière de la carène ou de la partie ſubmergée du vaiſſeau, ſuppoſée homogène.

Cette ſolidité entière de la carène eſt préciſément égale au volume d'eau, dont elle occupe la place, & au poids de ce volume d'eau, parce qu'il eſt démontré que tout corps flottant déplace un volume d'eau préciſément égal à ſon poids ; ainſi, connoiſſant la ſolidité de la carène ou la quantité de pieds cubes d'eau qu'elle a déplacée, on connoîtra leur poids, en les multipliant par celui du pied cube d'eau de mer, qui eſt à-peu-près de 72 livres ; & pour réduire ce même poids en tonneaux, on le diviſera par 2000 livres, poids ordinaire du tonneau d'eau de mer.

On aura donc toujours, par ce moyen, le poids ou le déplacement d'eau du vaiſſeau qui doit être égal & comparé au poids des différentes parties qui doivent compoſer ſa cocque, ſon gréément & ſa charge, ou ſon arrimage, pour être aſſuré que ce vaiſſeau n'enfoncera dans l'eau que de la quantité projettée.

EXEMPLE.

Du déplacement d'eau d'un vaiſſeau de 74 canons, comparé au poids de ſa cocque, de ſes apparaux & de ſes munitions.

Déplacement d'eau juſqu'à cinq pieds de batterie au ſabord du milieu.

	PIEDS CUBES.
Première tranche compriſe, depuis le deſſous de la quille, juſqu'à 46 pouces de haûteur au milieu audeſſus de la quille	4514 liv.
Deuxième tranche de 24 pouces de hauteur	7641
Troiſième tranche de 24 pouces id.	8559
Quatrième tranche de 24 pouces id.	9668
Cinquième tranche de 24 pouces id.	10873
Sixième tranche de 24 pouces id. . . .	12072
Septième tranche de 24 pouces id. . . .	13310
Huitième tranche de 24 pouces id. . . .	14413
TOTAL du déplacement en pieds cubes. .	81050

Lesquels 8 1050 pieds cubes d'eau pèsent à raison de 72 livres le pied cube, & de 2000 livres le tonneau . .	2917ton.	1600 liv.

Poids de la cocque du vaisseau.

	Tonneaux.	
Bois de chêne travaillé 35250 pieds cubes, à 59 livres le pied cube, l'un dans l'autre, pèse	1539	1750 liv.
Bois de sapin 7500 pieds cubes, à 50 livres le pied cube . . .	187	1000
Sculpture	6	
Fer en courbes du premier pont, faux-pont, & une partie de celles du second pont	26	
Fer en chevilles de toutes sortes, ferrures de gouvernail, chaînes d'haubans & cloux	50	
Plomb des écubiers, dalots & coutures	3	
Rouets de fonte aux seps de drisse & bossoirs	1	
Serrurerie	1	
Etoupe	6	
Goloron	1	
Peinture	2	
Cuisines, fours & potages . . .	14	
TOTAL du poids de la cocque . .	1640t.	750 liv.

Poids des apparaux.

	Tonneaux.
Mâture complette & celle de rechange	66
Poulies & pompes . . .	14
Rouets de fonte & de fer des Poulies .	1
Voiles & leurs étuits . . .	11
Cables, grêlins, orins & cordages pour les ancres	43
Cordages de la garniture . .	34
Rechange du Maître . . .	11
Ancres avec les fûts	17
Chaloupe & canots . . .	12
TOTAL du poids des apparaux . .	209 tonneaux.

Lest.

En fer	80
En pierres	120
TOTAL . . .	200

Munitions de guerre.

Canons de fer	163
Affuts garnis	35
Boulets ronds & ramés . . .	56
Poudre avec les barils . . .	22
Valets	6
Pinces, anspects, ustencilles & rechange du Me. Canonnier . . .	10
Fusils, mousquetons, haches d'armes, &c.	2
TOTAL des Munitions de guerre .	294

Poids des munitions de bouche.

	Tonneaux.
Vivres pour six mois à 700 hommes	378
Eau pour deux mois . . .	150
Futailles	46
Table du Capitaine . . .	30
TOTAL des munitions de bouche. .	604 tonneaux.

Poids des menus effets de l'armement & rechanges.

Effets du Chirurgien . . .	4	
Du Pilote	2	
De l'Aumonier		1000 liv.
Rechange du Charpentier . .	4	1000
Du Calfat	2	
TOTAL des menus effets, &c. . .	13 tonneaux.	

Poids de l'État-Major & équipage.

19 Officiers-Majors . . .	5
700 Hommes d'équipage . .	70
TOTAL de l'Etat-Major & équipage.	75 tonneaux.

Récapitulation des différens poids.

Cocque du vaisseau . . .	1640 ton.	750 l.
Apparaux	209	
Lest	200	
Munitions de guerre . . .	294	
Munitions de bouche . . .	604	
Menus effets de l'armement & rechanges	13	
État-Major & équipage . . .	75	
TOTAL des différens poids. . . .	3035 ton.	750 l.

Le

Le déplacement d'eau de ce vaiſſeau ayant été trouvé de 2910 tonneaux, & le poids de ſa cocque & de ſa charge ou de ſon armement devant être de 2908 tonneaux 1250 livres, il reſte un tonneau 750 livres de bénéfice que l'on mettra en outre des 200 tonneaux de leſt.

Ce n'eſt que par une pareille opération ou combinaiſon du déplacement d'eau du vaiſſeau, avec le poids de ſa cocque & des matières qui doivent compoſer ſon armement ou ſon arrimage, qu'un habile Conſtructeur s'aſſure d'avance, que ſon vaiſſeau tout armé ou chargé aura préciſément le tirant d'eau, & la hauteur de la batterie qu'il projette de lui donner.

L'exemple que je viens de donner pour un vaiſſeau de 74 canons, peut convenir aux vaiſſeaux & frégates du Roi de tous les rangs, aux vaiſſeaux de la Compagnie, & aux vaiſſeaux Marchands; il ſuffit de connoître le déplacement d'eau du vaiſſeau, & d'en déduire le poids de la cocque, pour connoître ſon port, ou le poids des matières qui doivent compoſer ſon chargement ou ſon arrimage.

Mais ce n'eſt pas aſſez pour le bon arrimage que le poids des matières ſoit préciſément égal au déplacement d'eau, il faut auſſi que ce poids, & ſur tout la diſtribution de ces matières, ſoient relatifs à la ſtabilité & à l'aſſiette du vaiſſeau.

On a vu, en comparant les différens poids qui entrent dans l'arrimage d'un vaiſſeau de 74 canons avec ſon déplacement, que la quantité de leſt a été portée à 200 tonneaux; mais cette quantité de leſt ſera-t-elle ſuffiſante pour que le vaiſſeau porte bien la voile? & ſera t-elle diſtribuée de façon que, lorſque le vaiſſeau ſera chargé, il ait l'aſſiette ou la différence du tirant d'eau projettée? C'eſt-là l'ouvrage du plus habile Conſtructeur qui joint la théorie à la pratique, & la condition la plus eſſentielle du bon arrimage, qui étant une ſuite des combinaiſons & des calculs de ce Conſtructeur, doit concourir à procurer à ſon vaiſſeau les qualités qu'il a projetté de lui donner.

Cet habile Conſtructeur, en combinant le plan de ſon vaiſſeau, a calculé ſes capacités ou ſon déplacement, & les a comparées aux poids qu'il doit porter. Il a fixé la quantité de leſt, relativement à ſes capacités. Il a examiné ſi, avec cette quantité, & telle eſpèce de leſt répandu le plus uniformément dans la calle, & le plus éloigné des extrémités, le centre de gravité commun de toutes les matières, ſeroit effectivement audeſſous du meta centre, & ſi ſon vaiſſeau auroit la ſtabilité néceſſaire; d'après ces calculs, il a déterminé le tirant d'eau de l'avant & de l'arrière, ou l'aſſiette de ſon vaiſſeau. Il a arrêté & travaillé ſon plan en conſéquence, trouvé les lignes d'eau les plus douces & les plus propres à diviſer le fluide; placé le centre de gravité par rapport à la longueur du vaiſſeau, ou le centre de rotation le plus avantageuſement, pour bien gouverner, & avoir les mouvemens doux, déterminé le point vélique. Enfin, il a fait ſur ce plan tous les calculs néceſſaires pour s'aſſurer au plus haut degré de toutes les bonnes qualités que peut réunir le meilleur vaiſſeau de ce rang & de cette eſpèce.

Quelqu'attention qu'ait pris cet habile Conſtructeur pour procurer à ce vaiſſeau ces qualités ſupérieures, il ne faut qu'un mauvais arrimage pour en faire un mauvais vaiſſeau : cent tonneaux de leſt de plus ou de moins, & différemment placés, vont tout gâter, & voici les inconvéniens qu'ils peuvent produire.

Je ſuppoſe qu'au lieu de 200 tonneaux de leſt, qui, joints aux poids des différentes parties du chargement, font un poids égal au déplacement d'eau du vaiſſeau, & ont été jugés néceſſaires à ſa ſtabilité, on en mette 300 tonneaux, il eſt clair que le vaiſſeau, au lieu de conſerver le tirant d'eau qu'il devoit avoir, enfoncera juſqu'à ce qu'il ait déplacé un volume d'eau égal à ce plus grand poids de 100 tonneaux, ce qui fait à-peu-près pour un pareil vaiſſeau une tranche ou excès de tirant d'eau d'environ ſix pouces; ainſi ce vaiſſeau qui devoit avoir cinq pieds de batterie, n'aura plus que quatre pieds ſix pouces, & ne ſera plus en état de ſe ſervir de ſa première batterie, pour peu que la mer ſoit groſſe, ce qui le mettroit dans le cas d'être pris par un vaiſſeau beaucoup plus petit.

Ce n'eſt pas là le ſeul inconvénient; ce plus grand tirant d'eau de ſix pouces ayant augmenté d'autant la colonne d'eau que ſa proüe doit refouler, ſa marche doit être d'autant plus retardée, que ſon poids a augmenté de 100 tonneaux. Il doit, par la même raiſon, trouver plus de difficulté à ſe mouvoir de côté, à virer de bord, & à obéir à ſon gouvernail dont la partie haute ne fait pas grand effet.

La ſtabilité de ce vaiſſeau ne devant exiger que 200 tonneaux de leſt, l'augmentation inutile de 100 tonneaux doit rendre ſes mouvemens trop durs & trop vifs, pour ne pas fatiguer le corps du vaiſſeau, & rompre ſa mâture.

Enfin, ſi, en mettant ces 100 tonneaux de leſt de plus, on les place au hazard, & de façon que le vaiſſeau n'enfonce pas parallèlement au prem er tirant d'eau projetté, il doit en réſulter un changement total dans la figure des lignes d'eau, dans la poſition du centre de gravité, de rotation, du meta-centre, du point vélique, ce n'eſt plus le même vaiſſeau, & toutes les combinaiſons du Conſtructeur deviennent inutiles.

Si, au lieu de mettre 100 tonneaux de leſt de plus, on mettoit 100 tonneaux de leſt de moins que celui trouvé néceſſaire, le vaiſſeau en ſeroit d'autant plus léger & plus flottant, & il s'en faudroit d'environ ſix pouces qu'il n'eût le tirant d'eau projetté; c'eſt-à dire, qu'au lieu d'avoir cinq pieds de batterie, il auroit cinq pieds & demi: mais alors cette plus grande hauteur de batterie & de tous les autres poids, élevant le centre de gravité, & augmentant la bricolle, & la quantité de lest n'étant pas suffisante à la stabilité du vaisseau, il ne porteroit pas la voile, & ne sçauroit naviguer avec sûreté.

La résistance du fluide sur la proüe seroit moins forte, à la vérité; mais celle du côté n'étant pas proportionnée à la hauteur des œuvres mortes, le vaisseau dériveroit beaucoup, & sentiroit moins son gouvernail qui enfonceroit moins dans l'eau; & si ce vaisseau, devenant plus flottant avec cette moindre quantité de lest, n'avoit pas conservé le parallelisme projetté, il pourroit, outre les inconvéniens de ne pas porter la voile & de dériver beaucoup, très-mal marcher, très-mal gouverner, & avoir des mouvemens de tangage fort durs.

Il pourroit se faire que le même vaisseau, fait & combiné pour porter six mois de vivres, ne fût armé que pour trois mois; ce qui feroit (la quantité d'eau restant la même) une différence ou un déficit de 200 tonneaux, dont le vaisseau deviendroit plus flottant, & pourroit produire les effets que je viens de citer, de ne pas porter la voile, de dériver beaucoup, &c.

Pour remédier à ce défaut de poids, & donner à ce vaisseau, qui n'auroit que trois mois de vivres, le même tirant d'eau, que s'il avoit six mois, il faudroit augmenter son lest d'une quantité égale aux poids des vivres supprimés; mais comme ce lest seroit d'une pesanteur spécifique plus grande, & beaucoup plus avantageusement placé que les vivres, son centre de gravité seroit beaucoup plus bas, augmenteroit la stabilité du vaisseau, & causeroit des mouvemens fort durs qui pourroient faire rompre la mâture.

Pour obvier à ces inconvéniens, il faudroit avoir attention de choisir ce nouveau lest le plus léger qu'il seroit possible, de supprimer même le lest de fer qu'on avoit jugé nécessaire à la stabilité du vaisseau, pour le remplacer en pierre, d'élever tout le lest autant qu'on pourroit sur les ailes, ou sur le bout des varangues, & de faire ensorte que cette plus grande quantité de lest ne fît pas trop baisser le centre de gravité commun du vaisseau par rapport au metà centre, ou n'augmentât pas trop la stabilité : c'est-là le moyen de faire un bon arrimage, & de tirer le meilleur parti d'un vaisseau, dont le plan a été bien fait & bien combiné.

Ceci doit s'appliquer aux vaisseaux de la Compagnie des Indes, comme aux vaisseaux Marchands ; un bon Constructeur, connoissant l'objet du Commerce, & la destination de chaque vaisseau, combine l'espèce & le poids des matières qu'il doit porter, & lui donne des capacités, un tirant d'eau & une figure relatives ; mais si on changeoit l'espèce & la pesanteur spécifique des marchandises ou effets que ce vaisseau devoit porter, il faudroit augmenter, diminuer, ou supprimer la quantité de lest, relativement à la différence du poids de ces marchandises.

Si on chargeoit, par exemple, un vaisseau de canons, de mortiers, de fer ou de plomb, dont la pesanteur spécifique seroit considérablement plus grande que celle des matières qu'il devoit porter, il ne faudroit pas remplir sa calle de ces canons, fer, &c ; parce que, leur pesanteur étant beaucoup plus forte que leur déplacement, le vaisseau couleroit bas sous ce chargement ; mais il faudroit en mettre seulement une quantité d'un poids égal au port du vaisseau, en tonneaux de poids, qu'il faut bien distinguer du tonneau d'arrimage. Le tonneau de poids est comme nous l'avons dit ci-dessus de 2000 livres, & sert pour exprimer le poids du déplacement d'eau du vaisseau, ou le poids de sa charge. Le tonneau d'arrimage est de 42 pieds cubes, & sert pour mesurer l'espace, ou ce que peut contenir la calle, l'entrepont, &c. du vaisseau.

Comme cette espèce de chargement en canons, &c. seroit beaucoup plus lourd, tiendroit moins d'espace dans la calle, & auroit son centre de gravité beaucoup plus bas que le chargement ordinaire, la stabilité du vaisseau en seroit considérablement augmentée, & sa cocque, ainsi que sa mâture seroient en grand danger par la vivacité des mouvemens du tangage & du roulis; c'est ce que l'expérience ne prouve que trop souvent pour de pareils arrimages faits au hazard.

On a jusqu'aujourd'hui regardé comme impossible ou très-difficile de faire un bon arrimage de cette espèce. Le sûr moyen d'y réussir est de répandre & d'élever tout ce chargement qui occupera peu d'espace dans la calle, de façon que son centre de gravité se trouve à-peu-près semblablement placé par rapport à la longueur du vaisseau, & à la même distance au-dessous du meta-centre, que devoit être le centre de gravité du chargement ordinaire.

On peut se servir de plusieurs moyens pour élever ce chargement ou ces canons audessus de la carlingue ou du fond de la calle; je préférerois un grillage de bois de sapin le plus léger, où je pratiquerois le plus de vide, aux autres matières, comme fagots, billettes, &c, qui se compriment & se broyent dans les mouvemens du vaisseau, & ne produisent plus leur effet.

CHAPITRE III.

Des inconvéniens qui doivent résulter des méthodes usitées dans les Ports pour lester & arrimer les Vaisseaux, & des remèdes qu'on pourroit y apporter.

ON a pensé, & beaucoup de personnes pensent encore aujourd'hui dans les ports qu'il n'y a aucune régle certaine pour bien arrimer les vaisseaux. Chacun veut arrimer à sa fantaisie ; en général, on veut une trop grande quantité de lest pour naviguer avec plus de sûreté, & mieux porter la voile.

L'un veut plus de lest de fer & le placer dessus, ou le plus près de la carlingue ; l'autre veut plus de lest de pierre, & pense que le lest de fer doit être plus élevé & placé sur l'extrémité des varangues ; qu'il doit être répandu dans la calle de telle ou telle façon ; que le vaisseau doit être mis sur ce lest à la différence qu'il avoit lorsqu'il a été mis à l'eau que cette même différence du tirant d'eau ou assiette doit lui être conservé, quand il est chargé.

Toutes ces différentes opinions prouvent la disette des principes, & que c'est le hazard qui fait faire presque tous les arrimages des differens ports ; doit-on s'étonner des inconvéniens qui en résultent?

On voit le même vaisseau dans une campagne avoir d'excellentes qualités, les mouvemens doux, une belle batterie, bien gouverner, bien marcher, bien porter la voile, & dans une autre campagne avoir toutes sortes de défauts.

On voit deux vaiſſeaux faits ſur le même plan, ſur le même gabarit ou ſur le même moule, partir enſemble, & avoir des qualités toutes différentes : doit-on s'en étonner, s'ils ſont différemment arrimés & leſtés, & s'ils n'ont pas le même tirant d'eau & la même aſſiette ?

On voit enfin des vaiſſeaux rompus, arqués ou déliés avant le tems, parce que pour leur donner une aſſiette ou une différence de tirant d'eau qu'ils ne devoient pas avoir, on a chargé l'une ou l'autre de leurs extrémités de leſt ou autres poids, ce qui a rendu les mouvemens de tangage trop durs, & fait rompre les parties ſurchargées.

Voilà les inconvéniens trop fréquens d'un arrimage fait au hazard, & ſuivant le caprice de quelqu'un qui ne connoît pas le vaiſſeau qu'il arrime, & qui ſe croit aſſez ſavant, & a trop d'amour-propre pour conſulter ou écouter les avis d'un habile Conſtructeur, qui gémit de voir ſon vaiſſeau mal arrimé, & toutes ces combinaiſons infructueuſes.

Je ne dois pas diſſimuler que c'eſt autant la faute des Conſtructeurs que des Marins ; ſi ces préjugés ſe ſont introduits dans les ports, on faiſoit autrefois, & l'on fait encore aujourd'hui, même dans les Ports du Roi, la plupart des vaiſſeaux au hazard, il n'eſt pas étonnant qu'on les arrime encore au hazard.

Le ſeul & plus ſûr remède, qu'on puiſſe apporter à ces inconvéniens, eſt de ne confier la conſtruction des vaiſſeaux qu'à des Conſtructeurs inſtruits, qui ſoient en état de combiner & calculer leurs plans, comme je l'ai expliqué dans le Chapitre précédent, & de charger ces mêmes Conſtructeurs de veiller dans les ports à l'arrimage de leurs vaiſſeaux, afin qu'ils ſoient faits relativement à leur projet, ou à la différente deſtination de ces mêmes vaiſſeaux.

Il conviendroit auſſi d'engager les Marins de ſe conformer aux inſtructions qui leur ſeroient données par les Conſtructeurs

Conſtructeurs des vaiſſeaux qu'ils commanderoient, pour leur conſerver, dans le cours de la navigation, autant que la conſommation des vivres, de l'eau, & des autres munitions peuvent le permettre, le tirant d'eau le plus parallèle à celui qu'ils avoient en partant, & le plus avantageux à leurs bonnes qualités, & à la douceur de leurs mouvemens.

On doit juger, par tout ce que je viens de dire, de quelle conſéquence il eſt, pour le bien du ſervice, d'avoir des Conſtructeurs inſtruits ; ce n'eſt que par leur moyen que le Roi & la Compagnie des Indes peuvent réuſſir à avoir d'excellens vaiſſeaux, & à les garantir des accidens qui peuvent provenir d'un mauvais arrimage, qui contribue autant à leurs mauvaiſes qualités, qu'à leur peu de durée.

Il ſeroit même à deſirer, pour le bien de l'État & du Commerce, que la conſtruction des vaiſſeaux Marchands fût confiée à leurs ſoins, & non à des Charpentiers ignorans, qui font au hazard les vaiſſeaux qui demandent le plus de combinaiſon, & dont l'arrimage ne peut qu'être auſſi fait au hazard. Ces vaiſſeaux Marchands n'ont ni marche, ni qualités, tirent beaucoup d'eau, ont beſoin de beaucoup de monde pour manœuvrer, & ſont ſûrement pris en tems de guerre, dès qu'ils ſont apperçus.

On pourroit faire des vaiſſeaux de même port, qui ne couteroient pas plus cher, navigueroient avec moins de monde, tireroient beaucoup moins d'eau, auroient d'excellentes qualités, & marcheroient comme des frégates. Ces vaiſſeaux, en tems de paix, procureroient, par de plus courtes traverſées, plus de profit aux Armateurs, & la ſanté aux équipages : en tems de guerre, ils approviſionneroient plus ſûrement les Colonies, feroient le Commerce avec moins de riſque, & conſerveroient à l'État, par leur marche ſupérieure, des Matelots, dont l'eſpèce eſt auſſi précieuſe que rare, parce qu'ils ſont preſque tous pris dans les mauvais vaiſſeaux Marchands & Corſaires mal conſtruits, & périſſent dans les priſons.

Ce que je dis ici, ſur la meilleure conſtruction des vaiſſeaux Marchands, n'eſt point une idée, ni un problême à réſoudre. Il eſt des Conſtructeurs qui en ont démontré la poſſibilité & la vérité, tant pour les vaiſſeaux de la Compagnie, que pour les fluttes & bâtimens de tranſport, qu'ils ont conſtruits pour des particuliers auxquels ils ont ſçu procurer une marche ſupérieure avec les qualités de porter beaucoup, de tirer peu d'eau, & de naviguer avec peu de monde.

L'on doit ſentir le prix de pareils Conſtructeurs auſſi utiles que ſavans, pour porter à ce haut degré de perfection un art auſſi difficile que néceſſaire, & l'on ne devroit rien épargner pour les encourager, & en augmenter le petit nombre, en diſtinguant leur état, & rétabliſſant les Écoles qui ont formé d'auſſi excellens ſujets.

Il peut arriver néanmoins qu'on ait à arrimer un vaiſſeau fait au hazard, & dont on ne connoît ni le plan, ni la ſtabilité, ni l'aſſiette ; il faut alors que l'intelligence des Conſtructeurs & Officiers qui doivent arrimer ce vaiſſeau, ſupplée à l'ignorance de celui qui l'a fait. On peut avoir à-peu-près la figure de la carène, en la meſurant à différentes hauteurs & largeurs, déterminer en conſéquence la quantité de leſt, le chargement, & le tirant d'eau que l'on eſtime le plus avantageux, mais ce n'eſt que par les obſervations & les expériences que l'on doit faire dans le cours de la navigation, que l'on peut porter cet arrimage à ſon point de perfection.

Si on s'apperçoit à la premiere campagne que ce vaiſſeau ne porte pas bien la voile, il faudra augmenter la quantité de leſt, ou bien lui donner un leſt d'une peſanteur ſpécifique plus forte ; s'il a des mouvemens trop durs, il faudra au contraire diminuer ſon leſt, ou ſupprimer celui de fer pour le remplacer en pierre ; s'il ne gouverne pas bien, il faudra changer ſon aſſiette, en diſtribuant autrement ſon leſt, ou ſon chargement. Enfin, il faudra ſe ſervir, pour corriger l'arrimage de ce vaiſſeau, des principes établis dans ce Mémoire, & des défauts qu'on aura reconnus pendant le cours de ſa navigation, qui peuvent provenir, & de la mauvaiſe conſtruction du vaiſſeau, & de ce qu'on n'avoit pas d'abord trouvé l'aſſiette qui lui convenoit.

CONCLUSION.

Les différentes Méthodes que j'ai données, pour arrimer dans différens cas, & avec des chargemens différens, les vaiſſeaux du Roi, de la Compagnie des Indes, & les vaiſſeaux Marchands, ſont applicables, & peuvent convenir aux vaiſſeaux de toutes ſortes de grandeurs, & de différentes eſpèces

Elles m'ont paru ſuffiſantes pour faire connoître le poids & la diſtribution des matières qu'on y emploie, l'effet qu'elles produiſent ſur le ſillage, ſur les lignes d'eau, ſur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & ſur les autres qualités d'un vaiſſeau, les inconvéniens dont les méthodes uſitées dans les ports ſont ſuſceptibles, & les remèdes qu'on peut y apporter.

L on peut en conclure que la ſeule & bonne façon de bien arrimer, & leſter un vaiſſeau, eſt de connoître ſon plan, ſes capacités, ſa ſtabilité & ſon aſſiette, de les comparer aux poids qu'il doit porter, & déterminer en conſéquence la diſtribution de ſa charge, & la quantité, l'eſpèce & la poſition du leſt qu'on doit lui donner, afin que chaque choſe étant à ſa place, le vaiſſeau ait le tirant d'eau, la hauteur de la batterie, & toutes les autres qualités projettées; c'eſt-là l'ouvrage du plus habile Conſtructeur: Perſonne ne peut mieux que lui connoître ſon vaiſſeau, & l'arrimage qui lui convient.

Hoc opus hic labor eſt.

Je pourrois donner ici les méthodes de calculer les capacités, la ſtabilité & l'aſſiette du vaiſſeau; mais je ne ferois que répéter ce qu'ont écrit à ce ſujet M Bouguer dans ſon Traité du Navire, & M. Duhamel dans ſon Traité de Conſtruction.

L'on trouvera dans ces deux excellens Ouvrages, non-ſeulement ces méthodes; mais encore tous les calculs les plus difficiles que doit ſavoir le meilleur Conſtructeur, & qui ont ſervi de baſe à ce Mémoire; je ſerai très flatté s'il peut être utile aux Marins, & remplir les vues de l'Académie.

FIN.

DE L'ARRIMAGE
DU NAVIRE.

PIÉCE qui a remporté le prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1766.

Par M. BOURDÉ DE VILLEHUET, Officier des vaisseaux de la Compagnie des Indes, à Saint-Malo.

DE L'ARRIMAGE
DU NAVIRE.

Les qualités du Navire ſe feront connoître par un bon arrimage.

L'ARRIMAGE eſt l'art de diſpoſer & d'arranger tout ce qui entre dans un vaiſſeau, le plus ſolidement & le plus avantageuſement poſſible, pour que tout ſe conſerve ſans avarie, en même tems que l'on conſervera auſſi, par l'arrangement des effets, les qualités du navire.

DÉFINITIONS.

Le rang ſe forme par des futailles, ballots ou caiſſes que l'on arrange à côté les uns des autres ſur la même ligne, comme AB, d'un travers du vaiſſeau à l'autre. Figure I.

L'antenne eſt compoſée de rangs au-deſſus les uns des autres & vus par le bout verticalement comme ABGH.

Figure II. Le plan eſt compoſé de rangs bout à bout en vue d'oiſeau, comme CDEF.

Figure I. Le premier rang eſt le principe du premier plan qui eſt arrimé ſur un petit grenier de bois de billetes que l'on fait au-deſſus du leſt IK, quand il eſt en fer ou groſſes pierres, afin d'empêcher les futailles de porter en plein & de ſe crever au mouvement, ou par leur propre poids.

Il ſuit de ce que nous venons d'expliquer, qu'un arrimage entier eſt compoſé de plans, ſi on en fait autant de tranches horizontales qu'il y a de rangs dans l'antenne.

Il eſt compoſé d'antennes, ſi on en fait autant de tranches verticales qu'il y a de rangs dans le plan.

La premiere figure repréſente une antenne entière d'un vaiſſeau de guerre, formée du leſt, du grenier, des trois rangs de futailles arrimées & garnies de bois à brûler, ſoutenues de leurs pailles d'arrimage, & appuyées de leurs coins ; le tout étant baroté de bois à feu.

La ſeconde figure repréſente le troiſième plan d'un vaiſſeau de guerre découvert ; on y voit le plan de la calle à l'eau CDEF garni de bois ainſi que les futailles en bréton EF, la calle aux vivres de l'équipage EFLM, avec des forains remplis de barillages & de piéces en bréton LM.

On voit à la ſuite la calle du Capitaine LMOP arrimée & les ſoutes à pain avec leurs courcives X.

On voit en avant la foſſe au lions, & celle aux cables, greſlins, auſſières, & cordages de rechange de toute eſpèce.

Deſcription de l'uſage de leſter & arrimer un Vaiſſeau de guerre.

Les vaiſſeaux de guerre n'ont ordinairement que du fer pour leſt, ſoit en gueuſes, vieux canons, morceaux d'ancres, ou autres.

On donne aux vaiſſeaux plus ou moins de leſt, quoique de même grandeur; ſouvent un vaiſſeau plus petit demande plus de leſt qu'un plus grand; cela dépend de leurs formes. Le vaiſſeau fin en demande plus que le vaiſſeau qui eſt à plattes varangues, parce que ſon centre de gravité eſt plus haut, & ils peuvent cependant avoir la même propriété de bien diviſer le fluide.

J'ai été ſur le Comte de Provence, vaiſſeau de 74 canons, qui par ſes qualités ſupérieures, fera toujours honneur à ſon conſtructeur: il avoit 160 pieds de quille, 176 de longueur, abſolue & 43 pieds de bau de dehors en dehors les membres; ſes maitreſſes varangues étoient plattes, c'eſt-à-dire ſans acculement; ſon leſt n'étoit que de 90 à 100 tonneaux en fer, & il étoit en tout temps fin voilier, même après être rompu & caſſé; il rouloit & tanguoit peu; le ſeul défaut de ce vaiſſeau unique étoit ſa charpente, défaut dans lequel tombent aujourd'hui tous les conſtructeurs, défaut en un mot qui ruinera l'état maritime en France, ſi on n'y remédie pas: le vaiſſeau le Comte de Provence marchoit comme les meilleures frégates. J'ai paſſé enſuite ſur le vaiſſeau le Fortuné de 64 canons qui pouvoit paſſer pour une grande frégate, par ſes qualités, ſa figure & ſa forme; ſa quille étoit de 146 pieds, ſa longueur abſolue n'alloit pas au-delà de 156, & ſon bau de dehors en dehors les membres étoit de 40 pieds; ſes maitreſſes varangues étoient fort acculées, & ſon leſt étoit de 120 tonneaux en fer & de 30 tonneaux en petits cailloux, dans leſquels on engravoit le premier plan dans les calles à l'eau & aux vivres; il étoit fin voilier, mais le Comte de Provence avoit au moins $\frac{1}{6}$ de marche de plus. Ces vaiſſeaux armés l'un à 4 pieds 8 pouces de batteries en belle, & l'autre à 6 pieds, & 5 pieds 10 pouces, portoient pour ſix mois de vivres à 600 & 700 hommes, ce qui eſt toujours aiſé à approximer en tonneaux, parce que les

Ordonnances fixent ce qu'il faut pour chaque homme ; ainsi que la quantité des autres effets d'armement.

On fait un plan du lest sur le vaigrage du fond de la grande calle, & calle aux vivres ; on en met aussi en avant sous la plateforme de la fosse aux cables, en arrière sous celle des soutes à poudre, de manière que le vaisseau sur son lest soit au tirant d'eau d'arrière & d'avant désigné par le Constructeur ; ensuite travaillant dans la calle à l'eau (ou dans toutes les calles en même temps) on fait un lit de bois de billetes, & l'on arrime par-dessus le premier plan d'eau, en bottes de quatre, employant des pailles d'arrimage (2), que l'on met en travers sous les bouts des piéces, pour les élever, afin d'empêcher le ventre des futailles de porter avec tout leur poids sur les billetes qui couvrent le lest ; & lorsque la premiere piéce est bien parallèle au plan du lest sur ses pailles, on la coinse avec quatre coins, deux de chaque bord, pour l'assujettir & lui ôter tout mouvement dans les plus grands tangages ou roulis du vaisseau ; cette piéce une fois placée au milieu de son rang, répondant sur la quille, & joignant exactement la cloison de la fosse aux cables, on continue d'arrimer les autres piéces des deux bords pour achever ce rang, en allant chercher les côtés du vaisseau de travers en travers ; quand il est fini, on remplit le plus exactemement possible l'entre-deux des piéces par dessous de bois de billetes, ainsi que les vides qui se trouvent quelquefois à bord ; ce rang ainsi achevé, on en recomence au milieu un second parallèle au premier, que l'on conduit de la même manière, avec les mêmes précautions & la même exactitude, faisant toujours ensorte qu'une

(2) On appelle *pailles d'arrimage* des buches de 3 à 4 pieds de long & de 5 à 6 pouces de diamètre, que l'on met en travers sous les bouts des futailles que l'on arrime.

piéce (n'importe dans quel rang elle ſe trouve), ne ſoit jamais plus haute que les autres; car il faut abſolument que tout ce qui compoſe le premier plan d'un arrimage ſoit de niveau, afin qu'il ne ſe trouve point d'inégalités dans le ſecond, qui doit être arrimé par-deſſus le premier avec le même ſoin & la même régularité; ſoit qu'il doive être compoſé de piéçes de quatre ou de trois, ou mélé de ces deux eſpèces de futailles, deſſous leſquelles on met le bois néceſſaire pour remplir les vides qui ſe trouvent entre les piéces du premier plan. On met deſſous tout ce ſecond plan des pailles, qui doivent porter en plein ſur les billettes de garniture du premier, & ſur les bottes de deſſous: enſuite on aſſujettit les piéces que l'on arrime avec des coins, & de la même manière qu'au premier plan, ayant bien attention que tous les jables des futailles qui ſont bout-à-bout, ſe joignent bien exactement, rempliſſant toujours de bois les vides (ou interſtices) qu'elles laiſſent entr'elles par les bouges; le ſecond plan achevé, on procède à l'arrimage du troiſième, qui eſt ordinairement compoſé de piéces de deux, & quelquefois mêlê de piéces de trois; dans les uns & les autres de ces plans on met dans les forains des bariques, afin de ménager l'eſpace & de n'en point perdre, ſur-tout quand il s'agit d'entreprendre de longues traverſées, dans leſquelles on n'a jamais trop d'eau; on n'épargne pas non-plus le bois à brûler, crainte d'en manquer, & l'on ne manque jamais de baroter avec ce dernier.

Si, en arrière de chaque plan, il ſe trouve trop peu d'eſpace, quand il eſt fini pour arrimer de long quelques piéces, on tâche de les placer en bréton; mais on ne pratique cette manière que quand on ne peut pas faire autrement, & pour ménager l'eſpace ſans le perdre, ſi on ne peut pas mettre de futailles d'une façon ou de l'autre, on remplit de bois, & tout l'eſpace eſt employé.

Dans la calle aux vivres, on diſpoſe l'arrimage comme nous venons de le voir, obſervant de mettre dans le fond les futailles les plus conſidérables & les plus peſantes en liqueurs ou viande ſalée, plaçant au premier plan ce qui doit être conſommé le dernier ou en retour; au ſecond ce dont on a beſoin quelque tems après être en mer, ce qui eſt ordinairement contremarqué, tant pour les boiſſons, que pour les viandes, beurres, graiſſes, huiles & légumes, ou farines; dans le troiſième plan & dans les vides qui ſe trouvent au-deſſus, on met tout ce qui ſera d'abord conſommé en partant, diſpoſant les choſes de manière qu'à meſure qu'on les conſomme, on puiſſe découvrir celles dont on aura beſoin tout-de-ſuite après.

Quoique la calle du Capitaine ſoit fort petite, en comparaiſon des autres, on l'arrime cependant de la même manière que celle aux vivres de l'équipage & avec les mêmes précautions.

Les ſoutes à poudre ſont remplies de barrils qui contiennent chacun cent ou deux cens livres de poudre de guerre, & comme ils ſont fort maniables, on les arrime très-aiſément les uns ſur les autres par plans, & de manière à n'avoir point de jouement; on remplit les coffres à poudre de gargouſſes pleines, & l'on place dans les différens endroits ou forains des ſoutes les méches & autres uſtenſiles ſuſceptibles d'embrâſement, & qui ne ſont jamais d'un grand poids.

En avant de la calle à l'eau eſt la foſſe aux cables, on les y arrime, en les rouant ou cueillant de façon qu'il y en ait toujours au moins trois de parés à entalinguer: les uns mettent la grande touée (3) ſous le panneau; d'autres la placent tout-à-fait ſur l'avant de la foſſe aux cables; mais

(3) La *grande touée* eſt compoſée de deux cables de même groſſeur, & quelquefois de trois épicés bout-à-bout. J'ai vu un vaiſſeau de guerre anglois qui avoit une touée de 7 cables: on s'en ſert pour mouiller dans un grand fond, ou pour tenir contre un fort coup de vent.

mais de quelque façon que ce ſoit, on tient les autres cables tribord & bas-bord vis-à vis l'un de l'autre, plaçant les greſlins & auſières dans les cables ou entr'eux, ainſi que le gros cordage de rechange, laiſſant toujours l'eſpace néceſſaire pour paſſer librement les poudres qui ſont en gargouſſes ſous la foſſe aux lions dans des coffres d'attache doublés de plomb, dont les ouvertures ſe regardent, étant ſéparés par une petite courcive. (Ces coffres doivent contenir deux mille coups de canon). Dans la foſſe aux lions ſe place tout ce qui concerne le rechange du Maître-d'équipage, en menus cordages, comme le petit filain, carenthunier, luſin, merlin, ligne d'amarrage, bitord, fil de caret, ſuif, huile à brûler, goudron, &c.

Depuis la foſſe au lions en arrière, juſqu'aux ſoutes à poudre & à pain qui ſont au-deſſus les unes des autres, eſt compris le faux-pont, porté par les faux-baux, au-deſſous deſquels eſt fait l'arrimage que nous avons détaillé.

Au-deſſus de la foſſe aux cables, entre les cloiſons du théâtre & de la foſſe aux lions, eſt compris un eſpace faiſant partie du faux-pont, dans lequel on trouve des ſoutes à grain, la ſoute du Voilier de travers en travers ſur l'avant, celles du Charpentier, du Tonnelier & du calfat; les unes & les autres contiennent tout ce qui eſt propre à ces différens états pour le voyage, à l'exception du brai, goudron & ſuif, que l'on place dans les forains des autres endroits, parce qu'ils ſont d'un trop gros volume pour entrer dans les petites ſoutes, autour deſquelles règnent les galeries du vaiſſeau. (Galerie, dans ce ſens, ſe dit d'un eſpace libre autour du vaiſſeau par-deſſus le faux-pont, pour boucher en dedans les coups de canon que l'on peut recevoir à l'eau pendant un combat : les galeries ont ordinairement trois pieds de large).

Le théâtre ou poſte du Chirurgien eſt compris entre les cloiſons de la cambuſe (4) & de la foſſe aux cables,

(4) *Cambuſe*, lieu où l'on diſtribue, à tous les repas, les vivres de l'Équipage.

dans tout l'espace qui est au-dessus de la grande calle ou calle à l'eau ; il doit être absolument vide de tout ce qui pourroit gêner les malades ou blessés, & contenir ce qui regarde les médicamens & les choses propres aux pansemens.

En arrière du théâtre, entre les cloisons des soutes à pain & du théâtre, au dessus des calles aux vivres, est la cambuse autour de laquelle il y a plusieurs aménagemens, pour le Capitaine, en soutes qui contiennent différentes choses propres à l'avitaillement de table.

En arrière de tout cela sont les soutes à pain, & une petite soute de rechange tout-à-fait sur l'arrière pour les ustensiles du Canonier ; entre les soutes à pain il y a une petite courcive pour le passage des poudres qui vont se distribuer pendant le combat au panneau de la cambuse.

Il y a quelquefois des changemens dans la distribution de la calle d'un vaisseau de guerre ; mais comme il n'est pas possible d'entrer dans le détail de ces sortes de choses qui peuvent être variées à l'infini, selon les différentes circonstances & les différentes idées, je m'en tiendrai à ce que je viens d'expliquer, comme à ce qu'il y a de plus usité & de meilleur, à ce que je crois.

OBSERVATION.

Quand au lieu d'avoir tout en lest de fer, on a du cailloutage, & que l'on craint qu'il monte trop haut, ou que le vaisseau soit trop rude dans ses roulis, on engrave le premier plan d'eau parmi les cailloux qui doivent être les plus petits possibles, afin que le lest ne soit pas trop mat, c'est-à-dire, que le centre de gravité du lest ne soit pas trop au-dessous de celui du vaisseau chargé & prêt à prendre la mer, parce qu'il le rappelleroit trop vîte, & donneroit trop de vivacité au roulis.

Description de l'usage de lester & arrimer un vaisseau de charge.

Les vaisseaux qui chargent en marchandises ou en flutes, prennent tant d'effets différens dans leurs cargaisons, qu'il est impossible d'entrer dans le détail de ces sortes d'arrimages: d'ailleurs chaque port & chaque navigation ont leurs différentes manières adoptées; ainsi nous ne pouvons que supposer une cargaison compliquée, & qui ne ressemblera peut-être à aucune de celles qui composent le chargement des vaisseaux que l'État employe à son commerce; mais comme il faut partir d'après quelque chose, je me propose un vaisseau qui doit charger en plein de fer & plomb, de canons & d'ancres, de vin ou eau-de-vie, farines, viandes, toiles & ballots de différentes marchandises séches, &c.

Les canons & ancres sont ce qu'il y a de plus embarrassant dans un arrimage; mais on en tire parti, en arrimant d'abord pour lest les canons ou mortiers que l'on met sur un petit lit de billettes; on place les canons de long, arrimant tout d'un temps entre les piéces les verges des ancres, mettant des semelles dessous les angles des becs qui doivent être arrimés à plat, de sorte qu'il ne paroisse rien au-dessus des canons, & de façon que le vaisseau soit à son tirant d'eau tel que le Constructeur l'aura donné pour son lest; on égalise ensuite par-tout avec du bois, des boulets, plomb, bombes ou fer vierge: ce grenier est haut, mais on ne fait pas autrement. Si le vaisseau est fort de côté & bien construit, il roule vivement & compromet sa mâture, aulieu que si on avoit élevé le lest de fer sur un grenier ou fardage de bois à trois pieds de haut, on auroit modéré ce mouvement.

Ce premier plan étant fait, on arrime dessus le vin & l'eau-de-vie de cargaison avec toutes les précautions possibles, & de la même manière que nous l'avons déja vu dans l'arrimage du vaisseau de guerre, mettant dans les forains des quarts de viande ou autres petits barillages, de façon qu'ils ne soient pas trop pressés par les autres marchandises du dessus; ensuite, lorsqu'on a fini d'arrimer bien solidement les marchandises les plus pesantes, on arrime les viandes salées sur les boissons, & par-dessus on met les farines, en appuyant bien le tout avec le bois d'arrimage : on conserve ordinairement la partie de l'arrière de la calle pour les marchandises en ballots & les toiles, en un mot pour tout ce qui doit être conservé le plus séchement (le gaillard d'arrière faisant un troisième pont, met à l'abri de l'eau ces sortes d'effets); on ne perd point d'espace dans la calle, & l'on vient peu-à peu à barroter par-tout au plein des écoutilles, depuis la calle à l'eau jusqu'à la cloison des soutes à poudre & à pain.

La calle à l'eau est comprise depuis l'arrière du panneau d'avant jusqu'à l'étrave, & est arrimée par rangs, antennes & plans, de la même manière que nous l'avons déja dit ci-devant, de sorte que la calle se trouve pleine en total de l'avant à l'arrière.

On met les cables entre pont & tout le rechange, mettant le menu cordage dans les endroits qui se trouvent débarrassés dans des soutes que l'on pratique en avant auprès des cambuses qui sont aussi entre pont, & que je trouverois bien mieux placées au milieu, parce qu'elles ne chargeroient pas l'extrémité du vaisseau, & qu'elles le fatigueroient moins.

Les soutes à poudre sont, comme dans les autres vaisseaux, sous celles à pain; & les boulets, qui ne vont point dans les parcs, se mettent dans l'archi-pompe.

OBSERVATIONS.

Si un vaisseau est obligé de charger en fer ou plomb, on fait d'abord un grenier en bois de billettes haut de trois pieds environ, & on arrime dessus une bonne quantité de fer, en laissant dans le milieu un vide que l'on remplit à mesure avec du bois, afin de balancer le poids des deux côtés de l'axe du mouvement du roulis, en mêlant dans l'arrimage beaucoup de bois parmi le fer, pour le faire monter plus haut, & le rendre moins mat.

D'autres arriment différemment, en faisant d'abord un lit de bois, ensuite un lit de plomb, sur le plomb, un second lit de bois; par-dessus, un second plan de plomb, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le vaisseau soit entièrement chargé, élevant le bois plus ou moins.

Si, au lieu de fer, le vaisseau charge de laine, il prend son lest en fer ou plomb, afin de conserver plus d'espace que s'il prenoit des pierres, qui sont d'un bien plus grand volume, & on le dispose de façon à ne pas rendre le vaisseau trop dur dans ses mouvemens: ensuite on arrime la laine en balles, en se servant de presses, pour ménager l'espace. Les Provençaux, qui font le commerce dans le Levant, appellent cette façon d'arrimer *estiver à trau.*

Les vaisseaux de la Compagnie des Indes, qui chargent richement dans les endroits où son commerce est établi, à Mahé, en poivre; à Pondicheri, en toiles de coton, mousselines de la côte Coromandel, chittes, mouchoirs de toutes espèces & caffé moka; à Bengale, en mousselines fines & poivres; à la Chine, en porcelaines, thé & soieries; aux Isles de France & de Bourbon, en caffé, prennent beaucoup plus de précautions.

On commence par faire le plan du lest, & d'un grenier élevé en tout de deux pieds à deux pieds & demi, afin de mettre les marchandises au-dessus de l'eau qui se range toujours au fond: ensuite on met une garniture d'un pied environ tout autour de la calle en rotin, bois de sapan ou autres espèces de bois de cargaison, selon l'endroit où l'on charge, & par-dessus le tout un chemise de toile à voile que l'on cloue, à mesure que l'on monte avec l'arrimage: cette garniture à bord est pour empêcher que l'eau qui s'écoule le long des côtés du navire, ne touche aux marchandises: quand tout cela est fait, on arrime les caisses de thé à la Chine (la porcelaine en bonnes caisses étant enterrée dans le lest dont elle fait partie), par rangs & par plans, en commençant par l'avant à joindre la cloison de la calle à l'eau; on force à coups de masse, que l'on frappe sur des planches qui sont mises pour l'instant par-dessus les caisses, pour les mettre de niveau les unes avec les autres, de façon qu'il n'y ait pas un coup de ligne de différence: on met aussi des planches devant les bouts des caisses, afin de les faire entrer de force dans les rangs: on fait ensuite entrer des quarts de caisse ou demi-caisses dans les forains, & l'on ne perd pas un pouce d'espace, desorte qu'il faut ordinairement rompre une caisse de chaque rang, pour défaire cet arrimage quand on décharge le vaisseau.

Si c'est à Pondicheri ou Bengale que l'on charge en ballots, on prend les mêmes précautions, quant à la garniture autour de la calle, & au grenier du lest; mais l'on engrave tous les plans de balles avec du poivre (5) en grenier, desorte que le moindre petit vuide se remplit, en même temps que tout est préservé d'insectes.

On arrime les balles de caffé comme les ballots; mais l'on n'y met point de poivre, à cause du goût: c'est le chargement le plus aisé à faire, parce que tout est égal, & les vides ne s'apperçoivent pas.

---

(5) Cet aarrimage est terrible pour la santé de ceux qui le font, par la poussière qui en sort, & qui affecte la poitrine.

Lorſqu'on charge en plein avec du grain de même eſpèce, on partage la calle d'un bout à l'autre par le milieu, avec une forte cloiſon du haut en bas bien étançonnée; enſuite on arrime le leſt, comme nous l'avons dit, obſervant de ne pas tant leſter le vaiſſeau, que s'il prenoit une autre cargaiſon; car celle-ci pèſe ordinairement plus que les autres, puiſqu'elle laiſſe moins de vide; & lorſque cela eſt fait, on arrange un grenier de bois, & l'on garnit à bord; enſuite on met une chemiſe par toute la calle, & l'on remplit de grain juſqu'à charger le vaiſſeau; il reſte ordinairement un peu de vide, la cloiſon du milieu ne ſe pratique que pour obvier au riſque qu'une forte bande feroit courir au vaiſſeau, car alors elle empêche le grain du vent de tomber ſous le vent. Si on charge de differentes eſpèces de grains, on fait des parquets pour les ſéparer, & on garnit de toiles.

Défauts des arrimages uſités, & moyens d'y remédier, autant qu'il me paroît poſſible de le faire.

Dans les vaiſſeaux de guerre, les aménagemens de la calle ſont autant bien diſtribués qu'ils puiſſent l'être pour l'objet auquel on les deſtine; mais l'inconvénient que je trouve dans leurs arrimages, vient de ce qu'on ne peut pas tranſporter, à la mer, les parties de la cargaiſon de l'avant à l'arrière, pour remettre avec facilité le vaiſſeau dans ſon aſſiette, quand il l'a perdue, en devenant trop léger dans l'une ou l'autre de ſes extrémités, par la conſommation des vivres ou du bois, ou par celle de ſes munitions de guerre; elles peuvent aller à trente-cinq tonneaux dans une action de quatre ou cinq heures, ſur un vaiſſeau de ſoixante-quatorze canons, comme je l ai vu arriver (6); & quand auſſi il ſe trouve trop léger en total, ce qui le met dans le cas de porter peu de voiles & de perdre ſur toutes ſes autres qualités, de bien gouverner, bien marcher, & ne point fatiguer ſa mâture.

Les mêmes inconvéniens ne ſont jamais auſſi conſidérables ſur les vaiſſeaux marchands, parce qu'à proportion de leurs grandeurs, les conſommations ne ſont pas auſſi fortes, deſorte qu'ils ſont toujours aſſez callés; mais leur aſſiette peut également ſe troubler & ſe perdre, s'ils légiſſent plus par une des extrémités que par l'autre.

Un autre inconvénient, qui eſt commun aux vaiſſeaux de guerre comme aux vaiſſeaux marchands, c'eſt que l'on étend le leſt ſur l'avant & l'arrière du centre de gravité du vaiſſeau, de manière que, par rapport au leſt ſeulement, on rend les extrémités du navire preſqu'auſſi peſantes que le milieu, quoiqu'elles ne déplacent pas autant d'eau à beaucoup près; & cette méthode ne contribue pas peu à faire arquer les vaiſſeaux, & à leur rendre le mouvement du tangage fort dur.

On peut aiſément remédier à ces accidens ſur les vaiſſeaux de guerre, en embarquant une certaine quantité de bariques en fagot, afin de pouvoir les monter pour les remplir d'eau de mer, lorſqu'on verra le vaiſſeau trop léger, & qu'il y aura de l'eſpace dans les calles par les conſommations de bois & autres effets, ayant attention de remplir auſſi toutes les autres futailles à meſure qu'elles ſe vident d'eau douce, de viandes ſalées, vin & eau-de-vie; ainſi l'on pourra mettre dans la place du bois à feu qui ſe conſomme, au moins vingt-cinq à trente tonneaux

(6) En 1747, le vaiſſeau du Roi l'Invincible, défendu par les Officiers de la Compagnie des Indes, le 14 Mai, tira 2270 coups de canon & 10000 coups de de fuſil, ce qui fait plus de 40 tonneaux de munitions de guerre, ſans compter plus de 150 hommes, qui furent tués & jettés à la mer pendant l'action qui dura quatre heures. Je cave au plus bas dans ces approximations, qui exactement iroient en total à plus de 52 tonneaux.

d'eau

d'eau de mer, ſans ſe gêner, ſur un vaiſſeau de 74 canons; ce qu'il ſera encore aiſé de paſſer de l'avant dans la foſſe aux cables, ou de l'arrière dans la calle aux vivres, puiſque ce ſont de petites futailles aiſées à manier.

Pour plus de commodité & de certitude, je propoſe un moyen de plus, pour remettre le vaiſſeau en tonture, & en aſſiette à ſa ligne d'eau favorable, quand il l'aura perdue à la mer. Je voudrois avoir dans le faux-pont de chaque côté de l'archi-pompe ou par-deſſus les piéces du dernier plan de la calle, (n'importe où, pourvu que ce ſoit au milieu du vaiſſeau), dix tonneaux de plomb en ſaumons de ſoixante livres, toujours parés au beſoin pour tranſporter de l'avant à l'arrière, ſelon qu'on le jugera néceſſaire, pour eſſayer ſa marche avec d'autres vaiſſeaux, obſervant bien dans ces opérations, la quantité que l'on en tranſportera, avec la diſtance du changement en pieds, & le profit ou perte que l'on fera dans la vîteſſe.

On doit, avant de partir du port, & lorſque le vaiſſeau eſt armé, prêt à prendre la mer, tranſporter les vingt tonneaux de plomb en avant du milieu où on les a placés de dix pieds & voir de combien dix & vingt tonneaux feront caller le vaiſſeau ſur nez, enſuite les porter à dix autres pieds plus loin, & faire la même obſervation, deſorte que continuant la même expérience de dix pieds en dix pieds juſqu'en avant, & prenant toujours note des changemens de la ligne d'eau, on ſera enſuite dans le cas de s'en ſervir à la mer avec connoiſſance; l'on ſaura toujours de combien on fera plonger l'avant de plus qu'il n'étoit, & l'on verra aiſément l'avantage que cela donnera dans la marche & le gouvernail, ou la perte que l'on y fera. L'on fera les mêmes opérations pour la partie de l'arrière & les mêmes obſervations à la mer: cela eſt fort aiſé à pratiquer, il ne faut que la bonne volonté; mais comme les vaiſſeaux de guerre ont leur centre de gravité très-haut, à cauſe de leur artillerie, ces opérations ſe pratiqueront à la mer, en faiſant paſſer le plomb dans la foſſe aux cables & dans celle aux lions, ſur le faux-pont du théatre, dans la cambuſe & dans la ſoute de rechange du Canonier.

Ces obſervations ſont d'une très-grande conſéquence pour les circonſtances preſſantes de chaſſe; l'on ne peut trop y faire attention dans les temps tranquilles, afin d'en tirer parti dans les événemens critiques.

Dans les cas de chaſſe forcée, où le vaiſſeau donneroit trop de bande, en portant (ſelon la routine) trop de voiles, on pourra faire paſſer dans le faux pont, du côté du vent, les dix tonneaux de plomb qui ſeroient ſous le vent, afin de faire équilibre un peu plus avec l'effort des voiles, & tenir le vaiſſeau gouvernant & droit dans ſes lignes d'eau les plus avantageuſes à ſa marche, ſe tenant d'ailleurs toujours prêt à remettre vivement le même poids à ſa place.

Dans les vaiſſeaux marchands chargés en plein, on diſtribuera le long de l'entrepont, au milieu de la longueur, une dixaine de tonneaux de ce même plomb, pour s'en ſervir dans les mêmes circonſtances, obſervant de le parqueter, afin d'obvier aux accidens d'une trop forte bande, & l'empêcher de tomber tout à fait ſous le vent.

Obſervation pour les vaiſſeaux garde-côtes ou corſaires.

Les vaiſſeaux de guerre, frégates ou corſaires qui vont en croiſière avec trois ou quatre mois de vivres, ont plus d'eſpace que les autres, puiſqu'ils ne ſont jamais boudés; ainſi ils ont plus d'aiſance à ſe tenir en aſſiette, & à la chercher; ils ne doivent donc négliger aucun des moyens que nous propoſons pour la trouver; ils doivent même ſe ſervir de tous ceux que leur ſagacité pourra leur ſuggérer, afin d'acquerir cette première qualité du vaiſſeau de guerre.

Conclusion du meilleur lestage & arrimage des vaisseaux pour les grands avantages à la mer.

Quand on fait le chargement d'un navire, il faut être persuadé que la vivacité des mouvemens du tangage & du roulis dépendent non-seulement de sa forme, mais encore plus de la distribution plus ou moins avantageuse des parties pesantes de sa cargaison.

On doit d'abord chercher à modérer le tangage, parce que c'est ce qui retarde le sillage, en même temps que le mouvement fatigue extraordinairement un vaisseau & sa mâture : c'est presque toujours dans une de ces secousses qu'on voit les mâts se rompre, particulièrement quand l'avant se relève après avoir plongé.

Le roulis est proportionnellement plus grand que le tangage ; mais on ne voit que peu d'accidens arriver par ce mouvement qui est toujours lent : cependant il est à propos de le prévenir le plus qu'il est possible, parce que la lame vient souvent du travers, & porte le vaisseau à de très-grandes inclinaisons sur le côté. On y parviendra facilement, sans empêcher le vaisseau de bien porter la voile, en arrimant le lest, quand il est en fer ; sur les empâtures des varangues de fond, parce qu'il rappellera avec moins de force le navire, lorsqu'il aura incliné, en agissant sur un point qui sera un peu éloigné tribord & bas-bord plus bas que le centre de gravité du navire chargé : on observera de ne pas faire monter trop haut le lest des deux côtés du vaisseau ; en remplissant l'entre deux du premier & second plan, même du troisième, s'il est nécessaire avec du bois, afin de l'assujettir immuable ; ensuite on arrime le reste en plein, sans laisser de vide pour le bois au milieu ; & lorsque tout le lest sera disposé & arrimé autour & sous le centre de gravité du vaisseau, comme nous venons de le dire, en l'étendant un peu sur

C 2

l'avant & l'arrière (de 20 à 30 pieds) de ce point, en en mettant plus dans l'une ou l'autre de ces parties pour tenir le vaiſſeau exactement au tirant d'eau marqué par le Conſtructeur, on arrimera par deſſus très-ſolidement & à l'ordinaire la cargaiſon, obſervant de placer au fond les parties les plus peſantes & les plus capables de ſupporter le poids des autres que l'on doit arrimer par-deſſus.

Je place le leſt autour & fort près du centre de gravité du vaiſſeau, afin de rendre le mouvement du tangage moins rude que ſi le poids étoit éloigné ſur l'avant & l'arrière de ce point.

Le vaiſſeau n'eſt jamais porté par une ſeule lame; lorſque la mer eſt un peu agitée, il y en a toujours deux ou trois qui paſſent deſſous en même temps, à moins que ce ne ſoit quand la mer eſt extrêmement longue, que le houle vient de loin, & dans des parages fort éloignés de terre, alors il arrive que les plus grands vaiſſeaux ſont quelquefois portés par une ſeule lame (7). Mais dans l'une & l'autre circonſtance, je dis qu'il ne faut pas étendre le leſt ſur l'avant ni ſur l'arrière du centre de gravité, auſſitôt que le navire eſt dans la parallèle de ſon tirant d'eau marqué pour le leſt, ce qu'il eſt abſolument eſſentiel au Conſtructeur de bien déterminer, afin de faire caller le vaiſſeau en grand juſqu'au point fixé de ſa première ligne d'eau de chargement, que nous ſuppoſons être celle que le leſt doit donner.

Je vais eſſayer de prouver ce que j'ai avancé en ſuppoſant dans l'un & l'autre cas d'une mer longue ou courte, que l'eau vient choquer le vaiſſeau de l'avant, afin qu'il ſoit examiné dans les circonſtances du plus grand & du

---

(7) On trouve à l'eſt & à l'oueſt du Cap de Bonne-eſpérance depuis les 30° de latitude ſud juſqu'au 40°, où j'ai été, des mers fort longues & fort élevées, ſur-tout quand le vent a ſoufflé de la partie de l'oueſt pendant quelques jours; je crois que plus ſud c'eſt la même choſe.

plus vif tangage, comme nous l'avons éprouvé une infinité de fois ; car dans le cas ou la lame ſe prend par l'arrière ou la hanche, ſes mouvemens, s'il a de la viteſſe, ne ſont jamais dangereux, parce qu'en fuyant devant le houle, il ſe ſouſtrait en partie à ſon impulſion ; & s'il s'en trouve, malgré cela, incommodé, on force de voile, & l'on fuit à la lame (en terme marin) ; au lieu que dans l'autre hypothèſe, le choc de l'eau augmente ſur la proue en raiſon du quarré de la viteſſe de la lame qui vient choquer la proue, de ſorte que l'impulſion totale de l'eau ſur la partie de la carène choquée, ſe trouve en raiſon compoſée de la ſomme du quarré de la viteſſe de la lame & du quarré de la viteſſe du vaiſſeau qui va la choquer ; tandis que dans la circonſtance où le vaiſſeau fuit la lame, la réſiſtance de l'eau ſur la proue eſt en raiſon ſimple du quarré de la viteſſe du vaiſſeau, moins le quarré de l'excès de la viteſſe de l'eau ſur celle du vaiſſeau.

Le vaiſſeau dont les extrémités ſont moins chargées (8), étant ſuppoſé courir avec une viteſſe quelconque au devant de la lame qui vient à lui par l'avant, la choque ſans contredit avec une force exprimée par la ſomme des deux quarrés de la viteſſe du vaiſſeau & de celle de la lame, la diviſe & paſſe au travers, en même temps qu'il eſt élevé par la pouſſée verticale de cette colonne d'eau qui lui oppoſe un poids plus conſidérable que ſon déplacement ; la lame qui ſuit produit le même effet, en recevant l'avant du vaiſſeau qui retombe, parce que la première eſt déja au milieu, d'où elle paſſe à l'arrière qu'elle ſoutient, tandis que la ſeconde a pris ſa place au milieu, & que la troiſième ſupporte l'avant en les ſuivant l'une & l'autre : ce

(8) La cargaiſon qui s'arrime ſur le vegre du fond en avant ou de l'arrière eſt moins peſante que le leſt qu'on y met ordinairement, à volume égal ; & dans les vaiſſeaux armés en guerre, il y a toujours une grande partie des extrémités de vide ou peu chargée.

mouvement ſe perpétue tant que la mer eſt agitée, d'où il ſuit que le vaiſſeau n'eſt jamais tranquille ; il retombe par ſon propre poids auſſitôt que la lame eſt paſſée, & il retombe moins vivement en raiſon de ce que ſon avant eſt moins peſant, & qu'il eſt balancé par ſon centre de gravité, qui n'eſt jamais fort éloigné du milieu de la plus grande longueur, & où ſe trouve le plus grand poids ; la ſecouſſe eſt donc moins violente, puiſqu'il choque l'eau avec moins de maſſe, ce qui l'empêche de plonger autant que s'il avoit plus de peſanteur ; ainſi la mâture ne ſouffre pas, & le ſillage eſt moins retardé, la partie la plus renflée de la proue ne ſe trouvant que peu expoſée au choc de l'eau.

Si le vaiſſeau ſe trouve porté par une ſeule lame ; il retombe encore moins bas, s'il eſt peu chargé en avant, lorſqu'il n'eſt ſoutenu que par l'arrière ou le milieu ; il ſe relève donc plus aiſément au moment que l'autre lame vient le choquer, & la ſecouſſe eſt moins violente : ſi l'avant étoit plus peſant, il plongeroit davantage en retombant entre les deux lames, & celle qui ſuccède à la première pourroit ſe trouver fort au-deſſus de la proue, (comme cela arrive tous les jours par les arrimages du leſt en plein, & par le trop grand poids des extrémités) ; ainſi la colonne d'eau d'en-haut paſſeroit par-deſſus en partie, parce que le poids du vaiſſeau, réſiſteroit à céder à l'impulſion verticale du pied de la lame, qui ne lui oppoſe pas ſubitement une réſiſtance ſuffiſante, puiſqu'il eſt emporté au-delà de ſon déplacement ordinaire par la vivacite de ſa chute occaſionnée par l'excès de ſa peſanteur. Le vaiſſeau ſe trouvant arrêté tout-d'un-coup dans ſa chute, bien au-deſſus de ſa ligne d'eau de flottaiſon, il ſe fait une ſecouſſe violente en avant qui rappelle vivement toute la mâture auſſi ſur l'avant, parce qu'elle s'étoit portée en arrière pendant le temps de la chute ; mais par ce choc il ſe trouve un retard momentané entre les deux mouvemens de tomber & de se redresser; l'avant est rappellé en-haut par un autre mouvement violent occasionné par un déplacement d'eau plus considérable que son poids. Ce poids en rappellant ensuite les mâts sur l'avant avec vivacité, les compromet si souvent, qu'à la fin ils se rompent par une répétition non interrompue de deux ou trois minutes en deux ou trois minutes, qui dure souvent plus de vingt-quatre heures; de plus cette colonne d'eau qui passe par-dessus l'avant, le charge encore davantage, & le fait caller en total jusqu'à ce que toute l'eau soit écoulée par les sabords & les dulots de la seconde batterie; car il arrive quelquefois que le coffre du navire est plein : alors le vaisseau, trouvant par ce nouveau poids plus de difficulté à s'élever a la lame, peut se trouver, par une récidive subite, dans le dernier péril.

OBSERVATIONS.

Toutes ces considérations bien observées dans le lestage & l'arrimage des vaisseaux, ne doivent pas dispenser de garder une certaine quantité de lest mouvant en plomb sur leurs ponts ou faux ponts, afin de faire les expériences & les changemens que les circonstances exigeront: on observera seulement d'en garder plus ou moins selon la grandeur des Bâtimens.

Si dans la totalité du lest, il y a une grande quantité en pierres ou cailloutage, on pourra arrimer le fer sur le vaigrage en plein, sans laisser d'intervalle entre les plans de gueuses; ensuite ayant fait un petit lit de bois de billetes, on arrimera le premier plan de la cargaison, & on l'arrimera avec les pierres & cailloux, n'y mettant de bois que ce qu'il en faudra pour assujettir l'arrimage; cette manière d'arrimer produira le même effet que si on avoit tout fer pour lest, & qu'on l'eût disposé comme nous l'avons dit, parce que les pierres monteront fort haut, & ne feront point perdre d'espace dans l'arrimage, si ce n'est qu'il n'y entrera pas tant de bois à feu.

Si l'on n'a que du lest de cailloux, on en fera seulement une couche d'un pied de haut, ensuite arrimant dessus, on engravera le premier & second plan du chargement, même le troisième, observant dans toutes les circonstances de ne pas trop s'écarter sur l'avant ni l'arrière du centre de gravité du vaisseau.

On peut faire une observation (dans le chargement total) qui devroit être, selon moi le principe de tout Arrimage; c'est de supposer le vaisseau coupé de l'arrière à l'avant dans un certain nombre de tranches verticales, & de faire ensorte que chacune de ces tranches, y compris son poids & celui de tout ce qu'elle contient, ne soit pas plus pesante que son déplacement d'eau; de cette manière, le vaisseau semble bien porté par-tout sous sa charge; mais j'ajoute à cette idée, qu'il vaut mieux, par tout ce que nous avons déja dit, que les tranches des extrémités déplacent plus d'eau qu'elles ne pèsent, parce qu'étant obligées d'enfoncer dans le fluide par leur adhérance aux tranches du milieu que l'on chargera davantage, elles seront soutenues par la poussée verticale de l'eau & empêcheront en partie la tendance que tous les vaisseaux ont à se délier dans le sens de leur longueur, en même temps qu'elles diminueront le mouvement du tangage, puisqu'elles tenderont continuellement à s'élever; ainsi le sillage ne sera que peu retardé par ce mouvement qui deviendra très-lent; je regarde la chose comme susceptible d'une application très-essentielle & fort praticable dans les vaisseaux de guerre qui ont toujours une grande partie de leur calle à vide.

Réflexions sur les changemens qui se trouveront dans les qualités du vaisseau, lorsqu'il sera plus ou moins chargé en avant ou en arrière.

Si on charge le vaisseau plus sur nez, sa ligne d'eau la plus avantageuse 1 deviendra 2, en augmentant par son renflement la résistance du fluide sur la proue, & le déplacement d'eau de l'avant, d'où il résulte une diminution de vitesse à impulsion égale de la part du vent; si au contraire on charge le vaisseau plus sur cul, la ligne d'eau 1 deviendra 3, en augmentant le déplacement d'eau de l'arrière, & diminuant la résistance du fluide sur la proue, puisque la ligne d'eau devient plus douce; d'où il résulteroit une augmentation de vitesse à impulsion égale de la part du vent; mais il faut faire attention que l'arrière de la carène, en plongeant davantage par ce second mouvement, présente au cours de l'eau, très-obliquement à la vérité, une plus grande partie de sa surface submergée, ce qui pourroit devenir équivalent à-peu-près à ce que l'on gagne de l'autre côté. Une autre considération plus secrette, & qui certainement est un obstacle à la rapidité du sillage, c'est que le point vélique, dans le premier cas, monte, puisqu'en plongeant davantage, la proue se présente plus directement au fluïde, tandis que le centre d'effort des voiles reste à la même élévation; d'où il suit dans la circonstance rare de la mâture parfaite, que le vaisseau n'a plus assez de voilure, puisque l'impulsion de l'eau sur la proue a augmenté, en élevant la direction de son effort absolu, en même temps que le centre de gravité du navire a aussi changé de place, en s'approchant un peu de l'avant de C en B. Il en résulte une plus grande puissance aux voiles de l'arrière pour faire venir le vaisseau au vent, pendant que le gouvernail, en sortant un peu Figure III.

de l'eau, perd de son effet, de sorte que le vaisseau peut devenir très-ardent & obligé d'avoir presque toujours sa barre au vent, en présentant continuellement une grande partie de la surface du gouvernail au cours de l'eau, ce qui devient encore une cause de diminution de vitesse; la vérité de ces conséquences m'a toujours été confirmée par l'expérience, dans le cas où des vaisseaux passablement construits, ont été trop callés sur l'avant.

Lorsque le vaisseau se trouve trop chargé sur l'arrière, il en résulte des effets tout contraires; le point vélique baisse parce que la proue, en sortant de l'eau, se présente plus obliquement au fluïde, & la direction de l'impulsion absolue sur la proue coupant la verticale au centre de gravité de la surface de flottaison (qui a changé ainsi que celui du vaisseau, un peu plus ou un peu moins, en s'approchant de l'arrière de C en A) montre le point vélique bien audessous du centre d'effort des voiles. Le vaisseau se trouvant alors trop de voilure, incline facilement sur le côté, & diminue par conséquent sa disposition la plus avantageuse pour diviser le fluïde, en même temps que les voiles d'avant acquierent plus de puissance, à cause de leur position plus éloignée du centre de gravité; ainsi le navire devient lâche, & on est obligé de se servir continuellement du gouvernail & des voiles de l'arrière pour le rappeller au vent; c'est encore ce qui m'a été confirmé par l'expérience.

Ces observations ne sont sensibles dans les grands vaisseaux que lorsque la différence de leur tirant d'eau le plus favorable est audessus de six pouces, car la plupart du temps si elle est audessous, il ne se fait pas un grand changement dans les qualités du navire.

Il résulte de tout ce que nous venons d'expliquer, qu'il n'y a qu'une seule ligne d'eau favorable pour la plus grande vitesse du vaisseau, de quelque figure qu'il soit, & cette ligne d'eau doit être connue & déterminée par le calcul du plan pour la plus avantageuse de toutes celles qu'on peut lui donner sous charge ; c'est aux Constructeurs à la déterminer même avant de mettre le vaisseau sur chantier ; car c'est celle qui doit aussi leur servir pour fixer le plus ou le moins d'élévation de mâture, en déterminant le centre d'effort des voiles à la hauteur du point vélique donné par la ligne d'eau la plus avantageuse de la carène sous charge, pour bien gouverner, marcher, & porter la voile dans les routes obliques.

J'observe que quand je dis vaisseaux sous charge, je suppose le vaisseau de guerre armé & prêt à faire voile pour combattre ; & le vaisseau marchand dans le même cas sous cargaison complète.

Les vaisseaux jusqu'à présent n'ont jamais été mâtés aussi parfaitement qu'ils auroient pu l'être, puisque les Constructeurs se sont pour ainsi dire fait une loi de s'écarter de plus en plus des vrais principes, en élevant dans ces derniers temps la mâture plus qu'elle ne l'avoit encore été, quoiqu'elle fût déja trop haute ; ainsi le centre d'effort des voiles a constamment été audessus du point vélique, ce qui fait qu'on a vu quelquefois des vaisseaux avoir plus d'avantage, lorsqu'ils ont été plus chargés sur le nez que ne le demandoit leur meilleure ligne d'eau de vitesse en charge ; mais nous sommes en état par le transport d'une partie du lest mouvant de l'avant à l'arrière de faire baisser ou monter le point vélique de quelque chose ; ainsi on peut trouver une position plus avantageuse pour la marche, dans l'état actuel de la mâture que celle que devroit naturellement avoir le vaisseau s'il étoit bien mâté ; car il pourra se faire qu'elle soit plus analogue à sa mâture actuelle, que sa vraie position, dans le cas où il seroit mâté parfaitement, ne le seroit avec les mâts trop élevés qu'on lui donne toujours ; d'où il résulte que le vaisseau n'est pas à beaucoup près dans son état de perfection, quelque bien chargé qu'il soit.

Il ne reste plus qu'à voir les Constructeurs se donner la peine dans la suite de chercher, ce qui n'est pas difficile, la ligne d'eau de flottaison la plus avantageuse pour allier & déterminer toutes les qualités des vaisseaux qu'ils construiront; ensuite qu'ils ayent le courage de mettre tout préjugé de routine à part, en mâtant selon le point vélique de cette ligne d'eau, disposant en même temps l'effort latéral des voiles en équilibre exact autour du point où l'impulsion de l'eau sur la proue coupe l'axe du vaisseau dans la route oblique ; & nous aurons certainement des vaisseaux qui par ces dispositions favorables de la mâture parfaite, & celles que l'on pourra donner à leurs arrimages, seront dans l'assiete de leur plus grande vitesse, que l'on trouvera, à ce que je présume, bien au dela de ce que nous pouvons avoir vu jusqu'à présent, à coupe de carène égale & semblable.

J'ajoûte que, comme les qualités du navire ne dépendent pas seulement de la perfection de sa mâture & de son chargement, il faut encore lui procurer la durée (9), en lui donnant une forme qui, en divisant bien le fluide, le rende doux à la mer, en même temps qu'on le rendra solide par la force de sa charpente; c'est-à-dire, qu'il tanguera peu, & sa mâture ne fatiguera pas, non plus que ses liaisons bien placées; si son mouvement est doux, son sillage ne sera point interrompu & sa vîtesse sera uniforme alors, ce qui est le but du bon arrimage & de ce que je me suis proposé dans cet Ouvrage.

---

(9) La durée des vaisseaux doit être un objet principal du Constructeur; les vaisseaux que l'on construit aujourd'hui ne passent pas huit ans sans être refondus, & il en coûte autant que pour en faire de neufs. On s'est faussement imaginé que la légereté prouvoit la plus grande vitesse; sans faire attention que c'est la coupe la plus savante & la plus propre à diviser le fluide & à rendre le vaisseau doux dans ses mouvemens, quelque solide qu'il soit.

Objection à la méthode que je prescris pour la meilleure façon d'arrimer les vaisseaux.

Les extrêmités du vaisseau étant plus légères que leur déplacement d'eau, tendront continuellement à s'élever; ainsi la lame pourra les mettre en mouvement avec plus de facilité, & les élever davantage par son impulsion, ce qui fera augmenter considérablement la vivacité & la secousse du tangage, parce qu'elles tomberont de plus haut.

Cette objection, qui m'a été faite par un Marin consommé, tombe cependant d'elle-même, ou je me trompe fort; car les deux extrêmités du vaisseau doivent être également légeres, & déplacer un plus grand volume d'eau que leur poids selon notre principe; ainsi elles tendront l'une & l'autre à s'élever par la poussée verticale qui agit continuellement; desorte que quand le choc de la lame viendra ajoûter son effort à cette disposition continuelle à s'élever; l'autre partie, qui ne sera pas choquée, résistera de plus en plus à plonger, & s'opposera par conséquent à l'élévation de la partie sur laquelle la lame agit; ainsi l'avant ne cédera pas avec plus de facilité que s'il étoit plus pesant; mais supposons qu'il s'éleve effectivement plus haut, il doit retomber dans ce cas avec plus de vîtesse, mais la masse est moindre; d'où il est aisé de conclure que le moment de cette partie plus élevée est moindre que celui qu'elle produiroit si elle retomboit de moins haut avec plus de masse. Toutes choses sont à-peu-près égales jusqu'à présent, mais je trouve ensuite plus d'avantage à rendre les extrêmités légères dans le cas où un coup de mer de l'avant passe par-dessus le vaisseau; car alors la tendance des extrêmités à s'élever servira, dans cet instant critique, à débaraſſer le vaiſſeau de deſſous la colonne d'eau qui le ſurcharge ; ce qu'il ne pourra jamais faire avec autant de promptitude ſi ſes extrêmités ſont plus peſantes que leur déplacement d'eau. Un Auteur a avancé néanmoins que cela devoit être ; mais c'eſt d'après d'autres principes que je ne trouve pas convaincans.

FIN.

MÉMOIRE
SUR L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

Amoris patriæ pignus.

IL n'eſt, pour l'arrimage, aucune règle connue. On arrime encore aujourd'hui, comme on faiſoit au milieu du ſiècle dernier. On donne aux vaiſſeaux neufs la quantité de leſt aſſignée aux vaiſſeaux du même rang. On le place également dans tous de la même façon; & ſi, lorſque l'arrimage eſt fini, le tirant d'eau n'eſt pas tel qu'on l'avoit projetté, on corrige cette différence avec du leſt qui eſt en réſerve, & que l'on tranſporte à une des extrémités, pour rappeller le vaiſſeau au tirant d'eau que l'on desire. On tâtonne un peu moins à la seconde campagne ; & après plusieurs voyages, on se fait une espèce de règle pour la quantité de lest à mettre, & pour le tirant du vaisseau, en mettant ce lest.

Les Constructeurs un peu instruits, ne se trompent pas sur la quantité du lest à mettre dans les vaisseaux neufs, du moins pour ce qui regarde la hauteur de la batterie, qu'ils se sont proposés de donner. Il leur suffit pour cela de dresser un état exact de tous les poids qui entrent dans la construction & l'armement des vaisseaux ; & cet état ne demande pas de grandes discussions : mais le plus grand nombre d'entr'eux ne m'a pas paru pousser plus loin ses recherches. Il est rare qu'ils déterminent, avec précision, la différence du tirant d'eau, (le vaisseau étant, comme on dit, sur son lest,) & je les ai vu se tromper. Cependant, quoique cette connoissance influe sur le placement des autres matières, autres que le lest, elle est moins importante que l'examen de l'arrimage, par rapport à la stabilité. Cet examen n'est pas plus minutieux que celui des pesanteurs ; & on ne peut procéder à celui-ci, sans rassembler les matériaux nécessaires pour l'autre. Il est vrai que ce n'est pas tant la stabilité que l'on doit chercher que la quantité de cette stabilité, & son influence sur l'allure, le tangage, & le roulis ; mais c'est toujours beaucoup que d'avoir reconnu que le vaisseau portera la voile. Il eut été à desirer qu'on s'en fût occupé dans la construction de tous les vaisseaux, aulieu de comparer simplement à l'œil les vaisseaux à faire aux vaisteaux construits & connus.

Voilà, en gros, quelle est la méthode usitée pour l'arrimage des vaisseaux de guerre. Celle pour les vaisseaux marchands est, à plus forte raison, livrée au tâtonnement.

La destination des Bâtimens de commerce varie à toutes les campagnes, & quelquefois même dans le courant d'un voyage. Ces navires, dont l'objet est de transporter beaucoup, ſont en général conſtruits pour naviguer avec une petite quantité de leſt, & c'eſt ſelon la légereté ou la peſanteur des marchandiſes qu'ils embarquent, qu'ils mettent, ou ne mettent pas du leſt. Dans le premier cas, ils font un petit retranchement, une eſpèce de foſſe, à l'entour du grand mât; & là, ils entaſſent le leſt qu'ils jugent néceſſaire : dans l'autre, ils matelaſſent la calle avec des matières légeres, telles que les fagots pour élever le centre de gravité de la charge, & rendre les mouvemens du roulis moins rudes.

Dans les navires de commerce, comme dans les vaiſſeaux de guerre, on n'examine qu'à la mer, & pendant le cours de la navigation, l'influence de l'arrimage ſur l'aſſiette du Bâtiment, ſur ſon allure, ſa ſenſibilité au gouvernail, & à tous les mouvemens de converſion.

Un vaiſſeau porte-t-il mal la voile? on met dans la calle les canons les plus élevés.

Sa marche eſt-elle rallentie? on lâche les coins des mâts, les haubans, les étais. On fait pancher les mâts en avant ou en arrière. On tranſporte ſucceſſivement, dans ces deux parties, des poids pour les faire plonger davantage; ainſi, tel vaiſſeau étoit trop ſur l'avant qui marche mieux, cette partie étant moins ſubmergé & *vice verſa* de l'arrière.

Le gouvernail ne ſe fait-il pas aſſez ſentir, comme s'expriment les Marins? on fait encore caller l'arrière.

Mais ce n'eſt pas là ce que demande l'Académie. La deſcription de ces méthodes n'apprend pas grand choſe, & un plus long détail feroit inutile. C'eſt la façon la meilleure d'arrimer tous les vaiſſeaux poſſibles, & l'examen particulier de l'arrimage en entier ſur toutes les qualités que l'on exige des vaiſſeaux, qui fait ſans doute l'objet de la queſtion.

Par le mot d'arrimage, on entend non-ſeulement la diſtribution du leſt & des autres matières peſantes, qui entrent dans la calle des vaiſſeaux ; mais encore le placement des mâts & les proportions des voiles. Ces deux conſidérations menent naturellement à l'examen de la figure des vaiſſeaux, parce que ce n'eſt que relativement à cette figure que la mâture eſt déterminée & l'arrimage diſtribué. Il faudroit donc, afin de donner plus de jour à la ſolution du problême propoſé, entrer dans un examen particulier de la figure des vaiſſeaux ; de-là, & par une ſuite naturelle, il faudroit parler de la mâture, & enſuite de l'arrimage. Ce ſeroit, je penſe, la marche la plus naturelle, pour rendre ce Mémoire utile ; mais, que pourroit-on dire ſur la figure des vaiſſeaux & ſur la mâture, qui n'ait déja été écrit par M. Duhamel, M. Camus, M. Bouguer, M. Euler, M. Bernoully, M. Hugens, M. Pitot, &c. Tous ces Auteurs ne nous ont rien laiſſé à deſirer, & il eſt difficile de ne pas les répéter.

CONSTRUCTION.

L'Architecture navale a fait des progrès ; mais il s'en faut bien qu'elle ſoit parvenue à ce point de perfection, dont elle eſt ſuſceptible. Quelques Conſtructeurs plus inſtruits que leurs dévanciers, ont un peu éclairé, par leurs études, cette partie de la Marine, long-temps livrée à la pure routine ; mais trop timides dans leurs eſſais, & ne conſultant pas aſſez la théorie, qui les rebutoit peut-être par ſa ſéchereſſe, ou les effrayoit par les changemens qu'elle indiquoit à faire à ce que la pratique avoit conſacré, leur travail n'a pas toujours porté le ſceau de la certitude. Ceux qui ont eu le plus de réputation ſe ſont long-temps contentés de calculer le déplacement, & de le comparer, comme on a dit plus haut, à l'état de peſanteur. Quelques-uns ont dreſſé ces états avec beaucoup de préciſion, & entr'autres choſes y ont diſtingué les poids de la partie ſubmergée, d'avec ceux qui ſont hors de l'eau. Voici quelle étoit la raiſon de cette diſtinction. Ils croyoient par cette comparaiſon juger de la ſtabilité, & cette voie d'aproximation a eu quelque-temps du crédit. Les bons livres que nous avons ſur cette partie, fait tomber cet eſpèce de ſyſtême, dont on ne parle ici, que pour montrer combien on étoit loin il y a vingt ans de ſçavoir calculer la ſtabilité. La marche en eſt aujourd'hui connue de quelques-uns. Ils calculent le centre de gravité de la partie ſubmergée, qu'ils regardent comme homogene; ils déterminent la poſition du métacentre, & comparent ces deux termes à ceux des autres vaiſſeaux. Enfin, pour dernier calcul, ils examinent la pouſſée de l'eau ſur la proue dans la route directe.

Voilà l'état actuel de l'Architecture. Quelques Conſtructeurs étendent davantage ces calculs; mais le plus grand nombre ſe tient au ſimple déplacement, pour ne pas ſe tromper au moins ſur la hauteur de la batterie. Tout le reſte, ils l'arrangent par la voie de la comparaiſon toujours tâtonneuſe & peu ſûre; auſſi courent-ils riſque de ſe tromper, quand ils ont à conſtruire des vaiſſeaux peu connus, comme le ſont ceux à trois ponts.

D'ailleurs, comment examiner & calculer l'arrimage dans tous les ſens, ſi on ne pouſſe pas plus loin les calculs ſur la figure de la coque & ſur la voilure.

Ainſi, après avoir trouvé la hauteur de la batterie, il eſt de la plus grande conſéquence de chercher la ſtabilité, & par conſéquent le centre de gravité du vaiſſeau armé; & alors même, il faut de toute néceſſité ſuppoſer un arrimage quelconque. Cela fait, on paſſe au calcul de la pouſſée de l'eau ſur la proue dans les routes directes & obliques; & par ce calcul, on détermine la poſition & les dimenſions de la mâture, que l'on n'avoit fait encore que ſuppoſer. Ce même calcul, & celui de l'arrimage rectifient les opérations que l'on a commencées ſur cette voilure par rapport à la ſtabilité; & l'on voit (ſi le point vélique doit être placé plus haut ou plus bas) ce que l'on gagnoit ou perdoit de ſtabilité. On examine après le choc de l'eau ſur le gouvernail, & l'on juge ſi le vaiſſeau y ſera ſenſible, & s'il aura beſoin d'aider ou d'être aidé par les voiles. Ces opérations finies, il me ſemble que l'on peut paſſer à l'examen du roulis par rapport à la diſtribution de l'arrimage, parce que les mâts & les voiles ſont déterminés d'une façon invariable, & qu'on n'a plus à s'occuper que d'un objet très-ſimple, ne s'agiſſant plus que d'un nouvel arrangement de leſt.

MATURE.

Je viens de dire ſur la mâture tout ce qu'il faut, puiſque j'ai demandé que ſa poſition, ſes dimenſions, & par conſéquent le point vélique fuſſent déterminés. Je n'examinerai pas ici la défectuoſité des règles que l'on a ſuivi & que l'on ſuit encore dans quelques Ports. Il paroîtra toujours inconſéquent de règler la voilure & les agrêts ſur la ſimple largeur, comme ſi deux vaiſſeaux, également larges, devoient porter également la voile, & comme ſi la largeur influoit ſeule ſur la ſtabilité. De-là, tant de changemens dans ces mâtures, après la premiere ou deuxieme campagne des vaiſſeaux. Il eſt pluſieurs de nos frégates de 26 canons de 12, dont les changemens ſur la mâture, ont été pouſſés ſi loin, qu'elles n'ont plus différé (pour cette partie) des frégates de 50 canons. Les calculs l'avoient dit avant de les mettre en mer pour la premiere fois; mais on ne pouvoit concevoir qu'une frégate qui étoit moins large que l'autre, pût porter une auſſi grande mâture; on ne faiſoit pas attention que cette frégate de 26 n'avoit qu'une ſeule batterie, & que la deuxieme batterie de celle de 50 faiſoit perdre, par l'exhauſſement du centre de gravité total, ce que l'autre gagnoit par le rabaiſſement

rabaissement de ce centre. Une pratique un peu plus réfléchie auroit du l'apprendre, avant que la théorie décidât sans replique.

L'essai que j'ai fait sur un vaisseau a fait un peu revenir les Esprits praticiens; mais le préjugé général contre la figure, la voilure & l'arrimage de ce Bâtiment fut poussé à l'excès, l'expérience calma les esprits.

ARRIMAGE.

Tout paroît dit sur l'arrimage, puisqu'on ne peut déterminer la figure du vaisseau, sa mâture & sa voilure, sans entrer dans le détail de ce qui constitue l'arrimage. On peut cependant pousser plus loin la discussion, mais il est bien difficile de ne pas se répéter. Néanmoins pour dire des choses utiles, il n'y a qu'à chercher des exemples & analyser les cas qui se rencontrent le plus souvent dans les Ports.

Soit un vaisseau pris sur les ennemis, dont on n'a pas eu le temps de reconnoître les qualités, ou dans lequel on en a reconnu de très-mauvaises Ou bien soit un de nos vaisseaux qui manque des qualités les plus nécessaires, comme de la hauteur de la batterie, de la stabilité, & de la sensibilité au gouvernail, & d'être sujet à manquer dans ses mouvemens de conversion.

STABILITÉ.

Le plus grand défaut que puisse avoir un vaisseau, c'est, sans contredit, celui de ne pas porter la voile. Les conséquences en sont terribles. Un pareil Bâtiment ne marche pas. S'il est affalé sur une côte, il ne peut s'en élever, parce que c'est le cas de faire de la voile, & il ne peut la porter. S'il se bat, c'est toujours avec désavantage, même contre un ennemi inférieur, parce que celui-ci le force de ſe battre au vent, & l'empêche de ſe ſervir de ſa premiere batterie.

Les moyens les plus généraux pour corriger ce défaut, ſont de raſer l'œuvre morte, de ſubſtituer des canons de moindre calibre, de diminuer en tout ſens la voilure, & même de les ſouffler; mais ces moyens, en effaçant une partie des défauts, en font naître d'autres.

1°. Si on raſe l'œuvre morte, un vaiſſeau ennemi de ce rang le domine avec ſa mouſqueterie. 2°. Si on lui ſubſtitue des canons de moindre calibre, il oppoſe des forces inégales à un vaiſſeau de ſon rang qui le combat. 3°. Si on diminue la voilure, on ne gagne du côté de la ſtabilité, qu'en perdant du côté de la vîteſſe, parce que ce Bâtiment peu fort bien avoir une proue de grande réſiſtance, à laquelle la mâture qu'il avoit ci-devant ne ſuffiſoit peut-être pas.

Je crois avoir trouvé un moyen plus ſimple, moins couteux, & qui ne diminueroit en aucune façon la force du vaiſſeau ni ſa vîteſſe. Ce moyen le voici. C'eſt de lui mettre une contrequille de fer, tenue par des étriers. Cette contrequille ſeroit plus ou moins peſante, ſelon qu'on auroit, ou vu, ou calculé, le beſoin qu'en a le vaiſſeau chargé par le vent pour être rappellé à ſa premiere aſſiette.

Le calcul fait ſur un vaiſſeau de ſoixante canons que je ne nommerai pas, parce que l'Académie ne veut pas qu'il ſoit rien dit qui puiſſe déſigner le nom de l'Auteur, & celui fait ſur un vaiſſeau à trois ponts qui ne peut pas porter toute ſon artillerie, m'ont clairement démontré, que dans le premier vaiſſeau une contrequille de cinq pouces un quart d'épaiſſeur, eût ſuffi, & dans l'autre une de neuf & demi: Ces calculs ne ſont pas même minutieux, parce que je ne touchai ni à la coque du vaiſſeau, ni à ſa voilure, ni à ſon artillerie. Je ne fis autre choſe pour ces deux vaiſſeaux, après avoir cherché le centre de gravité du syſtême, non compris celui d'une partie des canons de la ſeconde batterie & des gaillards, que de chercher à balancer par la quille de fer que je ne ſuppoſai d'abord que de deux pouces pour le premier vaiſſeau, & de quatre pour le ſecond, la quantité de canons que l'on avoit reconnu excédente & que je pouvois remplacer à meſure que je gagnois de la ſtabilité. Ce moyen applicable dans tous les cas, m'a paru devoir être le premier employé, parce qu'il eſt plus prompt, moins couteux, & qu'il conſerve toute ſon artillerie. Je l'ai tu, juſqu'à préſent, mais j'ai dit que j'avois une propoſition à faire au premier armement du vaiſſeau à trois ponts, dont j'ai parlé ci-deſſus, & que cette propoſition tendoit à conſerver à ce vaiſſeau toute ſon artillerie & toute ſa voilure, je n'y ai pas ajouté les agrêts, parce que j'ai vu ſenſiblement qu'ils pouvoient être réduits, & cette réduction eſt entrée pour quelque choſe dans l'épaiſſeur de la contrequille projettée, qui ſans cela devroit être plus forte. Je n'ajouterai pas que cette contrequille doit être aiguë en avant à cauſe de la réſiſtance du fluide, & quarrée ou obtuſe à l'arrière, ſelon que les vaiſſeaux ont beſoin d'un gouvernail plus ou moins plongeant. Tous ces petits détails vont de ſuite & ſont ſous entendus.

Ce même moyen, je l'appliquerois ſur les vaiſſeaux marchands. Ils ne mettroient plus de leſt quand ils tranſportent des marchandiſes légeres, & cette contrequille ne leur nuiroit pas quand ils ſeroient chargés de munitions peſantes, parce que jamais ces marchandiſes n'embrent la cale, & il n'y auroit alors qu'à mettre un fardage un peu plus exhauſſé. Dans les deux cas ils iroient mieux au plus près, qualité qui leur manque à tous.

Ce moyen je l'appliquerois également ſur les vaiſſeaux de guerre, qui ſont de longues miſſions & qui embarquent pour ſept à huit mois de vivres. Cette contrequille leur tiendroit lieu d'une grande partie de lest, & par-là ils porteroient une plus grande quantité de barriques de farine, de salaison, &c.

Tout cela exige sans doute des calculs particuliers, qui varient selon la force & la figure des vaisseaux; mais ces calculs ne sont pas difficiles, ils ne sont que longs, & avec le secours des formules on peut les réduire à de simples opérations d'Arithmétique.

Voilà pour la stabilité, voyons pour la marche.

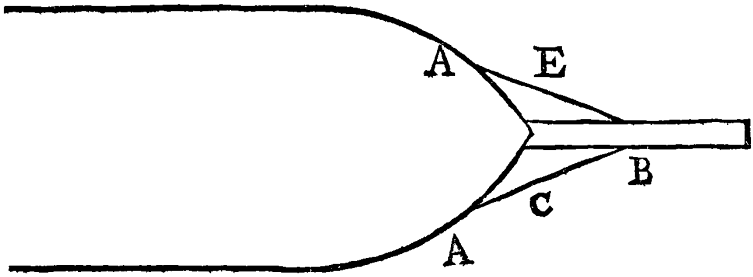
MARCHE.

C'est des vaisseaux construits que nous devons parler, & non des vaisseaux à construire, parce que nous avons dit de ces derniers, que c'est dans la composition d'un plan que l'on concilie toutes les qualités, & que celle de l'allure va de pair avec les autres. Nous dirons en passant que si dans les frégates, c'est la qualité premiere, cette même qualité ne doit aller dans les vaisseaux qu'ensuite de la stabilité & de la hauteur de la batterie.

Lorsqu'un vaisseau quelconque a une marche pesante & que l'on cherche les moyens de lui faire acquérir de la vîtesse, il ne faut pas s'arrêter à toutes ces pratiques que le temps & l'ignorance ont consacrées. Il faut l'attaquer avec les calculs & reconnoître d'abord sa stabilité. Si elle est supérieure à l'effort du vent sur les voiles, il ne faut pas pour cela augmenter sa voilure; ce moyen est bon à quelques égards, mais il est dispendieux, & nécessite d'avoir un équipage plus nombreux en raison de l'augmentation de la voilure. Il est mieux de laisser les voiles telles qu'elles sont, mais de faire moins caller le vaisseau, afin de diminuer & son inertie & la poussée de l'eau sur la proue, & sur la carêne en général. D'assigner de quelle quantité il faut le faire sortir de l'eau, c'est ce que les calculs pourront peut-être déterminer par approximation; mais ce qui eſt très-néceſſaire, c'eſt de mettre en même-tems une contrequille en bois de même épaiſſeur, que la quantité dont on fera ſortir la carêne de l'eau, pour ne rien perdre de l'avantage du plus près.

Si le vaiſſeau ne marche pas, & que d'ailleurs il ne porte pas bien la voile, il faudra avoir d'abord recours à la contrequille de fer, parce qu'indépendamment qu'elle tient lieu par ſa poſition d'une plus grande quantité de leſt, & que le vaiſſeau doit par conſéquent caller moins, elle tient également lieu de la contrequille en bois, que l'on feroit obligé de mettre pour ſe ſoutenir au plus près. Si malgré cette reſſource il ne marchoit pas & ne portoit pas la voile, comme on le deſire, il faudroit alors en venir à la mâture. La figure du vaiſſeau peut préparer les opérations à faire. En général un vaiſſeau aigu de l'avant, n'a pas beſoin d'une mâture ſi élevée Les frégates en ſont un exemple bien ſenſible. Les voiles les plus élevées tendent plutôt à faire plonger l'avant. qu'à le faire filler; & avec du vent frais, on les voit mieux marcher avec les quatre corps de voiles, qu'avec leurs huniers & les quatre corps de voiles. Les calculs diront mieux & avec préciſion de quelle quantité on doit peut-être rabaiſſer le point vélique, & ſi l'on peut, en le rabaiſſant, conſerver toujours la même ſurface de voiles, en donnant en envergure, ce qu'on ôte en chûte. Si enfin le vaiſſeau ne marchoit pas, malgré ces changemens, & qu'on s'apperçut que ſon peu de vîteſſe procédât de la trop forte impulſion de l'eau ſur la proue, on pourroit bien faire caller un peu plus l'arrière, pour élever l'avant de tout autant; mais un moyen nouveau, feroit de diminuer conſidérablement la pouſſée de l'eau ſur la proue, par le moyen d'une fourrure de ſimple bordage, dont un bout s'appuyeroit contre les bordages du vaiſſeau, &

l'autre contre le taillemer, comme la figure qui suit l'indique.



Senſibilité au Gouvernail.

On ſçait, & pluſieurs livres l'ont dit avant nous, quelle eſt la figure qu'il faut donner à la carêne, pour qu'un vaiſſeau ſoit ſenſible à ſon gouvernail, indépendamment des voiles, & la figure particulière de ce même vaiſſeau, pour le rendre vif dans ſes mouvemens, par le ſecours immédiat des voiles; mais je le répete encore, c'eſt d'un vaiſſeau à conſtruire, dont on a parlé, & il n'y a plus rien à dire à ce ſujet. On ne s'occupe dans ce Mémoire que des moyens à donner pour les vaiſſeaux à qui on trouve des défauts; ceux qui cherchent les remèdes à ces défauts, les éviteront, ſans doute, quand ils travailleront à la compoſition d'un plan.

Un vaiſſeau, qui n'eſt pas ſenſible à ſon gouvernail, manque d'abord de vîteſſe; enſuite on doit ſoupçonner que ſon endroit le plus large eſt trop rapproché de l'arrière, & que cet arrière eſt trop nourri.

On a dit plus haut, comment on pouvoit donner de la vîteſſe aux vaiſſeaux; mais on ne peut retrécir un vaiſſeau trop large, ni aiguiſer les lignes d'eau trop renflées de l'arrière, il faut en venir néceſſairement à faire plonger le vaiſſeau de l'avant & à augmenter cependant l'impulſion des filets d'eau ſur le gouvernail. On le pourra en augmentant un peu ſa largeur, ſans cependant porter cette augmentation trop loin, de peur de fatiguer les ferrures; mais on pourra enfoncer ce gouvernail dans l'eau, & le prolonger de l'épaiſſeur d'une còntrequille en bois, qui auroit la forme d'un coin, dont la tête ſeroit du côté du gouvernail, & l'angle ſe termineroit au milieu du vaiſſeau. Par ce moyen l'eau qui courroit le long de cette eſpèce de contrequille piramidale, agiroit avec d'autant plus d'efficacité ſur le gouvernail, qu'elle ne ſeroit pas détournée dans ſa courſe, comme le ſont les lignes d'eau plus élevées, qui ne peuvent ſe rendre au gouvernail, qu'apres avoir paſſé par le milieu, qui les écarte toujours trop de l'axe.

R O U L I S.

On ſe plaint moins de la vivacité des roulis, que de leurs fréquences & de leurs longueurs. J'ai vu des vaiſſeaux, qui courant vent arrière & même vent largue, ſe ſubmergeoient périodiquement des deux bords juſqu'à la ſeconde batterie; mais ces vaiſſeaux que j'avois auparavant calculés, avoient leur métacentre bien peu au deſſus du centre de gravité, & leur flotaiſon trop peu ſoutenue ne donnoit pas aſſez de priſe à la pouſſée vertitale.

Du leſt de fer placé ſur la carlingue, ou près de la carlingue, auroit ſans doute diminué le roulis, une contrequille de fer, moins peſante encore que ce leſt auroit produit le même effet.

Tout au contraire, quand on ſe plaint de la vivacité des roulis, malgré la légèreté de l'arrimage, je n'y vois pas d'autre moyen que de placer des poids à la tête des mâts majeurs. Ils feroient l'effet contraire de cette contrequille, parce que dans les deux cas, sans toucher au méta-centre, on éleve ou on abaisse le centre de gravité. Je m'en remets toujours aux calculs, pour la quantité du poids à mettre.

TANGAGE.

Un vaisseau tangue, dont l'avant est trop aigu, ou trop plein, ou trop chargé de l'avant. Dans ces trois hypothèses, il faut soulager cette partie, parce que si c'est pour être trop aigu qu'il tangue, il s'enfoncera d'autant moins qu'il sera plus léger; si c'est pour être trop plein, il ne s'enfonce pas tant dans son tangage; mais le mouvement en est d'autant plus rude, & il met en danger la mâture: si c'est pour être trop chargé, il faut retirer autant qu'il est possible les poids vers le milieu.

Si un Vaisseau est trop ardent.

Quand un vaisseau s'élance trop dans la ligne du vent, & que le gouvernail ne le ramene qu'avec peine dans la route indiquée, ou c'est un vice dans la forme du vaisseau, ou c'en est un dans la position des mâts. S'il est dans la forme du vaisseau, qu'il ait, par exemple, l'avant extrêmement taillé, une étrave droite & peu de différence de tirant d'eau; il n'y a pas à balancer, il faut faire plonger l'arrière, & par-là écarter du gouvernail le point de rotation, c'est-à-dire, prolonger le bras du levier auquel le gouvernail est appliqué.

Si ce défaut vient de la voilure, l'expérience y peut quelque chose, mais il vaut encore mieux s'en assurer sur un plan. On verra alors que le grand mât, ou le point vélique

vélique de ce mât, n'eſt pas placé en raiſon de celui du mât de mizaine, & que celui-ci eſt trop en arrière, & l'autre auſſi. On peut corriger ce défaut par le déplacement d'un ſeul mât, dès qu'on connoît la diſtance du point de converſion à un de ces mâts quelconques. Tout le monde ſçait qu'il n'y a plus qu'à diviſer la ſomme de la ſurface des voiles, multipliée par la diſtance à ce point de converſion, par la ſomme de la ſurface des voiles de l'autre mât; le quotient déterminera la place de ce dernier mât.

Si le Vaiſſeau arrive trop promptement.

Ce défaut eſt rare, mais il peut ſe trouver. Alors quant à la forme du vaiſſeau, on ſupprime par l'application d'un taille-mer la plus grande partie de l'élancement. On fait plonger un peu plus l'avant par la tranſpoſition du leſt & des autres parties peſantes de l'arrimage; & ſi on s'apperçoit que ce défaut provient plutôt de la poſition des mâts, on fait les changemens contraires à ceux que nous venons d'indiquer pour un Vaiſſeau trop ardent.

Toutes ces obſervations ſont communes à celles qu'on peut faire ſur l'allure du plus près, ſur le vent largue & le vent arrière.

J'aurois pu entrer dans un plus grand détail, & je l'aurois même deſiré, ſi le temps me l'eût permis; j'aurois voulu ſurtout avoir celui de finir entièrement quelques projets de vaiſſeaux marchands, & démontrer la poſſibilité de partager avec les Hollandois le commerce d'exportation, en donnant à nos vaiſſeaux marchands la forme néceſſaire pour porter beaucoup, & naviguer avec un équipage peu nombreux. Tout conſiſte à les allonger plus qu'ils ne ſont,

& à les retenir considérablement pour diminuer mâture, voilure, agrêts, arcres, & par conséquent l'équipage.

FIN.

Fig. 1.ere

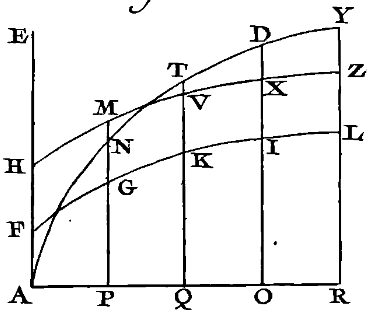


Fig. 3.

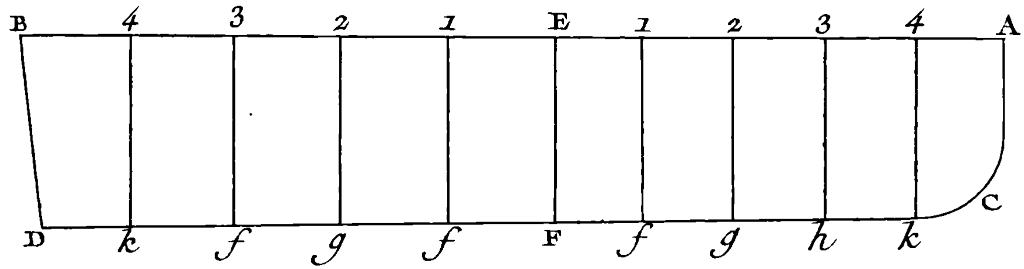


Fig. 4.

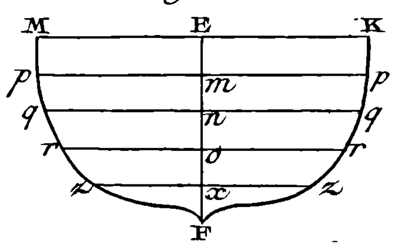
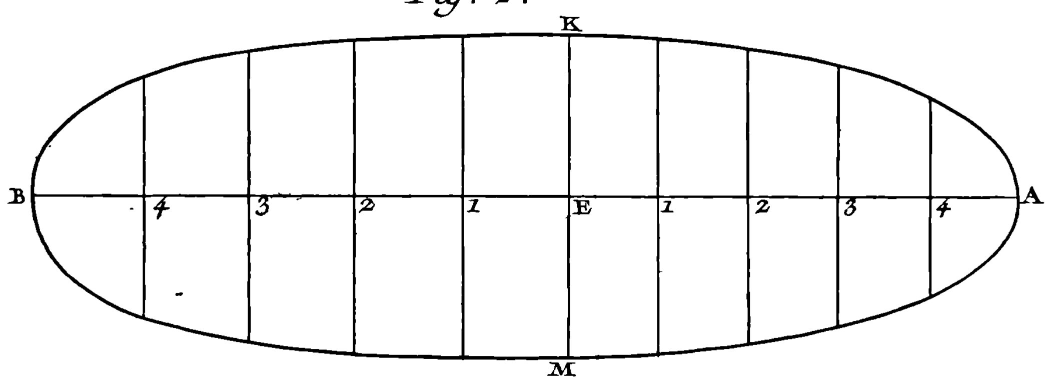


Fig. 2.

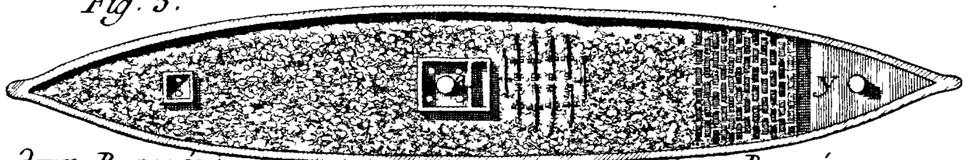


Renvoy.

A. Grand Mât.
B. Mât de Misaine.
C. Mât d'Artimont.
D. Mât de Beaupré
a. Archipompe du grand Mât.
b. Fosse aux Cables.
c. Fosse aux Lions.
d. Archipompe de Misaine.
e. Grand Ecoutille.
f. Ecoutille aux vivres.
φ. Soute au Voilier.
g. Soute au Calfat.
h. Soute au Pilote.
i. Soute au Charpentier
y. Maga.in aux moufles, poulies &.
k. Soute aux Gardes Marines.
l. Soute au Charbon.
m. Soute au Chirurgien.
n. Soute au Capitaine.
o. Soute aux Legumes.
p. Cave du Capitaine.
q. Soute au Pain.
r. Chambre aux Voiles.
s. Soute aux Poudres.
t. Caissons à Poudre.

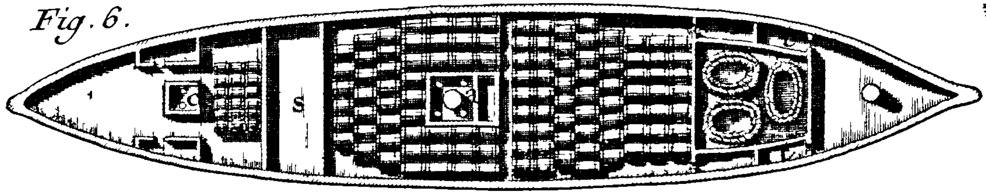
Plan en Lest du Vaisseau l'Altier de 64 Canons.
Armé en 1762.

Fig. 5.



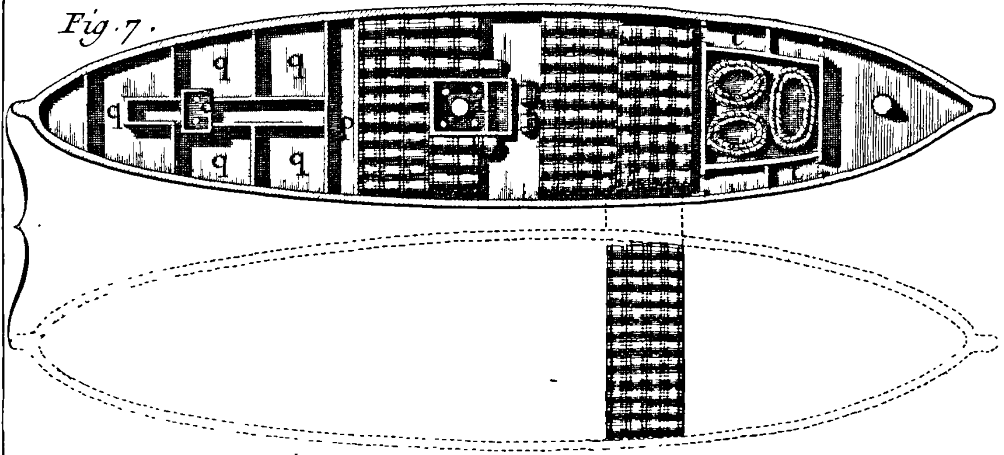
1.er Plan des Bariques du Vaisseau l'Altier.

Fig. 6.



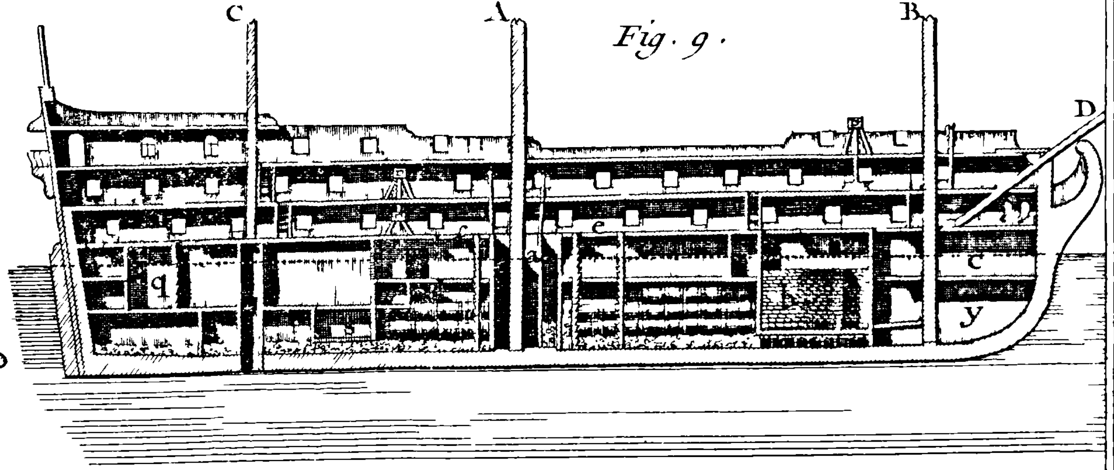
2.e et 3.e Plan des Bariques du Vaisseau l'Altier.

Fig. 7.



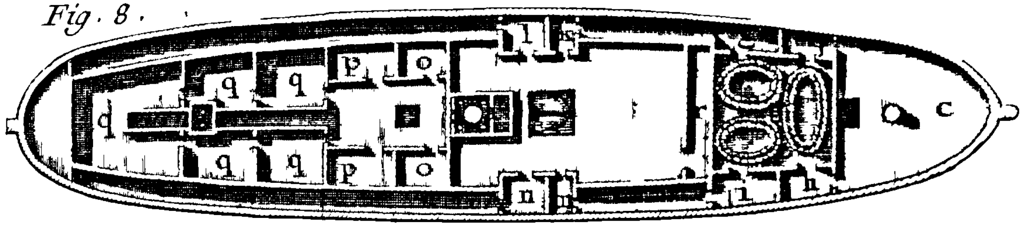
Coupe sur la longueur du Vaisseau l'Altier.

Fig. 9.



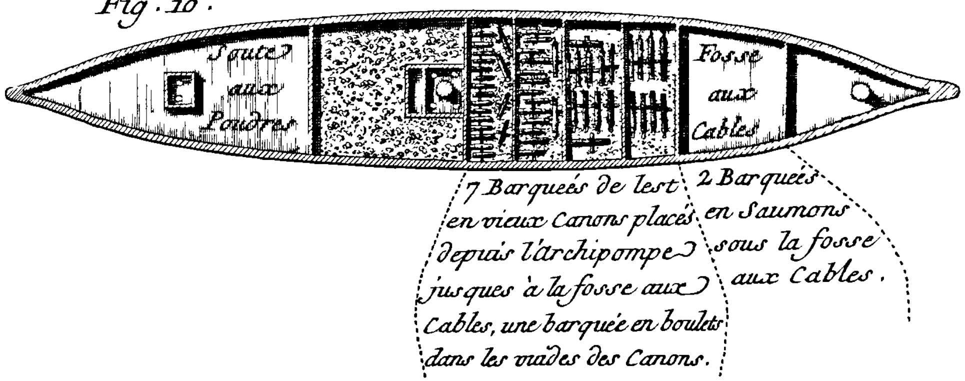
Plan à fleur d'eau du Vaisseau l'Altier.

Fig. 8.



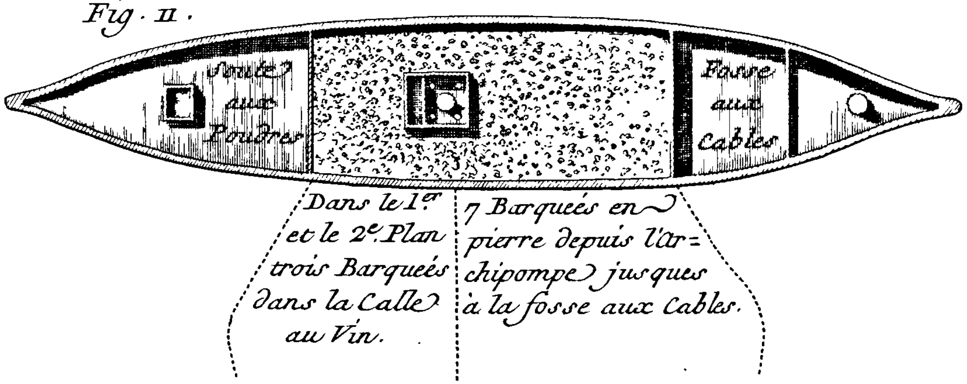
1.er Plan en Lest du Vaisseau le Fantasque de 64 Canons Armé en 1760.

Fig. 10.



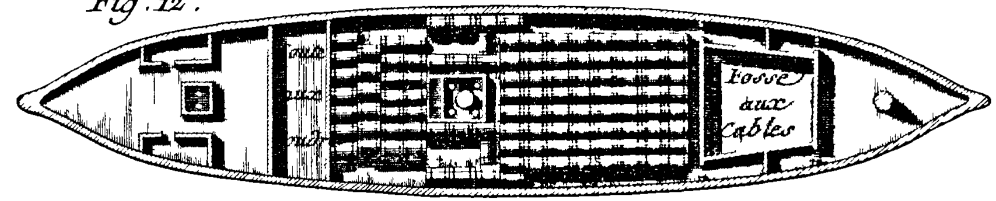
2.e Plan en Lest.

Fig. 11.



1.er Plan des Bariques.

Fig. 12.



2.e et 3.e Plan des Bariques.

Fig. 13.

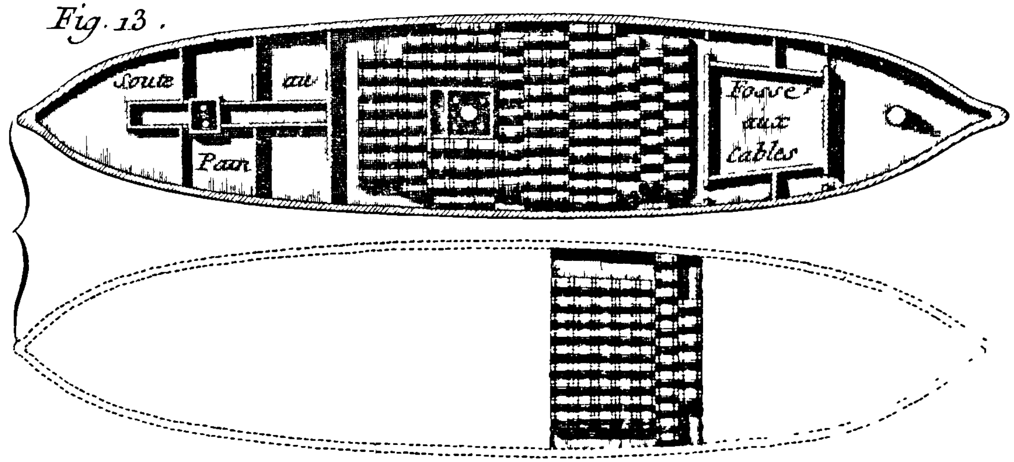


Fig. 14.

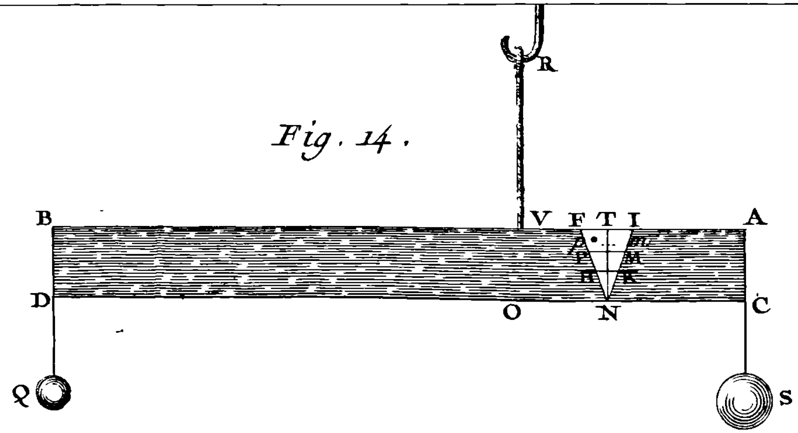


Fig. 15.

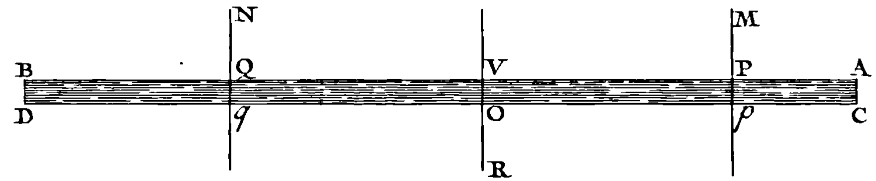


Fig. 16.

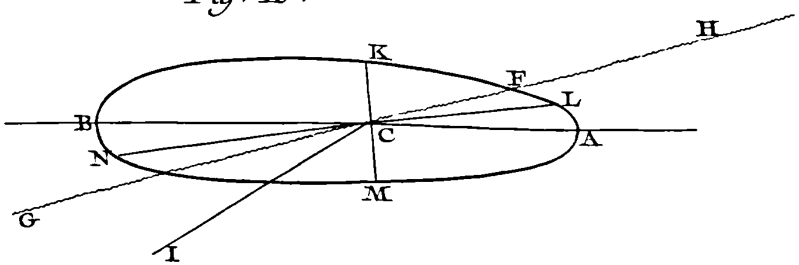


Fig. 17.

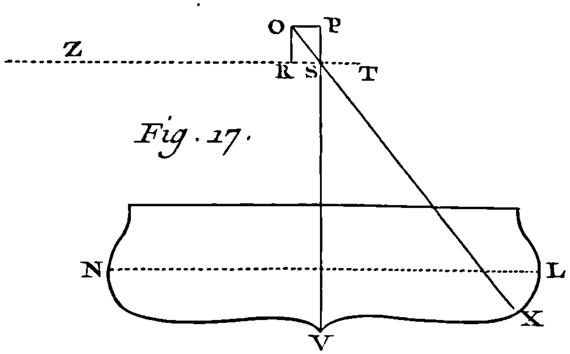


Fig. 18.

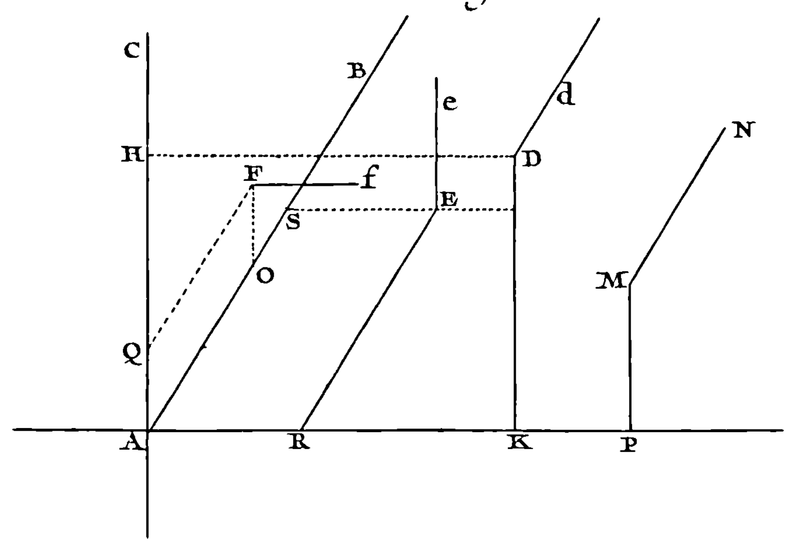


Fig. 19.

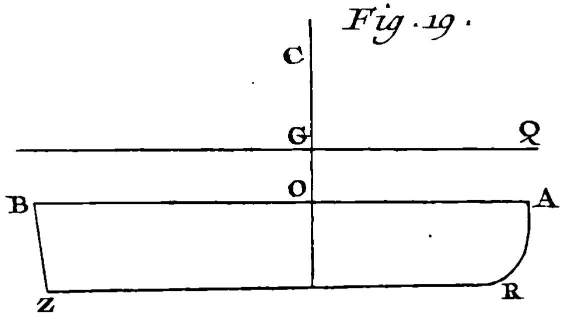


Fig. 22.

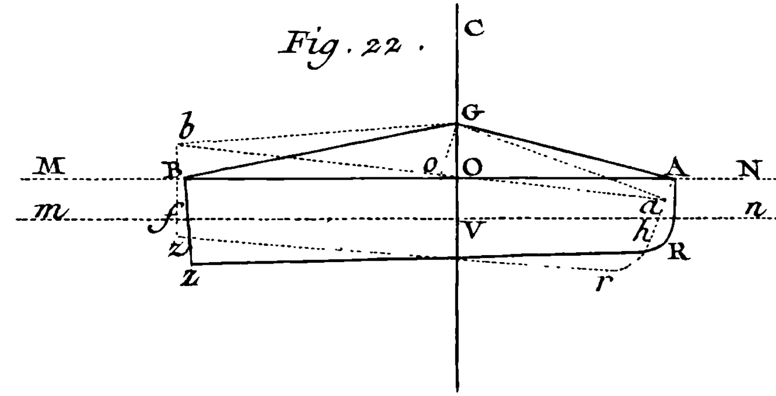


Fig. 20.

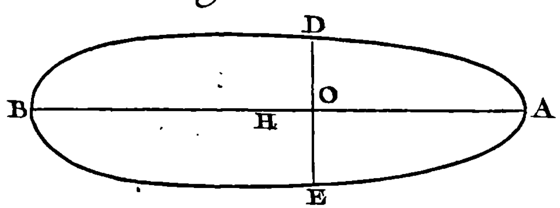


Fig. 21.

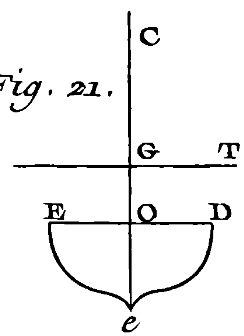
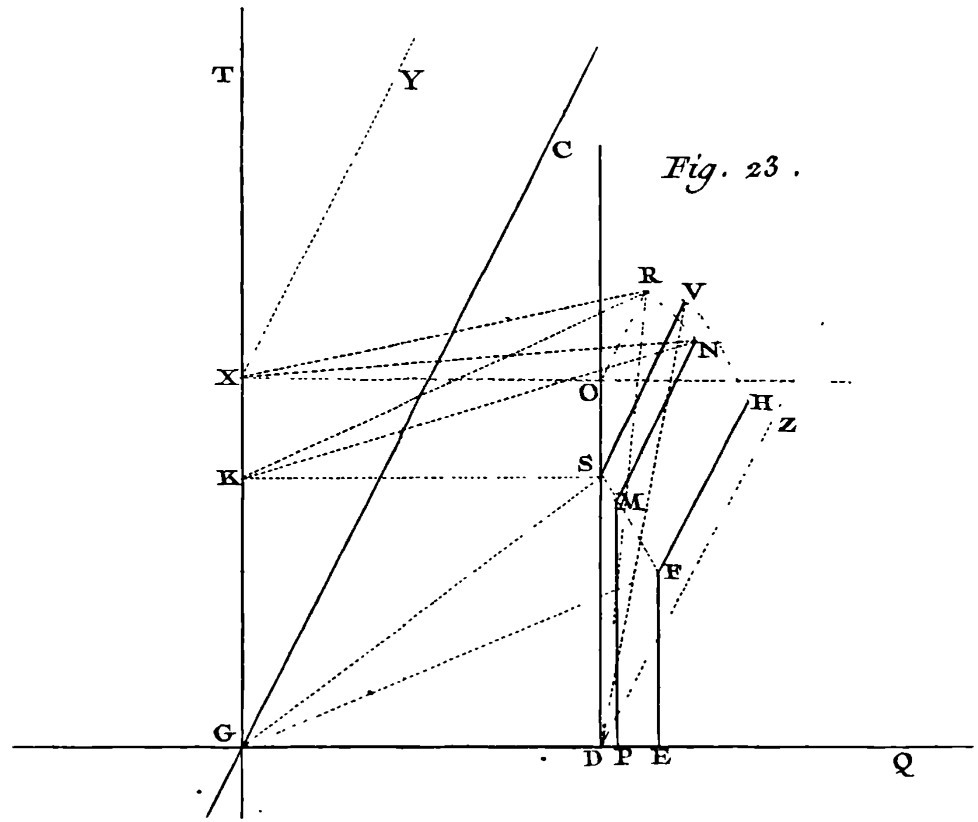


Fig. 23.



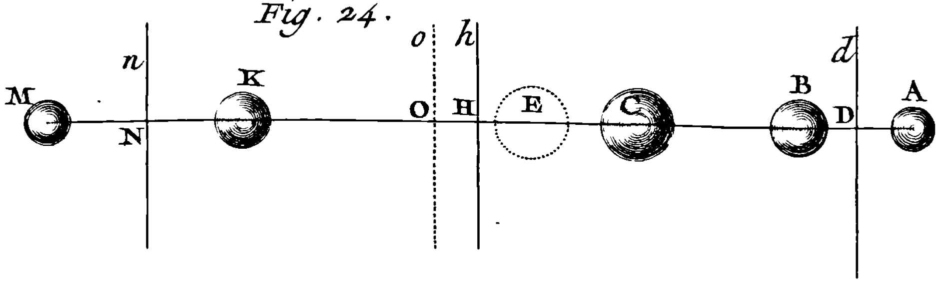


Fig. 24.

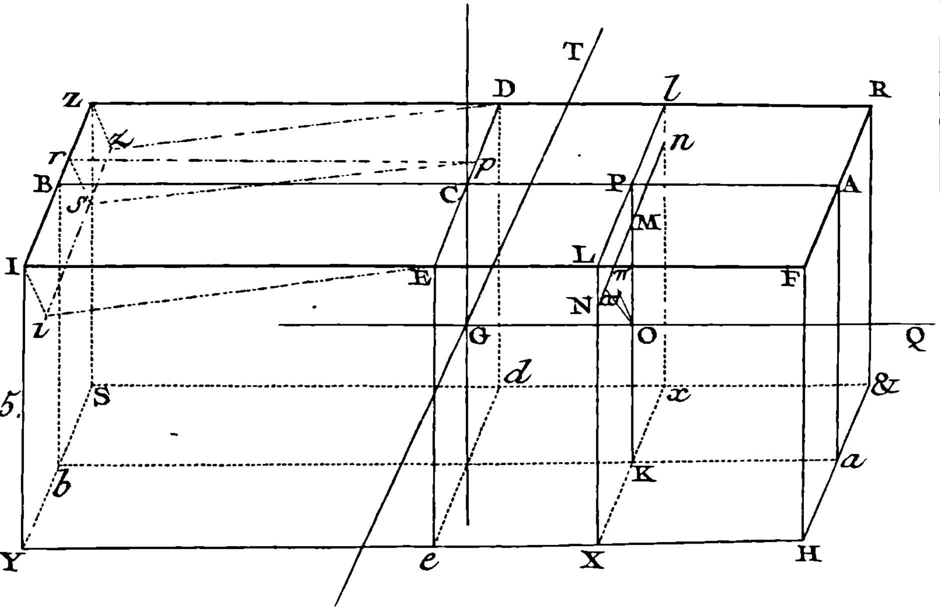


Fig. 25.

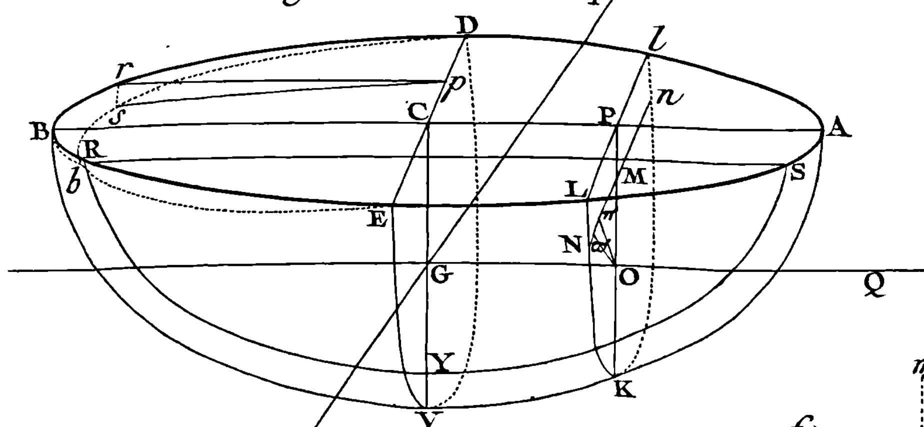


Fig. 26.

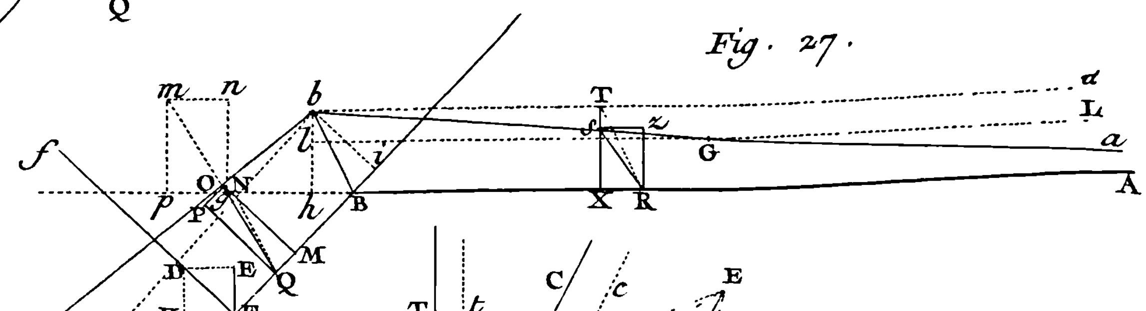


Fig. 27.

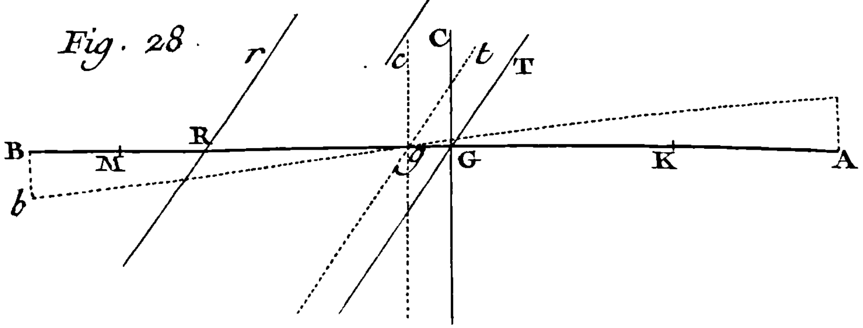


Fig. 28.

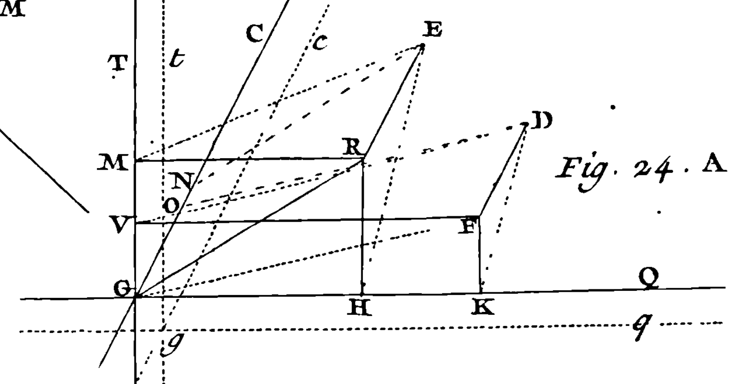


Fig. 24. A.

Seconde Piece par Mr. Bourdé

Fig. 1ere.

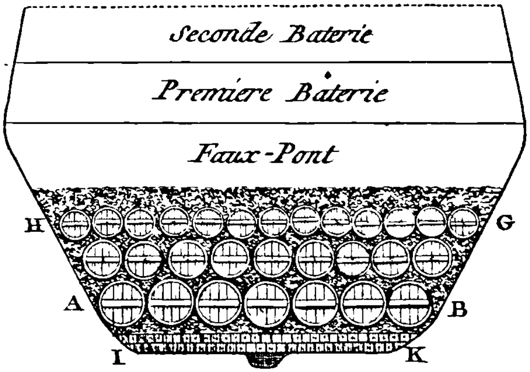


Fig. 2e.

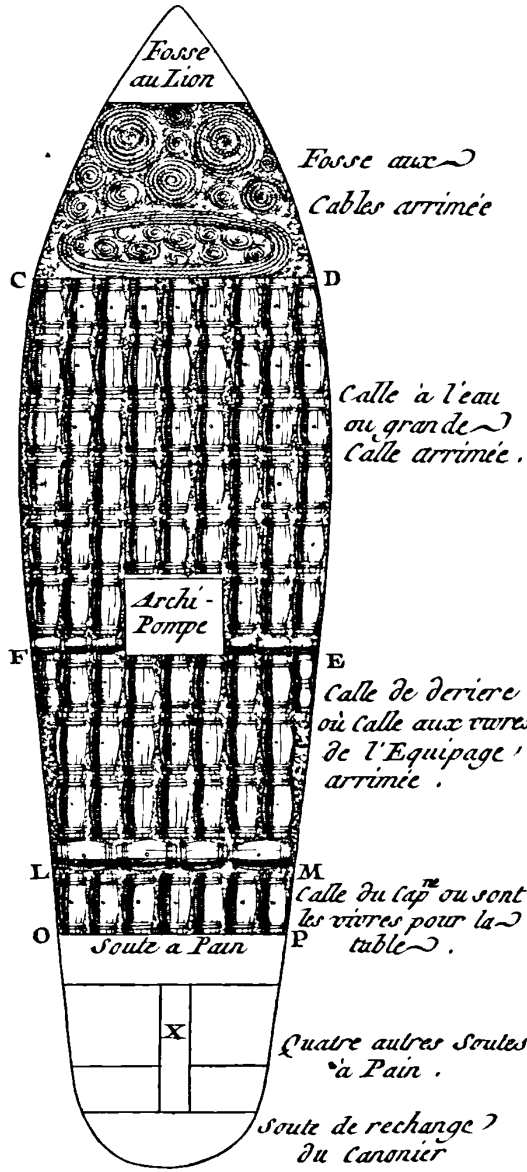
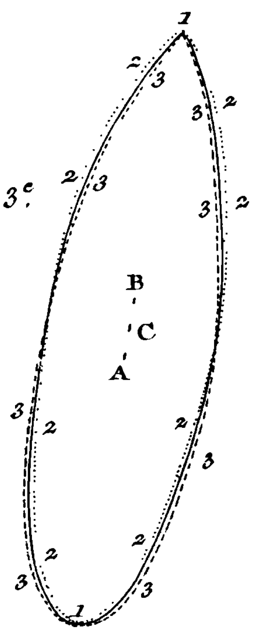


Fig. 3e.



RECHERCHES
SUR LES ALTERATIONS
QUE LA RÉSISTANCE DE L'ETHER
PEUT PRODUIRE
DANS LE MOUVEMENT MOYEN
DES PLANETES.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

LE ſiſtême de la gravitation univerſelle, né en Angleterre, combattu d'abord en France, adopté enfin dans toutes les Académies, eſt regardé aujourd'hui comme une verité experimentale des plus inconteſtables. Il doit cet honneur à l'avantage qu'il a d'expliquer les Phénomènes céleſtes d'une manière ſimple, claire & rigoureuſe. Les Géometres de nos jours ſemblent avoir poſé ou préparé les dernières pierres de l'édifice : on connoît leurs profondes recherches sur la figure de la Terre, la théorie de la Lune, celle de Saturne & de Jupiter, la précession des Équinoxes & la nutation de l'axe de la Terre, &c.

Cependant comme l'imperfection actuelle de l'Analyse ne permet pas de résoudre en toute rigueur les problêmes concernant les mouvemens des Planetes, & qu'on est obligé de changer un peu, après un certain temps, le lieu moyen des Planetes, pour faire quadrer parfaitement les observations avec les tables construites d'après la théorie Neutonienne, on a douté s'il falloit attribuer ces legeres altérations du mouvement moyen uniquement aux petites quantités négligées dans le calcul, ou s'il ne faudroit pas en rejetter une partie sur la résistance d'un milieu dans lequel nageroient les Planetes. C'est pour éclaircir ces doutes que l'Académie Royale des Sciences de Paris demande aujourd'hui *Si les Planétes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leurs mouvements.*

On voit donc qu'il ne s'agit pas ici de retablir les tourbillons Cartésiens si justement proscrits par Neuton, ni d'employer tout autre fluide dont l'impulsion ou la résistance soit du même ordre de force que la gravitation des Planetes sur le Soleil. Mais on ne peut pas d'ailleurs s'empêcher d'admettre dans les espaces célestes une matière très-rare & très-déliée ; car outre que plusieurs Phénomênes paroissent indiquer que le Soleil est environné d'une Atmosphère qui s'étend au dela des régions de Saturne, la lumière est semée de tous côtés dans les Cieux, soit que cette matière émane immédiatement du corps du Soleil, soit qu'elle forme un fluide infiniment divisé, répandu dans l'espace, qui par ses ondulations excite dans nos organes la sensation de la vision. Le problême qu'on propose & que j'entreprens de resoudre se réduit à savoir si le fluide simple ou composé qui environne le Soleil a quelque influence sur le mouvement des planetes.

Je n'adopte ici aucun sistême sur la nature de ce fluide. Pour ne rien donner à l'esprit de conjecture, je supposerai simplement que les Planetes traversent une matière quelconque très-rare & très-deliée, désignée sous le nom général d'*Éther* ou de matière *Éthérée*; & je chercherai les altérations que cette matière doit produire dans leurs mouvemens. Si les altérations ainsi déterminées par le calcul sont sensibles, & qu'elles s'accordent avec les observations, la ſuppoſition ſera realiſée, & l'on en pourra même tirer quelques lumières ſur la loi des denſités de la matière Éthérée, à diférentes diſtances du Soleil. Si aucontraire on ne trouve point d'altération obſervable, on en conclura que la ſubſtance de la lumière ne réſiſte pas, dumoins ſenſiblement, au mouvement des Planetes, & que dans le cas où l'on voudroit admettre autour du Soleil une Atmoſphère diſtincte du fluide qui forme la lumière, cette Atmoſphère eſt d'une rareté qui équivaut à une abſence abſoluë.

Cet ouvrage ſera diviſé en trois parties dont les deux premières contiendront toutes les formules Analytiques du problême, & la troiſième ſera une application de ces formules aux obſervations.

PREMIÉRE PARTIE.

Détermination de l'orbite des Planetes principales & des Cometes dans un milieu peu réſiſtant.

§. I. LA plûpart des Auteurs qui ont écrit ſur la réſiſtance que les milieux oppoſent au mouvement des corps qui les traverſent, ſuppoſent que cette réſiſtance eſt en raiſon compoſée de la denſité du milieu, du quarrré du Diamêtre du mobile, & du quarré de ſa viteſſe; ce qui n'eſt pas éxact en rigueur. Néanmoins nous ferons ici la même ſuppoſition parcequ'elle eſt ſenſiblement vraie pour les milieux rares & peu réſiſtants. De plus, nous regarderons le Soleil comme abſolument immobile dans l'eſpace abſolu, parceque le mouvement de cet aſtre eſt en effet peu conſidérable, & qu'il ne peut pas en réſulter d'erreur ſenſible dans ces recherches. Ainſi le problème général que nous avons à réſoudre conſiſte à déterminer le mouvement d'une Planete ou d'une Comete autour du Soleil conſideré comme fixe, en ſuppoſant cette Planete ou Comete ſoumiſe à l'action de la péſanteur, & d'une réſiſtance très-petite & proportionelle au produit de la denſité de l'Éther par le quarré du Diamêtre de l'aſtre mobile & par le quarré de la viteſſe du même aſtre.

PROBLÉME FONDAMENTAL.

Fig. 1 §. 2. *Trouver la Nature de la courbe* P M N *décrite par un mobile lancé ſuivant une direction quelconque, & ſoumis à l'action de deux forces dont l'une tende ſans ceſſe vers un point fixe S, & dont l'autre ſoit dirigée à chaque inſtant ſuivant l'élement de la courbe ?*

SOLUTION.

Soient S M, S m deux raions vecteurs conſécutifs ; C M, C m les raions correſpondants de la dévéloppée. Du centre S avec le raion conſtant S Q & le raion variable S M ſoient décrits les arcs concentriques Q q, M Z.

Suppoſons	S Q	$= 1$
	Q q	$= dx$
	S M	$= r$
	m Z	$= dr$
	M Z	$= rdx$
	M m	$= ds$
	C M	$=$ R
	La force tendante au centre S	$=$ F
	La force dirigée ſuivant m M	$=$ K
	La viteſſe le long de M m	$= u$
	L'inſtant employé à parcourir M m . .	$= dt$

Cela poſé, ſur le raion vecteur S m je prens la partie mh pour repréſenter la force F, & je decompoſe cette force en deux autres, l'une mg dirigée ſuivant la courbe, l'autre mn perpendiculaire à la courbe. Il eſt clair que la première eſt exprimée par $F \times \frac{mg}{mh} = F \times \frac{mZ}{Mm} = \frac{F\,dr}{ds}$, la ſeconde par $F \times \frac{mn}{mh} = F \times \frac{MZ}{Mm} = \frac{F\,r\,dx}{ds}$. Or le mobile étant redardé le long de M m par la force $\frac{F\,dr}{ds}$, & par la force K qui agit toujours dans un ſens contraire à ſon mouvement, on aura par le principe ordinaire des forces accéleratrices, l'équation

$$(A)\ u\,du = \left(-\frac{F\,dr}{ds} - K\right) ds = -F\,dr - K\,ds.$$

De plus il eſt évident qu'en vertu de la force $\frac{F\,r\,dx}{ds}$ le mobile décriroit le cercle dont C M eſt le raion ; ainſi on aura par le Theorême de Huighens, l'équation

$$(B)\quad \frac{uu}{R} = \frac{F\,r\,dx}{ds}.$$

Si dans ces deux équations on met pour u ſa valeur $\frac{ds}{dt}$, pour du ſa valeur $\frac{dt\,dds - ds\,ddt}{dt^2}$ dans laquelle ds & dt ſont variables, pour R ſa valeur $-\frac{dr\,ds^2}{2\,dr\,dx\,ds - r\,dx\,dds}$ dans laquelle l'angle dx eſt conſtant, on aura les deux transformées;

$$(C)\quad \frac{dt\,ds\,dds - ds^2\,ddt}{dt^3} = -F\,dr - K\,ds,$$

$$(D)\quad \frac{2\,dr\,ds^2 - r\,ds\,dds}{r\,dt^2} = F\,dr.$$

Comparant enſemble les deux valeurs de $F\,dr$ & réduiſant, on aura

$$(E)\quad 2\,dr - \frac{r\,ddt}{dt} = -\frac{K\,r\,dt^2}{ds}.$$

Enfin chaſſant ds & dds de l'équation (D) par le moyen de l'équation $ds^2 = dr^2 + rr\,dx^2$, & ſuppoſant de plus $r = \frac{1}{z}$, & par conſéquent $dr = -\frac{dz}{zz}$, $ddr = -\frac{ddz}{zz} + \frac{2\,dz^2}{z^3}$, on trouvera l'équation

$$(F)\quad ddz + z\,dx^2 - F\,zz\,dt^2 = 0.$$

Les deux équations (E) & (F) serviront à construire l'orbite & à trouver le tems de la révolution de la Planete. *C.Q. F.T.*

§. 3. On sait que chaque Planete principale ou chaque Comete gravite vers le Soleil suivant un rapport composé de la masse & du quarré inverse des distances, & qu'outre cette tendance principale, elle éprouve encore l'action des autres Planétes. Or on peut toujours reduire à chaque instant toutes ces forces qui agissent sur la Planete proposée à trois seulement, dont la premiere est perpendiculaire au plan de l'orbite, la seconde est dirigée suivant le raion vecteur, la troisiéme est dirigée suivant l'élement de la Courbe. De ces trois forces, la premiere tend à changer l'inclinaison de l'orbite & à mouvoir ses nœuds : les deux autres sont les seules qu'il faille considerer rélativement au mouvement dans l'orbite. En combinant ces deux dernières forces avec la résistance de la matière Etherée qui agit suivant l'élement de la courbe, on voit que le mouvement dans l'orbite est produit par deux forces, dont l'une est dirigée vers le Soleil, l'autre est dirigée suivant l'élement de la courbe, & que par conséquent ce mouvement est représenté dans toute sa généralité par nos deux équations fondamentales (E) & (F). Il ne s'agit donc plus que d'integrer ces deux équations. Mais avant que d'entreprendre une telle operation, il faut observer que si l'on a égard tout à la fois aux différentes forces dont nous venons de parler, les formules du mouvement de la Planete contiendront 1°. Les mêmes termes qu'on trouve, abstraction faite de la résistance de la matière Étherée; 2°. les termes provenants de l'action du Soleil, affectés du coéfficient de la résistance de la matière Etherée; 3°. Les termes provenants de l'action perturbatrice des autres Planetes, affectés du coéfficient de la même résistance. Or la première classe de termes a été suffisamment déterminée par les célebres MM. Euler, d'Alembert, Clairaut; & la troisiéme classe doit être entierement négligée comme contenant des quantités infiniment petites du second ordre. Ainsi il suffit dans cette recherche de combiner la résistance de la matière Étherée avec la gravitation de la Planete sur le Soleil, & de supposer en conséquence que si la résistance de la matiére Étherée étoit nulle, les orbites des Planetes seroient des Ellipses rigoureuses.

§. 4. Cela posé, il est facile de trouver les expressions des forces F & K. Car 1°. en nommant M la masse du Soleil, N celle de la Planete mobile, on aura $F = \frac{M+N}{rr} = (M+N)zz$. On peut même négliger N en comparaison de M, & prendre simplement $F = Mzz$. 2°. En supposant que la densité de la matière Étherée est proportionelle à une puissance donnée ρ du raion vecteur, & nommant b le raion de la Planete, θ le rapport de la circonférence au raion, f le rayon vecteur S P au premier instant du mouvement, D la densité de l'Éther en ce même instant, m la vitesse initiale, P la resistance que la matière Étherée, sous la densité D, oppose à un plan donné aa mu directement contr'elle avec la vitesse m; il est clair qu'on aura $K = \frac{P}{N} \times \frac{Dr^{\rho}}{f^{\rho}} \times \frac{\theta b^2 u^2}{4 a^2 m^2}$ expression qu'il est à propos de mettre sous une forme qui fasse connoître le rapport de la force K à la gravitation de la Planete sur le Soleil. Pour cela, on remarquera d'abord que comme la surface plane aa est arbitraire, on peut supposer $\frac{\theta bb}{4aa} = 1$, ou $a^2 = \frac{\theta bb}{4}$. Deplus nous supposerons que PHKQ étant l'Ellipse rigoureuse que la Planete décriroit dans le vuide, la Planete parte du Perihélie P avec la vitesse m: alors nommant c la distance S O des deux foyers de l'Ellipse PHKQ, on trouvera facilement $mm = \frac{2M(f+c)}{f(2f+c)}$. Enfin soit ε le rapport de la force accélératrice $\frac{P}{N}$ à la gravitation de la Planete Perihélie sur le Soleil, c'est-à-dire, soit $\frac{P}{N} = \frac{\varepsilon M}{ff}$. On aura $K = \frac{\varepsilon D(2f+c)r^{\rho}uu}{f^{\rho}(2ff+2fc)}$ équation dans laquelle ε est un nombre constant qu'on déterminera dans la suite. Nous prendrons, pour abréger, la quantité constante

Fig. 2

$$\frac{\mathfrak{C}\,D\,(2f+c)}{f^{\rho}\,(2ff+2fc)}=n\text{, ensorte que } K = n\,r^{\rho}\,uu = \frac{n\,r^{\rho}\,ds^2}{dt^2}.$$

§. 5. Si maintenant on substitue à la place de K sa valeur dans l'équation (E), on aura $2\,dr - \frac{r\,ddt}{dt} = -n\,r^{\rho+1}d\,s$, ou bien $\frac{ddt}{dt}$ $-\frac{2\,dr}{r} = nr^{\rho}ds$, dont l'integrale est $L.dt - L.A\,dx - L.rr = S.n\,r^{\rho}ds$, ou bien $L.\frac{dt}{Arrdx} = S.\,n\,r^{\rho}\,ds$; d'ou l'on tire $\frac{dt}{Arrdx} = 1 + S.nr^{\rho}ds + \frac{n^2}{2}(S.\,r^{\rho}\,ds)^2 + \&c.$ Donc en négligeant tous les termes qui contiendront le quarré & les autres puissances du coéfficient très-petit n,

$$dt = A\,r\,r\,dx\,(1 + nS.\,r^{\rho}\,ds).$$

Deplus, le facteur $S.\,r^{\rho}ds$ étant affecté du coéfficient n, on peut mettre à la place de r^{ρ} & de ds les valeurs que ces quantités auroient eues dans l'ellipse rigoureuse. Ainsi $S.\,r^{\rho}\,ds$ est une fonction donnée de l'Angle x, fonction que je désigne par X, & qui doit s'évanouir, lorsque $x = 0$. On aura donc $dt = A\,r\,r\,dx\,(1+nX)$.

Pour déterminer la constante A, on observera que comme la Planete est supposée partir du Périhélie P où le rayon vecteur est perpendiculaire à l'orbite, on aura $\frac{dt}{Affdx}=1$, ou bien $\frac{1}{fm} = A$; donc en général

$$dt = \frac{rr\,dx + nrr\,X\,dx}{fm},$$

donc $dt^2 = \frac{r^4\,dx^2\,(1+2nX)}{f^2\,m^2}$ sensiblement. Mettons cette valeur de dt^2 dans l'équation générale (F); mettons aussi pour F sa valeur

Mzz, & nous aurons

$$(G)\quad ddz + zdx^2 - \frac{(M + 2nM.X)}{ffmm}dx^2 = 0$$

équation fondamentale du problême de la résistance de l'Éther au mouvement des Planetes.

§. 6. L'équation que nous venons de trouver est également applicable aux orbites des Planetes & des Cometes. Mais comme les orbites des Planetes, si on excepte celle de Mercure, sont assez peu excentriques, je crois devoir examiner d'abord & séparement le cas particulier où l'excentricité est fort petite. La méthode dont je me servirai pour resoudre ce problème qui a été deja traité par M. d'Alembert, est nouvelle & s'étend à d'autres questions du même genre, comme on le verra dans un moment.

Construction de l'orbite, lorsque l'excentricité est fort petite.

§. 7. L'orbite étant presque circulaire, il est évident que la densité de l'Éther peut être supposée constante pour la même Planete. Ainsi on aura $p = 0$. Deplus on aura $mm = \frac{2M(f+c)}{f(2f+c)} = \frac{M}{f} + \frac{cM}{2ff}$, en négligeant le quarré & les puissances plus hautes de c. Enfin on aura $nX = n.fx$ sensiblement. Par conséquent l'équation générale (G) deviendra ici

$$(H)\quad ddz + zdx^2 - \frac{dx^2}{f} + \frac{cdx^2}{2ff} - 2nxdx^2 = 0.$$

§ 8. Supposons qu'on ait à intégrer cette équation générale

$$ddz + Azdx^2 + Bx^p dx^2 + Cdx^2 = 0.$$

dont la notre (H) n'eſt qu'un cas particulier, & dans laquelle p eſt un nombre entier poſitif, A, B, C, des coëfficients quelconques.

En faiſant $Az + Bx^p = y$, & par conſéquent $Adz + pBx^{p-1}dx = dy$, $Addz + Bp.(p-1)\ x^{p-2}dx^2 = ddy$, on aura une autre équation de cette forme

$$ddy + Dydx^2 + Ex^{p-2}dx^2 + Fdx^2 = 0;$$

Faiſant encore $Dy + Ex^{p-2} = s$, on aura une transformée dans un terme de laquelle x ſera élevée à la puiſſance $p-4$; & ſi l'on continue à faire des transformations pareilles, il eſt clair que quelque grand que puiſſe être le nombre p, on parviendra à une équation dans laquelle x ne ſe trouvera plus. Par conſéquent l'intégrale de l'équation générale $ddz + Azdx^2 + Bx^pdx^2 + Cdx^2 = 0$ dépend de l'intégrale d'une équation de cette forme

$$ddq + Gqdx^2 + Hdx^2 = 0:$$

Or ſi l'on multiplie tous les termes de cette dernière équation par q, & qu'on intégre, on aura $\frac{dq^2}{2} + \frac{Gqqdx^2}{2} + Hqdx^2 = Ldx^2$, ou bien $dx = \frac{dq}{\surd[2L - Gqq - 2Hq]}$

qui dépend en général de la quadrature du cercle ou de l'Hyperbole, ſuivant les ſignes des coëfficients G, H.

§. 9. Dans l'application de la méthode précédente à notre équation $ddz + zdx^2 - \frac{dx^2}{f} + \frac{edx^2}{2ff} - 2nxdx^2 = 0$, on a $z - 2nx = q$, $G = 1$, $H = -\left(\frac{1}{f} - \frac{e}{2ff}\right)$, & parconſéquent

$$dx = \frac{dq}{\sqrt{[2L + \left(\frac{2}{f} - \frac{c}{ff}\right) q - qq]}}.$$

La constante L ajoutée en intégrant doit ici être telle que l'angle x étant zero, & $z = \frac{1}{f}$, on ait $\frac{dz}{dx} = 0$; & par conséquent $\frac{dq}{dx} = -2n$; donc $2L = 4nn - \frac{1}{ff} + \frac{c}{f^3}$. Ainsi

$$dx = \frac{dq}{\sqrt{[4nn - \frac{1}{ff} + \frac{c}{f^3} + \left(\frac{2}{f} - \frac{c}{ff}\right) q - qq]}}$$

d'ou l'on tire aisément

$$q = \left(\frac{1}{f} - \frac{c}{2ff}\right) - \sqrt{[4nn + \frac{cc}{4f^4}]}.\text{cos.}(x + C)$$

& par conséquent

$$z = 2nx + \left(\frac{1}{f} - \frac{c}{2ff}\right) - \sqrt{[4nn + \frac{cc}{4f^4}]}.\text{cos.}(x + C).$$

L'arc constant C ajouté en intégrant doit être tel que $x = 0$ donne $z = \frac{1}{f}$; d'où il suit qu'on aura cos. $C = -\frac{c}{\sqrt{[16n^2f^4 + cc]}}$

$\text{sin.}C = -\frac{4nff}{\sqrt{[16n^2f^4 + cc]}}$; donc

$$z = 2nx + \left(\frac{1}{f} - \frac{c}{2ff}\right) + \frac{c}{2ff}\text{cos.}x - 2n\,\text{sin.}\,x;$$

$$r = f + \frac{c}{2} - 2nffx - \frac{c}{2} \cdot \text{cof.}\, x + 2nff\,\text{fin.}\, x$$

équation entre le raion vecteur r & l'angle x; d'où il eſt aiſé de conſtruire l'orbite. Cette équation ſatisfait aux deux conditions que le problême exige, ſavoir qu'on ait 1°. $r = f$, lorſque $x = 0$. 2°. $\frac{dr}{dx} = 0$, lorſque $x = 0$, ou qu'à l'origine le raion vecteur ſoit perpendiculaire à l'orbite.

§. 10. Parmi les differens points de la courbe, les plus remarquables ſont ceux du Perihélie & de l'Aphélie. Ils ſe déterminent par la condition que r ſoit un *Minimum* ou un *Maximum*. Or puiſqu'une telle ſuppoſition donne $\frac{dr}{dx} = 0$, & qu'on a en général $\frac{dr}{dx} = -2nff + \frac{c}{2}\text{fin.}\, x + 2nff.\,\text{cof.}\, x$, il eſt clair 1°. qu'on aura $\frac{dr}{dx} = 0$, lorſque $x = 0$, $x = 360°$, $x = 2.\, 360°$, &c. Ainſi puiſque l'angle x commence au Perihélie, on voit que le lieu du Perihélie eſt immobile dans le Ciel. Donc *ſi ce point a quelque mouvement, la reſiſtance de la matiére Ėtherée n'en ſauroit être la cauſe.*

2°. On aura $\frac{dr}{dx} = 0$, lorſque $\frac{c}{2}\text{fin.}\, x + 2nff\text{cof.}\, x = 2nff$, ou bien $\text{fin.}\, x = \frac{8cffn}{c^2 + 16n^2f^4}$; & comme un angle augmenté de 360° ou d'un multiple de 360, ne change pas de ſinus, il eſt évident que ſi ayant prolongé PS, on prend l'angle ASK tel que ſon ſinus $= \frac{8cffn}{c^2 + 16n^2f^4}$ *le lieu de l'Aphélie ſera toujours au point* A, *& que par conſéquent la reſiſtance de l'Ėther n'imprime pas de mouvement à ce point.*

§. 11. Il eſt à propos de remarquer au ſujet de l'équation fin. x,

$= \frac{8cffn}{cc+16n^2f^4}$ qui donne le lieu de l'Aphélie que comme la resistance de l'Éther est extremêment petite, le terme $16n^2f^4$ peut être consideré comme nul en comparaison de c^2, & par conséquent on pourra prendre sin. $x = \frac{8ffn}{c}$; d'ou l'on voit que le lieu de l'Aphelie est est à très-peu de chose de près le même qu'il auroit été dans le vuide absolu.

§. 12. L'angle A S K étant très-petit, on peut considerer PSA comme une seule & même ligne droite qui sert de grand axe à l'orbite PMAN ainsi alterée par la resistance de l'Éther. Or en supposant toujours que la Planete parte du Perihélie P, & observant que l'angle PSA qui differe peu de 180°, & qui est affecté du coéfficient très-petit n peut être supposé en effet de 180°, il est clair que si l'on nomme θ la circonférence entiere par de raion 1, on aura, aprés la premiere révolution, $SP = f$, $SA = f + c - nff\theta$;

& apres le nombre donné e de révolutions $SP = f - 2nff \times e\theta$,

$SA = f + c - 2nff\theta\left(\frac{1}{2} + e\right)$, donc apres la premiere révolution

$$SP + SA = 2f + c - 2nff \times \frac{\theta}{2}$$

$$SA - SP = c - 2nff \times \frac{\theta}{2}$$

& apres le nombre donné e de révolutions

$$SP + SA = 2f + c - \theta(nff + 4nffe)$$

$$SA - SP = c - 2ffn \times \frac{\theta}{2}.$$

On voit par là que *la resistance de l'Éther tend à diminuer sans cesse le grand axe de l'orbite, mais qu'après le nombre donné* e *de revolutions l'excentricité de l'orbite est [du moins sensiblement] la même qu'apres la première révolution.*

§. 13. Pour avoir le tems de la révolution de la Planete, on reprendra l'équation $dt = \frac{rrdx + Xrrdx}{fm}$ trouvée cy dessus [§. 5], & substituant pour X sa valeur fx, pour r sa valeur $f + \frac{c}{2} - 2nffx - \frac{c}{2}\text{cos.}\, x + 2nff\,\text{sin.}\, x$, on aura sensiblement

$$dt = \frac{(f+c)\,dx - 3nff\,x\,dx - c\,\text{cos.}\, x dx + 4\,nff\,\text{sin.}\, x.dx}{m}$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{(f+c)x - \frac{3}{2}nffxx - c\,\text{sin.}\, x - 4nff\,\text{cos.}\, x + 4nff}{m}$$

en completant l'intégrale de maniere que $x = 0$ donne $t = 0$.

§. 14. Delà, il suit que comptant toutes les revolutions d'une même époque donnée, on aura

le tems de la premiere révolution $= \frac{(f+c)\theta - \frac{3}{2}nff\theta^2}{m}$

le tems des deux premieres révolutions $= \frac{(f+c)2\theta - \frac{3}{2}nff4\theta^2}{m}$

le tems des trois premieres révolutions $= \frac{(f+c)3\theta - \frac{3}{2}nff9\theta^2}{m}$

. . . .

le tems d'un nombre e de révolutions $= \frac{(f+c)e\theta - \frac{3}{2} nffee\theta^2}{m}$,

Retranchant successivement du tems d'un nombre connu de révolutions, le tems de toutes les révolutions qui précédent la derniere, on aura le tems de la derniére révolution seule. Par cette opération, on formera la table suivante

Le tems de la premiere révolution seule $= \frac{(f+c)\theta - \frac{3}{2} nff\theta^2}{m}$

Le tems de la deuxieme révolution seul e $= \frac{(f+c)\theta - \frac{3}{2} nff. 3\theta^2}{m}$

Le tems de la troisiéme révolution seule $= \frac{[f+c]\theta - \frac{3}{2} nff 5\theta^2}{m}$

. . . .

Le tems de la e^me. révolution seule $= \frac{(f+c)\theta - \frac{3}{2} nff(2e-1)\theta^2}{m}$,

Par conséquent si l'on nomme T le tems de la premiere révolution, $\overset{I}{T}$ le tems de la e^me. révolution, on aura sensiblement $\frac{T - \overset{I}{T}}{T} = \frac{3}{2} nff \frac{(2e-2)\theta}{f+c}$; donc en remettant pour n sa valeur $\frac{\mathfrak{G}(2f+c)}{2ff+2fc}$ (§. 4 & 7), on aura $\frac{3\mathfrak{G}(2f+c)f(2e-2)}{4(f+c)^2\theta} = \frac{T-\overset{\prime}{T}}{T}$;

donc enfin

$$\mathfrak{G} = \left[\frac{T-\overset{\prime}{T}}{T}\right] \times \frac{4[f+c]^2}{3\,(2e-2)(2ff+fc)\,\theta} = \left[\frac{T-\overset{\prime}{T}}{T}\right] \times \frac{2}{3\theta\,(2e-2)}$$

sensiblement, parceque $\frac{T-\overset{\prime}{T}}{T}$ est, ainsi que c, une quantité fort petite.

Ce nombre $\mathfrak{G}$ exprime, comme on s'en souvient, le rapport de la résistance de l'Éther à la gravitation de la Planete sur le Soleil.

§. 15. Comme les tables Astronomiques ne donnent pas immédiatement la quantité $\frac{T-\overset{\prime}{T}}{T}$ ou, ce qui revient au même, le tems T de la premiere révolution, car le tems actuel $\overset{\prime}{T}$ est connu; il est à propos de chercher une autre expression de $\mathfrak{G}$ qui soit d'un usage plus commode que la précédente. Pour cela, supposons que pour faire quadrer les observations modernes avec les anciennes, il faille ajouter au lieu moyen actuel de la Planete une équation donnée E, afin d'avoir le lieu moyen qui convient à la premiere révolution; il est évident que si l'on fait cette proportion 360° : E :: $\overset{\prime}{T}$: à un quatrieme terme, ce quatriéme terme $\frac{E}{360^\circ} \times \overset{\prime}{T}$ exprimera le tems dont le moyen mouvement de la Planete a diminué pendant le nombre e de révolutions. Or cette même diminution de tems est exprimée par $\frac{3\,nffee\theta^2}{2\,m}$; on aura donc $\frac{E}{360^\circ} \times \overset{\prime}{T} =$

$= \frac{3 n f f e e \theta^2}{2m}$. Mettant pour $\overset{\prime}{T}$ sa valeur trouvée (§.14), & négligeant toujours les infiniment petits du second ordre, on aura sensiblement

$$\epsilon = \frac{E}{360^\circ} \times \frac{2}{3\theta ee}.$$

Il est clair que par la comparaison des deux valeurs de ϵ, on connoîtra T.

§. 16. Nous avons remarqué (§. 7) que la densité de l'Éther est la même dans tous les points d'une orbite presque circulaire. Mais si cette densité est differente dans les regions de deux Planetes différentes, & qu'on connoisse la loy suivant laquelle elle varie, il suit de la formule précédente que lorsqn'on connoîtra par les observations la quantité E pour une Planete, on connoîtra aussi la quantité analogue pour toute autre Planete.

Soient, par exemple, E & *E* les quantités correspondantes pour la Terre & pour une autre Planete, G & g les gravitations de ces deux astres sur le Soleil, B & *b* leurs raions, N & n leurs masses, *f* & ψ leurs distances moyennes, e & ϵ les nombres de révolutions, D & d les densités de la matière Étherée dans leurs regions respectives, P & p les impulsions qu'ils reçoivent de la matière Étherée. On aura, comme on sait, $\frac{P}{N} : \frac{p}{n} :: \frac{BBVVD}{N} : \frac{bbvvd}{n}$. Or par la formule précédente, $\frac{P}{N} = G \times \frac{E}{360^\circ} \times \frac{2}{3\theta e^2}$, & $\frac{p}{n} = g \times \frac{E}{360^\circ} \times \frac{2}{3\theta \epsilon^2}$: donc on aura

$$E = E \times \frac{G \epsilon^2 b^2 v^2 N d}{g e^2 B^2 V^2 n D}.$$

C

Si l'on suppose, comme on fait ordinairement, que les densités de l'Éther soient reciproquement proportionelles aux quarrés des distances au Soleil, on aura

$$E = \mathrm{E} \times \frac{\mathrm{G} f^2 \epsilon^2 b^2 \mathrm{v}^2 \mathrm{N}}{\mathrm{g} \psi^2 \mathrm{e}^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{V}^2 \mathrm{n}}.$$

§. 17. Pour déterminer l'effet de la résistance de l'Éther sur le mouvement moyen de la seconde Planete pendant un certain nombre d'années, soit p le rapport du tems de la révolution periodique de la terre au tems de la révolution périodique de la Planete proposée; il est évident que $\epsilon = \frac{\mathrm{e}}{p}$. Deplus on a, comme on fait, $\mathrm{G} : \mathrm{g} :: \frac{\mathrm{VV}}{f} : \frac{\mathrm{vv}}{\psi}$. Ainsi la formule précédente devient celle-ci

$$E = \mathrm{E} \times \frac{f b^2 \mathrm{N}}{\psi p^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{n}}$$

qui est très-simple & dont on verra cy dessous l'usage.

§. 18. Nous finirons par observer que si la loy des densités de de l'Éther n'étoit pas donnée, mais qu'on connut tout à la fois par les observations les quantités E & E pour deux Planetes, on trouveroit directement par notre méthode la loy des densités, car alors on a (§. 16),

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{E}}{E} \times \frac{\mathrm{G} \epsilon^2 b^2 \mathrm{v}^2 \mathrm{N}}{\mathrm{g} \mathrm{e}^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{V}^2 \mathrm{n}}.$$

Par exemple, supposons que les densités soient comme une puissance inconnue δ des distances au Soleil, c'est-à-dire, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}} = \frac{f^\delta}{\psi^\delta}$;

on aura $\delta = \dfrac{L \cdot \frac{D}{d}}{L \cdot \frac{f}{\psi}}$. Cette manière de determiner la loy des densités de l'Éther seroit certainement la plus simple & la moins hypothétique qu on pût employer.

Construction de l'orbite, quelle que soit l'excentricité.

---

§. 19. L'équation générale du problême est (§.5) $ddz + zdx^2 - \dfrac{(M+2nM.X)}{ffmm} dx^2 = 0.$

Pour intégrer cette équation, supposons $z = q$ sin. x, & par conséquent $dz = dq$ sin. $x + qdx$ cos. x, $ddz = ddq$ sin. $x + 2dqdx$ cos. $x - qdx^2$ sin. x : on aura la transformée

$$ddq \text{ sin. } x + 2dqdx \text{ cos. } x - \frac{(M+2nM.X)}{ffmm} dx^2 = 0.$$

Multipliant tout par sin. x, on aura ddq (sin. $x)^2 + 2dq\,dx \times$ cos. x sin. $x - \dfrac{(M+2nMX)}{ffmm}$ sin. $x dx^2 = 0$, dont l'intégrale est dq sin. $x^2 - dx \,.\, S. \dfrac{(M+2nMX)}{ffmm}$ sin. $x\,dx = Bdx$; donc $dq = \dfrac{Bdx}{\text{sin.}\,x^2} + \dfrac{dx}{\text{sin.}\,x^2} \times S. \dfrac{(M+2nM.X)}{ffmm}$ sin. $x dx$, dont l'intégrale est $q = C - \dfrac{B \text{cos.}\,x}{\text{sin}\,x} - \dfrac{\text{cos.}\,x}{\text{sin.}\,x} \times S. \dfrac{(M+2nM.X)}{ffmm}$ sin. $x dx + S. \dfrac{(M+2nM.X)}{ffmm}$ cos. $x\,dx$; donc enfin on aura $z = C \sin. x - B \cos. x - \cos. x . S . \frac{(M + 2nMX)}{ffmm} \sin. x dx + \sin. x . S . \frac{(M + 2nMX)}{ffmm} \cos. x\, dx$, ou bien encore,

$$z = \frac{M}{mmff} + C \sin. x - B \cos. x + \frac{2MnX}{ffmm} - \frac{2Mn}{ffmm}\left(\cos. x . S . \cos. x\, dX + \sin. x . S . \sin. x\, dX\right).$$

Les constantes B & C doivent être telles qu'on ait 1° $r = f$, ou $z = \frac{1}{f}$, lorsque $x = 0$. 2°. $\frac{dz}{dx} = 0$, lorsque $x = 0$, parcequ'au Perihélie P de l'ellipse rigoureuse PHKQ, où le mouvement commence, le raion vecteur est perpendiculaire à l'orbite. D'où il suit évidemment qu'on aura $B = \frac{M}{f^2 m^2} - \frac{1}{f}$, $C = 0$. Mettant pour mm sa valeur $\frac{2M(f+c)}{f(2f+c)}$, on aura

$$z = \frac{2f+c}{2ff+2fc} + \frac{c \cos. x}{2ff+2cf} + \frac{n(2f+c)X}{ff+cf} - \frac{n(2f+c)}{ff+cf}\left(\cos. x . S . \cos. x . dX + \sin. x . . S \sin. x dX\right).$$

Et par conséquent, à cause de $r = \frac{1}{z}$,

$$r = \frac{2ff+2cf}{2f+c+c\cos. x} - \frac{4n(ff+cf)(2f+c)}{(2f+c+c\cos. x)^2} \times \left(X - \cos. x . S . \cos. x\, dX - \sin. x . S . \sin. x\, dX\right)$$

équation entre le raion vecteur r & l'Anomalie vraie x.

§. 20. On voit par cette équation qu'on pourra toujours construire l'orbite, quelle que soit la fonction X. Mais comme il s'agit s'agit ici d'un problême applicable à la nature & non d'une recherche purement Analytique, nous nous contenterons d'éxaminer deux cas; le premier, lorsque la densité de l'Éther est constante; le second, lorsqu'elle est variable & reciproquement proportionelle aux quarrés des distances au Soleil.

I. *Cas, lorsque la densité de l'Éther est constante.*

§. 21. Soient r le raion vecteur qui dans l'ellipse primitive PHKQ repondroit à l'angle x, s l'arc elliptique correspondant au même angle; & pour abreger, nommons $2a$ le grand axe PK qui a pour valeur $2f+c$, $2b$ le second axe HQ qui a pour valeur $2\sqrt{[ff+fc]}$: on aura, comme on sait, $r=\dfrac{2bb}{2a+c\ \text{cos}.x}$, $ds=2bbdx\dfrac{\sqrt{[4aa+cc+4ac\,\text{cos}.x]}}{(2a+c\ \text{cos}.x)^2}$

donc à cause de $\rho=0$, on aura (§. 5.),

$$X=S.\frac{2bbdx\sqrt{[4aa+cc+4ac\,\text{cos}.x]}}{(2a+c\ \text{cos}.x)^2}$$

$$dX\text{sin}.x=\frac{2bbdx\,\text{sin}.x\ \sqrt{[4aa+cc+4ac\,\text{cos}.x]}}{(2a+c\ \text{cos}.x)^2},$$

$$dX\ \text{cos}.x=\frac{2bbdx\,\text{cos}.x\ \sqrt{[4aa+cc+4ac\,\text{cos}.x]}}{(2a+c\,\text{cos}.x)^2},$$

Ainsi l'on aura par les series ou par les quadratures l'expression generale & indeterminée de r. Je n'ai pas besoin d'avertir qu'ici comme dans le §. 19, les integrales de dXsin. x & de dX cos x, doivent ètre telles qu'elles s'evanouissent, lorsque $x = 0$.

§. 22. Les points du Périhélie & de l'Aphélie se déterminent en faisant $\dfrac{dr}{dx}=0$, ou $\dfrac{dz}{dx}=0$, comme nous l'avons déja remarqué. Or puisque nous avons trouvé $z=\dfrac{2f+c}{2ff+2cf}+\dfrac{c\,\text{cos}.x}{2ff+2cf}+\dfrac{n(2f+c)}{ff+cf}.X$

($X=$ cos. x.S. dX cos. x $-$ sin. x .S. dX sin. x), on aura en général

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-c\,\text{sin.}\,x}{2ff+2cf} + \frac{n(2f+c)}{ff+cf}\,\text{sin.}x.\text{S.}d\text{X}\,\text{cos.}x - \frac{n(2f+c)}{ff+cf}\,\text{cos.}\,x \times$$

$$\text{S.}\ d\text{X sin.}\,x$$

D'ou suit d'abord $\frac{dz}{dx} = 0$, lorsque $x = 0$. On aura aussi $\frac{dz}{dx} = 0$,

lorsque $z = 360°$, $x = 2.\ 360°$, $x = 3.\ 360°$, &c. Car le terme

Fig. 3. S. dX sin. x qui seul peut faire quelque difficulté, est alors égal à zero. En effet si l'on construit une courbe PMONA dont l'abscisse PB $=$ X, l'ordonnée BM $=$ sin. x, il est évident que puisque x & X sont zero en même tems, cette courbe après une révolution entiere de la Planete sera composée de deux parties PMO, ONA parfaitement égales & semblables, mais posées en sens contraire de l'axe; d'où il suit que l'aire totale sera zero, lorsque $x = 360°$. On prouvera de même que l'aire $= 0$, lorsque $x =$

$2.360°$, $x = 3.360°$, &c. Par conséquent on aura toujours $\frac{dz}{dx} = 0$,

lorsque $x = 0$, $x = 360°$, $x = 2.\ 360°$, &c. Donc le lieu du Périhélie est fixe dans le Ciel; donc *si ce point a quelque mouvement, la résistance de l'Éther n'en sauroit être la cause.*

§. 23. l'Aphélie est immobile aussi; car on a pour déterminer ce point

$$0 = \frac{-c\,\text{sin.}x}{2ff+2cf} + \frac{n(2f+c)}{ff+cf}\,\text{sin.}\,x\,.\text{S.}\,d\ \text{X cos.}\ x - \frac{n(2f+c)}{ff+cf}\text{cos.}\,x \times$$

S. dX sin. x; ou bien sin. $x = -\frac{2n(2f+c)\ \text{cos.}\ x\ .\text{S.}\ d\text{X sin.}x}{c+2n(2f+c)\ .\text{S.}\ d\text{X cos.}x}$, ou

bien enfin

$$\text{sin.}\,x = \frac{-2n(2f+c)\ \text{cos.}\ x.\text{S.}\ d\ \text{X}\ \ \text{sin.}\ x}{c}.$$

Or puiſque n eſt une très-petite quantité, il eſt évident que ſin. x eſt auſſi très petit, que par conſéquent x eſt à peu près de 180°; d'ou reſulte auſſi à peu près coſ. $x = -1$. Il n'eſt pas moins clair qu'en faiſant ſucceſſivement $x = 180^\circ$, $x = 180^\circ + 360^\circ$, $x = 180^\circ + 2.\ 360^\circ$, $x = 180^\circ + 3.\ 360^\circ$, &c. la valeur de la quantité S. dX ſin. x eſt toujours une aire égale à l'aire partielle PMO. Donc ſi l'on ſuppoſe l'arc compris entre le premier Perihélie & le premier Aphélie $= \xi$, la circonference entière $= \theta$, la Planete ſera Aphélie non ſeulement lors qu'on aura $x = \xi$, mais encore lorſqu'on aura $x = \xi + \theta$, $x = \xi + 2\theta$, $x = \xi + 3\theta$, &c. *Donc le lieu de l'Aphélie eſt immobile.*

§. 24. Il eſt aiſé de déterminer la quantité S. ſin. $x\, d$X d'ou dépend la poſition de l'Aphélie; car ſuppoſant $2a + c$ coſ. $x = \frac{2}{q}$, & pour abreger le calcul, $4aa - cc = bb$, $\frac{8a}{bb} = \mathrm{A}$, on aura $d\mathrm{X}$ ſin.$x = \frac{bbb}{c} \times \frac{(\mathrm{A}dq - qdq)}{\sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}}$ dont l'integrale eſt $\frac{bbb\sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}}{c}$ $+ \frac{nbbb}{c} \times \mathrm{S.}\ \frac{\mathrm{A}\,dq}{2\sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}} + \mathrm{C}$. la conſtante C doit être telle que l'integrale s'évanouiſſe lorſque $x = 0$. Or la ſuppoſition de $x = 0$ donne $q = \frac{2}{2a+c}$; d'ou il ſuit qu'alors la partie. $\frac{bbb\sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}}{c} = \frac{2bb}{c}$, & que l'arc S. $\frac{\mathrm{A}\,dq}{2\sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}}$ devient un arc conſtant que j'appelle D dont le ſinus verſe $= \frac{2}{2a+c}$ pour le raion $\frac{\mathrm{A}}{2}$. Ainſi on aura en général S. dX ſin.$x = \frac{bbb}{c} \times \sqrt{[\mathrm{A}q - qq]}$

$-\frac{2bb}{c}-\frac{2bbh}{c}\times\left(D-S.\frac{Adq}{2\sqrt{[Aq-qq]}}\right)$. Or lorfque $x=180°$,

on a $q=\frac{2}{2a-c}$, & l'arc S. $\frac{Adq}{2\sqrt{[Aq-qq]}}$ devient un arc conftant que je nomme G dont le finus verfe $=\frac{2}{2a-c}$ pour le raion $\frac{A}{2}$. Donc alors on aura S. dX fin. $x=\frac{2bbh}{c}\times(G-D)$; donc le lieu de l'Aphelic eft déterminé par l'équation

$$\text{fin.}\,x=\frac{2nbbh(2f+c)(G-D)}{cc}.$$

Parconféquent fi l'on prolonge PS (*Fig.*2), & qu'on faffe l'angle ASK tel qu'il ait pour finus la quantité qu'on vient de trouver, la Planete fera toujours Aphélie, lorfquelle paffera au point A.

Il eft évident que comme l'angle ASK eft très-petit, on peut confiderer PSA comme une feule & même ligne droite qui fert de grand axe à l'orbite PMAN.

§. 25. L'expreffion générale du raion vecteur eft (§. 19)

$$r=\frac{2ff+2cf}{2f+c+c\,\text{cof.}\,x}-\frac{4n(ff+cf)(2f+c)}{(2f+c+c\,\text{cof.}\,x)^2}\times\left(X-\text{cof.}\,x.\text{S.cof.}\,x\,dX-\text{fin.}\,x.\text{S. fin.}\,x\,dX\right).$$

Pour déterminer le grand axe de l'orbite après un nombre donné de révolutions, il faut favoir ce que deviennent les quantités cof. x. S. dX cof. x, fin. x .S. dX fin. x, lorfque la Planete eft Périhélie & Aphélie. Or

Fig. 4. 1°. On a toujours, comme on l'a déja vu, S. dX fin. $x=0$, lorfque $x=0$, $x=360°$, $x=2.360°$. &c. Pour favoir ce que devient S. dX cof. x dans les mêmes hypothefes, foit conftruite une courbe KMOHQN dont l'abfciffe PB = X, & l'ordonnée BM = cof. x. Il eft clair d'abord qu'on aura S. dX cof. $x=0$, lorfque $x=0$. Mais fi l'on fait $x=360°$ ou X = PA, la quantité

quantité $S.dX$ cos. x sera égale à la somme des deux aires positives PKO, ANQ, moins l'aire négative OHQ. Ces aires sont telles que si par le Foyer S de l'ellipse primitive PHKQ (*Fig.* 2), on mene la double ordonnée FG, on aura l'arc elliptique FPG (*Fig.* 2) = PO + QA (*Fig.* 4), & l'arc elliptique FKG (*Fig.* 2) = OQ (*Fig.* 4). Par conséquent si l'on nomme H l'aire PKMOHQNA, ou plûtot le quotient de cette aire divisée par le sinus total qui est l'unité, il est visible qu'on aura

cos. x. S. dX cos. x = H, lorsque $x = 360°$,

cos. x. S. dX cos. x = 2 H, lorsque x = 2. 360°,

cos. x. S. dX cos. x = 3 H, lorsque x = 3. 360°,

cos. x. S. dX cos. x = 4 H, lorsque x = 4. 360°,

&c.

2°. Lorsque $x = \xi$, le sinus de cet arc est très-petit, comme nous l'avons vû; ainsi puisque dans la valeur générale de r la partie sin. x. S. dX sin. x est affectée d'un coéfficient tres-petit, le produit pourra toujours être négligé, lorsque $x = \xi$, $x = \xi + 360°$, $x = \xi + 2.360°$ &c. Deplus on a dans ces mêmes suppositions, cos. $x = -1$ sensiblement. On aura donc

$$\text{cos. } x.\text{S. } dX \text{ cos. } x = -\frac{H}{2}, \text{ lorsque } x = \xi,$$

$$\text{cos. } x.\text{ S. } dX \text{ cos. } x = -\frac{H}{2} - H, \text{ lorsque } x = \xi + 360°,$$

$$\text{cos. } x.\text{S. } dX \text{ cos } x = -\frac{H}{2} - 2\,H, \text{ lorsque } x = \xi + 2.\,360°,$$

$$\text{cos. } x.\text{ S. } dX \text{ cos. } x = -\frac{H}{2} - 3\,H, \text{ lorsque } x = \xi + 3.360°;$$

&c.

Il suit delà que si l'on nomme I la circonference entière de l'ellipse primitive, on aura

$$\left.\begin{array}{ll} r = f & \text{. lorsque } x = 0 \\ r = f + c - \dfrac{n\,(f+c)(2f+c)}{f} \times \left(\dfrac{I+H}{2}\right) & \text{. lorsque } x = \xi \end{array}\right\}$$

$$r = f - \frac{nf(2f+c)}{f+c} \times (\mathrm{I} - \mathrm{H}) \ldots \text{lorfque } x = 360^\circ$$
$$r = f + c - \frac{n(f+c)(2f+c)}{f} \times \left(\frac{3\,\mathrm{I} + 3\,\mathrm{H}}{2}\right), \text{lorfque } x = \xi + 360^\circ$$

$$r = f - \frac{nf(2f+c)}{f+c} \times (2\mathrm{I} - 2\mathrm{H}), \ldots \text{lorfque } x = 2.\ 360^\circ$$
$$r = f + c - \frac{n(f+c)(2f+c)}{f} \times \left(\frac{5\mathrm{I}+5\mathrm{H}}{2}\right) \text{lorfque } x = \xi + 2.\ 360^\circ$$

. . . .

$$r = f - \frac{nf(2f+c)}{f+c} \times (e\mathrm{I} - e\mathrm{H}), \ . \text{lorfque } x = e.\ 360^\circ$$
$$r = f + c - \frac{n(f+c)(2f+c)}{f} \frac{(2e\mathrm{I}+\mathrm{I}+2e\mathrm{H}+\mathrm{H})}{2}, \text{lorfque } x = \xi + e.\ 360^\circ$$

Par conféquent, après la première révolution, le grand axe SPA de l'orbite (*Fig.* 2.) $= 2f + c - \frac{n(f+c)(2f+c)}{f} \times \left(\frac{\mathrm{I}+\mathrm{H}}{2}\right)$;

Et après le nombre donné e de révolutions, le grand axe $=$
$$2f + c - \frac{nf(2f+c)}{f+c} \times (e\mathrm{I} - e\mathrm{H}) - \frac{n(f+c)(2f+c)}{f} \times \left(\frac{2e\mathrm{I}+\mathrm{I}+2e\mathrm{H}+\mathrm{H}}{2}\right);$$

Or puifque $\mathrm{H} = \mathrm{S}.\ d\mathrm{X} \text{ cof. } x$, & que $\mathrm{S}.\ d\mathrm{X} \text{ cof. } x$ eft évidemment moindre que $\mathrm{S}.\ d\mathrm{X}$, il eft vifible que *la réfiftance de l'Éther tend à diminuer fans ceffe le grand axe de l'orbite.*

Quant à la diftance des Foyers qui fe trouve en retranchant le raion Périhélie du raion Aphélie, elle fubira, après le nombre donné e de révolutions, une altération mais qui fera toujours très-petite. Il eft même aifé de voir que s'il étoit permis de négliger les termes de l'ordre de nc, l'altération dont il s'agit feroit nulle ou dumoins infenfible.

§. 26. Pour déterminer le tems de la révolution de la Planete, on a (§. 5.) l'équation $dt = \frac{rrdx,(1+nX)}{\surd fm}$ qu'il ne s'agiroit que d'integrer, après avoir substitué pour r & X leurs valeurs. Cette opération peut s'éxécuter par les quadratures des courbes ou par les series. Si l'on employe ce dernier moyen qui est le plus simple, il faudra supposer, comme ci-dessus, le grand axe de l'ellipse primitive $= 2a$, c'est-à-dire $2a = 2f + c$, chasser f, & pousser l'approximation jusqu'à ce que la formule contienne telle puissance de c qu'on jugera suffisante. Lorsqu'il s'agira des Cometes, il faudra quelquefois aller jusques à la 7^me. ou la 8^me. puissance de c. Je ne donne pas ce calcul qui n'a de difficulté que sa longueur; mais voici un moyen de constater l'effet de la résistance de l'Éther, sans le secours de l'expression formelle du tems.

§. 27. Nous avons vu (§. 25) que la résistance de l'Éther tend à diminuer sans cesse le grand axe de l'orbite. Qu'on prenne deux révolutions distantes l'une de l'autre d'un intervalle considérable de tems; qu'on suppose, pour un moment, la résistance de l'Éther annéantie pendant chacune de ces révolutions, & qu'on nomme A & a les grands axes des deux orbites particulieres aux deux révolutions, T & T' leurs durées. On aura, comme on sait, $T : T' :: A^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$. Retablissons maintenant la résistance, & soient $T + t$, $T' + t'$ les tems des deux révolutions, (t & t' étant des quantités fort petites qui dépendent de la résistance). Il s'agit de prouver qu'on aura $T + t > T' + t'$, ou bien $T - T' + t - t' > 0$. Or c'est ce qui est évident, car $T - T' = T \times \left[\frac{A^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}}\right]$ est une quantité finie & positive, tandis que $t - t'$ ne peut être qu'une quantité presque infiniment petite.

§. 28. Delà suit encore une manière approchée de trouver le rapport du tems de la première révolution au tems de la dernière, la résistance de l'Ether agissant toujours.

Soient T le tems de la première révolution, $\overset{l}{T}$ le tems de la e^{ne}. révolution. Je comprens maintenant dans ces tems les parties qui dépendent de la résistance. Comme le Périhélie & l'Aphélie sont immobiles, il est évident que dans la courbe décrite réellement par la Planete, chaque partie qui repond à une révolution entière peut être considerée, sans erreur sensible, comme une ellipse. Ainsi les tems T & T' seront encore ici comme les racines quarrées des cubes des grands axes de l'orbite dans les deux cas. On aura donc (§. 25)

$$T : \overset{l}{T} :: \left[2f+c-\frac{n(f+c)}{f}\frac{(2f+c)}{}\times\frac{(I+H)}{2}\right]^{\frac{3}{2}} :$$

$$\left[2f+c-\frac{nf(2f+c)}{f+c}\times(eI-eH)-\frac{n(f+c)(2f+c)}{f}\times\ldots\right.$$

$$\left.(2eI+I+2eH+H)\right]^{\frac{3}{2}}$$; d'ou l'on tire sensiblement

$$\frac{\overset{l}{T}}{T}=1-\frac{3n(2ff+2cf+cc)}{2(ff+cf)}\times eI-\frac{3n(2cf+cc)}{2(ff+cf)}\times eH.$$

Mettant pour n sa valeur $\frac{\epsilon(2f+c)}{2ff+2cf}$ (§. 4), cette équation deviendra

$$\frac{\overset{l}{T}}{T}=1-\frac{3\epsilon(2f+c)(2ff+2cf+cc)}{4(ff+cf)^2}\times eI-\frac{3\epsilon c(2f+c)^2}{4(ffc+cf)^2}\times eH,$$

ϵ étant, comme on l'a dit, le rapport de la résistance que la Planete Périhélie éprouve, à la gravitation de cette même Planete sur le Soleil. Cette formule sera d'autant plus éxacte que e sera un nombre plus grand.

(§ 29.

§. 29. On voit par cette même formule qui est principalement applicable au mouvement des Cometes, que si l'on connoissoit T & T' par les observations, on connoîtroit aussi ϵ. Mais on ne peut rien établir de précis sur ce sujet, parceque la théorie du mouvement moyen des Cometes est presque totalement inconnuë. On ne peut pas non plus faire ici de raisonnement analogue à celui du §. 16. : car il n'ý a point de Comete dont on connoisse la masse & le volume comme cette méthode le demanderoit. Neanmoins si l'on connoit à-peu-près le tems T' de la dernière révolution d'une Comete, on parviendra à connoître à-peu-près le tems T de la première révolution, & par conséquent l'influence de l'Éther sur le mouvement de la Comete, en comparant T' au tems de la dernière révolution d'une Planete sur le mouvement de laquelle on connoit dejà l'influence de l'Éther, & observant que ces deux derniers tems sont sensiblement proportionels aux racines quarrées des cubes des grands axes des deux orbites altérées par la résistance de l'Éther. Par là on aura une seconde équation entre ϵ & T, laquelle étant comparée à celle du §. précédent fera connoitre ϵ & T. Il suffit d'indiquer ce calcul.

§. 30. Enfin les quantités I & H dont on a besoin dans les calculs précédents sont faciles à déterminer. Lorsqu'on employera pour cela la méthode des suites, il faudra, comme dans le §. 26. supposer $2a = 2f + c$, & chasser f. Dans la pratique, il sera plus commode de déterminer I c'est-à-dire la circonference elliptique entière, par les méthodes que M. Jean Bernoulli a données dans son excellent mémoire *de motu reptorio*. L'approximation dont il s'agit est d'autant plus suffisante que I est affectée du coéfficient très-petit de la résistance. Quant à H, on remarquera d'abord que lorsque l'excentricité de l'orbite est petite, H est aussi une très-petite quantité, & comme elle est affectée d'un très-petit coéfficient, on peut alors négliger tous les termes où elle se trouve. Lorsqu'au contraire l'excentricité de l'orbite est considérable, on déterminera la circonference elliptique PHKQ (*Fig.* 2), comme nous venons de le dire; ensuite on regardera l'arc PF comme un arc de parabole dont le Foyer est au point S, ce qui facilitera le calcul de l'arc FPG. Cet arc étant trouvé, on le retranchera de la circonference entière PHKQ, & on aura l'arc FKG. Maintenant dans la courbe KMOHQN (*Fig.* 4), on a (§. 25), P O ou QA = FP (*Fig.* 2), O Q (*Fig.* 4) = FKG (*Fig.* 2). Or il est évident qu'on peut considérer sans erreur sensible les espaces OPK, QAN comme deux quarts d'ellipse qui ont l'unité pour un de leurs demi-axes, & P O ou Q A pour l'autre demi-axe, tandis que O HQ sera regardé comme une demie-ellipse dont le grand axe est OQ, & l'unité le demi petit axe. Par la soustraction de cette demie-ellipse de la somme des deux quarts d'ellipse proposés, on aura H d'une manière suffisamment exacte. On voit assez que l'aire H est négative.

II. Cas, lorsque la densité de l'Éther est reciproquement proportionelle aux quarrés des distances au Soleil.

§. 31. En reprenant l'équation fondamentale $r = \frac{2ff+2cf}{2f+c+c \operatorname{cof.} x} - \frac{4n(ff+cf)(2f+c)}{(2f+c+c \operatorname{cof.} x)^2} \times (\mathrm{X} - \operatorname{cof.} x . S. d\mathrm{X} \operatorname{cof.} x - \operatorname{fin.} x . S. d\mathrm{X} \operatorname{fin.} x)$ du §. 19, & les dénominations du §. 21, on aura ici

$$\mathrm{X} = S. \frac{dx\sqrt{[4aa+cc+4ac \operatorname{cof.} x]}}{2bb}$$

$$d\mathrm{X} \operatorname{fin.} x = \frac{dx \operatorname{fin.} x \sqrt{[4aa+cc+4ac \operatorname{cof.} x]}}{2bb}$$

$$d\mathrm{X} \operatorname{cof.} x = \frac{dx \operatorname{cof.} x \sqrt{[4aa+cc+4ac \operatorname{cof.} x.]}}{2bb}$$

D'ou l'on voit qu'on pourra construire l'orbite. Il faut se souvenir qu'ici, à cause de $\rho = -2$, ou a $n = \frac{6f(2f+c)}{2f+2c}$.

§. 32. Le Périhélie & l'Aphélie se déterminent par la même méthode qu'on a employée dans les §. 22 & 23 Il suffit seulement de savoir ce que devient $S. d\mathrm{X} \operatorname{fin.} x$, lorsque $x = 0$, $x = 360°$, $x = 2.$

360°, $x = 3.360^\circ$, &c.; & lorfque $x = 180^\circ$, $x = 180^\circ + 360^\circ$, $x = 180^\circ + 2.360^\circ$, $x = 180^\circ + 3.360^\circ$; &c. Or l'intégrale de $dX \text{fin.}\, x$ ou de $\frac{dX \text{fin.}\, x \sqrt{[4aa+cc+4ac \text{cof.}\, x]}}{2bb}$ eft en général

$$-\frac{(4aa+cc+4ac\,\text{cof.}\,x)^{\frac{3}{2}}}{12bbac} + A.$$ La conftante A doit être telle que $x = 0$ rende $S.dX\text{fin.}\,x = 0$. Ainfi on aura généralement

$$S.dX\text{fin.}\,x = \frac{(2a+c)^3 - (4aa+cc+4ac\,\text{cof.}\,x)^{\frac{3}{2}}}{12abbc}$$

Maintenant il eft vifible 1°. que $S.dX\text{fin.}\,x = 0$ non feulement lorfque $x = 0$, mais encore lorfque $x = 360^\circ$, $x = 2.360^\circ$, $x = 3.360^\circ$, $x = 4.360^\circ$, &c. 2°. On a conftamment $S.dX\text{fin.}\,x = \frac{12aa+cc}{6abb}$, lorfque $x = 180^\circ$, $x = 180^\circ + 360^\circ$, $x = 180^\circ + 2.360^\circ$, $x = 180^\circ + 3.360^\circ$, &c. D'où l'on conclura que *le Périhélie & l'Aphélie font encore immobiles.*

§. 33. On démontrera, comme dans le §. 25. que la réfiftance de l'Éther tend à diminuer le grand axe de l'orbite. Toutes les remarques qu'on a faites fur le cas précédent, s'appliquent ici, pourvû qu'à la place de I & de H, l'on mette les valeurs de X & de $S.dX\text{cof.}\,x$, lorfque $x = 360^\circ$, & qu'à la place de n on mette $\frac{6f(2f+c)}{2f+2c}$. Il feroit fuperflu de s'étendre davantage fur ce fujet.

SECONDE PARTIE

Détermination du mouvement des Satellites dans un milieu peu résistant.

§. 34. DE tous les Satellites des Planetes, la Lune est le seul dont la théorie soit assez connuë pour examiner si on ne pourroit pas expliquer par la résistance de l'Éther l'accélération que l'on observe dans son moyen mouvement, & dont il ne paroit pas que le sistême Neutonien ait jusqu'ici rendu raison. Ainsi dans tout ce que je vais dire, je n'aurai en vûë que cet astre, quoique nos recherches soient d'ailleurs également appliquables à tout autre Satellite. Je ferai même deux suppositions qui simplifient le problême sans le restraindre au de-là des bornes nécessaires, la premiére que les orbites de la Terre & de la Lune sont dans un même Plan, la seconde que la densité de l'Éther est la même dans toute l'étenduë de l'espace qui renferme les orbites de la Terre & de la Lune,

PROBLÉME FONDAMENTAL.

§. 35. *Déterminer l'orbite de la Lune autour de la Terre, en supposant la Lune soumise à l'attraction de la Terre, & à la résistance de la matière Éthérée.*

Fig. 5.

SOLUTION.

Soient XTY l'orbite de la Terre T autour du Soleil S, A le point où la Terre se trouve au premier instant du mouvement, *pmnz* l'Éllipse rigoureuse que la Lune décriroit dans le vuide autour de la Terpre, & dont le grand axe *pn* fait avec le Raïon SA de l'orbite terrestre l'angle donné SA*n*, le Périgée *p* le point où commence le mouvement de la Lune. Supposons qu'au bout d'un certain tems la

Terre soit parvenuë en T, la Lune au point L de son orbite PMNZ; & soit tirée par le point T la droite PN parallele à pn. Soient menées par les points T & L, les tangentes T&, LI des orbites terrestre & lunaire; ensuite ayant pris LV parallele à T& pour représenter la vitesse de la Terre, & LI pour représenter la vitesse de la Lune, soit achevé le parallelogramme LUDI. Il est évident que la Diagonale LD répréséntera la vitesse de la Lune dans l'espace absolu. Ainsi la résistance que l'Éther oppose à la Lune sera en partie proportionelle au quarré de LD, & sera dirigée dans le sens DL. Soit représentée cette résistance par LE, & qu'on la déconpose en deux autres forces représentées par les cotés LF, LH du Parallelogramme LFEH qui est tel que la force LF est égale à la résistance que l'Éther oppose a la Terre. La Lune subira ainsi de la part de l'Éther les deux forces LF, LH. Or si la Terre & la Lune n'éprouvoient l'une & l'autre que la seule force LF, elles conserveroient toujours entr'elles la même situation, & la Lune n'auroit pas de mouvement par rapport à la Terre. Il n'y a donc que la seule force LH qui trouble le mouvement de la Lune autor de la Terre. Parconsequent en n'ayant égard qu'à cette force, on pourra à chaque instant considérer la Terre comme fixe; & si on décompose la force LH en deux autres LR, LK, dont la première soit dirigée (ainsi que l'est l'attraction de la Terre), suivat le raion vecteur de la Lune, la seconde suivant l'élément Ll de son orbite; les deux équations (E) & (F) du §. 2. seront apliquables au problême que nous traitons. Cela posé,

Soient

L'élement du tems	$= dt$
L'élement Ll de la courbe PMNZ	$= ds$
Le raion vecteur TL	$= r = \frac{1}{z}$
L'angle PTL	$= x$
L'angle AST	$= y$
L'angle constant & donné POA	$= \gamma$
L'angle ST & qui differe peu d'un droit. . . .	$= \delta$
L'angle TLV ou bT&. . $= \delta + \gamma - y +$	$= q$
L'angle DLV	$= L$

Soient:

L'angle I L V ou D V Q	. . . .	$=V$
L'angle F E L ou H L E	. . . .	$=E$
La masse de la Terre	. . . .	$=M$
Celle de la Lune	. . . .	$=N$
Le raion du globe terrestre	. . . .	$=B$
Le raion du globe Lunaire	. . . .	$=b$
La vitesse initiale de la Lune autour de la Terre	. .	$=m$
Le raion vecteur initial Ap de la Lune	. . . . .	$=f$
La distance Aa des Foyers de l'éllipse primitive $pmnz$		$=c$
La vitesse LV de la Terre parvenue en T	. . . . . .	$=v$
La vitesse LI de la Lune parvenue en L	. . . . . .	$=u$
La force qui pousse la Lune vers la Terre	. . . .	$=F$
La force qui agit suivant l'élement de l'orbite Lunaire		$=K$

On aura d'abcd, comme dans le §. 2, les deux équations,

$$(E)\quad 2\,dr - \frac{ddt}{dt} = -\frac{Krdt^2}{ds}$$

$$(F)\quad ddz + z\,dx^2 - Fzzdt^2 = 0.$$

Soit P l'impulsion directe de la matière Étherée contre un Plan donné a qui vient la choquer avec la vitesse m : il est clair qu'en nommant θ le rapport de la circonference au raion, on aura *force* $LF = \frac{P}{M}\frac{\theta BBvv}{4a^2m^2}$, *force* $LE = \frac{P}{N} \times \frac{\theta bb \times \overline{LD}^2}{4a^2m^2}$. Supposons $\frac{\theta bb}{4a^2} = 1$, LD : A; mettons pour mm sa valeur $\frac{2M(f+c)}{f(2f+c)}$, & soit $\mathcal{C}$ le rapport de la force $\frac{P}{N}$ à la gravitation de la Lune perigée sur la Terre; c'est-à-dire $\frac{P}{N} = \mathcal{C} \times \frac{M}{ff}$: On aura

$$\textit{Force}\ LF\ \frac{\mathcal{C}N(2f+c)B^2v^2}{2Mf(f+c)b^2}.$$

$$Force\ \mathrm{LE} = \frac{\epsilon(2f+c)\mathrm{A}^2}{2f(f+c)}.$$

Nous ferons pour abreger, $\frac{\epsilon\mathrm{N}(2f+c)\mathrm{BB}}{2\mathrm{M}f(f+c)bb} = \lambda$, $\frac{\epsilon(2f+c)}{2f(f+c)} = n$, de sorte que *force* L F $= \lambda vv$, *force* L E $= n\mathrm{A}^2$, λ & n étant des Coefficiens constants & très-petits.

Maintenant, il est clair que *force* L K $= \mathrm{FE} \times \frac{\mathrm{Sin.\,RLH}}{\mathrm{Sin.\,TLI}}$, *force* L R $= \mathrm{FE} \times \frac{\mathrm{Sin.\,HLK}}{\mathrm{Sin.\,TLI}}$. Or 1°. sin T L I $= \frac{rdx}{ds}$. 2°. l'Angle R L H $= q - \mathrm{L} - \mathrm{E}$; & parconsequent sin. R LH $=$ sin. q cos. L cos. E $-$ sin. q sin. L sin. E $-$ cos. q sin. L cos. E $-$ cos. q cos. L sin. E. 3°. l'Angle HLK $=$ Ang. H L E $-$ Ang. I L D $=$ Ang. FEL $-$ Ang. LDQ $+$ Ang. V DQ (DQ étant perpendiculaire sur L Q), & par conséquent sin. H L K $=$ sin. L sin. E sin. V $+$ sin. L cos. E cos. V $-$ cos. L cos. E sin. V $+$ cos. L sin. E sin. V. On aura donc les valeurs de *force* L K, & de *force* L R. Mais il convient d'abord d'éliminer de ces valeurs, sin. E & cos. E. Pour cela, on remarquera qu'en abbaissant F G perpendiculaire sur LD, on a sin. E $= \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FE}}$, cos. E $= \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{LE} - \mathrm{LF.\,cos.\,L}}{\mathrm{FE}}$. D'après toutes ces remarques, on trouvera

$$Force\ \mathrm{LK} = \frac{n\mathrm{A}^2 ds(\text{sin.}\,q\ \text{cos.}\,\mathrm{L} - \text{cos.}\,q\ \text{sin}\,\mathrm{L}) - \lambda vv\,ds\ \text{sin}\,q}{rdx}$$

$$Force\ \mathrm{LR} = \frac{n\mathrm{A}^2 ds(\text{sin.}\,\mathrm{L}\ \text{cos.}\,\mathrm{V} - \text{cos.}\,\mathrm{L}\ \text{sin.}\,\mathrm{V}) + \lambda vv\,ds\,\text{sin.}\,\mathrm{V}.}{rdx}$$

Par conséquent on aura

$$\mathrm{K} = \frac{n\mathrm{A}^2\ ds(\text{sin.}\,q\ \text{cos.}\,\mathrm{L} - \text{cos.}\,q\,\text{sin.}\,\mathrm{L}) - \lambda vv\,ds\,\text{sin.}\,q.}{rdx}$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}zz - \frac{n\mathrm{A}^2 ds(\text{sin.}\,\mathrm{L}\ \text{cos.}\,\mathrm{V} - \text{cos}\,\mathrm{L}\ \text{sin.}\,\mathrm{V}) - \lambda vv\,ds\,\text{sin.}\,\mathrm{V}.}{rdx}$$

Pour éliminer A, ſin. V, coſ. V, ſin. L, coſ. L, on obſervera que A ou LD $= \sqrt{(vv + uu + 2\, vu \text{ coſ.} V)}$, que l'Angle ILQ ou DVQ = Ang. TLV − Ang. TLI, & que parconſéquent Sin.V $= -\frac{dr}{ds}\text{ ſin.}q - \frac{rdx}{ds}\text{ coſ. }q$, coſ. V $= -\frac{dr}{ds}\text{coſ. }q + \frac{rdx}{ds}\text{ ſin. }q$, ſin. L $= \frac{DQ}{DL} = \frac{u\text{ ſin. V}}{A}$, Coſ. L $= \frac{LV+VQ}{DL} = \frac{v}{A} + \frac{u\text{ coſ. V}}{A}$; d'où il ſuit qu'on aura d'abord (en conſervant encore A, pour abreger),

$$K = nAu + (nAv - \lambda\, v\, v)\text{ ſin. }q \times \frac{ds}{rdx},$$

$$F = M\, zz - (nA\, v - \lambda vv) \times \left(\frac{dr\text{ ſin. }q + rdx\text{ coſ. }q}{rdx}\right).$$

Comme on peut ſubſtituer dans tous les termes affectés du coefficient de la réſiſtance, à la place de v, u, ds, dr, rdx, ſin. q, coſ. q, les valeurs que ces quantités auroient ſi la Terre & la Lune ſe mouvoient dans le vuide; & que dans ce dernier cas les quantités dont il s'agit ſeroient des fonctions données, ſoit de l'Angle x, ſoit de Sinus & Coſinus d'Angles dependants de x, il eſt viſible qu'en operant ſur l'équation $2dr - \frac{rddt}{dt} = -\frac{Krd^2}{ds}$ préciſément de la même manière qu'on a fait (§. 5.), on trouvera une équation de cette forme $dt^2 = \frac{r^4 dx^2 (1 + 2\,\psi.X)}{f^2 m^2}$, dans laquelle X déſigne une fonction compoſée de l'Angle x, de ſinus & coſinus d'angles dependans de x; ψ tient lieu des Coefficiens n & λ qui affecteroient les différens termes de X. Mettant cette valeur de dt^2 dans l'équation $ddz + zdx^2 - F\, zz\, dt^2 = 0$; mettant auſſi pour F ſa valeur $M\, zz - \psi' X'$ (dans laquelle X' eſt une fonction analogue à X, ψ' un Coéfficient analogue à ψ), on aura $ddz + zdx^2 - \frac{(M + 2\psi.M.X)}{ffmm}dx^2 + \frac{\psi'.X'.\,r^4\,dx^2}{ffmm} = 0$; & comme on peut encore mettre dans le dernier terme à la place de r la valeur de r dans le vuide, il s'ensuit qu'on parviendra à une équation de cette forme $ddz + zdx^2 - Xdx^2 = 0$, X étant une fonction de x. Cette équation s'intégre par la méthode générale du §. 19. Quelle que soit donc l'excentricité primitive de l'orbite lunaire autour de la Terre, & quelle que soit l'orbite de la Terre autour du Soleil, on trouvera toujours par notre méthode l'orbite de la Lune autour de la Terre, en ayant égard à la résistance de l'Éther. *C. Q. F. T.*

§. 36. Pour ne pas compliquer ici inutilement les calculs que nous venons d'indiquer, il faut observer que dans cette recherche on peut, sans craindre aucune erreur sensible, considérer l'orbite de la Terre comme circulaire, & l'orbite de la Lune comme circulaire à peu-près. Ainsi on pourra négliger tous les termes qui contiendroient la lettre c affectée du coéfficient de la résistance. Soient, outre les dénominations précédentes, g le raion primitif SA de l'orbite terrestre, μ la vitesse initiale de la Terre : on auroit dans le vuide, $dt = \frac{gdy}{\mu}$, ou $t = \frac{gy}{\mu}$. On auroit pareillement $t = \frac{fx}{m}$, si la Lune décrivoit dans le vuide un cercle rigoureux autour de la Terre. Par consequent dans tous les termes affectés du coéfficient de la résistance, on pourra supposer $y = \frac{f\mu}{gm} \cdot x = px$, en faisant $\frac{f\mu}{gm} = p$, $v = \frac{gpdx}{dt}$, $u = \frac{fdx}{dt}$, $q = \gamma + \delta - y + x = \gamma + \delta + x - px$. De plus on peut faire l'angle constant $\gamma = 0$, en supposant pour cela que l'angle x commence lorsque le Soleil, la Terre & la Lune sont en ligne droite, & la Lune en opposition avec le Soleil ; ce qui n'est pas incompatible avec la supposition qu'on a déja faite que le mouvement commence, lorsque la Lune part du Périgée p de l'éllipse primitive : car comme l'orbite de la Lune est considerée ici comme presque circulaire, le Perigée peut être pris, sans erreur sensible, dans tel point qu'on voudra de l'orbite. Alors, à cause de $\delta = 90^\circ$ à très-peu près, on aura aussi à très-peu près sin. $q =$

H

cos. $(x-px)$, cos. $q=-\sin(x-px)$. On aura donc

$$A^2=\frac{dx^2}{dt^2}\times\left(g^2p^2+ff+2fgp\,\text{cos.}\,(x-px)\right)$$

Dans cette expression, le premier terme est beaucoup plus grand que les deux autres, & surtout que le second; car il est évident

que $p=\frac{27^j\,7^h\,43^m}{365^j\,6^h\,9^m}=\frac{1}{13,368}$ à très peu près, & $g=340f$ environ.

On pourra donc prendre sensiblement $A=\frac{dx}{dt}\,(gp+f\,\text{cos}(x-px))$.

Par consequent on aura à très-peu près

$$K=\frac{dx^2}{dt^2}\left(nfgp+(nff+(n-\lambda)g^2p^2)\text{cos.}(x-px)+nfgp\,\text{cos.}(x-px)^2\right)$$

$$F=Mzz+\frac{dx^2}{dt^2}\left((n-\lambda)g^2p^2\sin(x-px)+nfgp\sin(x-px)\text{cos}(x-px)\right)$$

On peut même négliger dans la valeur de K le terme qui contient ff.

Maintenant l'équation $2dr-\frac{rddt}{dt}=-\frac{Krdt^2}{ds}$ donne $dt=$

$$\frac{rrdx}{fm}\left(1+\frac{3ngpx}{2}+\frac{(n-\lambda)g^2p^2\sin.(x-px)}{f(1-p)}+\frac{ngp\sin.(2x-2px)}{4(1-p)}\right);\ dt^2=\frac{r^4dx^2}{f^2m^2}\times\left(1+3ngpx+\frac{2(n-\lambda)g^2p^2\sin.(x-px)}{f(1-p)}+\frac{ngp\sin.(2x-2px)}{2(1-p)}\right).$$

Ainsi après avoir fait, pour abréger, $\frac{2}{2f+c}=h$, $\frac{2[n-\lambda]g^2p^2}{ff(1-p)}+\frac{(n-\lambda)g^2p^2}{ff}=\xi$, $\frac{2(n-\lambda)g^2p^2}{ff(1-p)}+\frac{ngp}{2f}=\psi$, on aura $ddz+zdx^2-$

$$dx^2\left[h+\frac{3ngpx}{f}+\xi\sin.(x-px)+\psi\sin.(2x-2px)\right]=0.$$

D'où l'on tire (§. 19) $z = h + \frac{3ngpx}{f} + C \text{ fin. } x - B \text{ cof. } x$
$+ \frac{\xi \text{ fin. } (x - px)}{2p - pp} - \frac{\psi \text{ fin. } (2x - 2px)}{(1 - 2p) \times (3 - 2p)}$

Les conftantes B & C doivent être telles que l'on ait $z = \frac{1}{f}$ lorfque $x = 0$, & $\frac{dz}{dx} = 0$, lorfque $x = 0$. La prémiére condition donne $\frac{1}{f} = h - B$, ou $B = h - \frac{1}{f} = \frac{2}{2f+c} - \frac{1}{f} = - \frac{c}{2ff+fc} = - \frac{c}{2ff}$ fenfiblement. La feconde donne $C = - \frac{3ngp}{f} - \frac{\xi(1-p)}{2p-pp} + \frac{\psi(2-2p)}{(1-2p)(3-2p)}$. On aura donc (en confervant C, pour abreger l'expreffion),

$$r = f + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} . \text{cof. } x - 3nfgpx - Cff \text{ fin. } x - \frac{\xi ff \text{ fin. } (x - px)}{2p - pp} + \frac{\psi ff \text{ fin. } (2x - 2px)}{(1 - 2p)(3 - 2p)}.$$

§. 37. Je ne m'arrète point à expliquer en détail la maniere de déterminer, au moyen de cette équation, le lieu du Périgée & de l'Apogée; cela eft trop facile après tout ce qui précede. Je me contenterai de remarquer qu'ici la ligne des Apfides a quelque mouvement; mais ce mouvement eft une fimple *nutation*, parcequ'il ne renferme point d'arcs de cercle dans fon expreffion; d'où il fuit qu'il ne peut pas être obfervable.

§. 38. Nous avons trouvé $dt = \frac{rrdx}{fm} \times \left(1 + \frac{3ngpx}{2} + \frac{(n-\lambda) g^2 p^2 \text{ fin. } (x - px)}{f(1-p)} + \frac{ngp \text{ fin. } (2x - 2px)}{4(1-p)}\right)$ équation qui s'intégrera, aprés avoir mis à la place de r sa valeur trouvée (§. 36). Mais pour s'épargner la peine de calculer les termes qui doivent être negligés dans la suite, on observera que comme il s'agit de trouver l'effet de la résistance de l'Éther sur un grand nombre de révolutions, on doit conserver seulement, dans la valeur de t, les termes qui contiennent des arcs de cercle & rejetter tous ceux qui contiennent des sinus ou des cosinus, parceque le résultat de ces derniers, en partie positifs, en partie négatifs, est évidemment très-petit en comparaison du résultat des autres. Deplus on doit toujours continuer de negliger tous les termes qui contiendroient le quarré de t, le produit de t par le coéfficient de la résistance, enfin le quarré du coéfficient de la résistance. Ainsi on prendra simplement $dt = \frac{dx}{fm}\left(ff+cf-\frac{9}{2}nffgpx\right)$ dont l'intégrale est $t = \frac{(f+c)x}{m} - \frac{9nfgpxx}{4m}$.

§. 39. Donc si l'on nomme θ la circonference entiere pour le raion 1, & qu'on raisonne, comme on a fait §. 14, on trouvera que le tems de la premiere révolution est exprimé par $\frac{(f+c)\theta}{m} - \frac{9nfgp\theta^2}{4m}$; que le tems d'un nombre e de révolutions est exprimé par $\frac{(f+c)e\theta}{m} - \frac{9nfgpe^2\theta^2}{4m}$; que le tems de la e^me^ révolution seule est exprimé par $\frac{(f+c)\theta}{m} - \frac{9nfgp(2e-1)\theta^2}{4m}$.

Donc en nommant T le tems de la premiere révolution, T' le tems de la e^me^ révolution, on aura $\frac{T-T'}{T} = \frac{9nfgp(2e-2)\theta}{f+c}$; d'où l'on tire, en mettant pour n sa valeur $\frac{6(2f+c)}{2f(f+c)}$ (§. 35),

$6=$

$\mathfrak{c} = \left(\frac{T - T'}{T}\right) \times \frac{4f}{9gp(2e-2)\theta}$, formule analogue à celle que nous avons donnée (§. 14) pour les planetes principales.

§. 40. Pour trouver une formule analogue à celle du §. 15, on obſervera qu'en vertu du §. 39, le tems d'un nombre e de révolutions feroit exprimé par $\frac{(f+c)e\theta}{m} - \frac{9nfgpe^2\theta^2}{4m}$; & comme le tems du même nombre de révolutions feroit exprimé par $\frac{(f+c)e\theta}{4m}$, en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'Éther, il s'enſuit que $\frac{9nfge^2\theta^2}{4m}$ eſt la quantité dont la réſiſtance de l'Éther diminuë le tems propoſé. Donc ſi l'on ſuppoſe que le lieu moyen de la Lune à la e^{me}. révolution ſoit plus avancé qu'a la premiere révolution, de la quantité E, on trouvera par un calcul pareil à celui du §. 15,

$$\mathfrak{c} = \frac{E}{360^\circ} \times \frac{4f}{9gpe^2\theta},$$ ſenſiblement.

§. 41. Suppoſons enfin que par la théorie des mouvements moyens de la Lune on connoiſſe la quantité E pour une ſuite d'années, & qu'il faille déterminer la quantité analogue *E* pour la Terre. La queſtion eſt facile à réſoudre. Nommons P & *P* les impulſions abſoluës & directes que la Lune & la Terre reçoivent de la matiere Étherée ſous les viteſſes m & μ; G la gravitation de la Lune ſur la Terre; *G* la gravitation de la Terre ſur le Soleil; ε le nombre des révolutions de la Terre, tandis que e eſt celui des révolutions de la Lune. On aura, $\frac{P}{N} : \frac{P}{M} :: \frac{b^2m^2}{N} : \frac{B^2\mu^2}{M}$. Or [§. 35 & 40], $\frac{P}{N} = \mathfrak{c} \times \frac{E}{360^\circ} \times \frac{4f}{9gpe^2\theta}$, & [§. 15], $\frac{P}{M} =$

I

$G \times \frac{E}{360^\circ} \times \frac{2}{3\epsilon^2 \theta}$. Deplus $\epsilon = p e$, & $G : G :: \frac{mm}{f} : \frac{\mu\mu}{g}$. On aura donc

$E = \mathrm{E} \times \frac{2 p \mathrm{B}^1 \mathrm{N}}{3 b^2 \mathrm{M}} = \frac{\mathrm{E}}{103,576}$ fenfiblement, en fuppofant que la maffe de la Lune eft $\frac{1}{70}$ de celle de la Terre, & que le raion du globe lunaire eft les $\frac{3}{11}$ du raion du globe terreftre. On verra bientôt l'ufage de cette formule.

TROISIEME PARTIE.

Application des formules précédentes aux obfervations.

§. 42. NOus avons vu que la réfiftance de l'Éther ne peut imprimer aucun mouvement aux Périhelies & aux Aphélies des Planetes ou des cometes, mais qu'elle altére les grands axes des orbites & les tems des révolutions. Ainfi en comparant fur ces deux derniers points feulement la théorie avec les obfervations, on parviendra à connoître l'éffet de cette même réfiftance. Je ne parle pas ici de la petite variation qu'elle produiroit dans l'excentricité des orbites planetaires & cometaires : Cette variation n'eft pas fuffifante pour établir ou pour infirmer l'exiftence de la caufe dont il s'agit.

§. 43. Puifque la réfiftance de l'Éther diminue le grand axe des orbites planetaires & cometaires [§. 25.], il s'enfuit que fi l'Éther réfifte en effet, les Aftronomes doivent dans la fuite des fiécles apperçevoir quelque variation dans les diametres apparents des planetes & des cometes. Par exemple, la Terre doit fe rapprocher du Soleil ; & le Diamêtre du Soleil doit nous paroître plus grand.

On objectera peut-être que comme nous avons négligé plusieurs quantités, à la vérité très-petites, dans nos solutions, tout ce qu'on peut conclure, c'est que la Planete ou la Comete s'approchera du Soleil pendant un certain tems. Mais il est aisé de voir que faisant un calcul pareil, après le nombre de révolutions proposé, on trouvera encore que la Planete ou la Comete s'approche du Soleil. Ainsi il est constant que la résistance de l'Éther tend à rapprocher sans cesse les Planetes & les Cometes du Soleil.

Suivant cette Théorie, il pourra se faire que certaines Cometes qui décrivent des orbites trés-allongées, & qui à leur Périhelie passent très-près du Soleil, finissent par se précipiter dans cet astre.

§. 44. Mais la résistance de l'Éther, si elle a lieu, doit principalement se manifester dans les altérations des tems des révolutions périodiques des Planetes & des Cometes. Voyons d'abord ce que les observations nous apprennent sur ces altérations. Je commence par la Terre.

Toutes les observations de Ptolémée indiquent une accéleration dans le mouvement moyen de la Terre. Selon cet Astronome, l'année tropique moyenne est de 365 jours 5 heures 55 minutes, au-lieu que par les meilleures observations modernes, elle est simplement de 365 jours 5 heures 48 minutes 48 à 50 secondes. On trouve aussi à très-peu de chose près cette derniere durée par la comparaison des observations d'Hypparque qui vivoit plus de 200 ans avant Ptolémée, avec les observations modernes. Voyez les élements d'astronomie de M. Cassini (*Paris*, 1740. *Tom.* 1. *pag.* 211 *& suiv.*). M. Euler admet, en conséquence des observations de Ptolémée, une accéleration de 1 degré 7 minutes en 2000 ans, dans le mouvement moyen de la Terre, & il en attribue la cause à la résistance de l'Éther. Voyez ses opuscules (*Berlin*, 1746). Au contraire M. Mayer, dans le Tome III des mémoires de l'Académie de Gottingue, conclut d'après deux observations arabes qui lui ont paru décisives en ce genre, que la grandeur de l'année solaire est constamment la même. Il établit l'année tropique moyenne, de 365 jours 5 heures 48 minutes 51 secondes. M. l'Abbé de la

Caille, sans rien prononcer sur l'éxistence de l'accéleration du mouvement moyen de la Terre, observe seulement (Mem. de l'acad. 1750) que les Astronomes qui ont cherché la grandeur de l'année par la comparaison des plus anciennes observations avec les observations modernes, n'ont pu déterminer la révolution (si en effet elle varie) que pour un tems moyen entre les deux observations qu'ils ont comparées & parconséquent pour un tems assez éloigné du notre. C'est pourquoi il cherche la grandeur de l'année par la comparaison des observations modernes les plus exactes & les plus éloignées les unes des autres qu'il est possible ; il trouve que l'année tropique moyenne doit être de 365 jours 5 heures 48 minutes 50 secondes au plus. La question n'a pas été approfondie davantage; mais il paroit que tous les Astronomes s'accordent aujourd'hui à rejetter les observations de Ptolemée comme contraires à toutes celles qui les ont précédées & à toutes celles qui les ont suivies.

§. 45. M. de Maraldy, Oncle de l'Académicien qui porte aujourd'hui le même nom, a soupçonné le premier une rétardation dans le mouvement moyen de Saturne, & une accéleration dans le mouvement moyen de Jupiter; mais il croit qu'on ne doit abandonner l'hypotese de l'égalité des moyens mouvements que quand on y sera forçé par une longue suite d'observations éxactes. M. Halley va plus loin : il suppose que dans l'intervalle de 2000 ans le mouvement moyen de Jupiter est accéleré de 3 degrés 49 min. & le mouvement moyen de Saturne, retardé de 9 degrés 15 min. Plusieurs Astronomes revoquent en doute l'éxactitude de ces équations séculaires proposées par Halley; ce qui fait voir que la matiere n'est pas suffisamment éclaircie & qu'elle ne pourra l'être que par la posterité. On ignore encore davantage si les mouvements moyens de Mercure, Venus & Mars sont sujets à quelques variations.

§. 46. Les altérations du mouvement moyen de la Lune sont plus exactement déterminées que celles du mouvement des Planetes principales,

Il est indubitable que le mouvement moyen de la Lune s'accélere d'une maniere sensible, Cette accéleration est demontrée tant

par

par la comparaison des intervalles des Éclipses observées il y a plus de vingt cinq siécles avec celles qui le furent il y a mille ans & avec celles que nous observons à présent, que par les Époques des moyens mouvements des tables de la Lune construites par les plus habiles Astronomes du dernier siécle, lesquelles ne peuvent plus servir aux calculs d'aujourd'hui à moins qu'on n'y ajoute des quantités assez sensibles. Tous les Astronomes conviennent du fait en général, quoiqu'ils ne s'accordent pas exactement sur la grandeur de ces quantités. M. Mayer a dressé une table de ces sortes d'équations séculaires de la Lune; mais ni lui, ni aucun Astronome n'en a assigné la cause physique.

§. 47. Pour moi, il me paroit qu'il ne faut pas chercher cette cause ailleurs que dans la résistance de l'Éther. Voici mes raisons.

1°. Dans la formule que les Géomêtres ont donnée par le principe de l'attraction, pour trouver le lieu de la Lune, il n'y a point de terme qui représente l'accélération du mouvement moyen. Cette accélération ne peut pas non plus s'attribuer à l'attraction passagère de quelque Comete, puisqu'elle est constante & qu'elle est parconséquent produite par une force toujours présente & toujours agissante. Elle paroit donc jusques-ici inexplicable par le principe de l'attraction.

2°. L'éxistence de la matière éthérée dans les espaces célestes n'est pas douteuse; car quand même on refuseroit d'admettre autour du Soleil une atmosphère à peu-près pareille à celle qui environne la Terre, il restera toujours dans les Cieux le fluide qui forme la lumiere. Or il est impossible de concevoir qu'un fluide, quelque rare qu'on le veuille supposer, n'oppose pas quelque résistance au mouvement des corps qui le traversent.

3°. Si on éxamine les équations séculaires de la Lune, on verra leur accord avec notre théorie. Dans la table de M. Mayer, comme dans nos formules, les diminutions du tems périodique, comptées du moment où la prémiére diminution est nulle, ou ce qui revient au même, les augmentations du tems périodique, comptées du moment où la prémiére augmentation eſt nulle, ſont ſenſiblement proportionelles aux quarrés des tems écoulés depuis l'Époque propoſée. Je dis *ſenſiblement*, car les petites quantités que nous avons négligées dans nos calculs, & les erreurs inévitables des obſervations, empêchent que ce rapport ne puiſſe être exact en toute rigueur. La Théorie s'accordera pareillement avec les obſervations, ſi l'on ajoute, avec quelques Aſtronomes, de très-petites quantités aux équations de M. Mayer. Or cet accord peut-il être l'éffet du hazard, & n'indique t'il pas clairement que l'altération du mouvement moyen de la Lune eſt l'éffet de la réſiſtance de l'Éther dont l'éxiſtence eſt d'ailleurs certaine?

4°. En admettant que l'accélération du mouvement moyen de la Lune eſt produite par la réſiſtance de l'Éther, on trouve, comme on le voit dans la table ſuivante, que l'accélération du mouvement moyen de la Terre, produite par la même réſiſtance, eſt très-petite & doit paroître inſenſible, dumoins pendant un long intervalle de tems; ce qui eſt conforme aux obſervations. L'explication que je propoſe eſt donc fondée ſur des obſervations directes & confirmée par des obſervations indirectes. Elle paroît donc inconteſtable.

§. 48. D'après les raiſons que je viens d'alléguer on ne peut gueres douter, ce me ſemble, que la réſiſtance de l'Éther n'altére le mouvement moyen de la Lune, & par une ſuite néceſſaire, celui de la Terre, puiſque ces deux Aſtres traverſent les mêmes régions dans les eſpaces céleſtes De l'altération du mouvement moyen de la Terre, on doit conclure par analogie celle du mouvement des autres Planetes principales. Toutes doivent éprouver ſenſiblement l'action de la matiere Étherée.

§. 49. En conſéquence de tout ce qui précéde, j'ai dreſſé la table ſuivante des équations ſéculaires des Planetes, produites par la réſiſtance de l'Éther.

La Colonne des équations ſéculaires de la Lune, qui ſert de fondement à toutes les autres, eſt tirée des tables de la Lune, de

M. Mayer. Pour en indiquer l'usage, supposons par exemple qu'il faille déterminer le lieu de la Lune pour un certain tems de l'année 600 avant J. C. Ayant trouvé par les tables, le lieu moyen de la Lune pour le tems proposé, on ajoutera à ce lieu moyen l'équation séculaire 59 minutes 4 secondes. Le lieu moyen ainsi corrigé, on déterminera le lieu vrai par les autres équations de la Lune.

La Colonne des équations séculaires de la Terre a été construite d'après celle de la Lune, au moyen de la formule du §. 41.

Les Colonnes pour Venus, Jupiter & Saturne ont été construites d'après celle de la Terre, au moyen de la formule du §. 17. Les éléments astronomiques, nécessaires pour ces calculs, ont été pris dans le 3e. livre *des principes mathématiques* 3e. édition. J'ai supposé de plus, avec quelques Astronomes, la masse de Venus égale aux deux tiers de celle de la Terre. On voit assez que les équations séculaires des Planetes principales doivent être employées de la même maniere que celles de la Lune.

En déduisant ainsi les unes des autres ces tables d'équations séculaires, on néglige des termes qui contiennent des sinus & des cosinus affectés du coéfficient de la résistance; mais il est évident que ces termes doivent être regardés comme infiniment petits.

Les équations séculaires de Jupiter & de Saturne ne sont calculées que pour des intervalles considérables de tems, parcequ'elles sont extrêmement petites. Si les densités de l'Éther n'étoient pas proportionelles aux quarrés inverses des distances au Soleil, comme nous l'avons supposé dans le passage d'une Planete principale à l'autre, mais qu'elles fussent constantes ou qu'elles suivissent toute autre loi donnée, les équations pour Jupiter & pour Saturne pourroient augmenter, tandisque celles de Venus diminueroient. Elles seroient toujours faciles à déterminer par nos méthodes (§. 16). Quant aux équations séculaires de la Terre, elles demeureroient toujours les mêmes, parcequ'elles sont déduites de celles de la Lune supposées connuës par les observations, & que la densité de l'Éther est la même, au moins sensiblement, dans toute l'étenduë de l'espace qui renferme les orbites de la Lune & de la Terre.

On ne trouvera point ici de table d'équations séculaires pour Mercure & Mars, parcequ'il conviendroit pour cela de connoître leurs masses qui sont inconnuës, & que d'ailleurs la Théorie de leurs moyens mouvements n'est pas assez éclaircie. Il en est de même à plus forte raison des Cometes. Je me contente sur ce sujet d'avoir donné clairement & simplement toutes les formules analogyques du problême : l'usage en sera facile, lorsqu'on aura les observations nécessaires pour établir un calcul réel & non hypothétique. J'observerai cependant en général que la résistance de l'Éther ne peut produire qu'une très-légere altération dans le mouvement des Cometes, & qu'on ne peut nullement expliquer par ce moyen l'erreur de la prédiction de la Comete de 1682 en l'année 1759.

Équations séculaires du Mouvement Moyen des Planetes.

		Eq. Sécul. de la Lune.			Eq. Sécul. de la Terre	Eq. Sécul. de Venus.		Eq. Sécul. de Jupiter.	Eq. Sécul. de Saturne
	Années	Deg.	Min.	Sec	Sec.	Min.	Sec.	Sec.	Sec.
Avant J. C.	800	1	9	48	40,27	3	29,40	0,28	0,04
	700	1	4	19	37,11	3	12,95		
	600	0	59	4	34,08	2	57,20		
	500	0	54	3	31,18	2	42,15		
	400	0	49	15	28,40	2	27,75		
	300	0	44	40	25,81	2	14,00		
	200	0	40	19	23,26	2	00,95		
	100	0	36	11	20,87	1	48,55		
	0	0	32	16	18,61	1	36,80		
Après J. C.	100	0	28	35	16,49	1	25,75		
	200	0	25	7	14,49	1	15,35		
	300	0	21	53	12,62	1	05,65		
	400	0	18	52	10,88	0	56,62	0,07	0,01
	500	0	16	5	9,28	0	48,25		
	600	0	13	31	8,07	0	40,55		
	700	0	11	10	6,44	0	33,50		
	800	0	9	3	5,22	0	27,15		
	900	0	7	9	4,12	0	21,45		
	1000	0	5	28	3,15	0	16,40		
	1100	0	4	1	2,31	0	12,25		
	1200	0	2	48	1,61	0	8,40		
	1300	0	1	47	1,03	0	5,35		
	1400	0	1	0	0,58	0	3,00		
	1500	0	0	27	0,26	0	1,35		
	1600	0	0	7	0,07	0	0,35		
	1700	0	0	0	0,00	0	0,00	0,00	0,00
	1800	0	0	7	0,07	0	0,35		

CONCLUSION.

Il résulte des recherches précédentes une espece de supplement & de confirmation du sistême de la gravitation universelle. L'accélération du mouvement moyen de la Lune, jusques-ici *inexpliquée* par l'attraction, paroit être l'effet de la résistance de l'Éther: les autres inégalités de la Lune inexplicables par les tourbillons carthesiens & par la résistance de l'Éther, sont produites par l'attraction. L'accélération du mouvement moyen de la Terre, qui est une suite de celle du mouvement moyen de la Lune, semble être indiquée par les observations. L'action de l'Éther sur les mouvements de Jupiter & de Saturne, ne peut devenir sensible qu'après une longue suite de siécles. Si donc les altérations des moyens mouvements de ces deux Planetes sont telles que quelques Astronomes le prétendent, elles sont produites par l'attraction. M. d'Alembert propose dans ses recherches sur le sistême du monde (tom. 2. pag. 94.) une idée très-ingénieuse pour expliquer la rétardation du mouvement moyen de Saturne. Concluons donc que les Astronomes ne sauroient déterminer avec trop de soin par les observations, les altérations des mouvements moyens, & que les Géometres ne sauroient faire trop d'éfforts pour séparer dans ces altérations la partie qui depend de l'attraction d'avec la partie qui depend de la résistance de l'Éther, & pour assigner à chacune de ces causes, l'effet réel qu'elle produit.

FIN.

DE L'ORBITE DES PLANETES
DANS LE VUIDE.*

I.

TOutes les Planetes gravitent les unes vers les autres : les Satellites pesent sur leur Planete principale qui pese à son tour sur ses Satellites ; chacun de ces corps pese sur le Soleil, & le Soleil pese sur chacun d'eux. Cette gravitation universelle & réciproque entretient le mouvement des corps célestes : elle est démontrée par tous les Phénomenes.

II.

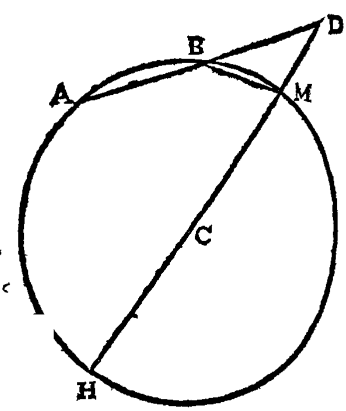
Considerons d'abord le Soleil & une Planete seulement. Si ces deux Astres étoient livrés uniquement à l'attraction qu'ils exercent l'un sur l'autre, ils s'approcheroient & se reuniroient en une même masse. Mais qu'on leur donne à chacun des impulsions quelconques, ils decriront des courbes en vertu de ces impulsions combinées avec leurs attractions mutuelles. Neuton démontre* d'une maniere très-simple & sans calcul que les deux corps proposés décriront l'un autour de l'autre, & autour de leur centre de gravité, quatre courbes semblables. Les deux courbes que les deux corps decrivent l'un autour de l'autre sont de plus parfaitement égales, & sont les mèmes que si l'un des corps étant absolument immobile, l'autre se mouvoit autour de lui, avec les forces qui agissent sur les deux corps à la fois. On voit par là que lorsqu'on saura déterminer la courbe que décrit un corps autour d'un point fixe en vertu d'une impulsion quelconque & d'une force qui tende sans cesse vers ce point fixe, on saura aussi déterminer les courbes que nos deux corps décrivent l'un autour de l'autre, & autour de leur centre de gravité.

* Je ne donne ce petit mémoire composé depuis long tems, que parcequ'il peut faciliter à quelques Lecteurs l'intelligence des recherches précédentes.

* Princip. Math. Lib. I, Sect. XI.

Quant à l'état du centre de gravité, ou ce point demeure immobile, ou il se meut uniformément en ligne droite, de la même maniere que si les deux corps dépouillés de leurs attractions mutuelles obéissoient librement aux impulsions initiales qu'ils ont reçues. Cet état dépend de la quantité & de la direction des impulsions initiales. Par exemple, si les deux corps reçoivent au premier instant, en sens contraire & suivant des directions paralleles, des vitesses qui soient en raison réciproque de leurs masses, le centre de gravité demeurera en repos. Dans tout autre cas, ce point se mouvra suivant les loix connues. Il est évident qu'il peut se faire de même que le centre de gravité de tous les corps qui composent l'univers soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite.

III.



Cela posé, soit un corps qui décrive la circonférence de cercle AB MH, & qui soit par conséquent animé à chaque instant d'une force dirigée au centre C. Considérons la circonférence comme composée d'une infinité de petites lignes droites AB, BM &c. qui forment un polygone inscrit au cercle. Il est évident que si le corps après avoir parcouru AB, étoit livré à lui-même, il décriroit dans un second instant égal au premier, l'espace BD égal à AB & pris sur le prolongement de AB. Mais comme la force centrale ramene le corps en M, il est visible qu'en regardant BD & DM comme les vitesses uniformes produites dans le même tems par la force que le corps a en B, & par la force centrale, la droite DM pourra être considérée comme l'expression même de la force centrale: Or par la proprieté du cercle, $AD \times BD = DM \times DH$, ou bien $2(AB)^2 = 2DM \times CM$;

donc $DM = \frac{\overline{AB}^2}{CM}$, c'est-à-dire que *la force centrale dans le cercle*

est

proportionnelle au quarré de la vitesse du mobile, divisé par le raion du cercle : ce qui est le theorême de Huighens dont nous avons fait usage (§. 2. du mémoire precédent.)

IV.

Qu'il s'agisse maintenant de trouver la nature de la courbe PMN décrite en vertu d'une force quelconque tendante au point fixe S, combinée avec un mouvement d'impulsion, ce problême se résoudra très-aisément par les formules (E) & (F) du même §. qu'on vient de citer; car alors on a $K=0$, & l'équation (E) devient $2dr - \frac{rddt}{dt} = 0$, d'où l'on tire aisément $dt = Crrdx$.

Pour déterminer la constante C, supposons qu'au point P pris pour l'origine de la courbe, le raion vecteur $SP = f$, le sinus de l'angle que fait l'élément de la courbe avec $SP = h$, la vitesse initiale $= m$: il est clair qu'on aura $\frac{fdx}{dt} = m$; mais on a en général $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{Cff}$; donc $C = \frac{1}{mfh}$; donc $dt = \frac{rrdx}{mfh}$. Mettons cette valeur de dt dans l'équation (F); mettons aussi pour r sa valeur $\frac{1}{z}$; nous aurons $ddz + z\,dx^2 - \frac{F\,dx^2}{m^2f^2h^2z^2} = 0$. Multipliant tout par dz, integrant & séparant les indéterminées, on trouvera (N) $dx = \frac{dz}{\sqrt{\left(B - zz + 2S.\frac{Fdz}{m^2f^2h^2z^2}\right)}}$, B étant une constante. Donc

$$dx = \frac{-dr}{r\sqrt{\left[Brr - 1 - 2rrS.\frac{F\,dr}{m^2f^2h^2}\right]}}$$

La constante B est très-aisée à déterminer; car on a toujours

$\frac{rdx}{-dr} = \frac{1}{\sqrt{\left(Brr - 1 - 2rr\,S.\frac{F\,dr}{m^2 f^2 h^2}\right)}}$. Or au point P où $r =$ f, il eſt clair que $\frac{fdx}{-dr} = \frac{h}{\sqrt{(1-hh)}}$; donc ſi l'on ſuppoſe, en ce même point P, $S\frac{F\,dr}{m^2 f^2 h^2} = H$, on aura l'équation $\frac{h}{\sqrt{(1-hh)}}$ $= \frac{1}{\sqrt{\left(Bff - 1 - 2ffH\right)}}$, de laquelle on tire $B = 2H + \frac{1}{f^2 h^2}$.

V.

Lorſque l'attraction eſt réciproquement proportionnelle aux quarrés des diſtances, (ce qui eſt la loi de la nature), on a $F = \frac{M}{rr} = M\,zz$ (M étant la ſomme des maſſes du Soleil & de la Planete); & l'équation (N) devient

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{\left[B + \frac{2Mz}{m^2 f^2 h^2} - zz\right]}},$$

ou, en mettant pour B ſa valeur $\frac{1}{ffhh} - \frac{2M}{m^2 h^2 f^3}$,

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{\left[\frac{1}{f^2 h^2} - \frac{2M}{m^2 h^2 f^3} + \frac{2Mz}{m^2 h^2 f^2} - zz\right]}}.$$

Soit $\frac{M}{m^2 h^2 f^2} - z = v$, on aura la transformée

$$dx = \frac{-dv}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{f^2 h^2} - \frac{2M}{m^2 h^2 f^3} + \frac{M^2}{m^4 f^4 h^4}\right) - vv\right]}};$$

d'où l'on tire $v = \sqrt{\left[\frac{1}{f^2h^2} - \frac{2M}{m^2h^2f^3} + \frac{M^2}{m^4h^4f^4}\right]}$. Cof. $(x+D)$; donc

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2h^2} - \sqrt{\left[\frac{1}{f^2h^2} - \frac{2M}{m^2h^2f^3} + \frac{M^2}{m^4h^4f^4}\right]}\ .\ \text{Cof.}(x+D),$$

équation d'une fection conique. L'arc conftant D doit être déterminé par la condition que l'angle x commence en E.

VI.

Suppofons que l'angle de projection foit droit, c'eft-à-dire $h = 1$, Alors l'équation précédente devient $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2m^2} - \left(\frac{M}{f^2m^2} - \frac{1}{f}\right)$. Cof. x. Or on fait que fi l'on nomme f la diftance périhélie SP (*Fig.* 2.) d'une ellipfe PHKQ, c la diftance SO des foyers, r le raion vecteur, x l'anomalie vraie comptée depuis le périhélie, l'équation de cette ellipfe eft $\frac{1}{r} = \frac{2f+c+c\,\text{cof.}\,x}{2ff+2cf}$. Ainfi pour que l'équation $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2m^2} - \left(\frac{M}{f^2m^2} - \frac{1}{f}\right)$. Cof. x appartienne à l'ellipfe, & foit parconféquent la trajectoire d'une Planete, il faut que l'on ait $\frac{M}{f^2m^2} = \frac{2f+c}{2ff+2cf}$ ou bien $mm = \frac{2M(f+c)}{2ff+cf}$, formule dont nous avons fait un fréquent ufage dans les recherches précédentes.

VII.

L'équation différentielle du tems étant ici $dt = \frac{rrdx}{fm}$, fi l'on nomme T le tems total de la révolution de la Planete, θ le rapport de la circonférence au raion, il est clair que puisque alors la quantité $S\,\frac{rrdx}{2}$ exprime l'aire entiere de l'ellipse, on aura $T = \frac{\theta(2f+c)\sqrt{(ff+cf)}}{2fm}$, ou bien, en mettant pour m sa valeur $\frac{\sqrt{[2M(f+c)]}}{\sqrt{[2ff+fc]}}$, $T = \frac{\theta(2f+c)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2M}}$. D'où l'on voit que si plusieurs Planetes décrivent des ellipses autour du Soleil, & qu'on néglige la masse de chacune d'elles en comparaison de celle du Soleil, ou que M soit une seule & même quantité pour toutes les Planetes, les tems des révolutions de ces Planetes seront proportionels aux racines quarrées des cubes des grands axes des ellipses qu'elles décrivent.

VIII.

La même équation $T = \frac{\theta(2f+c)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2M}}$ ou $M = \frac{\theta^2(2f+c)^3}{8T^2}$ fait voir que si plusieurs corps décrivent des ellipses autour d'un même point ou de différents points, & qu'on nomme M les masses attractives, ces masses sont en raison composée de la directe des cubes des grands axes, & de l'inverse des quarrés des tems périodiques. C'est par-là que Neuton détermine le rapport de la masse du Soleil avec la masse des Planetes qui ont des Satellites, en considérant d'abord le Soleil comme le foyer d'une ellipse décrite par une Planete principale quelconque, ensuite la Planete principale qui a un Satellite, comme le foyer de l'ellipse décrite par le Satellite. Les masses de Mercure, Vénus, & Mars ne peuvent pas être déterminées ainsi, parceque ces Planetes n'ont pas de Satellites.

IX.

Pour trouver l'expression indéterminée du tems, on reprendra l'équation l'équation $dt = \frac{rrdx}{fm}$ dans laquelle on ſubſtituera pour r ſa valeur tirée de la nature de l'ellipſe. Mais pour mettre ce calcul ſous la forme que les Aſtronomes employent ordinairement, on remarquera que nommant 1 le demi grand axe C P de l'ellipſe PHKQ, b l'excentricité CS, T le tems total de la révolution de la Planete, θ le rapport de la circonférence au raion, on a $r = \frac{1-bb}{1+b\,\text{coſ}.x}$, $dt = \frac{T}{\theta\sqrt{(1-bb)}} \times rr\,dx = \frac{T}{\theta} \times \frac{(1-bb)^{\frac{3}{2}}dx}{(1+b\,\text{coſ}.x)^2}$; donc en faiſant $\frac{\theta t}{T}$, ou l'anomalie moyenne $= y$, on aura $dy = \frac{(1-bb)^{\frac{3}{2}}dx}{(1+b\,\text{coſ}.x)^2}$; d'où l'on tire facilement $y = x - 2b\,\text{ſin}.\,x + \frac{3bb\,\text{ſin}.2x}{4} - \frac{b^3\,\text{ſin}\,3x}{3}$, expreſſion de l'anomalie moyenne par l'anomalie vraie. J'ai négligé dans ce calcul les termes qui contiendroient b^4 & les Puiſſances plus hautes de b; ce qui eſt ſuffiſant pour les Planetes; mais il faut pouſſer l'approximation plus loin pour les cometes.

X.

Le problème de Kepler, qui eſt l'inverſe du précédent, eſt un peu plus difficile. En voici une ſolution très-ſimple. Je continuerai de négliger b^4 & les puiſſances plus hautes de b: le procedé eſt le même, lorſqu'on veut pouſſer l'approximation plus loin.

Puiſqu'on a $dy = dx \frac{(1-bb)^{\frac{3}{2}}}{(1+b\,\text{coſ}.x)^2}$ ou $dx = dy\,(1 + b\,\text{coſ}.\,x)^2 \times (1-bb)^{-\frac{3}{2}}$, on trouvera, en faiſant dy conſtant,

$$\frac{dx}{dy} = 1 + 2bb + (2b + 3b^3)\,\text{coſ}.\,x + \frac{bb\,\text{coſ}.\,2x}{2},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -2bb - (2b + 18b^3)\,\text{coſ}.x - 8b^2\,\text{coſ}.\,2x - 11b^3\,\text{coſ}.\,3x,$$

$$\frac{d^5x}{dy^5} = 2bb + (2b + 78b^3)\,\text{cof.}\,x + 38b\ \text{cof.}\,2x + 185b^3\,\text{cof.}\,3x.$$

Maintenant ſuppoſons $x = y + A\ \text{fin.}\,y + B\ \text{fin.}\,2y + C\ \text{fin.}\,3y$, on aura, en faiſant pareillement dy conſtant,

$$\frac{dx}{dy} = 1 + A\ \text{cof.}\,y + 2\ B\ \text{cof.}\,2\,y + 3\ C\ \text{cof.}\ 3\,y,$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = -A\ \text{cof.}\,y - 8\ B\ \text{cof.}\,2\,y - 27\ C\ \text{cof.}\,3\,y,$$

$$\frac{d^5x}{dy^5} = A\ \text{cof.}\,y + 32\ B\ \text{cof.}\,2y + 243\ C\ \text{cof.}\,3\,y.$$

Donc en ſuppoſant que les deux angles x & y s'évanouiſſent, & que parconſéquent leurs coſinus, ainſi que les coſinus de leurs multiples deviennent 1, on aura les trois équations,

$$A + 2B + 3C = 2b + \frac{5bb}{2} + 3b^3,$$

$$A + 8B + 27C = 2b + 10bb + 29b^3,$$
$$A + 32B + 243C = 2b + 40bb + 263b^3,$$

leſquelles donnent $A = 2b - \frac{b^3}{4}$, $B = \frac{5b^2}{4}$, $C = \frac{13b^3}{12}$, de ſorte que

$$x = y + \left(2b - \frac{b^3}{4}\right)\text{fin.}\,y + \frac{5b^2\,\text{fin.}\,2y}{4} + \frac{13b^3\,\text{fin.}\,3y}{12}.$$

XI.

Tels ſont les principes généraux du mouvement elliptique, mais les planetes ne décrivent pas des ellipſes en rigueur; car l'ellipſe rigoureuſe qu'une planete principale ou ſecondaire décriroit autour de ſa Planete centrale, ſi ces deux corps exiſtoient ſeuls dans l'univers, eſt ſans ceſſe alterée par l'action des autres Planetes. En 1746 l'Academie Royale des ſciences propoſa pour ſujet du prix de l'année 1748 la théorie des mouvements de Saturne & de

Jupiter. M. Euler remporta le prix. Pendant qu'il travailloit ſur ce ſujet, M M. D'Alembert & Clairaut s'occupoient de la théorie des mouvements de la Lune, qui eſt dans le fonds le même problême, deſorte que ces trois illuſtres géomêtres donnerent en même tems & ſans s'être rien communiqué la méthode générale pour déterminer les mouvements des corps céleſtes en ayant égard a leurs attractions réciproques. Le Problême fut nommé en France *Problême des trois corps*, parcequ'il ſuffit d'avoir égard, dans la théorie de la Lune, aux attractions de la Terre, de la Lune & du Soleil, & dans la théorie de Saturne ou de Jupiter, aux attractions du Soleil, de Saturne & de Jupiter. Toutes les forces qui produiſent le mouvement dans l'orbite de la Planete qu'on conſidére, peuvent toujours ſe réduire à deux forces ψ & P, dont la prémière eſt dirigée ſuivant le raion vecteur, la ſeconde eſt perpendiculaire au raion vecteur. L'équation générale qui détermine ce mouvement ſe tire ſans peine de nos deux formules (E) & (F).

XII.

En effet, il eſt viſible que la force P perpendiculaire au raion vecteur pourra ſe décompoſer en deux autres, dont l'une dirigée ſuivant l'élément de la courbe aura pour valeur $\frac{P\,ds}{r\,dx}$, l'autre tendante au point S aura pour valeur $\frac{P\,dr}{r\,dx}$. Parconſéquent ſi dans les deux équations (E) & (F), nous mettons $\frac{P\,ds}{r\,dx}$ à la place de $-$ K, $\psi + \frac{P\,dr}{r\,dx}$ à la place de F, on aura les deux transformées

$$2\,dr - \frac{r\,ddt}{dt} = \frac{P\,dt^2}{dx},$$

$$ddz + z\,dx^2 - \left(\psi - \frac{P\,dz}{z\,dx}\right) zz\,dt^2 = 0.$$

Pour parvenir à une équation qui ne contienne ni dt, ni ddt, on mettra la premiere ſous cete forme

$dx^2\left(\frac{4r^2\,dr\,dt^2 - 2r^4\,dt\,ddt}{dt^4}\right) = 2\,S.P\,r^3dx$, dont l'intégrale eſt

$\frac{r^4\,dx^2}{dt^2} = A + 2\,S.Pr^3\,dx$; donc $dt^2 = \frac{r^4dx^2}{A+2S.Pr^3dx} =$

$\frac{dx^2}{z^4\left(A+2S\frac{P\,dx}{z^3}\right)}$. Subſtituant cette valeur de dt^2 dans la ſeconde équation, on aura

$$ddz + z\,dx^2 - \frac{\left[\frac{\psi}{zz} - \frac{P\,dz}{z^3\,dx}\right]}{A+2S\frac{P\,dx}{z^3}}\,.\,dx^2 = 0$$

équation fondamentale du problême des trois corps. Cette équation à laquelle M M. d'Alembert & Clairaut ſont parvenus par des méthodes très-différentes de la notre, eſt toujours réductible à cette forme $ddz + z\,dx^2 + X\,dx^2 = 0$, X étant une fonction de x, & elle s'intégre par la méthode générale du §. 19. des recherches précédentes. Voyés les ouvrages des trois Géomêtres que j'ai cités.

APPLICATION DU PROBLEME FONDAMENTAL

De la Théorie précédente à quelques cas des trajectoires dans les milieux résistants.

LES deux formules générales (E) & (F) peuvent servir à construire aisément en plusieurs cas les trajectoires dans les milieux résistants, sans supposer que l'intensité de la résistance soit très-petite.

Exemple I.

Supposons que la force centrale étant en raison inverse du quarré du raion vecteur, la résistance du milieu soit en raison composée de la vitesse & du quarré inverse du raion vecteur. Il est clair qu'en reprenant les deux équations (E) & (F), on aura ici $F = \frac{M}{r^2}$, $K = \frac{nu}{r^2}$. Donc l'équation (E) deviendra $2dr - \frac{rddt}{dt} = -\frac{ndt}{r}$, ou bien, $dx\left(\frac{2rdrdt - rrddt}{dt^2}\right) = -ndx$ dont l'intégrale est $\frac{rrdx}{dt} = A - nx$; donc $dt^2 = \frac{r^4dx^2}{(A-nx)^2} = \frac{dx^2}{z^4(A-nx)^2}$. Mettons cette valeur dans l'équation (F), & nous aurons, $ddz + zdx^2 - \frac{Mdx^2}{(A-nx)^2} = 0$, équation qui s'intégre par la méthode générale du §. 19.

Exemple II.

Soient la force centrale en raison inverse du cube du raion vecteur, & la résistance du milieu en raison composée de la vitesse & du cube inverse du raion vecteur, c'est-à-dire $F = \frac{M}{r^3}$, $K = \frac{nu}{r^3}$: la trajectoire est encore constructible.

Car l'équation (E) devient $2dr - \frac{r\,ddt}{dt} = -\frac{ndt}{rr}$, ou bien $dx \left(\frac{2\,r\,dr\,dt - rr\,d^2t}{dt^2}\right) = -\frac{ndx}{r}$ dont l'intégrale est $\frac{rrdx}{dt} = A - S.\frac{n\,dx}{r}$, ou bien $\frac{dx}{zzdt} = A - S.\,n\,z\,dx$; donc $dt^2 = \frac{dx^2}{z^4(A - S.nzdx)^2}$. Mettant cette valeur de dt^2 dans l'équation (F); mettant aussi pour F sa valeur $\frac{M}{r^3} = Mz^3$, on aura $ddz + z\,dx^2 - \frac{M\,z\,dx^2}{(A - S.nzdx)^2} = 0$. Pour intégrer cette équation, supposons $A - S.\,n\,z\,dx = y$, & par conséquent $zdx = -\frac{dy}{n}$; on aura la transformée $ddz - \frac{dydx}{n} + \frac{M\,dy\,dx}{ny^2} = 0$, dont l'intégrale est $dz - \frac{y\,dx}{n} - \frac{Mdx}{ny} = B\,dx$. Mettant pour dx sa valeur $-\frac{dy}{nz}$, on aura $zdz + \frac{ydy}{n^2} + \frac{Mdy}{n^2y} = -\frac{B\,dy}{n}$ dont l'intégrale est $\frac{zz}{2} + \frac{yy}{2n^2} + \frac{M}{n^2} L.\,y = C - \frac{By}{n}$. Donc z sera donnée en y, & à cause de l'équation $dx = \frac{-dy}{nz}$, x sera aussi donnée en y. Ainsi on pourra construire l'orbite.

FIN.

ERRATA

Pag. 11. *Dans le* §. 4, *le coéfficient* D *ne doit pas se trouver dans la valeur de* K. *Il faut donc alors effacer* D *ou supposer* D = 1, *comme on l'a fait dans tout le reste de la pièce.*

Pag. 21. Lig. 17. *Après ces mots* distances moyennes, *ajoutés* au Soleil, V & v leurs vitesses moyennes,

Ibid. Lig. 18. révolutions *lisés* leurs révolutions,

Pag. 32. *A la fin du* §. 28. *ajoutés* pourvû neanmoins que e soit toujours d'un ordre au dessous du dénominateur de la fraction ϵ.

RECHERCHES
SUR LES INÉGALITÉS
DES SATELLITES DE JUPITER,
CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.

PIÉCE qui a remporté le prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris pour l'année 1766.

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie de Berlin, de la Société Royale des Sciences de Turin, & Associé étranger de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

TABLE

Des Titres contenus dans cette Dissertation.

Fin de la Table.

RECHERCHES

SUR LES INÉGALITÉS

DES

SATELLITES DE JUPITER,

CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.

Multùm adhuc reſtat operis *Sen. Epiſt. 64.*

CHAPITRE I.

Formules générales pour le mouvement des Satellites de Jupiter.

ARTICLE PREMIER.

SOIENT nommés :

Le rayon vecteur de l'orbite d'un ſatellite quelconque projettée ſur le plan de l'orbite de Jupiter . . . . r

La tangente de la latitude du ſatellite par rapport à ce même plan. . . . . p

La force que Jupiter exerce ſur le ſatellite à la diſtance 1 ... F

On aura la diſtance du ſatellite au plan de l'orbite de Jupiter. . . . . rp

Donc la diſtance du ſatellite au centre de Jupiter ſera . . . . $r\sqrt{1+p^2}$

Par conſéquent la force, par laquelle le ſatellite eſt pouſſé vers Jupiter ſera . . . . $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$

Cette force peut être regardée comme compoſée de deux autres.

L'une parallèle au rayon vecteur & égale à . . . $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$

L'autre perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter & égale à . . . . $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$

Or on peut en général réduire les forces perturbatrices du ſatellite à trois forces uniques, dont

La première que j'appelle . . . . R ſoit parallèle au rayon r,

La ſeconde que j'appelle . . . . Q ſoit perpendiculaire au rayon vecteur, & parallèle au plan de l'orbite de Jupiter.

La troiſième que j'appelle . . . . P ſoit perpendiculaire à ce même plan.

Donc le ſatellite ſera ſollicité dans les directions dont nous parlons, par les forces $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+R$, Q, $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+P$; dont les deux premières déterminent le mouvement que le ſatellite doit avoir dans le plan de l'orbite de Jupiter, ou pour mieux dire, parallélement à ce plan.

I I.

Cela poſé, ſoit le tems écoulé depuis le commencement du mouvement . . . . t

L'angle décrit par le rayon r durant ce tems . . . . . . φ

L'élément du tems dt conſtant, c'eſt-à-dire, $ddt = 0$.

On aura pour la viteſſe circulatoire du ſatellite, parallélement au plan de l'orbite de Jupiter $\frac{rd\varphi}{dt}$, d'où réſulte la force centrifuge $\frac{r^2 d\varphi^2}{rdt^2} = \frac{rd\varphi^2}{dt^2}$, laquelle étant retranchée de la force $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R$, on aura la véritable force qui tend à diminuer le rayon r.

Donc, par le principe des forces accélératrices, on aura

$$-\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R - \frac{rd\varphi^2}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Maintenant on ſait que, ſi la force perpendiculaire Q étoit nulle, le rayon r décriroit des aires proportionnelles aux tems, de ſorte que l'on auroit, à cauſe de dt conſtant, $\frac{d.(r^2 d\varphi)}{2} = 0$; mais la force Q fait parcourir perpendiculairement à r l'eſpace Qdt^2 pendant le tems dt; donc le ſecteur $\frac{r^2 d\varphi}{2}$ croîtra pendant ce temps de la quantité $\frac{Qrdt^2}{2}$; par conſéquent on aura l'équation $d.(r^2 d\varphi) = Qrdt^2$, dont l'intégrale, en ajoutant cdt, eſt $r^2 d\varphi = cdt + dt\int Qrdt$; d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c + \int Qrdt}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Enfin on aura, en vertu de la force perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter, $-\frac{d^2(pr)}{dt^2} = \frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + P$, ou bien $\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{pd^2 r}{rdt^2} + \frac{Fp}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P}{r} = 0$, d'où, en mettant pour $\frac{d^2 r}{rdt^2}$, ſa valeur $\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{F}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{r}$ tirée de l'équation (A), & effaçant ce qui se détruit, on aura l'équation suivante :

$$\frac{d^2p}{dt^2}+p\frac{d\varphi^2}{dt^2}+\frac{2dpdr}{rdt^2}+\frac{P-Rp}{r}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

III.

Les équations (A), (B), (C) donneront r, φ & p en t, ce qui suffira pour faire connoître le lieu du satellite à chaque instant. Que si on vouloit connoître la figure même de l'orbite qu'il décrit, il faudroit éliminer des équations (A), (C) l'élément dt. Or, de l'équation (B), on tire, après quelques réductions fort simples, $dt=\frac{r^2d\varphi}{\sqrt{c^2+2\int Qr^3d\varphi}}$; donc si on substitue cette valeur dans (A), (C), & qu'on fasse pour plus de simplicité, $\frac{1}{r}=u$, on aura, en prenant $d\varphi$ constant,

$$\frac{ddu}{d\varphi^2}+u-\frac{F(1+p^2)^{\frac{3}{2}}+Rr^2-Q\frac{rdr}{d\varphi}}{c^2+2\int Qr^3d\varphi}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\frac{d^2p}{d\varphi^2}+p+\frac{r^3(P-pR+Q\frac{dp}{d\varphi})}{c^2+2\int Qr^3d\varphi}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Supposons pour un moment que les forces perturbatrices P, Q, R soient nulles, on aura par l'équation (c), $\frac{d^2p}{d\varphi^2}+p=0$, dont l'intégrale est, comme on sait, $p=G\,\mathit{sin}.\varphi+H\mathit{cos}.\varphi$, ou bien $p=\lambda\,\mathit{sin}.(\varphi-\varepsilon)$, λ & ε étant deux constantes arbitraires. Cette dernière expression de p fait voir que l'orbite est toute dans un plan fixe, dont la position dépend des quantités λ, ε, qui expriment, la première, la tangente de l'inclinaison; & la seconde, la longitude du nœud. Retenons maintenant cette même expression de p, & supposons, à cause des forces perturbatrices, λ & ε variables, on aura $dp=d\lambda\,\mathit{sin}.(\varphi-\varepsilon)+\lambda\,\mathit{cos}.(\varphi-\varepsilon)(d\varphi-d\varepsilon)$; or afin que le corps puisse être regardé comme se mouvant réellement

ment dans le plan déterminé par λ & ϵ, il faut que la valeur de dp soit la même que si ces quantités demeuroient constantes, c'est-à-dire, que $dp = \lambda\, cos.(\varphi - \epsilon) d\varphi$; donc $d\lambda\, fin.(\varphi - \epsilon) = \lambda\, cos.(\varphi - \epsilon) d\epsilon$; par conséquent, à cause de $d\varphi$ constant, $\frac{d^2p}{d\varphi^2} = -\lambda\, fin.(\varphi - \epsilon) + \frac{\lambda d\epsilon}{fin.(\varphi-\epsilon)d\varphi}$, & $\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p = \frac{\lambda d\epsilon}{fin.(\varphi-\epsilon)d\varphi}$. On réduira ainsi l'équation (c) ci-dessus à deux équations du premier degré, qui donneront λ & ϵ en φ; d'où l'on connoîtra la variation de l'inclinaison de l'orbite, & le mouvement de la ligne des nœuds. C'est ainsi que la plupart des Géomètres en ont usé jusqu'ici dans la recherche des orbites des planètes; mais il nous paroît plus court de chercher directement la latitude p par une seule équation; d'autant plus que les quantités λ & ϵ s'en déduiront plus aisément; car puisque $p = \lambda\, fin.(\varphi - \epsilon)$, & $\frac{dp}{d\varphi} = \lambda\, cos.(\varphi - \epsilon)$, on aura $\lambda = \sqrt{p^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}}$, & $tang.(\varphi - \epsilon) = \frac{pd\varphi}{dp}$.

On pourroit faire une pareille transformation sur l'équation (a); ce qui réduiroit l'orbite à une ellipse dont l'excentricité, & la position de la ligne des apsides seroient variables, ainsi que M. Newton l'a pratiqué par rapport à la Lune. En effet, si on suppose d'abord Q, R, & $p = 0$, l'équation (a) devient $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = 0$, dont l'intégrale, étant mise sous cette forme $u - \frac{F}{c^2} = \rho\, cos.(\varphi - \alpha)$, donne une ellipse dans laquelle $\frac{c^2}{F}$ est le demi-parametre, $\frac{\rho c^2}{F}$ l'excentricité, & α la longitude de l'apside inférieure. Qu'on regarde maintenant ρ & α comme variables, & qu'on suppose, par une raison analogue à celle que nous avons expliquée ci-dessus, $du = -\rho \sin.(\varphi - \alpha) d\varphi$, on trouvera; $d\rho \cos.(\varphi - \alpha) + \rho \sin.(\varphi - \alpha) d\alpha = 0$, & $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = \frac{\rho d\alpha}{\cos.(\varphi - \alpha) d\varphi}$. Ainsi l'équation ($a$) se réduira à deux équations du premier degré d'où l'on tirera aisément ρ & α.

I V.

Les observations nous apprennent que les inégalités des mouvemens des satellites de Jupiter sont très-petites, aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, par rapport à l'orbite de cette Planète; d'où il suit que si on nomme

La valeur moyenne de r . . . . a

La valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dt}$, c'est-à-dire la vitesse angulaire moyenne . . . . μ

& qu'on dénote par n un coefficient très petit, & par x, y, z, des quantités variables, on aura les expressions suivantes

$$r = a(1 + nx)$$
$$\varphi = \mu t + ny$$
$$p = nz$$

où l'on remarquera que les valeurs de x & de $\frac{dy}{dt}$ ne doivent contenir aucun terme constant; autrement a & μ ne seroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\varphi}{dt}$ ce qui est contre l'hypothèse.

V.

Substituons maintenant ces expressions de r, φ, p dans les équations de l'art. II, & négligeons les termes qui se trouveroient multipliés par des puissances de n plus hautes que n^2, parce qu'une plus grande exactitude seroit superflue dans le sujet que nous traitons, nous changerons d'abord l'équation (A) en celle-ci:

$$-na\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{a^2}(1 - 2nx + 3n^2x^2)(1 - \tfrac{3}{2}n^2z^2) + R$$
$$- a(1+nx) \times \left(\mu^2 + 2n\mu\frac{dy}{dt} + n^2\frac{dy^2}{dt^2}\right);\ \text{ou bien}$$

$$na\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 - n\left(\frac{2F}{a^2} + a\mu^2\right)x + n^2\frac{F}{a^2}(3x^2 - \tfrac{3}{2}z^2) - 2na\mu\frac{dy}{dt}$$
$$- 2n^2a\mu x\frac{dy}{dt} - n^2a\frac{dy^2}{dt^2} + R = 0.$$

Si n étoit $=0$, on auroit $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R = 0$; donc, n étant très-petite, la quantité $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R$ devra l'être aussi; desorte qu'on pourra supposer $R + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 = n\frac{F}{a^2}X$.

Cette substitution faite, on divisera toute l'équation par na, & l'on aura, en mettant pour plus de simplicité, f au lieu de $\frac{F}{a^3}$:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2} - (2f + \mu^2)x - 2\mu\frac{dy}{dt} + fX \\ + nf(3x^2 - \tfrac{3}{2}z^2) - 2n\mu x\frac{dy}{dt} - n\frac{dy^2}{dt^2}\end{array}\right\} = 0.$$

VI.

L'équation (B) deviendra, par les mêmes substitutions,

$$\mu + n\frac{dy}{dt} = \left(\frac{c}{a^2} + \frac{\int Q(1+nx)dt}{a}\right)(1 - 2nx + 3n^2x^2).$$

Si $n = 0$, on auroit $\int Qdt = a\mu - \frac{c}{a}$; supposons donc

$$\int Q(1+nx)dt = a\mu - \frac{c}{a} + n\frac{F}{a^2}Y,$$

on aura, après les réductions:

$$\frac{dy}{dt} = -2\mu x + fY + 3n\mu^2 - 2nfxY.$$

VII.

Enfin l'équation (C) se changera en celle-ci :

$$n\frac{d^2z}{dt^2}+nz\left(\mu^2+2n\mu\frac{dy}{dt}\right)+2n^2\frac{dz\,dx}{dt^2}+\frac{P-nRz}{a(1+nx)}=0\ ;$$ & l'on prouvera ici, comme on fait ci-dessus, qu'il faut que la quantité P soit très-petite de l'ordre n ; c'est pourquoi nous supposerons .... $\frac{P-nRz}{1+nx}=n\frac{F}{a^2}Z$, d'où nous aurons l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\mu^2z+fZ+2n\mu z\frac{dy}{dt}+2n\frac{dz\,dx}{dt^2}=0.$$

VIII.

Voila les formules par lesquelles on pourra déterminer les inégalités des satellites de Jupiter, dès qu'on aura trouvé les valeurs des quantités X, Y, Z qui résultent de leur action mutuelle.

Pour rendre ces formules encore plus commodes pour le calcul, nous substituerons dans celles des art. V & VII, la valeur de $\frac{dy}{dt}$ tirée de l'art. VI.

De cette manière, on aura, en négligeant toujours les termes affectés de n^3, n^4, &c.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2}+(3\mu^2-2f)x+fX-2\mu fY\\ -n(6\mu^2-3f)x^2-\frac{3}{2}nfz^2+6n\mu fxY-nf^2Y^2\end{array}\right\}=0\ldots(D)$$

$$\frac{dy}{dt}+2\mu x-fY-3n\mu x^2+2nfxY=0\ldots\ldots\ldots(E)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\mu^2z+fZ-4n\mu^2zx+2n\frac{dz\,dx}{dt^2}+2n\mu fzY=0\ldots(F)$$

Nous avons dit que les valeurs de x & $\frac{dy}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme constant; on remplira ces deux conditions par le moyen des constantes f & c.

CHAPITRE II.

Détermination des forces perturbatrices des Satellites de Jupiter.

IX.

SOIT la masse de Jupiter .... ♃

La masse du premier satellite.................... ☾^{I}

du second satellite .... ☾^{II}

du troisième satellite .... ☾^{III}

du quatrième satellite .... ☾^{IV}

Supposons de plus que toutes les quantités que nous avons nommées r, p, φ, F, R, Q, P, &c, dans le Chapitre précédent, soient designées ici, relativement au premier satellite, par r^{I}, p^{I}, φ^{I}, F^{I}, R^{I}, Q^{I}, P^{I}, &c; relativement au second satellite, par r^{II}, p^{II}, φ^{II}, F^{II}, R^{II}, Q^{II}, &c; relativement au troisième, par r^{III}, p^{III}, φ^{III}, F^{III}, &c; & relativement au quatrième, par r^{IV}, p^{IV}, φ^{IV}, &c.

En général, nous conserverons toujours dans la suite les noms donnés dans les articles précédens, avec cette seule différence que nous marquerons les lettres d'un trait pour le premier satellite, de deux traits pour le second satellite, &c.

Enfin nous dénoterons, pour plus de simplicité, la diſtance entre deux ſatellites quelconques, c'eſt-à-dire, la ligne droite qui joint leurs centres, par $\Delta(r, r)$; r, r, étant les rayons vecteurs des deux ſatellites : ainſi la diſtance entre le premier & le ſecond ſatellite ſera déſignée par $\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})$, la diſtance entre le premier & le troiſième par $\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{III}})$, & ainſi des autres.

X.

Cela poſé, il eſt viſible, 1.° que le ſatellite ☾^{I} eſt attiré vers Jupiter avec une force $= \frac{\text{♃}}{r^{\text{I}2}(1+p^{\text{I}})}$, & qu'en même temps Jupiter eſt attiré lui-même vers le ſatellite avec une force $= \frac{\text{☾}^{\text{I}}}{r^{\text{I}2}(1+p^{\text{I}2})}$; d'où il ſuit, que la force totale qui tend à rapprocher le ſatellite de Jupiter eſt $\frac{\text{♃}+\text{☾}^{\text{I}}}{r^{\text{I}2}(1+p^{\text{I}2})}$. Cette expreſſion doit être comparée avec l'expreſſion de la force centrale $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$ (art. I), c'eſt-à-dire, en la rapportant au premier ſatellite, avec $\frac{F^{\text{I}}}{r^{\text{I}2}(1+p^{\text{I}2})}$, ce qui donne d'abord . . . . $F^{\text{I}} = \text{♃} + \text{☾}^{\text{I}}$.

2.° Que le ſatellite ☾^{I} eſt attiré vers le ſatellite ☾^{II} avec une force $= \frac{\text{☾}^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^2}$, laquelle peut ſe décompoſer en deux autres; l'une dans la direction du rayon mené du ſatellite ☾^{I} à Jupiter, qui ſera $= \frac{\text{☾}^{\text{II}} r^{\text{I}}\sqrt{1+p^{\text{I}2}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$; l'autre parallèle au rayon mené du ſatellite ☾^{II} à Jupiter, & qui ſera $\frac{\text{☾}^{\text{II}} r^{\text{II}}\sqrt{1+p^{\text{II}2}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$.

De plus le même ſatellite ☾^{I} doit être regardé comme attiré par une force égale, & en ſens contraire à celle avec laquelle Jupiter eſt attiré par le ſatellite ☾^{II}, c'eſt-à-dire, par une force $=\frac{☾^{\text{II}}}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})}$, & dirigée parallélement au rayon mené de ce dernier satellite à Jupiter. Donc l'action du satellite $☾^{\text{II}}$ produit dans le satellite $☾^{\text{I}}$ deux forces: l'une $=\frac{☾^{\text{II}}r^{\text{I}}\sqrt{1+p^{\text{I}2}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}$ dirigée vers Jupiter, l'autre $=☾^{\text{II}}$. $\left(\frac{1}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})}-\frac{r^{\text{II}}\sqrt{1+p^{\text{II}2}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)$ dans une direction parallèle à celle qui va du satellite $☾^{\text{II}}$ à Jupiter.

3.° Or la force $\frac{☾^{\text{II}}r^{\text{I}}\sqrt{1+p^{\text{I}2}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}$ se décompose en deux autres: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter $=\frac{☾^{\text{II}}r^{\text{I}}p^{\text{I}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}$, l'autre parallèle au même plan dans la direction du rayon r^{I}, qui sera $=\frac{☾^{\text{II}}r^{\text{I}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}$. Pareillement la force $☾^{\text{II}}\left(\frac{1}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})}-\frac{r^{\text{II}}\sqrt{1+p^{\text{II}2}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)$ se change en deux autres forces: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter, $=☾^{\text{II}}\left(\frac{p^{\text{II}}}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{r^{\text{II}}p^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)$, & l'autre parallèle à ce plan dans la direction du rayon $r^{\text{II}}=☾^{\text{II}}\left(\frac{1}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)$. Enfin cette dernière force se décompose encore en deux autres: l'une dans la direction du rayon r^{I}, avec lequel le rayon r^{II} fait l'angle $\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}}$; l'autre perpendiculaire à cette direction; la première sera exprimée par $☾^{\text{II}}\left(\frac{1}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)\textit{cos.}(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$, la seconde par $☾^{\text{II}}\left(\frac{1}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{3}{2}}}-\frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}\right)\textit{sin.}(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$ & tendera à diminuer l'angle φ^{I}, au lieu que nous avons supposé (art. II) que la force perpendiculaire Q tendoit à augmenter l'angle φ; c'est pourquoi il faudra la prendre négativement.

4.° comparant donc toutes ces forces avec les forces R, Q, P (art. I), ou bien R^{I}, Q^{I}, P^{I} (art. IX) on aura en conséquence de l'action du satellite ☾$^{\mathrm{II}}$ les expressions suivantes;

$$R^{\mathrm{I}} = ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}} \cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{\cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$Q^{\mathrm{I}} = ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{II}} \sin.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} - \frac{\sin.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$P^{\mathrm{I}} = ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{II}}}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{p^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

On trouvera de la même manière les expressions des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I}, en tant qu'elles résultent de l'action des satellites ☾$^{\mathrm{III}}$ & ☾$^{\mathrm{IV}}$; & il est clair qu'on aura les mêmes formules que ci-dessus, en marquant seulement de trois traits ou de quatre traits, les lettres qui sont marquées de deux traits.

XI.

Si on veut avoir égard aussi à l'action du soleil sur le satellite ☾$^{\mathrm{I}}$ on nommera :

La masse du Soleil . . . . ☉
La distance du satellite ☾$^{\mathrm{I}}$ au Soleil . . . . δ^{I}
Le rayon vecteur de l'orbite du Soleil autour de Jupiter... ρ^{I}
La longitude du Soleil vu du centre de ♃ . . . . ψ,

& il n'y aura qu'à mettre dans les expressions de R^{I}, Q^{I}, P^{I} de l'article X, ☉ au lieu de ☾$^{\mathrm{II}}$, δ^{I} au lieu de $\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})$, ρ^{I} au lieu de r^{II}, ψ au lieu de φ^{II}, & supposer $p^{\mathrm{II}} = 0$. De cette manière on aura, en vertu de l'action du Soleil

$R^{\mathrm{I}} =$

$$R^{\mathrm{I}} = \odot \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{I}} \cos.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\delta^{\mathrm{I}3}} + \frac{\cos.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\rho^{\mathrm{I}2}} \right)$$

$$Q^{\mathrm{I}} = \odot \left(\frac{\rho^{\mathrm{I}} \sin.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\delta^{\mathrm{I}3}} - \frac{\sin.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\rho^{\mathrm{I}2}} \right)$$

$$P^{\mathrm{I}} = \odot \frac{r^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}}}{\delta^{\mathrm{I}3}}$$

XII.

Donc en joignant enſemble les forces qui proviennent de l'action des trois ſatellites $☾^{\mathrm{II}}$, $☾^{\mathrm{III}}$, $☾^{\mathrm{IV}}$, & du Soleil ſur le ſatellite $☾^{\mathrm{I}}$, on aura les valeurs complettes de R^{I}, Q^{I}, P^{I} exprimées de la manière ſuivante:

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{I}} = {} & ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}} \cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{\cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{III}} \cos.(\varphi^{\mathrm{III}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{III}})^3} + \frac{\cos.(\varphi^{\mathrm{III}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{III}2}(1 + p^{\mathrm{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + ☾^{\mathrm{IV}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{IV}} \cos.(\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{IV}})^3} + \frac{\cos.(\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{IV}2}(1 + p^{\mathrm{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \odot \left(\frac{r^{\mathrm{I}} - \rho^{\mathrm{I}} \cos.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\delta^{\mathrm{I}3}} + \frac{\cos.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\rho^{\mathrm{I}2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{I}} = {} & ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{II}} \sin.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} - \frac{\sin.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + ☾^{\mathrm{III}} \left(\frac{r^{\mathrm{III}} \sin.(\varphi^{\mathrm{III}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{III}})^3} - \frac{\sin.(\varphi^{\mathrm{III}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{III}2}(1 + p^{\mathrm{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + ☾^{\mathrm{IV}} \left(\frac{r^{\mathrm{IV}} \sin.(z^{\mathrm{IV}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{IV}})^3} - \frac{\sin.(\varphi^{\mathrm{IV}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{IV}2}(1 + p^{\mathrm{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \odot \left(\frac{\rho^{\mathrm{I}} \sin.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\delta^{\mathrm{I}3}} - \frac{\sin.(\psi - \varphi^{\mathrm{I}})}{\rho^{\mathrm{I}2}} \right) \end{aligned}$$

$$P^{\mathrm{I}} = ☾^{\mathrm{II}} \left(\frac{r^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{II}}}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{p^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$+☾^{III}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{III}p^{III}}{\Delta(r^{I},r^{III})^{3}}+\frac{p^{III}}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+☾^{IV}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{IV}p^{IV}}{\Delta(r^{I},r^{IV})^{3}}+\frac{p^{IV}}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$$+\odot\frac{r^{I}p^{I}}{\delta^{I3}}$$

XIII.

Telles sont les expressions des forces perturbatrices du satellite $☾^{I}$; d'où il est facile de déduire celles des trois autres satellites $☾^{II}$, $☾^{III}$, $☾^{IV}$. En effet un peu de réflexion suffit pour faire voir que les quantités R^{I}, Q^{I}, P^{I}, deviendront R^{II}, Q^{II}, P^{II}, en marquant seulement de deux traits les lettres qui sont marquées d'un trait, & réciproquement: ainsi l'on aura pour les forces perturbatrices du second satellite les expressions suivantes :

$$R^{II}=☾^{I}\left(\frac{r^{II}-r^{I}\cos.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{I})^{3}}+\frac{\cos.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+☾^{III}\left(\frac{r^{II}-r^{III}\cos.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{III})^{3}}+\frac{\cos.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+☾^{IV}\left(\frac{r^{II}-r^{IV}\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{IV})^{3}}+\frac{\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\odot\left(\frac{r^{II}-\rho^{I}\cos.(\psi-\varphi^{II})}{\delta^{II3}}+\frac{\cos.(\psi-\varphi^{II})}{\rho^{I2}}\right)$$

$$Q^{II}=☾^{I}\left(\frac{r^{I}\sin(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{I})^{3}}-\frac{\sin.(\varphi^{I}-\varphi^{II})}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+☾^{III}\left(\frac{r^{III}\sin.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{III})^{3}}-\frac{\sin.(\varphi^{III}-\varphi^{II})}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+☾^{IV}\left(\frac{r^{IV}\sin.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{\Delta(r^{II},r^{IV})^{3}}-\frac{\sin.(\varphi^{IV}-\varphi^{II})}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\odot\left(\frac{\rho^{I}\sin.(\psi-\chi^{II})}{\delta^{II3}}-\frac{\sin.(\psi-\varphi^{II})}{\rho^{I2}}\right)$$

$$P^{II} = \text{☾}^{I}\left(\frac{r^{II}p^{II} - r^{I}p^{I}}{\Delta(r^{II}, r^{I})^3} + \frac{p^{I}}{r^{I2}(1+p^{I2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\text{☾}^{III}\left(\frac{r^{II}p^{II} - r^{III}p^{III}}{\Delta(r^{II}, r^{III})^3} + \frac{p^{III}}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\text{☾}^{IV}\left(\frac{r^{II}p^{II} - r^{IV}p^{IV}}{\Delta(r^{II}, r^{IV})^3} + \frac{p^{IV}}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+ \odot \frac{r^{II}p^{II}}{\delta^{II3}}$$

On aura pareillement les expreſſions de R^{III}, Q^{III}, P^{III}, & de R^{IV}, Q^{IV}, P^{IV}, en marquant ſucceſſivement de trois traits & de quatre traits les lettres qui ne ſont marquées que d'un ſeul trait dans les expreſſions de R^{I}, Q^{I}, P^{I}, & réciproquement.

X I V.

Il reſte à chercher les valeurs des quantités $\Delta(r^{I}, r^{II})$, $\Delta(r^{I}, r^{III})$, &c, qui expriment les diſtances entre le premier ſatellite & le ſecond, entre le premier & le troiſième, &c. (art. IX). Or il eſt facile de trouver qu'on aura $\Delta(r^{I}, r^{II})^2 = (r^{II}p^{II} - r^{I}p^{I})^2 + (r^{I}\,\text{ſin.}(\varphi^{II} - \varphi^{I}))^2$ $(+r^{II} - r^{I}\,\text{coſ.}(\varphi^{II} - \varphi^{I}))^2 = r^{I2}(1+p^{I2}) - 2r^{I}r^{II}(\text{coſ.}(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + p^{I}p^{II}) + r^{II2}(1+p^{II2})$, donc tirant la racine quarrée

$$\Delta(r^{I}, r^{II}) = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2}) - 2r^{I}r^{II}(\text{coſ.}(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + p^{I}p^{II}) + r^{II2}(1+p^{II2})}$$

On trouvera pareillement

$$\Delta(r^{I}, r^{III}) = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2}) - 2r^{I}r^{III}(\text{coſ.}(\varphi^{III} - \varphi^{I}) + p^{I}p^{III}) + r^{III2}(1+p^{III2})}$$

& ainſi des autres. On voit par-là que $\Delta(r^{II}, r^{I}) = \Delta(r^{I}, r^{II})$, car l'expreſſion de cette dernière quantité demeure la même, en changeant r^{I}, p^{I}, φ^{I} en r^{II}, p^{II}, φ^{II}, & réciproquement; ce qui eſt d'ailleurs évident.

X V.

Pour avoir maintenant la valeur de δ^{I}, il n'y aura qu'à changer dans celle de $\Delta(r^{I}, r^{II})$, r^{II} en ρ^{I}, φ^{II} en ψ, & effacer la qu'antité p^{II} (art. XI) ; on aura donc ainſi

$$\delta^{I} = \sqrt{r^{I2}(1+p^{I2}) - 2r^{I}\rho^{I}\cos.(\psi - \varphi^{I}) + \rho^{I2}}\,;$$

on trouvera pareillement

$\delta^{II} = \sqrt{r^{II2}(1+p^{II2}) - 2r^{II}\rho^{I}\cos.(\psi - \varphi^{II}) + \rho^{I2}}$, & ainſi des autres.

X V I.

Nons avons ſuppoſé (article X) que l'attraction de Jupiter ſur les ſatellites étoit exactement en raiſon inverſe du quarré des diſtances ; c'eſt ce qui n'eſt rigoureuſement vrai, qu'en regardant Jupiter comme un globe de denſité uniforme.

Or on ſait par les obſervations & par la théorie, que cette Planète eſt conſidérablement applatie ; de plus il peut ſe faire qu'elle ne ſoit pas par-tout de la même denſité ; deux circonſtances qui peuvent auſſi influer ſur le mouvement des ſatellites, & auxquelles il eſt bon par conſéquent d'avoir égard ici. Pour cela nous ſuppoſerons 1.° que la figure de Jupiter ſoit celle d'un ſphéroïde elliptique peu différent d'une ſphère ; 2.° que ce ſphéroïde ſoit formé d'une infinité de couches toutes ſphéroïdiques, & de denſités différentes. 3.° Que l'équateur de Jupiter ſoit dans le plan de l'orbite de cette Planète.

Cette dernière ſuppoſition n'eſt pas tout-à-fait exacte ; car on ſait que l'équateur de Jupiter eſt incliné d'environ trois degrés ſur le plan de ſon orbite ; mais l'erreur qui en réſulte eſt ſi petite qu'il ſeroit ſuperflu d'en tenir compte.

Cela poſé, ſoit A le demi-axe d'une couche quelconque, E ſon ellipticité, & D ſa denſité ; on trouvera par les théorèmes de la figure de la Terre de M. Clairaut (§. XXVI & XLVI seconde Partie) que l'attraction de Jupiter sur un satellite quelconque produit deux forces : l'une dirigée au centre de Jupiter $= \frac{2\pi}{r^2(1+p^2)}\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right) + \frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^3}\int Dd.(A^5E)$; l'autre perpendiculaire à cette direction dans le plan d'un méridien $= \frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^3}\int Dd.(A^5E)$; (π dénote ici la périphérie d'un cercle dont le rayon $= 1$). La partie $\frac{2\pi}{r^2(1+p^2)}\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right)$ de la première de ces deux forces, étant réciproquement proportionnelle au quarré de la distance, doit être comparée avéc la force $\frac{\text{♃}}{r^2(1+p^2)}$ (art. X) ; d'où l'on aura $\text{♃} = 2\pi\left(\int DA^2dA + \frac{3}{2}\int Dd.(A^3E)\right)$. L'autre partie de la même force : $\frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^3}\int Dd.(A^5E)$, aussi bien que la force perpendiculaire $\frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^3}\int Dd.(A^5E)$, devront être regardées comme des forces perturbatrices, & par conséquent décomposées suivant les directions de R, Q, P ; cette decomposition étant faite, on aura les deux forces suivantes : $\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{1-4p^2}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}\int Dd.(A^5E)$, dans la direction de la force R, & $\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{3p-2p^3}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}\int Dd.(A^5E)$ dans la direction de la force P ; donc si on suppose $\nu = \frac{\int Dd.(A^5E)}{A^2\left(\int DA^2dA + \frac{2}{3}\int Dd.(A^3E)\right)}$; les forces perturbatrices R & P qui résultent de l'applatissement de Jupiter, & de l'hétérogénéïté de ses couches seront en général . . . . $R = \frac{\nu A^2\,\text{♃}\,(1-4p^2)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}$

& .... $P = \frac{\nu A^2 \Psi (3p - 2p^3)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}$

d'où l'on tire, par rapport au premier ſatellite

$R^{\mathrm{I}} = \frac{\nu A^2 \Psi (1 - 4p^{\mathrm{I}2})}{5r^{\mathrm{I}4}(1+p^{\mathrm{I}2})^{\frac{7}{2}}}$, & $P^{\mathrm{I}} = \frac{\nu A^2 \Psi (3p^{\mathrm{I}} - 2p^{\mathrm{I}3})}{5r^{\mathrm{I}4}(1+p^{\mathrm{I}2})^{\frac{7}{2}}}$;

par rapport au ſecond ſatellite,

$R^{\mathrm{II}} = \frac{\nu A^2 \Psi (1 - 4p^{\mathrm{II}2})}{5r^{\mathrm{II}4}(1+p^{\mathrm{II}2})^{\frac{7}{2}}}$, & $P^{\mathrm{II}} = \frac{\nu A^2 \Psi (3p^{\mathrm{II}} - 2p^{\mathrm{II}3})}{5r^{\mathrm{II}4}(1+p^{\mathrm{II}2})^{\frac{7}{2}}}$, & ainſi des autres.

Il n'y aura donc qu'à ajouter ces valeurs à celles des articles XII & XIII. Au reſte comme l'applatiſſement de Jupiter n'eſt que d'environ $\frac{1}{14}$, ſuivant les dernières obſervations, la quantité E ſera fort petite, auſſi bien que la quantité ν; de plus le rapport de A^2 à r^2 ſera toujours exprimé par une fraction fort petite ; de ſorte que les forces perturbatrices, dont nous venons de parler, ſeront néceſſairement très-petites.

Si on ſuppoſe D conſtante, on aura $\nu = \frac{3E}{1+2E}$. En général, quelle que ſoit D, on aura, par les conditions de l'équilibre, $\int D d.(A^5 E) = 5A^2(E - \frac{1}{2}\zeta)\int D A^2 dA$, ($\zeta$ étant le rapport de la force centrifuge à la peſanteur, ſous l'équateur) ; donc $\nu = 5E - \frac{1}{2}\zeta$ à-très-peu-près.

XVII.

Il faut maintenant développer les expreſſions des forces perturbatrices P, Q, R, en employant les ſuppoſitions de l'article V. Pour cela nous remarquerons d'abord que nous pouvons négliger dans ce calcul tous les termes de l'ordre n^2; parce que les quantités P, Q, R ſont déja elles-mêmes de l'ordre n, comme nous le verrons plus bas. Donc mettant premièrement dans la valeur de $\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})$, art. XIV ; au lieu de r^{I}, $a^{\mathrm{I}}(1+nx^{\mathrm{I}})$, au lieu de p^{I}, nz^{I}; &

de même, au lieu de r^{II}, $a^{II}(1+nx^{II})$ & au lieu de p^{II}, nz^{II}, suivant ce que nous avons dit à l'art. IX, on aura:

$$\Delta(r^{I}, r^{II}) = \sqrt{a^{I2}(1+2nx^{I}) - 2a^{I}a^{II}(1+nx^{I}+nx^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2}(1+2nx^{II})}$$

$$= \sqrt{a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2} + 2n(a^{I2}x^{I} + a^{II2}x^{II}) - 2na^{I}a^{II}(x^{I}+x^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}$$

d'où l'on tire, par les séries,

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} = (a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2})^{-\frac{3}{2}}$$
$$- 3n(a^{I2}x^{I} + a^{II2}x^{II} - a^{I}a^{II}(x^{I}+x^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}))\times$$
$$(a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2})^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

On trouvera de même:

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{III})^{3}} = (a^{I2} - 2a^{I}a^{III}\cos.(\varphi^{III}-\varphi^{I}) + a^{III2})^{-\frac{3}{2}}$$
$$- 3n(a^{I2}x^{I} + a^{III2}x^{III} - a^{I}a^{III}(x^{I}+x^{III})\cos.(\varphi^{III}-\varphi^{I}))\times(a^{I2}$$
$$- 2a^{I}a^{III}\cos.(\varphi^{III}-\varphi^{I}) + a^{III2})^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

Et pareillement

$$\frac{1}{\Delta(r^{I}, r^{IV})^{3}} = (a^{I2} - 2a^{I}a^{IV}\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{I}) + a^{IV2})^{-\frac{3}{2}}$$
$$- 3n(a^{I2}x^{I} + a^{IV2}x^{IV} - a^{I}a^{IV}(x^{I}+x^{IV})\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{I}))\times(a^{I2}$$
$$- 2a^{I}a^{IV}\cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{I}) + a^{IV2})^{-\frac{5}{2}} + \&c.$$

Et ainsi des autres.

XVIII.

Mais il se présente ici une difficulté, par rapport aux quantités $(a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2})^{-\frac{3}{2}}$, $(a^{I2} - 2a^{I}a^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{II2})^{-\frac{5}{2}}$ &c; c'est de pouvoir les réduire à une forme rationelle; condition absolument nécessaire pour l'intégration des équations des satellites.

Pour résoudre cette difficulté, on écrira d'abord les radicaux proposés ainsi: $a^{II-3}\left(1 - \frac{2a^{I}}{a^{II}}\cos(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \frac{a^{I2}}{a^{II2}}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $a^{II-5}\left(1 - \frac{2a^{I}}{a^{II}}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \frac{a^{I2}}{a^{II2}}\right)^{-\frac{5}{2}}$ &c; & la question se réduira à changer en une fonction rationelle, une quantité de cette forme $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda}$, dans laquelle q est un nombre moindre que l'unité.

Pour y parvenir, je remarque que la quantité $1 - 2q \cos. \theta + q^2$ est égale au produit de ces deux quantités: $1 - q (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1})$, & $1 - q (\cos. \theta - \sin. \theta \sqrt{-1})$; je les élève donc l'une & l'autre à la puissance $-\lambda$, en écrivant au lieu du quarré de $\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}$, $\cos. 2\theta \pm \sin. 2\theta \sqrt{-1}$, & ainsi de suite; j'ai $(1 - q (\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = 1 + \lambda q (\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 (\cos. 2\theta + \sin. 2\theta \sqrt{-1}) + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^3 (\cos. 3\theta \pm \sin. 3\theta \sqrt{-1}) +$ &c.

Soit pour abréger,

$$1 + \lambda q \cos. \theta + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 \cos. 2\theta + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^3 \cos. 3\theta \text{ \&c.} = M,$$

$$\lambda q \sin. \theta + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 \sin. 2\theta + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+1)}{2 \cdot 3} q^3 \sin. 3\theta \text{ \&c.} = N$$

on aura:

$$(1 - q (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = M + N \sqrt{-1}, \text{ \&}$$

$$(1 - q (\cos. \theta - \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = M - N \sqrt{-1}; \text{ donc}$$

$$(1 - q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda} = (M + N\sqrt{-1}) \times (M - N \sqrt{-1}) = M^2 + N^2.$$

Or si on fait les quarrés des deux séries M & N, qu'on ajoute ensemble les termes qui ont le même coefficient; & qu'on remarque que $\cos. m\theta \times \cos. n\theta + \sin. m\theta \times \sin. n\theta$ est $= \cos. (m-n)\theta$, m & n étant des nombres quelconques; on trouvera $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda} = A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + D \cos. 3\theta +$ &c. Et les coefficiens A, B, C, &c. seront exprimés de la manière suivante.

$$A = 1 + \lambda^2 q^2 + \frac{\lambda^2(\lambda+1)^2}{2^2} q^4 + \frac{\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}{2^2 \cdot 3^2} q^6 + \text{\&c.}$$

$B =$

$$B = 2\lambda\, q + 2\lambda \times \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^3 + 2\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{\cdot 2 \cdot 3} q^5$$
$$+ 2\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^7 + \&c.$$

$$C = 2\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 + 2\lambda \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^4 + \&c.$$

& ainſi de ſuite.

Au reſte il ne ſera néceſſaire que de connoître les deux premiers coefficiens A, B, pour avoir tous les autres C, D, &c; car on trouvera par les formules de l'article XXVI de la Piéce ſur le mouvement de Saturne (Prix 1748)

$$C = \frac{(1+q^2)B - 2\lambda q A}{(2-\lambda)q}$$

$$D = \frac{2(1+q^2)C - (1+\lambda)q B}{(3-\lambda)q}$$

$$E = \frac{3(1+q^2)D - (2+\lambda)q C}{(4-\lambda)q}$$ & ainſi de ſuite.

XIX.

Tout conſiſte donc à déterminer les valeurs de A, & B; Or, dans la théorie des ſatellites de Jupiter, la plus grande valeur de q eſt d'environ $\frac{2}{3}$, comme on le verra plus bas; donc q^2 ſera toujours moindre que $\frac{1}{2}$; donc ſi on fait $\lambda = \frac{3}{2}$, les ſuites A & B feront aſſez convergentes pour qu'on puiſſe ſe contenter d'un petit nombre de termes. Ces ſuites feront repréſentées en général par celles-ci

$$A = 1 + \frac{9}{4} q^2 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} q^4 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} \times \frac{49}{36} q^6 + \&c.$$
$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2} q + \frac{9}{4} \times \frac{5}{4} q^3 + \frac{9}{4} \times \frac{25}{16} \times \frac{7}{6} q^5 + \&c.$$

dont les coefficiens numériques ſont très aiſés à calculer.

Voici les logarithmes de ces coefficiens pour les différentes puiſſances de q qui entrent dans les deux ſéries dont il s'agit ; les logarithmes qui répondent aux puissances paires de q sont ceux des coefficiens des termes de la série A ; & les logarithmes qui répondent aux puissances impaires de q sont ceux des coefficiens des termes de la série $\frac{B}{2}$.

q	0. 176091	q^{16}	1. 047096	q^{31}	1. 315612
q^2	0. 352182	q^{17}	1. 070577	q^{32}	1. 328976
q^3	0. 449092	q^{18}	1. 094058	q^{33}	1. 341565
q^4	0. 546002	q^{19}	1. 115247	q^{34}	1. 354154
q^5	0. 612949	q^{20}	1. 136436	q^{35}	1. 366053
q^6	0. 679896	q^{21}	1. 155741	q^{36}	1. 377952
q^7	0. 731049	q^{22}	1. 175046	q^{37}	1. 389233
q^8	0. 782202	q^{23}	1. 192775	q^{38}	1. 400514
q^9	0. 823595	q^{24}	1. 210504	q^{39}	1. 411238
q^{10}	0. 864988	q^{25}	1. 226895	q^{40}	1. 421962
q^{11}	0. 899750	q^{26}	1. 243286	q^{41}	1. 432181
q^{12}	0. 934512	q^{27}	1. 258526	q^{42}	1. 442400
q^{13}	0. 964475	q^{28}	1. 273766	q^{43}	1. 452160
q^{14}	0. 994438	q^{29}	1. 288007	q^{44}	1. 461920
q^{15}	1. 020767	q^{30}	1. 302248	&c.	&c.

Il ne s'agira donc plus que d'ajouter à chacun de ces logarithmes celui de la puissance correspondante de q, &

de chercher ensuite le nombre qui répond à chaque somme; on aura ainsi les valeurs d'autant de termes des deux séries A & $\frac{B}{2}$, qu'on voudra; d'où l'on pourra tirer pour A & B des valeurs aussi approchées qu'on le croira nécessaire. Pour juger de la quantité de l'approximation, on remarquera que les différences des logarithmes de la table précédente forment une progression décroissante; d'où il suit que si après avoir pris la somme d'un nombre quelconque de termes de la série A ou $\frac{B}{2}$, on regarde le reste de la série comme une progression géométrique, l'erreur sera toujours moindre que la somme de cette progression. Au reste dans le cas même où q sera la plus grande (ce cas est celui où $q = \frac{a^{II}}{a^{III}} = \frac{900}{1438}$, comme on le verra dans la suite); il suffira de prendre les dix premiers termes des séries A & $\frac{B}{2}$, pour avoir les valeurs de ces coefficiens en millièmes, c'est-à-dire aux dix-millièmes près, & en prenant encore trois ou quatre termes, on poussera l'exactitude jusqu'aux dix-millièmes & au-delà.

XX.

Ayant ainsi les valeurs des coefficiens A, B, C, &c. de la suite qui représente $(1 - 2q\,cos.\theta + q^2)^{-\frac{1}{2}}$ on trouvera aisément ceux de la suite qui exprime $(1 - 2q\,cos.\theta + q^2)^{-\frac{3}{2}}$; car dénotant ces derniers par (A), (B), (C), &c. il faudra que la série $(A) + (B)\,cos.\theta + (C)\,cos.\,2\theta +$ &c. étant multipliée par $1 - 2q\,cos.\theta + q^2$, devienne égale à la série $A + B\,cos.\theta + C\,cos.\,2\theta +$ &c. La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes:

$A = (1 + q^2)(A) - q(B)$, &

$B = (1 + q^2)(B) - 2q(A) - q(C)$.

Or (C) eſt donné en (A) & (B) de la même manière que C eſt donné en A & B ; il ſuffira pour cela de mettre dans l'expreſſion de C (art. XVIII, (A) au lieu de A, (B) au lieu de B, (C) au lieu de C, & $\lambda+1$ au lieu de λ; ce qui donnera $(C)=\frac{(1+q^2)(B)-2(\lambda+1)q(A)}{(1-\lambda)q}$; donc ſi on ſubſtitue cette valeur de (C), on aura deux équations en $A, B, (A), (B)$, d'où l'on tirera $(A)=\frac{(1+q^2)A+\frac{\lambda-1}{\lambda}qB}{(1-q^2)^2}$; $(B)=\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda}(1+q^2)B+4qA}{(1-q^2)^2}$. Connoiſſant (A) & (B), on connoîtra tous les ſuivans (art. XVIII).

XXI.

De ce qu'on vient de démontrer, il ſuit qu'on peut ſuppoſer :

$$(a^{I2}-2a^Ia^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+a^{II2})^{-\frac{1}{2}}=\Gamma(a^I,a^{II})+\Gamma 1(a^I,a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+\Gamma 2(a^I,a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\Gamma 3(a^I,a^{II})\cos.3(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.\ \&.$$

$$(a^{I2}-2a^Ia^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi)+a^{II2})^{-\frac{5}{2}}=\Lambda(a^I,a^{II})+\Lambda 1(a^I,a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+\Lambda 2(a^I,a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\Lambda 3(a^I,a^{II})\cos.3(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.$$

J'entends par $\Gamma(a^I, a^{II})$, $\Gamma 1(a^I, a^{II})$, $\Gamma 2(a^I, a^{II})$, &c ; $\Lambda(a^I, a^{II})$, $\Lambda 1(a^I, a^{II})$, $\Lambda 2(a^I, a^{II})$, &c. des fonctions données de a^I, a^{II} ; dont on trouvera la valeur par les méthodes des articles précédens.

Donc ſi on fait ces ſubſtitutions dans la quantité $\frac{1}{\Delta(r^I,r^{II})^3}$ (art. XVII), & qu'on développe les produits des ſinus & des coſinus, on trouvera

$$\frac{1}{\Delta(r^{\mathrm{I}},r^{\mathrm{II}})^3} =$$

$$\Gamma(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \Gamma 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) \cos.(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}}) + \Gamma 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) \cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+ \Gamma 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) \cos. 3(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}}) \text{ \&c.}$$
$$- 3nx^{\mathrm{I}}\left(a^{\mathrm{I}2}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)$$
$$- 3nx^{\mathrm{I}}\left(a^{\mathrm{I}2}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{2\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)\cos.(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})$$
$$- 3nx^{\mathrm{I}}\left(a^{\mathrm{I}2}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)\cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}}) \text{ \&c.}$$
$$- 3nx^{\mathrm{II}}\left(a^{\mathrm{II}2}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)$$
$$- 3nx^{\mathrm{II}}\left(a^{\mathrm{II}2}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{2\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)\cos.(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})$$
$$- 3nx^{\mathrm{II}}\left(a^{\mathrm{II}2}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\frac{\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}\right)\cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}}) \text{ \&c.}$$

XXII.

Soit fait, pour plus de simplicité :

$$\Pi(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}2}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Pi 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}2}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Pi 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}2}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Pi 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 4(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}2}\Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

& ainsi de suite.

Soit aussi

$$\Psi(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{II}2}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Psi 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{II}2}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Psi 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{II}2}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2}$$

$$\Psi 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 4(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{II}2}\Lambda 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\Lambda 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2} \text{ \&c.}$$

On aura la quantité $\frac{1}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$ exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} = {} & \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Gamma 1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Gamma 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos. 2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c. \\ & + 3nx^{\text{I}}\big(\Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Pi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Pi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos. 2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big) \\ & + 3nx^{\text{II}}\big(\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Psi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Psi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos. 2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big)\end{aligned}$$

On trouvera de même, en changeant simplement r^{II} en r^{III}, a^{II} en a^{III}, φ^{II} en φ^{III}, & x^{II} en x^{III},

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{III}})^3} = {} & \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) + \Gamma 1(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Gamma 2(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos. 2(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c. \\ & + 3nx^{\text{I}}\big(\Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) + \Pi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Pi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos. 2(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big) \\ & + 3nx^{\text{III}}\big(\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) + \Psi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Psi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos. 2(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big)\end{aligned}$$

Et pareillement,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{IV}})^3} = {} & \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \Gamma 1(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Gamma 2(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos. 2(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c. \\ & + 3nx^{\text{I}}\big(\Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \Pi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Pi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos. 2(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big) \\ & + 3nx^{\text{IV}}\big(\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \Psi 1(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) \\ & + \Psi 2(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos. 2(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.\big)\end{aligned}$$

XXIII.

Cela posé, on aura :

$$\frac{r^{\mathrm{I}}}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} = \frac{a^{\mathrm{I}}(1 + nx^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}})^3} = a^{\mathrm{I}}\big(\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$
$$cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$
$$+ nx^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{I}}\big(3\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \big(3\Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times$$
$$cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi)\big) + \big(3\Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})\big)$$
$$+ \&c.\big)$$
$$+ 3nx^{\mathrm{II}}a^{\mathrm{I}}\big(\Psi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+ \Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$

On trouvera de la même manière :

$$\frac{r^{\mathrm{II}}}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} = a^{\mathrm{II}}\big(\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+ \Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$
$$+ 3nx^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\big(\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+ \Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$
$$+ nx^{\mathrm{II}}a^{\mathrm{II}}\big(3\Psi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \big(3\Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$
$$+ \Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \big(3\Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$
$$+ \Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$

On aura enſuite $\frac{1}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\mathrm{II}2}}\,(1 - 2nx^{\mathrm{II}} + \&c.)$

Donc $-\frac{r^{\mathrm{II}}}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{1}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\mathrm{II}2}} - a^{\mathrm{II}}\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$

$$- a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) - a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$$
$$- \&c.$$

$$- 3nx^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\big(\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+ \Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\big)$$

$$- nx^{\mathrm{II}}\Big(\frac{2}{a^{\mathrm{II}2}} + 3a^{\mathrm{II}}\Psi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{II}}\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \big(3a^{\mathrm{II}}\Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$
$$+ a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \big(3a^{\mathrm{II}}\Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$
$$+ a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\big) \times cos. 2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.\Big)$$

Cette quantité étant multipliée par $cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})$, on aura

$$-\frac{r^{\text{II}}\cos.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}+\frac{\cos.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a^{\text{II}}\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}$$

$$-\left(\frac{a^{\text{II}}\Gamma 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+2a^{\text{II}}\Gamma(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}-\frac{1}{a^{\text{II}2}}\right)\cos.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$$

$$-\frac{a^{\text{II}}\Gamma 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+a^{\text{II}}\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\cos.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})-\&c.$$

$$-nx^{\text{I}}\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Pi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+3a^{\text{II}}\frac{\Pi 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+2\Pi(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\cos.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$$

$$+3a^{\text{II}}\frac{\Pi 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+\Pi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\cos.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})+\&c.\Big)$$

$$-nx^{\text{II}}\Big(\frac{3a^{\text{II}}\Psi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+a^{\text{II}}\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Psi 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+2\Psi(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}$$

$$+a^{\text{II}}\frac{\Gamma 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+2\Gamma(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+\frac{2}{a^{\text{II}2}}\Big)\cos.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$$

$$+\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Psi 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+\Psi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+a^{\text{II}}\frac{\Gamma 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})+\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\Big)$$

$$\cos.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})+\&c.\Big)$$

Enfin multipliant la même quantité par $-\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$ on aura:

$$\frac{r^{\text{II}}\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})}{\Delta(r^{\text{I}},r^{\text{II}})^3}-\frac{\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{I}2})^{\frac{3}{2}}}=-\left(a^{\text{II}}\frac{\Gamma 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-\Gamma(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+\frac{1}{a^{\text{II}2}}\right)$$

$$\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})-a^{\text{II}}\frac{\Gamma 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\sin.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})-\&c.$$

$$-nx^{\text{I}}\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Pi 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-2\Pi(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})$$

$$+3a^{\text{II}}\frac{\Pi 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-\Pi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\sin.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})+\&c.\Big)$$

$$-nx^{\text{II}}\Big(\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Psi 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-2\Psi(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+a^{\text{II}}\frac{\Gamma 2(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-2\Gamma(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}-\frac{2}{a^{\text{II}2}}\Big)$$

$$\sin.(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})+\Big(3a^{\text{II}}\frac{\Psi 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-\Psi 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}+a^{\text{II}}\frac{\Gamma 3(a^{\text{I}},a^{\text{II}})-\Gamma 1(a^{\text{I}},a^{\text{II}})}{2}\Big)$$

$$\sin.2(\varphi^{\text{II}}-\varphi^{\text{I}})+\&c.\Big)$$

XXIV.

XXIV.

Soit maintenant

$$\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2},$$

$$\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2} - \frac{a^{\mathrm{I}2}}{a^{\mathrm{II}2}},$$

$$\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2},$$

$$\breve{\Gamma}3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 4(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Gamma 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} - a^{\mathrm{I}3}\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}),$$

$$\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} - a^{\mathrm{I}3}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}),$$

$$\breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} - a^{\mathrm{I}3}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}),$$

$$\breve{\Pi}3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 4(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Pi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} - a^{\mathrm{I}3}\Gamma 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}), \text{ \&c.}$$

$$\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Psi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} + \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2},$$

$$\breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2}$$
$$+ \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + 2a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2} + \frac{2a^{\mathrm{I}2}}{a^{\mathrm{II}2}},$$

$$\breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2}$$
$$+ \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2},$$

$$\breve{\Psi}3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 4(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2a^{\mathrm{I}3}\Psi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Psi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2}$$
$$+ \frac{a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 4(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + a^{\mathrm{I}2}a^{\mathrm{II}}\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2}, \text{ \&c.}$$

On aura $☾^{\mathrm{II}}\left(\frac{r^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}}\,cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{\Delta(r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}})^3} + \frac{cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})}{r^{\mathrm{II}2}(1 + p^{\mathrm{II}2})^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= -\frac{☾^{II}}{a^{I2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \breve{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}\right)$$

$$-n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}x^{I}\left(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Pi}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \breve{\Pi}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}\right)$$

$$-n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}x^{II}\left(\breve{\Psi}(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Psi}1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \breve{\Psi}2(a^{I}, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^{I}) \text{ \&c.}\right)$$

C'est la partie de la force R^{I} qui resulte de l'action du satellite $☾^{II}$, (art. X).

XXV.

Soit de plus

$$\hat{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma2(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Gamma(a^{I}, a^{II})}{2} + \frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$

$$\hat{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma3(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Gamma1(a^{I}, a^{II})}{2},$$

$$\hat{\Gamma}3(a^{I}, a^{II}) = \frac{a^{I2}a^{II}\Gamma4(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Gamma2(a^{I}, a^{II})}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\hat{\Pi}1(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Pi2(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Pi(a^{I}, a^{II})}{2},$$

$$\hat{\Pi}2(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Pi3(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Pi1(a^{I}, a^{II})}{2},$$

$$\hat{\Pi}3(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Pi4(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Pi2(a^{I}, a^{II})}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\hat{\Psi}1(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Psi2(a^{I}, a^{II}) - 2a^{I2}a^{II}\Psi(a^{I}, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) - 3\frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$

$$\hat{\Psi}2(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Psi3(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Psi1(a^{I}, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}),$$

$$\hat{\Psi}3(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{a^{I2}a^{II}\Psi4(a^{I}, a^{II}) - a^{I2}a^{II}\Psi2(a^{I}, a^{II})}{2} + \hat{\Gamma}3(a^{I}, a^{II}), \text{ \&c.}$$

On aura $☾^{II}\left(\frac{r^{II}\,\sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{\Delta(r^{I}, r^{II})^{3}} - \frac{\sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I})}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= -\frac{☾^{II}}{a^{I2}}\left(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\right)$$

$$-n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}x^{I}\left(\hat{\Pi}1(a^{I},a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \hat{\Pi}2(a^{I},a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\right)$$

$$-n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}x^{II}\left(\hat{\Psi}1(a^{I},a^{II})\sin.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \hat{\Psi}2(a^{I},a^{II})\sin.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\right)$$

C'eſt la valeur de la force Q^{I}, en tant qu'elle vient de l'action du ſatellite $☾^{II}$.

XXVI.

Enfin on trouvera $☾^{II}\left(\frac{r^{I}p^{I}-r^{II}p^{II}}{\Delta(r^{I},r^{II})^{3}} + \frac{p^{II}}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}z^{I}\left(a^{I3}\Gamma(a^{I},a^{II}) + a^{I3}\Gamma1(a^{I},a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{I3}\Gamma2(a^{I},a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^{I})\ \&c.\right)$$

$$-n\frac{☾^{II}}{a^{I2}}z^{II}\left(a^{I2}a^{II}\Gamma(a^{I},a^{II}) - \frac{a^{I2}}{a^{II2}} + a^{I2}a^{II}\Gamma1(a^{I},a^{II})\cos.(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + a^{I2}a^{II}\Gamma2(a^{I},a^{II})\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^{I}) + \&c.\right)$$

C'eſt la partie de force P^{I}, qui vient de l'action du même ſatellite $☾^{II}$.

On changera maintenant dans les expreſſions précédentes les quantités $☾^{II}$, a^{II}, φ^{II}, x^{II}, z^{II} en $☾^{III}$, a^{III}, φ^{III}, x^{III}, z^{III}; & en $☾^{IV}$, a^{IV}, φ^{IV}, x^{IV}, z^{IV} ſucceſſivement, & l'on aura les valeurs de R^{I}, Q^{I}, P^{I}, dues à l'action des ſatellites $☾^{III}$, $☾^{IV}$.

Il ne reſtera donc plus qu'à chercher les valeurs de ces mêmes forces, en tant qu'elles viennent de l'action du Soleil.

Pour cela nous remarquerons d'abord que le rayon ρ^{I} de l'orbite de Jupiter eſt conſidérablement plus grand que le rayon r de l'orbite d'un ſatellite quelconque ; d'où il ſuit que la valeur de δ, qui eſt exprimée généralement par $\sqrt{\rho^{I2} - 2\rho^I r \, cos.(\psi - \phi) + r^2(1 + p^2)}$ (art. XV) ſe réduira en une ſuite très-convergente, dont il ſuffira de prendre les premiers termes ; on aura donc :

$$\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\rho^{I3}} + \frac{3r\, cos.(\psi - \phi)}{\rho^{I4}} + \&c.$$

$$\text{donc} - \frac{\rho^I cos.(\psi - \phi)}{\delta^3} + \frac{cos.(\psi - \phi)}{\rho^{I2}} = - \frac{3r}{2\rho^{I3}}\left(1 + cos.2(\psi - \phi)\right);$$

$$\frac{\rho^I fin.(\psi - \phi)}{\delta^3} - \frac{fin.(\psi - \phi)}{\rho^{I2}} = \frac{3r}{2\rho^{I3}} fin.2(\psi - \phi)\,;\ \& \frac{r}{\delta^3} = \frac{r}{\rho^{I3}}.$$

XXVII.

Soit à préſent :

La valeur moyenne de ρ^I . . . . α

La valeur moyenne de $\frac{d\psi}{dt}$, c'eſt-à-dire, la viteſſe angulaire moyenne de Jupiter autour du Soleil . . . . m

On ſuppoſera, à l'imitation de ce que nous avons fait (art. IV), ... $\rho^I = \alpha(1 + n\xi)$

& . . . . $\psi = mt + nJ$

Dans ces formules, $n\xi$ repréſente l'équation de la diſtance de Jupiter au Soleil, & nJ l'équation du centre de Jupiter ; leſquelles ſont connues par la théorie de cette Planète. En effet, en n'ayant égard qu'aux équations elliptiques, & ſuppoſant que ne ſoit l'excentricité, & U l'anomalie moyenne, on a à-très-peu-près $\xi = e\, cof.U$, & $J = -2e\, fin.U$.

On aura donc $\frac{r}{\rho^{I3}} = \frac{a}{\alpha^3}(1 + n\xi)(1 - 3n\xi) =$
$\frac{a}{\alpha^3} \times (1 + nx - 3n\xi)$; donc enfin :

$$\odot\left(\frac{r - \rho^I cof.(\psi - \phi^I)}{\delta^{I3}} + \frac{cof.(\psi - \phi^I)}{\rho^{I2}}\right) = - \frac{a^I\odot}{2\alpha^3}\left(1 + 3\, cof.2(\psi - \phi^I)\right)$$
$$- n\frac{a^I\odot}{2a^3}(x^I - 3\xi)\left(1 + 3\, cof.2(\psi - \phi^I)\right);$$

$$\odot\left(\frac{\rho^{\mathrm{I}} \mathit{sin.}(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})}{\delta^{\mathrm{I}3}}-\frac{\mathit{sin.}(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})}{\rho^{\mathrm{I}2}}\right)=\frac{3a^{\mathrm{I}}\odot}{2\alpha^3}\,\mathit{sin.}2(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})$$
$$+n\,\frac{3a^{\mathrm{I}}\odot}{2\alpha^3}\,(x^{\mathrm{I}}-3\xi)\,\mathit{sin.}2(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})\,;$$

$$\odot\,\frac{r^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{I}}}{\delta^{\mathrm{I}3}}=n\,\frac{a^{\mathrm{I}}\odot}{\alpha^{\mathrm{I}3}}\,z^{\mathrm{I}}.$$

Ce ſont les valeurs des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I}, qui viennent de l'action du Soleil (art. XI).

XXVIII.

En joignant enſemble toutes ces différentes valeurs, on aura les valeurs complettes des forces R^{I}, Q^{I}, P^{I} exprimées de la manière ſuivante.

$$\begin{aligned}
R^{\mathrm{I}}= &-\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+\breve{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})+\breve{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{III}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})+\breve{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{IV}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-\frac{a^{\mathrm{I}3}\odot}{\alpha^3 ♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\,\mathit{cos.}2(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{I}}\left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+\breve{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{I}}\left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})+\breve{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{III}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{I}}\left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})+\breve{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{IV}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-n\,\frac{a^{\mathrm{I}3}\odot}{\alpha^3 ♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{I}}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\,\mathit{cos.}2(\psi-\varphi^{\mathrm{I}})\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{II}}\left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+\breve{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{II}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{III}}\left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})+\breve{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{III}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)\\
&-n\,\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\times\frac{♃}{a^{\mathrm{I}2}}\,x^{\mathrm{IV}}\left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})+\breve{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,\mathit{cos.}(\varphi^{\mathrm{IV}}-\varphi^{\mathrm{I}})+\&c.\right)
\end{aligned}$$

$$+ n \frac{a^{I3}\odot}{\alpha^3 \text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \xi \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} \cos. 2(\psi - \varphi^{I}) \right).$$

$$Q^{I} = - \frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- \frac{a^{I3}\odot}{\alpha^3 \text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \times \tfrac{3}{2} \sin. 2(\psi - \varphi^{I})$$

$$- n \frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1 (a^{I}, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1 (a^{I}, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{I} \left(\hat{\Pi} 1 (a^{I}, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{a^{I3}\odot}{\alpha^3 \text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{I} \times \tfrac{3}{2} \sin. 2(\psi - \varphi^{I})$$

$$- n \frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{II} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{III} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} x^{IV} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$- n \frac{a^{I3}\odot}{\alpha^3 \text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} \xi \times \tfrac{9}{2} \sin. 2(\psi - \varphi^{I}).$$

$$P^{I} = n \frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} z^{I} \left(a^{I3} \Gamma (a^{I}, a^{II}) + a^{I3} \Gamma 1 (a^{I}, a^{II}) \cos. (\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} z^{I} \left(a^{I3} \Gamma (a^{I}, a^{II}) + a^{I3} \Gamma 1 (a^{I}, a^{III}) \cos. (\varphi^{III} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} z^{I} \left(a^{I3} \Gamma (a^{I}, a^{IV}) + a^{I3} \Gamma 1 (a^{I}, a^{IV}) \cos. (\varphi^{IV} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$+ n \frac{a^{I3}\odot}{\alpha^3 \text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} z^{I}$$

$$- n \frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}} \times \frac{\text{♃}}{a^{I2}} z^{II} \left(a^{I2} a^{II} \Gamma (a^{I}, a^{II}) - \frac{a^{I2}}{a^{II2}} \right.$$

$$\left. + a^{I2} a^{II} \Gamma 1 (a^{I}, a^{II}) \cos. (\varphi^{II} - \varphi^{I}) + \&c. \right)$$

$$-n\frac{☾^{III}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}z^{III}\Big(a^{I2}a^{III}\Gamma(a^{I},a^{III})-\frac{a^{I2}}{a^{III2}}$$
$$+a^{I2}a^{III}\Gamma 1(a^{I},a^{III})\,cos.(\varphi^{III}-\varphi^{I})+\&c.\Big)$$
$$-n\frac{☾^{IV}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I3}}z^{IV}\Big(a^{I2}a^{IV}\Gamma(a^{I},a^{IV})-\frac{a^{I2}}{a^{IV2}}$$
$$+a^{I2}a^{IV}\Gamma 1(a^{I},a^{IV})\,cos.(\varphi^{IV}-\varphi^{I})\ \&c.\Big)$$

Il ne reste plus qu'à substituer pour φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV}, & ψ leurs valeurs, $\mu^{I}t+ny^{I}$, $\mu^{II}t+ny^{II}$, $\mu^{III}t+ny^{III}$, $\mu^{IV}t+ny^{IV}$, & $mt+nJ$; ce qui est très-facile, car il n'y aura qu'à changer φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV}, ψ en $\mu^{I}t$, $\mu^{II}t$, $\mu^{III}t$, $\mu^{IV}t$, mt, & ajouter ensuite aux expressions de R^{I} & Q^{I} les quantités suivantes.

$$n\frac{☾^{II}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{II}-y^{I})\big(\check{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,fin\,(\mu^{II}-\mu^{I})t+2\check{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\big)$$
$$+n\frac{☾^{III}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{III}-y^{I})\big(\check{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,fin.(\mu^{III}-\mu^{I})t+2\check{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\ldots\&c.\big)$$
$$+n\frac{☾^{IV}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{IV}-y^{I})\big(\check{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,fin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+2\check{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})\ldots\&c.\big)$$
$$+n\frac{a^{I3}\odot}{\alpha^{3}♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(J-y^{I})\times 3\,fin.2(m-\mu^{I})t,\ \&$$
$$-n\frac{☾^{II}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{II}-y^{I})\big(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\big)$$
$$-n\frac{☾^{III}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{III}-y^{I})\big(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\ldots\&c.\big)$$
$$-n\frac{☾^{IV}}{♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(y^{IV}-y^{I})\big(\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+2\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\ldots\&c.\big)$$
$$+n\frac{a^{I3}\odot}{\alpha^{3}♃}\times\frac{♃}{a^{I2}}(J-y^{I})\times 3\,cos.2(m-\mu^{I})t.$$

Pour trouver les valeurs de R^{II}, Q^{II}, P^{II}, il ne faudra qu'ajouter un trait aux lettres qui n'en ont qu'un, & en ôter un à celles qui en ont deux; & ainsi des autres quantités R^{III}, Q^{III}, P^{III}, R^{IV}, Q^{IV}, P^{IV}, (art. XIII).

A l'égard des forces perturbatrices qui viennent de la non-ſphéricité de Jupiter, on trouvera, en négligeant dans les formules de l'art. XVI, ce qu'on y doit négliger, qu'il faut ajouter aux valeurs de R^{I} & P^{I} les quantités ſuivantes: $\frac{\nu A^2}{5a^{I2}} \times \frac{♃}{a^{II2}}(1 - 4nx^{II})$, & $n\frac{3\nu A^2}{5a^{I2}} \times \frac{♃}{a^{2}}z^{I}$; & de même aux valeurs de R^{II}, P^{II} les quantités $\frac{\nu A^2}{5a^{II2}} \times \frac{♃}{a^{II2}}(1 - 4nx^{II})$, & $n\frac{3\nu A^2}{5a^{II2}} \times \frac{♃}{a^{I2}}z^{II}$, & ainſi de ſuite.

CHAPITRE III.

Calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.

XXIX.

Nous nous contenterons ici de chercher les formules qui déterminent le mouvement du premier Satellite, parce que les autres s'en déduiront aiſément par les remarques des articles IX & XIII.

Pour appliquer au mouvement du premier ſatellite, les équations générales de l'article VIII, il eſt viſible qu'il ne faut que marquer les lettres d'un trait, & ſubſtituer enſuite pour X^{I}, Y^{I}, z^{I} leurs valeurs tirées de celles de R^{I}, Q^{I}, P^{I}, (art. préc.). Mais avant que de faire cette ſubſtitution, nous remarquerons que les équations $R + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 = n\frac{F}{a^2}X$, & $\int Q(1 + nx)\,dt = a\mu - \frac{c}{a} + n\frac{F}{a^2}Y$ (art. V & VI) ne peuvent ſubſiſter dans l'hypothèſe de n très-petit, à moins que les quantités conſtantes $\frac{F}{a^2} - a\mu^2$, $a\mu - \frac{a}{c}$, & les quantités variables R & Q ne ſoient chacunes très-petites de l'ordre n.

Or

Or en examinant les valeurs de R & Q (art. préc.) il eſt facile de voir qu'elles ne ſauroient être ſuppoſées très-petites qu'en regardant comme telles les quantités conſtantes $\frac{☾}{♃}$, $\frac{a^3 \odot}{\alpha^3 ♃}$ & $\nu \frac{A^2}{a^2}$;

Soit donc en général.... $\frac{☾}{♃} = n\chi$

$$\frac{a^3 \odot}{\alpha^3 ♃} = nK$$

$$\nu \frac{A^2}{a^2} = nx$$

Soit de plus...... $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$

$$-\frac{\mu - \frac{c}{a^2}}{f} = nH$$

Nous aurons (à cauſe de $f = \frac{F}{a^3}$, art. V)

$X = g + \frac{a^2}{F} \times \frac{R}{n}$, & $Y = H + \frac{a^2}{F} \times \frac{\int Q(1+nx)dt}{n}$; c'eſt-à dire, à cauſe de $F = ♃ + ☾$ (art. X),

$$X = g + \frac{a^2}{♃} \times \frac{R}{n(1+n\chi)}, \quad Y = H + \frac{a^2}{♃} \times \frac{\int Q(1+nx)\,dt}{n(1+n\chi)}.$$

A l'égard de la quantité Z, elle ſera déterminée par l'équation $\frac{P - nRz}{1+nx} = n\frac{F}{a^2} Z$ (art. VII) laquelle ſe réduit à

$Z = \frac{a^2}{♃} \times \frac{P - nRz}{n(1+n\chi)(1+nx)}$; où l'on remarquera que P eſt déja toute multipliée par n (art. XXVIII).

XXX.

Appliquons maintenant ces formules au premier Satellite. Nous aurons d'abord en ſubſtituant la valeur de R^{I} (art. XXVIIII).

$$X^{\mathrm{I}} = g^{\mathrm{I}}$$

$$- \frac{\chi^{\mathrm{II}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c. \right)$$
$$- \frac{\chi^{\mathrm{III}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c. \right)$$
$$- \frac{\chi^{\mathrm{IV}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \left(\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. (\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c. \right)$$
$$- \frac{K^{\mathrm{I}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \cos. (m - \mu^{\mathrm{I}}) t \right)$$

$$- \frac{n\chi^{\mathrm{II}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c \right)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{III}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c. \right)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{IV}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. (\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t + \&c. \right)$$
$$- \frac{nK^{\mathrm{I}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{I}} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \cos. (m - \mu^{\mathrm{I}}) t \right)$$

$$- \frac{n\chi^{\mathrm{II}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{II}} \left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \ \&c. \right)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{III}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{III}} \left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \ \&c. \right)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{IV}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} x^{\mathrm{IV}} \left(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. (\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}) t \ \&c. \right)$$
$$+ \frac{nK^{\mathrm{I}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \xi \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2} \cos. 2(m - \mu^{\mathrm{I}}) t \right).$$

$$+\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}(y^{II}-y^{I})(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{II})\,\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{II})\,\sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t\ \&c.)$$
$$+\frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}(y^{III}-y^{I})(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\,\sin.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\,\sin.2(\mu^{III}-\mu^{I})t\ \&c.$$
$$+\frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}(y^{IV}-y^{I})(\breve{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\,\sin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})\,\sin.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t\ \&c.)$$
$$+\frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}}(J-y)\times 3\sin.2(m-\mu^{I})t$$
$$+\frac{\chi^{I}}{1+n\chi^{I}}(\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{5}nx^{I}).$$

XXXI.

Multipliant la valeur de Q^{I} par $1+nx^{I}$, & faisant pour abréger :

$$\tilde{\Pi}1(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}1(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II}),$$
$$\tilde{\Pi}2(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}2(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II}),$$
$$\tilde{\Pi}3(a^{I},a^{II})=\hat{\Pi}3(a^{I},a^{II})+\hat{\Gamma}3(a^{I},a^{II}),\ \&c.$$

On aura, après l'intégration & la substitution,

$$Y^{I}=H^{I}$$
$$+\frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{II})}{\mu^{II}-\mu^{I}}\cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{II})}{2(\mu^{II}-\mu^{I})}\cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})}{\mu^{III}-\mu^{I}}\cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})}{\mu^{IV}-\mu^{I}}\cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\frac{\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})}{2(\mu^{IV}-\mu^{I})}\cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t+\&c.\right)$$
$$-\frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}}\times\frac{3}{4(m-\mu^{I})}\cos.2(m-\mu^{I})t.$$
$$-\frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\int x^{I}(\tilde{\Pi}1(a^{I},a^{II})\,\sin.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$+\tilde{\Pi}2(a^{I},a^{II})\,\sin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t+\&c.)\,dt$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \Big(\tilde{\Pi} 1(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tilde{\Pi} 2(a^{I}, a^{III}) \sin. 2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \Big(\tilde{\Pi} 1(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tilde{\Pi} 2(a^{I}, a^{IV}) \sin. 2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$+ \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int x^{I} \times 3 \sin. 2(m - \mu^{I})\, t\, dt.$$
$$- \frac{n\ {}^{II}}{1+n\chi^{I}} \int x^{II} \Big(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{II}) \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \hat{\Psi} 2\, (a^{I} - a^{II}) \sin. 2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int x^{III} \Big(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \hat{\Psi} 2(a^{I} - a^{III}) \sin. 2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int x^{IV} \Big(\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \hat{\Psi} 2(a^{I} - a^{IV}) \sin. 2(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int \xi \times \tfrac{9}{2} \sin. 2(m - \mu^{I})\, t\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{II} - y^{I}) \Big(\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$
$$+ 2\hat{\Gamma} 2(a^{I}, a^{II}) \cos. 2(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{III} - y^{I}) \Big(\hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$+ 2\hat{\Gamma} 2(a^{I}, a^{III}) \cos. 2(\mu^{III} - \mu^{I})\, t + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}} \int (y^{IV} - y^{I}) \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ 2\hat{\Gamma} 2(a^{I}, a^{IV}) \cos. 2(\mu^{IV} - \mu^{I}) + \text{\&c.}\Big)\, dt$$
$$+ \frac{nK^{I}}{1+n\chi^{I}} \int (J - y^{I}) \times 3 \cos. 2\,(m - \mu^{I})\, t\, dt.$$

XXXII.

Enfin si l'on fait :

$$\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) = a^{I3}\, \Gamma(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}),$$
$$\tilde{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}) = a^{I3}\, \Gamma 1(a^{I}, a^{II}) + \breve{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}),$$

$\tilde{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{I}3}\,\Gamma 2\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \breve{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$,

$\mathring{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{I}2} a^{\mathrm{II}}\,\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - \frac{a^{\mathrm{I}2}}{a^{\mathrm{II}2}}$,

$\mathring{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{I}2} a^{\mathrm{II}}\,\Gamma 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$,

$\mathring{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{I}2} a^{\mathrm{II}}\,\Gamma 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$, & ainſi de ſuite, on trouvera

$$Z^{\mathrm{I}} =$$

$$\frac{n\chi^{\mathrm{II}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \tilde{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+ \tilde{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$
$$+ \frac{n\chi^{\mathrm{III}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \tilde{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\, cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+ \tilde{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$
$$+ \frac{n\chi^{\mathrm{IV}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \tilde{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\, cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+ \tilde{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$
$$+ \frac{nK^{\mathrm{I}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{I}}\Big(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\, cos.2\,(m - \mu^{\mathrm{I}})\,t\Big)$$
$$+ \frac{n\chi^{\mathrm{I}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} \times \tfrac{3}{2} z^{\mathrm{I}}.$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{II}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{II}}\Big(\mathring{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \mathring{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+ \mathring{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{III}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{III}}\Big(\mathring{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \mathring{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\, cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})$$
$$+ \mathring{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$
$$- \frac{n\chi^{\mathrm{IV}}}{1 + n\chi^{\mathrm{I}}} z^{\mathrm{IV}}\Big(\mathring{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \mathring{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\, cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+ \mathring{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\, cos.2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\,t \text{ \&c.}\Big)$$

XXXIII.

Et le mouvement du ſatellite ☾$^{\mathrm{I}}$ ſera déterminé par les équations ſuivantes (art. VIII).

$$1.^\circ \quad \frac{d^2x^{\mathrm{I}}}{dt^2} + (3\mu^{\mathrm{I}2} - 2f^{\mathrm{I}})x^{\mathrm{I}} + f^{\mathrm{I}}X^{\mathrm{I}} - 2\mu^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}}$$
$$- n(6\mu^{\mathrm{I}2} - 3f^{\mathrm{I}})x^{\mathrm{I}2} - \tfrac{3}{2}nf^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}2} + 6n\mu^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}} - n^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}2}Y^{\mathrm{I}2} = 0$$

$$2.^\circ \quad \frac{dy^{\mathrm{I}}}{dt} + 2\mu^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}} - f^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}} - 3n\mu^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}2} + 2nf^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}} = 0$$

$$3.^\circ \quad \frac{d^2z^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \mu^{\mathrm{I}2}z^{\mathrm{I}} + f^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}} - 4n\mu^{\mathrm{I}2}z^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}} + 2n\frac{dz^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}}}{dt^2}$$
$$+ 2n\mu^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}} = 0.$$

On ſe ſouviendra que les quantités x^{I} & $\frac{dy^{\mathrm{I}}}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme conſtant, ſuivant la remarque de l'article IV.

XXXIV.

Il ne s'agit donc plus que d'intégrer les équations que nous venons de donner ; pour cela, on commencera par rejetter tous les termes affectés de n, & on cherchera par l'intégration les valeurs de x^{I}, y^{I}, z^{I} ; on ſubſtituera enſuite ces valeurs dans les termes qu'on avoit négligés, & on en tirera de nouvelles valeurs de x^{I}, y^{I}, z^{I} plus approchées que les premières. On opéreroit ainſi de ſuite, ſi nous avions eu égard aux termes affectés de n^2, n^3, &c. Par ce moyen, l'intégration de la première & de la troiſième équation de l'article précédent ſe réduira à celle d'une équation de cette forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + M^2u + T = 0,$$

T étant une fonction compoſée de ſinus & de coſinus d'angles multiples de t ; or l'intégrale de cette équation eſt, comme l'on ſait,

$$u = G\,\mathit{ſin}.Mt + H\,\mathit{coſ}.Mt + \frac{\mathit{coſ}.Mt\int T\,\mathit{ſin}.Mt\,dt - \mathit{ſin}.Mt\int T\,\mathit{coſ}.Mt\,dt}{M} ;$$

de ſorte qu'en ſuppoſant :

$$T = A + B\,\mathit{coſ}.pt + b\,\mathit{ſin}.pt + C\,\mathit{coſ}.qt + c\,\mathit{ſin}.qt + \&c.$$

on aura

$$u = -\frac{A}{M^2} + \left(H + \frac{A}{M^2} - \frac{B}{p^2 - M^2} - \frac{C}{q^2 - M^2} - \&c.\right) cof.Mt$$
$$+ \left(G - \frac{pb}{M(p^2 - M^2)} - \frac{qc}{M(q^2 - M^2)} - \&c.\right) fin.Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} cof.pt$$
$$+ \frac{b}{p^2 - M^2} fin.pt + \frac{C}{q^2 - M^2} cof.qt + \frac{c}{q^2 - M^2} fin.qt + \&c.$$

H & G font les valeurs de u & de $\frac{du}{Mdt}$ lorfque $t=0$.

On voit de là que pour avoir la valeur de u, il n'y a qu'à divifer chacun des finus & des cofinus qui entrent dans T, par $p^2 - M^2$, p étant le coefficient de t, & y ajouter encore deux autres termes, qui renferment $fin.Mt$, & $cof.Mt$ avec des coefficiens arbitraires.

Il ne peut y avoir de difficulté que dans le cas où p feroit égale à M; car alors le divifeur $p^2 - M^2$ fera nul, & les termes $- \frac{B}{p^2 - M^2} cof.Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} cof.pt$, auffi bien que les termes $- \frac{pb}{M(p^2 - M^2)} fin.Mt + \frac{b}{p^2 - M^2} fin.pt$ deviendroient $-\infty + \infty$; ce qui ne fait rien connoître.

Pour réfoudre cette difficulté, on fuppofera que p ne foit pas tout-à-fait égale à M, mais qu'elle en diffère d'une quantité infiniment petite; & on trouvera que les deux premiers termes fe réduifent à $- \frac{Bt}{2p} fin.Mt$, & les deux autres à $\frac{bt}{2p} cof.Mt$; d'où l'on voit que la valeur de u contiendra des termes mutipliés par l'angle t.

Au refte fi dans la quantité T il fe trouve des termes de cette forme $cof.pt$, ou $fin.pt$, p étant $= M + nb$, il eft vifible que ces termes augmenteront beaucoup par l'intégration, puifqu'ils fe trouveront divifés par la quantité très-petite $p^2 - M^2 = nb(2M + nb)$.

Donc fi ces fortes de termes ont des coefficiens finis dans l'équation différentielle, ils deviendront comme infinis dans l'intégrale ; & s'ils n'ont que des coefficiens très-petits de l'ordre n dans la différentielle, il deviendront finis dans l'intégrale, & appartiendront à la première valeur de u.

§. I.

Premières formules du mouvement des Satellites de Jupiter autour de cette Planète.

XXXV.

Si on substitue dans les trois équations de l'art. XXXIII les valeurs X^{I}, Y^{I} & Z^{I}, qu'on rejette d'abord tous les termes affectés de n, & que l'on fasse pour abréger :
$L^{\mathrm{I}} = g^{\mathrm{I}} - 2\mu^{\mathrm{I}} H^{\mathrm{I}} - \chi^{\mathrm{II}} \breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - \chi^{\mathrm{III}} \breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) - \chi^{\mathrm{IV}} \breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) - \frac{1}{2}K^{\mathrm{I}} + \frac{1}{5}K^{\mathrm{I}}$, & $M^{\mathrm{I}2} = 3\mu^{\mathrm{I}2} - 2f^{\mathrm{I}}$, $N^{\mathrm{I}2} = \mu^2$, on trouvera les trois équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
1.^{\circ}\ & \frac{d^2x}{dt^2} + M^{\mathrm{I}2} x^{\mathrm{I}} + f^{\mathrm{I}} L^{\mathrm{I}} \\
& - \chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}} \hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\right) \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t \\
& - \chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})} \hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\right) \cos.2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t \ \&c. \\
& - \chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}} \hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\right) \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})t \\
& - \chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}} - a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})} \hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\right) \cos.2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})t \ \&c. \\
& - \chi^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}}} \hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\right) \cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})t \\
& - \chi^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{I}} \left(\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})} \breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\right) \cos.2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})t \ \&c. \\
& - K^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{I}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\mu^{\mathrm{I}}}{2(m - \mu^{\mathrm{I}})}\right) \cos.2(m - \mu^{\mathrm{I}})t = 0.
\end{aligned}
$$

2.°

$$2.^{\circ}\ \frac{dy^{\mathrm{I}}}{dt} + 2\mu^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}} - f^{\mathrm{I}}h^{\mathrm{I}}$$

$$-\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,cof.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \frac{\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})}{2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,cof.2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\right)$$

$$-\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{III}})}{\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,cof.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \frac{\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})}{2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,cof.2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\right)$$

$$-\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}\left(\frac{\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})}{\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,cof.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t + \frac{\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})}{2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,cof.2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\right)$$

$$+K^{\mathrm{I}}\times\frac{3f^{\mathrm{I}}}{4(m-\mu^{\mathrm{I}})}\,cof.2(m-\mu^{\mathrm{I}})\,t.$$

$$3.^{\circ}\ \frac{d^2z^{\mathrm{I}}}{dt^2} + N^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}} = 0.$$

XXXVI.

La première équation étant intégrée par la méthode de l'article XXXIV, on trouvera que la valeur de x^{I} renferme premièrement le terme conſtant $-\frac{f^{\mathrm{I}}L^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}2}}$, lequel devant être nul (art. XXXIII) on aura l'équation $L^{\mathrm{I}}=0$.

Enſuite la valeur de x^{I} renfermera deux termes, tels que $\mathit{fin.}\ Mt$ & $\mathit{cof.}\ M^{\mathrm{I}}t$, avec des coefficiens arbitraires, leſquels pourront ſe réduire à un ſeul terme repréſenté par $\varepsilon^{\mathrm{I}}cof.(M^{\mathrm{I}}t+\omega^{\mathrm{I}})$; ε^{I}, ω^{I} étant pareillement des conſtantes arbitraires.

De cette manière, ſi on fait

$$\Xi 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \left(\check{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2-M^{\mathrm{I}2}}$$

$$\Xi 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \left(\check{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{4(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2-M^{\mathrm{I}2}}$$

$$\Xi 3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) = \left(\check{\Gamma}3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{3(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\hat{\Gamma}3(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{9(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2-M^{\mathrm{I}2}}\ \&c.$$

& de même

$$\Xi 1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) = \left(\check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})^2-M^{\mathrm{I}2}}$$

$$\Xi 2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) = \left(\check{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})^2-M^{\mathrm{I}2}};$$

& ainſi des autres, & qu'on ſuppoſe de plus:

$$\beta^{\mathrm{I}} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu^{\mathrm{I}}}{m-\mu^{\mathrm{I}}}\right)\frac{f^{\mathrm{I}}}{4(m-\mu^{\mathrm{I}})^2 - M^{\mathrm{I}2}},\text{ on aura}$$

$$x^{\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{I}} \cos.(M^{\mathrm{I}}t + \omega^{\mathrm{I}})$$
$$-\chi^{\mathrm{II}}(\Xi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \Xi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \&c.)$$
$$-\chi^{\mathrm{III}}(\Xi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \Xi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \&c.)$$
$$-\chi^{\mathrm{IV}}(\Xi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos.(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \Xi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) \cos. 2(\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})t + \&c.)$$
$$-K^{\mathrm{I}}\beta^{\mathrm{I}} \cos. 2(m - \mu^{\mathrm{I}})t.$$

XXXVII.

Ayant trouvé la valeur x^{I}, on aura l'expreſſion du rayon vecteur r^{I} de l'orbite du premier ſatellite rapportée au plan de l'orbite de Jupiter, par la formule $r^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{I}}(1 + nx^{\mathrm{I}})$, art. IV.

Or, en examinant cette expreſſion de r^{I}, on reconnoîtra aiſément que le terme $na^{\mathrm{I}}\varepsilon^{\mathrm{I}} \cos.(M^{\mathrm{I}}t + \omega^{\mathrm{I}})$ repréſente l'équation elliptique qui vient de l'excentricité de l'orbite, deſorte que $n\varepsilon^{\mathrm{I}}$ exprimera la valeur de l'excentricité, & $M^{\mathrm{I}}t + \omega^{\mathrm{I}}$ ſera l'anomalie moyenne; d'où l'on voit que le mouvement de cette anomalie ſera au mouvement moyen du ſatellite comme M^{I} à μ^{I}; par conſéquent le mouvement moyen de la ligne des apſides ſera au mouvement moyen du ſatellite comme $\mu^{\mathrm{I}} - M^{\mathrm{I}} : \mu^{\mathrm{I}}$. Nous verrons plus bas (art. XLV), qu'en négligeant les quantités de l'ordre n, on a $M^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}}$, de ſorte que la ligne des apſides ſera fixe, au moins par cette première approximation.

A l'égard de ω^{I}, on le déterminera par le moyen d'une époque quelconque donnée de l'anomalie moyenne; ainſi les quantités ε^{I} & ω^{I} dépendent entièrement des obſervations.

Les autres termes de la valeur de r^{I} expriment les inégalités qui viennent de l'action des trois ſatellites ☾$^{\mathrm{II}}$, ☾$^{\mathrm{III}}$, ☾$^{\mathrm{IV}}$ & du Soleil, ſur le ſatellite ☾$^{\mathrm{I}}$.

XXXVIII.

On ſubſtituera maintenant la valeur de x^{I} dans la ſeconde équation de l'article XXXV, & on tirera par l'intégration la valeur de y^{I}, mais on aura attention de faire évanouir auparavant (art. XXXIII) le terme conſtant $f^{\mathrm{I}}H^{\mathrm{I}}$; ce qui donnera $H^{\mathrm{I}}=0$.

Soit pour abréger

$$\Phi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,\Xi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \frac{f^{\mathrm{I}}}{(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}\,\hat{\Gamma} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$

$$\Phi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\Xi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \frac{f^{\mathrm{I}}}{4(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}\,\hat{\Gamma} 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$

$$\Phi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{3(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\Xi 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \frac{f^{\mathrm{I}}}{9(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}\,\hat{\Gamma} 3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\ \&c.$$

& pareillement

$$\Phi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}}}\,\Xi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \frac{f^{\mathrm{I}}}{(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}\,\hat{\Gamma} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$$

$$\Phi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})}\,\Xi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \frac{f^{\mathrm{I}}}{4(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}\,\hat{\Gamma} 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\ \&c.$$

& ainſi de ſuite.

Soit de plus

$\gamma^{\mathrm{I}} = \frac{\mu^{\mathrm{I}}}{m-\mu^{\mathrm{I}}}\beta^{\mathrm{I}} - \frac{3f^{\mathrm{I}}}{8(m-\mu^{\mathrm{I}})^2}$, on trouvera

$$y^{\mathrm{I}} = -\frac{2\mu^{\mathrm{I}}\epsilon^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}}}\,\mathit{ſin.}(M^{\mathrm{I}}t+\omega^{\mathrm{I}})$$

$$+\chi^{\mathrm{II}}\left(\Phi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \Phi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\,\mathit{ſin.}\,2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \&c.\right)$$

$$+\chi^{\mathrm{III}}\left(\Phi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \Phi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\,\mathit{ſin.}\,2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \&c.\right)$$

$$+\chi^{\mathrm{IV}}\left(\Phi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \Phi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\,\mathit{ſin.}\,2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t + \&c.\right)$$

$$+K^{\mathrm{I}}\gamma^{\mathrm{I}}\,\mathit{ſin.}\,2(m-\mu^{\mathrm{I}})t.$$

XXXIX.

Puiſque $\varphi^{\mathrm{I}}=\mu^{\mathrm{I}}t+ny^{\mathrm{I}}$, (art. IV) on aura, en connoiſſant y^{I}, l'expreſſion du mouvement vrai du premier ſatellite par ſon mouvement moyen.

Le terme $-\frac{2n\mu^{\mathrm{I}}\epsilon^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}}}$ *fin.* $(M^{\mathrm{I}}t+\omega^{\mathrm{I}})$ repréſentera l'équation du centre qui vient de la figure elliptique de l'orbite, & les termes ſuivans exprimeront les inégalités cauſées par l'action des trois autres ſatellites & du Soleil.

X L.

Enfin l'équation $\frac{d^2 z^{\mathrm{I}}}{dt^2}+N^{\mathrm{I}2}z^{\mathrm{I}}=0$ donnera $z^{\mathrm{I}}=\lambda^{\mathrm{I}}$ *fin.* $(N^{\mathrm{I}}t+\eta^{\mathrm{I}})$, λ^{I} & η^{I} étant des quantités arbitraires; car il eſt viſible que cette expreſſion $G\,\textit{fin.}\,N^{\mathrm{I}}t+H\,\textit{cof.}\,N^{\mathrm{I}}t$, laquelle repréſente généralement la valeur de z^{I} (art. XXXIV) peut ſe reduire à celle-ci: $\lambda^{\mathrm{I}}\,\textit{fin.}\,(N^{\mathrm{I}}t+\eta^{\mathrm{I}})$.

X L I.

On aura donc, à cauſe de $p^{\mathrm{I}}=nz^{\mathrm{I}}$ (art. IV), $p^{\mathrm{I}}=n\lambda^{\mathrm{I}}$ *fin.* $(N^{\mathrm{I}}t+\eta^{\mathrm{I}})$ = tangente de la latitude du ſatellite par rapport au plan de l'orbite de Jupiter; d'où l'on voit que l'orbite réelle du ſatellite ſera toute dans un plan paſſant par le centre de Jupiter, & dont on reconnoîtra la poſition, en remarquant, 1.° que $n\lambda^{\mathrm{I}}$ étant la plus grande valeur de p^{I}, exprimera la tangente de l'inclinaiſon; 2.° que $N^{\mathrm{I}}t+\eta^{\mathrm{I}}$ ſera la diſtance du ſatellite au nœud aſcendant, comptée ſur l'orbite de Jupiter, laquelle étant retranchée de la longitude moyenne $\mu^{\mathrm{I}}t$, on aura $(\mu^{\mathrm{I}}-N^{\mathrm{I}})t-\eta^{\mathrm{I}}$ pour la longitude moyenne du nœud.

Au reſte, puiſque l'on a ici $N^{\mathrm{I}}=\mu^{\mathrm{I}}$ (art. XXXV), le mouvement du nœud ſera nul, & ſa longitude moyenne ſera $-\eta^{\mathrm{I}}$, ou plutôt $360°-\eta^{\mathrm{I}}$, quantité qui dépend des obſervations; mais il faut ſe ſouvenir que ce réſultat n'eſt exact qu'aux quantités de l'ordre n près.

X L I I.

On trouvera de même pour le ſecond ſatellite, les formules ſuivantes.

$$x^{II} = \varepsilon^{II} cos.(M^{II} t + \omega^{II})$$

$$-\chi^{I}(\Xi 1(a^{I}, a^{II}) cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t + \Xi 2(a^{I}, a^{II}) cos.2(\mu^{II} - \mu^{I}) t \ \&c.)$$
$$-\chi^{III}(\Xi 1(\mu^{II}, \mu^{III}) cos.(\mu^{III} - \mu^{II}) t + \Xi 2(a^{II}, a^{III}) cos.2(\mu^{III} - \mu^{II}) t + \&c.)$$
$$-\chi^{IV}(\Xi 1(a^{II}, a^{IV}) cos.(\mu^{IV} - \mu^{II}) t + \Xi 1(a^{II}, a^{IV}) cos.2(\mu^{IV} - \mu^{II}) t + \&c.)$$
$$-K^{II} \beta^{II} cos.2(m - \mu^{II}) t.$$

$$y^{II} = -\frac{2\mu^{II}\varepsilon^{II}}{M^{II}} sin.(M^{II} t + \omega^{II})$$

$$+\chi^{I}(\Phi 1(a^{II}, a^{I}) sin.(\mu^{I} - \mu^{II}) t + \Phi 2(a^{II}, a^{I}) sin.2(\mu^{I} - \mu^{II}) t + \&c.)$$
$$+\chi^{III}(\Phi 1(a^{II}, a^{III}) sin.(\mu^{III} - \mu^{II}) t + \Phi 2(a^{II}, a^{III}) sin.2(\mu^{III} - \mu^{II}) t + \&c.)$$
$$+\chi^{IV}(\Phi 1(a^{II}, a^{IV}) sin.(\mu^{IV} - \mu^{II}) t + \Phi 2(a^{II}, a^{IV}) sin.2(\mu^{IV} - \mu^{II}) t + \&c.)$$
$$+K^{II} \gamma^{II} sin.2(m - \mu^{II}) t.$$

$$z^{II} = \lambda^{II} sin.(\mu^{II} t + \eta^{II}).$$

Et l'on aura enſuite $r^{II} = a^{II}(1 + nx^{II})$, $\varphi^{II} = \mu^{II} t + ny^{II}$, $p^{II} = nz^{II}$.

Quant aux quantités marquées par Ξ & Φ, on aura

$$\Xi 1(a^{II}, a^{I}) = \left(\breve{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{2\mu^{II}}{\mu^{I} - \mu^{II}} \hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I})\right) \frac{f^{II}}{(\mu^{I} - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\Xi 2(a^{II}, a^{I}) = \left(\breve{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I}) + \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^{I} - \mu^{II})} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I})\right) \frac{f^{II}}{4(\mu^{I} - \mu^{II})^2 - M^{II2}} \ \&c.$$

$$\Phi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{2\mu^{II}}{\mu^{I} - \mu^{II}} \Xi 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{f^{II}}{(\mu^{I} - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}).$$

$$\Phi 2(a^{II}, a^{I}) = \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^{I} - \mu^{II})} \Xi 2(a^{II}, a^{I}) + \frac{f^{II}}{4(\mu^{I} - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^{I}) \ \&c.$$

Outre cela on aura

$$L^{II} = g^{II} - 2\mu^{II} H^{II} - \chi^{I} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) - \chi^{III} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$$
$$- \chi^{IV} \breve{\Gamma}(a^{II}, a^{IV}) - \frac{1}{2} K^{II} + \frac{1}{5} x^{II}.$$

$$M^{II2} = 3\mu^{II2} - 2f^{II}.$$

$$\beta^{II} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}}\right) \frac{f^{II}}{4(m - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\gamma^{II} = \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}} \beta^{II} - \frac{3f^{II}}{8(m - \mu^{II})^2}$$

Enfin on trouvera les deux conditions $L^{II} = 0$ &

$H^{II}=0$, qui serviront à déterminer les deux constantes f^{II} & c^{II}, (art. XIX.)

On aura des formules analogues pour le troisième & le quatrième satellite, que nous nous dispenserons de rapporter ici, parce qu'elles se déduisent à l'œil de celles que nous venons de donner.

§. 2.

Valeurs numériques des coefficiens des formules précédentes.

XLIII.

Soit en général, suivant l'article XVIII,

$$(1-2q\cos.\theta+q^2)^{-\frac{3}{2}}=A+B\cos.\theta+C\cos.2\theta+D\cos.3\theta+\&c.$$

q étant une fraction moindre que l'unité; on aura, en faisant $q=\frac{a^I}{a^{II}}$, & $\theta=\varphi^{II}-\varphi^I$,

$$(a^{I2}-2a^Ia^{II}\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+a^{II2})^{-\frac{3}{2}}=a^{II-3}(A+B\cos.(\varphi^{II}-\varphi^I)+C\cos.2(\varphi^{II}-\varphi^I)+\&c.);$$ donc (art. XXI),

$$\Gamma(a^I,a^{II})=\frac{A}{a^{II3}},\ \Gamma 1(a^I,a^{II})=\frac{B}{a^{II3}},\ \Gamma 2(a^I,a^{II})=\frac{C}{a^{II3}}\ \&c.$$

On trouvera de même en faisant successivement

$q=\frac{a^I}{a^{III}}$, $q=\frac{a^I}{a^{IV}}$, $q=\frac{a^{II}}{a^{III}}$, $q=\frac{a^{II}}{a^{IV}}$, $q=\frac{a^{III}}{a^{IV}}$, on trouvera, dis-je,

$$\Gamma(a^I,a^{III})=\frac{A}{a^{III3}},\ \Gamma 1(a^I,a^{III})=\frac{B}{a^{III3}},\ \&c.$$

$$\Gamma(a^I,a^{IV})=\frac{A}{a^{IV3}},\ \Gamma 1(a^I,a^{IV})=\frac{B}{a^{IV3}},\ \&c.$$

$$\Gamma(a^{II},a^{III})=\frac{A}{a^{III3}},\ \Gamma 1(a^{II},a^{III})=\frac{B}{a^{III3}};$$ &c. & ainsi de suite.

A l'égard des quantités $\Gamma(a^{II},a^I)$, $\Gamma(a^{III},a^I)$, &c.

il est évident qu'elles doivent être égales à leurs réciproques $\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$, $\Gamma(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$, &c. car les fonctions $a^{\mathrm{I}2} - 2a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}} \operatorname{cos}.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + a^{\mathrm{II}2}$, $a^{\mathrm{I}2} - 2a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{III}} \operatorname{cos}.(\varphi^{\mathrm{III}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + a^{\mathrm{III}2}$, &c. demeurent les mêmes, en changeant a^{I} en a^{II}, & a^{II} en a^{I}, ou bien a^{I} en a^{III}, & a^{III} en a^{I}, &c.

XLIV.

De-là on trouvera (art. XXIV), q étant $= \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}$,

$$\check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 B - 2q^3 A}{2},$$

$$\check{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 C - 2q^3 B + 2q^2 A}{2} - q^2$$

$$\check{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 D - 2q^3 C + q^2 B}{2},$$

$$\check{\Gamma}3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 E - 2q^2 D + q^2 C}{2}, \text{ \&c.}$$

Et par l'article XXV on aura

$$\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 C - 2q^2 A}{2} + q^2,$$

$$\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 D - q^2 B}{2},$$

$$\hat{\Gamma}3(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q^2 E - q^2 C}{2}, \text{ \&c.}$$

& ces mêmes formules serviront aussi pour les quantités $\check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$, $\check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$, $\check{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$, &c. $\hat{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$, $\hat{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$, $\hat{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$, &c. en faisant successivement $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{III}}}$, $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{IV}}}$, $q = \frac{a^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{III}}}$, &c.

Mais pour les quantités réciproques $\check{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$, $\hat{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$, &c. on aura les formules suivantes:

$$\check{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = \frac{qB - 2A}{2},$$

$$\check{\Gamma}1(a^{II}, a^{I}) = \frac{qC - 2B + 2qA}{2} - \frac{1}{q^2},$$

$$\check{\Gamma}2(a^{II}, a^{I}) = \frac{qD - 2C + qB}{2},$$

$$\check{\Gamma}3(a^{II}, a^{I}) = \frac{qE - 2D + qC}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\hat{\Gamma}1(a^{II}, a^{I}) = \frac{qC - 2qA}{2} + \frac{1}{q^2},$$

$$\hat{\Gamma}2(a^{II}, a^{I}) = \frac{qD - qB}{2},$$

$\hat{\Gamma}3(a^{II}, a^{I}) = \frac{qE - qC}{2}$, &c. lesquelles auront lieu pareillement pour les quantités $\check{\Gamma}(a^{III}, a^{I})$, $\hat{\Gamma}(a^{III}, a^{I})$, &c. en faisant comme ci-devant $q = \frac{a^{I}}{a^{III}}$, &c.

XLV.

On formera ensuite les quantités marquées par Ξ & par Φ, (art. XXXIV & XXXVIII), ce qui n'aura aucune difficulté. On remarquera seulement que, à cause de $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$ (art. XXIX), on aura, en négligeant la quantité ng qui est de l'ordre n, $f = \mu^2$, & de-là $f^{I} = \mu^{I2}$, $f^{II} = \mu^{II2}$, $f^{III} = \mu^{III2}$, $f^{IV} = \mu^{IV2}$; par conséquent $M^{I} = \mu^{I}$ (article XXXV), & pareillement $M^{II} = \mu^{II}$, $M^{III} = \mu^{III}$, $M^{IV} = \mu^{IV}$.

Donc supposant $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^{I}}$, on aura

$$\Xi 1(a^{I}, a^{II}) = \left(\check{\Gamma}1(a^{I}, a^{II}) + \frac{2}{s-1}\check{\Gamma}1(a^{I}, a^{II})\right)\frac{1}{(s-1)^2 - 1},$$

$$\Xi 2(a^{I}, a^{II}) = \left(\check{\Gamma}2(a^{I}, a^{II}) + \frac{2}{2(s-1)}\check{\Gamma}2(a^{I}, a^{II})\right)\frac{1}{4(s-1)^2 - 1},$$

$$\Xi 3(a^{I}, a^{II}) = \left(\check{\Gamma}3(a^{I}, a^{II}) + \frac{2}{3(s-1)}\check{\Gamma}3(a^{I}, a^{II})\right)\frac{1}{9(s-1)^2 - 1}, \text{\&c.}$$

Φ I

$$\Phi 1(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{s-1} \Xi 1(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}),$$

$$\Phi 2(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{2(s-1)} \Xi 2(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{4(s-1)^2} \hat{\Gamma} 2(a^{I}, a^{II}),$$

$$\Phi 3(a^{I}, a^{II}) = \frac{2}{3(s-1)} \Xi 3(a^{I}, a^{II}) + \frac{1}{9(s-1)^2} \hat{\Gamma} 3(a^{I}, a^{II}), \text{ \&c.}$$

De même en faisant $s = \frac{\mu^{III}}{\mu^{I}}$, on aura

$$\Xi 1(a^{I}, a^{III}) = \left(\check{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) + \frac{2}{s-1} \hat{\Gamma}(a^{I}, a^{III})\right) \frac{1}{(s-1)^2-1} \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{I}, a^{III}) = \frac{2}{s-1} \Xi 1(a^{I}, a^{III}) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) \text{ \&c.}$$

Pareillement on trouvera, s étant $= \frac{\mu^{I}}{\mu^{II}}$,

$$\Xi 1(a^{II}, a^{I}) = \left(\check{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{2}{s-1} \hat{\Gamma}(a^{II}, a^{I})\right) \frac{1}{(s-1)^2-1} \text{ \&c.}$$

$$\Phi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{2}{s-1} \Xi 1(a^{II}, a^{I}) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} 1(a^{II}, a^{I}) \text{ \&c.}$$

Et ainsi des autres.

X L V I.

Cela posé, on remarquera :

1.° Que les quantités μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, μ^{IV} expriment les vitesses angulaires moyennes des satellites ☾^{I}, ☾^{II}, ☾^{III}, ☾^{IV} autour de Jupiter (art. IV & IX) ; d'où il suit que ces quantités sont réciproquement proportionnelles aux aux temps périodiques des mêmes satellites.

Or on a, par les observations, en négligeant les secondes.

Révolutions périodiques.

☾^{I}	☾^{II}	☾^{III}	☾^{IV}
1j. 18h. 27',	3j. 13h. 13',	7j. 3h. 42',	16 16h. 32'.

Donc réduisant ces quantités en minutes, on aura

$\mu^{I} = \frac{1}{2547}$, $\mu^{II} = \frac{1}{5113}$, $\mu^{III} = \frac{1}{10302}$, $\mu^{IV} = \frac{1}{24032}$.

2.° Que l'on a généralement $f = \mu^2$ (art. XLV) ; c'est-à-dire à cause de $f = \frac{F}{a^3}$ (art. V) & de $F = ♃ + ☾$, (art. X)

$= \text{♃}(1+n\chi) = \text{♃}) \frac{\text{♃}}{a^3} = \mu^2$; & par conféquent $\mu^{I2} = \frac{\text{♃}}{a^{I3}}$, $\mu^{II2} = \frac{\text{♃}}{a^{II3}}$, $\mu^{III2} = \frac{\text{♃}}{a^{III3}}$, $\mu^{IV2} = \frac{\text{♃}}{a^{IV3}}$; d'ou l'on voit que les quantités a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV} font entr'elles comme les quantités $\frac{1}{\mu^{I\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{II\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{III\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{\mu^{IV\frac{2}{3}}}$; ainfi on trouvera les valeurs de ces quantités, ou plutôt de leurs rapports, qui font les feules dont nous ayons befoin ici.

Au refte comme ces valeurs ne font exactes qu'aux quantités de l'ordre n près, nous emploierons, pour les diftances moyennes des Satellites, les déterminations que M. Caffini a tirées des obfervations, lefquelles ne s'écartent d'ailleurs que très-peu de la loi de Kepler; on aura donc, en prenant le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité,

$$a^{I} = 5,67;\ a^{II} = 9,00;\ a^{III} = 14,38;\ a^{IV} = 25,30.$$

Par le moyen de ces valeurs numériques, & des formules des articles XVIII & XIX, j'ai trouvé les déterminations fuivantes.

q	$= \frac{a^{I}}{a^{II}}$	$= \frac{a^{I}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{I}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{III}}{a^{IV}}$
A	3.029	1.456	1.122	2.973	1.342	2.362
B	4.947	1.624	0.740	4.811	1.376	3.563
C	3.760	0.780	0.204	3.542	0.660	2.410
D	2.869	0.341	0.041	2.475	0.493	1.539
E	2.368	0.107	0.009	1.640	0.197	0.924
F	2.311	0.046	0.002	1.308	0.077	0.478
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Et de-là (art. XLIV),

	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}})$
$\breve{\Gamma}$	0.224	0.037	0.007	0.213	0.027	0.142
$\breve{\Gamma}^1$	0.313	0.032	0.003	0.286	0.021	0.175
$\breve{\Gamma}^2$	0.611	0.104	0.017	0.559	0.088	0.382
$\breve{\Gamma}^3$	0.499	0.048	0.005	0.415	0.032	0.255
$\breve{\Gamma}^4$	0.436	0.022	0.001	0.334	0.027	0.156
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\hat{\Gamma}^1$	−0.059	−0.010	−0.001	−0.078	−0.000	−0.050
$\hat{\Gamma}^2$	−0.412	−0.099	−0.017	−0.457	−0.056	−0.327
$\hat{\Gamma}^3$	−0.276	−0.052	−0.005	−0.365	−0.029	−0.240
$\hat{\Gamma}^4$	−0.111	−0.024	−0.001	−0.234	−0.026	−0.172
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}})$
$\breve{\Gamma}$	−1.471	−1.136	−1.039	−1.467	−1.097	−1.349
$\breve{\Gamma}^1$	−4.373	−7.328	−20.375	−4.395	−8.684	−4.631
$\breve{\Gamma}^2$	−1.298	−0.393	−0.116	−1.262	−0.328	−0.960
$\breve{\Gamma}^3$	−0.938	−0.166	−0.017	−0.853	−0.341	−0.592
$\breve{\Gamma}^4$	−0.736	−0.031	−0.004	−0.465	−0.096	−0.351
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

$\hat{\Gamma}1$	1.796	6.012	19.681	1.802	7.542	2.438
$\hat{\Gamma}2$	—0.654	—0.253	—0.053	—0.731	—0.157	—0.575
$\hat{\Gamma}3$	—0.438	—0.133	—0.022	—0.595	—0.082	—0.422
$\hat{\Gamma}4$	—0.175	—0.058	—0.004	—0.365	—0.074	—0.301
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

D'où enfin (art. XLV)

	(a^{I}, a^{II})	(a^{I}, a^{III})	(a^{I}, a^{IV})	(a^{II}, a^{I})	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})
$\Xi 1$	—0.739	—0.133	—0.025	—57.643	—0.815	—0.058
$\Xi 2$	179.000	0.187	0.016	—0.637	91.562	0.539
$\Xi 3$	0.682	0.023	0.001	—0.152	0.698	0.012
$\Xi 4$	0.180	0.004	0.000	—0.054	0.184	0.004
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\Phi 1$	2.705	0.337	0.054	—112.714	2.928	0.147
$\Phi 2$	—356.982	—0.292	—0.023	—0.793	—182.169	—0.908
$\Phi 3$	—1.025	—0.029	—0.001	—0.148	—1.081	—0.015
$\Phi 4$	—0.205	—0.005	—0.000	—0.003	—0.240	—0.005
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	(a^{III}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{III}, a^{IV})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
Ξ1	—0.409	—31.500	—0.518	—0.224	—0.363	—1.243
Ξ2	—0.013	—0.635	2.338	—0.000	—0.007	—0.064
Ξ3	—0.002	—0.150	0.275	—0.000	—0.003	—0.053
Ξ4	—0.000	—0.041	—0.066	—0.000	—0.000	—0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
Φ1	0.380	—60.322	1.659	0.224	0.354	—0.492
Φ2	—0.011	—0.803	—4.338	0.000	—0.004	—0.129
Φ3	—0.002	—0.163	—0.400	0.000	—0.001	—0.052
Φ4	0.000	—0.041	—0.089	0.000	—0.000	—0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

En consultant cette dernière Table, on voit qu'il y a des quantités dont les valeurs numériques sont fort grandes; telles sont les quantités $\Xi 2(a^{I}, a^{II})$, $\Xi 1(a^{II}, a^{I})$, $\Xi 2(a^{II}, a^{III})$, $\Xi 1(a^{III}, a^{II})$, & leurs correspondantes $\Phi 2(a^{I}, a^{II})$, $\Phi 1(a^{II}, a^{I})$, $\Phi 2(a^{II}, a^{III})$, $\Phi 1(a^{III}, a^{II})$.

La raison pour laquelle ces quantités ont des valeurs si considérables, c'est que le diviseur $4(s-1)^2-1$ se trouve fort petit dans le cas où $s=\frac{\mu^{II}}{\mu^{I}}$, & $s=\frac{\mu^{III}}{\mu^{II}}$; & que pareillement le diviseur $(s-1)^2-1$ est fort petit lorsque $s=\frac{\mu^{I}}{\mu^{II}}$, & $s=\frac{\mu^{II}}{\mu^{III}}$, comme il est facile de s'en assurer, au moyen des valeurs de μ^{I}, μ^{II}, μ^{III} données ci-dessus.

Cette remarque eſt d'autant plus eſſentielle qu'elle ſert à expliquer pourquoi les équations empiriques des ſatellites de Jupiter ſont en effet les ſeules qui puiſſent être bien ſenſibles: voyez plus bas art. LVIII & ſuiv.

XLVIII.

Il ne reſte plus maintenant qu'à chercher les valeurs des quantités β & γ. (art. XXXVI & XXXVIII).

Pour cela, on remarquera que la quantité m qui repréſente la viteſſe angulaire moyenne du Soleil autour de Jupiter (art. XXVII), eſt extrêmement petite par rapport aux quantités μ, viteſſes moyennes des ſatellites; d'où il ſuit qu'elle pourra être négligée vis-à-vis de ces dernières quantités; or on a généralement (art. cités),

$$\beta = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu}{m-\mu}\right)\frac{f}{4(m-\mu)^2 - M^2}, \ \& \ \gamma = \frac{\mu}{m-\mu}\beta - \frac{3f}{8(m-\mu)^2}$$

c'eſt-à-dire, à cauſe de $f = \mu^2$, & $M = \mu$ (art. XLV)

$$\beta = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\mu}{m-\mu}\right)\frac{\mu^2}{4(m-\mu)^2 - \mu^2}, \ \gamma = \frac{\mu}{m-\mu}\beta - \frac{3\mu^2}{8(m-\mu)^2}$$

donc en négligeant les quantités m, on aura;

$$\beta = 1, \ \& \ \gamma = -1 - \frac{3}{8} = -\frac{11}{8}.$$

A l'égard des quantités g & e qui doivent être déterminées par les équations $L = 0$, & $H = 0$, (art. XXIX, XXXV & ſuiv.) il eſt inutile d'en chercher la valeur, puiſqu'elles ne ſe trouvent point dans l'expreſſion des coefficiens de nos formules.

§.

Formules des rayons vecteurs, & des longitudes vraies des Satellites de Jupiter par rapport au plan de l'orbite de cette Planète.

XLIX.

Dans les formules ſuivantes, j'ai remis au lieu de $n\chi^{\mathrm{I}}$,

$n\chi^{II}$, $n\chi^{III}$, $n\chi^{IV}$, les quantités $\frac{☾^{I}}{♃}$, $\frac{☾^{II}}{♃}$, $\frac{☾^{III}}{♃}$, $\frac{☾^{IV}}{♃}$ (art. XXIX); & j'ai ſubſtitué pour nK^{I}, nK^{II}, nK^{III}, nK^{IV}, leurs valeurs en nombres; car puiſque $nK = \frac{a^3 ☉}{\alpha^3 ♃}$ (article cité), & que $\frac{♃}{\alpha^3} = \mu^2$ (art. XLVI), & par conſéquent auſſi $\frac{☉}{a^3} = m^2$, on aura $nK = \frac{m^2}{\mu^2}$; donc $nK^{I} = \frac{m^2}{\mu^{I2}}$, $nK^{II} = \frac{m^2}{\mu^{II2}}$ &c.

Or m étant la viteſſe moyenne angulaire du Soleil autour de Jupiter, & μ les viteſſes moyennes angulaires des Satellites, on aura $\frac{m}{\mu^{I}} = \frac{1^{j.}\ 18^{h.}\ 27'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, $\frac{m}{\mu^{II}} = \frac{3^{j.}\ 13^{h.}\ 13'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, $\frac{m}{\mu^{III}} = \frac{7^{j.}\ 12^{h.}\ 13'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$, & $\frac{m}{\mu^{IV}} = \frac{16^{j.}\ 16^{h.}\ 32'}{4332^{j.}\ 12^{h.}\ 20'}$; d'où l'on tire à-très-peu-près $nK^{I} = \frac{m^2}{\mu^{I2}} = 0.0000002$, $nK^{II} = 0.0000007$, $nK^{III} = 0.0000027$, $nK^{IV} = 0.0000148$.

Outre cela, au lieu de $\mu^{I}t$, $\mu^{II}t$, $\mu^{III}t$, $\mu^{IV}t$, & mt, qui repréſentent les valeurs moyennes des angles φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV} & ψ, c'eſt-à-dire des longitudes moyennes des quatre ſatellites, & du Soleil vus de Jupiter, & rapportés au plan de ſon orbite, j'ai mis les lettres u^{I}, u^{II}, u^{III}, u^{IV} & v.

De même au lieu de $M^{I}t + \omega^{I}$, $M^{II}t + \omega^{II}$, $M^{III}t + \omega^{III}$, $M^{IV}t + \omega^{IV}$, anomalies moyennes des Satellites, j'ai ſubſtitué pour plus de ſimplicité V^{I}, V^{II}, V^{III}, V^{IV}.

Enfin j'ai exprimé les rayons vecteurs en demi-diametres de Jupiter, & les longitudes en minutes. De cette manière j'ai trouvé :

L.

Rayon vecteur du premier Satellite.

$$r^{I} = 5,67(1 + n\varepsilon^{I} \cos V^{I})$$

$$+\frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}}\big(4,19\cos.(u^{II}-u^{I})-1014,93\cos.2(u^{II}-u^{I})$$
$$-3,87\cos.3(u^{II}-u^{I})-1,02\cos.4(u^{II}-u^{I})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}}\big(0,75\cos.(u^{III}-u^{I})-1,06\cos.2(u^{III}-u^{I})$$
$$-0,13\cos.3(u^{III}-u^{I})-0,02\cos.4(u^{III}-u^{I})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}}\big(0,14\cos.(u^{IV}-u^{I})-0,09\cos.2(u^{IV}-u^{I})$$
$$-0,00\cos.3(u^{IV}-u^{I})-0,00\cos.4(u^{IV}-u^{I})\ \&c.\big)$$
$$-0.0000009\cos.2(v-u^{I})$$

Rayon vecteur du second Satellite.

$$r^{II}=9,00(1+n\varepsilon^{II}\cos.V^{II})$$
$$+\frac{\text{☾}^{I}}{\text{♃}}\big(518,78\cos.(u^{I}-u^{II})+5,73\cos.2(u^{I}-u^{II})$$
$$+1,36\cos.3(u^{I}-u^{II})+0,49\cos.4(u^{I}-u^{II})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{III}}{\text{♃}}\big(7,16\cos.(u^{III}-u^{II})-824,07\cos.2(\mu^{III}-\mu^{II})$$
$$-6,29\cos.3(u^{III}-u^{II})-1,66\cos.4(\mu^{III}-\mu^{II})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}}\ 0,52\cos.(u^{IV}-u^{II})-4,85\cos.2(u^{IV}-u^{II})$$
$$-0,11\cos.3(u^{IV}-u^{II})-0,04\cos.4(u^{IV}-u^{II})\ \&c.\big)$$
$$-0,0000060\cos.2(v-u^{II}).$$

Rayon vecteur du troisième Satellite.

$$r^{III}=14,38(1+n\varepsilon^{III}\cos.V^{III})$$
$$+\frac{\text{☾}^{I}}{\text{♃}}\big(5,88\cos.(u^{I}-u^{III})+0,19\cos.2(u^{I}-u^{III})$$
$$+0,03\cos.3(u^{I}-u^{III})+0,00\cos.4(u^{I}-u^{III})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{II}}{\text{♃}}\big(452,98\cos.(u^{II}-u^{III})+9,13\cos.2(u^{II}-u^{III})$$
$$+2,16\cos.3(u^{II}-u^{III})+0,59\cos.4(u^{II}-u^{III})\ \&c.\big)$$
$$+\frac{\text{☾}^{IV}}{\text{♃}}\ 7,46\cos.(u^{IV}-u^{III})-33,62\cos.2(u^{IV}-u^{III})$$
$$-3,95\cos.3(u^{IV}-u^{III})+0,95\cos.4(u^{IV}-u^{III})\ \&c.\big)$$
$$-0,0000392\cos.2(v-u^{III}).$$

Rayon

Rayon vecteur du quatrième Satellite.

$$r^{IV} = 25,30(1 + n\varepsilon^{IV} \cos. V^{IV})$$

$$+ \frac{☾^{I}}{♃}(5,66 \cos.(u^{I} - u^{IV}) + 0,01 \cos.2(u^{I} - u^{IV})$$
$$+ 0,00 \cos.3(u^{I} - u^{IV}) + 0,00 \cos.4(u^{I} - u^{IV}) \text{ \&c.})$$
$$+ \frac{☾^{II}}{♃}(9,18 \cos.(u^{II} - u^{IV}) + 0,17 \cos.2(u^{II} - u^{IV})$$
$$+ 0,07 \cos.3(u^{II} - u^{IV}) + 0,00 \cos.4(u^{II} - u^{IV}) \text{ \&c.})$$
$$+ \frac{☾^{III}}{♃}(31,55 \cos.(u^{III} - u^{IV}) + 1,62 \cos.2(u^{III} - u^{IV})$$
$$+ 1,35 \cos.3(u^{III} - u^{IV}) + 0,43 \cos.4(u^{III} - u^{IV}) \text{ \&c.})$$
$$- 0,0003754 \cos.2(v - u^{IV}).$$

L I.

Longitude vraie du premier Satellite.

$$\varphi^{I} = u^{I} - 114^{\circ}, 35' n\varepsilon^{I} \sin. V^{I}$$

$$+ \frac{☾^{II}}{♃}(9300' \sin.(u^{II} - u^{I}) - 1227214' \sin.2(u^{II} - u^{I})$$
$$- 3526' \sin.3(u^{II} - u^{I}) - 705' \sin.4(u^{II} - u^{I}) \text{ \&c.})$$
$$+ \frac{☾^{III}}{♃}(1158' \sin.(u^{III} - u^{I}) - 1007' \sin.2(u^{III} - u^{I})$$
$$- 101' \sin.3(u^{III} - u^{I}) - 18' \sin.4(u^{III} - u^{I}) \text{ \&c.})$$
$$+ \frac{☾^{IV}}{☾}(188' \sin.(u^{IV} - u^{I}) - 81' \sin.2(u^{IV} - u^{I}) - 3'$$
$$\sin.3(u^{IV} - u^{I}) - 0' \sin.4(u^{IV} - u^{I}) \text{ \&c.})$$
$$- 0'', 047 \sin.2(v - u^{I}).$$

Longitude vraie du second Satellite.

$$\varphi^{II} = u^{II} - 114^{\circ}, 35' n\varepsilon^{II} \sin. V^{II}$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\left(-387482'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}})-2727'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}})\right.$$

$$\left.-509'\,\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{II}})-12'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}})\ \&c.\right)$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\left(10067'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}})-626246'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}})\right.$$

$$\left.-3717'\,\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}})-825'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}})\ \&c.\right)$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\left(506'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}})-3123'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}})-52'\right.$$

$$\left.\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}})-17'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}})\ \&c.\right)$$

$$-0'',190\,\mathit{sin.}2(v-u^{\mathrm{II}}).$$

Longitude vraie du troisième Satellite.

$$\varphi^{\mathrm{III}}=u^{\mathrm{III}}-114^{\circ},35'\,n\varepsilon^{\mathrm{III}}\,\mathit{sin.}\,V^{\mathrm{III}}$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\left(1306'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{III}})-38'\,\mathit{sin.}\,2\,(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{III}})-8'\right.$$

$$\left.\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{III}})-1'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{III}})\ \&c.\right)$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃}\left(-207375'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{III}})-2760'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{III}})\right.$$

$$\left.-559'\,\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{III}})-142'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{II}}-{}^{\mathrm{III}})\ \&c.\right)$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\left(5703'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{III}})-14911'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{III}})\right.$$

$$\left.-1376'\,\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{III}})-306'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{III}})\ \&c.\right)$$

$$-0'',977\,\mathit{sin.}(v-u^{\mathrm{III}}).$$

Longitude vraie du quatrième Satellite.

$$\varphi^{\mathrm{IV}}=u^{\mathrm{IV}}-114^{\circ},35'\,n\varepsilon^{\mathrm{IV}}\,\mathit{siu.}\,V^{\mathrm{IV}}$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\left(768'\,\mathit{sin.}\,(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{IV}})-0'\,\mathit{sin.}\,2\,(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{IV}})-0'\right.$$

$$\left.\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{IV}})-0'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{IV}})\ \&c.\right)$$

$$+\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃}\left(1219'\,\mathit{sin.}(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{IV}})-15'\,\mathit{sin.}2(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{IV}})-3'\right.$$

$$\left.\mathit{sin.}3(u^{\mathrm{II}}-{}^{\mathrm{IV}})-0'\,\mathit{sin.}4(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{IV}})\ \&c.\right)$$

$+ \frac{☾^{III}}{♃} (-1691' \sin.(u^{III} - u^{IV}) - 444' \sin.2(u^{III} - u^{IV})$
$- 180' \sin.3 (u^{III} - u^{IV}) - 59 \sin.4 (u^{III} - u^{IV})$ &c.)
$- 4'', 208 \sin.2(v - u^{IV})$.

§. 4.

Où l'on donne les inégalités des Satellites, qui dépendent de leurs configurations, & qui ont lieu au temps des éclipſes.

L I I.

Il eſt viſible que les éclipſes des Satellites, c'eſt-à-dire leurs conjonctions avec Jupiter, arrivent lorſque leurs longitudes φ diffèrent de 180° de la longitude ψ du Soleil vu de Jupiter; de ſorte qu'on aura généralement l'équation $\varphi - \psi = 180°$; ou bien, en mettant pour φ & ψ, leurs valeurs $u + ny$; & $v + nJ$; $u - v = 180° + nJ - ny$; où nJ exprime l'équation de Jupiter, ny l'équation, ou plutôt la ſomme des équations du Satellite, & $u - v$ la diſtance, ou bien l'élongation moyenne du ſatellite; donc pour avoir la conjonction vraie, il n'y aura qu'à ajouter au temps de la conjonction moyenne la quantité $nJ - ny$ convertie en temps, à raiſon du mouvement moyen du ſatellite au Soleil, converſion qu'on fera aiſément en multipliant la quantité propoſée par 0, 1179 pour le premier ſatellite, par 0, 2369 pour le ſecond, par 0, 4771 pour le troiſième & par 1, 1169 pour le quatrième; & changeant enſuite les degrés en heures, les minutes en minutes de degrés, &c, ces nombres ſe trouvent, en diviſant les durées des révolutions ſynodiques des ſatellites, leſquelles ſont de 1j. 18h. 28′ 36″, 3j. 13h. 17′ 54″, 7j. 3h. 59′ 36″, 16j. 18h. 5′ 7″ par 360°, après avoir réduit le tout en ſecondes.

LIII.

Nous allons donc donner ici les équations des conjonctions des satellites ; mais nous ferons abstraction de celles qui viennent de l'excentricité de Jupiter, & des excentricités particulières des satellites, parce que les unes sont assez connues des Astronomes, & que les autres ne sont pas assez exactes pour qu'on puisse s'y fier.

LIV.

Équation du premier Satellite.

$$\frac{♃}{☾^{\mathrm{II}}}\Big(-1097'\,\text{sin.}\,(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{I}}) + 144800'\,\text{sin.}\,2\,(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{I}}) + 416'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{I}}) + 83'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{II}}-u^{\mathrm{I}})\ \&\text{c.}\Big) +$$
$$\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\Big(-137'\,\text{sin.}\,(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{I}}) + 119'\,\text{sin.}\,2(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{I}}) + 12'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{I}}) + 1'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{I}})\ \&\text{c.}\Big) +$$
$$\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\Big(-22'\,\text{sin.}\,(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{I}}) + 9'\,\text{sin.}\,2(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{I}}) + 0'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{I}}) + 0'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{I}})\ \&\text{c.}\Big)$$

LV.

Équation du second Satellite.

$$\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\Big(91810'\,\text{sin.}\,(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}) + 646'\,\text{sin.}\,2(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}) + 121'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}}) + 3'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}})\ \&\text{c.}\Big) +$$
$$\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\Big(-2385'\,\text{sin}\,(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}}) + 148383'\,\text{sin.}\,2(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}}) + 881'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}}) + 195'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{III}}-u^{\mathrm{II}})\ \&\text{c.}\Big) +$$
$$\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}\Big(-119'\,\text{sin.}\,(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}}) + 740'\,\text{sin.}\,2(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}}) + 12'\,\text{sin.}\,3(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}}) + 4'\,\text{sin.}\,4(u^{\mathrm{IV}}-u^{\mathrm{II}})\ \&\text{c.}\Big)$$

L V I.

Équation du troisième Satellite.

$$\frac{☾^{I}}{♃}\left(-624'\,\text{sin.}(u^{I}-u^{III})+18'\,\text{sin.}\,2(u^{I}-u^{III})+4'\,\text{sin.}\,3(u^{I}-u^{III})+0'\,\text{sin.}\,4(u^{I}-u^{III})\ \&c.\right)+$$

$$\frac{☾^{II}}{♃}\left(99075'\,\text{sin.}(u^{II}-u^{III})+1319'\,\text{sin.}\,2(u^{II}-u^{III})+267'\,\text{sin.}\,3(u^{II}-u^{III})+68'\,\text{sin.}\,4(u^{II}-u^{III})\ \&c.\right)+$$

$$\frac{☾^{IV}}{♃}\left(-2725'\,\text{sin.}(u^{IV}-u^{III})+7124'\,\text{sin.}\,2(u^{IV}-u^{III})+627'\,\text{sin.}\,3(u^{IV}-u^{III})+146'\,\text{sin.}\,4(u^{IV}-u^{III})\ \&c.\right)$$

L V I I.

Équation du quatrième Satellite.

$$\frac{☾^{I}}{♃}\left(-858'\,\text{sin}\,(u^{I}-u^{IV})+0'\,\text{sin.}\,2(u^{I}-u^{IV})\ \&c.\right)+$$

$$\frac{☾^{II}}{♃}\left(-1362'\,\text{sin.}(u^{II}-u^{IV})+18'\,\text{sin.}\,2(u^{II}-u^{IV})+4'\,\text{sin.}\,3(u^{II}-u^{IV})-0'\,\text{sin.}\,4(u^{II}-u^{IV})\ \&c.\right)+$$

$$\frac{☾^{III}}{♃}\left(1888'\,\text{sin.}\,(u^{III}-u^{IV})+496'\,\text{sin.}\,2(u^{III}-u^{IV})+201'\,\text{sin.}\,3(u^{III}-u^{IV})+66'\,\text{sin.}\,4(u^{III}-u^{IV})\ \&c.\right)$$

J'ai négligé dans ces formules les termes dus à l'action du Soleil, & qui font de la forme de $\text{sin.}\,2(v-u)$, parce que ces termes deviennent nuls au temps des conjonctions ou l'on a $u-v=180°$.

§. 5.

Comparaison des formules précédentes avec les observations, & conséquences qui en résultent par rapport aux masses des Satellites.

LVIII.

Nous nous contenterons ici de comparer nos formules avec les tables de M. Wargentin, qui sont, comme l'on sait, le résultat d'un grand nombres d'observations; mais avant d'entreprendre ce parallèle, il est bon d'avertir que les tables de ce grand Astronome sont dressées de manière qu'il n'y a aucune équation soustractive, quoique les équations qu'il a employées, soient de nature à être tantôt additives & tantôt soustractives; cela vient de ce que l'Auteur a retranché, par avance des époques, chacune des plus grandes équations soustractives; desorte que les équations des tables se trouvent nulles dans le cas où elles auroient été les plus grandes à soustraire, & que leur plus grande valeur est double de ce qu'elle auroit dû être.

LIX.

En examinant les différens termes de la formule de l'article LIV, on voit qu'il y en a un dont le coefficient numerique est très-grand, & vis-à-vis duquel tous les autres termes ne sont presque d'aucune considération; c'est le terme $\frac{☾''}{♃}\, 144800' \sin. 2(u^{II} - u^{I})$, d'où résulte une équation qui a pour argument $2(u^{II} - u^{I})$, savoir le double de la distance moyenne du second satellite au premier, au temps des conjonctions de celui-ci, & dont la plus grande valeur eſt de $\frac{☾^{\text{II}}}{♃}$ 144800′, $\frac{☾^{\text{II}}}{♃}$ exprimant le rapport de la maſſe du ſecond ſatellite à celle de Jupiter.

Pour mieux connoître la nature de cette inégalité qui doit avoir lieu dans les conjonctions du premier ſatellite, il faut chercher ſa période, laquelle dépend du rapport des révolutions ſynodiques des deux premiers ſatellites. Or ſuivant M. Wargentin, on a pour la durée de la révolution ſynodique du premier, $1^{\text{j.}}\ 18^{\text{h.}}\ 28'\ 35''\ 56'''\ 58^{\text{IV}}$, & pour celle du ſecond, $3^{\text{j.}}\ 13^{\text{h.}}\ 17'\ 53''\ 45'''\ 7^{\text{IV}}$; d'où l'on trouve, en additionnant ſucceſſivement ces nombres, que 247 révolutions du premier font $437^{\text{j.}}\ 3^{\text{h.}}\ 43'\ 59''\ 31'''$, & que 123 révolutions du ſecond font $437^{\text{j.}}\ 3^{\text{h.}}\ 41'\ 11''\ 29'''$; ainſi pendant que le premier fait une révolution par rapport au Soleil, le ſecond ne fait que $\frac{123}{247}$ d'une pareille révolution; d'où il ſuit que la diſtance $u^{\text{II}} - u^{\text{I}}$ du ſecond ſatellite au premier augmente dans l'intervalle d'une conjonction à l'autre, de $\left(\frac{123}{247} - 1\right)360°$; pour avoir une exactitude plus grande, on additionnera de nouveau les périodes du premier & du ſecond ſatellite que nous venons de trouver, juſqu'à ce qu'ils faſſent des ſommes à-peu-près égales, & l'on trouvera que 449538 révolutions du premier font $795619^{\text{j}}\ 13^{\text{h.}}\ 28'\ 8''\ 26'''$, & que 223860 révolutions du ſecond font $795619^{\text{j.}}\ 13^{\text{h.}}\ 32'\ 19''\ 40'''$; c'eſt pourquoi on aura, au lieu de la fraction $\frac{123}{247}$, celle-ci beaucoup plus exacte $\frac{223860}{449538}$.

Soit maintenant θ la diſtance du ſecond ſatellite au premier au temps d'une conjonction de celui-ci, cette diſtance deviendra, après n révolutions $\theta + n\left(\frac{223860}{449538} - 1\right)360° = u^{\text{II}} - u^{\text{I}}$; donc on aura $2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) = 2\theta + n\left(\frac{447720}{449538} - 2\right)360° = 2\theta - n\left(\frac{1818}{449538} + 1\right)360°$;

& $\mathit{fin}.\, 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}}) = \mathit{fin}.\,(2\theta - n\,\frac{1818}{449538}\,380^{\circ})$; donc pourque cette quantité redevienne $\mathit{fin}.\, 2\theta$, il faut que $\frac{1818n}{449538} = 1$, ce qui donne $n = \frac{449538}{1818} = 247,270$; c'eſt le nombre des révolutions du premier ſatellite qui exprime la période de l'équation $\mathit{fin}.\, 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}})$.

Or 247 révolutions font à-très-peu près $437^{j.}\, 3^{h.}\, 44'\, 0''$; & $\frac{27}{100}$ de révolutions font $11^{h.}\, 28'\, 7''$, donc la période cherchée ſera de $437^{j.}\, 15^{h.}\, 12'\, 7''$.

L X.

Voyons à-préſent quelle doit être la marche de cette équation ; pour cela, nous ſuppoſerons $\theta = 0$, c'eſt-à-dire, que les deux ſatellites ſe trouvent à-la-fois en conjonction, & nous aurons, après un nombre quelconque n de révolutions du premier ſatellite, $\mathit{fin}.\, 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}}) = -\mathit{fin}.\, n\,\frac{1818}{449538}\,360^{\circ}$, ou bien en faiſant, pour abréger, $p = \frac{449538}{1818} =$ au nombre des révolutions qui forment la période de l'équation, $\mathit{fin}.\, 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}}) = -\mathit{fin}.\,\frac{n}{p}\,360^{\circ}$.

De-là on voit que l'équation $\mathit{fin}.\, 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}})$ ſera nulle au commencement de la période, qu'enſuite elle deviendra ſouſtractive, & qu'elle ſera la plus grande à ſouſtraire, lorſque $n = \frac{p}{4}$, c'eſt-à-dire, au quart de la période ; après quoi elle redeviendra nulle à la moitié de la période, enſuite ſe changera en additive croiſſante juſqu'aux trois quarts de la période, où elle ſera la plus grande, & enfin décroîtra pendant le dernier quart, pour ſe retrouver nulle au commencement de la période ſuivante.

L X I.

Je dis maintenant que l'équation que nous venons d'examiner eſt la même que celle qui ſe trouve dans les tables

tables du premier satellite, designée par la lettre C, & qui est la seule que les observations aient fait connoître jusqu'ici. En effet 1.° la période de cette équation est, selon M. Wargentin de $437^{j.}\ 19^{h.}\ 41'$ environ, ce qui s'accorde admirablement bien avec ce que nous avons trouvé dans l'article LIX; car la différence de $4^{h.}\ 28'$ qui s'y trouve, n'est d'aucune considération par rapport à un intervalle de $437^{j.}$ 2.° Si on examine l'équation C on verra qu'en ôtant toujours $3'\ 30''$ (moitié de la plus grande valeur de cette équation, selon la remarque de l'article LVIII), & établissant le commencement de la période (qui est ici divisée en mille parties) au nombre 750, on verra, dis-je, que la marche de cette équation est la même que celle de l'équation $\mathit{fin}.\ 2\,(u^{\mathrm{II}} - u^{\mathrm{I}})$ (art. préc.). De plus on trouvera, par les tables du premier & du second satellite, que dans les conjonctions du premier satellite, qui répondent exactement au nombre 750, l'élongation du second satellite est nulle. Donc, &c.

L X I I.

De-là il suit que les nombres C des tables du premier satellite ne sont autre chose que les distances, c'est-à-dire, les élongations du second satellite au premier, au temps des conjonctions de celui-ci, le cercle étant supposé divisé en 1000 parties, desorte que le nombre 750 réponde aux conjonctions des deux satellites & 250 à leurs oppositions; cette remarque fournit un moyen de rectifier les époques de ces nombres, si elles en avoient besoin, & de les prolonger autant qu'on voudra, sans craindre de s'égarer.

L X I I I.

La plus grande valeur de l'équation C du premier satellite est de $7'$, dont il ne faut prendre que la moitié (art. LVIII); donc, comparant cette valeur avec le coefficient de l'équation $\mathit{fin.}\ 2\,(u^{\text{II}} - u^{\text{I}})$ lequel eſt $\frac{☾^{\text{II}}}{♃}\ 144800'$ on aura $\frac{☾^{\text{II}}}{♃}\ 144800 = \frac{7}{2}$, d'où l'on tire $\frac{☾^{\text{II}}}{♃} = \frac{7}{289600} = 0{,}00002417 = \frac{11}{400000}$ à-peu-près; c'eſt le rapport de la maſſe du ſecond ſatellite à celle de Jupiter. Si on prend la maſſe de la Terre pour l'unité, on a $♃ = 363{,}9$, ce qui donne $☾^{\text{II}} = 0{,}008794 = \frac{11}{1250}$ à-peu-près.

Suppoſons que la denſité de ce ſatellite ſoit la même que celle de Jupiter, ou au moins qu'elle n'en diffère que très peu, ce qui eſt très-naturel, on trouvera, en prenant le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité, que celui du ſatellite eſt 0,0289, c'eſt-à-dire, environ $\frac{1}{34}$, ce qui donneroit pour le temps que le ſatellite doit employer à entrer dans l'ombre de Jupiter $5'\ 14''$, ce qui eſt à-peu près le milieu entre les réſultats des obſervations de M. Maraldi & de M. Whiſton, (Mém. Acad. 1734).

L X I V.

Il ſeroit tout à-fait inutile d'examiner les autres termes de la formule de l'article LIV; car il eſt clair qu'il n'en pourroit réſulter que des équations extrêmement petites, & par conſéquent inſenſibles, à moins qu'on ne voulût ſuppoſer les maſſes du troiſième & du quatrième ſatellite, énormément grandes par rapport à celle du ſecond, ce qui ne paroît guères naturel; d'ailleurs l'équation que nous avons examinée eſt la ſeule qu'on ait juſqu'ici déduite des obſervations.

L X V.

Paſſons donc à la formule de l'article LV, qui renferme les équations des conjonctions du ſecond ſatellite. Parmi tous les termes dont cette formule eſt compoſée, j'en distingue d'abord deux qui sont beaucoup plus considérables que les autres par les coefficiens numériques dont ils sont affectés ; savoir :

$$\frac{☾^{I}}{♃}\, 918\dot{1}0'\, \mathit{sin.}(u^{I}-u^{II}) + \frac{☾^{III}}{♃}\, 148383'\, \mathit{sin.}\, 2(u^{III}-u^{II}).$$

Dont l'un vient de l'action du premier satellite, & l'autre de l'action du troisième. Ces deux termes produisent, comme l'on voit, deux équations dont les argumens sont $u^{I}-u^{II}$, distance moyenne du premier satellite au second, & $2(u^{III}-u^{II})$ double de la distance moyenne du troisième satellite au second au temps des conjonctions de celui-ci.

Je remarque maintenant que la durée de la révolution synodique du troisième satellite est de $7^{j.}\, 3^{h.}\, 59'\, 35''\, 55'''\, 23^{IV}$, selon M. Wargentin ; ce qui donne, pour 61 révolutions, $437^{j.}\, 3^{h.}\, 35'\, 31''\, 18'''$, & pour 111021 révolutions $795619^{j.}\, 13^{h.}\, 29'\, 1''\, 55'''$; or nous avons déja trouvé que 449538 révolutions du premier sont $795619^{j.}\, 13^{h.}\, 28'\, 8''\, 26'''$, & que 223860 révolutions du second sont $795619^{j.}\, 13^{h.}\, 32'\, 19''\, 40'''$ (art. LIX) ; donc les mouvemens des trois premiers satellites au Soleil sont entr'eux comme les nombres 449538, 223860, 111021, & les différences entre les mouvemens des deux premiers & les mouvemens du second & du troisième sont au mouvement du second comme les nombres 225678, 112839 au nombre 223860 ; donc pendant que le second acheve une révolution au Soleil, les angles $u^{I}-u^{II}$, & $u^{III}-u^{II}$, croissent de $\frac{225678}{223860}\, 360^{\circ}$, & $-\frac{112839}{223860}\, 360^{\circ}$; donc l'angle $2(u^{III}-u^{II})$ diminue à chaque révolution du second de la même quantité dont l'angle $u^{I}-u^{II}$ augmente, savoir de $\frac{225678}{223860}\, 360^{\circ}$; donc la quantité $u^{I}-u^{II}+2\,(u^{III}-u^{II})$ est toujours la même dans les conjonctions du second satellite.

Examinons donc une conjonction quelconque de ce ſatellite, & voyons quelles ſont les élongations du premier & du troiſième, c'eſt-à-dire, les valeurs de $u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}$, & de $u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}}$; je prends pour exemple la première conjonction de l'année 1760, laquelle eſt marquée dans les tables à 2$^{j.}$ 13$^{h.}$ 42′ 50″, à quoi ajoutant la moitié des plus grandes équations, ſavoir, 1$^{h.}$ 35′ 6″, (art. LVIII) on a 2$^{j.}$ 15$^{h.}$ 17′ 56″ pour le tems moyen de la conjonction moyenne du ſecond ſatellite; je trouve de la même manière, que les premières conjonctions moyennes du premier & du troiſième ſatellite ont dû arriver à 1$^{j.}$ 10$^{h.}$ 48′ 48″, & à 3$^{j.}$ 5$^{h.}$ 54′ 56″ de tems moyen; d'où je conclus qu'au tems de la conjonction du ſecond ſatellite, le premier étoit plus avancé de 1$^{j.}$ 4$^{h.}$ 29′, ce qui fait 241° 24′, & que le troiſième étoit en arrière de 14$^{h.}$ 37′, ce qui vaut 30° 27′; donc $u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} = 241^\circ\ 24'$, & $u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}} = -30^\circ\ 27'$; par conſéquent $u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} + 2(u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}}) = 180^\circ\ 30' = 180^\circ$ à très-peu-près.

On aura donc en général $2(u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}}) = 180^\circ - (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}})$ & $\sin 2(u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}}) = \sin(u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}})$; ainſi les deux termes $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\, 91810' \,\mathit{ſin.}\, (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) + \frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\, 148383'$ $\mathit{ſin.}\, 2(u^{\mathrm{III}} - u^{\mathrm{II}})$ peuvent ſe réduire à un terme unique, tel que $\left(\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}\, 91810' + \frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}\, 148383'\right) \mathit{ſin.}\, (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}})$, lequel ne donne qu'une équation dépendante de l'élongation du premier ſatellite au ſecond.

LXVI.

Soit, dans une conjonction du ſecond ſatellite, $u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} = \theta$, on aura, par ce que nous avons démontré dans l'article précédent, après n révolutions de ce même ſatellite, $u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} = \theta + n\, \frac{225678}{223860}\, 360^\circ$; & par conſéquent $\mathit{ſin.}\, (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) = \mathit{ſin.}\, (\theta + n\, \frac{225678}{221860}\, 360^\circ)$; $= \mathit{ſin.}\, (\theta + n$

$\frac{1818}{223860}$ 360°); d'où l'on voit que cette quantité ne peut redevenir *ſin.* θ, à moins que l'on n'ait $n \frac{1818}{223860} = 1$, ce qui donne $n = \frac{223860}{1818} = 123, 135$; c'eſt le nombre des révolutions du ſecond ſatellite qui forment la période de l'équation *ſin.* ($u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}$), & l'on trouvera que cette période eſt la même que celle de l'équation du premier ſatellite, ſavoir de $437^{j.}\ 15^{h.}\ 12'\ 7''$ (art. LIX).

Mettons p au lieu du nombre $\frac{223860}{1818}$, nous aurons *ſin.*$(u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) =$ *ſin.* $(\theta + \frac{n}{p}\ 360^\circ)$; donc ſuppoſant au commencement de la période $\theta = 0$, c'eſt-à-dire, les deux premiers ſatellites en conjonction à la fois, & faiſant ſucceſſivement $n = 0$, $n = \frac{p}{4}$, $n = \frac{p}{2}$, $n = \frac{3p}{4}$, & $n = p$ on trouvera que l'équation dont il s'agit eſt nulle au commencement de la période, qu'enſuite elle augmente juſqu'au quart de la période, où elle eſt la plus grande; que de-là elle diminue & redevient nulle à la moitié de la période, après quoi elle ſe change en négative, &c.

LXVII.

Si on compare maintenant la marche de cette équation avec celle de l'équation *C* des tables du ſecond ſatellite, on verra qu'elles s'accordent parfaitement, pourvu que l'on ait attention d'ôter conſtamment de cette dernière équation $16'\ 30''$ moitié de ſa plus grande valeur, & qu'on fixe le commencement de la période au nombre 250. Ainſi les nombres *C* des tables du ſecond ſatellite indiquent les élongations du premier au tems des conjonctions du ſecond, deſorte que le nombre 250 répond aux conjonctions des deux ſatellites, & le nombre 750 à leurs oppoſitions. Voyez là-deſſus la diſſertation de M. Wargentin qui eſt à la tête des Obſervations du ſecond ſatellite, dans les Mémoires de la Société d'Upſal pour l'année 1743.

LXVIII.

Il ne reste donc plus qu'à égaler le coefficient de l'équation *sin.* $(u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}})$ à la plus grande valeur de l'équation *C* des tables, ce qui donne $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} 91810 + \frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃} 148383 = \frac{33}{2}$; desorte qu'en supposant $☾^{\mathrm{III}} = m\, ☾^{\mathrm{I}}$, on aura $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} = \frac{33}{183620 + 296766m}$ & $\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃} = \frac{33m}{183620 + 296766m}$.

Soit par exemple $m = 1$, c'est-à-dire, les masses du premier & du troisiéme satellite égales entr'elles, on aura $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} = \frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃} = \frac{33}{480386} = 0,00006869 = \frac{1}{14500}$ environ; d'où, en supposant les densités des satellites égales à celles de Jupiter, on tire leurs demi diametres $= 0,0409 =$ environ $\frac{1}{25}$ de celui de Jupiter; ce qui donne pour le tems que le premier devroit employer à entrer dans l'ombre 5′ 51″, & pour le tems que devroit employer le troisième 9′ 21″.

Au reste, quelque soit le nombre m, comme il ne sauroit être ni infini ni nul, il est clair que les quantités $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}$, $\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}$ sont toujours néçessairement moindres que la fraction $\frac{33}{296766} = 0,000111$, c'est-à-dire, en prenant la masse de la Terre pour l'unité $\left.\begin{matrix}☾^{\mathrm{I}}\\ ☾^{\mathrm{III}}\end{matrix}\right\} < 0,0404\ldots$; environ $\frac{1}{25}$.

LXIX.

A l'égard des autres termes de la formule de l'art. LV, il est facile de voir qu'ils ne donnent que des équations extrêmement petites, & qui peuvent par conséquent être négligées; en effet, le terme qui a le plus grand coefficient numérique, après ceux que nous venons d'examiner, est

$\frac{☾^{III}}{♃} \times - 2385' \sin. (u^{III} - u^{II})$; or nous avons trouvé que $\frac{☾^{III}}{♃} < 0,000111 \ldots$, donc la plus grande équation sera $< 15''$.

L X X.

L'équation $u^{I} - u^{II} + 2\ (u^{III} - u^{II}) = 180^{\circ}\ 30'$, trouvée dans l'article XLV, & d'où nous avons tiré $\sin. 2 (u^{III} - u^{II}) = \sin. (u^{I} - u^{II})$ à très-peu-près, est une suite du rapport que nous avons établi entre les révolutions synodiques des trois premiers satellites; ce rapport n'est pas exact à la rigueur, mais il ne s'écarte de la vérité que d'une quantité infiniment petite, desorte qu'au bout de mille ans, l'erreur qui en pourra résulter sera encore presque insensible.

En effet, on trouve qu'il faudroit environ 1317900 ans, pour que l'équation dont nous parlons devînt $u^{I} - u^{II} + 2 (u^{III} - u^{II}) = 360^{\circ}$, pourvu que les moyens mouvemens des satellites fussent assez exacts pour pouvoir être employés dans une si longue suite de siècles. Voyez l'ouvrage de M. Wargentin cité ci-dessus.

L X X I.

La formule de l'article LVI qui renferme les équations du troisième satellite, ne nous présente qu'un terme qui puisse être de quelque considération; c'est le terme $\frac{☾^{II}}{♃}\ 99075' \sin. (u^{II} - u^{III})$, dont l'argument est l'élongation du second satellite au troisième au tems des conjonctions de celui-ci.

Avant d'entrer dans le détail de l'inégalité qui en résulte, voyons si elle est assez considérable pour qu'on doive en tenir compte. Pour cela on substituera au lieu de

$\frac{☾^{II}}{♃}$ sa valeur trouvée ci-dessus (article LXIII), savoir $\frac{7}{189600}$, & l'on trouvera $\frac{☾''}{♃}$ $99075' = 2', 24''$, desorte que l'inégalité dont il s'agit montera à $4' 48''$, à cause que l'équation *sin.* $(u^{II} - u^{III})$ est, tantôt additive, tantôt soustractive.

Maintenant on sait que les mouvemens moyens du second & du troisième satellites sont entr'eux comme les nombres 233860, 111021 (article LXV) d'où il suit que pendant que le troisième acheve une révolution au soleil, la distance $u^{II} - u^{III}$ augmente de $\frac{112839}{111021}$ $360°$; desorte que si on appelle θ l'élongation du second satellite au troisième au tems d'une conjonction quelconque de ce dernier, on aura après n révolutions $u^{II} - u^{III} = \theta + n \frac{112839}{111021}$ $360°$, & de la *sin.* $(u^{II} - u^{III}) =$ *sin.* $(\theta + n \frac{112839}{111021}$ $360°) =$ *sin.* $(\theta + n \frac{1818}{111021}$ $360°)$, d'où l'on voit 1°. que la période de cette équation sera de $\frac{111021}{1818}$ révolutions du troisième satellite, ce qui revient au même que celles du premier & du second satellite (article LIX & LXVI); 2.° que si on prend pour le commencement de la période une conjonction du troisième satellite dans laquelle $\theta = 0$, c'est-à-dire, que le second satellite soit aussi en conjonction, on trouvera que la marche de l'équation dont il s'agit sera entiérement analogue à celle de l'équation du second satellite (article LXVI).

LXXII.

L'équation que nous venons d'examiner ne se trouve point dans les tables du troisième satellite; M. Wargentin s'est contenté de l'indiquer dans la Préface de ses Tables (Mémoire de la Société d'Upsal, pour l'année 1741), où il dit : *Multæ etiam observationes satis manifestè indicant tertium æquatione aliâ indigere cujus ferè eadem*

eadem est quantitas & natura cum æquatione novâ primi; sed quoniam observationes non paucas habeam quæ eam vel minorem, vel nullam arguant, hujus æquationis in tabulis nullam habere rationem satiùs judicavi; & ailleurs (dans la Dissertation qui est à la tête des Observations du second satellite) : *In motibus tertii satellitis deprehenditur inæqualitas quædam quæ indicat eum esse retardatum in conjunctionibus, sed accleratum in oppositionibus secundi;* & plus bas: *Est etiam hæc inæqualitas tertii similis inæqualitati suprà descriptæ secundi;* ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé dans l'article précédent. Il est vrai que cette équation a paru à M. Wargentin de la même quantité que celle du premier satellite, au lieu qu'elle n'en est qu'environ les deux tiers, suivant notre théorie; mais ce savant Astronome avoue lui même qu'il ne regarde pas son résultat comme fort exact, l'ayant trouvé quelquefois moindre, & même nul, & que c'est pour cette raison qu'il a cru devoir s'abstenir d'en faire usage dans ses Tables.

LXXIII.

Avant de quitter la formule de l'article LVI, nous dirons deux mots des termes qui dépendent de $u^{IV} - u^{III}$, élongation du quatrième satellite au troisième, & dont le plus considérable est celui-ci: $\frac{☾^{IV}}{♃} 7124' \sin. 2(u^{IV} - u^{III})$.

Supposons d'abord que l'équation qui en provient soit, lorsqu'elle est la plus grande, de m minutes; on aura $\frac{☾^{IV}}{♃} 7124 = m$; donc $\frac{☾^{IV}}{♃} = \frac{m}{7124} = 0,000140\, m$; d'où l'on voit que pour que m soit au moins $= 1$, il faut que la masse du quatrième satellite surpasse de beaucoup celles des trois premiers.

Si on veut que la densité de ce satellite soit la même que celle de Jupiter, on trouvera ſon diametre $= 0{,}0519\sqrt[3]{m}$ de celui de Jupiter ; & par conſéquent le tems qu'il doit employer à entrer dans l'ombre $= 15' \, 46'' \sqrt[3]{m}$; ce qui, en faiſant $m = 1$, eſt aſſez conforme au réſultat des obſervations de M. Maraldi.

Cette équation, au reſte, ſuppoſé qu'elle montât à quelques minutes, ce qui ne ſeroit nullement impoſſible, mériteroit d'autant plus l'attention des Aſtronomes, qu'elle varie beaucoup d'une conjonction à l'autre ; en effet, les révolutions ſynodiques du troiſième & du quatrième ſatellite étant de $619176''$, & $1447507''$, on trouve que l'angle $u^{IV} - u^{III}$ doit augmenter pendant une révolution du troiſième de $\left(\frac{619176}{1447507} - 1\right) 360°$, c'eſt-à-dire, diminuer de $\frac{828331}{1447507}\, 360°$; donc, nommant θ l'angle $u^{IV} - u^{III}$ dans le tems d'une conjonction quelconque de ce ſatellite, on aura après n révolutions, $u^{IV} - u^{III} = \theta - n \frac{828331}{1447507}\, 360°$, & $2\,(u^{IV} - u^{III}) = 2\,\theta - n \frac{1656662}{1447507}\, 360°$, d'où $\sin.\, 2\,(u^{IV} - u^{III}) = \sin.\, (2\,\theta - n \frac{209155}{1447507}\, 360°)$; par conſéquent la période de cette équation ne ſera que de $\frac{1447507}{209155}$ révolutions, c'eſt-à-dire, de $6{,}920$ révolutions, ce qui fait $49^{j.}\, 14^{h.}, 12'$ à-peu-près. Ne ſeroit-ce point là la ſource de ces inégalités qu'on obſerve dans les conjonctions du troiſième ſatellite, & qui font des ſauts conſidérables d'une conjonction à l'autre ? c'eſt une vue que nous propoſons aux Aſtronomes qui s'occupent de la théorie des ſatellites.

LXXIV.

Il ne reſteroit plus qu'à examiner les équations des conjonctions du quatrième ſatellite, contenues dans la formule de l'article LVIII : mais ayant déja trouvé $☾^{I} = 0{,}00002417$ ♃, & $\left.\begin{matrix}☾^{I}\\ ☾^{III}\end{matrix}\right\} < 0{,}000111$ ♃ (articles

LXIII & LXVIII), on verra aiſément que les coefficiens de ces équations ne s'étendent point au-delà d'un petit nombre de ſecondes; ce qui eſt trop peu de choſe pour qu'on doive en tenir compte dans le mouvement de ce ſatellite, ſur-tout vu l'imperfection qui regne encore dans les tables de Jupiter.

CHAPITRE IV.

Suite du calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.

LXXV.

AYANT trouvé les premieres valeurs de x, y, z (article XXXVI & ſuivans), on reprendra les équations de l'article XXXII; & après y avoir mis au lieu de X, Y, Z leurs expreſſions (article XXX & ſuivans), ſans négliger les termes de l'ordre de n, on ſubſtituera dans tous les termes de cet ordre les valeurs trouvées de x, y, z, & l'on aura de nouvelles équations en x, y, z plus exactes que celles de l'article XXXV, & qui s'intégreront encore par la même méthode.

LXXVI.

Soit pour le premier ſatellite, (ces formules s'appliqueront également aux trois autres, ſuivant les remarques des articles IX & XIII).

$$Z^{\mathrm{I}}=g^{\mathrm{I}}-2\mu^{\mathrm{I}}H^{\mathrm{I}}-\frac{\chi^{\mathrm{II}}}{1+n\chi^{\mathrm{I}}}\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})-\frac{\chi^{\mathrm{III}}}{1+n\chi^{\mathrm{I}}}\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})$$
$$-\frac{\chi^{\mathrm{IV}}}{1+n\chi^{\mathrm{I}}}\breve{\Gamma}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})-\frac{1}{2}\frac{K^{\mathrm{I}}}{1+n\chi^{\mathrm{I}}}+\frac{1}{5}\frac{x^{\mathrm{I}}}{1+n\chi^{\mathrm{I}}};$$

$$M^{I2} = 3\mu^{I2} - 2f^{I} - nf^{I}\left(\chi^{II}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III})\right.$$
$$\left. + \chi^{IV}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{1}{2}K^{I} + \tfrac{4}{5}x^{I}\right);$$

$$N^{I2} = \mu^{I2} + nf^{I}\left(\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III})\right.$$
$$\left. + \chi^{IV}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^{I} + \tfrac{3}{5}x^{I}\right) 2n\mu^{I}f^{I}H^{I}.$$

Supposons de plus

$$\theta^{I} = -\frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\left(\Xi 1(a^{I}, a^{II})\cos.(\mu^{II} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Xi 2(a^{I}, a^{II})\cos 2(\mu^{II} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$-\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}\left(\Xi 1(a^{I}, a^{III})\cos.(\mu^{III} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Xi 2(a^{I}, a^{III})\cos. 2(\mu^{III} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$-\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}\left(\Xi 1(a^{I}, a^{IV})\cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Xi 2(a^{I}, a^{IV})\cos. 2(\mu^{IV} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$-\frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}}\left(\beta^{I}\cos. 2(m - \mu^{I})t, \text{ (art. XXXVI)}\right);$$

$$\vartheta^{I} = \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^{I}}\left(\Phi 1(a^{I}, a^{II})\sin.(\mu^{II} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Phi 2(a^{I}, a^{II})\sin. 2(\mu^{II} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{III}}{1+n\chi^{I}}\left(\Phi 1(a^{I}, a^{III})\sin.(\mu^{III} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Phi 2(a^{I}, a^{III})\sin. 2(\mu^{III} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$+\frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^{I}}\left(\Phi 1(a^{I}, a^{IV})\sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})t\right.$$
$$\left. + \Phi 2(a^{I}, a^{IV})\sin. 2(\mu^{IV} - \mu^{I})t + \&c.\right)$$
$$+\frac{K^{I}}{1+n\chi^{I}}\gamma^{I}\sin. 2(m - \mu^{I})t, \text{ (art. XXXVIII)}, \&$$

faisons $x^{I} = \theta^{I} + x'^{I}$, $y^{I} = \vartheta^{I} + y'^{I}$, (nous verrons bientôt la raison de ces substitutions). Les équations de l'article XXXII se changeront en celles-ci, dans lesquelles nous avons négligé les termes affectés de n^2.

$$\frac{d^2x^{\mathrm{I}}}{dt^2} + M^{\mathrm{I}2}x^{\mathrm{I}} + f^{\mathrm{I}}L^{\mathrm{I}} - n(6\mu^{\mathrm{I}2} - 3f^{\mathrm{I}})x^{\mathrm{I}2} - \tfrac{1}{2}nf^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}2} - nf^{\mathrm{I}2}Y^{\mathrm{I}2}$$

$$-n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}}\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\Big)\cos.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

$$-n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\Big)\cos.2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

&c.

$$-n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}}}\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\Big)\cos.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

$$-n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})}\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\Big)\cos.2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

$$-n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}}}\hat{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\Big)\cos.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

$$-n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}}) + \frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})}\hat{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\Big)\cos.2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$

&c.

$$-nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\Big(\tfrac{1}{2} - \frac{3\mu^{\mathrm{I}}}{2(m-\mu^{\mathrm{I}})}\cos.2(m-\mu^{\mathrm{I}})t\Big)$$

$$-n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{II}}\Big(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\cos.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+\breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\cos.2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$-n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{III}}\Big(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\cos.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+\breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\cos.2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$-n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{IV}}\Big(\breve{\Psi}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}}) + \breve{\Psi}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\cos.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+\breve{\Psi}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\cos.2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$+nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}\xi\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{2}\cos.2(m-\mu^{\mathrm{I}})t\Big)$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}(y^{\mathrm{II}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\sin.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\sin.2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$+n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}(y^{\mathrm{III}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\sin.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\sin.2(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$+n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}(y^{\mathrm{IV}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\breve{\Gamma}1(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\sin.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t$$
$$+2\breve{\Gamma}2(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\sin.2(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t \text{ &c.}\Big)$$

$$+nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}(v-y^{\mathrm{I}})\times 3\sin.2(m-\mu^{\mathrm{I}})t$$

$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi} 1 (a^{I}, a^{II}) \sin. (\mu^{II} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi} 2 (a^{I}, a^{II}) \sin. 2 (\mu^{II} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \tilde{\Pi} 1 (a^{I}, a^{III}) \sin. (\mu^{III} - \mu^{I}) t$$
$$\left. + \tilde{\Pi} 2 (a^{I}, a^{III}) \sin. 2 (\mu^{III} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \left(\tilde{\Pi} 1 (a^{I}, a^{IV}) \sin. (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + \tilde{\Pi} 2 (a^{I}, a^{IV}) \sin. 2 (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$- 2nK^{I} f^{I} \mu^{I} \int x^{I} \times 3 \sin. 2 (m - \mu^{I}) t \, dt$$
$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int x^{II} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) \sin. (\mu^{II} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi} 2 (a^{I}, a^{II}) \sin. 2 (\mu^{II} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int x^{III} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{III}) \sin. (\mu^{III} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + \hat{\Psi} 2 (a^{I}, a^{III}) \sin. 2 (\mu^{III} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int x^{IV} \left(\hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{IV}) \sin. (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + \breve{\Psi} 2 (a^{I}, a^{IV}) \sin. 2 (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2nK^{I} f^{I} \mu^{I} \int \xi \times \tfrac{9}{2} \sin. 2 (m - \mu^{I}) t \, dt$$
$$+ 2n\chi^{II} f^{I} \mu^{I} \int (y^{II} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}) \cos. (\mu^{II} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + 2 \hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{II}) \cos. 2 (\mu^{II} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} \mu^{I} \int (y^{III} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{III}) \cos. (\mu^{III} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + 2 \hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{III}) \cos. 2 (\mu^{III} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} \mu^{I} \int (y^{IV} - y^{I}) \left(\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{IV}) \cos. 2 (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \right.$$
$$\left. + 2 \hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{IV}) \cos. 2 (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \ \&c. \right) dt$$
$$- 2nK^{I} f^{I} \mu^{I} \int (J - y^{I}) \times 3 \cos. 2 (m - \mu^{I}) t \, dt = 0 \ldots\ldots\ldots (G)$$

$$\frac{dy^{\cdot I}}{dt} + 2\mu^{I} x^{\cdot I} - f^{I} H^{I} - 3n\mu x^{I2}$$
$$+ 2n\chi^{II} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II})}{\mu^{II} - \mu^{I}} \cos. (\mu^{II} - \mu^{I}) t + \frac{\hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{II})}{2 (\mu^{II} - \mu^{I})} \cos. 2 (\mu^{II} - \mu^{I}) t \ \&c. \right)$$
$$+ 2n\chi^{III} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma} 1 (a^{I} a^{III})}{\mu^{III} - \mu^{I}} \cos. (\mu^{III} - \mu^{I}) t + \frac{\hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{III})}{2 (\mu^{III} - \mu^{I})} \cos. 2 (\mu^{III} - \mu^{I}) t \ \&c. \right)$$
$$+ 2n\chi^{IV} f^{I} x^{I} \left(\frac{\hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{IV})}{\mu^{IV} - \mu^{I}} \cos. (\mu^{IV} - \mu^{I}) t + \frac{\hat{\Gamma} 2 (a^{I}, a^{IV})}{2 (\mu^{IV} - \mu^{I})} \cos. 2 (\mu^{IV} - \mu^{I}) t \ \&c. \right)$$

$$-2nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}\times\frac{3}{4(m-\mu^{\mathrm{I}})}\,cos.\,2\,(m-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Pi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\tilde{\Pi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Pi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\tilde{\Pi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Pi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\tilde{\Pi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{I}}\times 3\,sin.\,2\,(m-\mu^{\mathrm{I}})\,t\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{II}}\Big(\hat{\Psi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\hat{\Psi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{III}}\Big(\hat{\Psi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\hat{\Psi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}\int x^{\mathrm{IV}}\Big(\hat{\Psi}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,sin.\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})$$
$$+\hat{\Psi}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,sin.\,2\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\ dt$$

$$+nK^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}\int\xi\times\tfrac{9}{2}\,sin.\,2\,(m-\mu^{\mathrm{I}})\,t\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}\int(y^{\mathrm{II}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\hat{\Gamma}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,cos.\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+2\hat{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,cos.\,2\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{III}}f^{\mathrm{I}}\int(y^{\mathrm{III}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\hat{\Gamma}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,cos.\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+2\hat{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,cos.\,2\,(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$+n\chi^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{I}}\int(y^{\mathrm{IV}}-y^{\mathrm{I}})\Big(\hat{\Gamma}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,cos.\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+2\hat{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,cos.\,2\,(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.\Big)\,dt$$

$$-K^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{I}}\int(J-y^{\mathrm{I}})\times 3\,cos.\,2\,(m-\mu^{\mathrm{I}})\,t=0\ \ldots\ldots\ (\mathrm{H})$$

$$\frac{d^2z^{\mathrm{I}}}{dt^2}+N^{\mathrm{I}2}-4n\mu^{\mathrm{I}2}z^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}+2n\frac{dx^{\mathrm{I}}\,dz^{\mathrm{I}}}{dt^2}$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Gamma}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}}\hat{\Gamma}1\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\Big)\,cos.\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$

$$+n\chi^{\mathrm{II}}f^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{I}}\Big(\tilde{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{2(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}\hat{\Gamma}2\,(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\Big)\,2\,cos.\,(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\ \&c.$$

$$+n\chi^{III}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}1(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{III}-\mu^{I}}\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{III})\right)cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$

$$+n\chi^{III}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}2(a^{I},a^{III})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{III}-\mu^{I})}\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{III})\right)cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t\ \&c.$$

$$+n\chi^{IV}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})+\frac{2\mu^{I}}{\mu^{IV}-\mu^{I}}\hat{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})\right)cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t$$

$$+n\chi^{IV}f^{I}z^{I}\left(\tilde{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})+\frac{2\mu^{I}}{2(\mu^{IV}-\mu^{I})}\hat{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})\right)cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t\ \&c.$$

$$+nK^{I}f^{I}z^{I}\left(\frac{1}{2}-\frac{3\mu^{I}}{2(m-\mu^{I})}\right)cos.2(m-\mu^{I})t$$

$$-n\chi^{II}f^{I}z^{II}\left(\overset{o}{\Gamma}(a^{I},a^{II})+\overset{o}{\Gamma}1(a^{I},a^{II})cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+\overset{o}{\Gamma}2(a^{I},a^{II})cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t\ \&c.\right)$$

$$-n\chi^{III}f^{I}z^{III}\left(\overset{o}{\Gamma}(a^{I},a^{III})+\overset{o}{\Gamma}1(a^{I},a^{III})cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+\overset{o}{\Gamma}2(a^{I},a^{III})cos.2(\mu^{III}-\mu^{I})t\ \&c.\right)$$

$$-n\chi^{IV}f^{I}z^{IV}\left(\overset{o}{\Gamma}(a^{I},a^{IV})+\overset{o}{\Gamma}1(a^{I},a^{IV})cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+\overset{o}{\Gamma}2(a^{I},a^{IV})cos.2(\mu^{IV}-\mu^{I})t\ \&c.\right)=0\ldots\ldots(K)$$

LXXVII.

Si on rejette dans les équations (G) & (H) tous les termes affectés de n, comme aussi tous les termes constans qui doivent être nuls par les conditions de l'article XXXII, on a $\frac{d^2x}{dt^2}+M^{I2}x^{\cdot I}=0$, & $\frac{dy^{\cdot I}}{dt}+2\mu^{I}x^{\cdot I}=0$.

D'ou l'on tire :

$$x^{\cdot I}=\varepsilon^{I}cos.(M^{I}t+\omega^{I}),\ \&\ y^{\cdot I}=-\frac{2\mu^{I}}{M^{I}}\varepsilon^{I}\,sin.(M^{I}t+\omega^{I})$$

ce qui donne pour x^{I} & y^{I} les mêmes valeurs que nous avons déja trouvées (art. LXXV).

La quantité $-\frac{2\mu^{I}}{M^{I}}\varepsilon^{I}\,sin.(M^{I}t+\omega^{I})$ n'est que le premier terme de l'équation du centre calculée dans une ellipse mobile (art. XXXVIII) ; si on vouloit avoir le terme suivant

ſuivant, c'eſt-à-dire celui qui contient le quarré de l'excentricité, il n'y auroit qu'à mettre au lieu de x^{I} dans les termes $-n(6\mu^{\text{I}2}-3f^{\text{I}})x^{\text{I}2}$, & $-3n\mu^{\text{I}}x^{\text{I}2}$ des équations (G), (H), la valeur de $x^{\cdot\text{I}}$ qu'on vient de trouver.

On auroit donc, en négligeant toujours les termes conſtans;

$$\frac{d^2x^{\cdot\text{I}}}{dt^2}+M^{\text{I}2}x^{\cdot\text{I}}-n(6\mu^{\text{I}2}-3f^{\text{I}})\frac{\varepsilon^{\text{I}2}}{2}\,cof.\,2(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})=0, \&$$

$$\frac{dy^{\cdot\text{I}}}{dt}+2\mu^{\text{I}}x^{\cdot\text{I}}-3n\mu^{\text{I}}\frac{\varepsilon^{\text{I}2}}{2}\,cof.\,2(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})=0.$$

La première de ces équations donne, (art. XXXIV)

$$x^{\cdot\text{I}}=\varepsilon^{\text{I}}\,cof.\,(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})-n(6\mu^{\text{I}2}-3f^{\text{I}})\frac{\varepsilon^{\text{I}2}}{2}\times\frac{cof.\,2(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})}{3M^{\text{I}2}},$$

c'eſt-à-dire, en mettant au lieu de f^{I}, & de $M^{\text{I}2}$ leurs valeurs approchées $\mu^{\text{I}2}$ (art. XLV)

$$x^{\cdot\text{I}}=\varepsilon^{\text{I}}\,cof.\,(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})-n\frac{\varepsilon^{\text{I}2}}{2}\,cof.\,2(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}}).$$

Donc ſubſtituant cette valeur de $x^{\cdot\text{I}}$ dans la ſeconde, & l'intégrant enſuite, on aura

$$y^{\cdot\text{I}}=-\frac{2\mu^{\text{I}}}{M^{\text{I}}}\varepsilon^{\text{I}}\,fin.\,(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}})+n\frac{5\mu^{\text{I}}}{4M^{\text{I}}}\varepsilon^{\text{I}2}\,fin.\,2\,(M^{\text{I}}t+\omega^{\text{I}}).$$

Ce qui s'accorde avec ce que l'on ſait d'ailleurs; mais nous verrons plus bas qu'il y a dans l'équation (G) d'autres termes qui influent conſidérablement ſur l'équation du centre, & qui empêchent qu'on ne puiſſe regarder l'expreſſion précédente comme aſſez exacte, même dans le cas où l'on néglige les quantités de l'ordre n.

Il en faut dire autant de l'expreſſion de la latitude que nous avons déja tronvée (art. XL); mais avant que d'entrer dans cette diſcuſſion, il eſt bon de voir ce que donnent les nouvelles valeurs de M & de N (art. préc.) pour le mouvement des apſides & des nœuds.

§. I.

Premières valeurs du mouvement des apsides & des nœuds des Satellites.

LXXVIII.

Nous avons trouvé (art. LXXVI)
$M^{I2} = 3\mu^{I2} - 2f^{I} - nf^{I}(\chi^{II}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) + \frac{1}{2}K^{I} + \frac{4}{5}x^{I})$; or l'on a généralement (art. XXIX) $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$, d'où $f = \frac{\mu^2}{1 - ng} = \mu^{I2}(1 + ng^{I})$, & par conséquent $f^{I}\mu^{I2}(1 + ng^{I})$; donc négligeant les termes affectés de n, on aura :

$$M^{I2} = \mu^{I2}(1 - 2ng^{I} - n\chi^{II}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) - n\chi^{III}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) - n\chi^{IV}\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) - \tfrac{1}{2}K^{I} - \tfrac{4}{5}nx^{I}).$$

Maintenant on a par l'équation $L^{I} = g^{I} -$ &c. de l'article LXXV,

$$g^{I} = L^{I} + 2\mu^{I}H^{I} + \frac{1}{1 + n\chi^{I}}(\chi^{II}\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}(\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{1}{2}K^{I} - \tfrac{1}{5}x^{I})$$; donc

$$M^{I2} = \mu^{I2}(1 - n\chi^{II}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})) - n\chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})) - n\chi^{IV}(\breve{\Pi}\, a^{I}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV})) - \tfrac{3}{2}nK^{I} - \tfrac{2}{5}nx^{I} - 2nL^{I} - 4n\mu^{I}H^{I}),$$

les quantités L^{I}, H^{I} devant être déterminées par la condition que les équations (G), (H) ne renferment aucun terme constant.

Pour remplir ces deux conditions, on supposera que (x^{I2}), soit la quantité constante qui entre dans la valeur de x^{I2}; (car la valeur de x étant composée de *sinus* & de *cosinus*, il est est évident que que le quarré x^{I2} contiendra néceſſairement des termes conſtans, quoique x^{I} n'en contienne point); de même ſoient (z^{I2}), (Y^{I}) les quantités conſtantes qui entreront dans les valeurs de z^{I2}, Y^{I2}; on aura donc

$$f^{I}L - n(6\mu^{I2} - 3f^{I})(x^{I2}) - \tfrac{3}{2}nf^{I}(z^{I2}) - nf^{I2}(Y^{I2}) = 0,$$

$$\& - f^{I}H^{I} - 3n\mu^{I}(x^{I2}) = 0:$$

d'où l'on tirera L^{I}, & H^{I}, qui feront de l'ordre de n; c'eſt pourquoi on peut négliger dans la valeur de M^{I2} les quantités $2nL^{I}$, & $4n\mu^{I}H^{I}$, qui feroient de l'ordre n^{2}.

L X X I X.

Donc, ſi on fait pour abréger

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{I} = {} & \chi^{II}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{II}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{III}) \\ & + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{III})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{I}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{IV})) \\ & + \tfrac{3}{2}K^{I} + \tfrac{2}{5}x^{I},\end{aligned}$$

& de même (art. IX).

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{II} = {} & \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{I})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{III}) \\ & + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{III})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{II}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{II}, a^{IV})) \\ & + \tfrac{3}{2}K^{II} + \tfrac{2}{5}x^{II}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{III} = {} & \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{I})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{II}) \\ & + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{II})) + \chi^{IV}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{IV}) + 2\breve{\Gamma}(a^{III}, a^{IV})) \\ & + \tfrac{3}{2}K^{III} + \tfrac{2}{5}x^{III},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{IV} = {} & \chi^{I}(\breve{\Pi}(a^{III}, a^{I}) + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{I})) + \chi^{II}(\breve{\Pi}(a^{IV}, a^{II}) \\ & + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{II})) + \chi^{III}(\breve{\Pi}(a^{IV}, a^{III}) + 2\breve{\Gamma}(a^{IV}, a^{III})) \\ & + \tfrac{3}{2}K^{IV} + \tfrac{2}{5}x^{IV}.\end{aligned}$$

On aura

$$M^{I2} = \mu^{I2}(1 - n\mathfrak{G}^{I}),\quad M^{I} = \mu^{I}(1 - \tfrac{1}{2}n\mathfrak{G}^{I})$$

$M^{II2} = \mu^{II2}(1 - n\mathfrak{G}^{II})$; $M^{II} = \mu^{II}(1 - \tfrac{1}{2}n\mathfrak{G}^{II})$ & ainſi des autres.

Or le mouvement de la ligne des apſides étant au mouvement moyen comme $\mu - M$ à μ (art. XXXVII), cette ligne avancera pendant une révolution de $\frac{n\zeta}{2}$ 360°, d'où l'on connoîtra le mouvement des apſides de tous les ſatellites.

L X X X.

Pour évaluer en nombres les quantités ζ, il faut commencer par chercher les valeurs des quantités $\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$ &c. leſquelles dépendent des quantités $\Lambda(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$ &c. c'eſt-à-dire, des coeficiens de la ſerie qui repréſente la quantité radicale $(1 - 2q\theta + q^2)^{-\frac{5}{2}}$, (art. XX & ſuiv.)

Soit donc, comme dans cet article,

$$(1 - 2q\cos.\theta + q^2)^{-\frac{5}{2}} = (A) + (B)\cos.\theta + (C)\cos.2\theta + \&c.$$

on aura, en faiſant $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}$, & $\theta = \varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}$,

$$(a^{\mathrm{I}2} - 2a^{\mathrm{I}}a^{\mathrm{II}}\cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + a^{\mathrm{II}2})^{-\frac{5}{2}} = a^{\mathrm{II}-5}((A) + (B)\cos.(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + (C)\cos.2(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}) + \&c.);$$

donc (art. XXI),

$$\Lambda(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{II}-5}(A),\ \Lambda 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = a^{\mathrm{II}-5}(B)\ \&c.$$

De même en faiſant $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{III}}}$, $= \frac{a^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{III}}}$, &c. on aura

$$\Lambda(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = a^{\mathrm{III}-5}(A),\ \Lambda 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = a^{\mathrm{III}-5}(B)\ \&c.$$

& ainſi de ſuite; où l'on remarquera que les quantités réciproques $\Lambda(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$, $\Lambda(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$ &c. ſont les mêmes que les quantités $\Lambda(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$, $\Lambda(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$ &c. (art. XLIII).

Cela poſé, on trouvera (art. XXII.) q étant $= \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}$

$$\Pi(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q(B) - 2q^2(A)}{2a^{\mathrm{II}3}}$$

$$\Pi 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2a^{\mathrm{II}3}}$$

$$\Pi 2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{q(D) - 2q^2(C) + q(B)}{2a^{\mathrm{II}3}}\ \&c.$$

& de là, en faiſant pour abréger

$$P = \frac{q(B) - q^2(A)}{2}$$

$$P1 = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$P2 = \frac{q(D) - q^2(C) + q(B)}{2}$$

on aura par l'art. XXIV,

$$\breve{\Pi}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{q^2 P1 - 2q^3 P}{2} - q^3 A$$

$$\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{q^2 P2 - 2q^3 P1 + 2q^2 P}{2} - q^3 B$$

$$\breve{\Pi}2(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{q^2 P3 - 2q^3 P2 + q^2 P1}{2} - q^3 C \text{ \&c.}$$

On trouvera des expreſſions ſemblables pour les fonctions $\breve{\Pi}$ de $(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$, $(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$ &c. en faiſant $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{III}}}$, $= \frac{a^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{III}}}$ &c.

De la même manière on trouvera que l'on a, q étant encore $= \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}$,

$$\Pi(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = \frac{q(B) - 2(A)}{2a^{\mathrm{II}3}}$$

$$\Pi1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2a^{\mathrm{II}2}}$$

$$\Pi2(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2a^{\mathrm{II}3}} \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire, en faiſant

$$Q = \frac{q(B) - 2(A)}{2}$$

$$Q1 = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$Q2 = \frac{q(O) - 2(C) + q(B)}{2} \text{ \&c.}$$

$$\breve{\Pi}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = 3\,\frac{qQ1 - 2Q}{2} - A$$

$$\breve{\Pi}1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = 3\,\frac{qQ2 - 2Q1 + 2qQ}{2} - B$$

$$\breve{\Pi}2\,(a^{II}, a^{I}) = 3\ \frac{q\,Q3 - 2\,Q2 + q\,Q1}{2} - C \text{ \&c.}$$

expressions qui serviront aussi pour les quantités $\breve{\Pi}\,(a^{III}, a^{I})$, $\breve{\Pi}\,(a^{III}, a^{II})$ &c. en faisant successivement $q = \frac{a^{I}}{a^{III}}$, $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$ &c.

L X X X I.

Ayant donc fait le calcul de ces différentes quantités, j'ai trouvé les valeurs suivantes :

q	$= \frac{a^{I}}{a^{II}}$	$= \frac{a^{I}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{I}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{III}}$	$= \frac{a^{II}}{a^{IV}}$	$= \frac{a^{III}}{a^{IV}}$
(A)	14,494	2,654	1,366	13,856	2.198	8,288
(B)	27.331	4,095	1,399	26,083	3,179	15,144
(C)	23,754	2,544	0,550	22,646	1,850	12,400
(D)	19,323	1,151	0,515	17,547	1,185	9,402
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
P	2,856	0,395	0,099	2,734	0,287	1,627
$P1$	5,767	0.912	0.298	5,539	0,709	3,342
$P2$	5,268	0,639	0,186	4,783	0,541	2,972
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
Q	−5,887	−1,847	−1,199	−5,692	−1,633	−3,985
$Q1$	−10,717	−2,547	−1,031	−10,335	−2,068	−6,909
$Q2$	−9,059	−1,510	−0,336	−8,993	−1,075	−5,423
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	(a^{I}, a^{II})	(a^{I}, a^{III})	(a^{I}, a^{IV})	(a^{II}, a^{III})	(a^{II}, a^{IV})	(a^{III}, a^{IV})
$\breve{\Pi}$	0,534	0,050	0,008	0,514	0,036	0,389
	(a^{II}, a^{I})	(a^{III}, a^{I})	(a^{IV}, a^{I})	(a^{III}, a^{II})	(a^{IV}, a^{II})	(a^{IV}, a^{III})
$\breve{\Pi}$	4,504	2,579	2,128	4,401	2,454	3,837

LXXXII.

A l'égard des valeurs de $\breve{\Gamma}(a^{I}, a^{II})$ &c. nous les avons données ci-dessus (art. XLVII); aussi bien que celles nk^{I}, nk^{II} &c. (art. XLIX; & pour ce qui est des quantités $nx = \nu \frac{A^2}{a^2}$ (art. XXIX) on aura, en faisant A, demi-diametre de Jupiter, $= 1$, & mettant pour a^{I}, a^{II} &c. leur valeurs (art XLVI), on aura dis-je:

$nx^{I} = 0,03110..\nu$, $nx^{II} = 0,01234..\nu$, $nx^{III} = 0,00484..\nu$
$nx^{IV} = 0,00156...\nu$.

la quantité ν dépendant de la figure, & de la constitution intérieure de Jupiter, comme on l'a vu (art. XVI).

LXXXIII.

Toutes ces substitutions faites, on aura, après avoir remis au lieu de $n\chi^{I}$, $n\chi^{II}$ &c, les quantités $\frac{☾^{I}}{♃}$, $\frac{☾^{II}}{♃}$ &c.

$$n\mathfrak{C}^{I} = 0,982\frac{☾^{II}}{♃} + 0,124\frac{☾^{III}}{♃} + 0,022\frac{☾^{IV}}{♃} + 0,012440\,\nu$$
$$+ 0,0000003,$$

$$n\mathfrak{C}^{II} = 1,562\frac{☾^{I}}{♃} + 0,940\frac{☾^{III}}{♃} + 0,090\frac{☾^{IV}}{♃} + 0,004936\,\nu$$
$$+ 0,0000010,$$

$$n\mathfrak{C}^{III} = 0{,}307\,\frac{☾^{I}}{♃} + 1{,}467\,\frac{☾^{II}}{♃} + 0{,}673\,\frac{☾^{IV}}{♃} + 0{,}001936,$$
$$+ 0{,}0000040.$$

$$n\mathfrak{C}^{IV} = 0{,}050\,\frac{☾^{I}}{♃} + 0{,}260\,\frac{☾^{II}}{♃} + 1{,}139\,\frac{☾^{III}}{♃} + 0{,}000624,$$
$$+ 0{,}0000222.$$

LXXXIV.

Passons maintenant aux formules qui donnent le mouvement des nœuds, & nous trouvons d'abord pour le premier satellite (art. LXXV).

$$N^{I_2} = \mu^{I_2} + nf^{I}\left(\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^{I} + \tfrac{3}{5}x^{I}\right) + 2n\mu^{I}f^{I}H^{I};$$

c'est-à-dire, en mettant μ^{I_2} au lieu de f^{I}, & négligeant le terme $2\,n\,\mu^{I}f^{I}H^{I}$ qui est du second ordre, à cause que H^{I} est déja de l'ordre de n (art. LXXVIII).

$$N^{I_2} = \mu^{I}\left(1 + n\chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + n\chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + n\chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}nK^{I} + \tfrac{2}{5}nx^{I}\right);$$

donc si on fait pour abréger,

$$\pi^{I} = \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{III}) + \chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^{I} + \tfrac{3}{5}x^{I}$$

de même

$$\pi^{II} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{I}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{III}) + \chi^{IV}\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^{II} + \tfrac{3}{5}x^{II}$$

$$\pi^{III} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{I}) + \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^{IV}) + \tfrac{3}{2}K^{III} + \tfrac{3}{5}x^{III}$$

$$\pi^{IV} = \chi^{I}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{I}) + \chi^{II}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{II}) + \chi^{III}\tilde{\Gamma}(a^{IV}, a^{III}) + \tfrac{3}{2}K^{IV} + \tfrac{3}{5}x^{IV}.$$

On aura pour tous les quatre satellites

$$N^{I_2} = \mu^{I_2}(1 + n\pi^{I}),\quad N^{I} = \mu^{I}(1 + \tfrac{1}{2}n\pi^{I})$$
$$N^{II_2} = \mu^{II_2}(1 + n\pi^{II}),\quad N^{I} = \mu^{II}(1 + \tfrac{1}{2}n\pi^{II})\ \text{\&c.}$$

Pour

Pour tirer de-là le mouvement des nœuds, on remarquera que $(\mu - N)\,t - \eta$ exprime en général la longitude moyenne du nœud ascendant (art. XLI); d'où il suit que le mouvement de la ligne des nœuds sera au mouvement moyen, comme $\mu - N$ à μ, c'est-à-dire, comme $-\frac{n\pi}{2}$ à 1; par conséquent les nœuds reculeront à chaque révolution de $\frac{1}{2}\,n\pi \times 360^\circ$.

L X X X V.

Or, on trouve par l'art. XXXII, en faisant successivement $q = \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}$, $= \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{III}}}$ &c.

$\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = q^3 A + \check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$

$\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = q^3 A + \check{\Gamma}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$

&c. ensuite,

$\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = A + \check{\Gamma}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$

$\tilde{\Gamma}(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}}) = A + \check{\Gamma}(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$ &c.

ce qui donne (art. XLVII)

	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}})$
$\check{\Gamma}$	0,981	0,126	0,018	0,942	0,087	0,576
	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}})$
$\check{\Gamma}$	1,558	0,320	0,083	1,506	0,245	1,013

L X X X V I.

Donc faisant ces substitutions, & remettant $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}$, $\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃}$ &c. au lieu de $n\chi^{\mathrm{I}}$, $n\chi^{\mathrm{II}}$, &c. on aura

$$n\pi^{\mathrm{I}} = 0,981\,\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃} + 0,126\,\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃} + 0,018\,\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}$$
$$+ 0,018660\,\nu + 0,0000003$$

$$n\pi^{\mathrm{II}} = 1,558\,\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} + 0,942\,\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃} + 0,087\,\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}$$
$$+ 0,007404\,\nu + 0,0000010$$

$$n\pi^{\mathrm{III}} = 0,320\,\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} + 1,506\,\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃} + 0,576\,\frac{☾^{\mathrm{IV}}}{♃}$$
$$+ 0,002904\,\nu + 0,0000040$$

$$n\pi^{\mathrm{IV}} = 0,083\,\frac{☾^{\mathrm{I}}}{♃} + 0,245\,\frac{☾^{\mathrm{II}}}{♃} + 1,013\,\frac{☾^{\mathrm{III}}}{♃}$$
$$+ 0,000936\,\nu + 0,0000222$$

§. 2.

Où l'on montre la nécessité d'avoir égard, dans les calculs de l'équation du centre, & de la latitude, à quelques termes de l'ordre n, *des équations* (G), & (K).

LXXXVII.

Nous avons trouvé (art. LXXVII) $x^{\cdot\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{I}} \cos.(M^{\mathrm{I}}t + \omega^{\mathrm{I}})$, & $y^{\cdot\mathrm{I}} = -\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}}}\varepsilon^{\mathrm{I}} \sin.(M^{\mathrm{I}}t + \omega^{\mathrm{I}})$; on trouvera de même $x^{\cdot\mathrm{II}} = \varepsilon^{\mathrm{II}} \cos.(M^{\mathrm{II}}t + \omega^{\mathrm{II}})$, $y^{\cdot\mathrm{II}} = -\frac{2\mu^{\mathrm{II}}}{M^{\mathrm{II}}}\varepsilon^{\mathrm{II}} \sin.(M^{\mathrm{II}}t + \omega^{\mathrm{II}})$ & ainsi des autres. Cela posé, si on reprend l'équation (G) de l'article LXXVI, & qu'on substitue dans le terme $n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} x^{\mathrm{II}} \check{\psi}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t$, au lieu de x^{II} sa valeur $x^{\cdot\mathrm{II}} + \theta^{\mathrm{II}}$, on verra que la quantité $x^{\cdot\mathrm{II}} \cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t$ renfermera un terme de cette forme $\cos.((M^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{II}}$

$+\mu^{\mathrm{I}})t+\omega^{\mathrm{II}}) = cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})t+\omega^{\mathrm{II}})$, lequel étant intégré deviendra $\frac{cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})t+\omega^{\mathrm{II}})}{(\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})^2 - (\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{I}}}{2})^2}$; ainsi le terme $n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) x^{\mathrm{II}} cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t$ de l'équation différentielle donnera dans la valeur de x^{I} le terme suivant:

$$\frac{1}{2}\frac{n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\, cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})t+\omega^{\mathrm{II}})}{(\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})^2 - (\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{I}}}{2})^2} = \frac{\chi^{\mathrm{II}}, {}^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})}{2(\zeta^{\mathrm{I}} - \zeta^{\mathrm{II}})}$$

$cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{II}}}{2})t+\omega^{\mathrm{II}})$, lequel appartient, comme l'on voit à la première valeur de x^{I}. Pareillement le terme $n\chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{I}} x^{\mathrm{III}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) cos.(\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})t$ donnera dans la valeur de x^{I} le terme $\frac{\chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})}{2(\zeta^{\mathrm{I}} - \zeta^{\mathrm{III}})} cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{III}}}{2})t+\omega^{\mathrm{III}})$; & il en sera de même de quelques autres termes de l'équation (G) dont nous parlerons plus bas.

On trouvera de la même manière dans la valeur de x^{II} les termes $\frac{\chi^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{II}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})}{2(\zeta^{\mathrm{II}} - \zeta^{\mathrm{I}})} cos.((\mu^{\mathrm{II}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{I}}}{2})t+\omega^{\mathrm{I}})$, $\frac{\chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{II}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})}{2(\zeta^{\mathrm{II}} - \zeta^{\mathrm{III}})} cos.((\mu^{\mathrm{II}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{III}}}{2})t+\omega^{\mathrm{III}})$; lesquels étant de nouveau substitués dans le terme $n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) x^{\mathrm{II}}$ $cos.(\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})t$ de l'équation (G), en donneront deux autres de cette forme $\frac{1}{2}n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \times \frac{\chi^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{II}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})}{2(\zeta^{\mathrm{II}} - \zeta^{\mathrm{I}})}$ $cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{I}}}{2})t+\omega^{\mathrm{I}})$, $\frac{1}{2}n\chi^{\mathrm{II}} f^{\mathrm{I}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \times \frac{\chi^{\mathrm{III}} f^{\mathrm{II}} \check{\Psi} 1(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})}{2(\zeta^{\mathrm{II}} - \zeta^{\mathrm{III}})}$ $cos.((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{III}}}{2})t+\omega^{\mathrm{III}})$; le premier de ces deux termes produira (à cause de $\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n\zeta^{\mathrm{I}}}{2} = M$) dans la valeur de x^{I} un terme qui sera multiplié par l'angle t, (art. XXXIV); ce qui donnera des arcs de cercle dans le rayon vecteur

N 2

de l'orbite; le second y produira le terme $\frac{\chi^{II} f^{I} \breve{\Psi} 1(a^{I}, a^{II})}{2(6^{III} - 6^{I})} \times \frac{\chi^{III} f^{II} \breve{\Psi} 1(a^{II}, a^{III})}{2(6^{II} - 6^{III})} \, cos.\left(\left(\mu^{I} - \frac{n6^{III}}{2}\right) t + \omega^{III} \right)$ qui est de la même forme que celui que nous avons déja trouvé.

Ces termes en reproduiront d'autres dans la valeur de $x^{.II}$, de la même forme que ceux que nous venons d'examiner, d'où il renaîtra encor dans la valeur de $x^{.}$ d'autres termes de la même espèce que les précédens, & ainsi de suite à l'infini.

LXXXVIII.

De-là je tire ces deux conséquences fort importantes; 1.° que les termes dont il s'agit, quoique de l'ordre n dans l'équation différentielle, appartiennent cependant à la première approximation, & ne doivent point être négligés dans les premières valeurs de x, y; 2.° Que la méthode ordinaire d'approximation, suivant laquelle on emploie à chaque nouvelle correction les valeurs trouvées dans la correction précédente est absolument insuffisante pour calculer ces sortes de termes.

On appliquera le même raisonnement à l'équation (K) & on en tirera des conclusions analogues par rapport à la valeur de z.

LXXXIX.

Il est donc nécessaire d'avoir une méthode particulière pour intégrer les équations (G), (K); on verra dans le paragraphe suivant comment je m'y suis pris pour arriver à ce but; mais il faut commencer ici par voir quels sont les termes de ces équations, auxquels on doit avoir égard.

Pour peu qu'on examine l'équation (G), on reconnoîtra aisément que les termes dont il s'agit viennent uniquement des termes qui renferment

$x^{II} \, cos.(\mu^{II} - \mu^{I}) t$, $x^{III} \, cos.(\mu^{III} - \mu^{I}) t$, $x^{IV} \, cos.(\mu^{IV} - \mu^{I}) t$,

$y^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})t$, $y^{III} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})t$, $y^{IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})t$,

$\int x^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t\, dt$, $\int x^{III} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t\, dt$,

$\int x^{IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t\, dt$,

$\int y^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t\, dt$, $\int y^{III} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t\, dt$,

$\int y^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t\, dt$,

en tant qu'on y substitue $x^{\cdot II}$, $x^{\cdot III}$, $x^{\cdot IV}$; $y^{\cdot II}$, $y^{\cdot III}$, $y^{\cdot IV}$, à la place de x^{II}, x^{III}, x^{IV}; y^{II}, y^{III}, y^{IV}; de sorte qu'on pourra réduire cette équation à celle-ci

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^{\cdot I}}{dt^2} + M^{I\,2} x^{\cdot I} \\
&- n f^{I} \chi^{II} \breve{\Psi} I (a^{I}, a^{II})\, x^{\cdot II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \\
&- n f^{I} \chi^{III} \breve{\Psi} I (a^{I}, a^{III})\, x^{\cdot III} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \\
&- n f^{I} \chi^{IV} \breve{\Psi} I (a^{I}, a^{IV})\, x^{\cdot IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \\
&+ n f^{I} \chi^{II} \breve{\Gamma} I (a^{I}, a^{II})\, y^{\cdot II} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \\
&+ n f^{I} \chi^{III} \breve{\Gamma} I (a^{I}, a^{III})\, y^{\cdot III} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \\
&+ n f^{I} \chi^{IV} \breve{\Gamma} I (a^{I}, a^{IV})\, y^{\cdot IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{II} \hat{\Psi} I (a^{I}, a^{II}) \int x^{\cdot II} \sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t\, dt \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{III} \hat{\Psi} I (a^{I}, a^{III}) \int x^{\cdot III} \sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t\, dt \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{IV} \hat{\Psi} I (a^{I}, a^{IV}) \int x^{\cdot IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t\, dt \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{II} \hat{\Gamma} I (a^{I}, a^{II}) \int y^{\cdot II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t\, dt \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{III} \hat{\Gamma} I (a^{I}, a^{III}) \int y^{\cdot III} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t\, dt \\
&+ 2 n f^{I} \mu^{I} \chi^{IV} \hat{\Gamma} I (a^{I}, a^{IV}) \int y^{\cdot IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t\, dt = 0 \ldots (L)
\end{aligned}
$$

A l'égard de l'équation (K) on trouvera qu'elle se réduit de même à celle-ci :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 z^{I}}{dt^2} + N^{I\,2} z^{I} \\
&- n f^{I} \chi^{II} \mathring{\Gamma} I (a^{I}, a^{II})\, z^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t \\
&- n f^{I} \chi^{III} \mathring{\Gamma} I (a^{I}, a^{III})\, z^{III} \cos.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \\
&- n f^{I} \chi^{IV} \mathring{\Gamma} I (a^{I}, a^{IV})\, z^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = 0 \ldots\ldots (N)
\end{aligned}
$$

X C.

Comme notre deſſein n'eſt pas d'avoir égard dans les valeurs de x, y & z aux termes de l ordre n, mais ſeulement à ceux qui ont des coefficiens finis; nous pourrons négliger, dans les équations (L) & (N) tous les termes qui ſe trouveront affectés de n^2, parce que ces termes ſeront encore de l'ordre n après l'intégration.

Or les équations (G) & (H) donnent, en rejettant les termes affectés de n, $\frac{d^2x^{.\mathrm{I}}}{dt^2}+M^{\mathrm{I}2}x^{.\mathrm{I}}=0$, & $\frac{dy^{.\mathrm{I}}}{dt}+2\mu^{\mathrm{I}}x^{.\mathrm{I}}=0$; d'où l'on tire $\frac{dy^{.\mathrm{I}}}{dt}-\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}2}}\times\frac{d^2x^{.\mathrm{I}}}{dt^2}=0$, & intégrant $y^{.\mathrm{I}}-\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{I}2}}\times\frac{dx^{.\mathrm{I}}}{dt}=0$; il ne faut point ici de conſtante, ce qui eſt évident par la nature de nos formules; on trouvera de même $y^{.\mathrm{II}}-\frac{2\mu^{\mathrm{II}}}{M^{2\mathrm{II}}}\times\frac{dx^{.\mathrm{II}}}{dt}=0$, $y^{.\mathrm{III}}-\frac{2\mu^{\mathrm{III}}}{M^{\mathrm{III}2}}\times\frac{dx^{.\mathrm{III}}}{dt}=0$, & $y^{.\mathrm{IV}}-\frac{2\mu^{\mathrm{IV}}}{M^{\mathrm{IV}2}}\times\frac{dx^{.\mathrm{IV}}}{dt}=0$; donc ſubſtituant ces valeurs de $y^{.\mathrm{II}}$, $y^{.\mathrm{III}}$, y^{IV} dans l'équation (L) de l'article précédent, on changera les termes

$$nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\,y^{.\mathrm{II}}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\,nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\,y^{.\mathrm{III}}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\,nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\,y^{.\mathrm{IV}}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t \quad \text{en ceux-ci}$$

$$2nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\frac{\mu^{\mathrm{II}}}{M^{\mathrm{II}2}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\frac{dx^{.\mathrm{II}}}{dt}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\,2nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\frac{\mu^{\mathrm{III}}}{M^{\mathrm{III}2}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\frac{dx^{.\mathrm{III}}}{dt}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$
$$+\,2nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\frac{\mu^{\mathrm{IV}}}{M^{\mathrm{IV}2}}\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\frac{dx^{.\mathrm{IV}}}{dt}\,\mathit{ſin.}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t$$

& les termes:

$$2nf^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\hat{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\int y^{.\mathrm{II}}\,\mathit{coſ.}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})\,t\,dt$$

$+ 2nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{III}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \int y^{.\text{III}}\, cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$

$+ 2nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{IV}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \int y^{.\text{IV}}\, cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$

en ceux-ci :

$$4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{II}}\,\frac{\mu^{\text{II}}}{M^{\text{II}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \int \frac{dx^{.\text{II}}}{dt}\, cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{III}}\,\frac{\mu^{\text{III}}}{M^{\text{III}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \int \frac{dx^{.\text{III}}}{dt}\, cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{IV}}\,\frac{\mu^{\text{IV}}}{M^{\text{IV}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \int \frac{dx^{.\text{IV}}}{dt}\, cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt\,;$$

que l'on peut encore changer en ceux-ci :

$$4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{II}}\,\frac{\mu^{\text{II}}}{M^{\text{II}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})\, x^{.\text{II}}\, cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{III}}\,\frac{\mu^{\text{III}}}{M^{\text{III}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})\, x^{.\text{III}}\, cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})\,t$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{IV}}\,\frac{\mu^{\text{IV}}}{M^{\text{IV}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}})\, x^{.\text{IV}}\, cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})\,t$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{II}}\,\frac{\mu^{\text{II}}(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})}{M^{\text{II}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \int x^{.\text{II}}\, sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{III}}\,\frac{\mu^{\text{III}}(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})}{M^{\text{III}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \int x^{.\text{III}}\, sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$$

$$+ 4nf^{\text{I}}\mu^{\text{I}}\chi^{\text{IV}}\,\frac{\mu^{\text{IV}}(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})}{M^{\text{IV}2}}\,\hat{\Gamma}\text{I}\,(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \int x^{.\text{IV}}\, sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$$

Par ce moyen, l'équation (L) ne contiendra plus que des termes de la forme de $x^{.\text{II}}\, cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t$, de $\frac{dx^{.\text{II}}}{dt}\, sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t$, & de $\int x^{.\text{II}}\, sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$.

Je reprends maintenant l'équation $\frac{d^2x^{.\text{I}}}{dt^2} + M^{\text{I}2}x^{.\text{I}} = 0$, laquelle étant rapportée au second satellite, devient $\frac{dx^{.\text{II}}}{dt^2} + M^{\text{II}2}x^{.\text{II}} = 0$; je multiplie cette dernière par $sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt$; je l'integre, j'ai : $\int \frac{d^2x^{.\text{II}}}{dt^2}\, sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt + M^{\text{II}2}\int x^{.\text{II}}\, sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})\,t\,dt = 0$; je change l'expression $\int \frac{d^2 x^{\cdot II}}{dt^2} \, fin.(\mu^{II} - \mu^{I}) \, t \, dt$ en son équivalente

$$\frac{dx^{\cdot II}}{dt} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t - (\mu^{II} - \mu^{I})\,x^{\cdot II} cof.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t$$
$$- (\mu^{II} - \mu^{I})^2 \int x^{\cdot II} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t\,dt\,,$$

& il me vient l'équation :

$$\frac{dx^{\cdot II}}{dt} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t - (\mu^{II} - \mu^{I})x^{\cdot II} cof.(\mu^{II} - \mu^{I})t + \left(M^{II2}\right.$$
$$\left. - (\mu^{II} - \mu^{I})^2\right) \int x^{\cdot II} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t\,dt = 0\text{ ; d'où je tire :}$$

$$\int x^{\cdot II} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})t\,dt = \frac{(\mu^{II} - \mu^{I})x^{\cdot II} cof.(\mu^{II} - \mu^{I})t - \frac{dx^{\cdot II}}{dt} fin.(\mu^{III} - \mu^{I})t}{M^{II2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2}$$

Je trouve de la même manière,

$$\int x^{\cdot III} fin.(\mu^{III} - \mu^{I})\,t\,dt = \frac{(\mu^{III} - \mu^{I})x^{\cdot III} cof.(\mu^{III} - \mu^{I})\,t - \frac{dx^{\cdot III}}{dt} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t}{M^{III2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2}$$

$$\int x^{\cdot IV} fin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\,t\,dt = \frac{(\mu^{IV} - \mu^{I})x^{\cdot IV} cof.(\mu^{IV} - \mu^{I})\,t - \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} fin.(\mu^{IV} - \mu^{I})t}{M^{IV2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2}$$

On fera toutes ces substitutions dans l'équation (L), moyennant quoi elle n'aura plus que des termes de la forme de $x^{\cdot II} cof.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t$, & $\frac{dx^{\cdot II}}{dt} fin.(\mu^{II} - \mu^{I})\,t$.

X C I.

Donc si on fait, pour abréger :

$$\overset{\circ}{\Psi} 1(a^{I}, a^{II}) = \overset{\vee}{\Psi} 1(a^{I}, a^{II}) - 4\frac{\mu^{I}\mu^{II}}{M^{II2}} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II}) - \left(2\hat{\Psi} 1(a^{I}, a^{II})\right.$$
$$\left. + 4\frac{\mu^{II}(\mu^{II} - \mu^{I})}{M^{II2}} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{II})\right) \frac{\mu^{I}(\mu^{II} - \mu^{I})}{M^{II2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Psi} 1(a^{I}, a^{III}) = \overset{\circ}{\Psi} 1(a^{I}, a^{III}) - 4\frac{\mu^{I}\mu^{III}}{M^{III2}} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III}) - \left(2\hat{\Psi} 1\right.$$
$$\left.(a^{I}, a^{III}) + 4\frac{\mu^{III}(\mu^{III} - \mu^{I})}{M^{III2}} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{III})\right) \frac{\mu^{I}(\mu^{III} - \mu^{I})}{M^{III2} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Psi} 1(a^{I}, a^{IV}) = \overset{\circ}{\Psi} 1(a^{I}, a^{IV}) - 4\frac{\mu^{I}\mu^{IV}}{M^{IV2}} \hat{\Gamma} 1(a^{I}, a^{IV}) - \left(2\hat{\Psi} 1\right.$$
$(a^{I},$

$$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + 4\,\frac{\mu^{\mathrm{IV}}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})}{M^{\mathrm{IV}2}}\,\hat{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\Big)\,\frac{\mu^{\mathrm{I}}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})}{M^{\mathrm{IV}2}-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}$$

& de plus

$$\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = \frac{-2\mu^{\mathrm{II}}}{M^{\mathrm{II}2}}\,\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + \Big(2\hat{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) + 4\,\frac{\mu^{\mathrm{II}}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})}{M^{\mathrm{II}2}}\,\hat{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\Big)\,\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{II}2}-(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) = \frac{-2\mu^{\mathrm{III}}}{M^{\mathrm{III}2}}\,\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \Big(2\hat{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + 4\,\frac{\mu^{\mathrm{III}}(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})}{M^{\mathrm{III}2}}\,\hat{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\Big)\,\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{III}2}-(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}$$

$$\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) = \frac{-2\mu^{\mathrm{IV}}}{M^{\mathrm{IV}2}}\,\check{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + \Big(2\hat{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}}) + 4\,\frac{\mu^{\mathrm{IV}}(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})}{M^{\mathrm{IV}2}}\,\hat{\Gamma}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\Big)\,\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{M^{\mathrm{IV}2}-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})^2}$$

On aura, pour le premier ſatellite, l'équation:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{\cdot\mathrm{I}}}{dt^2} + M^{\mathrm{I}2}x^{\cdot\mathrm{I}} \\
&- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\,x^{\cdot\mathrm{II}}\cos.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&\quad - nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{II}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\,x^{\cdot\mathrm{III}}\cos.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&\quad - nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{III}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&- nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\,x^{\cdot\mathrm{IV}}\cos.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&\quad - nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{IV}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})t \\
&= 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (M\mathrm{I})
\end{aligned}$$

Et de même pour les trois autres ſatellites:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{\cdot\mathrm{II}}}{dt^2} + M^{\mathrm{II}2}x^{\cdot\mathrm{II}} \\
&- nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})\,x^{\cdot\mathrm{I}}\cos.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{II}})t \\
&\quad - nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{II}})t
\end{aligned}$$

$$-nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{III}})\,x^{\cdot\mathrm{III}}\cos.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{II}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{III}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{III}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{II}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})\,x^{\cdot\mathrm{IV}}\cos.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{II}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{IV}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{II}})\,t$$
$$=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M2)$$

$$\frac{d^2x^{\cdot\mathrm{III}}}{dt^2}+M^{\mathrm{III}2}x^{\cdot\mathrm{III}}$$
$$-nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})\,x^{\cdot\mathrm{I}}\cos.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})\,x^{\cdot\mathrm{II}}\cos.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{II}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})\,x^{\cdot\mathrm{IV}}\cos.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{IV}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{IV}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{III}})\,t$$
$$=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M3)$$

$$\frac{d^2x^{\cdot\mathrm{IV}}}{dt^2}+M^{\mathrm{IV}2}x^{\cdot\mathrm{IV}}$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})\,x^{\cdot\mathrm{I}}\cos.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{I}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})\,x^{\cdot\mathrm{II}}\cos.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{II}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{III}})\,x^{\cdot\mathrm{III}}\cos.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$-nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{III}})\,\frac{dx^{\cdot\mathrm{III}}}{dt}\sin.(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{IV}})\,t$$
$$=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M4)$$

Pareillement on aura, par rappport aux variables z, ces quatre équations : (art. LXXXIX).

$$\frac{d^2 z^{I}}{dt^2} + N^{I2} z^{I}$$
$$- n f^{I} \chi^{II} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}) z^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^{I}) t$$
$$- n f^{I} \chi^{III} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{III}) z^{III} \cos. (\mu^{III} - \mu^{I}) t$$
$$- n f^{I} \chi^{IV} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{IV}) z^{IV} \cos. (\mu^{IV} - \mu^{I}) = 0 \ldots (N1)$$

$$\frac{d^2 z^{II}}{dt^2} + N^{II2} z^{II}$$
$$- n f^{II} \chi^{I} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{II}, a^{I}) z^{I} \cos. (\mu^{I} - \mu^{II}) t$$
$$- n f^{II} \chi^{III} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{II}, a^{III}) z^{III} \cos. (\mu^{III} - \mu^{II}) t$$
$$- n f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{II}, a^{IV}) z^{IV} \cos. (\mu^{IV} - \mu^{II}) t = 0 \ldots (N2)$$

$$\frac{d^2 z^{III}}{dt^2} + N^{III2} z^{III}$$
$$- n f^{III} \chi^{I} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{III}, a^{I}) z^{I} \cos. (\mu^{I} - \mu^{III}) t$$
$$- n f^{III} \chi^{II} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{III}, a^{II}) z^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^{III}) t$$
$$- n f^{III} \chi^{IV} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{III}, a^{IV}) z^{IV} \cos. (\mu^{IV} - \mu^{III}) t = 0 \ldots (N3)$$

$$\frac{d^2 z^{III}}{dt^2} + N^{IV2} z^{IV}$$
$$- n f^{IV} \chi^{I} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{IV}, a^{I}) z^{I} \cos. (\mu^{I} - \mu^{IV}) t$$
$$- n f^{IV} \chi^{II} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{IV}, a^{II}) z^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^{IV}) t$$
$$- n f^{IV} \chi^{III} \overset{o}{\Gamma} 1 (a^{IV}, a^{III}) z^{III} \cos. (\mu^{III} - \mu^{IV}) t = 0 \ldots (N4)$$

§. 3.

Où l'on donne une nouvelle méthode pour intégrer les équations précédentes.

XCII.

Je fais

$$x^{\cdot II} \cos. (\mu^{II} - \mu^{I}) t = P, \quad x^{\cdot II} \sin. (\mu^{II} - \mu^{I}) t = p$$
$$x^{\cdot III} \cos. (\mu^{III} - \mu^{I}) t = Q, \quad x^{\cdot III} \sin. (\mu^{III} - \mu^{I}) t = q$$

O 2

$x'^{IV} \, cos.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = R$, $x'^{IV} \, sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = r$

d'où je tire

$$\frac{dx'^{II}}{dt} \, sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})\, P$$

$$\frac{dx'^{III}}{dt} \, sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})\, Q$$

$$\frac{dx'^{IV}}{dt} \, sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, R$$

Je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation ($M1$), ce qui la change en celle-ci :

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x'^{I}}{dt^2} + M^{I2} x'^{I} \\
&- nf^{I} \chi^{II} \left(\overset{o}{\Psi} 1\, (a^{I}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^{I})\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{II}) \right) P \\
&\quad - nf^{I} \chi^{II}\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{II}) \frac{dp}{dt} \\
&- nf^{I} \chi^{III} \left(\overset{o}{\Psi} 1\, (a^{I}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^{I})\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{III}) \right) Q \\
&\quad - nf^{I} \chi^{III}\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{III}) \frac{dq}{dt} \\
&- nf^{I} \chi^{IV} \left(\overset{o}{\Psi} 1\, (a^{I}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{IV}) \right) R \\
&\quad - nf^{I} \chi^{IV}\, \overset{o}{\Pi} 1\, (a^{I}, a^{IV}) \frac{dr}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

C'eſt l'équation qu'il s'agit maintenant d'intégrer, en regardant les quantités P, Q, R, p, q, r, chacune comme une variable particulière. Pour y parvenir, voici comment je m'y prens.

XCIII.

Je reprens les formules :

$$\frac{dx'^{II}}{dt} \, sin.(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})\, P$$

$$\frac{dx'^{III}}{dt} \, sin.(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})\, Q$$

$$\frac{dx'^{IV}}{dt} \, sin.(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})\, R$$

& je trouve de même :

$$\frac{dx^{\cdot II}}{dt} \, cof.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{dP}{dt} + (\mu^{II} - \mu^{I})\, p$$

$$\frac{dx^{\cdot III}}{dt} \, cof.\,(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{dQ}{dt} + (\mu^{III} - \mu^{I})\, q$$

$$\frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \, cof.\,(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{dR}{dt} + (\mu^{IV} - \mu^{I})\, r\,;$$

De là je tire, par la différentiation, les formules ſuivantes :

$$\frac{d^2x^{\cdot II}}{dt^2} \, fin.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2p}{dt^2} - 2\,(\mu^{II} - \mu^{I})\,\frac{dP}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 p$$

$$\frac{d^2x^{\cdot II}}{dt^2} \, cof.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2P}{dt^2} + 2\,(\mu^{II} - \mu^{I})\,\frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 P$$

$$\frac{d^2x^{\cdot III}}{dt^2} \, fin.\,(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2p}{dt^2} - 2\,(\mu^{III} - \mu^{I})\,\frac{dQ}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2 q$$

$$\frac{d^2x^{\cdot III}}{dt^2} \, cof.\,(\mu^{III} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\,(\mu^{III} - \mu^{I})\,\frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^{I})^2 Q$$

$$\frac{d^2x^{\cdot IV}}{dt^2} \, fin.\,(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2r}{dt^2} - 2\,(\mu^{IV} - \mu^{I})\,\frac{dR}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 r$$

$$\frac{d^2x^{\cdot IV}}{dt^2} \, cof.\,(\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = \frac{d^2R}{dt^2} + 2\,(\mu^{IV} - \mu^{I})\,\frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^2 R$$

Cela poſé, je multiplie d'abord l'équation ($M2$) par $fin.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$, j'ai :

$$\frac{d^2\, x^{\cdot II}}{dt^2} \, fin.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t + M^{II_2}\, x^{\cdot II}\, fin.\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$

$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{0}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{I})\, x^{\cdot I} fin.\,2\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$

$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{0}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{I})\,\frac{dx^{\cdot I}}{dt}\left(-1 + cof.\,2\,(\mu^{II} - \mu^{I})\, t\right)$$

$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{0}{\Psi} I\,(a^{II}, a^{III})\, x^{\cdot III}\left(fin.\,(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$

$$\left. - fin.\,(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t\right)$$

$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{0}{\Pi} I\,(a^{II}, a^{III})\,\frac{dx^{\cdot III}}{dt}\left(- cof.\,(\mu^{III} - \mu^{I})\, t \right.$$

$$\left. + cof.\,(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t\right)$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{IV}) x^{\cdot IV} \Big(\text{fin.}\, (\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$- \text{fin.}\, (\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t \Big)$$

$$-\tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \Big(- \text{cof.}\, (\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \text{cof.}\, (\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^{I})\, t \Big) = 0.$$

Je ne conserve dans cette équation que les termes analogues à ceux de l'équation ($M1$), c'eſt-à dire, les termes, qui en faiſant pour $x^{\cdot I}$, $x^{\cdot II}$, &c. les ſubſtitutions de l'article LXXXVII, en donneroient d'autres, où le coefficient de t ſeroit preſque égal à μ^{I}, & qui ſont les ſeuls auxquels nous devions avoir égard dans l'intégration de l'équation de l'article XCII.

J'aurai donc ſimplement :

$$\frac{d^2 x^{\cdot}}{dt^2} \text{fin.}\, (\mu^{II} - \mu^{I})\, t + M^{II2} x^{\cdot II} \text{fin.}\, (\mu^{II} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{I}) \frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{III}) x^{\cdot III} \text{fin.}\, (\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{III}) \frac{dx^{\cdot III}}{dt} \text{cof.}\, (\mu^{III} - \mu^{I})\, t$$
$$- \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Psi} 1 (a^{II}, a^{IV}) x^{\cdot IV} \text{fin.}\, (\mu^{IV} - \mu^{I})\, t$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{\cdot IV}}{dt} \text{cof.}\, (\mu^{IV} - \mu^{I})\, t = 0.$$

Je ſubſtitue au lieu de $\frac{d^2 x^{\cdot}}{dt^2} \text{fin.} (\mu^{II} - \mu^{I}) t$, $x^{\cdot II} \text{cof.} (\mu^{II} - \mu^{I}) t$ &c. leurs valeurs en P, p, &c. j'ai .

(1.°)

$$\frac{dp^2}{dt^3} - 2 (\mu^{II} - \mu^{I}) \frac{dP}{dt} \big(M^{II2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^2 \big) p$$
$$+ \tfrac{n}{2} f^{II} \chi^{I} \overset{o}{\Pi} 1 (a^{II}, a^{I}) \frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$

$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\right)q$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\frac{dQ}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\right)r$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\frac{dR}{dt}=0.$$

Je multiplie en second lieu la même équation ($M2$) par $cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t$ j'ai:

$$\frac{d^2x^{.II}}{dt^2}cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+M^{II2}x^{.II}cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{I})x^{.I}\left(1+cos.2(\mu^{II}-\mu^{I})t\right)$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{I})\frac{dx^{.I}}{dt}fin.2(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{III})x^{.III}\left(cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+cos.(\mu^{III}-2\mu^{II}+\mu^{I})t\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\frac{dx^{.III}}{dt}\left(fin.(\mu^{III}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+fin.(\mu^{III}-2\mu^{II}+\mu^{I})t\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})x^{.IV}\left(fin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+cos.(\mu^{IV}-2\mu^{II}+\mu^{I})t\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\frac{dx^{.IV}}{dt}\left(fin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t\right.$$
$$\left.+fin.(\mu^{IV}-2\mu^{II}+\mu^{I})t\right)=0.$$

équation que je réduis, par la raison que j'ai dite tantôt, à celle-ci:

$$\frac{d^2x^{.II}}{dt}cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t+M^{II2}x^{.II}cos.(\mu^{II}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{I})x^{.}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{III})x^{.III}cos.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\frac{dx^{.III}}{dt}fin.(\mu^{III}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{IV})x^{.IV}cos.(\mu^{IV}-\mu^{I})t$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\frac{dx^{.IV}}{dt}fin.(\mu^{IV}-\mu^{I})t=0.$$

laquelle me donne, après les substitutions:

(2.°)

$$\frac{d^2P}{dt^2}+2(\mu^{II}-\mu^{I})\frac{dp}{dt}+(M^{II2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^2)P$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{I}\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{I})x^{\cdot I}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III}))Q$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\frac{dq}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III}))R$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\frac{dr}{dt}=0.$$

En troisième lieu, je multiplie l'équation ($M3$) par $\mathit{sin.}(\mu^{III}-\mu^{I})t$; j'aurai, après les réductions & les substitutions,

(3.°)

$$\frac{d^2q}{dt^2}-2(\mu^{III}-\mu^{I})\frac{dQ}{dt}+(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2)q$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{I}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{I})\frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{III};a^{II}))p$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\frac{dP}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{IV}(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV}))r$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})\frac{dR}{dt}=0.$$

En quatrième lieu, je multiplie la même équation par $\mathit{cos.}(\mu^{III}-\mu^{I})t$, & je trouve

(4.°)

$$\frac{dQ}{dt^2}+2(\mu^{III}-\mu^{I})\frac{dq}{dt}+(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^2)Q$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{I}\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{I})x^{\cdot I}$$

$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\right)P$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\frac{dp}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{IV}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{IV})-(\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})\right)R$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})\frac{dr}{dt}=0.$$

En cinquième lieu, je multiplie l'équation ($M4$) par $\mathit{sin.}(\mu^{IV}-\mu^{I})t$, j'ai

(5.°)

$$\frac{d^2r}{dt^2}-2(\mu^{IV}-\mu^{I})\frac{dR}{dt}+\left(M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2\right)r$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{I}\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{I})\frac{dx^{\cdot I}}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\right)p$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\frac{dP}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\right)q$$
$$+\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\frac{dQ}{dt}=0.$$

En sixième & dernier lieu, je multiplie la même équation par $\mathit{cos.}(\mu^{IV}-\mu^{I})t$, & je trouve

(6.°)

$$\frac{d^2R}{dt}+2(\mu^{IV}-\mu^{I})\frac{dr}{dt}+\left(M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^2\right)R$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{I}\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{I})x^{\cdot I}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\right)P$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\frac{dp}{dt}$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I})\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\right)Q$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\frac{dq}{dt}=0.$$

Voila, comme l'on voit, six équations différentielles de la même nature que l'équation de l'article XCII, & qui étant combinées avec cette dernière équation, suffiront pour déterminer les sept variables $x^{\prime\mathrm{I}}$, P, p, Q, q, R, r.

XCIV.

Pour cet effet, je multiplie l'équation de l'article XCII par $e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (1.°) de l'article précédent par $\alpha^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (2.°) par $A^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (3.°) par $\beta^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (4.°) par $B^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (5.°) par $\gamma^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, l'équation (6.°) par $C^{\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$ (α^{I}, β^{I}, γ^{I}, A^{I}, B^{I}, C^{I} & V^{I} sont des constantes indéterminées) & après en avoir fait une somme, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int\left(\frac{d^2x^{\prime\mathrm{I}}}{dt^2}+\alpha^{\mathrm{I}}\frac{d^2p}{dt^2}+A^{\mathrm{I}}\frac{d^2P}{dt^2}+\beta^{\mathrm{I}}\frac{d^2q}{dt^2}+B^{\mathrm{I}}\frac{d^2Q}{dt^2}+\gamma^{\mathrm{I}}\frac{d^2R}{dt^2}\right.$$
$$\left.+C^{\mathrm{I}}\frac{d^2r}{dt^2}\right)e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$$
$$+\int\Big\{\tfrac{n}{2}\big(\alpha^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{I}})+\beta^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})$$
$$+\gamma^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})\big)\frac{dx^{\prime\mathrm{I}}}{dt}$$
$$+\big(-nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})+2A^{\mathrm{I}}(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})-\tfrac{n}{2}C^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})\big)\frac{dp}{dt}$$
$$+\big(-2\alpha(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}})+\tfrac{n}{2}\beta^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})$$
$$+\tfrac{n}{2}2^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})\big)\frac{dP}{dt}$$
$$+\big(-nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})-\tfrac{n}{2}A^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{III}})$$
$$2B^{\mathrm{I}}(\mu^{\mathrm{III}}-\mu^{\mathrm{I}})-\tfrac{n}{2}C^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{III}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{III}})\big)\frac{dq}{dt}$$

$$+\left(\tfrac{n}{2}\alpha^{I}f^{II}\chi^{III}\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{III}) - 2\beta^{I}(\mu^{III}-\mu^{I})\right.$$
$$\left.+\tfrac{n}{2}\gamma^{I}f^{IV}\chi^{III}\overset{0}{\Pi}I(a^{IV},a^{III})\right)\frac{dQ}{dt}$$

$$+\left(-nf^{I}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi}I(a^{I},a^{IV}) - \tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{IV})\right.$$
$$\left.-\tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi}I(a^{III},a^{IV}) + 2C^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\right)\frac{dr}{dt}$$

$$+\left(\tfrac{n}{2}\alpha^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{IV}) + \tfrac{n}{2}\beta^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi}I(a^{III},a^{IV})\right.$$
$$\left.+2\gamma^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\right)\frac{dR}{dt}\Big\}e^{V^{I}t}dt$$

$$+\int\Big\{\left(M^{I2}-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{I}\overset{0}{\Psi}I(a^{II},a^{I}) - \tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{I}\overset{0}{\Psi}I(a^{III},a^{I})\right.$$
$$\left.-\tfrac{n}{2}C^{I}f^{IV}\chi^{I}\overset{0}{\Psi}I(a^{IV},a^{I})\right)x^{I}$$

$$+\left(\alpha^{I}(M^{II2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}) - \tfrac{n}{2}\beta^{I}f^{III}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{III},a^{II})\right.\right.$$
$$\left.-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{III},a^{II})\right) - \tfrac{n}{2}\gamma^{I}f^{IV}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{IV},a^{II})\right.$$
$$\left.\left.-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{IV},a^{II})\right)\right)p$$

$$+\left(-nf^{I}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{I},a^{II}) - (\mu^{II}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{I},a^{II})\right)\right.$$
$$+A^{I}M^{II2}-(\mu^{II}-\mu^{I})^{2}) - \tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{III},a^{II})\right.$$
$$\left.-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{III},a^{II})\right) - \tfrac{n}{2}C^{I}f^{IV}\chi^{II}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{IV},a^{II})\right.$$
$$\left.\left.-(\mu^{II}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{IV},a^{II})\right)\right)P$$

$$+\left(-\tfrac{n}{2}\alpha f^{II}\chi^{III}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{II},a^{III}) - (\mu^{III}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{III})\right)\right.$$
$$+\beta^{I}(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}) - \tfrac{n}{2}\gamma^{I}f^{IV}\chi^{III}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{IV},a^{III})\right.$$
$$\left.\left.-(\mu^{IV}-\mu^{II})\overset{0}{\Pi}I(a^{IV},a^{III})\right)\right)q$$

$$+\left(-nf^{I}\chi^{III}\overset{0}{\Psi}I(a^{I},a^{III}) - (\mu^{III}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{I},a^{III})\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{III}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{II},a^{III}) - (\mu^{III}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{III})\right)$$
$$+B^{I}(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I})^{2}) - \tfrac{n}{2}C^{I}f^{IV}\chi^{III}\overset{0}{\Psi}I(a^{IV},a^{III})$$
$$\left.\left.-(\mu^{III}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{IV},a^{III})\right)\right)Q$$

$$+\left(-\tfrac{n}{2}\alpha^{I}f^{II}\chi^{IV}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{II},a^{IV}) - (\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{II},a^{IV})\right)\right.$$
$$-\tfrac{n}{2}\beta^{I}f^{III}\chi^{IV}\left(\overset{0}{\Psi}I(a^{III},a^{IV}) - (\mu^{IV}-\mu^{I})\overset{0}{\Pi}I(a^{III},a^{IV})\right)$$
$$\left.+\gamma^{I}(M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I})^{2})\right)r$$

$$+\left(-nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\right)\right.$$
$$-\tfrac{n}{2}A^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})\right)$$
$$\left.+C^{\mathrm{I}}\left(M^{\mathrm{IV}2}-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}})^2\right)\right)R\Big\}\, e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$$
$$= \textit{constante}.$$

X C V.

Cela fait, je transforme les expressions intégrales $\int\frac{d\cdot x^{\cdot}}{dt^2}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int\frac{d^2p}{dt^2}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, &c. en leurs équivalentes $\left(\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt}-V^{\mathrm{I}}x^{\cdot\mathrm{I}}\right)e^{V^{\mathrm{I}}t}+V^{\mathrm{I}2}\int x^{\cdot\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\left(\frac{dp}{dt}-V^{\mathrm{I}}p\right)e^{V^{\mathrm{I}}t}+V^{\mathrm{I}2}\int p\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, &c. De même je change les expressions $\int\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int\frac{dp}{dt}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, &c. en celles-ci: $x^{\cdot\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}-V^{\mathrm{I}}\int x^{\cdot\mathrm{I}}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $p\,e^{V^{\mathrm{I}}t}-V^{\mathrm{I}}\int p\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, &c.

Par ce moyen, l'équation se trouve composée de deux parties; l'une finie, & l'autre indéfinie, laquelle renferme les quantités intégrales $\int x^{\cdot}e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int p\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int P\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int q\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int Q\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int r\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$, $\int R\,e^{V^{\mathrm{I}}t}dt$.

Je fais les coefficiens de ces quantités chacun égal à zéro, ce qui me donne sept équations, entre les sept inconnues α^{I}, β^{I}, γ^{I}, A^{I}, B^{I}, & C^{I}; savoir

(1.°)

$$V^{\mathrm{I}2}-\tfrac{n}{2}\left(\alpha^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{I}})+\beta^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})\right.$$
$$\left.+\gamma f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})\right)V^{\mathrm{I}}+M^{\mathrm{I}2}-\tfrac{n}{2}A^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{I}})$$
$$-\tfrac{n}{2}B^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})-\tfrac{n}{2}C^{\mathrm{I}}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\overset{0}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})=0.$$

(2.°)

$$\alpha^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{I}2} + \Big(n f^{\mathrm{I}} \chi^{\mathrm{II}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 2A^{\mathrm{I}} (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) + \tfrac{n}{2} B^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{III}} \chi^{\mathrm{II}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) + \tfrac{n}{2} C^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{II}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) V^{\mathrm{I}} + \alpha^{\mathrm{I}} \Big(M^{\mathrm{II}2} - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})^2 \Big) - \tfrac{n}{2} \beta^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{III}} \chi^{\mathrm{II}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) - \tfrac{n}{2} \gamma^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{II}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) = 0.$$

(3.°)

$$A^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{I}2} - \Big(-2\alpha^{\mathrm{I}} (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) + \tfrac{n}{2} \beta^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{III}} \chi^{\mathrm{II}} \big(\overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) + \tfrac{n}{2} \gamma^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{II}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) \big) \Big) V^{\mathrm{I}} - n f^{\mathrm{I}} \chi^{\mathrm{II}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) + A^{\mathrm{I}} \Big(M^{\mathrm{II}2} - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})^2 \Big) - \tfrac{n}{2} \beta^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{III}} \chi^{\mathrm{II}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) - \tfrac{n}{2} C^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{II}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) - (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}}) \Big) = 0.$$

(4.°)

$$\beta^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{I}2} + \Big(n f^{\mathrm{I}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) + \tfrac{n}{2} A^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{II}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) - 2B^{\mathrm{I}} (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) + \tfrac{n}{2} C^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) \Big) V^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2} \alpha f^{\mathrm{II}} \chi^{\mathrm{III}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) \Big) + \beta^{\mathrm{I}} \Big(M^{\mathrm{III}2} - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})^2 \Big) - \tfrac{n}{2} \gamma^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{III}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) \Big) = 0.$$

(5.°)

$$B^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{I}2} - \Big(\tfrac{n}{2} \alpha^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{II}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) - 2\beta^{\mathrm{I}} (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) + \tfrac{n}{2} \gamma^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) \Big) V^{\mathrm{I}} - n f^{\mathrm{I}} \chi^{\mathrm{III}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}}) - \tfrac{n}{2} A^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{II}} \chi^{\mathrm{III}} \overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}) + B^{\mathrm{I}} \Big(M^{\mathrm{III}2} - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})^2 \Big) - \tfrac{n}{2} C^{\mathrm{I}} f^{\mathrm{IV}} \chi^{\mathrm{III}} \Big(\overset{0}{\Psi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) - (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}}) \overset{0}{\Pi} 1 (a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}}) \Big) = 0.$$

(6.°)

$$\gamma^{I} V^{I2} + \Big(nf^{I}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi} I(a^{I}, a^{IV}) + \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})$$
$$+ \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV}) - 2C^{I}(\mu^{IV} - \mu^{I})\Big) V^{I}$$
$$- \tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II}\chi^{IV}\big(\overset{0}{\Psi} I(a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I})\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})\big)$$
$$- \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III}\chi^{IV}\big(\overset{0}{\Psi} I(a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^{I})\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})\big)$$
$$+ \gamma^{I}\big(M^{IV2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^{2}\big) = 0.$$

(7.°)

$$C^{I} V^{I2} - \Big(\tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV}) + \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III}\chi^{IV}\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})$$
$$- 2\gamma^{I}(\mu^{IV} - \mu^{I})\Big) V^{I} - \tfrac{n}{2} f^{I}\chi^{IV}\big(\overset{0}{\Psi} I(a^{I}, a^{IV})$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I})\overset{0}{\Pi} I(a^{I}, a^{IV})\big) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II}\chi^{IV}\big(\overset{0}{\Psi} I(a^{II}, a^{IV})$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I})\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})\big) - \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III}\chi^{IV}\big(\overset{0}{\Psi} I(a^{III}, a^{IV})$$
$$- (\mu^{IV} - \mu^{I})\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})\big) + C^{I}\big(M^{IV2} - (\mu^{IV} - \mu^{I})^{2}\big)$$
$$= 0.$$

Ensuite j'ai l'équation intégrale,

$$\Big(\frac{dx'^{I}}{dt} + \alpha^{I}\frac{dp}{dt} + A^{I}\frac{dP}{dt} + \beta^{I}\frac{dq}{dt} + B^{I}\frac{dQ}{dt} + \gamma^{I}\frac{dr}{dt} + C^{I}\frac{dR}{dt}$$
$$+ \Big(-V^{I} + \tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II}\chi^{I}\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{I}) + \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III}\chi^{I}\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{I})$$
$$+ \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV}\chi^{I}\overset{0}{\Pi} I(a^{IV}, a^{I})\Big) x'^{I}$$
$$+ \Big(-\alpha^{I} V^{I} - nf^{I}\chi^{II}\overset{0}{\Pi} I(a^{I}, a^{II}) + 2A^{I}(\mu^{II} - \mu^{I})$$
$$- \tfrac{n}{2} B^{I} f^{III}\chi^{II}\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV}\chi^{II}\overset{0}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})\Big) p$$
$$+ \Big(-A^{I} V^{I} - 2\alpha(\mu^{II} - \mu^{I}) + \tfrac{n}{2}\beta^{I} f^{III}\chi^{II}\overset{0}{\Pi} I(a^{III}, a^{II})$$
$$+ \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV}\chi^{II}\overset{0}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})\Big) P$$
$$+ \Big(-\beta^{I} V^{I} - nf^{I}\chi^{III}\overset{0}{\Pi} I(a^{I}, a^{III}) - \tfrac{n}{2} A^{I} f^{II}\chi^{III}\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{III})$$
$$2B^{I}(\mu^{III} - \mu^{I}) - \tfrac{n}{2} C^{I} f^{IV}\chi^{III}\overset{0}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})\Big) q$$
$$+ \Big(-B^{I} V^{I} + \tfrac{n}{2}\alpha^{I} f^{II}\chi^{III}\overset{0}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) - 2\beta^{I}(\mu^{III} - \mu^{I})$$
$$+ \tfrac{n}{2}\gamma^{I} f^{IV}\chi^{III}\overset{0}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})\Big) Q$$

$$+\left(-\gamma^{I}V^{I}-nf^{I}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{IV})-\tfrac{n}{2}A^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{IV})\right.$$
$$\left.-\tfrac{n}{2}B^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})+2C^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\right)r$$
$$+\left(-C^{I}V^{I}+\tfrac{n}{2}\alpha^{I}f^{II}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\right.$$
$$\left.\left.+\tfrac{n}{2}\beta^{I}f^{III}\chi^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})+2\gamma^{I}(\mu^{IV}-\mu^{I})\right)R\right)e^{V^{I}t}$$
$$= constante \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

XCVI.

Qu'on multiplie l'équation (2.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & qu'on y ajoute l'équation (3.°), on aura

$$\left(M^{II2}-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\right)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{I}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{I},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{II})\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{III}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{II})\right)$$
$$(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{II}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{II})-(\mu^{II}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{II})\right)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

De même, en multipliant l'équation (4.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & y ajoutant l'équation (5.°), on aura

$$\left(M^{III2}-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\right)(B^{I}\pm\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{I}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{I},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right)\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{III})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{II}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{III})\right)(A^{I}\pm\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{IV}\chi^{III}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{IV},a^{III})-(\mu^{III}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{o}{\Pi}1(a^{IV},a^{III})\right)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (R)$$

Enfin multipliant l'équation (6.°) par $\pm\sqrt{-1}$, & y ajoutant l'équation (7.°), on aura

$$\left(M^{IV2}-(\mu^{IV}-\mu^{I}\pm V^{I}\sqrt{-1})^{2}\right)(C^{I}\pm\gamma^{I}\sqrt{-1})$$

$$-nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}}\pm V^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{IV}})\right)$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}}\pm V^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{IV}})\right)(A^{\mathrm{I}}\pm\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{n}{2}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{IV}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})-(\mu^{\mathrm{IV}}-\mu^{\mathrm{I}}\pm V^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})\right.$$
$$\left.\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{IV}})\right)(B^{\mathrm{I}}\pm\beta^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (S)$$

Chacune de ces trois équations en vaut deux, comme l'on voit, à cause de l'ambiguité du ſigne de $\sqrt{-1}$.

Maintenant il eſt viſible par l'équation (1.°), que ſi n étoit $=0$: on auroit: $V^{\mathrm{I}2}+M^{\mathrm{I}2}=0$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $M^{\mathrm{I}2}=\mu^{\mathrm{I}2}(1-n\zeta^{\mathrm{I}})$, art. LXXIX) $V^{\mathrm{I}2}+\mu^{\mathrm{I}2}=0$; & $V^{\mathrm{I}2}=-\mu^{\mathrm{I}2}$.

Suppoſons donc en général .... $V^{\mathrm{I}2}=-\mu^{\mathrm{I}2}(1-nv^{\mathrm{I}})$; & l'équation dont nous parlons ſe changera en celle-ci;

$$\mu^{\mathrm{I}2}(v^{\mathrm{I}}-\zeta^{\mathrm{I}})-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{I}})A^{\mathrm{I}}+\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{I}})\alpha^{\mathrm{I}}V^{\mathrm{I}}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})B^{\mathrm{I}}+\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{I}})\beta^{\mathrm{I}}V^{\mathrm{I}}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})C^{\mathrm{I}}+\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{I}})\delta^{\mathrm{I}}V^{\mathrm{I}}\right)$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (T)$$

XCVII.

L'équation $V^{\mathrm{I}2}=-\mu^{\mathrm{I}2}(1-nv^{\mathrm{I}})$ donne $V^{\mathrm{I}}=\mu^{\mathrm{I}}(1-\frac{n}{2}v^{\mathrm{I}})\sqrt{-1}$; donc $V^{\mathrm{I}}\sqrt{-1}=-\mu^{\mathrm{I}}(1-\frac{1}{2}nv^{\mathrm{I}})$; donc ſubſtituant cette valeur dans l'équation (Q), auſſi bien que celle de $M^{\mathrm{II}2}$ qui eſt $\mu^{\mathrm{II}2}(1-n\zeta^{\mathrm{II}})$ (art. XXIX), on aura:

$$\left(\mu^{\mathrm{II}2}(1-n\zeta^{\mathrm{II}})-\left(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}\mp\mu^{\mathrm{I}}(1-\tfrac{1}{2}nv^{\mathrm{I}})\right)^2\right)(A^{\mathrm{I}}\pm\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-1})$$
$$-nf^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})-\left(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}\mp\mu^{\mathrm{I}}(1-\tfrac{1}{2}nv^{\mathrm{I}})\right)\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}nf^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})\mp(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}\mp\mu^{\mathrm{I}}(\mathrm{I}-\tfrac{1}{2}nv^{\mathrm{I}}))\right.$$
$$\left.\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})\right)(B^{\mathrm{I}}\pm\beta^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})$$
$$-\tfrac{1}{2}nf^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})-(\mu^{\mathrm{II}}-\mu^{\mathrm{I}}\mp\mu^{\mathrm{I}}(\mathrm{I}-\tfrac{1}{2}nv^{\mathrm{I}}))\right.$$
$$\left.\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})\right)(C^{\mathrm{I}}\pm\gamma^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})=0.$$

Donc 1.° ſi on prend le ſigne ſupérieur, & qu'on néglige les termes affectés de n, on aura $(\mu^{\mathrm{II}2}-(\mu^{\mathrm{II}}-2\mu^{\mathrm{I}})^2)$ $(A^{\mathrm{I}}+\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})=0$; ce qui donne $A^{\mathrm{I}}+\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}}=0$, & $\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}}=-A^{\mathrm{I}}$.

2.° Si on prend le ſigne inférieur, & qu'après avoir ôté ce qui ſe détruit, on diviſe toute l'équation par n, on aura, en négligeant toujours les termes affectés de n,

$$\mu^{\mathrm{II}2}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}}v^{\mathrm{I}}-\zeta^{\mathrm{II}}\right)(A^{\mathrm{I}}-\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})-f^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{II}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right.$$
$$\left.-\mu^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{II}})\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{II}}(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}})-\mu^{\mathrm{II}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{III}},a^{\mathrm{II}}))(B^{\mathrm{I}}-\beta^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{II}}(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}})-\mu^{\mathrm{I}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{II}}))(C^{\mathrm{I}}-\gamma^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{V})$$

On tirera de même de l'équation (R)

$$\beta^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}}=-B^{\mathrm{I}},\ \&$$
$$\mu^{\mathrm{III}2}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{III}}}v^{\mathrm{I}}-\zeta^{\mathrm{III}}\right)(B^{\mathrm{I}}-\beta^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})-f^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{III}}\left(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\right.$$
$$\left.-\mu^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{I}},a^{\mathrm{III}})\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{III}}(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{III}})-\mu^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{II}},a^{\mathrm{III}}))(A^{\mathrm{I}}-\alpha^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{III}}(\overset{\circ}{\Psi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{III}})-\mu^{\mathrm{III}}\overset{\circ}{\Pi}\mathrm{I}(a^{\mathrm{IV}},a^{\mathrm{III}}))(C^{\mathrm{I}}-\gamma^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}})$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{U})$$

Et de l'équation (S)

$$\gamma^{\mathrm{I}}\sqrt{-\mathrm{I}}=-C^{\mathrm{I}},\ \&$$

$$\mu^{IV2}\left(\frac{\mu^{I}}{\mu^{IV}}v^{I}-\mathcal{C}^{IV}\right)(C^{I}-\gamma^{I}\sqrt{-1})-f^{I}\chi^{IV}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{I},a^{IV})\right.$$
$$\left.-\mu^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{IV})\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{II}\chi^{IV}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{IV})-\mu^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{IV})\right)(A^{I}-\alpha^{I}\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}f^{III}\chi^{IV}\left(\overset{o}{\Psi}1(a^{III},a^{IV})-\mu^{IV}\overset{o}{\Pi}1(a^{III},a^{IV})\right)(B^{I}-\beta^{I}\sqrt{-1})$$
$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{W})$$

XCVIII.

Soit fait pour plus de simplicité,

$$(1,2)=(\overset{o}{\Psi}1(a^{I},a^{II})-\mu^{II}\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{II})$$
$$(1,3)=\overset{o}{\Psi}1(a^{I},a^{III})-\mu^{III}\overset{o}{\Pi}1(a^{I},a^{III})$$
$(2,1)=\overset{o}{\Psi}1(a^{II},a^{I})-\mu^{I}\overset{o}{\Pi}1(a^{II},a^{I})$, & ainsi des autres.

Soit de plus . . . . $\rho=\mu^{I}v^{I}$

On aura, en faisant ces substitutions dans les équations (V), (U), (W), & mettant à la place de $\alpha^{I}\sqrt{-1}$, $\beta^{I}\sqrt{-1}$, $\gamma^{I}\sqrt{-1}$, leurs valeurs $-A^{I}$, $-B^{I}$, $-C^{I}$, les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&2\mu^{II2}\left(\frac{\rho}{\mu^{III}}-\mathcal{C}^{II}\right)A^{I}-f^{I}\chi^{II}(1,2)-f^{III}\chi^{II}(3,2)B^{I}-f^{IV}\chi^{II}(4,2)C^{I}=0\\
&2\mu^{III2}\left(\frac{\rho}{\mu^{III}}-\mathcal{C}^{III}\right)B^{I}-f^{I}\chi^{III}(1,3)-f^{II}\chi^{III}(2,3)A^{I}-f^{IV}\chi^{III}(4,3)C^{I}=0\\
&2\mu^{IV2}\left(\frac{\rho}{\mu^{IV}}-\mathcal{C}^{IV}\right)C^{I}-f^{I}\chi^{IV}(1,4)-f^{II}\chi^{IV}(2,4)A^{I}-f^{III}\chi^{IV}(3,4)B^{I}=0
\end{aligned}\right\}(\mathrm{X})$$

D'où l'on tirera facilement les valeurs de A^{I}, B^{I}, C^{I}.

Or, en négligeant les termes affectés de n, on a $V^{I}=\mu^{I}\sqrt{-1}$ (art. préc.); donc puisque $\alpha^{I}=-\frac{A^{I}}{\sqrt{-1}}$ on aura $\alpha^{I}V^{I}=-\mu^{I}A^{I}$; & de même $\beta^{I}V^{I}=-\mu^{I}B^{I}$, $\gamma^{I}V^{I}=-\mu^{I}C^{I}$. Donc l'équation (T) de l'article XCVI deviendra, après toutes les substitutions,

$$2\mu^{\mathrm{I}2}\left(\frac{\rho}{\mu^{\mathrm{I}}}-6^{\mathrm{I}}\right)-f^{\mathrm{II}}\chi^{\mathrm{I}}(2,1)A^{\mathrm{I}}-f^{\mathrm{III}}\chi^{\mathrm{I}}(3,1)B^{\mathrm{I}}$$
$$-f^{\mathrm{IV}}\chi^{\mathrm{I}}(4,1)C^{\mathrm{I}}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (Y);$$

c'eſt l'équation qui donnera la valeur de ρ.

XCIX.

Soit, pour abréger, $K^{\mathrm{I}}=2\dfrac{\frac{\rho}{\mu^{\mathrm{I}}}-6^{\mathrm{I}}}{\chi^{\mathrm{I}}}$, $K^{\mathrm{II}}=2\dfrac{\frac{\rho}{\mu^{\mathrm{II}}}-6^{\mathrm{II}}}{\chi^{\mathrm{II}}}$ & ainſi des autres; les équations (X) donneront, après avoir mis au lieu de $f^{\mathrm{I}}, f^{\mathrm{II}}$, &c. leurs valeurs approchées $\mu^{\mathrm{I}2}, \mu^{\mathrm{II}2}$, &c. (art. XLV).

$$A^{\mathrm{I}}=\Big((1,2)K^{\mathrm{III}}K^{\mathrm{IV}}-(1,2)(3,4)(4,3)+(1,3)(3,2)K^{\mathrm{IV}}$$
$$+(1,3)(3,4)(4,2)+(1,4)(3,2)(4,3)$$
$$+(1,4)(4,2)K^{\mathrm{III}}\Big)\frac{\mu^{\mathrm{I}2}}{\mu^{\mathrm{II}2}}$$

$$B^{\mathrm{I}}=\Big((1,3)K^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{IV}}+(1,4)(4,3)K^{\mathrm{II}}+(1,2)(2,3)K^{\mathrm{IV}}$$
$$+(1,4)(2,3)(4,2)+(1,2)(2,4)(4,3)$$
$$-(1,3)(2,4)(4,2)\Big)\frac{\mu^{\mathrm{I}2}}{\mu^{\mathrm{III}2}}$$

$$C^{\mathrm{I}}=\Big((1,4)K^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{III}}+(1,3)(3,4)K^{\mathrm{II}}-(1,4)(2,3)(3,2)$$
$$+(1,2)(2,3)(3,4)+(1,3)(2,4)(3,2)$$
$$+(1,2)(2,4)K^{\mathrm{III}}\Big)\frac{\mu^{\mathrm{I}2}}{\mu^{\mathrm{IV}2}}$$

Chacune de ces quantités étant diviſée par

$$K^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{III}}K^{\mathrm{IV}}-(3,4)(4,3)K^{\mathrm{II}}-(2,3)(3,2)K^{\mathrm{IV}}$$
$$-(2,3)(3,4)(4,2)-(2,4)(3,2)(4,3)$$
$$-(2,4)(4,2)K^{\mathrm{III}}$$

Ces valeurs étant enſuite ſubſtituées dans l'équation (Y), on aura, après les réductions:

$$K^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{II}}K^{\mathrm{III}}K^{\mathrm{IV}}-(3,4)(4,3)K^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{II}}-(2,4)(4,2)K^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{III}}$$
$$-(2,3)(3,2)K^{\mathrm{I}}K^{\mathrm{IV}}$$

$$-(4,1)(1,4)K^{II}K^{III}-(3,1)(1,3)K^{II}K^{IV}$$
$$-(2,1)(1,2)K^{III}K^{IV}$$
$$-((2,3)(3,4)(4,2)+(2,4)(3,2)(4,3))K^{I}$$
$$-((3,1)(1,4)(4,3)+(4,1)(1,3)(3,4))K^{II}$$
$$-((2,1)(1,4)(4,2)+(4,1)(1,2)(2,4))K^{III}$$
$$-((2,1)(1,3)(3,2)+(3,1)(1,2)(2,3))K^{IV}$$
$$+(2,1)(1,2)(3,4)(4,3)-(2,1)(1,3)(3,4)(4,2)$$
$$-(2,1)(1,4)(3,2)(4,3)-(3,1)(1,4)(2,3)(4,2)$$
$$-(3,1)(1,2)(2,4)(4,3)+(3,1)(1,3)(2,4)(4,2)$$
$$+(4,1)(1,4)(2,3)(3,2)-(4,1)(1,2)(2,3)(3,4)$$
$$-(4,1)(1,3)(2,4)(3,2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Z)$$

Équation qui, en remettant au lieu de K^{I}, K^{II}, leurs valeurs, & ordonnant les termes par rapport à ρ, montera au quatrième degré, & donnera par conséquent quatre valeurs de ρ, que nous dénoterons par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$, $\rho 4$.

C.

Les calculs que nous venons de faire dans ce paragraphe n'appartiennent proprement qu'au premier ſatellite; mais il eſt aiſé de les appliquer à chacun des trois autres, ſuivant les remarques faites ailleurs. En effet pour les appliquer, par exemple au ſecond ſatellite, il n'y aura qu'à marquer de deux traits toutes les lettres qui ne ſont marquées que d'un ſeul, & réciproquement ôter un trait à celles qui en ont deux, & ainſi de ſuite : ainſi dans l'équation (Z), il ne faudra qu'échanger entr'elles les lettres K^{I}, K^{II}, & les nombres 1, 2. Or on verra aiſément que ceete permutation ne produira aucun changement dans l'équation; d'où il s'enſuit que les valeurs de ρ feront les mêmes pour le ſecond ſatellite que pour le premier. On en dira autat par rapport au troiſième & au quatrième, deſorte que l'équation (Z) ſervira pour tous les quatre satellites, & c'est ce qui fait que cette équation monte au quatrième degré.

C I.

Reprenons maintenant l'équation (P) de l'article XCV, & substituons-y, au lieu de α^{I}, β^{I}, γ^{I}, leurs valeurs $A^{I}\sqrt{-1}$, $B^{I}\sqrt{-1}$, $C^{I}\sqrt{-1}$, (art. XCVII), & au lieu de V^{I} sa valeur $\mu^{I}(1-\frac{1}{2}nv^{I})\sqrt{-1}$, (art. XCVII), c'est-à-dire, à cause de $\mu^{I}v^{I}=\rho$ (art. XCVIII), $(\mu^{I}-\frac{n}{2}\rho)\sqrt{-1}$, on aura, en négligeant pour tout les termes affectés de n, excepté dans $e^{V^{I}t}$:

$$\left(\frac{dx^{\prime I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}\pm\frac{dp}{dt}\sqrt{-1}\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+\frac{dq}{dt}\sqrt{-1}\right)\right.$$
$$+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+\frac{dr}{dt}\sqrt{-1}\right)-\mu^{I}x^{\prime I}\sqrt{-1}$$
$$+A^{I}(2\mu^{II}-\mu^{I})(p-P\sqrt{-1})+B^{I}(2\mu^{III}-\mu^{I})(q-Q\sqrt{-1})$$
$$\left.+C^{I}(2\mu^{IV}-\mu^{I})(r-R\sqrt{-1})\right)e^{(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}}=constante.$$

C'est-à-dire, en mettant au lieu de $e^{(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}}$ sa valeur $cos.(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t+sin.(\mu^{I}-\frac{1}{2}n\rho)t.\sqrt{-1}$,

$$\left(\frac{dx^{\prime I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}+(2\mu^{II}-\mu^{I})p\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+(2\mu^{III}-\mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left.+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+(2\mu^{IV}-\mu^{I})r\right)\right)cos.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho^{I})t+$$

$$\left(\mu^{I}x^{\prime I}-A^{I}\left(\frac{dp}{dt}-(2\mu^{II}-\mu^{I})P\right)-B^{I}\left(\frac{dq}{dt}-(2\mu^{III}-\mu^{I})Q\right)\right.$$
$$\left.-C^{I}\left(\frac{dr}{dt}-(2\mu^{IV}-\mu^{I})R\right)\right)sin.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho^{I})t+$$

$$\left(\frac{dx^{\prime I}}{dt}+A^{I}\left(\frac{dP}{dt}+(2\mu^{II}-\mu^{I})p\right)+B^{I}\left(\frac{dQ}{dt}+(2\mu^{III}-\mu^{I})q\right)\right.$$
$$\left.+C^{I}\left(\frac{dR}{dt}+(2\mu^{IV}-\mu^{I})r\right)sin.(\mu^{I}-\tfrac{n}{2}\rho)t.\sqrt{-1}\right.-$$

$$\left(\mu^{\mathrm{I}}x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})P\right) - B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})R\right)\right) cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t\sqrt{-1}$$
$$= constante.$$

équation qui, à cause du radical $\sqrt{-1}$, lequel peut avoir indifféremment les signes $+$ ou $-$, se decompose en ces deux-ci.

$$\left(\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt} + A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dP}{dt} + (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})p\right) + B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dQ}{dt} + (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})q\right)\right.$$
$$\left. + C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dR}{dt} + (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})q\right)\right) cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t +$$

$$\left(\mu^{\mathrm{I}}x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})P\right) - B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})R\right)\right) sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t = D^{\mathrm{I}} \ldots (\alpha)$$

&

$$\left(\frac{dx^{\cdot\mathrm{I}}}{dt} + A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dP}{dt} + (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})p\right) + B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dQ}{dt} + (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})q\right)\right.$$
$$\left. + C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dR}{dt} + (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})r\right)\right) sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t -$$

$$\left(\mu^{\mathrm{I}}x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})P\right) - B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})Q\right)\right.$$
$$\left. - C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dr}{dt} - (\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})R\right)\right) cos(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t = E^{\mathrm{I}} \ldots (\beta)$$

D^{I} & E^{I} étant deux constantes arbitraires que nous déterminerons dans un moment.

On aura donc par là

$$\mu^{\mathrm{I}}x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}\left(\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})P\right) - B^{\mathrm{I}}\left(\frac{dq}{dt} - (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})Q\right)$$
$$- C^{\mathrm{I}}\left(\frac{dr}{dt} - (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})R\right) = D^{\mathrm{I}}\, sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t$$
$$- E^{\mathrm{I}}\, cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Équation qui suffira pour trouver la valeur de $x^{\cdot\mathrm{I}}$, comme on le verra ci-après.

CII.

Soit, lorsque $t = 0$,

$x.^{\mathrm{I}} = X^{\mathrm{I}}$, $x.^{\mathrm{II}} = X^{\mathrm{II}}$, $x.^{\mathrm{III}} = X^{\mathrm{III}}$, $x.^{\mathrm{IV}} = X^{\mathrm{IV}}$, &

$\frac{dx.^{\mathrm{I}}}{dt} = Y^{\mathrm{I}}$, $\frac{dx.^{\mathrm{II}}}{dt} = Y^{\mathrm{III}}$, $\frac{dx.^{\mathrm{III}}}{dt} = Y^{\mathrm{III}}$, $\frac{dx.^{\mathrm{IV}}}{dt} = Y^{\mathrm{IV}}$;

On aura (art. XCII), $P = X^{\mathrm{II}}$, $Q = X^{\mathrm{III}}$, $R = X^{\mathrm{IV}}$

$p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

Ensute $\frac{dP}{dt} = Y^{\mathrm{II}}$, $\frac{dQ}{dt} = Y^{\mathrm{III}}$, $\frac{dR}{dt} = Y^{\mathrm{IV}}$,

$\frac{dp}{dt} = (\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\, X^{\mathrm{II}}$, $\frac{dq}{dt} = (\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\, X^{\mathrm{III}}$,

$\frac{dr}{dt} = (\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\, X^{\mathrm{IV}}$.

Donc substituant ces valeurs dans les équations (α) & (β), & faisant $t = 0$, on aura:

$D^{\mathrm{I}} = Y^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{IV}}$, &

$E^{\mathrm{I}} = -(\mu^{\mathrm{I}} X^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{II}} X^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{III}} X^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{IV}} X^{\mathrm{IV}})$

CIII.

Soit maintenant, pour abréger,

$\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{II}} - \mu^{\mathrm{I}})\, P = (P)$, $\frac{dp}{dt} - (2\mu^{\mathrm{III}} - \mu^{\mathrm{I}})\, Q = (Q)$

& $\frac{dr}{dt} - (2\mu^{\mathrm{IV}} - \mu^{\mathrm{I}})\, R = (R)$,

L'équation (γ) deviendra:

$$\mu^{\mathrm{I}} x.^{\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}(P) - B^{\mathrm{I}}(Q) - C^{\mathrm{I}}(R) = D^{\mathrm{I}} \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)\, t$$
$$- E^{\mathrm{I}} \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)\, t$$

Substituons successivement, dans cette équation, au lieu de ρ, ses quatre valeurs $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$, $\rho 4$ (art. XCIX), on aura:

$$\mu^{\mathrm{I}} x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}1(P) - B^{\mathrm{I}}1(Q) - C^{\mathrm{I}}1(R) = D^{\mathrm{I}}1\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t$$
$$- E^{\mathrm{I}}1\, \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t$$

$$\mu^{\mathrm{I}} x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}2(P) - B^{\mathrm{I}}2(Q) - C^{\mathrm{I}}2(R) = D^{\mathrm{I}}2\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)t$$
$$- E^{\mathrm{I}}2\, \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)t$$

$$\mu^{\mathrm{I}} x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}3(P) - B^{\mathrm{I}}3(Q) - C^{\mathrm{I}}3(R) = D^{\mathrm{I}}3\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)t$$
$$- E^{\mathrm{I}}3\, \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)t$$

$$\mu^{\mathrm{I}} x^{\cdot\mathrm{I}} - A^{\mathrm{I}}4(P) - B^{\mathrm{I}}4(Q) - C^{\mathrm{I}}4(R) = D^{\mathrm{I}}4\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)t$$
$$- E^{\mathrm{I}}4\, \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)t$$

($A^{\mathrm{I}}1$, $B^{\mathrm{I}}1$, $C^{\mathrm{I}}1$, $D^{\mathrm{I}}1$, $E^{\mathrm{I}}1$, $A^{\mathrm{I}}2$, $B^{\mathrm{I}}2$, $C^{\mathrm{I}}2$, $D^{\mathrm{I}}2$, $E^{\mathrm{I}}2$, &c. étant ce que deviennent les quantités A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, E^{I}, lorſque p devient $\rho 1$, $\rho 2$, &c.)

Donc éliminant de ces quatre équations les trois inconnues (P), (Q), (R) on aura la valeurs de $x^{\cdot\mathrm{I}}$.

C I V.

Pour cet effet, je multiplie la ſeconde équation par α^{I}, la troiſième par β^{I}, la quatrième par γ^{I} (α^{I}, β^{I}, γ^{I} étant de nouvelles indéterminées); après quoi je les ajoute toutes quatre enſemble, & je fais évanouir ſéparément chacun des coefficiens de (P), (Q), (R) j'ai

$$\left.\begin{aligned} A^{\mathrm{I}}1 + \alpha^{\mathrm{I}} A^{\mathrm{I}}2 + \beta^{\mathrm{I}} A^{\mathrm{I}}3 + \gamma^{\mathrm{I}} A^{\mathrm{I}}4 &= 0 \\ B^{\mathrm{I}}1 + \alpha^{\mathrm{I}} B^{\mathrm{I}}2 + \beta^{\mathrm{I}} B^{\mathrm{I}}3 + \gamma^{\mathrm{I}} B^{\mathrm{I}}4 &= 0 \\ C^{\mathrm{I}}1 + \alpha^{\mathrm{I}} C^{\mathrm{I}}2 + \beta^{\mathrm{I}} C^{\mathrm{I}}3 + \gamma^{\mathrm{I}} C^{\mathrm{I}}4 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

&

$$x^{\cdot\mathrm{I}} = \frac{D^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}}(1 + \alpha^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{I}} + \gamma^{\mathrm{I}})}\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t$$
$$- \frac{E^{\mathrm{I}}1}{\mu^{\mathrm{I}}(1 + \alpha^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{I}} + \gamma^{\mathrm{I}})}\, \mathit{cos.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t$$
$$+ \frac{\alpha^{\mathrm{I}} D^{\mathrm{I}}2}{\mu^{\mathrm{I}}(1 + \alpha^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{I}} + \gamma^{\mathrm{I}})}\, \mathit{sin.}(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)t$$

$$- \frac{\alpha^{\mathrm{I}} E^{\mathrm{I}} 2}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t$$
$$+ \frac{\beta^{\mathrm{I}} D^{\mathrm{I}} 3}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})} \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)\, t$$
$$- \frac{\beta^{\mathrm{I}} E^{\mathrm{I}} 3}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t$$
$$+ \frac{\gamma^{\mathrm{I}} D^{\mathrm{I}} 4}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})} \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)\, t$$
$$- \frac{\beta^{\mathrm{I}} E^{\mathrm{I}} 4}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})} \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)\, t$$

C V.

On peut ſimplifier cette expreſſion de x^{I}, en ſuppoſant en général $D^{\mathrm{I}} = -\delta^{\mathrm{I}} \sin.\omega^{\mathrm{I}}$, $E^{\mathrm{I}} = -\delta^{\mathrm{I}} \cos.\omega^{\mathrm{I}}$; ce qui donne $\delta^{\mathrm{I}} = \sqrt{D^{\mathrm{I}2} + E^{\mathrm{I}2}}$, & $tang.\,\omega^{\mathrm{I}} = \frac{D^{\mathrm{I}}}{E^{\mathrm{I}}}$, ſavoir :

$$\delta^{\mathrm{I}} = \sqrt{(Y^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{IV}})^2 + (\mu^{\mathrm{I}} X^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}} X^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{III}} X^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{IV}} X^{\mathrm{IV}})^2}$$

$$\&\ tang.\,\omega^{\mathrm{I}} = -\frac{Y^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} Y^{\mathrm{IV}}}{\mu^{\mathrm{I}} X^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}} X^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{III}} X^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{IV}} X^{\mathrm{IV}}}$$

Par ce moyen, on aura :

$$D^{\mathrm{I}} \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)\, t - E^{\mathrm{I}} \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)\, t = \delta^{\mathrm{I}} \cos.\big((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho)\, t + \omega^{\mathrm{I}}\big),$$

& de là :

$$D^{\mathrm{I}} 1 \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t - E^{\mathrm{I}} 1 \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t$$
$$= \delta^{\mathrm{I}} 1 \cos.\big((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t + \omega 1^{\mathrm{I}}\big)$$
$$D^{\mathrm{I}} 2 \sin.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)\, t - E^{\mathrm{I}} 1 \cos.(\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t$$
$$= \delta^{\mathrm{I}} 2 \cos.\big((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)\, t + \omega^{\mathrm{I}} 2\big),$$ & ainſi de ſuite.

Donc ſi on fait, pour plus de ſimplicité,

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} 1 = \frac{\delta^{\mathrm{I}} 1}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}, \quad \varepsilon^{\mathrm{I}} 2 = \frac{\alpha^{\mathrm{I}} \delta^{\mathrm{I}} 2}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}$$

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} 3 = \frac{\beta^{\mathrm{I}} \delta^{\mathrm{I}} 1}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}, \quad \varepsilon^{\mathrm{I}} 4 = \frac{\gamma^{\mathrm{I}} \delta^{\mathrm{I}} 4}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}$$

On aura

$$x'^{\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{I}}1 \, cos.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t + \omega^{\mathrm{I}}1\right) + \varepsilon^{\mathrm{I}}2 \, cos.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)t + \omega^{\mathrm{I}}2\right)t + \varepsilon^{\mathrm{I}}3 \, cos.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)\,t + \omega^{\mathrm{I}}3\right) + \varepsilon^{\mathrm{I}}4 \, cos.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)\,t + \omega^{\mathrm{I}}4\right)t.$$

C V I.

SCHOLIE. A l'égard des valeurs de $\alpha^{\mathrm{I}}, \beta^{\mathrm{I}}, \gamma^{\mathrm{I}}$, on les trouvera aisément par résolution des équations (δ); mais on pourroit encore se servir d'une autre méthode assez simple, que j'exposerai ici en peu de mots.

Qu'on multiplie la seconde de ces équations par b, & la troisième par c (b & c étant deux indéterminées) & qu'on les ajoute toutes ensemble, on aura

$$A^{\mathrm{I}}1 + bB^{\mathrm{I}}1 + cC^{\mathrm{I}}1 + (A^{\mathrm{I}}2 + bB^{\mathrm{I}}2 + cC^{\mathrm{I}}2)\alpha^{\mathrm{I}} + (A^{\mathrm{I}}3 + bB^{\mathrm{I}}3 + cC^{\mathrm{I}}3)\beta^{\mathrm{I}} + (A^{\mathrm{I}}4 + bB^{\mathrm{I}}4 + cC^{\mathrm{I}}4)\gamma^{\mathrm{I}} = 0.$$

Or, pour avoir la valeur de α^{I}, on fera,

$$A^{\mathrm{I}}3 + bB^{\mathrm{I}}3 + cC^{\mathrm{I}}3 = 0 \quad \& \quad A^{\mathrm{I}}4 + bB^{\mathrm{I}}4 + cC^{\mathrm{I}}4 = 0;$$

& l'on aura

$$\alpha^{\mathrm{I}} = -\frac{A^{\mathrm{I}}1 + bB^{\mathrm{I}}1 + cC^{\mathrm{I}}1}{A^{\mathrm{I}}2 + bB^{\mathrm{I}}2 + cC^{\mathrm{I}}2}.$$

Les quantités b & c doivent donc être telles que l'on ait $A^{\mathrm{I}} + bB^{\mathrm{I}} + cC^{\mathrm{I}} = 0$, en mettant successivement au lieu de ρ, $\rho 3$ & $\rho 4$;

Or l'équation $A^{\mathrm{I}} + bB^{\mathrm{I}} + cC^{\mathrm{I}} = 0$, si l'on y substitue les valeurs de $A^{\mathrm{I}}, B^{\mathrm{I}}, C^{\mathrm{I}}$ (art. XCIX) & qu'on l'ordonne par rapport à ρ, sera de cette forme $\rho^2 - M\rho + N = 0$, dont les racines devront être $\rho 3$ & $\rho 4$; c'est pourquoi l'on aura $M = \rho 3 + \rho 4$, & $N = \rho 3 \rho 4$, d'où l'on tirera b & c; on trouvera de la même manière les valeurs de β^{I} & de γ^{I}.

CVII.

Ayant trouvé la valeur de $x^{\cdot \mathrm{I}}$, on trouvera celle de $y^{\cdot \mathrm{I}}$, par l'équation (H) de l'article LXXVI;

On aura donc, en négligeant les termes affectés de n.

$$y = -2\varepsilon^{\mathrm{I}}1\,\mathit{fin}.((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 1)t + \omega^{\mathrm{I}}1) - 2\varepsilon^{\mathrm{I}}2\,\mathit{fin}.((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 2)t + \omega^{\mathrm{I}}2) - 2\varepsilon^{\mathrm{I}}3\,\mathit{fin}.((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega^{\mathrm{I}}3) - 2\varepsilon^{\mathrm{I}}4 \times \mathit{fin}.((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 4)t + \omega^{\mathrm{I}}4).$$

CVIII.

On aura des expreſſions ſemblables pour les valeurs de $x^{\cdot \mathrm{II}}$, $y^{\cdot \mathrm{II}}$, &c. Voyez la remarque de l'article C.

CIX.

Pour peu qu'on examine ces valeurs de $x^{\cdot}$ & de $y^{\cdot}$ on verra aiſément qu'elles renferment, pour ainſi dire; quatre équations du centre priſes dans des ellipſes mobiles, dont les excentricités ſeroient $n\varepsilon 1$, $n\varepsilon 2$, $n\varepsilon 3$, $n\varepsilon 4$, & les anomalies moyennes $(\mu - \tfrac{n}{2}\rho 1)t + \omega^{\mathrm{I}}$, $(\mu - \tfrac{n}{2}\rho 2)t + \omega 2$, $(\mu - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega 3$, $(\mu - \tfrac{n}{2}\rho 4)t + \omega 4$; d'où l'on voit que les mouvemens de ces anomalies feront au mouvement moyen du ſatellite comme $1 - \tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 1}{\mu}$, $1 - \tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 2}{\mu}$, $1 - \tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 3}{\mu}$, & $1 - \tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 4}{\mu}$ à 1; par conſéquent les apſides avanceront de $\tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 1}{\mu}360^{\circ}$, $\tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 2}{\mu}360^{\circ}$, $\tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 3}{\mu}360^{\circ}$, $\tfrac{n}{2}.\tfrac{\rho 4}{\mu}360^{\circ}$ à chaque révolution du ſatellite.

On pourroit, par la méthode de l'article III, réduire ces quatre équations à une ſeule, dans laquelle l'excentricité feroit variable, & le mouvement des apſides non uniforme ; mais je crois qu'il eſt plus commode de les laiſſer ſous leur forme naturelle.

C X.

On ſuivra une méthode analogue pour trouver la valeur de z^{I}, au moyen des équations (N 1), (N 2), &c. de l'article XCI. Mais ſans entrer dans de nouveaux calculs à cet égard, il ſuffira de remarquer que les équations dont nous parlons peuvent ſe déduire des équations (M 1), (M 2) &c en changeant x en z, M en N, Ψ en Γ, & ſuppoſant nulles toutes les quantités marquées par la lettre $\overset{\circ}{\Pi}$; d'où il s'enſuit.

1.° Que ſi l'on fait (art. XCVIII)

$$(1, 2) = \overset{\circ}{\Gamma}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$$

$$(1, 3) = \overset{\circ}{\Gamma}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$$

$$(2, 1) = \overset{\circ}{\Gamma}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})\ \&c.$$

Enſuite

$$K^{\mathrm{I}} = -2\,\frac{\frac{\sigma}{\mu^{\mathrm{I}}} - \pi^{\mathrm{I}}}{\chi^{\mathrm{I}}},\quad K^{\mathrm{II}} = -2\,\frac{\frac{\sigma}{\mu^{\mathrm{II}}} - \pi^{\mathrm{II}}}{\chi^{\mathrm{II}}}\ \&c.$$

On aura pour A^{I}, B^{I}, C^{I} les mêmes expreſſions que dans l'article XCIX, & la valeur de σ devra ſe déterminer au moyen de l'équation (Z).

2.° Que ſi on ſuppoſe, lorſque $t = 0$,

$$z^{\mathrm{I}} = Z^{\mathrm{I}},\ z^{\mathrm{II}} = Z^{\mathrm{II}},\ z^{\mathrm{III}} = Z^{\mathrm{III}},\ z^{\mathrm{IV}} = Z^{\mathrm{IV}},$$

$$\frac{dz^{\mathrm{I}}}{dt} = V^{\mathrm{I}},\ \frac{dz^{\mathrm{II}}}{dt} = V^{\mathrm{II}},\ \frac{dz^{\mathrm{III}}}{dt} = V^{\mathrm{III}},\ \frac{dz^{\mathrm{IV}}}{dt} = V^{\mathrm{IV}},$$

& qu'on faſſe

$$x^{\mathrm{I}} = \sqrt{(V^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{IV}})^2\,\mu^{\mathrm{I}} Z^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{II}} Z^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{III}} Z^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{IV}} Z^{\mathrm{IV}})^2}$$

$$\textit{cotang.}\ \eta^{\mathrm{I}} = \frac{V^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} V^{\mathrm{IV}}}{\mu^{\mathrm{I}} Z^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{II}} Z^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{III}} Z^{\mathrm{III}} + C^{\mathrm{I}} \mu^{\mathrm{IV}} Z^{\mathrm{IV}}}$$

Enſuite

$$\lambda^{\mathrm{I}}1=\frac{\chi^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})},\quad \lambda^{\mathrm{I}}2=\frac{\alpha^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{I}}2}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}$$

$$\lambda^{\mathrm{I}}3=\frac{\beta^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{I}}3}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})},\quad \lambda^{\mathrm{I}}4=\frac{\gamma^{\mathrm{I}}\chi^{\mathrm{I}}4}{\mu^{\mathrm{I}}(1+\alpha^{\mathrm{I}}+\beta^{\mathrm{I}}+\gamma^{\mathrm{I}})}$$

Les quantités, α^{I}, β^{I}, γ^{I} étant déterminées par les équations (δ) de l'article CIV, on aura :

$$z^{\mathrm{I}}=\lambda^{\mathrm{I}}1\,\mathit{fin.}\left((\mu^{\mathrm{I}}+\tfrac{n}{2}\sigma 1)t+\eta^{\mathrm{I}}1\right)+\lambda^{\mathrm{I}}2\,\mathit{fin.}\left((\mu^{\mathrm{I}}+\tfrac{n}{2}\sigma 2)t+\eta^{\mathrm{I}}2\right)$$
$$+\lambda^{\mathrm{I}}3\,\mathit{fin}\left((\mu^{\mathrm{I}}+\tfrac{n}{2}\sigma 3)t+\eta^{\mathrm{I}}3\right)+\lambda^{\mathrm{I}}4\,\mathit{fin.}\left((\mu^{\mathrm{I}}+\tfrac{n}{2}\sigma 4)t+\eta^{\mathrm{I}}4\right)$$

& ainsi des autres quantités z^{II}, z^{III}, z^{IV}, &c.

C X I.

Cette expression de z^{I} est composée, comme l'on voit, de quatre termes, chacun analogue à l'expression de z^{I}, trouvée dans l'article XL, laquelle donne un plan mobile dont l'inclinaison est constante; donc pour trouver la position de l'orbite d'un Satellite quelconque, il n'y aura qu'à imaginer quatre plans passant par le centre de Jupiter, dont le premier se meuve sur celui de l'orbite de cette Planète, en gardant toujours avec lui la même inclinaison; le second se meuve de la même manière sur le premier; le troisième sur le second, & enfin le quatrième qui sera celui de l'orbite du Satellite, se meuve pareillement sur le troisième. Ainsi les quantités $n\lambda 1$, $n\lambda 2$, $n\lambda 3$, $n\lambda 4$, seront les tangentes des inclinaisons du premier plan sur celui de Jupiter, du second sur le premier, du troisième sur le second, & du quatrième sur le troisième, & les angles $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 1)t+\eta 1$, $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 2)t+\eta 2$, $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 3)t+\eta 3$ $(\mu+\frac{n}{2}\sigma 4)t+\eta 4$; seront les distances du satellite aux nœuds du premier plan avec celui de ♃, du second avec le premier, du troisième avec le second, & du quatrième avec le troisième; d'où l'on voit que les nœuds de ces quatre plans rétrograderont pendant une révolution du ſatellite de $\frac{n}{2}.\frac{\sigma 1}{\mu}360^\circ$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma 2}{\mu}360^\circ$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma 3}{\mu}360^\circ$, $\frac{n}{2}.\frac{\sigma 4}{\mu}360$.

Si on vouloit connoître directement la poſition du plan de l'orbite du Satellite, par rapport à celui de l'orbite de Jupiter, on y parviendroit par la méthode de l'article III; car nommant $n\tau$ la tangente de l'inclinaiſon, & Ψ la diſtance du Satellite au nœud aſcendant, on auroit $n\tau = \sqrt{n^2 z^2 + \frac{n^2 dz^2}{d\varphi^2}}$, & $tang.\,\psi = \frac{nz d\varphi}{ndz}$, ſavoir, à cauſe de $\varphi = \mu t + ny$, $\tau = \sqrt{z^2 + \frac{dz^2}{\mu^2 dt^2}}$ & $tang.\,\psi = \frac{mz dt}{az}$ d'ou l'on tire, par les logarithmes,

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\left(\frac{dz}{\mu dt} + z\sqrt{-1}\right) - l\left(\frac{dz}{\mu dt} + z\sqrt{-1}\right)\right)$$

expreſſion dans laquelle les imaginaires ſe détruiront mutuellement, mais qu'il ſera difficile, peut-être impoſſible de réduire à une forme finie. Ainſi je crois qu'il vaudra mieux s'en tenir à la formule de l'article CIX.

C X I I.

Telles ſont les premières valeurs des variables x', y', z dans leſquelles on a négligé les quantités de l'ordre de n. Si on veut y avoir égard, il n'y a qu'à ſubſtituer ces mêmes valeurs dans les équations de l'article LXXVI, & les intégrer enſuite par la méthode ordinaire (art. XXXIV).

Nous n'entrerons point dans ce détail qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul, & qui d'ailleurs ne paroît guères néceſſaire dans la théorie des Satellites.

Il y a cependant encore quelques termes des équations (G), & (K), (art. LXXVI) auxquels il ne feroit peut être pas inutile d'avoir égard; ce ſont ceux qui viennent de l'action du Soleil, & qui renferment les quantités x'^{I}, y'^{I}, z^{I}, multipliés par $coſ.\,2(m - \mu^{\mathrm{I}})t$, ou par $ſin.\,2(m - \mu^{\mathrm{I}})t$;

car en ſubſtituant au lieu de ces quantités, leurs valeurs trouvées ci-deſſus, on aura, à cauſe de m très-petit (article XLVIII), des termes qui augmenteront beaucoup par l'intégration, & qui appartiendront auſſi en quelque manière à la première approximation; je dis *en quelque manière*, parce que ces termes, quoique fort augmentés par l'intégration, ſe trouveront encore aſſez petits par rapport à ceux que nous avons trouvés juſqu'ici.

En effet les termes dont il s'agit étant tous multipliés par $n\,K = \frac{m^2}{\mu^2}$ (Art. XLIX) & devant être diviſés par des quantités de l'ordre de m & de n, ſeront encore après l'intégration de l'ordre de m & par conſéquent très-petits. C'eſt-là la raiſon pour laquelle nous n'avons point eu d'égard à ces ſortes de termes dans les calculs précédens; d'autant plus que notre objet principal eſt de déterminer les inégalités des Satellites cauſées par leur action mutuelle, conformément au Programme de l'Académie. Je pourrai peut-être dans une autre occaſion reprendre plus au long ces recherches.

CXIII.

REMARQUE I. Nous avons vu que les quantités ρ & σ dépendent de deux équations du quatrième degré (art. XCIX). Or, il peut arriver deux cas, qu'il eſt bon d'examiner. Le premier eſt celui où ces équations auroient des racines égales; le ſecond, celui où elles auroient des racines imaginaires.

Voyons donc ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Suppoſons que deux quelconques des valeurs de ρ ſoient égales entr'elles, par exemple $\rho 4 = \rho 3$ On fera $\rho 4 = \rho 3 + i$, i étant une quantité évanouiſſante, & l'on aura (article XCIX).

$A'4 = A'3 + Fi$, $B'4 = B'3 + Gi$, $C'4 = C'3 + Hi$
G, G, H étant les coëficiens de $d\rho 3$ dans les différentielles de $A'3$, $B'3$, $C'3$.

Donc les équations (δ) de l'article CIV deviendront, en faisant $\beta' + \gamma' = b$, & $\gamma' i = c$,

$$A'1 + a'A'2 + bA'3 + cF = 0$$
$$B'1 + a'B'2 + bB'3 + cG = 0$$
$$C1 + a'C'2 + bC'3 + cH = 0$$

d'où l'on tirera α', b, & c.

On aura de même (article CIV)

$\delta'4 = \delta'3 + \Delta i$, & $\omega'4 = \omega'3 + \Omega i$

Δ, & Ω étant pareillement les coëficiens de $d\rho 3$ dans la différentiation de $\delta'3$, & $\omega'3$.

Donc $cos.\left((\mu' - \frac{n}{2}\rho 4)\, t + \omega^{I} 4\right) = cos.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right) + i\left(\frac{n}{2} t - \Omega\right) fin.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right)$.

Donc les termes $\varepsilon^{I} 3\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right) + \varepsilon^{I} 4\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 4)\, t + \omega^{I} 4\right)$ de la valeur de $x^{\cdot I}$ (art. CIV) se changeront en $(\varepsilon^{I} 3 + \varepsilon^{I} 4)\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right) + \varepsilon^{I} 4\, i \left(\frac{n}{2} t - \Omega\right) fin.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right)$.

$$\text{Or } \varepsilon^{I} 3 + \varepsilon^{I} 4 = \frac{(\beta^{I} + \gamma^{I})\, \delta^{I} 3 + \Delta \gamma^{I} i}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + \beta^{I} + \gamma^{I})} = \frac{b\, \delta^{I} 3 + c\Delta}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + b)}$$

$$\& \ \varepsilon^{I} 4\, i = \frac{\delta^{I} 4 \gamma^{I} i}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + \beta^{I} + \gamma^{I})} = \frac{c\, \delta^{I} 3}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + b)}.$$

Donc la valeur de $x^{\cdot I}$ deviendra

$$x^{\cdot I} = \varepsilon^{I} 1\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 1)\, t + \omega^{I} 1\right) + \varepsilon^{I} 2\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 2)\, t + \omega^{I} 2\right) + \frac{b\, \delta^{I} 3 + c\Delta}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + b)}\ cof.\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right)$$
$$+ \frac{c\, \delta^{I} 3}{\mu^{I}(1 + \alpha^{I} + b)} \left(\frac{n}{2} t - \Omega\right) fin\left((\mu^{I} - \frac{n}{2}\rho 3)\, t + \omega^{I} 3\right),$$

Par

Par conséquent celle de y'^{I} sera (art. XC) en négligeant les termes de l'ordre de $ny'^{\mathrm{I}} = -2\,\varepsilon^{\mathrm{I}}1\,\sin.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n}{2}\rho 1)t + \omega^{\mathrm{I}}1\right) - 2\,\varepsilon^{\mathrm{I}}2\,\sin.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \frac{n}{2}\rho 2)t + \omega^{\mathrm{I}}2\right)$

$$- 2\,\frac{b\,\delta^{\mathrm{I}}3 + C\,\Delta}{\mu^{\mathrm{I}}(1 + \alpha^{\mathrm{I}} + b)}\,\sin.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega^{\mathrm{I}}3\right)$$

$$- 2\,\frac{C\,\delta^{\mathrm{I}}3}{\mu^{\mathrm{I}}(1 + \alpha^{\mathrm{I}} + b)}\left(\tfrac{n}{2}t + \delta\right)\cos.\left((\mu^{\mathrm{I}} - \tfrac{n}{2}\rho 3)t + \omega^{\mathrm{I}}3\right).$$

De-là on voit que les valeurs de x', & de y' contiendront dans ce cas un terme multiplié par l'angle t, lequel donnera par conséquent une équation, dont la valeur ira toujours en augmentant.

On résoudra de la même maniere le cas de trois racines égales, & l'on trouvera pour lors dans les valeurs de x', & de y' des termes qui contiendront l'angle t avec son quarré t^2. Et ainsi de suite, s'il y avoit quatre racines égales.

2°. Soient maintenant $\rho 3$, & $\rho 4$ imaginaires, on les mettra d'abord (ce qui est toujours possible comme l'on sait) sous cette forme $\rho 3 = p + q\sqrt{-1}$, & $\rho 4 = p - q\sqrt{-1}$, p, & q étant des quantités réelles; moyennant quoi les quantités $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}3$, $\mathrm{B}^{\mathrm{I}}3$, $\mathrm{C}^{\mathrm{I}}3$, $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}4$, $\mathrm{B}^{\mathrm{I}}4$, $\mathrm{C}^{\mathrm{I}}4$ se rameneront à la forme suivante,

$$\mathrm{A}^{\mathrm{I}}3 = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1},\ \mathrm{A}^{\mathrm{I}}4 = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1}$$
$$\mathrm{B}^{\mathrm{I}}3 = \mathrm{R} + \mathrm{S}\sqrt{-1},\ \mathrm{B}^{\mathrm{I}}4 = \mathrm{R} - \mathrm{S}\sqrt{-1}$$
$$\mathrm{C}^{\mathrm{I}}3 = \mathrm{T} + \mathrm{V}\sqrt{-1},\ \mathrm{C}^{\mathrm{I}}4 = \mathrm{T} - \mathrm{V}\sqrt{-1}$$

Faisant ces substitutions dans les équations (δ) & supposant $\beta^{\mathrm{I}} + \gamma^{\mathrm{I}} = 2b$, $\beta^{\mathrm{I}} = 2c\sqrt{-1}$, les imaginaires disparoîtront, de sorte qu'on aura pour α, b, c des valeurs réelles; donc les quantités β^{I}, γ^{I} seront encore de cette forme $\beta^{\mathrm{I}} = b + c\sqrt{-1}\ b - c\sqrt{-1}$.

De plus, on verra par l'art. CII, que les quantités $D^I 3$, $E^I 3$, $D^I 4$, $E^I 4$ seront aussi de la forme :

$$D^I 3 = F + G\sqrt{-1},\ D^I 4 = F - G\sqrt{-1},$$

$$E^I 3 = F + G\sqrt{-1},\ E^I 4 = F - G\sqrt{-1},$$

Donc on aura aussi

$$\frac{\beta^I D^I 3}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} = H + L\sqrt{-1},\ \frac{\gamma^I D^I 4}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} = H - L\sqrt{-1}\ \frac{\beta^I E^I 3}{\mu(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} = H + L\sqrt{-1};$$

$$\frac{\gamma^I E^I 4}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} = h - l\sqrt{-1}.$$

Or $fin\,(\mu^I - \frac{r}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = fin.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p(t\chi\, cof.\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \mp cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p)\,t\,\chi\, fin.\,\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})$, & de même $cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}pt)\,\chi\, cof.\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \pm fin.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p)\,t\,\chi\, fin.\,\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})$.

Donc les termes

$$\frac{\beta^I D^I 3}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} fin.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p3)t - \frac{\beta^I F^I 3}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p3)t\ \frac{\gamma^I D^I 4}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I\gamma^I)} fin.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p4)t$$

$$- \frac{\gamma^I E^I 4}{\mu^I(1+\alpha+\beta^I+\gamma^I)} cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p\,4)t$$

la valeur de $x^{\cdot I}$ (art. CIII) se changeront en

$$2\,(H fin.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p)t - h\, cof.(\mu^I - \frac{n}{2}p)t)\, cof.\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1} - 2\,(L\, cof.\,(\mu^I - \frac{n}{2}p)t + l\, fin.(\mu^I - \frac{n}{2}p)t)\, fin.\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})\chi\sqrt{-1})$$

c'est-à-dire, en mattant au lieu de $cof.\,\frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})$ leurs valeurs exponentielles $\frac{e^{-\frac{n}{2}qt} + e^{\frac{n}{2}qt}}{2}$, $\frac{e^{-\frac{n}{2}qt} - e^{\frac{n}{2}qt}}{2\sqrt{-1}}$;

$e^{\frac{r}{2}qt}((H-l)\sin.(\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t+(L+h)\cos.(\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t)+$
$e^{\frac{r}{2}qt}((H+l)\sin.(\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t-(L-h)\cos.(\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t)$

expreffions qui peuvent encore fe changer en celles-ci :

$\check{\varepsilon}e^{\frac{r}{2}qt}\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t+\check{\omega})+\check{\varepsilon}e^{-\frac{r}{2}qt}\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t+\check{\omega})$

en faifant $H-l=-\check{\varepsilon}\sin.\check{\omega}$, $L+h=\check{\varepsilon}\cos.\check{\omega}$, $H+l=-\check{\varepsilon}\sin.\check{\omega}$, $h-L=\check{\varepsilon}\cos\hat{\omega}$.

On mettra donc ces termes au lieu des termes $\varepsilon^{\mathrm{I}}3\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho 3)t+\omega'3)+\varepsilon^{\mathrm{I}}4\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho 4)t+\omega'4)$ de la valeur de $x.^{\mathrm{I}}$ de l'article C I V, & l'on aura

$x.^{\mathrm{I}}=\varepsilon^{\mathrm{I}}1\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho 1)t+\omega^{\mathrm{I}}1)+\varepsilon^{\mathrm{I}}2\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho 2)t$
$+\omega^{\mathrm{I}}2)+\check{\varepsilon}e^{\frac{r}{2}qt}\cos.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t+\check{\omega})+\check{\varepsilon}e^{-\frac{r}{2}qt}\cos.((\mu^{\mathrm{I}}$
$-\frac{r}{2}p)t+\check{\omega})$, d'où l'on tire (article X C)

$y.^{\mathrm{I}}=-2\varepsilon^{\mathrm{I}}1\sin.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho 1)t+\omega^{\mathrm{I}}1)-2\varepsilon^{\mathrm{I}}2\sin.((\mu^{\mathrm{I}}$
$-\frac{r}{2}\rho 2)t+\omega^{\mathrm{I}}2)-2\check{\varepsilon}e^{\frac{r}{2}qt}\sin.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}\rho)t+\check{\omega})$
$-2\hat{\varepsilon}e^{-\frac{r}{2}qt}\sin.((\mu^{\mathrm{I}}-\frac{r}{2}p)t+\hat{\omega})$

Ainfi, dans ce cas, les valeurs de $x^{\cdot}$, & de y contiendront deux termes ; l'un multiplié par $e^{\frac{r}{2}qt}$, & l'autre par $e^{-\frac{r}{2}qt}$, lefquels donneront dans le mouvement des Satellites deux équations, dont l'une ira toujours en augmentant, & l'autre ira en diminuant.

Si les valeurs de ρ étoient toutes quatre imaginaires, on feroit fur les deux premiers termes de l'expreffion de $x^{\cdot}$ (article CIII) les mêmes raifonnemens & les mêmes réductions que nous nous venons de faire sur les deux autres.

On en dira autant des valeurs de z lesquelles sont entiérement analogues à celles de x (article CIX); de sorte que, si l'équation en σ avoit des racines égales ou imaginaires, les latitudes des Satellites se trouveroient sujettes à des variations qui augmenteroient de plus en plus.

CXIV.

REMARQUE II. A l'égard des quantités $\varepsilon^{I}1$, $\varepsilon^{I}2$ &c. $\omega^{I}1$, $\omega^{I}2$ &c. $\varepsilon^{II}1$, $\varepsilon^{II}2$ &c. &c. il faudra les déterminer par le moyen des observations; mais il y a là-dessus une remarque importante à faire; c'est que, comme il n'y a proprement que les huit quantités X^{I}, Y^{I}, X^{II}, Y^{II}, X^{III}, Y^{III}, X^{IV}, Y^{IV} qui soient absolument arbitraires (article CII) & que les quantités, dont dont nous parlons, soient au nombre de 32, on aura 24 conditions à vérifier.

Il en est de même des quantités $\lambda^{I}1$, $\lambda^{I}2$, &c. $\eta^{I}1$, $\eta^{I}2$ &c. $\lambda^{I}1$, $\lambda^{I}2$, &c. $\eta^{II}1$. $\eta^{II}2$ &c. &c. (art. CX).

CXV.

SCHOLIE. Nous avons déja donné les valeurs de ζ^{I}, ζ^{II}, ζ^{III}, ζ^{IV}, (art. LXXXII) aussi bien que celles de π^{I}, π^{II}, π^{III}, π^{IV}, (art. LXXXVI).

Ainsi pour avoir les valeurs de ρ, & de σ il ne s'agira plus que de trouver les valeurs numériques des coëficiens de l'équation (Z) (article XCIX) dans les deux cas (article XCVIII, CIX.

PREMIER CAS.

Suivant les formules de l'art. XCVIII, on a

$$(1, 2) = \overset{\circ}{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) - \mu^{II} \overset{\circ}{\Pi} 1 (a^{I}, a^{II})$$

donc, faisant les substitutions de l'art. XCI, & mettant par tout μ^{II} au lieu de M^{II}, on aura

$$(1, 2) = \check{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) + 2 \check{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}) - 4 \frac{\mu^{I}}{\mu^{II}} \hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II})$$

$$- (2 \hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) + 4 \frac{\mu^{II} - \mu^{I}}{\mu^{II}} \hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II})) \frac{\mu^{I} (2 \mu^{II} - \mu^{I})}{\mu^{II\,2} - (\mu^{II} - \mu^{I})^{2}}$$

ce qui se réduit à :

$$(1, 2) = \check{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II}) + 2 \check{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}) - 2 \hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{II})$$
$$- 4 \hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{II}).$$

On trouvera de même :

$$(1, 3) = \check{\Psi} 1 (a^{I}, a^{III}) + 2 \hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{III}) - 2 \hat{\Psi} 1 (a^{I}, a^{III})$$
$$- 4 \hat{\Gamma} 1 (a^{I}, a^{III});$$

$$(2, 1) = \check{\Psi} 1 (a^{II}, a^{I}) + 2 \hat{\Gamma} 1 (a^{II}, a^{II}) - 2 \check{\Psi} 1 (a^{II}, a^{II})$$
$$- 4 \hat{\Gamma} 1 (a^{II}, a^{I})$$ & ainsi des autres.

Or, nous avons déja donné les valeurs des quantités $\check{\Gamma} 1$, & $\hat{\Gamma} 1$ (art. XLVII); il ne reste plus qu'à chercher celles de $\check{\Psi} 1$, & de $\hat{\Psi} 1$.

Pour cela, il faut auparavant chercher les valeurs des quantités Ψ, $\Psi 1$, & $\Psi 2$. Or, en faisant $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$ on trouve (art. XXII), à cause de $\Lambda (a^{I}, a^{II}) = a^{II\, -5} (A)$, $\Lambda 1 (a^{I}, a^{II}) = a^{II\, -5} (B)$ &c. (art. LXXX),

$$\Psi (a^{I}, a^{II}) = \frac{q (B) - 2 (A)}{2 a^{II\, 3}}$$

$$\Psi 1 (a^{I}, a^{II}) = \frac{q (C) - 2 (B) + 2 q (A)}{2 a^{II\, 3}}$$

$$\Psi 2 (a^{I}, a^{II}) = \frac{q (D) - 2 (C) + q (B)}{2 a^{II\, 3}}$$

& de même, à cause de $\Lambda(a^{II}, a^{I}) = \Lambda(a^{I}, a^{II})$ &c.,

$$\Psi\,(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(B) - 2q^2(A)}{2a^{II\,3}}$$

$$\Psi 1(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2a^{II\,3}}.$$

$$\Psi 2(a^{II}, a^{I}) = \frac{q(D) - 2q^2(C) + q(B)}{2a^{II\,3}}$$

Donc (art. LXXX)

$$\Psi\,(a^{I}, a^{II}) = \Pi\,(a^{II}, a^{I})$$
$$\Psi 1\,(a^{I}, a^{II}) = \Pi 1\,(a^{II}, a^{I})$$

&c :

$$\Psi\,(a^{II}, a^{I}) = \Pi\,(a^{I}, a^{II})$$
$$\Psi 1(a^{II}, a^{I}) = \Pi 1\,(a^{I}, a^{II})$$

&c ;

c'eſt à-dire que les quantités Ψ ſont les réciproques des quantités Π.

On aura donc (art. XXIV)

$$\check{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{II}) = 3\,\frac{q^2 Q2 - 2q^3\, Q1 + 2q^2\, Q}{2} + \frac{q^2 C + 2q^2 A}{2} + 2q^4$$

expreſſion qui ſervira auſſi pour les quantités analogues; $\check{\Psi} 1\,(a^{I}, a^{III})$, $\check{\Psi} 1\,(a^{II}, a^{III})$ &c, en faiſant ſucceſſivement

$$q = \frac{a^{I}}{a^{III}},\ q = \frac{a^{II}}{a^{III}}\ \text{\&c.}$$

Enſuite on aura, pour les quantités réciproques,

$$\check{\Psi} 1\,(a^{II}, a^{I}) = 3\,\frac{q\,P2 - 2\,P1 + 2q\,P}{2} + \frac{q\,C + 2q\,A}{2} + \frac{2}{q^2}$$

& ainſi des autres.

Pareillement on trouvera (art. XXV).

$$\hat{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) = 3\,\frac{q^2\,Q_2 - 2q^2\,Q}{2} + \hat{\Gamma}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}) - 3q^2$$

&

$$\hat{\Psi}\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) = 3\,\frac{q\,Q_2 - 2q\,Q}{2} + \hat{\Gamma}\,\mathrm{I}\,(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}}) - \frac{3}{q^2}$$

& ainsi des autres.

De là on tire, en employant les valeurs de la table de l'art. LXXXI,

	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}})$	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{IV}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{IV}})$
$\check{\Psi}\mathrm{I}$	—1,708	—0,181	—0,008	—1,733	—0,132	—0,887
$\hat{\Psi}\mathrm{I}$	0,366	0,068	0,003	0,153	0,036	0,214
	$(a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{I}})$	$(a^{\mathrm{III}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{II}})$	$(a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{III}})$
$\check{\Psi}\mathrm{I}$	1,203	11,699	29,330	1,580	14,871	3,489
$\hat{\Psi}\mathrm{I}$	—6,181	—13,371	—40,052	—6,500	—16,188	—7,089

ensuite.

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
	—1,578	—0,213	—0,004	—1,155	—0,162	—0,765
	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(4,2)	(4,3)
	—2,365	—0,363	—10,040	—1,414	—0,289	—1,331

Donc l'équation (Z) de l'art. XCIX, deviendra

$$K^{I} K^{II} K^{III} K^{IV} - 2,532\, K^{I} K^{II} - 0,468\, K^{I} K^{III} - 1,633\, K^{I} K^{IV} - 0,040\, K^{II} K^{III} - 0,077\, K^{II} K^{IV} - 3,732\, K^{III} K^{IV} + 1,013\, K^{I} + 1,641\, K^{II} + 2,593\, K^{III} + 1,373\, K^{IV} - 5,599 = 0 \ldots (\epsilon)$$

où il n'y aura plus qu'à substituer au lieu de $K^{I}, K^{II}, K^{III}, K^{IV}$ leurs valeurs

$$2\,\frac{\frac{\varrho}{\mu^{I}} - \zeta^{I}}{\chi^{I}},\quad 2\,\frac{\frac{\varrho}{\mu^{II}} - \zeta^{II}}{\chi^{II}},\quad 2\,\frac{\frac{\varrho}{\mu^{III}} - \zeta^{III}}{\chi^{III}},\quad 2\,\frac{\frac{\varrho}{\mu^{IV}} - \zeta^{IV}}{\chi^{IV}}$$

SECOND CAS.

On aura ici (art. CIX)

$(1,2) = \Gamma^{0}1\,(a^{I}, a^{II})$, $(1,3) = \Gamma^{0}1\,(a^{I}, a^{III})$ &c:

$(2,1) = \Gamma^{0}1\,(a^{II}, a^{I})$ &c,

Donc faisant successivement $q = \frac{a^{I}}{a^{II}}$, $= \frac{a^{I}}{a^{III}}$ &c,

on aura (art. XXXII, & XLIII)

$$(1,2) = q^{2} B,\ (1,3) = q^{2} B \text{ \&c},$$

ensuite

$$(2,1) = q B,\ (3,1) = q B \text{ \&c.}$$

Donc, en employant les valeurs de B données dans l'art. XLVII, on trouvera,

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
	—1,963	—0,252	—0,037	—1,884	—0,174	—1,151
	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(4,2)	(4,3)
	—3,116	—0,640	—0,166	—3,011	—0,489	—2,025

Et

Et l'équation (Z) ſe changera en celle-ci :

$$K^{I}\,K^{II}\,K^{III}\,K^{IV} - 2,331\,K^{I}\,K^{II} - 0,085\,K^{I}\,K^{III} - 5,675\,K^{I}\,K^{IV} - 0,006\,K^{II}\,K^{III} - 0,161\,K^{II}\,K^{IV} - 6,120\,K^{III}\,K^{IV} + 2,124\,K^{I} + 0,096\,K^{II} + 0,114\,K^{III} + 4,738\,K^{IV} + 11,972 = 0 \ldots (\zeta)$$

dans laquelle

$$K^{I} = 2^{\frac{\frac{\sigma}{\mu^{I}} - \nu^{I}}{\chi^{I}}},\; K^{II} = 2^{\frac{\frac{\sigma}{\mu^{II}} - \nu^{II}}{\chi^{II}}},\; K^{III} = 2^{\frac{\frac{\sigma}{\mu^{III}} - \nu^{III}}{\chi^{III}}},\; K^{IV} = 2^{\frac{\frac{\sigma}{\mu^{IV}} - \nu^{IV}}{\chi^{IV}}}.$$

Il reſteroit maintenant à tirer de ces équations les valeurs de ρ, & σ d'où dépendent les principales inégalités de l'équation du centre, & de la latitude des ſatellites de Jupiter ; mais comme nous touchons au terme fixé par l'Académie pour l'admiſſion des Piéces, nous nous contenterons ici d'avoir donné la méthode & les principes néceſſaires pour déterminer ces ſortes d'inégalités, & nous remettrons ce travail à un autre tems, où nous nous propoſons de ſuivre, & de diſcuter avec attention ces points importans de la théorie des ſatellites.

§. 4.

Sur les inégalités des ſatellites de Jupiter qui dépendent de la période de 12 ans.

C X V I.

Les tables du premier & du ſecond ſatellite ne renferment que les équations qui dépendent de l'anomalie de Jupiter avec celles qui dépendent de la période de 437 1 dont nous avons parlé au long dans le § 5 du Chapitre précédent ; cependant, il eſt facile de ſe convaincre ; & M. Wargentin l'avoue lui-même dans les diſſertations qu'il a miſes à la tête des obſervations de ces deux ſatellites, (Mém. de la Soc. d'Upſal, années 1742 & 1743) que les équations attribuées à l'inégalité du mouvement de Jupiter ne s'accordent pas entièrement avec l'équation du centre de cette Planette ; d'où il s'enſuit qu'il doit y avoir dans le mouvement de ces deux ſatellites des inégalités particulières qui ayant des périodes à très peu-près égales à la révolution de Jupiter ſe trouvent pour ainſi dire fondues dans la grande inégalité qui vient de l'excentricité de cette Planette, c'eſt ce que la théorie confirme d'ailleurs ; car on a vu que les équations du centre des ſatellites doivent renfermer quatre termes tels que $2n\varepsilon\, \mathit{ſin}\, ((\mu - \frac{n}{2}\rho)t + \omega)$ (art. CVII) ; or, dans le tems des éclipſes on a $u - v = 180^\circ$ à très-peu près (art. LV) ; donc $u = \mu t = 180^\circ + v$ donc $\mathit{ſin.}\, ((\mu - \frac{1}{2}n\rho)t + \omega)$ $= \mathit{ſin.}\, ((1 - \frac{n\rho}{2\mu})(180^\circ + v) + \omega) = - \mathit{ſin.}$ $((1 - \frac{n\rho}{2\mu})v + \omega - \frac{n\rho}{2\mu}\, 180^\circ)$; d'où l'on voit que les équations provenantes de ces termes auront des périodes égales à la révolution de Jupiter, plus à $\frac{n\rho}{2\mu}$ de cette révolution.

Au reſte, on ne doit pas ſe flatter de pouvoir jamais déterminer ces ſortes d'inégalités par la ſimple théorie ; car les valeurs de ρ (art. CXV) dépendent des quantités χ, c'eſt-à-dire des maſſes des ſatellites, dont la plûpart ſont encore inconnues : Ainſi, ce n'eſt que par des obſervations multipliées & réitérées qu'on peut eſpérer de perfectionner à cet égard la théorie des deux premiers ſatellites.

CXVII.

On a apperçu de pareilles inégalités dans le mouvement du troisième & du quatrième satellite ; ce sont celles qui dans les tables de M. Wargentin répondent aux argumens E, & G.

En consultant ces tables, (voyez les tables des satellites imprimées parmi celles des planettes de M. Hallei) on trouve 1° que le nombre E acheve huit périodes exactes dans l'intervalle de cent années juliennes ; d'où il s'ensuit que chaque période est de douze ans & demi. 2° Que dans le même espace de tems le nombre G acheve 8 $\frac{244}{1000}$ périodes ; ce qui donne 12, 130 ans pour la durée de chaque période ; mais ce dernier élément a été réformé dans les nouvelles tables du quatrième satellite imprimées à la fin de la connoissance des mouvemens célestes pour l'année prochaine : suivant ces tables, le nombre C qui fait ici le même effet que le nombre G dans les premières, acheve 8 $\frac{254}{1000}$ périodes en cent années juliennes ; d'où l'on tire pour la durée de chaque période 12, 115 ans environ.

Or, si on imagine que chacune de ces deux équations soit représentée par un seul terme tel que $\sin.((1 - \frac{n\rho}{2\mu}v + \omega - \frac{n\rho}{2\mu}108^\circ)$, (c'est le cas où l'orbite seroit une élipse mobile) ; on trouvera aisément que la quantité $\frac{n\rho}{2\mu}$ sera pour le troisième satellite, $= \frac{377}{4332} = 0{,}0870$, & pour le quatrième $= \frac{103}{4332} = 0\,237$. On pourroit trouver de même les valeurs des quantités ω qui dépendent des époques des argumens E & C, aussi bien que les coeficiens $n\varepsilon$ qui expriment les plus grandes équations; mais, pour que toutes ces déterminations fussent exactes, il faudroit que les autres termes qui doivent entrer dans les équations du centre fussent nuls, à la fois, ce qui paroît assez difficile; d'ailleurs, les incertitudes & les variétés qu'on trouve lorsqu'on compare les observations de ces deux satellites, & qu'on veut fixer les quantités & les périodes des équations dont nous parlons, donnent tout lieu de croire que ces équations sont plutôt des résultats de différentes équations particulières qui ayant à-peu-près les mêmes périodes se confondent ensemble, comme nous l'avons déja observé par rapport aux deux premiers satellites.

CXVIII.

Je finirai ces remarques par donner un léger essai de calcul sur les valeurs des quantités ρ, & pour plus de simplicité, je supposerai que les masses du premier & du quatrième satellite soient considérablement plus petites que celles du second & du troisième; hypothèse qui n'a d'ailleurs rien de choquant.

Donc puisque χ^{I} & χ^{IV} sont des quantités fort petites, K^{I} & K^{IV} seront fort grandes, par conséquent l'équation (ε) de l'article se réduira à très-peu-près à celle-ci $K^{\mathrm{I}}\ K^{\mathrm{II}}\ K^{\mathrm{III}}\ K^{\mathrm{IV}} - 1,633\ K^{\mathrm{I}}\ K^{\mathrm{IV}} = 0$, d'où l'on tire $K^{\mathrm{I}} = 0$, ou bien $K^{\mathrm{IV}} = 0$, ou bien $K^{\mathrm{II}}\ K^{\mathrm{III}}$ $1,633 = 0$.

On aura de plus par les formules de l'art. LXXXVI

$n\chi^{\mathrm{I}}$, $n\chi^{\mathrm{II}}$ &c. au lieu de $\frac{\text{☾}^{\mathrm{I}}}{\text{♃}}$, $\frac{\text{☾}^{\mathrm{II}}}{\text{♃}}$ &c. & ne conservant que les termes qui renferment χ^{II} & χ^{III}, on aura, dis je:

$$\zeta^{I} = 0,982\,\chi^{II} + 0,124\,\chi^{III},\ \zeta^{II} = 0,940\,\chi^{III},\ \zeta^{III} = 1,467\,\chi^{II},\ \zeta^{IV} = 0,260\,\chi^{II} + 1,139\,\chi^{III}.$$

Donc puisque $K^{I} = 2\,\frac{\frac{\rho}{\mu^{I}} - \zeta^{I}}{\chi^{I}}$, $K^{II} = 2\,\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}} - \zeta^{II}}{\chi^{II}}$ &c.

on a, pour les quatre valeurs de ρ, les équations suivantes

$$\frac{\rho}{\mu^{I}} - 0,982\,\chi^{II} - 0,124\,\chi^{III} = 0$$

$$\frac{\rho}{\mu^{IV}} - 0,260\,\chi^{II} - 1,139\,\chi^{III} = 0$$

$$\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}} - 0,940\,\chi^{II}}{\chi^{II}} \times \frac{\frac{\rho}{\mu^{III}} - 1,467\,\chi^{II}}{\chi^{III}} - 0,408 = 0.$$

d'où l'on tire à-peu-près:

$$\rho = 0,731\,\mu^{III}\,\chi^{II} + 0,470\,\mu^{II}\,\chi^{III} \pm \sqrt{(0,731\,\mu^{III}\,\chi^{II} - 0,470\,\mu^{II}\,\chi^{III})^2 + 0,408\,\mu^{II}\,\mu^{III}\,\chi^{II}\,\chi^{III}}.$$

Ainsi l'on aura les quatre valeurs de ρ, qui donneront pour chaque satellite quatre équations, dont les périodes seront de $1 + \frac{n\rho}{2\mu}$ rev. de Jupiter.

§. 5.

Des durées des éclipses des satellites de Jupiter.

CXIX.

La durée d'une éclipse dépend de quatre élémens; de la largeur de l'ombre de Jupiter, de la vîtesse du satellite, de sa latitude, & de l'inclinaison de sa route, laquelle peut être prise pour rectiligne pendant tout le temps de l'éclipse.

Soit donc α l'angle que le demi diamètre de la section de l'ombre sous-tend au centre de Jupiter; cet angle est donné par les observations pour chacun des quatre satellites.

Supposons de plus que φ dénote la longitude du satellite, & p la tangente de sa latitude, au moment de la conjonction.

Enfin soit $\varphi - \Psi$ la longitude du satellite au moment de son entrée dans l'ombre; desorte que Ψ exprime l'angle qu'il parcourt sur le plan de Jupiter depuis l'immersion jusqu'à la conjonction.

On aura, pour la valeur de p qui y répond, $p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi$ à peu près.

Cela posé: supposons, pour plus d'exactitude, que la section de l'ombre soit une élipse semblable à celle des méridiens de Jupiter, il est visible qu'on aura: demi-grand axe de l'élipse . . . . $\nu\alpha$

demi-petit axe . . . . $\nu\alpha(1 - E)$

(E étant l'élipticité comme dans l'art. XVI);

abscisse prise depuis le centre . . . $\nu\Psi$

appliquée correspondante . . . . . . $\nu\left(p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi\right)$

Donc, par la nature de l'élipse,

$$\alpha^2 - \Psi^2 : \left(p - \frac{dp}{d\varphi}\Psi\right)^2 = 1 : (1 - E)^2,$$

équation d'où l'on tirera Ψ.

On aura donc $\alpha^2(1 - E)^2 - \Psi^2(1 - E)^2 = p^2 - 2\frac{pdp}{d\varphi}\Psi + \frac{dp^2}{d\varphi^2}\Psi^2$; d'où l'on tire après les réductions

$$\psi = \frac{\frac{p\,dp}{a\,\varphi} \pm (1-E)\sqrt{\alpha^2\left(\overline{1-E}^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}\right) - p^2}}{(1-E)^2 + \frac{d^2}{d\varphi^2}}$$

Le ſigne + donne la valeur ψ pour l'immerſion, comme nous l'avons ſuppoſé, & le ſigne — donne au contraire la valeur de ψ pour l'émerſion.

CXX.

Subſtituons maintenant $\mu t + ny$ au lieu de φ, nz au lieu de p, & de même $n\delta$ au lieu de α (car il eſt évident que la quantité α doit être du même ordre que la quantité p); on aura en ne négligeant que les termes affectés de n^3:

$$\psi = \pm \frac{n}{1-E}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - z^2} + \frac{n^2}{(1-E)^2} \cdot \frac{z\,dz}{\mu\,dt}$$

CXXI.

Pour convertir cette expreſſion en tems, on la diviſera par la vîteſſe angulaire qui eſt $\frac{d\varphi}{dt} = \mu + n\frac{dy}{dt}$; ce qui donnera en négligeant toujours les n^3 ×

$$\pm \frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - z^2} + \frac{n^2}{\mu(1-E)^2} \times \left(\frac{z\,dz}{\mu\,dt} \mp (1-E)\frac{dy}{\mu\,dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - z^2}\right).$$

Donc l'intervalle entre l'immerſion & la conjonction ſera: $\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2 - z^2} + \frac{n^2}{\mu(1-E)^2}$ ×

$$\left(\frac{z\,dz}{\mu\,dt} - (1-E)\frac{dy}{\mu\,dt}\sqrt{\delta^2(1-E^2 - z^2}\right)$$

& l'intervalle entre la conjonction & l'emmersion sera:

$$\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}+\frac{n^2}{\mu(1-E)^2}\times$$
$$\left(\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt}+(1-E)\frac{dy}{\mu dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}\right)$$

Par conséquent la demi-durée sera

$$\frac{n}{\mu(1-E)}\sqrt{\delta^2(1-E)^2-\zeta^2}-\frac{n^2}{\mu(1-E)}\cdot\frac{dy}{\mu dt}\sqrt{\delta^2(1-E)^2+\zeta^2}$$

CXXII.

Il paroît que les Astronomes ont toujours supposé jusqu'à présent, que les durées des éclipses des satellites étoient les mêmes avant, & après la conjonction; ce qui n'est pas vrai à la rigueur, la différence étant de $\frac{n^2}{\mu(1-E)^2}\cdot\frac{\zeta d\zeta}{\mu dt}$. c'est-à-dire de $\frac{pdp}{\mu^2(1-E)^2 dt}$; d'où l'on voit que ces durées ne peuvent être égales que dans deux cas; 1° lorsquo $p=0$, c'est-à-dire que la latitude du satellite est nulle, & que par conséquent l'éclipse est centrale; 2° lorsque $dp=0$, savoir lorsque la latitude est la plus grande, ou bien que le satellite est dans les limites.

CXXIII.

Supposons maintenant que l'on ait observé la demi-durée d'une éclipse de satellite, laquelle soit de Δ secondes; on aura en remettant pour $n\delta$, & $n\zeta$, a & p,

$$\Delta=\frac{1-n\frac{dy}{\mu dt}}{\mu(1-E)}\sqrt{a^2(1-E)^2-p^2}$$

où

où il faudra prendre pour μ, 360° divisés par le temps périodique réduit en secondes ; ou bien on convertira immédiatement la durée Δ en degrés, & l'on aura simplement

$$\Delta = \frac{1 - n\frac{dy}{\mu dt}}{1 - E}\sqrt{\alpha^2(1-E)^2 - p^2}$$

d'où l'on tire

$$p = (1 - E)\sqrt{\alpha^2 - \Delta^2\left(1 + 2n\frac{dy}{\mu dt}\right)}$$

c'est la tangente de la latitude du satellite au moment de la conjonction.

CXXIV.

Ayant ainsi la latitude, & connoissant d'ailleurs le lieu du nœud par les observations des plus grandes durées on trouvera aisément l'inclinaison de l'orbite ; il n'y aura pour cela qu'à diviser la tangente de la latitude trouvée par le sinus de l'élongation de Jupiter, vu du Soleil, au nœud du satellite ; le quotient sera la tangente de l'inclinaison de l'orbite.

C'est ainsi que tous les Astronomes en ont usé jusqu'ici pour déterminer la position des plans des orbites des satellites.

Mais si on pouvoit connoître avec assez de précision par la théorie le moment de la conjonction, on pourroit trouver immédiatement l'inclinaison de la route du satellite dans l'ombre par les observations des immersions & des émersions ; car nous avons vu que la différence entre les durées de l'éclipse avant & après la conjonction doit être $= \frac{pdp}{\mu^2(1-E)^2 dt}$; donc, divisant cette différence par

$\frac{p}{\mu(1-E)^2}$ on aura $\frac{dp}{\mu dt} = \frac{dp}{d\varphi}$ tangente de l'inclinaiſon de la route du ſatellite.

Mais outre que cette méthode exigeroit dans les tables des ſatellites un degré de préciſion dont elles ſont encore bien éloignées, elle ſeroit encore le plus ſouvent impraticable, à cauſe qu'on ne peut pas toujours obſerver à la fois les immerſions & les émerſions.

Je finirai ces recherches par dire un mot des variations qu'on a apperçues juſqu'ici dans les poſitions des orbites des ſatellites.

§. 6

Des inclinaiſons, & des nœuds des Satellites.

CXXV.

Le premier Satellite eſt le ſeul dont l'orbite paroiſſe à peu près fixe; ſon inclinaiſon eſt ſelon les tables de 3°, 18', & le lieu du nœud à 10ˢ, 14°, 30'; du moins les demi-durées obſervées quadrent aſſez bien avec ces élémens.

Le nœud du ſecond paroît auſſi fixe, mais ſon inclinaiſon eſt ſujette à un changement conſidérable, dont la période eſt de 31 ans; la plus grande inclinaiſon eſt de 3°, 47', 27", & la plus petite de 2°, 29', 2" de ſorte que la variation eſt de 1°, 18', 25" ou bien de 39', 12" tantôt en plus, tantôt en moins, ce qui fait environ $\frac{1}{5}$ de l'inclinaiſon moyenne.

CXXVI.

Un changement ſi conſidérable ne ſauroit s'expliquer que par les formules de l'art. CIX. En effet, ſuppoſons que la valeur de z'' ne renferme que deux termes, ou au moins que les deux autres soient assez petits pour pouvoir être négligés, desorte que l'on ait simplement :

$$z^{II} = \lambda^{II}\,1\ \textit{sin.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,1\right)t + \eta^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ \textit{sin.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,2\right)t + \eta^{II}\,2\right).$$

On aura, en nommant $n\tau^{II}$ la tangente de l'inclinaison de l'orbite, & ψ^{II} la distance du satellite au nœud ascendant,

$$\tau^{II} = \sqrt{z^{II\,2} + \frac{d\zeta^{II\,2}}{\mu^{II\,2}\,dt}}\ \&\ \textit{tang.}\ \psi^{II} = \frac{\zeta^{II}\,\mu^{II}\,dt}{d\zeta^{II}}\ (\text{art. CXI})$$

savoir, en négligeant les termes de l'ordre de n,

$$\tau^{II} = \sqrt{\lambda^{II}\,1^2 + \lambda^{II}\,2^2 + 2\,\lambda^{II}\,1\,\lambda^{II}\,2\ \textit{cos.}\left(\frac{n}{2}(\sigma\,1 - \sigma\,2)t + \eta^{II}\,1 - \eta^{II}\,2\right)}$$

$$\&\ \textit{tang.}\ \psi^{II} = \frac{\lambda^{II}\,1\ \textit{sin.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,1\right)t + \eta^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ \textit{sin.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,2\right)t + \eta^{II}\,2\right)}{\lambda^{II}\,1\ \textit{cos.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,1\right)t + \eta^{II}\,1\right) + \lambda^{II}\,2\ \textit{cos.}\left(\left(\mu^{II} + \frac{n}{2}\,\sigma\,2\right)t + \eta^{II}\,2\right)}$$

Donc la plus grande valeur τ^{II} sera $= \lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2$, & la plus petite $= \lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2$; donc $n\,(\lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2) = \textit{tang.}\ 3^\circ\,47'\,27''$, & $n\,(\lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2) = \textit{tang.}\ 2^\circ\,29'\,2''$

par conséquent $\dfrac{\lambda^{II}\,1 + \lambda^{II}\,2}{\lambda^{II}\,1 - \lambda^{II}\,2} = \dfrac{\textit{tang.}\ 3^\circ\,47'\,27''}{\textit{tang.}\ 2^\circ\,29'\,2''} = 1,527$

d'où l'on tire $\dfrac{\lambda^{II}\,2}{\lambda^{II}\,1} = \dfrac{0,527}{2,527} = 0,208 =$ environ $\frac{1}{5}$

Maintenant il est clair que la valeur de τ^{II} redeviendra la même lorsque l'angle $\frac{n}{2}(\sigma\,1 - \sigma\,2)t$ se trouvera augmenté ou diminué de 360° pris une ou plusieurs fois ; donc puisque la longitude moyenne du second satellite est exprimée par $\mu^{II}t$, la période de la variation de τ^{II} sera de $\pm \dfrac{1}{\frac{n}{2\mu^{II}}\,(\sigma\,1 - \sigma\,2)}$ révolutions de ce même satellite.

Or cette période est, selon les observations, de 31 ans ;

ce qui répond à peu près à 3189 rev. du second satellite; donc il faudra que $\pm$

$$\frac{n}{2\mu^{II}}(\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{1}{3189} = 0,0003136.$$

CXXVII.

Ayant trouvé $\lambda^{II} 2 = \frac{1}{5}\lambda^{II} 1$, on pourra simplifier les expressions de τ^{II}, & de tangente ψ^{II} & l'on aura à très-peu près :

$$\tau^{II} = \lambda^{II} 1 \left(1 + \frac{1}{5} \operatorname{cos}. \left(\frac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} 1 - \eta^{II} 2\right)\right)$$

$$\& \ tang. \psi^{II} = tang \left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1\right) + \frac{1}{5} \times \frac{\sin((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II} 2)}{\cos((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1)}$$

$$- \frac{1}{5} \times \frac{\cos.((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II} 2) \times \sin.((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1)}{\cos.((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1)^2}$$

Soit fait $\psi^{II} = (\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1 + q$, q étant une quantité fort petite, on aura, $tang. \psi$

$$= tang. \left((\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1\right) + \frac{q}{\cos.((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1)^2}$$

à peu près; donc $q = \frac{1}{5}\sin.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II} 2\right) \times \cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II}\right) - \frac{1}{5}\cos.\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 2)t + \eta^{II} 2\right) \times \sin\left((\mu^{II} + \frac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1\right) = -\frac{1}{5}\sin\left(\frac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} 1 - \eta^{II} 2\right)$;

$$\text{donc } \psi^{II} = (\mu^{II} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{II} 1 - \tfrac{1}{5}\sin. \left(\tfrac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} - \eta^{III} 2\right).$$

D'où l'on voit 1° que le mouvement du nœud sera de $\frac{n\sigma 1}{2\mu^{II}}$ par révolution; 2° que ce mouvement sera sujet à une équation analogue à celle de l'inclinaison, laquelle montera à $\frac{57^\circ\ 17'}{5} = 11^\circ\ 27'$.

Ces derniers résultats ne s'accordent pas à la vérité avec les observations des demi-durées, par lesquelles il paroît que les nœuds sont à très-peu près fixes ; mais j'observe 1°, que la quantité $\sigma 1$ peut être nulle, auquel cas le nœud n'aura plus qu'un mouvement d'oscillation. 2° Qu'il est impossible que l'attraction produise un changement dans l'inclinaison sans produire en même-tems un changement analogue dans le lieu du nœud. Voyez plus bas, art. CXXX.

CXXVIII.

Voyons maintenant comment on pourroit satisfaire à ces deux conditions, savoir $\pm \frac{n}{2\mu^{II}} (\sigma 1 - \sigma 2) = 0,$ 0003136, & $\sigma 1 = 0$.

Pour cela, nous conserverons ici les hypothèses de l'art. CXVIII, moyennant quoi l'équation (ζ) de l'art. CXV se réduira à celle-ci : $K^{I} K^{II} K^{III} K^{IV} - 5,675 K^{I} K^{IV} = 0$, laquelle donne $K^{I} = 0$, ou bien $K^{IV} = 0$, ou bien $K^{III} K^{IV} - 5,675 = 0$; cette dernière équation se réduit à celle-ci :

$$\left(\frac{\sigma}{\mu^{II}} - \pi^{II}\right)\left(\frac{\sigma}{\mu^{III}} - \pi^{III}\right) - \frac{5,675}{4} \chi^{II} \chi^{III} = 0,$$

ou bien $\sigma^2 - (\mu^{II} \pi^{II} + \mu^{III} \pi^{III}) \sigma + \mu^{II} \mu^{III} \pi^{II} \pi^{III} - 1,419 \mu^{II} \mu^{III} \chi^{II} \chi^{III} = 0$.

Or, suivant les mêmes hypothèses, on a $\pi^{II} = 0,942 \chi^{III}$, & $\pi^{III} = 1,506 \chi^{II}$ à peu près (art. LXXXVI) donc $\pi^{II} \pi^{III} = 0,942 \times 1,506 \chi^{II} \chi^{III} = 1,419 \chi^{II} \chi^{III}$; donc faisant pour plus de simplicité $\chi^{III} = m \chi^{II}$, & mettant $0,496 \mu^{II}$ au lieu de μ^{III}, on aura l'équation :

$$\sigma^2 - (0,942 m + 0,747) \mu^{II} \chi^{II} \sigma = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sigma = 0, \text{ \& } \sigma = (0,942\, m + 0,747)\, \mu^{II} \chi^{II}.$$

Donc on satisfera à nos conditions en prenant pour σ 1 la première de ces deux racines, & pour σ 2 la seconde, & supposant

$\frac{n}{2}(0,942\, m + 0,747)\, \chi^{II} = 0,0003136$, ce qui donne à cause de $n\, \chi^{II} = \frac{☾^{II}}{♃} = 0,00002417$ (art. LXIII) $m = 27$ à très peu près.

Il est vrai que cette détermination ne s'accorde point avec ce que nous avons trouvé dans l'art. LXVIII ; mais cela n'est point surprenant vu le grand nombre des quantités que nous avons négligés dans ce calcul, aussi ne l'ai-je donné ici que comme un essai, me réservant de les reprendre dans quelqu'autre occasion.

CXXIX.

La position de l'orbite du troisième satellite est aussi sujette à des variations fort remarquables ; son inclinaison paroît avoir été la plus petite en 1697, où elle n'étoit que d'environ 3°, & depuis-lors elle a toujours été en augmentant, de sorte qu'en 1763 on l'a trouvée de 3° 27′, ce qui fait 27′ en 66 ans ; & par conséquen environ 26″ par an.

Quoiqu'on ne connoisse pas encore le terme de cette augmentation, il y a cependant tout lieu de croire qu'elle est périodique comme celle du second satellite ; car suivant la comparaison que M. Maraldi a faite d'un très-grand nombre d'observations des demi-durées depuis 1671, jusqu'en 1763 l'inclinaison se trouve à très-peu près la même à intervalles égaux avant & après 1697.

A l'égard du nœud, les tables de M. Wargentin le supposent fixe à $10^s\ 16^\circ\ 3'$, mais M. Maraldi trouve qu'il doit avoir un mouvement direct d'environ $3'$ par an; selon ce savant Astronome il étoit à $10^s\ 1^\circ\ 52'$ en 1697, & à $10^s\ 17^\circ\ 9'$ en 1763.

Ces variations peuvent s'expliquer de la même manière que celles du second satellite, pourvu qu'on suppose que la période de l'inclinaison soit beaucoup plus longue; faisons-la de r révolutions du troisième satellite; il faudra que l'on ait $\pm \frac{n}{2\mu^{\text{III}}}(\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{1}{r}$; prenons pour $\sigma 1$ la même racine que ci-dessus, & pour $\sigma 2$ une des deux autres racines, par exemple celle qui résulte de l'équation $K^{\text{I}} = 0$, savoir $\sigma 2 = \mu^{\text{I}}\pi^{\text{I}} = \mu^{\text{I}}(0,981\,\chi^{\text{II}} + 0,126\,\chi^{\text{III}})$. (art. LXXXVI); mettons au lieu de μ^{I}, $4,044\,\mu^{\text{II}}$, au lieu de χ^{III}, $m\chi^{\text{II}}$, & au lieu de $n\chi^{\text{II}} = \frac{☾''}{♃}$ sa valeur $0,00002417$, on aura $\frac{n\sigma 2}{2\mu^{\text{III}}} = 0,00004796 + 0,00000615\,m = \frac{1}{r}$; si $m = 10$, on auroit environ $r = 10000$, ce qui donneroit à peu près 195 ans pour la durée de la période.

Maintenant, si on dénote par $n\tau^{\text{III}}$ la tangente de l'inclinaison, & par ψ^{III} la distance au nœud, & qu'on suppose $\lambda^{\text{III}}2 = \nu\lambda^{\text{III}}1$, ν étant une fraction assez petite, on aura comme dans l'art. CXXVI,

$$\tau^{\text{III}} = \lambda^{\text{III}}1\left(1 + \nu \cos.\left(\tfrac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{\text{III}}1 - \eta^{\text{III}}2\right)\right),$$

$$\& \ \psi^{\text{III}} = (\mu^{\text{III}} + \tfrac{n}{2}\sigma 1)t + \eta^{\text{III}}1 - \nu \sin. \left(\tfrac{n}{2}(\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{\text{III}}1 - \eta^{\text{III}}2\right),$$

ou bien (à cause de $\sigma\, 1 = 0$, & de $\mu^{III} t =$ à la longitude moyenne du satellite que nous dénoterons par u^{III})

$$\tau^{III} = \lambda^{III}\, 1\, (1 + \nu\, \text{cos.} \left(\frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III} - \eta^{III} 1 + \eta^{III} 2 \right)$$

&

$$u^{III} - \psi^{III} = - \eta^{III} 1 - \nu\, \text{sin.}\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III} - \eta^{III} 1 + \eta^{III} 2)$$

où $u^{III} - \psi^{III}$ est la longitude du nœud.

Supposons, ce qui est permis, que la longitude moyenne u^{III} soit comptée depuis le point, où se trouvoit le satellite au moment de la plus petite inclinaison de son orbite, on aura $\text{cos.}\, (- \eta^{III}\, 1 + \eta^{III}\, 2) = - 1$, donc $- \eta^{III}\, 1 + \eta^{III} 2 = 180°$; par conséquent les formules précédentes deviendront;

$$\tau^{III} = \lambda^{III} 1 \left(1 - \nu\, \text{cos.}\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}\right)$$

$$u^{III} - \psi^{III} = - \eta^{III} 1 + \nu\, \text{sin.}\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}.$$

Donc la vîtesse du nœud sera à la vîtesse moyenne du satellite comme $\nu\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}}\, \text{cos.}\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}$ à 1; d'où l'on voit que le mouvement du nœud sera direct tant que $\text{cos.}\, \frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}$ sera positif, c'est-à-dire tant que l'inclinaison sera au dessous de la moyenne.

Au reste, si je donne ici ces formules, ce n'est pas que je les regarde comme fort exactes & conformes au mouvement du troisième satellite; mon objet est simplement de donner une idée de la manière, dont on pourroit

pourroit rendre raiſon de l'augmentation d'inclinaiſon, & du mouvement direct des nœuds de ce ſatellite; phénomènes qui paroiſſent aſſez difficiles à expliquer.

CXXX.

Le quatrième ſatellite eſt auſſi dans le même cas que le troiſième à l'égard du mouvement des nœuds. M. Maraldi l'a trouvé d'environ 5′ 33″ par an ſuivant l'ordre des ſignes; mais M. Wargentin ne le fait que d'environ 4′, 24″ dans ſes nouvelles tables.

Quant à l'inclinaiſon, ils la ſuppoſent conſtante & de 2° 36′; mais il y a tout lieu de croire que cette détermination n'eſt pas tout à fait exacte; car il paroît difficile que les nœuds aient un mouvement direct, tandis que l'inclinaiſon demeure la même. D'ailleurs, M. Wargentin remarque que les nœuds ont du être ſtationaires vers la fin du ſiècle dernier, ce qui prouve, ce me ſemble, qu'ils étoient auparavant retrogrades, & que leur mouvement n'eſt qu'une eſpèce d'oſcillation, comme nous l'avons déja ſuppoſé, à l'égard du troiſième ſatellite; or, je dis qu'un tel mouvement ne ſçauroit avoir lieu dans le nœud, ſans qu'il ait, dans l'inclinaiſon, une variation analogue; c'eſt de quoi il eſt facile de ſe convaincre en jettant les yeux ſur la formule $d\lambda \, \mathit{ſin.}\,(\varphi - \varepsilon) = \lambda \, \mathit{coſ.}\,(\varphi - \varepsilon)\, d\varepsilon$ de l'art. III, laquelle exprime la relation qu'il doit avoir en général entre le mouvement du nœud, & la variation de l'inclinaiſon.

Je fais cette remarque, moins pour faire naître des doutes ſur les réſultats de ces deux ſavans Aſtronomes, que pour les engager à ſe rendre de plus en plus attentifs à la détermination d'élémens ſi délicats & ſi difficiles.

Au reste, quand on sera bien assuré de l'exactitude de ces élémens, on pourra alors se servir de nos formules pour donner à la théorie du quatrième satellite de nouveaux degrés de perfection.

FIN.

RÉPONSE

A LA Queſtion propoſée par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, pour l'année 1772.

De perfectionner les methodes ſur leſquelles eſt fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce Satellite, qui ſont encore incertaines, & d'examiner en particulier ſi l'on peut rendre raiſon, par cette théorie de l'équation ſéculaire du mouvement moyen de la Lune.

PAR M. EULER.

NOUVELLES
RECHERCHES
SUR LE VRAI MOUVEMENT
DE LA LUNE.

Où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles il eſt aſſujetti.

Hic labor extremus, longarum hæc meta viarum,
hinc jam digreſſi, veſtris appellimus oris.

LA théorie de la Lune étant un objet qui demande les plus longs & pénibles calculs, qui pourroient remplir un Volume tout entier, il me ſera permis de n'en rapporter ici que les points eſſentiels avec les réſultats que j'en ai déduits: je ſupprimerai donc tous les détails que je regarde toujours comme ſuperflus, lorſqu'on a à comparoître devant des Juges auſſi éclairés que sont ceux qui composent l'Académie Royale des Sciences de Paris. Je prendrai pour base le Mémoire qui a été couronné en 1770 sur cette même question, & je commencerai par y faire quelques réflexions.

I I.

D'abord il est indubitable que la manière dont cette recherche a été développée dans le susdit Mémoire, par le moyen des trois coordonnées, mérite à bien des égards la préférence sur toutes les autres méthodes, que les Géomètres ont employées jusqu'ici pour déterminer les inégalités dans le mouvement de la Lune. Cependant je ne me servirai ici que l'idée générale, qui y constitue le fonds de de la solution, ayant trouvé à propos d'y faire plusieurs changemens, tant à l'égard de la situation des trois coordonnées, que dans la résolution même des équations qui en déterminent les valeurs.

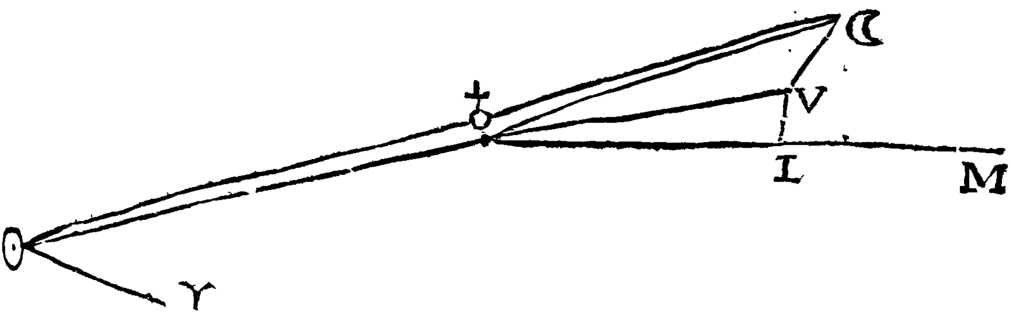
I I I.

D'ailleurs il s'en faut beaucoup que le développement du calcul, qui est rapporté dans ledit Mémoire, soit exécuté avec toute la justesse réquise, & il paroît que l'Auteur n'a pas eû assez de tems, ou peut être de patience pour achever un travail aussi fatiguant que l'est surtout le calcul numérique, calcul auquel on ne sauroit même se fier, à moins qu'on ne l'ait refait à diverses reprises, & avec tout le soin imaginable.

I V.

Que le plan de la figure représente le plan de l'écliptique, où je suppose le centre du Soleil immobile en ⊙,

& pour un tems proposé quelconque le centre de la Terre en ♁, la droite ☉ ♈ marquant le lieu de l'équinoxe du printems. Soit ensuite hors de ce plan, ☾ le centre de la Lune, d'où j'abaisse sur ce plan de l'écliptique la perpendiculaire ☾ *V*, de sorte que la droite ♁ *V* marque la longitude vraie de la Lune, & l'angle ☾ ♁ *V* sa latitude, que je suppose boréale. Je tire ensuite dans le plan de l'écliptique la droite ♁ *M* qui doit indiquer la longitude moyenne de la Lune, sur laquelle j'abaisse enfin de *V* la perpendiculaire *V L*, pour avoir les trois coordonnées orthogonales ♁ *L*, *L V*, & *V* ☾, dont il s'agit de déterminer les valeurs. On voit d'abord que cette disposition est un peu différente de celle qui a été employée dans le Mémoire susmentionné; mais aussi verra-t-on bientôt que j'en retire l'avantage, que mes formules deviennent par-là plus simples & leurs applications au calcul moins embarrassantes. Cependant la conduite du calcul reste à peu près la même, de sorte qu'il seroit superflu de les déduire de nouveau des premiers principes de la méchanique.



V.

Suivant le Mémoire couronné ; les trois coordonnées ont été nommées : $♉ L = a(1 + x)$, $LV = ay$ & $V☾ = az$, où la lettre a marque une certaine diſtance moyenne de la Lune à la Terre, l'unité exprimant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil. Mais pour rendre le calcul plus aiſé, je nommerai ici la

1^{ere}. $♉ L = 1 + x$; 2^{de}. $LV = y$; 3^{me}. $V☾ = z$,

& maintenant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil ſera exprimée par $\frac{1}{a}$, où il eſt bon de remarquer que la derniere détermination de la parallaxe du Soleil donne à connoître, que la valeur de cette lettre a eſt fort à peu près $\frac{1}{390}$ & par conſéquent $\frac{1}{a} = 390$.

VI.

Il s'agit donc de trouver les équations différentio-différentielles, qui déterminent les valeurs de ces trois coordonnées $1 + x, y, z$, où je ſuppoſe qu'on emploie la même méthode qui eſt détaillée dans le Mémoire déja cité, où il convient de remarquer, que les tems y ſont exprimés par le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil, qui y eſt nommé t, de ſorte que ſa différentielle dt ſoit conſtante. Enſuite il entrera dans ces équations l'angle p, qui marque l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, & qu'on tire aiſément des Tables des moyens mouvemens, en ſouſtrayant la longitude moyenne du Soleil de celle de la Lune. Or, pour le rapport entre ces deux angles p & t, je poſe, comme dans ledit Mémoire

$\frac{dp}{dt} = m$, de ſorte que $m = 12{,}368903$, au moins pour le ſiécle préſent, en cas que la réſiſtance de l'éther ſoit capable d'y cauſer, avec le tems, quelque changement. Outre cela, il ſe trouvera dans ces équations encore un autre nombre conſtant λ, dont la valeur doit être ſuppoſée conformément aux raiſons alléguées dans ledit Mémoire $\lambda = (m + 1)^2 + \frac{1}{2}$, ou bien $\lambda = 179{,}228928$. Enfin, l'excentricité de l'orbite du Soleil, que je nommerai ici $\varkappa$, s'introduit auſſi dans nos équations, dont la valeur eſt $\varkappa = 0{,}01678$.

VII.

Après ces explications, ayant réduit le calcul à ces trois nouvelles coordonnées, & développé les formules irrationelles, de la même manière, qu'on l'avoit déja fait dans le Mémoire ſuſdit, on trouvera enfin les trois équations différentio-différentielles, telles que je les ai repréſentées ſur les feuilles détachées ci-jointes, Table première, ſeconde & troiſième, où la différentielle du tems *dt* eſt ſuppoſé conſtante.

VIII.

On verra par là que j'ai pouſſé ici beaucoup plus loin l'évolution des formules irrationnelles, & même juſqu'à la ſixième dimenſion des trois inconnues x, y & z, puiſque j'ai trouvé dans la ſuite que quelques inégalités de la Lune demandent abſolument la cinquième dimenſion, ſans quoi leur détermination deviendroit tout à fait fauſſe. Auſſi les petits termes affectés par les lettres a & x ſont ici plus ſoigneuſement développés, & dans les derniers on remarquera d'abord une grande différence par rapport à ceux du Mémoire allégué, dont la raiſon eſt, que les coordonnées ſont rapportées ici à un autre axe que là. Mais a l'égard des autres membres on découvrira une belle harmonie.

I X.

En conſidèrant la grande prolixité de ces équations; on conviendra aiſément qu il faut entiérement renoncer à toute eſpérance de les intégrer, & tous nos ſoins ne doivent aboutir qu'à chercher par des convenables approximations les juſtes valeurs de nos trois inconnues x, y & z, & qui renferment même les conſtantes arbitraires que les intégrations actuelles y introduiroient.

X.

Parmi ces conſtantes, il ſe préſente d'abord l'excentricité de l'orbite lunaire, que je déſignerai ici par la lettre k, à laquelle ſe rapporte un nouvel angle q, qui eſt l'anomalie moyenne de la Lune, & dont le rapport à l'angle t eſt ſuppoſé $\frac{dq}{dt} = n = 13,25604$, & je ne répete pas ici tout ce qui eſt rapporté à cette occaſion ſur le mouvement de l'apogée de la Lune. Enſuite une autre conſtante renfermera l'inclinaiſon de l'orbite lunaire à l'écliptique, que je marquerai dans la ſuite par la lettre i, à laquelle ſe rapporte auſſi un certain angle r, nommé l'argument de latitude, qu'on trouve en ôtant la longitude moyenne du nœud aſcendant de celle de la Lune; tout comme l'angle précédent q ſe trouve en ôtant la longitude moyenne de l'apogée lunaire de celle de la Lune, de ſorte que ces deux angles ſont auſſi proportionels au tems : or pour ce dernier je poſe $\frac{dr}{dt} = l$, dont la valeur ſe tire des tables

qui

qui donnent $l = 13,42263$. Outre ces deux conſtantes k & i, les angles q & r même renferment encore deux conſtantes: car puiſque nous n'avons poſé que leurs différentielles $dq = n\,dt$, & $dr = l\,dt$, leurs intégrales, où les angles q & r même renfermeront ſans doute chacun une conſtante. Il en eſt de même de l'angle p, parce que l'intégration de la formule $dp = mdt$ reçoit auſſi une conſtante. Enfin la ſixième conſtante ſe trouve déja dans la lettre a, entant qu'elle ſe rapporte à la quantité de l'orbite lunaire. Voilà donc toutes les ſix conſtantes, que les doubles intégrations de nos trois équations introduiroient dans le calcul, & dont les valeurs doivent être tirées de l'état actuel où ſe trouve le mouvement de la Lune.

XI.

En réfléchiſſant bien ſur la forme des valeurs qui ont été trouvées pour nos trois inconnues x, y & z, on verra d'abord que les deux premières x & y contiennent quelques termes indépendans des conſtantes k, i, a & $\varkappa$, qu'on comprend communément ſous le nom de VARIATION. Enſuite on y trouve des termes affectés ſimplement par la lettre k, & il eſt bon d'en diſtinguer ceux qui ſont affectés par le quarré k^2, ou même le cube k. Or, ces derniers deviennent déja ſi extrêmement petits, qu'on peut hardiment négliger ceux qui ſeroient affectés par des plus hautes puiſſances de k. Il y aura auſſi des termes affectés ſimplement par la lettre a, & enſuite auſſi par ak & $a\varkappa$; enfin des termes multipliés par $\varkappa$ & $\varkappa k$, en négligeant tous les autres termes akk, &c, qui à cauſe de leur petiteſſe ne ſeroient également d'aucune conſéquence. Pour ce qui regarde la troiſième inconnue z, elle renfermera principalement des termes affectés par la conſtante i ſimplement, & enſuite auſſi par ik, ia & $i\varkappa$, enfin des termes multipliés par ik^2 & i^3 en négligeant d'autres combinaisons qui meneroient à des inégalités trop petites, pour mériter quelque attention.

XII.

Mais puisque les deux premières équations renferment aussi le quarré de la troisième inconnue, zz, il s'ensuit que les quantités x & y doivent aussi renfermer des parties affectées premièrement par ii, & ensuite aussi par iik & iix, en négligeant des combinaisons plus compliquées. Or, ayant bien réfléchi sur tous les différens ordres des termes, dont nos trois inconnues x, y & z seront composées ; j'ai trouvé que les termes de chaque ordre se peuvent déterminer à part, ce qui m'a fourni un très-grand secours pour déterminer exactement les valeurs cherchées, & pour m'assurer de leur justesse. Pour cet effet je distribue les valeurs de x, y & z conformément à ces classes que je viens d'établir : en supposant

$$x = O' + k.P' + k^2.Q' + k^3.R' + a.S' + ak.T' + x.U' + xk.V' + ax.W' + i^2.X' + i^2k.Y' + i^2x.Z'.$$

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T + x.U + xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y + i^2x.Z.$$

$$z = i.p + ik.q + ik^2.r + ix.u + s^3.t + ia.r.$$

XIII.

Concevons à présent qu'on substitue réellement ces valeurs au lieu de x, y & z, dans nos trois équations générales, & qu'on distingue pour chacune les membres de chacun des ordres que je viens d'établir, en rejettant ceux qui monteroient à des ordres plus compliqués, comme ne méritant aucune attention, & on pourra séparément égaler à zero les membres de chaque ordre, ce qui nous fournira une multitude d'équations particulières, dont je ne rapporterai ici que celles des cinq premiers ordres (*), vu que les autres ont toutes des formes semblables, & que leur résolution demande la même méthode qui est enseignée dans le Mémoire cité, en y employant certains artifices qui ont rendu la solution plus aisée & en même tems plus certaine ; de sorte qu'il ne reste plus aucun doute sur les coëfficiens de tous les termes qui en ont été trouvés. TABLE IV. *a*, *b*, *c*, *d*.

XIV.

Je passe maintenant aux résultats même de ces recherches pénibles, que je me contenterai d'avoir mis ici sous les yeux de l'Académie, tels que je les ai trouvé avec l'assistance de trois habiles Calculateurs, dont chacun s'est donné la peine de les calculer selon les différentes méthodes que je leur ai fournies, & répéter ces calculs plusieurs fois de suite ; de sorte que je puis répondre parfaitement de l'exactitude & de la justesse des valeurs trouvées pour les coëfficiens O, P, Q, &c. p, q, r, &c. & qui sont représentés dans les Tables V^me. VI^me. VII^me. Les recherches même & les artifices analytiques, qu'il m'a fallu employer pour y parvenir, remplissent un assez grand volume, que je ne manquerai cependant pas de mettre en son tems sous les yeux du Public.

(*) J'y ai ajouté encore les équations particulières du septième & onzième ordre, comme les moins compliqués, ne renfermant que les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Terre x & du quarré de l'inclinaison i^2.

XV.

En ſubſtituant toutes ces valeurs, pour avoir celles de nos trois inconnues x, y & z, je comparai d'abord ces formules avec celles que Meſſieurs Mayer & Clairaut ont employées pour conſtruire leurs Tables lunaires: je m'aſſurai par ce moyen des juſtes valeurs qu'il faut donner aux deux conſtantes k & i, & je les trouvai

$$k = 0,05449 ; \; i = 0,08944.$$

Mais ayant enſuite comparé mes formules trouvées avec pluſieurs obſervations actuelles, ſur leſquelles j'avois fait le calcul, j'ai remarqué que l'erreur, dans quelques-unes, montoit à preſque une minute; de ſorte que pour obtenir un plus juſte accord entre les formules trouvées & les obſervations, il m'a fallu apporter encore quelques légères corrections aux valeurs de k & i, que j'ai enfin trouvé

$$k = 0,05450 ; \; i = 0,08964.$$

XVI.

Subſtituons donc en effet ces valeurs pour k & i, & ſuppoſons $a = \frac{1}{390}$ & $x = 0,01678$, pour obtenir les valeurs entiérement développées en nombres de nos trois coordonnées ♁$L = 1 + x$, $LV = y$ & V☾ $= z$, que je mettrai ici devant les yeux dans les VIII[me]. IX[me]. & X[me]. Table, où au lieu des fractions décimales, j'ai exprimé tous les coëfficiens en dix millioniémes parties de l'unité. Ces parties ſont ſi petites que 100 ne ſauroient produier que 2 ſecondes dans le lieu de la Lune.

XVII.

Pour se servir de ces formules, d'où l'on pourroit aisément construire des Tables ordinaires, on n'a qu'à tirer des bonnes Tables des moyens mouvemens, pour un tems proposé quelconque, les cinq élémens suivans.

1°. Longitude moyenne de la Lune $=$ L.

2°. Longitude de son apogée . . . . $=$ P.

3°. Longitude du nœud ascendant . $=$ N.

4°. Longitude moyenne du Soleil . . $=$ Λ.

5°. Longitude de son apogée . . . . $=$ Π.

Et de former de là les quatre argumens suivans:

I°. $p = L - \Lambda$;

II°. $q = L - P$;

III°. $r = L - N$;

IV°. $t = \Delta - \Pi$.

D'où l'on trouvera aisément les justes valeurs de nos trois coordonnées

$$♂ L = 1 + x ; LV = y ; V☾ = z.$$

XVIII.

Ayant trouvé ces trois valeurs, qu'on cherehe les deux angles suivans

$$L ♂ V = \varphi \text{ \& } V ♂ ☾ = \psi.$$

Par le moyen de ces ſimples formules :

$$tang.\ \varphi = \frac{y}{1+x}\,;\ tang.\ \psi = \frac{z \cdot cof.\ \varphi}{1+x}$$

Et alors l'angle φ ou ajouté, ou retranché de la longitude moyenne de la Lune $= L$, ſelon que y provient *poſitif* ou *négatif*, donnera d'abord la vraie longitude de la Lune, pendant que l'autre angle ψ, montre ſur le champ ſa vraie latitude ou *boréale*, ou *méridionale*, ſelon que z eſt *poſitif* ou *négatif*. Ce calcul paroît d'autant plus aiſé, qu'il ne s'agit ici que des angles, connus par les ſeules Tables des moyens mouvemens, ſans s'embarraſſer ni d'aucune correction dans le lieu des nœuds, ou dans l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, ni même de la réduction à l'écliptique. Car tous ces articles, d'ailleurs aſſez embarraſſans, ſe trouvent déja renfermés dans nos formules.

XIX.

Enfin, il eſt fort aiſé de tirer de-là la vraie diſtance de la Lune à la Terre, en calculant cette formule

$$(1 + x)\ \text{fec}\ \varphi\ \text{fec}\ \psi.$$

Ou bien pour connoître la vraie parallaxe équatorienne de la Lune, elle ſera exprimée par cette formule

$$\frac{10,000,000}{1+x} \times 56'\ 35'' \times cof.\ \varphi \times cof.\ \psi,$$

où je remarque que j'ai conclu cette parallaxe moyenne de $56'\,35''$, qui répond à la diſtance moyenne 1, ou plutôt 10,000,000 de l'éclipse du Soleil de l'année 1769 ; de sorte qu'on en peut être assuré à quelques secondes près. On reconnoîtra aisément que cette détermination de la parallaxe doit être infiniment plus exacte que celle qu'on tire des Tables ordinaires, vu qu'elle dépend ici ouvertement de toutes les inégalités de la Lune, pendant que les Tables, dont on se sert, n'y employent que quelques inégalités qui y influent principalement.

X X.

Par-là, j'espère avoir pleinement satisfait aux vues de l'illustre ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, ayant entiérement développé & fixé toutes les inégalités, auxquelles le mouvement de ce satellite est assujetti, sans en excepter aucune, qui pourroit influer sur le lieu de la Lune pour plus de dix secondes, & ayant enfin fait voir que, comme aucune de ces inégalités ne sauroit produire une équation séculaire, dans le moyen mouvement de la Lune, on n'en pourra non plus rendre raison par la seule attraction du Soleil & de tout autre Corps céleste ; de sorte qu'il ne reste plus aucun doute que cette équation séculaire, qu'on observe, ne soit l'effet de la résistance du milieu, dans lequel les planètes se meuvent.

Au reste, je ne doute pas, qu'en corrigeant tant soit peu les lieux moyens de l'apogée & du nœud dans les Tables ordinaires, on ne puisse, par ce moyen, parvenir à déterminer le lieu de la Lune à 30 secondes près. Or, pour un plus haut degré de précision, on ne sauroit jamais l'espérer à cause de l'action des autres planètes à laquelle la Lune est assujettie.

FIN.

TABLE

PREMIÈRE.

§ 7.

Première Équation générale.

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2(m+1)dy}{dt} - 3\lambda x$$

$$- \tfrac{3}{2} \cos. 2p$$

$$- \tfrac{3}{2} x \cos. 2p + \tfrac{3}{2} y \sin. 2p$$

$$+ 3\lambda x^2 - \tfrac{3}{2} \lambda(y^2 + z^2)$$

$$- 4\lambda x^3 + 6\lambda x(y^2 + z^2)$$

$$+ 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2(y^2 + z^2 + \tfrac{15}{8} \lambda(y^2 + z^2)^2$$

$$- 6\lambda x^5 + 30\lambda x^3(y^2 + z^2) - \tfrac{45}{4} \lambda x(y^2 + z^2)^2$$

$$+ 7\lambda x^6 - \tfrac{105}{2} \lambda x^4(y^2 + z^2) + \tfrac{315}{8} \lambda x^2(y^2 + z^2)^2$$
$$- \tfrac{35}{16} (y^2 + z^2)^3$$

$$- \tfrac{3}{8} a(3 \cos. p + 5 \cos. 3p)$$

$$- \tfrac{3}{4} a x(3 \cos. p + 5 \cos. 3p) + \tfrac{3}{4} a y(\sin. p + 5 \sin. 3p)$$

$$- \tfrac{3}{8} a x^2(3 \cos. p + 5 \cos. 3p) + \tfrac{3}{4} a x y(\sin. p + 5 \sin. 3p)$$
$$- \tfrac{3}{8} a y^2(\cos. p - 5 \cos. 3p) + \tfrac{3}{2} a z^2 \cos. p$$

$$+ \tfrac{3}{4} x\big(2 \cos. t + 7 \cos. (2p - t) - \cos. (2p + t)\big)$$

$$+\frac{3}{4}kx(2\cos. t+7\cos.(2p-t)-\cos. 2p+t))$$
$$-\frac{3}{4}ky(7\sin.(2p-t)-\sin.(2p+t))$$

$$+\frac{3}{8}ak(9\cos.(p-t)+3\cos.(p+t)+25\cos.(3p-t)$$
$$-5\cos.(3p+t))$$

$$+\frac{3}{4}akx(9\cos.(p-t)+3\cos.(p+t)+25\cos.(3p-t)$$
$$-5\cos.(3p+t))-\frac{3}{4}aky(3\sin.(p-t)+\sin.(p+t)$$
$$+25\sin.(3p-t)-5\sin.(3p+t))$$

$$+\frac{3}{8}akx^2(9\cos.(p-t)+3\cos.(p+t)+25\cos.(3p-t)$$
$$-5\cos.(3p+t))-\frac{3}{4}akxy(3\sin.(p-t)+\sin.(p+t)$$
$$+25\sin.(3p-t)-5\sin.(3p+t))$$

$$+\frac{3}{8}aky^2(3\cos.(p-t)+\cos.(p+t)-25\cos.(3p-t)$$
$$+5\cos.(3p+t))-\frac{3}{2}akz^2(3\cos.(p-t)+\cos.(p+t))$$
$$=0.$$

TABLE II.

§ 7.

Seconde Equation générale.

$$\frac{ddy}{dt^2}+\frac{2(m+1)dx}{dt}$$

$$+\frac{3}{2}\sin. 2p$$

$$+\frac{3}{2}x\sin. 2p+\frac{3}{2}y\cos. 2p$$

$$-3\lambda xy$$

$$+6\lambda x^2y-\frac{3}{2}\lambda y(y^2+z^2)$$

$$- 10\lambda x^3 y + \tfrac{15}{2}\lambda x y(y^2 + z^2)$$

$$+ 15\lambda x^4 y - \tfrac{45}{2}\lambda x^2 y(y^2 + z^2) + \tfrac{15}{8}\lambda y(y^2 + z^2)^2$$

$$- 21\lambda x^5 y + \tfrac{105}{2}\lambda x^3 y(y^2 + z^2) + \tfrac{105}{8}\lambda x y(y^2 + z^2)^2$$

$$+ \tfrac{3}{8} a(\text{sin.}\, p + 5\, \text{sin.}\, 3p)$$

$$+ \tfrac{3}{4} a x(\text{sin.}\, p + 5\, \text{sin.}\, 3p) - \tfrac{3}{4} a y(\text{cos.}\, p - 5\, \text{cos.}\, 3p)$$

$$+ \tfrac{3}{8} a x^2(\text{sin.}\, p + 5\, \text{sin.}\, 3p) - \tfrac{3}{4} a x y(\text{cos.}\, p - 5\, \text{cos.}\, 3p)$$
$$+ \tfrac{3}{8} a y^2(3\, \text{sin.}\, p - 5\, \text{sin.}\, 3p) - \tfrac{3}{2} a z^2 \text{sin.}\, p$$

$$- \tfrac{3}{4} k\big(7\, \text{sin.}(2p - t) - \text{sin.}(2p + t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{4} k x\big(7\, \text{sin.}(2p - t) - \text{sin.}(2p + t)\big) + \tfrac{3}{4} k y\big(2\, \text{cos.}\, t$$
$$- 7\, \text{cos.}(2p - t) + \text{cos.}(2p + t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8} a k\big(3\, \text{sin.}(p - t) + \text{sin.}(p + t) + 25\, \text{sin.}(3p - t)$$
$$- 5\, \text{sin.}\,(3p + t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{4} a k x\big(3\, \text{sin.}(p - t) + \text{sin.}(p + t) + 25\, \text{sin.}(3p - t)$$
$$- 5\, \text{sin.}(3p + t)\big) + \tfrac{3}{4} a k y\big(3\, \text{cos.}(p - t) + \text{cos.}(p + t)$$
$$- 25\, \text{cos.}(3p - t) + 5\, \text{cos.}(3p + t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8} a k x x\big(3\, \text{sin.}(p - t) + \text{sin.}(p + t) + 25\, \text{sin.}(3p - t)$$
$$- 5\, \text{sin.}(3p + t)\big) + \tfrac{3}{4} a k x y\big(3\, \text{cos.}(p - t) + \text{cos.}(p + t)$$
$$- 25\, \text{cos.}(3p - t) + 5\, \text{cos.}(3p + t)\big)$$

$$- \tfrac{3}{8} a k y y\big(9\, \text{sin.}(p - t) + 3\, \text{sin.}(p + t) - 25\, \text{sin.}(3p - t)$$
$$+ 5\, \text{sin.}(3p + t)\big) + \tfrac{3}{2} a k z z\big(3\, \text{sin.}(p - t) + \text{sin.}(p + t)\big)$$
$$= 0.$$

TABLE III.

§ 7.

Troisième Equation générale.

$$\frac{ddz}{dt^2} + (\lambda + 1)z$$

$$- 3\lambda x z$$

$$+ 6\lambda x^2 z - \tfrac{3}{2}\lambda z(y^2 + z^2)$$

$$- 10\lambda x^3 z + \tfrac{15}{2}\lambda x z(y^2 + z^2)$$

$$+ 15\lambda x^4 z - \tfrac{45}{2}\lambda x^2 z(y^2 + \tfrac{15}{8}\lambda z(y^2 + z^2) + z^2)^2$$

$$- 21\lambda x^5 z + \tfrac{105}{2}\lambda x^3 z(y^2 + z^2) - \tfrac{105}{8}\lambda x z(y^2 + z^2)^2$$

$$+ 3 a z \operatorname{cos}. p$$

$$+ 3 a x z \operatorname{cos}. p - 3 a y z \operatorname{sin}. p$$

$$- 3 k z \operatorname{cos}. t$$

$$- 3 a k z(3 \operatorname{cos}.(p - t) + \operatorname{cos}.(p + t))$$

$$- 3 a k x z(3 \operatorname{cos}.(p - t) + \operatorname{cos}.(p + t)) + 3 a k y z (3 \operatorname{sin}.(p - t) + \operatorname{sin}.(p + t)) = 0.$$

TABLE IV. *a.*

§ 13.

Equations particulières du premier ordre, pour déterminer les valeurs de O' & O

$$1.\ \frac{ddO'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dO}{dt} - 3\lambda O' - \tfrac{3}{2}\,cos.\,2p - \tfrac{3}{2}\,O'cos.\,2p$$
$$+ \tfrac{3}{2}\,O\,sin.\,2p + 3\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2 = 0.$$

$$2.\ \frac{ddO}{dt^2} + \frac{2(m+1)dO'}{dt} + \tfrac{3}{2}\,sin.\,2p + \tfrac{3}{2}\,O'sin.\,2p + \tfrac{3}{2}\,O\,cos.\,2p$$
$$- 3\lambda O'O = 0.$$

Equations particulières du second ordre, pour déterminer les valeurs de P' & P.

$$1.\ \frac{ddP'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dP}{dt} - 3\lambda P' + P'.(-\tfrac{3}{2}\,cos.\,2p + 6\lambda O'$$
$$- 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2) + P.(+\tfrac{3}{2}\,sin.\,2p - 3\lambda O$$
$$+ 12\lambda O'O) = 0.$$

$$2.\ \frac{ddP}{dt^2} + \frac{2(m+1)dP'}{dt} + P'.(+\tfrac{3}{2}\,sin.\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$$
$$+ P.(+\tfrac{3}{2}\,cos.\,2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2) = 0.$$

Equations particulières du troisième ordre, pour déterminer les valeurs de Q' & Q.

$$1.\ \frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dQ}{dt} - 3\lambda Q'$$
$$+ Q'.(-\tfrac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$
$$+ Q.(+\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda.O'O)$$
$$+ P'^2.(3\lambda - 12\lambda O' + 30\lambda O'^2 - 15\lambda O^2)$$
$$+ P'.P.(12\lambda O - 60\lambda O'O)$$
$$+ P^2.(-\tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \tfrac{45}{4}\lambda O^2) = 0.$$

$$2.\ \frac{ddQ}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dQ'}{dt}$$
$$+ Q'.(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O)$$
$$+ Q.(\tfrac{3}{2}\cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2)$$
$$+ P'^2.(6\lambda O - 30\lambda O'O)$$
$$+ P'.P.(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{45}{2}\lambda O^2)$$
$$+ P^2.(-\tfrac{9}{2}\lambda O + \tfrac{45}{2}\lambda O'O) = 0.$$

TABLE IV. *b.* § 13.

Equations particulières du quatrième ordre, pour déterminer les valeurs de R' & R.

$$
\begin{aligned}
1.\ & \frac{ddR'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dR}{dt} - 3\lambda R' \\
& + R'(-\tfrac{3}{2} cos\!f.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2) \\
& + R(\tfrac{3}{2} sin.\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O) \\
& + 2P'Q(3\lambda - 12\lambda O' + 30\lambda O'^2 - 15\lambda O^2) \\
& + (P'Q + PQ')(12\lambda O - 60\lambda O'O) \\
& + 2PQ(-\tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \tfrac{45}{4}\lambda O^2) \\
& + P'^3(-4\lambda + 20\lambda O' - 60\lambda O'^2 + 30\lambda O^2) \\
& + 3P'^2P(-10\lambda O + 60\lambda O'O) \\
& + 3P'P^2(3\lambda - 10\lambda O' + 30\lambda O' - \tfrac{45}{2}\lambda O^2) \\
& + P^3(\tfrac{15}{2}\lambda O - 45\lambda O'O) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ & \frac{ddR}{dt^2} + \frac{2(m+1)dR'}{dt} \\
& + R'(\tfrac{3}{2} sin.\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O) \\
& + R(\tfrac{3}{2} cos\!f.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2) \\
& + 2P'Q'(6\lambda O - 30\lambda O'O) \\
& + (P'Q + PQ')(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{45}{2}\lambda O^2) \\
& + 2PQ(-\tfrac{9}{2}\lambda O + \tfrac{45}{2}\lambda O'O) \\
& + P'^3(-10\lambda O + 60\lambda O'O) \\
& + 3P'^2P(2\lambda - 10\lambda O' + 30\lambda O'^2 - \tfrac{45}{2}\lambda O^2) \\
& + 3P'P^2(\tfrac{15}{2}\lambda O - 45\lambda O'O) \\
& + P^3(-\tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{15}{2}\lambda O' - \tfrac{45}{2}\lambda O'^2 + \tfrac{75}{4}\lambda O^2) = 0.
\end{aligned}
$$

TABLE IV. c. § 13.

Equations particulières du cinquième ordre, pour déterminer les valeurs de S' & S.

$$1.\quad \frac{ddS'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dS}{dt} - 3\lambda S$$
$$+ S'\left(-\tfrac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O^{2} + 6\lambda O^2\right)$$
$$+ S\left(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right)$$
$$- \tfrac{3}{8}(3\cos.p + 5\cos.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$
$$+ \tfrac{3}{4}(\sin.p + 5\sin.3p)(O + O'O)$$
$$- \tfrac{3}{8}(\cos.p - 5\cos.3p)O^2 = 0.$$

$$2.\quad \frac{ddS}{dt^2} + \frac{2(m+1)dS'}{dt} -$$
$$+ S'\left(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right)$$
$$+ S\left(\tfrac{3}{2}\cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{2}{2}\lambda O^2\right)$$
$$+ \tfrac{3}{8}(\sin.p + 5\sin.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$
$$- \tfrac{3}{4}(\cos.p - 5\cos.3p)(O + O'O)$$
$$+ \tfrac{3}{8}(3\sin.p - \sin.3p)O^2 = 0.$$

Equations particulières du septième ordre, pour déterminer les valeurs de U' & U.

$$1.\quad \frac{ddU'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dU'}{dt} - 3\lambda U'$$
$$+ U'\left(-\tfrac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2\right)$$
$$+ U\left(\tfrac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right)$$
$$+ \tfrac{3}{4}\big(2\cos.t + 7\cos.(2p-t) - \cos.(2p+t)\big)(1+O')$$
$$- \tfrac{3}{4}\big(7\sin.(2p-t) - \sin.(2p+t)\big)O = 0.$$

2.

$$
\begin{aligned}
2.\ \frac{ddU}{dt^2} &+ \frac{2(m+1)dU'}{dt} \\
&+ U'\left(\tfrac{3}{2}\,\text{sin.}\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right) \\
&+ U\left(\tfrac{3}{2}\,\text{cos.}\,2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2\right) \\
&- \tfrac{3}{4}\big(7\,\text{sin.}\,(2p-t) - \text{sin.}\,(2p+t)\big)(1+O') \\
&+ \tfrac{3}{4}\big(2\,\text{cos.}\,t - 7\,\text{cos.}\,(2p-t) + \text{cos.}\,(2p+t)\big)O \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Equations particulières du onzième ordre, pour déterminer les valeurs de X' & X.

$$
\begin{aligned}
1.\ \frac{ddX'}{dt^2} &- \frac{2(m+1)dX}{dt} - 3\lambda X' \\
&+ X'\left(-\tfrac{3}{2}\,\text{cos.}\,2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2\right) \\
&+ X.\left(\tfrac{3}{2}\,\text{sin.}\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right) \\
&+ zz'\left(-\tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \tfrac{15}{4}\lambda O^2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ \frac{ddX}{dt^2} &+ \frac{2(m+1)dX'}{dt} \\
&+ X'\left(\tfrac{3}{2}\,\text{sin.}\,2p - 3\lambda O + 12\lambda O'O\right) \\
&+ X\left(\tfrac{3}{2}\,\text{cos.}\,2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2\right) \\
&+ zz'\left(-\tfrac{3}{2}\lambda O + \tfrac{15}{2}\lambda O'O\right) = 0.
\end{aligned}
$$

TABLE IV. d. § 13.

Pour la troisieme Coordonnée z.

Equation particulière du premier ordre, pour déterminer la valeur de p'.

$$\frac{ddp'}{dt^2} + (\lambda+1)p' + p'(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2) = 0.$$

Equation particulière du second ordre, pour déterminer la valeur de q'.

$$\begin{aligned}\frac{ddq}{dt^2} &+ (\lambda+1)q + q(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2)\\ &+ P'.p'(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2)\\ &+ P.p'(-3\lambda O + 15\lambda O'O = 0.\end{aligned}$$

Equation particulière du troisième ordre, pour déterminer la valeur de r'

$$\begin{aligned}\frac{ddr'}{dt^2} &+ (\lambda+1)r' + r'(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2\\ &+ (P'q' + Q'p')(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda o'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2)\\ &+ (Pq' + Q'p')(-3\lambda O + 14\lambda O'O)\\ &+ P'^2.p'(6\lambda - 30\lambda O' + 90\lambda O'^2 - \tfrac{45}{2}\lambda O^2)\\ &+ P'.P.p'(15\lambda O - 90\lambda O'O)\\ &+ P^2.p(-\tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{15}{2}\lambda O' - \tfrac{45}{2}\lambda O'^2 + \tfrac{45}{4}\lambda O^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Equation particulière du quatrième ordre, pour déterminer la valeur de s'.

$$\frac{dd\,s'}{dt^2} + (\lambda + 1)s' + s'.(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \tfrac{3}{2}\lambda O^2)$$
$$+ U'p'(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \tfrac{15}{2}\lambda O^2)$$
$$+ U p'(-3\lambda O + 15\lambda O' O$$
$$- 3p'.\cos.t = 0.$$

TABLE V.

§ 14

Pour la première Coordonnée.

$$x = O' + k \,.\, P' + k^2 \,.\, Q' + k^3 \,.\, R' + a \,.\, S' + ak \,.\, T' + x \,.\, U' + xk \,.\, V' + ax \,.\, W' + i^2 \,.\, X' + i^2 k \,.\, Y' + i^2 x \,.\, Z'.$$

On trouve

$$O' = + 0{,}0000240 - 0{,}0071801 \,.\, \mathrm{cos}.\, 2p + 0{,}0000060 \,.\, \mathrm{cos}.\, 4p.$$

$$P' = + \mathrm{cos}.\, q + 0{,}187695 \,.\, \mathrm{cos}.\, (2p - q) - 0{,}000514 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p - q) - 0{,}002703 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p + q) - 0{,}000021\ \mathrm{cos}.\,(4p + q)$$

$$Q' = - 0{,}53896 - 0{,}21903 \,.\, \mathrm{cos}.\, 2p + 0{,}00195 \,.\, \mathrm{cos}.\, 4p + 0{,}50967 \,.\, \mathrm{cos}.\, q - 0{,}20179 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p - 2q) + 0{,}02278 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p - 2q) + 0{,}00482 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p + 2q) + 0{,}00004 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p + 2q)$$

$$R' = 0 \,.\, \mathrm{cos}.\, q - 0{,}1908 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p - q) - 0{,}0482 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p - q) - 0{,}3807 \,.\, \mathrm{cos}.\, 3q - 0{,}2300 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p + q) - 0{,}0058 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p + q) + 0{,}2623 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p - 3q) - 0{,}0239 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p - 3q) - 0{,}0068 \,.\, \mathrm{cos}.\,(2p + 3q) + 0{,}0000 \,.\, \mathrm{cos}.\,(4p + 3q)$$

$$S' = + 0{,}11419 \,.\, \mathrm{cos}.\, p - 0{,}00289 \,.\, \mathrm{cos}.\, 3p$$

$$T' = - 0{,}0813 \,.\, \mathrm{cos}\,(p - q) + 0{,}1205 \,.\, \mathrm{cos}.\,(p + q) - 0{,}0088 \,.\, \mathrm{cos}.\,(3p - q) + 0{,}0015 \,.\, \mathrm{cos}.\,(3p + q)$$

$$U' = -0{,}006829 . \cos. t + 0{,}029397 . \cos. (2p - t)$$
$$+ 0{,}000046 . \cos. (4p - t) - 0{,}003452 . \cos. (2p + t)$$
$$- 0{,}000004 . \cos. (4p + t)$$

$$V' = -0{,}17091 . \cos. (q - t) + 0{,}02943 . \cos. (2p - q + t)$$
$$- 0{,}43632 . \cos. (2p - q - t) + 0{,}10743 . \cos. (q + t)$$
$$+ 0{,}01372 . \cos. (2p + q - t) - 0{,}00037 . \cos. (2p + q + t)$$

$$W' = + 0{,}1164 . \cos. (p - t) + 0{,}6135 . \cos. (p + t)$$
$$+ 0{,}0162 . \cos. (3p - t) - 0{,}0048 . \cos. (3p + t)$$

$$X' = - 0{,}25019 + 0{,}01928 . \cos. 2p + 0{,}24728 . \cos. 2r$$
$$- 0{,}01255 . \cos. (2p - 2r) + 0{,}00025 . \cos. (4p - 2r)$$
$$+ 0{,}00002 . \cos. 4p + 0{,}00038 . \cos. (2p + 2r)$$
$$+ 0{,}00000 . \cos. (4p + 2r)$$

$$Y' = + 0 . \cos. q - 0{,}0709 . \cos. (2p - q) - 0{,}0755 . \cos. (q - 2r)$$
$$- 0{,}0268 . \cos. (2p - q + 2r) - 0{,}0847 . \cos. (2p + q - 2r)$$
$$- 0{,}0046 . \cos. (2p + q) - 0{,}1261 . \cos. (q + 2r)$$
$$+ 0{,}0252 . \cos. (2p - q - 2r) - 0{,}0010 . \cos. (2p + q + 2r)$$

$$Z' = + 0{,}0098 . \cos. t - 0{,}0584 . \cos. (2p - t)$$
$$+ 0{,}0189 . \cos. (t - 2r) + 0{,}0220 . \cos. (2p + t)$$
$$- 0{,}0108 . \cos. (t + 2r) - 0{,}0017 . \cos. (2p - t + 2r)$$
$$- 0{,}0096 . \cos. (2p + t - 2r) + 0{,}0288 . \cos. (2p - t - 2r)$$
$$+ 0{,}0001 . \cos. (2p + t + 2r)$$

TABLE VI.

§ 14.

Pour la feconde Coordonnée.

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T + x.U$$
$$+ xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y + i^2x.Z.$$

On trouve

$$O = +0{,}0102117.\sin.\ 2p + 0{,}0000057.\sin.\ 4p.$$

$$P = -2{,}012639.\sin.q - 0{,}411247.\sin.(2p-q)$$
$$-0{,}000724.\sin.(4p-q) - 0{,}003212.\sin.(2p+q)$$
$$-0{,}000019.\sin.(4p+q)$$

$$Q = +0{,}09800.\sin.\ 2p + 0{,}00175.\sin.\ 4p$$
$$+0{,}25209.\sin.\ 2q + 0{,}31159.\sin.(2p-2q)$$
$$+0{,}01183.\sin\ (4p-2q) + 0{,}00428.\sin.(2p+2q)$$
$$+0{,}00005.\sin.\ (4p+2q)$$

$$R = +1{,}3662.\sin.\ q + 0{,}4255.\sin.\ (2p-q)$$
$$-0{,}0377.\sin.\ (4p-q) - 0{,}2955.\sin.\ 3q$$
$$-0{,}0353.\sin.(2p+q) + 0{,}0010.\sin.\ (4p+q)$$
$$-0{,}2211.\sin.(2p-3q) - 0{,}0071.\sin.(4p-3q)$$
$$-0{,}0061.\sin.(2p+3q) - 0{,}0001.\sin.(4p+3q)$$

$$S = -0{,}24035.\sin.\ p + 0{,}00285.\sin.3p$$

$$T = +1{,}8056.\sin.(p-q) + 0{,}0603.\sin.(p+q)$$
$$+0{,}0720.\sin.(3p-q) - 0{,}0008.\sin.(3p+q)$$

$U = +0{,}190587 . \sin. t - 0{,}043312 . \sin. (2p - t)$
$- 0{,}000143 . \sin. (4p - t) + 0{,}005525 . \sin. (2p + t)$
$+ 0{,}000005 . \sin. (4p + t)$

$V = +0{,}66190 . \sin. (q - t) - 0{,}12631 . \sin. (2p - q + t)$
$+ 1{,}08068 . \sin. (2p - q - t) - 0{,}41712 . \sin. (q + t)$
$+ 0{,}01372 . \sin. (2p + q - t) - 0{,}00441 . \sin. (2p + q + t)$

$W = - 0{,}1093 . \sin. (p - t) - 1{,}2630 . \sin. (p + t)$
$- 0{,}0167 . \sin. (3p - t) + 0{,}0015 . \sin. (3p + t)$

$X = - 0{,}02145 . \sin. 2p - 0{,}24645 . \sin. 2r + 0\ 03407 .$
$\sin. (2p - 2r) - 0{,}00014 . \sin. (4p - 2r) - 0{,}00003 .$
$\sin. 4p - 0{,}00037 . \sin. (2p + 2r) + 0{,}00000 .$
$\sin. (4p + 2r)$

$Y = + 0{,}0014 . \sin. q + 0{,}1917 . \sin. (2p - q) - 0{,}4966 .$
$\sin. (q - 2r) + 0{,}0289 . \sin. (2p - q + 2r) + 0{,}1802 .$
$\sin. (2p + q - 2r) + 0{,}0095 . \sin. (2p + q) + 0{,}1249 .$
$\sin. (q + 2r) - 0{,}0590 . \sin. (2p - q - 2r) + 0{,}0009 .$
$\sin. (2p + q + 2r)$

$Z = - 0{,}2496 . \sin. t + 0{,}0697 . \sin. (2p - t)$
$+ 0{,}0204 . \sin. (t - 2r) - 0{,}0247 . \sin. (2p + t)$
$+ 0{,}0099 . \sin. (t + 2r) + 0{,}0017 . \sin. (2p - t + 2r)$
$+ 0{,}1016\ \sin. (2p + t - 2r) - 0{,}0755 .$
$\sin. (2p - t - 2r) - 0{,}0004 . \sin. (2p + t + 2r).$

TABLE VII.

§ 14.

Pour la troisième Coordonnée.

$$Z = i \,.\, p' + ik \,.\, q' + ik^2 \,.\, r' + ix \,.\, s' + i^3 \,.\, t' + ia \,.\, u'$$

On trouve

$p' = \textit{sin}.\, r + 0{,}036982 \,.\, \textit{sin}.\,(2p - r) + 0{,}001513 \,.\, \textit{sin}.(2p+r) + 0{,}000047 \,.\, \textit{sin}.(4p-r) + 0{,}000006 \,.\, \textit{sin}.\,(4p+r)$

$q' = -1{,}48323 \,.\, \textit{sin}.(q-r) - 0{,}11149 \,.\, \textit{sin}.(2p-q+r) - 0{,}01634 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+q-r) - 0{,}50496 \,.\, \textit{sin}.(q+r) - 0{,}24129 \,.\, \textit{sin}.\,(2p-q-r) - 0{,}00296 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+q+r) - 0{,}00063 \,.\, \textit{sin}.\,(4p-q+r) - 0{,}00364 \,.\, \textit{sin}.\,(4p-q-r) - 0{,}00008 \,.\, \textit{sin}.\,(4p+q-r) - 0{,}00002 \,.\, \textit{sin}.\,(4p+q+r)$

$r' = 0 \,.\, \textit{sin}.\, r + 0{,}0363 \,.\, \textit{sin}.\,(2p - r) + 0{,}3425 \,.\, \textit{sin}.\,(2q - r) + 0{,}1701 \,.\, \textit{sin}.(2p-2q-r) + 0{,}0126 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+2q-r) + 0{,}1589 \,.\, \textit{sin}.(2p+r) + 0{,}3799 \,.\, \textit{sin}.\,(2q+r) + 0{,}0498 \,.\, \textit{sin}.\,(2p-2q+r) + 0{,}9046 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+2q+r)$

$s' = -0{,}02384 \,.\, \textit{sin}.(r-t) + 0{,}03864 \,.\, \textit{sin}.(2p-r+t) - 0{,}00681 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+r-t) + 0{,}02022 \,.\, \textit{sin}.\,(r+t) - 0{,}10985 \,.\, \textit{sin}.\,(2p-r-t) + 0{,}00089 \,.\, \textit{sin}.\,(2p+r+t)$

$t' = 0.$

$t' = 0 . \sin. r + 0,0035 . \sin. (2p - r) + 0,0001 .$
$\sin. (4p - r) - 0,0006 . \sin. (2p + r) + 0,0000 .$
$\sin. (4p + r) + 0,0004 . \sin. 3r + 0,0172 .$
$\sin. (2p - 3r) + 0,0009 . \sin. (4p - 3r) + 0,0001 .$
$\sin. (2p + 3r) + 0,0000 . \sin. (4p + 3r)$

$u' = - 0,1583 . \sin. (p - r) - 0,0616 . \sin. (p + r)$
$- 0,0036 . \sin. (3p - r) - 0,0000 . \sin. (3p + r).$

TABLE VIII.

§ 16.

Valeur de la première Coordonnée ♄ $L = 1 + x$.

$+$	$9964129.$	$+$	$424.\cos 2p-3q$
$+$	$2928.\cos.p$	$-$	$38.\cos 4p-3q$
$-$	$63746.\cos.2p$	$-$	$1133.\cos.t$
$-$	$74.\cos.3p$	$+$	$264.\cos.p+t$
$+$	$120.\cos.4p$	$+$	$50.\cos.p-t$
$+$	$545000.\cos.q$	$-$	$549.\cos.2p+t$
$+$	$15139.\cos.2q$	$+$	$4854.\cos.2p-t$
$-$	$616.\cos.3q$	$-$	$2.\cos.3p+t$
$+$	$168.\cos.p+q$	$+$	$7.\cos.3p-t$
$+$	$143.\cos.2p+2q$	$-$	$1.\cos.4p+t$
$-$	$114.\cos.p-q$	$+$	$7.\cos.4p-t$
$-$	$5994.\cos.2p-2q$	$+$	$771.\cos.q+t$
$-$	$1875.\cos.2p+q$	$-$	$1663.\cos.q-t$
$+$	$101675.\cos.2p-q$	$-$	$8.\cos.2p+q+t$
$+$	$677.\cos.4p-2q$	$-$	$3727.\cos.2p-q-t$
$-$	$20.\cos.4p+q$	$+$	$126.\cos.2p+q-t$
$-$	$358.\cos 4p-q$	$+$	$282.\cos.2p-q+t$
$-$	$11.\cos.2p+3q$	$+$	$19870.\cos.2r$

$+$	$30.\cos.2p+2r$	$-$	$118.\cos.2p-q+2r$
$-$	$1008.\cos.2p-2r$	$-$	$14.\cos t+2r$
$+$	$4.\cos.4p-2r$	$+$	$25.\cos.t-2r$
$-$	$553.\cos.q+2r$	$+$	$1.\cos.2p+t+2r$
$-$	$267.\cos.q-2r$	$+$	$38.\cos.2p-t-2r$
$-$	$4.\cos.2p+p+2r$	$-$	$13.\cos.2p+t-2r$
$+$	$113\ \cos.2p-q-2r$	$-$	$2.\cos.2p-t+2r$
$-$	$457.\cos.2p+q-2r$		

TABLE IX.

§ 16.

Valeur de la seconde Coordonnée $LV = y$.

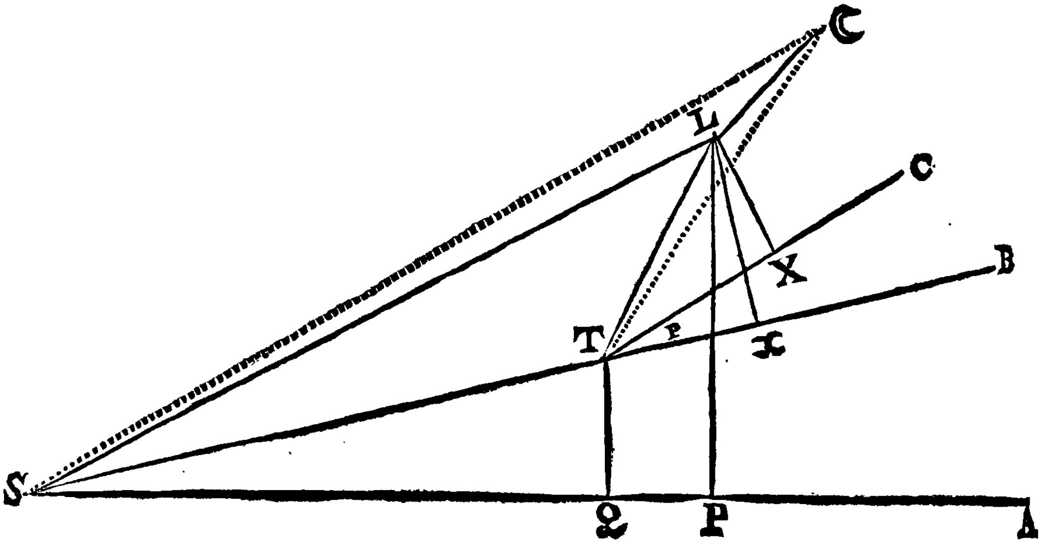
$-$	$6162 . \sin. p$	$-$	$471 . \sin. 4p - q$
$+$	$103304 . \sin. 2p$	$-$	$9 . \sin. 2p + 3q$
$+$	$73 . \sin. 3p$	$-$	$358 \sin. 2p - 3q$
$+$	$107 . \sin 4p$	$-$	$1 . \sin. 4p + 3q$
$-$	$1094678 . \sin. q$	$-$	$11 . \sin. 4p - 3q$
$+$	$7488 . \sin. 2q$	$+$	$31643 . \sin. t$
$-$	$478 . \sin. 3q$	$-$	$543 . \sin. p + t$
$+$	$84 . \sin p + q$	$-$	$47 . \sin. p - t$
$+$	$127 . \sin 2p + 2q$	$+$	$894 . \sin. 2p + t$
$+$	$2523 . \sin. p - q$	$-$	$7174 . \sin. 2p - t$
$+$	$9255 . \sin. 2p - 2q$	$+$	$1 . \sin. 3p + t$
$-$	$1766 . \sin. 2p + q$	$-$	$7 . \sin. 3p - t$
$+$	$1 . \sin. 4p + 2q$	$+$	$1 . \sin. 4p + t$
$-$	$222601 . \sin. 2p - q$	$-$	$23 . \sin. 4p - t$
$+$	$351 . \sin 4p - 2q$	$-$	$4455 . \sin. q + t$
$-$	$1 . \sin. 3p + q$	$+$	$6053 . \sin. q - t$
$+$	$101 . \sin. 3p - q$	$-$	$40 . \sin. 2p + q + t$
$-$	$8 . \sin. 4p + q$	$+$	$9883 . \sin. 2p - q - t$

+	125 . $\sin.2p+q-t$	−	261 . $\sin.2p-q-2r$
−	1152 . $\sin.2p-q+t$	+	790 . $\sin.2p+q-2r$
−	19803 . $\sin.2r$	+	126 . $\sin.2p-q+2r$
−	30 . $\sin.2p+2r$	+	13 . $\sin.t+2r$
+	2738 . $\sin.2p-2r$	+	28 . $\sin.t-2r$
−	11 . $\sin\ 4p-2r$	−	1 . $\sin.2p+t+2r$
+	548 . $\sin.q+2r$	−	102 . $\sin.2p-t-2r$
−	2174 . $\sin\ q-2r$	+	137 . $\sin.2p+t-2r$
+	3 . $\sin.2p+q+2r$	+	2 . $\sin.2p-t+2r$

RÉPONSE

A LA Question proposée par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, pour l'année 1770.

Perfectionner les methodes sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce Satellite, qui sont encore incertaines, & d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie de l'équation séculaire du mouvement de la Lune.


C
L
c
X
B
T
p
x
S
Q
P
A

THÉORIE
DE LA LUNE.

Errantemque canit Lunam. *Virg.*

PREMIÈRE SECTION
Des formules différentielles qui déterminent le mouvement de la Lune.

ARTICLE PREMIER.
Des formules tirées immédiatement de l'action du Soleil & de la Terre.

§. I.

Que le plan de l'écliptique soit représenté par celui de la planche : soit S le centre du Soleil considéré en repos, & SA une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems. Qu'à un temps proposé, la Terre se trouve en T & la Lune hors du plan de l'écliptique en ☾; d'où l'on baisse sur ce plan la perpendiculaire ☾L. Enfin ayant mené les droites LS, ST, TL, $S☾$ & $T☾$, qu'on tire fur SA les perpendiculaires TQ & LP.

I I.

Cela pofé, qu'on nomme $ST = u$: l'angle $AST = \varphi$; la diftance $SL = v$; & $TL = \omega$; enfuite les trois coordonnées pour le lieu de la Lune: $SP = X$, $PL = Y$, $L☾ = Z$; & on aura $SQ = u\, cof.\, \varphi$; $QT = u\, fin.\, \varphi$; & les diftances $S☾ = \sqrt{(vv + ZZ)}$; $T☾ = \sqrt{(\omega\omega + ZZ)}$. D'où exprimant les maffes du Soleil & de la Terre par S & T, les forces dont la Lune eft follicitée, feront

$$\text{Selon } ☾S = \frac{S}{vv + ZZ} \text{ \& felon } ☾T = \frac{T}{\omega\omega + ZZ}$$

qu'on décompofera aifément fuivant les directions de nos trois coordonnées.

I I I.

Que t marque un angle proportionnel au temps pour lequel nous prendrons dans la fuite l'anomalie moyenne du Soleil, & prenant le différentiel dt pour conftant, les principes de Méchanique nous fourniffent ces trois équations.

$$1.\ \frac{ddX}{dt^2} = -\frac{S.X}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(X - u\, cof.\, \varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}:$$

$$2.\ \frac{ddY}{dt^2} = -\frac{S.Y}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(Y - u\, fin.\, \varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}:$$

$$3.\ \frac{ddZ}{dt^2} = -\frac{S.Z}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.Z}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}:$$

I V.

Nous poferons dans le fuite la diftance moyenne de la Terre au Soleil $= 1$, & puifque t marque l'anomalie moyenne du Soleil, on ſait, par la théorie du mouvement des Planètes que la lettre S ſera auſſi exprimée par l'unité, ou $S = 1$. De-là on ſait auſſi que poſant l'excentricité de l'orbite de la Terre $= v$, dont la valeur eſt: $v = 0{,}01676$. On aura $u = 1 + v\,cof.\,t$ & $\frac{d\varphi}{dt} = 1 - 2v\,cof.\,t$. Ces valeurs ſeront ſuffiſantes pour notre deſſein, & on pourra hardiment négliger les termes où la lettre v auroit deux & pluſieurs dimenſions.

V.

Puiſque la diſtance v eſt extrêment grande, par rapport à l'ordonnée Z, & à plus forte raiſon vv à l'égard de ZZ, il ſera permis de négliger dans la formule $vv + ZZ$ le terme ZZ. Cela remarqué, nos trois équations prendront les formes ſuivantes.

$$1.\; -\frac{ddX}{dt^2} - \frac{X}{v^3} = \frac{T.(X - u\,cof.\,\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$2.\; -\frac{ddY}{dt^2} - \frac{Y}{v^3} = \frac{T.(Y - u\,fin.\,\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$3.\; -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T.Z}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

ARTICLE II.

Réduction de ces formules à d'autres coordonnées qui ſe rapportent au lieu de la Terre.

VI.

AYANT prolongé la ligne ST en B, de ſorte que B marque l'oppoſition du Soleil vu de la Terre, qu'on y tire la perpendiculaire Lx, & qu'on poſe les trois coordonnées $Tx = x$; $xL = y$ & $L☾ = Z = z$, & nous aurons $vv = (u + x)^2 + yy$; $\omega\omega = xx + yy$. De-là puiſque x & y

ſont très-petites par rapport à u, à cauſe de $vv = uu + 2ux + xx + yy$, nous aurons, en négligeant les termes où x & y auroient plus de deux dimenſions $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3x}{u^4} + \frac{6xx}{u^5} - \frac{3yy}{2u^5}$. Ou l'on pourra même rejetter les termes xx & yy, à moins qu'il ne s'agiſſe de déterminer les inégalités de la Lune qui dépendent de la parallaxe du Soleil.

VII.

Maintenant pour réduire les coordonnées précédentes à celle-ci, il eſt évident qu'on aura $X = (u+x)\,cof.\,\varphi - y\,fin.\,\varphi$, & $Y = y\,cof.\,\varphi + (u+x)\,fin.\,\varphi$; d'où l'on pourroit calculer les valeurs de dX, dY, ddX & ddY; mais comme cela nous méneroit à des calculs trop embarraſſés, nous commencerons à ſubſtituer à la place des deux premières équations, les deux ſuivantes:

$I \times cof.\,\varphi + II \times fin.\,\varphi$ & $II\,cof.\,\varphi - I \times fin.\,\varphi$ qui ſeront

$$1.\ -\frac{ddX.cof.\varphi - ddY.fin.\varphi}{dt^2} - \frac{X.cof.\varphi - Y.fin.\varphi}{v^3} = \frac{T.(X\,cof.\varphi + Y.fin.\varphi - u)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

$$2.\ -\frac{ddY.cof.\varphi + ddX.fin.\varphi}{dt^2} - \frac{Y.cof.\varphi + X.fin.\varphi}{v^3} = \frac{T.(Y.cof.\varphi - X.fin.\varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}},$$

Auxquelles on doit toujours joindre la troiſième,

$$3.\ -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T.Z.}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}.$$

VIII.

Pour faire le plus ſuccinctement les ſubſtitutions néceſſaires, tirons d'abord des valeurs de X & Y les rapports ſuivans: $X.cof.\varphi + Y.fin.\varphi = u + x$, $Y.cof.\varphi - X.fin.\varphi = y$: différentions ces formules, & nous obtiendrons

$dX.cof.\varphi + dY.fin.\varphi + d\varphi(Y.cof.\varphi - X.fin.\varphi) = du + dx$

par conséquent

$$dX.\,cos.\,\varphi + dY.\,sin.\,\varphi = du + dx - y\,d\varphi$$

& de la même manière

$$dY.\,cos.\,\varphi - dX.\,sin.\,\varphi = dy + (u+x)\,d\varphi$$

Ces formules étant encore une fois différentiées, fourniront

$$ddX.\,cos.\,\varphi + ddY.\,sin.\,\varphi = ddu + ddx - y\,dd.\,\varphi - 2dy\,d\varphi - (u+x)\,d\varphi^2 \ \&$$

$$ddY.\,cos.\,\varphi - ddX.\,sin.\,\varphi = ddy + (u+x)\,dd\varphi + 2du\,d\varphi + 2dx\,d\varphi - y\,d\varphi^2.$$

IX.

On voit que par cette réduction, les $sin.\,\varphi$ & $cos.\,\varphi$ s'en vont par tout du calcul, & maintenant nos trois équations fondamentales seront :

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dyd\varphi}{dt^2} + \frac{ydd\varphi}{dt^2} + \frac{xd\varphi^2}{dt^2} - \frac{ddu}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2}{dt^2} - \frac{u-x}{v^3} = Tx.\,(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx\,d\varphi}{dt^2} - \frac{xdd\varphi}{dt^2} + \frac{yd\varphi^2}{dt^2} - \frac{udd\varphi}{dt^2} - \frac{2dud\varphi}{dt^2} - \frac{y}{v^3} = Ty.\,(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

$$3.\ -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = TZ.\,(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

Ce sont donc nos équations rapportées aux trois coordonnées x, y & Z.

X.

Avant que de passer plus loin, substituons ici au lieu de $\frac{1}{v^3}$ la valeur donnée ci-dessus (§. VI), & rejettons toujours les termes où x & y auroient plus de deux dimensions : alors nos trois équations prendront les formes qui suivent.

$$1. -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2dyd\varphi}{dt^2}+\frac{ydd\varphi}{dt^2}+\frac{xd\varphi^2}{dt^2}-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{ud\varphi^2}{dt^2}-\frac{1}{uu}+\frac{2x}{u^3}$$
$$-\frac{3xx}{u^4}+\frac{3yy}{2u^4}=Tx.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$2. -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2dxd\varphi}{dt^2}+\frac{yd\varphi^2}{dt^2}-\frac{xdd\varphi}{dt^2}-\frac{udd\varphi}{dt^2}-\frac{2dud\varphi}{dt^2}-\frac{y}{u^3}$$
$$+\frac{3xy}{u^4}=Ty.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$3. -\frac{ddZ}{dt^2}-\frac{Z}{u^3}+\frac{3xZ}{u^4}=TZ.(\omega\omega+ZZ)^{-\frac{3}{2}}.$$

ARTICLE III.

Réduction ultérieure de ces formules à des coordonnées, qui se rapportent à la distance moyenne de la Lune au Soleil.

XI.

COMME l'angle BTL marque la véritable élongation de la Lune à l'opposition du Soleil B sur l'écliptique, soit p l'élongation moyenne de la Lune au même terme B, & tirons la droite TC, ensorte que l'angle BTC soit $=p$. Qu'on abaisse sur cette TC de L la perpendiculaire LX, & qu'on nomme les trois coordonnées $TX=X$; $XL=Y$; $L☾=z=Z$, auxquelles il s'agit de réduire nos trois équations différentio-différentielles. Pour cet effet, remarquons que le rapport de dp à dt est donné par les Tables Astronomiques, d'où prenant un intervalle de 30 jours, on trouve $\frac{dp}{dt}=\frac{12^s\ 5^\circ\ 43'\ 21''.1}{0^s\ 29^\circ\ 34'\ 4''.5}$, ou $\frac{dp}{dt}=\frac{1316601.1}{106444.5}$ $=12,3688974$. Je poserai, pour abréger, $dp=mdt$, desorte que $m=12,3688974$.

XII.

XII.

Ces nouvelles coordonnées tiennent aux précédentes les rappports suivans :

$$x = X\cos.p - Y\sin.p;\ y = Y\cos.p + X\sin.p$$

& réciproquement,

$$x\cos.p + y\sin.p = X;\quad y\cos.p - x\sin.p = Y.$$

Il sera bon d'avertir ici, qu'il ne faut pas confondre ces lettres majuscules X & Y avec celles dont je me suis servi au premier article, & que je regarde comme entièrement oubliées.

XIII.

Pour éviter les calculs trop prolixes, je transformerai encore les deux premières équations du §. X en d'autres, par ces combinaisons,

$$I.\cos.p + II.\sin.p \ \& \ II.\cos.p - I.\sin.p;$$

dont la première donnera :

$$-\frac{ddx\cos.p - ddy\sin.p}{dt^2} + \frac{2d\varphi(dy\cos.p - dx\sin.p)}{dt^2} + \frac{dd\varphi(y\cos.p - x\sin.p)}{dt^2}$$
$$+\frac{d\varphi^2(x\cos.p + y\sin.p)}{dt^2} - \frac{ddu\cos.p}{dt^2} - \frac{udd\varphi\sin.p}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2\cos.p}{dt^2}$$
$$-\frac{2dud\varphi\sin.p}{dt^2} - \frac{\cos.p}{uu} + \frac{2x\cos.p}{u^3} - \frac{y\sin.p}{u^3} + \frac{3yy\cos.p}{2u^4}$$
$$+\frac{3xy\sin.p}{u^4} + \frac{3xx\cos.p}{u^4} = \frac{T(x\cos.p + y\sin.p)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

& la seconde donnera

$$-\frac{ddy\cos.p + ddx\sin.p}{dt^2} - \frac{2d\varphi(dx\cos.p + dy\sin.p)}{dt^2} - \frac{dd\varphi(x\cos.p + y\sin.p)}{dt^2}$$
$$+\frac{d\varphi^2(y\cos.p - x\sin.p)}{dt^2} - \frac{udd\varphi\cos.p}{dt^2} + \frac{ddu\sin.p}{dt^2} - \frac{2dud\varphi\cos.p}{dt^2}$$
$$-\frac{ud\varphi^2\sin.p}{dt^2} + \frac{\sin.p}{uu} - \frac{y\cos.p}{u^3} - \frac{2x\sin.p}{u^3} - \frac{3yy\sin.p}{2u^4} + \frac{3xy\cos.p}{u^4}$$
$$+\frac{3xx\sin.p}{u^4} = \frac{T(y\cos.p - x\sin.p)}{u^4}.$$

XIV.

A présent il ne sera plus difficile de faire les substitutions; car comme $x\,cos.p + y\,sin.p = X$; $y\,cos.p - x\,sin.p = Y$; nous en tirerons, en différentiant,

$dx\,cos.p + dy\,sin.p = dX - Ydp$;

$dy\,cos.p - dx\,sin.p = dY + Xdp$: ensuite

$ddx\,cos.p + ddy\,sin.p = ddX + 2dYdp - Xdp^2$;

$ddy\,cos.p - ddx\,sin.p = ddY + 2dXdp - Ydp^2$.

XV.

A l'aide de ces réductions, & à cause de $dp = mdt$, notre première équation deviendra, après avoir arrangé tous les termes selon les X & Y:

$$1. -\frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt}\left(m + \frac{d\varphi}{dt}\right) + X\left(mm + \frac{2md\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2cos.p^2 - sin.p^2}{u^3}\right) + Y\left(\frac{dd\varphi}{dt^2} - \frac{3sin.p.\,cos.p}{u^3}\right) + \frac{3XX\,cos.p}{u^4}\left(\tfrac{3}{2}sin.p^2 - cos.p^2\right) + \frac{3XY\,sin.p}{u^4}\left(4cos.p^2 - sin.p^2\right) + \frac{3YY\,cos.p}{u^4}\left(\tfrac{1}{2}cos.p^2 - 2sin.p^2\right) - \frac{cos.p}{uu} - \frac{ddu\,cos.p}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2\,cos.p}{dt^2} - \frac{udd\varphi\,sin.p}{dt^2} - \frac{2dud\varphi\,sin.p}{dt^2} = T.X(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}.$$

De la même manière, nous trouverons la seconde équation.

$$2. -\frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{d\varphi}{dt}\right) + Y\left(mm + \frac{2md\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2sin.p^2 - cos.p^2}{u^3}\right) - X\left(\frac{dd\varphi}{dt^2} + \frac{3sin.p.\,cos.p}{u^3}\right) + \frac{3YY\,sin.p}{u^4}\left(sin.p^2 - \tfrac{3}{2}cos.p^2\right) + \frac{3XY\,cos.p}{u^4}\left(cos.p^2 - 4sin.p^2\right) + \frac{3XX\,sin.p}{u^4}$$

$$(2\,cos.p^2 - \tfrac{1}{2}\,fin.p^2) + \frac{fin.p}{uu} - \frac{udd\varphi\,cof.p}{dt^2} - \frac{2\,dud\varphi\,cof.p}{dt^2} + \frac{ddu\,fin.p}{dt^2}$$

$$- \frac{ud\varphi^2\,fin.p}{dt^2} = T.Y(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

Et la troisième équation sera

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3\,XZ\,cof.p}{u^4} + \frac{3\,YZ\,fin.p}{u^4} = T.Z(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}.$$

ARTICLE IV.

Troisième réduction de ces formules, en les appliquant à la question proposée.

XVI.

Nos équations différentio-différentielles deviendront beaucoup plus simples, si l'on a égard à la théorie du Soleil, par laquelle on fait que $I.\ \frac{udd\varphi + 2du\,d\varphi}{dt^2} = 0$; $II.\ \frac{ddu - ud\varphi^2}{dt^2} = -\frac{1}{uu}$, & de là $uud\varphi = dt$ ou $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{uu}$ & $\frac{dd\varphi}{dt^2} = \frac{d.\frac{1}{uu}}{dt}$. Car en substituant ces relations dans les formules trouvées, tous les termes où il n'y a ni X ni Y se détruiront.

XVII.

Nous obtiendrons de là les équations suivantes:

$$1. - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2\,dY}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + X\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4}\right.$$

$$\left. + \frac{2\,cof.p^2 - fin.p^2}{u^3}\right) + Y\left(\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3\,fin.p\,cof.p}{u^3}\right) + \frac{3\,XX\,cof.p}{u^4}$$

$$(\tfrac{3}{2} \sin. p^2 - \cos. p^2) + \frac{3XY \sin. p}{u^4} (4 \cos. p^2 - \sin. p^2) + \frac{3YY \cos. p}{u^4}$$
$$(\tfrac{1}{2} \cos. p^2 - 2 \sin. p^2) = TX (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

$$2. -\frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y\left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4}\right.$$
$$\left. + \frac{2 \sin. p^2 - \cos. p^2}{u^3}\right) - X\left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3 \sin. p \cos. p}{u^3}\right) + \frac{3YY \sin. p}{u^4}$$
$$(\sin. p^2 - \tfrac{3}{2} \cos. p^2) + \frac{3XY \cos. p}{u^4} (\cos. p^2 - 4 \sin. p^2) + \frac{3XX \sin. p}{u^4}$$
$$(2 \cos. p^2 - \tfrac{1}{2} \sin. p^2) = T. Z (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

$$3. -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3Z(X \cos. p - Y \sin. p)}{u^4} = T. Z (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}$$

XVIII.

En ſubſtituant les ſinus & coſinus des angles multiples à la place des produits des ſinus & coſinus de l'angle ſimple p, ces trois équations différentio-différentielles prendront ces formes.

$$1. \left.\begin{aligned} &-\frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + X\left(mm + \frac{2m}{uu}\right. \\ &\left. + \frac{1}{u^4} + \frac{1 + 3 \cos. 2p}{2u^3}\right) + Y\left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3 \sin. 2p}{2u^3}\right) \\ &- \frac{XX(9 \cos. p + 15 \cos. 3p)}{8u^4} + \frac{XY(3 \sin. p + 15 \sin. 3p)}{4u^4} \\ &- \frac{YY(3 \cos. p - 15 \cos. 3p)}{8u^4} - T.X(XX + YY + ZZ)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$2. \left.\begin{aligned} &-\frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt}\left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y\left(mm + \frac{2m}{uu}\right. \\ &\left. + \frac{1}{u^4} + \frac{1 - 3 \cos. 2p}{2u^3}\right) - X\left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3 \sin. 2p}{2u^3}\right) \\ &+ \frac{YY(9 \sin. p - 15 \sin. 3p)}{8u^4} - \frac{XY(3 \cos. p - 15 \cos. 3p)}{4u^4} \\ &+ \frac{XX(3 \sin. p + 15 \sin. 3p)}{8u^4} - T.Y(XX + YY + ZZ)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$3. -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3ZX\cos.p}{u^4} + \frac{3ZY\sin.p}{u^4} \left.\begin{matrix} \\ -T.Z(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}} \end{matrix}\right\} \ldots = 0$$

A cause de $\omega\omega = XX + YY$.

ARTICLE V.

Dernière réduction de ces formules différentio-différentielles.

XIX.

COMME les deux coordonnées Y & Z sont toujours très-petites à l'égard de la troisième X, dont la moyenne valeur est a, il sera bon d'introduire au lieu de ces coordonnées trois autres inconnues qui conservent entr'elles une plus grande égalité : je poserai pour cet effet, $X = a(1 + x)$; $Y = ay$ & $Z = az$, en avertissant encore qu'il ne faudra pas confondre ces x, y & z avec les coordonnées employées au second article. Cette substitution nous procurera aussi l'avantage de pouvoir développer en général les formules irrationelles qui entrent dans nos équations différentio-différentielles, & qui sans cela embarrasseroient beaucoup lorsque nous voudrions en faire l'application aux inégalités des mouvemens de la Lune.

XIX.

Ayant $XX + YY + ZZ = aa(1 + 2x + xx + yy + zz)$, nous aurons d'abord $(XX + YY + ZZ)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3}(1 - 3x + 6xx - \frac{3}{2}yy - \frac{3}{2}zz - 10x^3 + \frac{15}{2}xyy + \frac{15}{2}xzz)$, en negligeant les quatrièmes & les plus hautes puissances de x, y, & z. Soit maintenant $\frac{T}{a^3} = \lambda$, dont la valeur, quelle qu'elle soit, sera toujours constante, & nous obtiendrons, pour les derniers membres de nos trois équations, ces valeurs :

$$T.X(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}}=\lambda a\left(1-2x+3xx-\tfrac{3}{2}yy-\tfrac{3}{2}zz-4x^3+6yyx+6xzz\right)$$

$$T.Y(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}}=\lambda a\left(y-3yx+6yxx-\tfrac{3}{2}y^3-\tfrac{3}{2}yzz\right)$$

$$T.Z(XX+YY+ZZ)^{-\frac{3}{2}}=\lambda a\left(z-3zx+6zxx-\tfrac{3}{2}zyy-\tfrac{3}{2}z^3\right).$$

XXI.

D'où nos trois équations deviendront, après les avoir divisées par a :

$$\left.\begin{aligned}
1.\ &-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2dy}{dt}\left(m+\frac{1}{uu}\right)+mm+\frac{2m}{uu}+\frac{1}{u^4}\\
&+\frac{1}{2u^3}-\lambda+\frac{3\cos.2p}{2u^3}+x\left(mm+\frac{2m}{uu}+\frac{1}{u^4}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2u^3}+2\lambda\right)+y.\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt}+\frac{3x\cos.2p}{2u^3}-\frac{3y\sin.2p}{2u^3}\\
&-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+\tfrac{3}{2}\lambda zz+4\lambda x^3-6\lambda xyy\\
&-6\lambda xzz-\frac{a}{u^4}\left(\tfrac{9}{8}\cos.p+\tfrac{15}{4}\cos.3p\right)-\frac{ax}{u^4}\\
&\left(\tfrac{9}{4}\cos.p+\tfrac{15}{4}\cos.3p\right)+\frac{ay}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\sin.p+\tfrac{15}{4}\sin.3p\right)
\end{aligned}\right\}=0.$$

$$\left.\begin{aligned}
2.\ &-\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2dx}{dt}\left(m+\frac{1}{uu}\right)-\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt}-\frac{3\sin.2p}{2u^3}\\
&+y\left(mm+\frac{2m}{uu}+\frac{1}{u^4}+\frac{1}{2u^3}-\lambda\right)-x\,\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt}\\
&-\frac{3y\cos.2p}{2u^3}-\frac{3x\sin.2p}{2u^3}+3\lambda xy-6\lambda yxx+\tfrac{3}{2}\lambda y^3\\
&+\tfrac{3}{2}\lambda yzz+\frac{a}{u^4}\left(\tfrac{3}{8}\sin.p+\tfrac{15}{8}\sin.3p\right)\\
&-\frac{ay}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\cos.p-\tfrac{15}{4}\cos.3p\right)+\frac{ax}{u^4}\left(\tfrac{3}{4}\sin.p+\tfrac{15}{4}\sin.3p\right)
\end{aligned}\right\}=0.$$

$$3. -\frac{ddz}{dt^2} - \frac{z}{u^3} - \lambda z + 3\lambda zx - 6\lambda zxx + \frac{3}{2}\lambda zyy + \frac{3}{2}\lambda z^3 - \frac{3az\,cos.\,p}{u^4} \Big\} = \ldots 0.$$

En omettant les termes affectés par axx, ayy, axy, axz & ayz, puisque les inégalités qui en dépendent ne pourront pas monter à une seconde.

XXII.

Enfin comme la théorie de la Terre fournit, pour la distance u, cette valeur $u = 1 + v\,cos.\,t$, nous aurons, en négligeant les puissances de v: $\frac{1}{uu} = 1 - 2v\,cos.\,t$;
$\frac{1}{u^3} = 1 - 3v\,cos.\,t$; $\frac{1}{u^4} = 1 - 4v\,cos.\,t$; donc $\frac{d.\frac{1}{uu}}{dt} = 2v\,sin.\,t$

$$\frac{3\,sin.\,2p}{2u^3} = \frac{3}{2}\,sin.\,2p - \frac{9}{4}v\,sin.\,(2p - t) - \frac{9}{4}v\,sin.\,(2p + t):$$

$$\frac{3\,cos.\,2p}{2u^3} = \frac{3}{2}\,cos.\,2p - \frac{9}{4}v\,cos.\,(2p - t) - \frac{9}{4}v\,cos.\,(2p + t): \&c.$$

XXIII.

D'où en substituant ces valeurs dans nos trois équations différentio différentielles, & en arrangeant leurs termes selon leur importance, nous parviendrons enfin aux équations, & qui seront celles dont je me servirai dans les recherches présentes.

Équations qui renferment toutes les inégalités du mouvement de la Lune.

$$1. -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy}{at} + x(mm + 2m + \frac{3}{2} + 2\lambda) + mm + 2m + \frac{3}{2} - \lambda + \frac{3}{2}\,cos.\,2p + \frac{3}{2}x\,cos.\,2p - \frac{3}{2}y\,sin.\,2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2}\lambda yy + \frac{3}{2}\lambda zz + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy - 6\lambda xzz - a(\frac{9}{8}\,cos.\,p + \frac{15}{8}\,cos.\,3p)$$

$$\left.\begin{array}{l} -ax(\frac{9}{4}cos.p+\frac{15}{4}cos.3p)+ay(\frac{3}{4}sin.p+\frac{15}{4}sin.3p) \\ -v((4m+\frac{11}{2})cos.t+\frac{9}{4}cos.(2p-t)+\frac{9}{4}cos.(2p+t)) \\ -4vcos.t.\frac{dy}{dt}-vx((4m+\frac{11}{2})cos.t+\frac{9}{4}cos.(2p-t) \\ +\frac{9}{4}cos.(2p+t))+vy(2sin.t+\frac{9}{4}sin.(2p-t) \\ +\frac{9}{4}sin.(2p+t)) \end{array}\right\}=0.$$

$$2.\left.\begin{array}{l} -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+y(mm+2m+\frac{3}{2}-\lambda) \\ -\frac{3}{2}sin.2p-\frac{3}{2}ycos.2p-\frac{3}{2}xsin.2p+3\lambda xy+\frac{3}{2}\lambda y^3 \\ -6\lambda xxy+\frac{3}{2}\lambda zzy+a(\frac{3}{8}sin.p+\frac{15}{8}sin.3p) \\ -ay(\frac{3}{4}cos.p-\frac{15}{4}cos.3p)+ax(\frac{3}{4}sin.p+\frac{15}{4}sin.3p) \\ -v(2sin.t-\frac{9}{4}sin.(2p-t)-\frac{9}{4}sin.(2p+t)) \\ +4vcos.t\frac{dx}{dt}-vy((4m+\frac{11}{2})cos.t-\frac{9}{4}cos.(2p-t) \\ -\frac{9}{4}cos.(2p+t))-vx(2sin.t-\frac{9}{4}sin.(2p-t) \\ -\frac{9}{4}sin.(2p+t)) \end{array}\right\}=0.$$

$$3.\left.\begin{array}{l} -\frac{ddz}{dt^2}-(1+\lambda)z+3\lambda xz+\frac{3}{2}\lambda z^3-6\lambda xxz \\ +\frac{3}{2}\lambda yyz-3az\,cos.p+3vz\,cos.t \end{array}\right\}=0.$$

Tous les autres termes que j'ai négligés ici, sont trop petits pour qu'il en puisse résulter une erreur de deux à trois secondes dans le lieu de la Lune.

XXIV.

Au reste il sera bon de répéter ici que $m=12,3688974$ & par conséquent $2(m+1)=26,7377948$; $mm+2m+\frac{3}{2}=179,2274177$; $4m+\frac{11}{2}=54,9755896$. Ensuite l'unité exprimant ici la distance moyenne de la Terre au Soleil, nous aurons à-peu-près $v=0,01676$ & $a=0,0025$; je dis *à-peu-près*, car les vraies valeurs de ces rapports se doivent déterminer, lorsqu'on comparera les

les inégalités trouvées par nos équations à celles que les observations fournissent.

XXV.

Or ayant trouvé les valeur de x, y, z, nous obtiendrons pour les coordonnées $TX = X = a(1+x)$; $LX = Y = ay$; $L☾ = Z = az$: & delà $TL = \sqrt{(XX+YY)}$; $T☾ = \sqrt{(XX+YY+ZZ)}$; la tangente de l'angle $LTX = \frac{Y}{X}$; & la tangente de l'angle $☾TL = \frac{Z}{\sqrt{(XX+YY)}}$.

ARTICLE VI.

Réflexions sur les formules qu'on vient de trouver.

XXVI.

PUISQUE la droite TC est tirée, ensorte que l'angle BTC est égal à l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil, & qu'on trouve en additionnant six signes à la différence des longitudes moyennes du Soleil & de la Lune, on voit qu'en ajoutant à cet angle le petit angle CTL, dont la tangette est $\frac{Y}{X}$, on aura la véritable élongation de la Lune à l'opposition du Soleil; donc, quand on y ajoute encore l'angle BSA, qui exprime l'excès de la longitude vraie du Soleil sur six signes, on aura la vraie longitude de la Lune dans l'écliptique. Or, la vraie longitude du Soleil étant égale à la moyenne plus son équation du centre, il s'ensuit que pour trouver la vraie longitude de la Lune, on n'a qu'à ajouter à sa longitude moyenne premièrement l'angle CTL & outre cela encore l'équation du centre du Soleil : c'est-à-dire

Long. vraie de la ☾ = long. moyenne de la ☾ + angle dont la tangente eſt $\frac{Y}{X}$ + l'équation du centre du ☉.

XXVII.

Comme je tâcherai dans la ſuite de déterminer l'angle TCL auſſi exactement qu'on puiſſe le ſouhaiter, on comprend que cet angle n'eſt pas égal à la ſomme de toutes les équations que les Tables ordinaires contiennent pour la Lune ; mais qu'il ne donne que l'excès de cette ſomme entière ſur l'équation du Soleil ; ou bien, ſi nous ajoutons l'équation du Soleil à notre angle CTL, cette ſomme doit être égale au réſultat de toutes les équations dont on ſe ſert ordinairement pour trouver le lieu de la Lune. Je ne parle ici que de la longitude réduite à l'écliptique : la latitude ſe déterminera aiſément par notre troiſième coordonnée $L☾ = Z$, atteudu que $\frac{Z}{\sqrt{(XX+YY)}}$ donnne d'abord la tangente de la latitude de la Lune. Enfin, comme la diſtance $T☾ = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$, on en connoîtra aiſément la parallaxe horizontale de la Lune avec ſon diamètre apparent.

XXVIII.

Voila donc en quoi conſiſte principalement la différence entre cette nouvelle méthode & celle dont on s'eſt ſervi juſqu'ici, où l'on s'eſt donné toutes les peines imaginables pour trouver les inégalités dans le mouvement de la Lune, chacune ſéparément des autres. Mon but étant ici de chercher les trois coordonnées $TX = X$, $XL = Y$ & $L☾ = Z$, il eſt bien vrai qu'elles dépendront de toutes les inégalités ; mais ce n'eſt qu'après les avoir déterminées toutes, & en avoir conclu les vraies valeurs de ces lignes, qu'on pourra aſſigner l'angle CTL : outre cela je ne trouve pas cet angle immédiatement, mais ſa tangente, dont il faut encore chercher l'angle dans les Tables. Or j'ose bien assurer que l'expression de cette tangente devient beaucoup moins compliquée que si l'on en vouloit déduire toutes les équations partielles indépendamment l'une de l'autre. Tout ceci deviendra plus clair, quand j'aurai réussi à trouver les justes valeurs des trois coordonnées X, Y & Z.

XXIX.

Mais le plus grand avantage de cette nouvelle méthode consiste en ce que j'y ai d'abord introduit l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, ce qui me mettra en état de déterminer toutes les inégalités, par des angles proportionnels aux tems, & qu'on pourra aisément trouver dans les Tables des moyens mouvemens. Aulieu que, selon la méthode ordinaire, la vraie élongation de la Lune au Soleil entre par-tout dans les calculs, & qu'il est presque impossible de les en délivrer. Cet inconvénient demande non-seulement les plus pénibles calculs, mais il nous laisse encore incertains sur la véritable quantité de plusieurs équations, outre que le nombre de ces équations devient presque effroyable.

ARTICLE VII.

Plan des opérations à faire pour la détermination du lieu de la Lune.

XXX.

QUELQUE grand que soit le nombre des inégalités qui se trouvent dans le mouvement de la Lune, on peut les rapporter toutes à de certaines classes, que je me propose de déveloper l'une après l'autre. On n'a qu'à bien considérer les diverſes ſources d'où naiſſent toutes ces inégalités, pour établir les caractères qui diſtinguent ces claſſes entr'elles. Ces ſources ſont :

1.° La différente action du Soleil par rapport à ſes différentes phaſes ou aſpects.

2.° L'excentricité de l'orbite de la Lune.

3.° L'inclinaiſon de cet orbite à l'écliptique.

4.° La parallaxe du Soleil, ou le vrai rapport entre les diſtances de la Lune & du Soleil à la Terre.

5.° Enfin les inégalités du mouvement du Soleil ou de la Terre.

XXXI.

La première ſource conſidérée en elle-même produit l'inégalité connue ſous le nom de la *variation*, ou de *réflexion*, comme Képler l'a nommée. Elle dépend uniquement de l'angle p, c'eſt-à-dire de l'angle BTC qui marque l'élongation moyenne de la Lune à l'oppoſition du Soleil. Ce ſera donc le ſujet de mes premières recherches, où je ferai abſtraction de toutes les autres ſources, par leſquelles le mouvement de la Lune eſt troublé.

XXXII.

En ſecond lieu, j'aurai égard à l'excentricité de l'orbite de la Lune, par laquelle un nouvel angle ſera introduit dans le calcul. Cet angle ſera l'anomalie moyenne de la Lune, & je le marquerai par la lettre q : l'angle q ſera donc auſſi proportionnel au tems, & ſon rapport à l'anomalie du Soleil que j'ai nommée t, nous conduira à l'importante recherche du mouvement de l'apogée de la Lune. Je ſerai obligé de partager la recherche des inégalités de cette claſſe en trois parties.

La *première* contiendra celles qui dépendent ſimplement de l'excentricité, & qui renferment le ſimple angle q.

La *seconde* partie roulera sur les inégalités qui dépendent de l'excentricité ou qui renferment le double angle $2q$, & dans

La *troisième* partie, seront déterminées les inégalités qui résultent du cube de l'excentricité; celles-ci dépendront du triple angle $3q$, & seront déja si petites, qu'on pourra bien se passer des suivantes; aussi nos formules ne s'étendent pas au delà des troisièmes dimensions.

XXXIII.

En troisième lieu, je chercherai les inégalités qui résultent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Cette circonstance introduira vn troisieme angle r dans le calcul, qui est celui qu'on nomme l'argument de latitude, & qui est aussi proportionnel au temps. La recherche de son rapport à l'angle t renfermera le mouvement de la ligne des nœuds. Il suffira ici de déterminer les inégalités qui dépendront du simple & du double de cet angle, sans s'embarrasser de celles qui dépendroient du triple ou bien du cube de l'inclinaison, qui seroit trop petit pour qu'on fût obligé d'en tenir compte.

XXXIV.

En quatrième lieu, ayant regardé jusqu'ici la distance du Soleil comme étant infiniment plus grande que celle de la Lune, & ayant négligé pour cet effet les termes qui sont affectés du rapport a; je ferai à-présent aussi entrer ces termes dans les équations générales, pour rechercher les inégalités qui en résultent, & qu'on peut nommer *inégalités parallactiques*, puisqu'elles dépendent de la parallaxe du Soleil.

XXXV.

Enfin la cinquième claſſe contiendra les inégalités qui réſultent de l'excentricité de l'orbite de la Terre ; ces inégalités ſont contenues dans les termes affectés par v, & c'eſt par celles-ci que l'anomalie moyenne du Soleil, marquée par t eſt auſſi introduite dans le calcul. Dans cette recherche, il ſuffira de conſidérer cette ſimple excentricité : auſſi ai-je négligé tous les termes qui renfermeroient le quarré & les plus hautes dimenſions de cette excentricité.

Ce ſera donc le plan que je me propoſe de développer dans les recherches ſuivantes.

DEUXIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la première Classe, comprises communément sous le nom de la Variation.

ARTICLE PREMIER.

Applicationdes formules généaales à cette recherche.

§. I.

PUISQU'IL ne s'agit ici que de déterminer les inégalités qui dépendent uniquement de l'angle p, où l'on ne regarde que le mouvement de la Lune sur l'écliptique, nous ferons abstraction de l'inclinaison de son orbite, en posant $Z = az = o$, & par-là toute la troisième équation s'en va du calcul. En second lieu, je ferai abstraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ou bien je mettrai $v = o$; & en troisième lieu, puisqu'il n'est pas encore question des inégalités parallactiques, je négligerai dans les formules trouvées tous les termes affectés par a.

I I.

De cette manière nos équations différentio-différentielles deviendront beaucoup plus simples, & par conséquent plus propres à en déduire les inégalités, qui sont l'objet de cette première recherche. Voilà donc les formules qu'il faut prendre en considération.

$$\left.\begin{aligned}\text{I.}\ &-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy}{dt}+x\left(mm+2m+\tfrac{3}{2}+2\lambda\right)\\ &+mm+2m+\tfrac{3}{2}-\lambda+\tfrac{3}{2}\,cos.\,2p+\tfrac{3}{2}\,x\,cos.\,2p\\ &-\tfrac{3}{2}\,y\,sin.\,2p-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3\\ &-6\lambda xyy.\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\text{2.}\ &-\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)\,dx}{dt}+y\left(mm+2m+\tfrac{3}{2}-\lambda\right)\\ &-\tfrac{3}{2}\,sin.\,2p-\tfrac{3}{2}\,y\,cos.\,2p-\tfrac{3}{2}\,x\,sin.\,2p\\ &+3\lambda xy+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy,\end{aligned}\right\}=0$$

III.

D'abord je remarque que la Lune ne sauroit avoir un mouvement uniforme autour de la Terre, comme il arrive dans le mouvement des planettes principales. Car pour que l'angle CTL devienne $=0$, il faudroit qu'il fût $Y=0$, ou bien $y=0$, ce qui est contraire à la seconde formule. Ensuite on voit que x ne sauroit être constante, mais qu'elle renferme nécessairement l'angle p; & comme cette x est toujours une quantité très-petite, nous voyons d'abord qu'il faudra mettre $\lambda = mm+2m+\frac{3}{2}$, ou bien $\lambda = 179,2274177$. (Sect. 1. § 24).

IV.

D'où nos deux équations seront;

$$\text{I.}\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy}{dt}+3yx+\tfrac{3}{2}\,cos.\,2p+\tfrac{3}{2}\,cos.\,2p$$
$$-\tfrac{3}{2}\,y\,sin.\,2p-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3-6\lambda xyy=0.$$

2.

$$2. -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \tfrac{3}{2} \mathit{sin.}\ 2p - \tfrac{3}{2}\, y\, \mathit{cos.}\ 2p$$
$$- \tfrac{3}{4}\, x\, \mathit{sin.}\ 2p + 3\lambda xy + \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy = 0.$$

ARTICLE II.

Détermination des inégalités de la Lune de cette premiere Classe.

V.

PREMIÈRE APPROXIMATION. Ne considérons d'abord que les premiers termes de nos deux équations, pour avoir :

$$1. -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2} \mathit{cos.}\ 2p = 0\ ;$$

$$\&\ 2. -\frac{ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \tfrac{3}{2}\mathit{sin.}\ 2p = 0.$$

& il est clair que pour remplir ces deux conditions, il faudra mettre $x = b\ \mathit{cos.}\ 2p$ & $y = \mathfrak{C}\ \mathit{sin.}\ 2p$. Je substitue donc ces valeurs dans nos deux équations & comme à cause de $\frac{dp}{dt} = m$; $\frac{dx}{dt} = -2m\ b\ \mathit{sin.}\ 2p$; $\frac{ddx}{dt^2} = -4mm\ b\ \mathit{cos.}\ 2p$; $\frac{dy}{dt} = +2m\ \mathfrak{C}\ \mathit{cos.}\ 2p$; $\frac{ddv}{dt^2} = -4mm\ \mathfrak{C}\ \mathit{sin.}\ 2p$; nous obtiendrons ces deux déterminations ;

$4mm\ b\ \mathit{cos.}\ 2p + 4m(m+1)\ \mathfrak{C}\ \mathit{cos.}\ 2p + 3\lambda\ b\ \mathit{cos.}\ 2p + \tfrac{3}{2}\ \mathit{cos}\ 2p = 0$; & $4mm\ \mathfrak{C}\ \mathit{sin.}\ 2p + 4m(m+1)\ b\ \mathit{sin.}\ 2p - \tfrac{3}{2}\ \mathit{sin.}\ 2p = 0,$

ou bien en divisant par $\mathit{cos.}\ 2p$:

$$(4mm + 3\lambda)\, b + 4m\,(m+1)\,\beta + \tfrac{3}{2} = 0;$$

$$\& \; 4m\,(m+1)\,b + 4mm\,\beta - \tfrac{3}{2} = 0,$$

ou enfin à cause de $m = 12,3688974$ & $\lambda = 179;$ 2274177, nous aurons $1149.64074\, b + 661,43408.$ $\beta = -1,5$ & $661,43408.\, b + 611,95849.\beta = +1,5$

d'où l'on trouvera $b = -0,0071800$ & $\beta = +0,0102118.$

VI.

SECONDE APPROXIMATION. Soit maintenant $x = b\, cos.\, 2p + x^{I}$ & $y = \beta\, sin.\, 2p + y^{I}$; ou bien écrivons dans nos deux équations du §. 4, $x + x^{I}$ & $y + y^{I}$ au lieu de x & y; & & comme nous avons fait évanouir

$$-\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\, cos.\, 2p$$

$$\& - \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx}{dt} - \tfrac{3}{2}\, sin.\, 2p,$$ il nous restera encore ces deux conditions à remplir.

$$\left.\begin{array}{l} 1. - \dfrac{ddx^{I}}{dt^2} + \dfrac{2(m+1)\,dy^{I}}{dt} + 3\lambda x^{I} + \tfrac{3}{2}\, x\, cos.\, 2p \\ - \tfrac{3}{2}\, y\, sin.\, 2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy + \tfrac{3}{2}\, x^{I}\, cos.\, 2p \\ - \tfrac{3}{2}\, y^{I}\, sin.\, 2p - 6\lambda x x^{I} + 3\lambda y y^{I} + 4\lambda x^{3} \\ - 6\lambda xyy \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2. - \dfrac{ddy^{I}}{dt^2} - \dfrac{2(m+1)\,dx^{I}}{dt} - \tfrac{3}{3}\, y\, cos.\, 2p \\ - \tfrac{3}{2}\, x\, sin.\, 2p + 3\lambda xy - \tfrac{3}{2}\, y^{I}\, cos.\, 2p \\ - \tfrac{3}{3}\, x^{I}\, sin.\, 2p + 3\lambda x y^{I} + 3\lambda x^{I} y + \tfrac{3}{2}\lambda y^{3} \\ - 6\lambda xxy \end{array}\right\} = 0$$

VII.

J'ai négligé ici les termes qui contiendroient $x^{\mathrm{I}}xx$, $x^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{I}}$, &c. car comme x^{I} & y^{I} sont dejà équivalens à xx, xy, & yy, ces termes négligés seroient équivalens aux quatriemes dimensions de x & y, que nous avons toujours omis, comme donnant des inégalités qui ne sont d'aucune importance.

VIII.

Commençons par satisfaire à ces deux équations ;

$$1. -\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt}+3\lambda x^{\mathrm{I}}+\tfrac{3}{2}x\ cos.\ 2p-\tfrac{3}{2}y.\ sin.\ 2p.-3\lambda xx+\tfrac{3}{2}\lambda yy=0.$$

$$2. -\frac{ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt}-\tfrac{3}{2}y\ cos.\ 2p-\tfrac{3}{2}x\ sin.\ 2p.+3\lambda xy=0.$$

Comme $x=b\ cos.\ 2p$ & $y=\mathfrak{b}\ sin.\ 2p$, nous aurons $x\ cos.\ 2p=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b\ cos.\ 4p$; $y\ sin.\ 2p.=\frac{1}{2}\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{b}\ cos.\ 4p$; $x\ sin.\ 2p=\frac{1}{2}b\ sin.\ 4p$; $y\ cos.\ 2p=\frac{1}{2}\mathfrak{b}\ sin.\ 4p$; $xx=\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}bb\ cos.\ 4p$; $xy=\frac{1}{2}b\mathfrak{b}\ sin.\ 4p$ & $yy=\frac{1}{2}\mathfrak{b}\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{b}\mathfrak{b}\ cos.\ 4p$;

d'où nos deux équations deviendront

$$1. -\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt}+3\lambda x^{\mathrm{I}}+\tfrac{3}{4}b-\tfrac{3}{4}\mathfrak{b}-\tfrac{3}{2}\lambda bb+\left(\tfrac{3}{4}b+\tfrac{3}{4}\mathfrak{b}-\tfrac{3}{2}\lambda bb-\tfrac{3}{4}\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{b}\right)cos.\ 4p=0.$$

$$2. -\frac{ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt}-\left(\tfrac{3}{4}\mathfrak{b}+\tfrac{3}{4}b-\tfrac{3}{2}\lambda b\mathfrak{b}\right)sin.\ 4p.=0.$$

IX.

Il eſt donc évident qu'il faudra ſuppoſer $x^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{I}} \cos. 4p$ & $y^{\mathrm{I}} = \beta^{\mathrm{I}} \sin. 4p$,
d'où nous aurons ces deux équations :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ 3\lambda a^{\mathrm{I}} + \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} \beta - \frac{3}{2} \lambda bb + \frac{3}{4} \lambda \beta\beta \\ + ((16mm + 3\lambda) b^{\mathrm{I}} + 8m(m+1)\beta^{\mathrm{I}} + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4}\beta \\ - \frac{3}{2} \lambda bb - \frac{3}{4} \lambda \beta\beta) \cos. 4p. \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ (16mm\beta^{\mathrm{I}} + 8m(m+1) b^{\mathrm{I}} - \frac{3}{4}\beta - \frac{3}{4} b \\ \quad + \frac{3}{2} \lambda b \beta) \sin. 4p. \end{array}\right\} = 0$$

& par conſéquent les trois déterminations ſuivantes

$$3\lambda a^{\mathrm{I}} + \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} \beta - \frac{3}{2} \lambda bb + \frac{3}{4} \lambda \beta\beta = 0.$$

$$(16mm + 3\lambda) b^{\mathrm{I}} + 8m(m+1)\beta^{\mathrm{I}} + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4} \beta - \frac{3}{2} \lambda bb - \frac{3}{4} \lambda\beta\beta = 0.$$

$$8m(m+1) b^{\mathrm{I}} + 16mm\beta^{\mathrm{I}} - \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} \beta + \frac{3}{2} \lambda b \beta = 0$$

ou bien en nombres, à cauſe de $b = -0,0071800$ & $\beta = +0,0102118$; $537,68225 . a^{\mathrm{I}} - 0,0129146 = 0$; $2985,51622 . b^{\mathrm{I}} + 1322,86816 . \beta^{\mathrm{I}} - 0,0257316 = 0$; & $1322,86816 . b^{\mathrm{I}} + 2447,83396 . \beta^{\mathrm{I}} - 0,0220264 = 0$,
par conſéquent
$a^{\mathrm{I}} = +0,0000240$; $b^{\mathrm{I}} = +0,0000061$; & $\beta^{\mathrm{I}} = +0,0000057$.

X.

Derniere Approximation. Il me reſte à déterminer les additions de la troiſième claſſe, ou bien les inégalités qui dépendent des termes affectés par x^3, xyy, xxy, y^3, xx^{I}, yy^{I}, $x^{\text{I}}\,\text{cos.}\,2p$, &c. Je poserai pour cet effet $x^{\text{I}} = a^{\text{I}} + b^{\text{I}}\,\text{cos.}\,4p + x^{\text{I}}$ & $y^{\text{II}} = \beta^{\text{I}}\,\text{fin.}\,4p + y^{\text{II}}$; ou bien j'écrirai dans les deux équations du § 6 $x^{\text{I}} + x^{\text{II}}$ & $y^{\text{I}} + y^{\text{II}}$ au lieu de x^{I} & y^{I}; & comme nous avons déja satisfait aux termes $\frac{3}{2}\,x\,\text{cof.}\,2p - \frac{3}{2}\,y\,\text{fin.}\,2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2}\lambda yy$ & $-\frac{3}{2}\,y\,\text{cof.}\,2p - \frac{3}{2}\,x\,\text{fin.}\,2p + 3\lambda xy$, en négligeant tous les termes, où x & y auroient ensemble plus de trois dimensions, en comptant toujours x^{I} & y^{I} pour deux & x^{II} & y^{II} pour trois dimensions, il nous restera encore ces deux conditions à remplir.

$$1.\; -\frac{ddx^{\text{II}}}{dt^2} + \frac{2(m+1)\,dy^{\text{II}}}{dt} + 3\lambda x^{\text{II}} + \frac{3}{2}\,x^{\text{I}}\,\text{cof.}\,2p - \frac{3}{2}\,y^{\text{I}}\,\text{fin.}\,2p - 6\lambda xx^{\text{I}} + 3\lambda yy^{\text{I}} + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy = 0.$$

$$2.\; -\frac{ddy^{\text{II}}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx^{\text{II}}}{dt} - \frac{3}{2}y^{\text{I}}\,\text{cof.}\,2p - \frac{3}{2}x^{\text{I}}\,\text{fin.}\,2p + 3\lambda xy^{\text{I}} + 3\lambda x^{\text{I}}y + \frac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy = 0$$

en omettant les termes, où x^{II} & y^{II} sont multipliés par $\text{fin.}\,2p$ & $\text{cof.}\,2p$.

X I.

Ayant $x = b\,\text{cof.}\,2p$; $y = \beta\,\text{fin.}\,2p$; $x^{\text{I}} = a^{\text{I}} + b^{\text{I}}\,\text{cof.}\,4p$; $y^{\text{I}} = \beta^{\text{I}}\,\text{fin.}\,4p$, ces deux équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l} 1.\; -\dfrac{ddx^{\text{II}}}{dt^2} + \dfrac{2(m+1)\,dy^{\text{II}}}{dt} + 3\lambda x^{\text{II}} + \left(\frac{3}{2}a^{\text{I}} + \frac{3}{4}b^{\text{I}}\right. \\ \quad - \frac{3}{4}\beta^{\text{I}} - 6\lambda b a^{\text{I}} - 3\lambda bb^{\text{I}} + \frac{3}{2}\lambda\beta\beta^{\text{I}} + 3\lambda b^3 \\ \quad \left. - \frac{3}{2}\lambda b\beta\beta\right)\text{cof.}\,2p + \left(\frac{3}{4}b^{\text{I}} + \frac{3}{4}\beta^{\text{I}} - 3\lambda bb^{\text{I}}\right. \\ \quad \left. - \frac{3}{2}\lambda\beta\beta^{\text{I}} + \lambda b^3 + \frac{3}{2}\lambda b\beta\beta\right)\text{cof.}\,6p. \end{array}\right\} = 0$$

$$2.\quad -\frac{ddy^{II}}{dt^2} - \frac{2(m+1)\,dx^{II}}{dt} + \left(-\tfrac{3}{4}\beta^{I} + \tfrac{3}{4}b^{I} - \tfrac{3}{2}a^{I} + \tfrac{3}{2}\lambda b\beta^{I} - \tfrac{3}{2}\lambda\beta b^{I} + 3\lambda\beta a^{I} + \tfrac{9}{8}\lambda\beta^3 - \lambda bb\beta\right) \sin.\,2p + \left(-\tfrac{3}{4}\beta^{I} - \tfrac{3}{4}b^{I} + \tfrac{3}{2}\lambda b\beta^{I} + \tfrac{3}{2}\lambda\beta b^{I} - \tfrac{3}{8}\lambda\beta^3 - \tfrac{3}{2}\lambda bb\beta\right)\sin.\,6p = 0$$

XII.

Delà il est évident qu'il faudroit donner à x^{II} & y^{II} ces formes $x^{II} = b^{II}\cos.\,2p + \cos.\,6p$; $y^{II} = \beta^{II}\sin.\,2p + \sin.\,6p$; mais comme il est aisé de prévoir que les coefficiens de $\sin.\,6p$ & $\cos.\,6p$ deviendroient plus petits que 0, 0000001, nous les négligerons en nous contentant de supposer simplement $x^{II} = b^{II}\cos.\,2p$ & $y^{II} = \beta^{II}\sin.\,2p$; d'où nous obtiendrons en divisant nos deux équations, la premiere par $\cos.\,2p$ & la seconde par $\sin.\,2p$, ces deux déterminations :

$$(4mm + 3\lambda)\,b^{II} + 4m(m+1)\,\beta^{II} + \tfrac{3}{2}a^{I} + \tfrac{3}{4}b^{I} - \tfrac{3}{4}\beta - 6\lambda ba^{I} - 3\lambda bb^{I} + \tfrac{3}{2}\lambda\beta\beta^{I} + 3\lambda b^3 - \tfrac{3}{2}\lambda b\beta\beta = 0.$$

$$4m(m+1)\,b^{II} + 4mm\,\beta^{II} - \tfrac{3}{4}\beta^{I} + \tfrac{3}{4}b^{I} - \tfrac{3}{2}a^{I} + \tfrac{3}{2}\lambda b\beta^{I} - \tfrac{3}{2}\lambda\beta b^{I} + 3\lambda\beta a^{I} + \tfrac{9}{8}\lambda\beta^3 - \tfrac{3}{2}\lambda bb\beta = 0,$$

Or $b = -0,0071800$, $\beta = +0,0102118$, $b^{I} = +0,0000061$; $\beta^{I} = +0,0000057$ & $a^{I} = 0,0000240$; donc en substituant ces valeurs numériques, nous aurons :

$$1149,64074.\,b^{II} + 661,43408.\,\beta^{II} = -0,0002631;$$

$$661,43408.\,b^{II} + 611,95849.\,\beta^{II} = -0,0001417;$$

& par conséquent

$b^{II} = -0,0000002,5$ & $\beta^{II} = +0,0000000,4$;

d'où l'on voit que cette dernière approximation nous mène déja à des inégalités si petites, qu'on pourroit hardiment les négliger.

XIII.

CONCLUSION. Toutes les inégalités de cette classe se réduisent donc à ces deux expressions :

$$x^{I} = a^{I} + (b + b^{II}) \cos. 2p + b^{I} \cos. 4p$$

&

$$y = (\beta + \beta^{II}) \sin. 2p + \beta^{I} \sin. 4p;$$

ou bien en nombres :

$$x = 0,0000240 - 0,0071802. \cos. 2p$$
$$+ 0,0000061. \cos. 4p$$

&

$$y = * + 0,0102118. \sin. 2p + 0,0000057. \sin. 4p.$$

d'où nos deux cordonnées X & Y seront

$$X = a(1,0000240 - 0,0071802. \cos. 2p + 0,0000061. \cos. 4p)$$
$$Y = a(0,0102118. \sin. 2p + 0,0000057. \sin. 4p.)$$

XIV.

Ces valeurs nous feront déja connoître assez près la variation ; & puisque la plus grande répond aux octans, posons l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil $p = 45°$, de sorte que $2p = 90°$, & nous aurons la tangente de la variation

$$\frac{Y}{X} = \frac{0,0102118}{1,0000240 - 0,0000061} = 0,0102115$$

à laquelle répond un angle de 35′ 6″, qui à la vérité est de 1′ 4″ plus petite que ne la donnent les tables ; mais il faut remarquer que la variation que nous venons de trouver, recevra encore quelqu'augmentation par les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Lune & sur-tout par les inégalités parallactiques, comme on le verra dans la suite.

Voilà donc un échantillon de ma nouvelle méthode pour déterminer les inégalités des mouvemens de la Lune : Je conviens que dans cette première recherche, j'ai été un peu trop prolixe ; mais je croyois qu'un tel détail dans le commencement ne sauroit être désagréable. Dans la suite, je tâcherai d'être d'autant plus brief.

TROISIEME

TROISIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la seconde Classe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

ARTICLE PREMIER.

Réflexions générales sur la nature de ces inégalités.

I.

Les valeurs de x & y, que nous venons de trouver, entant qu'elles satisfont à nos deux équations différentio-différentielles, ne sauroient être regardées, que comme une intégrale particuliere, vû qu'il n'y entre que deux constantes arbitraires, l'une étant marquée par la lettre a, & l'autre comprise dans l'angle p; car puisque $dp = mdt$, on en a $p = mt + C$, & cette constante C se rapporte au point fixe, d'où l'on compte cet angle. Or, ayant deux équations différentio-différentielles, leurs intégrales complettes, doivent nécessairement renfermer quatre constantes arbitraires, d'où l'on comprend que pour trouver ces intégrales, il faut encore introduire dans nos formules un autre angle proportionnel au tems, avec un co-efficient indéterminé, qui joint à la constante contenue dans l'angle même, en se rapportant à son commencement, fournira les quatre constantes arbitraires, qui constituent le caractère de l'intégrale complette.

I I.

Cependant, puiſque nos valeurs trouvées, expriment déja une intégrale de nos équations différentio-différentielles, elles auroient pû avoir lieu dans le mouvement de la Lune, ſi ce corps avoit reçu au commencement un certain mouvement conforme à ces intégrales; ce qui arriveroit effectivement ſi l'excentricité de l'orbite de la Lune étoit nulle, & dans ce cas, nous ſerions déjà en état d'expliquer tous les phénomènes de ſon mouvement, bien entendu, en faiſant abſtraction des inégalités du mouvement de la Terre & du mouvement de la Lune en latitude. Dans ce cas donc, les inégalités de la Lune ſe réduiroient uniquement à la variation que nous venons de déterminer & qui ne dépend que de l'angle p, lequel exprime ſon élongation moyenne à l'oppoſition du Soleil.

I I I.

Mais pour arriver à une intégrale complette de nos deux équations différentio différentielles, il s'agit d'introduire dans nos formules un nouvel angle q, qui ait auſſi un certain rapport au tems t; de ſorte pue $dq = ndt$, où n marquera un nombre, dont la valeur doit être déterminée par la théorie, & qui comme nous allons voir, renfermera le mouvement de l'appogée de la Lune. Puiſque le commencement de cet angle peut être regardé comme arbitraire, il doit y entrer un co-efficient arbitraire, qui réponde à ce qu'on nomme excentricité de l'orbite lunaire, & qui dépend uniquement des obſervations, ou bien du mouvement, qui a été imprimé à la Lune au premier commencement.

I V.

On verra bientôt que ce nouvel angle q eſt le même que celui qu'on nomme anomalie moyenne de la Lune. Par conſéquent, en poſant $dq = ndt$, le nombre n ſera à l'unité, comme le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune à celui de l'anomalie moyenne du Soleil. Donc pour le tems de trente jours, le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune étant : $13^s\ 1^\circ\ 56'\ 59'' = 1411019''$ & le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil $29^\circ\ 34'\ 4'',5 = 106444''',5$, nous en concluons : $n = \frac{1411019}{106444,5} = 13,2559127$. Mais quoique cette valeur ſoit tirée des obſervations, il faudroit que la théorie nous fourniſſe la même, ſi le mouvement de l'apogée étoit uniquement produit par les forces du Soleil & de la Terre. Or, on verra que ce nombre eſt en effet très-conforme à la Théorie,

---

ARTICLE II.

Préparation aux articles ſuivans.

V.

COMME dans les recherches préſentes il ne s'agit ni de l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune, ni de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ni enfin des inégalités parallactiques, les inégalités de cette classe seront encore enfermées dans les deux équations données au quatrième §. de la seconde Section, qui sont

$$\left.\begin{array}{l} 1. -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ -\frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2}\lambda yy + 4\lambda x^3 \\ -6\lambda xyy. \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2. -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} y \cos. 2p \\ -\frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy + \frac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy. \end{array}\right\} = 0$$

VI.

Pour accommoder ces équations aux recherches présentes, soient u & v les valeurs de x & y, que nous avons trouvées en cherchant les inégalités de la première classe; de sorte qu'en omettant les termes affectés par $\cos. 4p$ & $\sin. 4p$ comme très-petits à l'égard des autres, nous ayons $u = a^{\mathrm{I}} + b \cos. 2p$; & $v = \beta \sin. 2p$; ou $a = +0{,}0000240$; $b = -0{,}0071802$ & $\beta = +0{,}0102118$. Il seroit même suffisant de prendre $u = b \cos. 2p$ & $v = \beta \sin. 2p$, puisque a^{I} est déja une quantité de la seconde classe. Ecrivons dans nos deux équations $u + x$ & $v + y$ au lieu de x & y, & ayant déja rempli ces deux conditions:

$$-\frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + 3\lambda u + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} u \cos. 2p$$
$$-\frac{3}{2} v \sin. 2p - 3\lambda uu \ \&c. = 0.$$

$$-\frac{ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} v \cos. 2p - \frac{3}{2} u \sin. 2p$$
$$\&c = 0.$$

il nous restera encore de satisfaire à ces deux équations;

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+3\lambda x+x\left(\tfrac{3}{2}\cos.2p-6\lambda u+12\lambda uu-6\lambda vv\right)+y\left(-\tfrac{3}{2}\sin.2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)-3\lambda xx(1-4u)-12\lambda xy.v+\tfrac{3}{2}\lambda yy(1-4u)+4\lambda x^3-6\lambda xyy.=0$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+y\left(-\tfrac{3}{2}\cos.2p+3\lambda u+\tfrac{9}{2}\lambda vv-6\lambda uu\right)+x\left(-\tfrac{3}{2}\sin.2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)+\tfrac{9}{2}\lambda yy.v+3\lambda xy(1-4u)-6\lambda xx.v+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.=0$$

VII.

Substituons pour u & v leurs valeurs & nous obtiendrons ces deux équations, qui renferment toutes les inégalités de cette seconde classe :

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x+Bx\cos.2p+Cy\sin.2p-xx(D+E\cos.2p)-Fxy\sin.2p+yy\left(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}E\cos.2p\right)+4\lambda x^3-6\lambda xyy=0$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^{\text{I}}y+B^{\text{I}}y\cos.2p+Cx\sin.2p+\tfrac{3}{8}Fyy\sin.2p+xy(D+E\cos.2p)-\tfrac{1}{2}Fxx\sin.2p+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy.=0$$

où j'ai posé pour abréger :

$A=-6\lambda a^{\text{I}}+6\lambda bb-3\lambda\beta\beta+12\lambda a^{\text{I}}a^{\text{I}}=-0,0264574$;

$A^{\text{I}}=+3\lambda a^{\text{I}}-3\lambda bb+\tfrac{9}{4}\lambda\beta\beta-6\lambda a^{\text{I}}a^{\text{I}}=+0,0272462$;

$B = + \frac{3}{2} - 6\lambda b + 24\lambda a^{I} b = + 9,220588;$

$E^{I} = - \frac{3}{2} + 3\lambda b - 12\lambda a^{I} b = - 5,360294;$

$C = - \frac{3}{2} + 3\lambda\beta - 12\lambda a^{I}\beta = + 3,990175;$

$D = + 3\lambda - 12\lambda a^{I} = + 537,63059;$

$E = - 12\lambda b = + 15,44266;$

$F = + 12\lambda\beta = + 21,96282.$

ARTICLE III.

Détermination des inégalités qui dépendent de la simple excentricité de l'orbite de la Lune.

VIII.

EQUATIONS *qui renferment ces inégalités.* Comme il ne s'agit ici que de la simple excentricité de l'orbite lunaire, il ne sera question que des termes affectés par x & y; en omettant donc tous ceux où x & y ont plus d'une dimension, les équations qui renferment toutes les inégalités que je me propose de déterminer dans cet article, seront

$$1.\ -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx \cos. 2p + Cy \sin. 2p = 0.$$

$$2.\ -\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^{I}y + B^{I}y \cos. 2p + Cx \sin. 2p = 0.$$

IX.

Première Approximation. Ne considérons d'abord que les trois premiers termes de ces équations, & négligeons les deux suivans, pour avoir

$$-\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x=0$$

&

$$-\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^{\text{I}}y=0.$$

Soit pour satisfaire à ces deux conditions $x=c.\cos.q$ & $y=\gamma.\sin.q$, & à cause de $dq=ndt$, nous obtiendrons en substituant ces valeurs dans nos deux équations, les déterminations suivantes

$$((nn+3\lambda+A)c+2(m+1)n\gamma)\cos.q=0$$

&

$$((nn+A^{\text{I}})\gamma+2(m+1)nc)\sin.q=0.$$

D'où nous trouverons

de la première $\frac{\gamma}{c}=\frac{-nn-3\lambda+A}{2(m+1).n}$

& de la seconde $\frac{\gamma}{c}=\frac{-2(m+1).n}{nn+A^{\text{I}}}$;

par conséquent

$$n^4+(3\lambda+A+A^{\text{I}})nn+(3\lambda+A)A^{\text{I}}=4(m+1)^2nn$$

ou bien

$$n^4-177,2266289.nn+14,6469900=0.$$

A cette équation satisfait $n'=13,3095$, qui est trop grande de 0,0536. Or, si nous supposons avec les Tables

Astronomiques $n = 13,2559127$, nous obtiendrons pour $\frac{\gamma}{c}$ ces deux valeurs : de la premiere $\frac{\gamma}{c} = -2,0127$ & de la seconde $\frac{\gamma}{c} = -2,0167$, cette différence provenant de ce que nous avons négligé ici les deux derniers termes de nos équations,

X,

Seconde Approximation. Reprenons nos équations complettes

$$1. -\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx\,cos.\,2p$$
$$+ Cy\,sin.\,2p = 0;$$

$$2. -\frac{ddy}{dt^2}\,\frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1 y + B^1 y\,cos.\,2p$$
$$+ Cx\,sin.\,2p) = 0;$$

& il est clair que pour satisfaire pleinement à ces équations, il faudra donner à x & y les formes qui suivent

$$x = c\,cos.\,q + d\,cos.(2p - q) + e\,cos(2p + q);$$
$$y = \gamma\,sin.\,q + \delta\,sin.(2p - q) + \varepsilon\,sin.(2p + q).$$

Substituons donc ces formes dans nos équations, & nous obtiendrons les six déterminations suivantes

$$1. (nn + 3\lambda + A)c + 2(m+1)n\gamma + \tfrac{1}{2}B(d + e)$$
$$+ \tfrac{1}{2}C(\delta + \varepsilon) = 0;$$

$$2. (nn + A^1)\gamma + 2(m+1)nc - \tfrac{1}{2}B^1(\delta - \varepsilon)$$
$$+ \tfrac{1}{2}C(d - e) = 0;$$

$$3. ((2m - n)^2 + 3\lambda + A)d + 2(m+1)(2m-n)\delta$$
$$+ \tfrac{1}{2}Bc + \tfrac{1}{2}C\gamma = 0;$$

$$4.\ ((2m-n)^2+A^{\text{I}})\delta+2(m+1)(2m-n)d$$
$$-\tfrac{1}{2}B^{\text{I}}\gamma+\tfrac{1}{2}Cc=0;$$

$$5.\ ((2m+n)^2+3\lambda+A)e+2(m+1)(2m+n)\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}Bc-\tfrac{1}{2}C\gamma=0;$$

$$6.\ ((2m+n)^2+A^{\text{I}})\varepsilon+2(m+1)(2m+n)e$$
$$+\tfrac{1}{2}B^{\text{I}}\gamma+\tfrac{1}{2}Cc=0.$$

X I.

Posons selon les Tables Astronomiques $n=13,2559127$ & les quatre dernières déterminations donneront

$$d=-0,0007597.c-0,0937565.\gamma;$$
$$\delta=-0,0133585.c+0,1979618.\gamma;$$
$$e=-0,0025319.c+0,0000859.\gamma;$$
$$\varepsilon=+0,0004000.c+0,0017960.\gamma.$$

Substituons ces valeurs dans les deux premières équations, & nous aurons

$$(nn+537,6147782)c+(26,7377948.n-0,0333415)\gamma=0;$$
$$(nn+0,3657538)\gamma+(26,7377948.n+0,0333360)\gamma=0;$$

de-là $\frac{\gamma}{c}=\frac{-nn-537,6147782}{26,7377948.n-0,0333415}$

$$=\frac{-26,7377948.n-0,0333360}{nn+0,3657538}$$

ce qui donneroit $n=13,28473$. Par conséquent $m-n=-0,91584$ & de-là le mouvement de l'apogée pour 30 jours $=2^\circ\ 29'\ 23''$ qui est trop petite de $51'\ 9''$. On comprend donc que, quoique cette méthode donne encore pour le mouvement de l'apogée de la Lune une différence bien grande entre la théorie & les obſervations, elle n'eſt cependant pas auſſi énorme que celle que donne la méthode ordinaire. Au reſte, il eſt très-certain que l'action des autres planètes a une influence ſur le mouvement de l'apogée de la Lune, ſachant que ſans cette action l'apogée du Soleil devroit être immobile. Enfin, les petites quantités que nous avons négligées ici, & les augmentations que les coëfficiens de *ſin.* $2p$ & *coſ.* $2p$ prendront dans la ſuite, lorſque nous déterminerons les inégalités qui réſultent du quarré de l'excentricité de la Lune & de l'inclinaiſon de ſon orbite augmenteront encore conſidérablement le mouvement de l'apogée de la Lune que nous venons de déterminer ici.

XII.

Toutefois cette différence quelle qu'elle ſoit ne nous empêche pas d'aller plus loin; car poſant dans les deux valeurs trouvées pour $\frac{\gamma}{c}$ ſelon les Tables Aſtronomiques $n = 13,2559127$; nous aurons de la première

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-713,3339997}{354,4005321} = -2,012791$$

& de la ſeconde

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-354,4005376}{176,0849753} = -2,012667.$$

Comme donc cette différence eſt très-petite, & qu'elle n'influe preſque rien ſur les valeurs des coëfficiens d, δ, e & ε, il me ſera permis de prendre pour $\frac{\gamma}{c}$ un nombre moyen. Soit donc $\gamma = -2,012729.c$, & nous aurons pour les inégalités de cette claſſe

$d = +0,187947.c$; $\delta = -0,411802.c$;

$e = -0,002705.c$; $\varepsilon = -0,003215.c$.

Or, nous avions supposé

$$x = c.\operatorname{cos}.q + d.\operatorname{cos}.(2p - q) + e.\operatorname{cos}.(2p + q)$$

& $y = \gamma.\operatorname{sin}.q + \delta.\operatorname{sin}.(2p - q) + \varepsilon.\operatorname{sin}.(2p + q)$

de sorte que maintenant

$$x = c.\operatorname{cos}.q + 0,187947.c.\operatorname{cos}.(2p - q) - 0,002705.c.\operatorname{cos}.(2p + q)$$

& $y = -2,112729.c.\operatorname{sin}.q - 0,411802.c.\operatorname{sin}.(2p - q) - 0,003215.c.\operatorname{sin}.(2p + q)$.

XIII.

On pourra aisément pousser cette approximation plus loin, en cherchant aussi les coëfficiens des *cosinus* & *sinus* des angles $4p \pm q$, & alors on trouvera qu'il faudra encore ajouter aux expressions que je viens d'écrire, les termes suivans

$$x = \ldots\ldots - 0,000512.c.\operatorname{cos}.(4p - q) - 0,000012.c.\operatorname{cos}.(4p + q)$$

$y = \ldots\ldots - 0,000728.c.\operatorname{sin}.(4p - q) - 0,000025.c.\operatorname{sin}.(4p + q)$ qui en effet sont très-petites.

ARTICLE IV.

Détermination des inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

XIV.

PRÉPARATION. Ces inégalités dépendront donc de la double anomalie moyenne de la Lune, ou bien de l'angle $2q$. Les observations nous apprennent qu'elles sont très-petites, il me sera donc permis de ne combiner ce double angle $2q$ qu'avec $2p$. Or, voici les équations qu'il s'agit de considérer ici. § 7.

$$1. -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x+Bx\cos. 2p$$
$$+Cy\sin. 2p-xx(D+\varepsilon\cos. 2p)-Fxy\sin. 2p$$
$$+yy(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos. 2p)+4\lambda x^3-6\lambda xyy=0.$$

$$2. -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^1y+B^1y\cos. 2p+Cx\sin 2p$$
$$+\tfrac{3}{8}Fyy\sin. 2p+xy(D+\varepsilon\cos. 2p)-\tfrac{1}{2}Fxx\sin. 2p$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy=0.$$

XV.

Soient encore u & v les valeurs trouvées pour x & y dans l'article précédent, de sorte que

$u=c\,.\cos. q+d\cos.(2p-q)+e\cos.(2p+q)$

& $v=\gamma\sin. q+\delta\sin.(2p-q)+\varepsilon\sin.(2p+q)$.

Ecrivons dans nos deux équatiuns $u+x$ & $v+y$ au lieu de x & y, & ayant déja fait évanouir ces expressions

$$-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{2(m+2)dv}{dt}+(3\lambda+A)u+Bu\ cos.2p$$
$$+Cv\ sin.2p$$

&

$$\frac{-ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)du}{dt}+A^1v+B^1v\ cos.2p+Cu\ sin.2p$$

Il nous restera encore à résoudre ces deux équations.

$$1.\quad \frac{-ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy}{dt}+(3\lambda+A)x-D(uu-\tfrac{1}{2}vv)$$
$$-\varepsilon(uu-\tfrac{1}{2}vv)cos.2p-Fuv\ sin.2p+Bx\ cos.2p$$
$$+Cy\ sin.2p+x(-2Du-2\varepsilon u\ cos.2p-Fv\ sin.2p)$$
$$+y(Dv+\varepsilon v\ cos.2p-Fu\ sin.2p)+4\lambda u^3-6\lambda uvv=0.$$

$$2.\quad \frac{-ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}+A^1y+Duv-F(\tfrac{1}{2}uu-\tfrac{3}{8}vv)$$
$$sin.2p+\varepsilon uv\ cos.2p+B^1y\ cos.2p+Cx\ sin.2p$$
$$+y(Du+\varepsilon u\ cos.2p+\tfrac{3}{4}Fv\ sin.2p)+x(Dv+\varepsilon v\times$$
$$cos.2p-Fu\ sin.2p)+\tfrac{3}{2}\lambda v^3-6\lambda uuv$$

en omettant tous les termes qui renfermeroient le biquarré de l'excentricité.

XVI.

Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité.

On n'a qu'à omettre les quatre derniers termes des équations précédentes pour avoir celles dont il est question ici, & qui seront

$$1. \quad \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + (3\lambda + A)x - D(uu - \tfrac{1}{2}vv)$$
$$- \varepsilon(uu - \tfrac{1}{2}vv)\, cof.\, 2p - F\, uv\, fin.\, 2p + Bx\, cof.\, 2p$$
$$+ Cy\, fin.\, 2p = 0.$$

$$2. \quad \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^{\mathrm{I}}y + Duv - F(\tfrac{1}{2}uu - \tfrac{3}{8}vv)$$
$$fin.\, 2p + \varepsilon uv\, cof.\, 2p + B^{\mathrm{I}}y\, cof.\, 2p + Cx\, fin.\, 2p = 0.$$

Subſtituons pour u & v leurs valeurs trouvées dans l'article précédent & nous aurons pour les inégalités que nous cherchons ces deux équations.

$$1. \quad \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 537,6558.x + Bx\, cof.\, 2p$$
$$+ Cy\, fin.\, 2p + 288,7579.cc - 312,3584.cc\, cof.\, 2p$$
$$- 810,7657.cc.\, cof.\, 2q + 121,1496.cc,\, cof.(2p - 2q)$$
$$- 23,0175.cc.\, cof.(2p + 2q) = 0.$$

$$2. \quad \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + 0,0272.y + B^{\mathrm{I}}y\, cof.\, 2p + Cx$$
$$fin.\, 2p - 203,0193.cc.fin.\, 2p - 538,9855.cc.$$
$$fin.\, 2q - 12,3107.cc.fin.(2p - 2q) - 18,2562.cc.$$
$$fin.(2p + 2q) = 0.$$

XVII.

Détermination de ces inégalités. On voit bien que x & y doivent avoir ces formes

$$x = a^{\mathrm{II}} + b^{\mathrm{II}}\, cof.\, 2p + c^{\mathrm{I}}\, cof.\, 2q + d^{\mathrm{I}}\, cof.(2p - 2q)$$
$$+ e^{\mathrm{I}}\, cof.(2p + 2q).$$

$$y = \beta^{\mathrm{II}}\, fin.\, 2p + \gamma^{\mathrm{I}}\, fin.\, 2q + \delta^{\mathrm{I}}\, fin.(2p - 2q)$$
$$+ \varepsilon^{\mathrm{I}}\, fin.(2p + 2q);$$

d'où nous obtiendrons les neuf déterminations suivantes.

1. $537,6558 . a^{II} = - 288,7579 . cc - \frac{1}{2} B b^{II} - \frac{1}{2} C \beta^{II}$.

2. $(4m^2 + 537,6558) b^{II} + 4m(m+1) \beta^{II} = 312,3584 . cc - B a^{II}$.

3. $4m(m+1) b^{II} + (4mm + 0,0272) \beta^{II} = 203,0193 . cc - C a^{II}$.

4. $(4nn + 537,6558) c^{I} + 4(m+1) n . \gamma^{I} = + 810,7657 . cc - \frac{1}{2} B (d^{I} + e^{I}) - \frac{1}{2} C (\delta^{I} + \varepsilon^{I})$

5. $4n(m+1) c^{I} + (4nn + 0,0272) \gamma^{I} = + 538,9855 . cc + \frac{1}{2} B^{I} (\delta^{I} - \varepsilon^{I}) - \frac{1}{2} C (d^{I} - e^{I})$.

6. $(4(m-n)^2 + 537,6558) d^{I} + 4(m+1)(m-n) \delta^{I} = - 121,1496 . cc - \frac{1}{2} B c^{I} - \frac{1}{2} C \gamma^{I}$.

7. $4(m+1)(m-n) d^{I} + (4(m-n)^2 + 0,0272) \delta^{I} = + 12,3107 . cc + \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{I} - \frac{1}{2} C c^{I}$.

8. $(4(m+n)^2 + 537,7558) e^{I} + 4(m+1)(m+n) \varepsilon^{I} = + 23,0175 . cc - \frac{1}{2} B c^{I} + \frac{1}{2} C \gamma^{I}$.

9. $4(m+1)(m+n) e^{I} + (4(m+n)^2 + 0,0272) \varepsilon^{I} = + 18,2562 . cc - \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{I} - \frac{1}{2} C c^{I}$.

Les trois premières équations donnent l'élimination :

$a^{II} = - 0,53931 . cc$; $b^{II} = + 0,21986 . cc$; $\beta^{II} = + 0,09763 . cc$

& les six autres fournissent

$c^{I} = + 0,50962 . cc$; $d^{I} = - 0,20629 . cc$; $e^{I} = + 0,00468 . cc$;

$\gamma^{I} = + 0,25237 . cc$; $\delta^{I} = + 0,26228 . cc$; $\varepsilon^{I} = + 0,00464 . cc$.

par conséquent

$$x = -0{,}53931.cc + 0{,}21986.cc.\,cos.2p + 0{,}50962.cc.\,cos.\,2q - 0{,}20629.cc.\,cos.(2p - 2q) + 0{,}00468.cc.\,cos.(2p + 2q).$$

$$y = \quad * \quad + 0{,}09763.cc.\,sin.2p + 0{,}25237.cc.\,sin.\,2q + 0{,}26228.cc.\,sin.(2p - 2q) + 0{,}00464.cc.\,sin.(2p + 2q).$$

ARTICLE V.

Détermination des inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de l'orbite de la Lune.

XVIII.

PRÉPARATION. En écrivant $x + x^{\mathrm{I}}$ & $y + y^{\mathrm{I}}$ à la place de x & y, il nous restera encore ces deux équations à résoudre. (§. 15.)

$$1.\; -\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt} + (3\lambda + A)x^{\mathrm{I}} + Bx^{\mathrm{I}}\,cos.\,2p + Cy^{\mathrm{I}}\,sin.\,2p + x(-2Du - 2\varepsilon u\,cos.2p - Fv\,sin.2p) + y(Dv + \varepsilon v\,cos.2p - Fu\,sin.2p) + 4\lambda u^3 - 6\lambda uvv.$$

$$2.\; \frac{-ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2}\; \frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt} + A^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}} + B'y^{\mathrm{I}}\,cos.2p + Cx^{\mathrm{I}}\,sin.2p + y(Du + \varepsilon u\,cos.\,2p + \tfrac{3}{4}\,Fv\,sin.\,2p) \times + x(Dv + \varepsilon v\,cos.\,2p - Fu\,sin.\,2p) + \tfrac{3}{2}\,\lambda v^3 - 6\lambda uuv.$$

Substituons ici pour u, v, x & y leurs valeurs trouvées aux §§. 12 & 17, & nous obtiendrons,

XIX.

XIX.

Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de la Lune.

1. $-\frac{ddx^{I}}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy^{I}}{dt}+(3\lambda+A)\,x^{I}+B^{I}x\,cos.\,2p$
$+Cy^{I}\,sin.\,2p-484{,}398.c^3\,cos.\,q-56{,}493.c^3\times$
$cos.(2p-q)+680{,}467.c^3\,cos.(2p+q)+1130{,}384.c^3\times$
$cos.\,3q-248{,}289.c^3\,cos.(2p-3q)-5{,}190.c^3\times$
$cos.(2p+3q)=0.$

2. $-\frac{ddy^{I}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{I}}{dt}+A^{I}y^{I}+B^{I}y^{I}\,cos.\,2p+Cx^{I}\,sin.\,2p$
$-239{,}210.c^3\,sin.\,q-13{,}466.c^3\,sin.(2p-q)$
$+529{,}371.c^3\,sin.(2p+q)+881{,}177.c^3\,sin.\,3q$
$+135{,}471.c^3\,sin.(2p-3q)-5{,}043.c^3\,sin.(2p+3q)$
$=0.$

XX.

Détermination de ces inégalités. Soit

$$x^{I}=c^{II}\,cos.\,q+d^{II}\,cos.(2p-q)+e^{II}\,cos.(2p+q)$$
$$+c^{III}\,cos.\,2q+d^{III}\,cos.(2p-3q)+e^{III}\,cos.(2p+3q).$$
$$y^{I}=\gamma^{II}\,sin.\,q.+\delta^{II}\,sin.(2p-q)+\varepsilon^{II}\,sin.(2p+q)$$
$$+\gamma^{III}sin.\,3q+\delta^{III}sin.(2p-3q)+\varepsilon^{III}sin.(2p+3q).$$

Et la ſubſtitution nous fournira les douzes équations ſuivantes.

1. $(nn+3\lambda+A)c^{II}+2(m+1)n.\gamma^{II}=$
$+484{,}398.c^3-\frac{1}{2}B(d^{II}+e^{II})-\frac{1}{2}C(\delta^{II}+\varepsilon^{II}).$

II. $2(m+1)n \cdot c^{II} + (nn + A^{I}) \cdot \gamma^{II} =$
$+ 239{,}210 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C(d^{II} - e^{II}) + \frac{1}{2} B^{I}(\delta^{II} - \varepsilon^{II}).$

III. $((2m-n)^{2} + 3\lambda + A)d^{II} + 2(m+1)(2m-n)\delta^{II} =$
$+ 56{,}493 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{II} - \frac{1}{2} C \gamma^{II}.$

IV. $2(m+1)(2m-n)d^{II} + ((2m-n)^{2} + A^{I})\delta^{II} =$
$+ 13{,}466 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{II} + \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{II}.$

V. $((2m+n)^{2} + 3\lambda + A)e^{II} + 2(m+1)(2m+n)\varepsilon^{II} =$
$- 680{,}467 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{II} + \frac{1}{2} C \gamma^{II}.$

VI. $2(m+1)(2m-n)e^{II} + ((2m-n)^{2} + A^{I})\varepsilon^{II} =$
$- 529{,}371 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{II} - \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{II}.$

VII. $(9nn + 3\lambda + A)c^{III} + 6(m+1)n \cdot \gamma^{III} =$
$- 1130{,}384 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B(d^{III} + e^{III}) - \frac{1}{2} C(\delta^{III} + \varepsilon^{III}).$

VIII. $6(m+1)n \cdot c^{III} + (9nn + A^{I}) \cdot \gamma^{III} =$
$- 881{,}177 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C(d^{III} - e^{III}) + \frac{1}{2} B^{I}(\delta^{III} - \varepsilon^{III}).$

IX. $((2m-3n)^{2} + 3\lambda + A)d^{III} + 2(m+1)(2m-3n)\delta^{III} =$
$+ 248{,}289 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{III} - \frac{1}{2} C \gamma^{III}.$

X. $2(m+1)(2m-3n)d^{III} + ((2m-3n)^{2} + A^{I})\delta^{III} =$
$- 135{,}471 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{III} + \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{III}.$

XI. $((2m+3n)^{2} + 3\lambda + A)e^{III} + 2(m+1)(2m+2n)\varepsilon^{III} =$
$+ 5{,}190 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} B c^{III} + \frac{1}{2} C \gamma^{III}.$

XII. $2(m+1)(2m+3n)e^{III} + ((2m+3n)^{2} + A^{I})\varepsilon^{III} =$
$+ 5{,}043 \cdot c^{3} - \frac{1}{2} C c^{III} - \frac{1}{2} B^{I} \gamma^{III}.$

D'où l'on trouvera par élimination les valeurs qui ſuivent

$c^{II} = + 0{,}8899 \cdot c^{3}$; $d^{II} = - 0{,}5166 \cdot c^{3}$;
$e^{II} = - 0{,}2445 \cdot c^{3}$;

$\gamma^{\mathrm{II}} = -0{,}4207 \,.\, c^3;\ \delta^{\mathrm{II}} = +1{,}3000 \,.\, c^3;$
$\quad \varepsilon^{\mathrm{II}} = -0{,}1960 \,.\, c^3;$

$c^{\mathrm{III}} = -0{,}3832 \,.\, c^3;\ d^{\mathrm{III}} = +0{,}1782 \,.\, c^3;$
$\quad e^{\mathrm{III}} = +0{,}0011 \,.\, c^3;$
$\gamma^{\mathrm{III}} = -0{,}2996 \,.\, c^3;\ \delta^{\mathrm{III}} = -0{,}2850 \,.\, c^3;$
$\quad \varepsilon^{\mathrm{III}} = +0{,}0007 \,.\, c^3.$

Par conséquent

$$x^{\mathrm{I}} = \left\{\begin{array}{l} +0{,}8899 \,.\, c^3 .\, cof.\, q - 0{,}5166 \,.\, c^3 .\, cof.\, (2p - q) \\ \quad -0{,}2455 \,.\, c^3 .\, cof.\, (2p + q) \\ -0{,}3832 \,.\, c^3 .\, cof.\, 3q + 0{,}1782 \,.\, c^3 .\, cof.\, (2p - 3q) \\ \quad +0{,}0011 \,.\, c^3 .\, cof.\, (2p + 3q). \end{array}\right.$$

$$y^{\mathrm{I}} = \left\{\begin{array}{l} -0{,}4207 \,.\, c^3 .\, fin.\, q + 1{,}3000 \,.\, c^3 .\, fin.\, (2p - q) \\ \quad -0{,}1960 \,.\, c^3 .\, fin.\, (2p + q) \\ -0{,}2996 \,.\, c^3 .\, fin.\, 3q - 0{,}2850 \,.\, c^3 .\, fin.\, (2p - 3q) \\ \quad \pm 0{,}0007 \,.\, c^3 .\, fin.\, (2p \pm 3q). \end{array}\right.$$

QUATRIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la troisième Classe, qui dépendent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'écliptique.

ARTICLE PREMIER.

Recherches préliminaires sur la nature de ces inégalités.

I.

J'AI supposé jusqu'ici que la Lune se meut sur le plan de l'écliptique, dont les inégalités ont été tirées des deux premières de nos trois équations générales ; à présent je n'ai qu'à y ajouter la troisième. Or, comme l'inclinaison de la Lune est fort petite, il me sera permis de faire abstraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, & encore à plus forte raison des inégalités qui dépendent de la parallaxe du Soleil. J'ometterai donc encore les termes affectés par v & a, & les trois équations que nous aurons à considérer ici seront (Sect. 1. § 23).

$$\text{I.}\ \left.\begin{array}{l} -\frac{ddx}{dt^2}+\frac{2(m+1)\,dy}{dt}+3\lambda x+\frac{3}{2}\cos.2p+\frac{3}{2}x\cos.2p \\ -\frac{3}{2}y\sin.2p-3\lambda xx+\frac{3}{2}\lambda yy+4\lambda x^3 \\ -6\lambda xyy+\frac{3}{2}\lambda(1-4x)zz. \end{array}\right\}=0$$

$$2.\left.\begin{array}{l} -\frac{ddy}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx}{dt}-\frac{3}{2}\,\mathit{sin}.\,2p-\frac{3}{2}\,y\,\mathit{cos}.\,2p \\ -\frac{3}{2}\,x\,\mathit{sin}.\,2p+3\lambda xy+\frac{3}{2}\lambda y^3-6\lambda xxy \\ +\frac{3}{2}\lambda y.zz. \end{array}\right\}=0$$

$$3.\ -\frac{ddz}{dt^2}-(\lambda+1)z+\frac{3}{2}\lambda z^3+\frac{3}{2}\lambda(2x-4xx+yy)z=0.$$

I I.

Les deux équations sont donc les mêmes que celles que nous avons développées jusqu'ici, aux derniers termes près qui renferment zz, auxquels il nous faudra encore satisfaire, & d'où résulteront quelques nouvelles inégalités dans x & y; mais qui pourront être négligées dans la recherche de la valeur de z, laquelle étant fort petite, il suffira d'y prendre seulement les principales parties qui constituent les valeurs de x & y. Ensuite en déterminant z, je négligerai le terme $\frac{3}{2}\lambda z^3$, puisqu'il donneroit des inégalités qui dépendent du cube de l'inclinaison, & qu'on pourra hardiment rejetter.

I I I.

Pour commencer les recherches présentes, ne considerons d'abord que la troisième équation, & supposons premiérement $x = 0$ & $y = 0$, de sorte que $-\frac{ddz}{dt^2} -(1+\lambda)z = 0$; d'où il est clair que z exprimera le *sinus* ou *cosinus* d'un certain angle proportionnel au tems multiplié par un coëfficient arbitraire. Soit donc r cet angle & posons $dr = l\,dt$, de sorte que mettant $z = \omega\,\mathit{sin}.\,r$, nous ayons $\frac{dz}{dt} = l\omega\,\mathit{cos}.\,r$ & $\frac{ddz}{dt^2} = -ll\omega\,\mathit{sin}.\,r$, ces valeurs étant ſubſtituées donneront $l\,l\,\omega\,\text{ſin.}\,r - (1+\lambda)\,\omega\,\text{ſin.}\,r = 0$; donc $l = \sqrt{(1+\lambda)}$. Or ayant trouvé ci-deſſus $\lambda = mm + 2m + \frac{3}{2} = 179{,}2274177$. (Sect. 2 §. 3), nous aurons $l = 13{,}42488$.

IV.

Examinons maintenant plus ſoigneuſement la nature de cet angle r, que nous venons de trouver, & puiſque la tangente de la latitude de la Lune eſt $Z : \sqrt{(XX+YY)} = z(1 - x + 2xx - \frac{1}{2}yy)$, nous voyons que quand $r = 0$ ou $r = 180°$, la Lune ſe trouvera dans l'écliptique & que ſa latitude ſera la plus grande lorſque $r = 90°$ ou $r = 270°$; d'où il eſt évident que cet angle r exprime ce qu'on nomme en Aſtronomie : *Argument de Latitude;* & par conſéquent cet angle r doit réſulter quand on ſouſtrait la longitude du nœud de la longitude moyenne de la Lune.

V.

Voyons donc ſi ce mouvement eſt conforme aux obſervations. Les Tables Aſtronomiques donnent pour le tems de 30 jours le mouvement du nœud de la Lune rétrograde $1° \; 35' \; 19'' = 5719''$; le mouvement moyen de la Lune $13^s \; 5° \; 17' \; 31'' = 1423051''$: donc le mouvement moyen de la Lune moins le mouvement de ſon nœud $1428770''$. Mais le mouvement moyen de l'anomalie du Soleil pour ce même tems de 30 jours eſt $29° \; 34' \; 4'',5 = 106444'',5$; d'où les obſervations donneront

$$l = \frac{dr}{dt} = \frac{1428770}{106444{,}5} = 13{,}4226756$$; & dont il faudra

ſe ſervir dans la ſuite, la petite différence provenant tant de ce que nous avons négligé au § 3. les inégalités de la

Lune, que principalement de l'action des autres planètes ſur la Lune.

V I.

Enſuite pour le coëfficient ω, il eſt clair qu'il exprimera la valeur de z lorſque la latitude moyenne de la Lune devient la plus grande ; car prenant $r = 90°$, il devient $z = \omega$; or z eſt alors la tangente de la latitude. La valeur d'ω doit donc être déterminée par les obſervations de la même manière que l'excentricité c, & cette valeur ſera à peu près $\omega = \frac{9}{10}$; celle de l'excentricité étant, peu s'en faut, $c = \frac{1}{20}$.

ARTICLE II.

Détermination des inégalités auxquelles eſt aſſujettie la latitude de la Lune.

VII.

Ayant trouvé la partie principale de la valeur de z, qui eſt $z = \omega \, \textit{ſin.}\, r$, il faut chercher les inégalités, auſquelles ce z eſt aſſujetti à cauſe des inégalités mêmes de la Lune, dont il ſuffira de prendre les principales, & qui ſont contenues dans les valeurs déja trouvées pour x & y. Soit donc

$$x = a^{\mathrm{I}} + b \, \textit{coſ.}\, 2p + c' \, \textit{coſ.}\, q + d \, \textit{coſ.}\, (2p - q) + f \, \textit{coſ.}\, 2q + g \, \textit{coſ.}\, (2p - 2q)$$

&

$$y = \beta \, \textit{ſin.}\, 2p + \gamma \, \textit{ſin.}\, q + \delta \, \textit{ſin.}\, (2p - q) + \xi \, \textit{ſin.}\, 2q + \theta \, \textit{ſin.}\, (2p - 2q) ;$$

& nous obtiendrons

$$2x - 4xx + yy = 2a^{I} - 4a^{I}a^{I} - 2bb + \tfrac{1}{2}\beta\beta - 2c^{I}c^{I} + \tfrac{1}{2}\gamma\gamma - 2dd + \tfrac{1}{2}\delta\delta + (2b - 8a^{I}b - 4c^{I}d - \gamma\delta) \cos. 2p + (2c^{I} - 8a^{I}c^{I} - 4bd + \beta\delta) \cos. q + (2d - 8a^{I}d - 4bc^{I} + \beta\gamma) \cos. (2p - q) + (2f - 8a^{I}f - 4bg + \beta\theta - 2c^{I}c^{I} - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma) \cos. 2q + (2g - 8a^{I}g - 4bf + \beta\xi - 4c^{I}d + \gamma\delta) \cos. (2p - 2q).$$

D'où en ſubſtituant pour λ, a^{I}, b, β, c^{I}, γ &c. leurs valeurs trouvées, nous trouverons cette équation.

VIII.

Equation qui renferme toutes les inégalités du mouvement de la Lune en latitude.

$$-\frac{ddz}{dt^2} + z(A + B \cos. 2p + C \cos. q + D \cos. (2p - q) + E \cos. 2q + F \cos. (2p - 2q)) = 0.$$

où j'ai poſé pour abréger

$$-180,2354 - 280,0737 . cc = A;$$
$$-3,8603 - 311,8370 . cc = B;$$
$$+541,9150 . c = C;$$
$$+102,3782 . c = D;$$
$$-810,4568 . cc = E$$

&

$$-87,1592 . cc = F.$$

IX.

IX.

Détermination de ces inégalités.

Donnons donc à z la forme suivante :

$$z = \omega \sin. r + A' \omega \sin. (2p - r) + a' \omega \sin. (2p + r) + B' \omega \sin. (q - r) + b' \omega \sin. (q + r) + C' \omega \sin. (2p - q - r) + c' \omega \sin. (2p - q + r) + D' \omega \sin. (2q - r) + d' \omega \sin (2q + r) + F' \omega \sin. (2p - 2q - r) + a' \omega \sin. (2p - 2q + r).$$

Et substituons cette forme dans l'équation différentio-différentielle au lieu de z, & nous aurons en négligeant les termes qui dépendroient du cube & du biquarré de l'excentricité c ces déterminations :

Pour le coëfficient de $\sin. r$; $ll + A - \frac{1}{2} B(A' - a') - \frac{1}{2} C(B' - b') - \frac{1}{2} D(C' - c') = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - r)$; $((2m - l)^2 + A) A' - \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} CC' + \frac{1}{2} DB' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p + r)$; $((2m + l)^2 + A) a' + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} Cc' + \frac{1}{2} Db' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (q - r)$; $((n - l)^2 + A) B' - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} Bc' + \frac{1}{2} DA' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (q + r)$; $((n + l)^2 + A) b' + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} BC' + \frac{1}{2} Da' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - q - r)$; $((2m - n - l)^2 + A) C' - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} Bb' + \frac{1}{2} CA' = 0$.

Pour le coëfficient de $\sin. (2p - q + r)$; $((2m - n + l)^2 + A) c' + \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} BB' + \frac{1}{2} Ca' = 0$.

Pour le coëfficient de $fin. (2q - r)$; $((2n - l)^2 + A)D' - \frac{1}{2}Bf - \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}CB' + \frac{1}{2}FA' = 0$.

Pour le coëfficient de $fin. (2q + r)$; $((2n + l)^2 + A)d' - \frac{1}{2}Bf' + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}Cb' + \frac{1}{2}Fa' = 0$.

Pour le coëfficient de $fin. (2p - 2q - r)$; $((2m - 2n - l)^2 + A)f' - \frac{1}{2}Bd' - \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}CC' - \frac{1}{2}Db' + \frac{1}{2}EA' = 0$.

Pour le coëfficient de $fin. (2p - 2q + r)$; $((2m - 2n + l)^2 + A)f' - \frac{1}{2}BD' + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}Cc' - \frac{1}{2}DE' + \frac{1}{2}Ea' = 0$.

D'où l'on voit que les coëfficiens A' & a' auront chacun deux parties, dont l'une ne dépend point du tout de l'excentricité & dont l'autre renferme le quarré de l'excentricité cc. Enfuite les coëfficiens B', b', C', c' dépendront uniquement de la fimple excentricité c, & les coëfficiens D', d', E', e' renfermeront le feul quarré de l'excentricité cc.

La première de ces onze équations déterminera plus exactement la valeur de l, déja connue par les Tables Aftronomiques & les dix autres équations donneront les valeurs des coëfficiens A', a', B', b', C', c', D', d', E', e, F', f' où il fera permis de mettre dans la valeur de A, pour $cc = \frac{1}{400}$; de forte que $A = -180,2354 - \frac{280,0737}{400} = -180,9355$.

X.

Après avoir fait les calculs j'ai trouvé pour z cette valeur :

VALEUR de z ou de $\frac{z}{a}$

$$z = \omega\, \mathit{sin.}\, r + (0{,}036484 + 0{,}3498\,.\,cc)\omega\, \mathit{sin.}\,(2p - r)$$
$$+ (0{,}001877 + 0{,}2102\,.\,cc)\omega\, \mathit{sin.}\,(2p + r)$$
$$- 1{,}48582\,.\,c\omega\, \mathit{sin.}\,(q - r) - 0{,}51163\,.\,c\omega\, \mathit{sin.}\,(q + r)$$
$$- 0{,}22643\,.\,c\omega\, \mathit{sin.}\,(2p - q - r) - 0{,}12553\,.\,c\omega\, \mathit{sin.}\,(2p - q + r)$$
$$+ 0{,}1195\,.\,cc\omega\, \mathit{sin.}\,(2q - r) + 0{,}3850\,.\,cc\omega\,.\, \mathit{sin.}\,(2q + r)$$
$$+ 0{,}1523\,.\,cc\omega\, \mathit{sin.}\,(2p - 2q - r) - 0{,}0614\,.\,cc\omega\, \mathit{sin.}\,(2p - 2q + r).$$

X I.

DÉTERMINATION PLUS EXACTE DU RAPPORT l. Si nous substituons les valeurs trouvées pour A', a', B', b', C' & c' dans la première équation, qui est

$$ll + A + \tfrac{1}{2}B(A' - a') - \tfrac{1}{2}C(B' - b') - \tfrac{1}{2}D(C' - c') = 0$$

nous obtiendrons

$$ll + A = -0{,}080286 - 269{,}4531\,.\,cc$$

& de-là

$$ll = +180{,}1551 + 10{,}6240\,.\,cc\,;$$

par conséquent

$$l = 13{,}42219 + 0{,}3956\,.\,cc$$

& en posant

$$cc = \frac{1}{400},\ \text{il sera}\ l = 13{,}42318.$$

Or, nous avons trouvé par les Tables Astronomiques $l = 13{,}42267$; d'où l'on voit le parfait accord entre la théorie & les observations, cette petite différence de 0,00051 provenant tant de l'action des autres planètes ſur la Lune, que de ce que nous n'avons pas encore pu mettre pour l'excentricité e ſa juſte valeur, qui probablement ſera plus petite que $\frac{1}{20}$.

ARTICLE III.

Détermination des inégalités de la Lune qui réſultent de l'inclinaiſon de ſon orbite.

XII.

CES inégalités ſont connues ſous le nom de *Réduction à l'Ecliptique* & elles réſultent des derniers termes de nos deux premières équations différentio-différentielles, qui ſont

$$1.\quad \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\,cos.\,2p + \tfrac{3}{2}\,x\,cos.\,2p - \tfrac{3}{2}\,y\,sin.\,2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\,\lambda yy + 4\lambda x^3 - 6\lambda xyy + \tfrac{3}{2}\,\lambda(1-4x)zz = 0.$$

$$2.\quad \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + \tfrac{3}{2}\,sin.\,2p - \tfrac{3}{2}\,y\,cos.\,2p - \tfrac{3}{2}\,x\,sin.\,2p + 3\lambda xy + \tfrac{3}{2}\,\lambda y^3 - 6\lambda xxy + \tfrac{3}{2}\,\lambda y.zz = 0.$$

XIII.

Préparation.

Soient u & v les valeurs déja trouvées pour x & y & écrivons $u + x^1$ & $v + y^1$ au lieu de x & y, pour avoir ces deux équations

$$1.\ \frac{-ddx^{\text{I}}}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^{\text{I}}}{dt}+3\lambda x^{\text{I}}+x^{\text{I}}\left(\tfrac{3}{2}\,cof.\,2p-6\lambda u\right.$$
$$\left.+12\lambda uu-6\lambda vv\right)+y^{\text{I}}\left(-\tfrac{3}{2}fin.2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda(1-4u)zz=0.$$

$$2.\ \frac{-ddy^{\text{I}}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{\text{I}}}{dt}+y^{\text{I}}\left(-\tfrac{3}{2}\,cof.\,2p+3\lambda u+\tfrac{9}{2}\lambda vv\right.$$
$$\left.-6\lambda uu\right)+x^{\text{I}}\left(-\tfrac{3}{2}fin.\,2p+3\lambda v-12\lambda uv\right)$$
$$+\tfrac{3}{2}\lambda vzz=0.$$

qui renfermeront donc les corrections comprises sous le nom de Réduction à l'écliptique.

XIV.

Détermination de ces corrections.

Soit $u=0{,}0000240-0{,}0071802\,.\,cof.\,2p$ & $v=+0{,}0102118\,.\,fin.\,2p$, en omettant toutes les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune ou de la quantité e; qu'on fasse maintenant les substitutions & nos deux équations deviendront: (Voyez Sect. 3. § 7.)

$$1.\ -\frac{ddx^{\text{I}}}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^{\text{I}}}{dt}+537{,}6558.x^{\text{I}}+9{,}220588.x^{\text{I}}.$$
$$cof.\,2p+3{,}990175\,.y^{\text{I}}.fin.\,2p+268{,}8154\,.\,zz$$
$$+7{,}721336\,.\,zz\,.\,cof.\,2p=0.$$

$$2.\ \frac{-ddy^{\text{I}}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{\text{I}}}{dt}+0{,}0272\,y^{\text{I}}-5{,}360294.y^{\text{I}}.cof\,2p$$
$$+3{,}990175.x^{\text{I}}.fin.2p+2{,}745353.zz.fin.2p=0.$$

Or comme $z=\omega\,fin.\,r+0{,}036484\,\omega\,fin.\,(2p-r)$
$+0{,}001877\,\omega\,fin.\,(2p+r)$

nous aurons

$$zz = 0,500667.\omega\omega - 0,034607.\omega\omega.\cos. 2p - 0,499933.\omega\omega.\cos. 2r + 0,036484.\omega\omega.\cos.(2p-2r) + 0,001877.\omega\omega.\cos.(2p+2r);$$

de-là nos deux équations.

$$1. - \frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt} + 537,6558.x^{\mathrm{I}} + 9,220588.x^{\mathrm{I}} \cos. 2p + 3,990175.y^{\mathrm{I}} \sin. 2p + 134,4534.\omega\omega - 5,4371.\omega\omega.\cos. 2p - 134,2561.\omega\omega.\cos. 2r + 7,8774.\omega\omega.\cos.(2p-2r) - 2,4346.\omega\omega.\cos.(2p+2r) = 0.$$

$$2. - \frac{-ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt} + 0,0272462.y^{\mathrm{I}} - 5,360294.y^{\mathrm{I}} \cos. 2p + 3,990175.x^{\mathrm{I}}.\sin. 2p + 1,3745.\omega\omega.\sin. 2p + 0,0526.\omega\omega.\sin. 2r - 0,6862.\omega\omega.\sin.(2p-2r) - 0,6862.\omega\omega.\sin.(2p+2r) = 0.$$

X V.

Supposons

$$x^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{II}}\omega\omega + b^{\mathrm{II}}\omega\omega\cos. 2p + f\omega\omega\cos. 2r + g\omega\omega\cos.(2p-2r) + h\omega\omega\cos.(2p+2r)$$

&

$$y^{\mathrm{I}} = \beta^{\mathrm{II}}\omega\omega\sin. 2p + \zeta\omega\omega\sin. 2r + \eta\omega\omega\sin.(2p-2r) + \theta\omega\omega\sin.(2p+2r),$$

d'où nous obtiendrons les déterminations suivantes :

$$537,6558.a^{\mathrm{II}} + 4,610294.b^{\mathrm{II}} + 1,995087.\beta^{\mathrm{II}} + 134,4534 = 0.$$

$$(4mm + 537,6558)b^{\mathrm{II}} + 4m(m+1)\beta^{\mathrm{II}} + 9,220588.a^{\mathrm{II}} - 5,43707 = 0.$$

$$4m(m+1)b^{II} + (4mm + 0,0272)\mathfrak{C}^{II} + 3,990175 . a^{II}$$
$$+ 1,37451 = 0.$$

$$(4ll + 537,6558)f + 4l(m+1)\zeta + 4,610294(g+h)$$
$$+ 1,995087\ (n+\theta) - 134,2561 = 0.$$

$$4l(m+1)f + (4ll + 0,0272)\zeta + 1,995087\ (g-h)$$
$$+ 2,680147\ (n-\theta) + 0,05265 = 0.$$

$$(4(m-l)^2 + 537,6568)g + 4(m-l)\ (m+1)n +$$
$$4,610294.f + 1,995087 . \zeta + 7,87739 = 0.$$

$$4(m-l)\ (m+1)g + ((m-l)^2 + 0,0272)n + 1,995087.f$$
$$+ 2,680147 . \zeta - 0,68624 = 0.$$

$$(4(m+l)^2 + 537,6558)h + 4(m+l)(m+1)\theta +$$
$$4,610294.f\ 1,995087 . \zeta - 2,43463 = 0.$$

$$4(m+l)\ (m+1)h + (4(m+l)^2 + 0,0272)\theta + 1,995087.f$$
$$- 2,680147. \zeta - 0,68624 = 0.$$

XVI.

De-là on aura : $a^{II} = -\ 0,25012$:

$$b^{II} = +\ 0,01310 ; f = +\ 0,24723 ;$$
$$g = -\ 0,01530 ; h = +\ 0,00042 ;$$
$$\mathfrak{C}^{II} = -\ 0,01804 ; \zeta = -\ 0,24635 ;$$
$$n = +\ 0,02334 ; \theta = -\ 0,00039 ;$$

par conſéquent

$$x^{I} = -\ 0,25012 . \omega\omega + 0,01310 . \omega\omega\ cof.\ 2p$$
$$+ 0,24723 . \omega\omega\ cof.2r - 0,01330 . \omega\omega . cof.(2p - 2r)$$
$$+ 0,00042 . \omega\omega\ cof.\ (2p + 2r)$$

&

$$y^{I} = -0,01804 . \omega\omega \sin. 2p - 0,24635 . \omega\omega \sin. 2r + 0,02334 . \omega\omega \sin. (2p - 2r) - 0,00039 . \omega\omega \sin. (2p + 2r).$$

Au reſte la réduction à l'écliptique ou cette petite correction qui réſulte de l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune, dépendroit auſſi de ſon excentricité; mais comme les inégalités qui en naîtroient pour les coordonnées X & Y ſeroient toutes multipliées par $c . \omega\omega$, j'ai cru pouvoir me diſpenſer d'en rechercher la valeur. Cependant ſi l'on vouloit les déterminer par la méthode dont je me ſuis ſervi juſqu'ici, on ne rencontreroit pas, à ce que je penſe, la moindre difficulté.

CINQUIEME

CINQUIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la quatrième Classe, qui dépendent de la parallaxe du Soleil.

ARTICLE PREMIER.

Introduction à la Recherche de ces inégalités.

I.

J'ai ſuppoſé juſqu'ici la diſtance du Soleil à la Terre infiniment plus grande que celle de la Lune, & j'avois pour cet effet négligé les termes qui ſont affectés par le rapport a. Maintenant je ferai entrer ces termes dans les équations générales (Sect. 1. § 23) pour rechercher les inégalités qui en réſulteront. Je remarque d'abord que comme les inégalités de cette claſſe ſont très-petites. Il ſuffira de prendre les termes où x, y & z n'ont tout au plus que deux dimenſions; je négligerai donç tous ceux où la troiſième dimenſion entre. Enſuite il eſt auſſi clair que le terme $\frac{1}{2}\lambda zz$ dans la première équation ne vient point en conſidération, & comme il n'eſt pas encore queſtion des inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre, j'ometrai dans les recherches préſentes tous les termes affectés par v. En mettant donc pour λ ſa valeur $\lambda = mm + 2m + \frac{3}{2}$, les inégalités que je me propose de déterminer ici devront être déduites de ces équations :

$$1.\ \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \tfrac{3}{2}\, cos.\, 2p + \tfrac{3}{2}\, x\, cos.\, 2p$$
$$- \tfrac{3}{2}\, y\, sin.\, 2p - 3\lambda xx + \tfrac{3}{2}\lambda yy - a\left(\tfrac{9}{8}\, cos.\, p + \tfrac{15}{8}\, cos.\, 3p\right)$$
$$- ax\left(\tfrac{9}{4}\, cos.\, p + \tfrac{15}{4}\, cos.\, 3p\right) + ay \times$$
$$\left(\tfrac{3}{4}\, sin.\, p + \tfrac{15}{4}\, sin.\, 3p\right) = 0.$$

$$2.\ \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \tfrac{3}{2}\, sin.\, 2p - \tfrac{3}{2}\, y\, cos.\, 2p$$
$$- \tfrac{3}{2}\, x\, sin.\, 2p + 3\lambda xy + a\left(\tfrac{3}{8}\, sin\, p + \tfrac{15}{8}\, sin.\, 3p\right)$$
$$- ay\left(\tfrac{3}{4}\, cos.\, p - \tfrac{15}{4}\, cos.\, 3p\right) + ax\left(\tfrac{3}{4}\, sin.\, p + \tfrac{15}{4}\, sin\, 3p\right)$$
$$= 0.$$

$$3.\ \frac{-ddz}{dt^2} - (1+\lambda)z + 3\lambda xz - 3\, az\, cos.\, p = 0.$$

II.

Séparons d'abord de ces équations tous les termes auxquels nous ayons déja satisfait. Soient u, v & w les valeurs de x, y & z qui font évanouir ces trois expressions :

$$1.\ - \frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + 3\lambda u + \tfrac{3}{2}\, cos.\, 2p + \tfrac{3}{2}\, u\, cos.\, 2p$$
$$- \tfrac{3}{2}\, v\, sin.\, 2p - 3\lambda uu + \tfrac{3}{2}\lambda vv.$$

$$2.\ \frac{-ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} - \tfrac{3}{2}\, sin.\, 2p - \tfrac{3}{2}\, v\, cos.\, 2p - \tfrac{3}{2}\, u$$
$$sin.\, 2p + 3\lambda uv.$$

$$3.\ \frac{-ddw}{dt^2} - (1+\lambda)w + 3\lambda uw$$

Posons $x = u + x^{I}$; $y = v + y^{I}$ & $z = w + z^{I}$, de sorte que x^{I}, y^{I}, z^{I} contiennent les inégalités qui résultent du rapport a, & nous obtiendrons les équations suivantes qu'il s'agit de résoudre ici.

III.

Equations qui renferment les inégalités parallactiques.

$$1.\quad -\frac{ddx^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + 3\lambda x^1 + (\tfrac{3}{2}\cos. 2p - 6\lambda u)x^1 - (\tfrac{3}{2}\sin. 2p - 3\lambda v)y^1 - a(\tfrac{9}{8}\cos. p + \tfrac{15}{8}\cos. 3p) - au(\tfrac{9}{4}\cos. p + \tfrac{15}{4}\cos. 3p) + av(\tfrac{3}{4}\sin. p + \tfrac{15}{4}\sin. 3p) = 0.$$

$$2.\quad -\frac{ddy^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^1}{dt} - (\tfrac{3}{2}\cos. 2p - 3\lambda u)y^1 - (\tfrac{3}{2}\sin. 2p - 3\lambda v)x^1 + a(\tfrac{3}{8}\sin. p + \tfrac{15}{8}\sin. 3p) - av(\tfrac{3}{4}\cos. p - \tfrac{15}{4}\cos. 3p) + au(\tfrac{3}{4}\sin. p + \tfrac{15}{4}\sin. 3p) = 0.$$

$$3.\quad -\frac{ddz^1}{dt^2} - (1+\lambda)z^1 + 3\lambda u z^1 + 3\lambda x^1 w - 3aw\cos. p = 0.$$

ARTICLE II.

Détermination des inégalités parallactiques, qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.

IV.

CONSIDÉRONS donc d'abord les deux premières équations, & commençons par le cas le plus simple, en posant $u = 0$ & $v = 0$, de sorte que nos deux équations soient :

$$1. -\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt} + 3\lambda x^{\mathrm{I}} + \tfrac{3}{2} x^{\mathrm{I}}. cof. 2p - \tfrac{3}{2} y^{\mathrm{I}}$$
$$fin. 2p - \tfrac{9}{8} a\ cof\ p - \tfrac{15}{8} a\ cof. 3p = 0.$$

$$2. -\frac{ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt} - \tfrac{3}{2} y^{\mathrm{I}}\ cof. 2p - \tfrac{3}{2} x^{\mathrm{I}} fin. 2p$$
$$+ \tfrac{3}{8} a\ fin. p + \tfrac{15}{8} a\ fin. 3p = 0.$$

D'où l'on voit qu'il faut mettre

$$x^{\mathrm{I}} = b^{\mathrm{I}} a\ cof. p + b^{\mathrm{II}} a\ cof. 3p$$

&

$$y^{\mathrm{I}} = \beta^{\mathrm{I}} a\ fin. p + \beta^{\mathrm{II}} a\ fin. 3p.$$

Subftituons ces valeurs dans nos deux équations, & nous obtiendrons ces quatre conditions à remplir.

$$(mm + 3\lambda)b^{\mathrm{I}} + 2m(m+1)\beta^{\mathrm{I}} + \tfrac{3}{4} b^{\mathrm{I}} - \tfrac{3}{4}\beta^{\mathrm{I}} + \tfrac{3}{4} b^{\mathrm{II}}$$
$$- \tfrac{3}{4}\beta^{\mathrm{II}} - \tfrac{9}{8} = 0.$$

$$mm\,\beta^{\mathrm{I}} + 2m(m+1)b^{\mathrm{I}} + \tfrac{3}{4}\beta^{\mathrm{I}} - \tfrac{3}{4} b^{\mathrm{I}} - \tfrac{3}{4}\beta^{\mathrm{II}} + \tfrac{3}{4} b^{\mathrm{II}}$$
$$+ \tfrac{3}{8} = 0.$$

$$(9mm + 3\lambda)b^{\mathrm{II}} + 6m(m+1)\beta^{\mathrm{II}} + \tfrac{3}{4}(b^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{I}})$$
$$- \tfrac{15}{8} = 0.$$

$$9mm\,\beta^{\mathrm{II}} + 6m(m+1)b^{\mathrm{II}} - \tfrac{3}{4}(b^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{I}}) + \tfrac{15}{8} = 0.$$

D'où l'on trouvera

$$b^{\mathrm{I}} = -0,11535;\ \beta^{\mathrm{I}} = -+0,24511;$$
$$b^{\mathrm{II}} = +0,00255\ \&\ \beta^{\mathrm{II}} = -0,00313;$$

par conféquent

$$x^{\mathrm{I}} = -0,11535 . a . cof. p + 0,00255 . a . cof. 3p$$

&

$$y^{\mathrm{I}} = +0,24511 . a . fin. p - 0,00313 . a . fin. 3p.$$

V.

Approximation ultérieure.

Donnons à u & v leurs valeurs principales qui sont

$$u = b \cos. 2p + c \cos. q + d \cos. (2p - q) + e \cos. (2p + q);$$

$$v = \beta \sin. 2p + \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \varepsilon \sin. (2p + q);$$

ou

$b = -0,0071800$; $\beta = +0,0102118$. (Sect. 2. § 5.)

&

$\gamma = -2,012729 . c$; $d = +0,187947 . c$;

$\delta = -0,411802 . c$; $e = -0,002705 . c$;

$\varepsilon = -0,003215 . c$ (Sect. 3. §. 12.).

Calculons d'abord

$$- au(\tfrac{9}{4} \cos. p. + \tfrac{15}{4} \cos. 3p) + av(\tfrac{3}{4} \sin. p + \tfrac{15}{4} \sin. 3p)$$

dont la valeur sera

$$+ 0,0445166 . a \cos. p + 0,0042481 . a \cos. 3p$$
$$- 2,246594\, ac . \cos. (p - q) - 1,492918 . ac . \cos. (p + q)$$
$$- 5,705881 . ac . \cos. (3p - q) + 1,903115 . ac . \cos. (3p + q).$$

De même nous trouverons

$$- av(\tfrac{3}{4} \cos. p - \tfrac{15}{4} \cos. 3p) + au(\tfrac{3}{4} \sin. p + \tfrac{15}{4} \sin. 3p =$$
$$- 0,0337465 . a \sin. p - 0,0065219 . a \sin. 3p$$
$$- 0,294871 . ac . \sin. (p - q) + 2,256521 . ac .$$
$$\sin. (p + q) + 5,873773 . ac . \sin. (3p - q)$$
$$- 1,898676 . ac . \sin. (3p + q).$$

Ensuite

$$3\lambda u = - 3,8605 . \cos. 2p + 537,6822 . c(\cos. q$$
$$+ 101,0558 . c(\cos. (2p - q) - 1,4544 . c(\cos. (2p + q)$$

&

$$3\lambda v = +5,4907.\sin.2p - 1082,2087.c(\sin.q - 221,4187.c(\sin.(2p-q) - 1,7286.c(\sin.(2p+q)$$

d'où nos équations deviendront

$$1. -\frac{ddx^{\text{I}}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{\text{I}}}{dt} + 537,6822.x^{\text{I}} + (9,2211.\cos.2p - 1075,3644.c.\cos.q - 202,1116.c.\cos.(2p-q) + 2,9988.c.\cos.(2p+q)x^{\text{I}} + (3,9907.\sin.2p - 1082,2087.c.\sin.q - 221,4187.c.\sin.(2p-q) - 1,7286.c.\sin.(2p+q)y^{\text{I}} - 1,0804834.a\cos.p - 1,8707519.a\cos.3p - 2,246594.ac.\cos.(p-q) - 1,492918.ac.\cos.(p+q) - 5,705881.ac.\cos.(3p-q) + 1,903115.ac.\cos.(3p+q) = 0,$$

$$2. -\frac{ddy^{\text{I}}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{\text{I}}}{dt} + (-5,3605.\cos.2p + 537,6822.c.\cos.q + 101,0558.c.\cos.(2p-q) - 1,4544.c.\cos.(2p+q)y^{\text{I}} + (+3,9907.\sin.2p - 1082,2087.c.\sin.q - 221,4187.c.\sin.(2p-q) - 1,7286\,c\sin.2p+q)x^{\text{I}} + 0,3412535.a\sin.p + 1,8684781.a\sin.3p - 0,294871.ac\sin.(p-q) + 2,256521.ac\sin.(p+q) + 5,873773.ac\sin.(3p-q) - 1,898676.ac.\sin.(3p+q).$$

VI.

Posons donc

$$x^{\text{I}} + b^{\text{I}}.a.\cos.p + b^{\text{II}}.a.\cos.3p + c^{\text{I}}.ac\cos.(p-q) + c^{\text{II}}.ac\cos.(p+q) + d^{\text{I}}.ac\cos.(3p-q) + d^{\text{II}}.ac\cos.(3p+q).$$

$$y^{\text{I}} = \beta^{\text{I}}.a\sin.p + \beta^{\text{II}}.a\sin.3p + \gamma^{\text{I}}.ac\sin.(p-q) + \gamma^{\text{II}}.ac.\sin.(p+q) + \delta^{\text{I}}.ac\sin.(3p-q) + \delta^{\text{II}}ac\sin.(3p+q),$$

& nous obtiendrons d'abord pour les coëfficiens b^{I}, b^{II}, β^{I} & β^{II} ces quatre équations

1. $(mm + 542,2927)b^{\mathrm{I}} + (2m(m+1) + 1,9953)\beta^{\mathrm{I}}$
$+ 4,6105 \,.\, b^{\mathrm{II}} + 1,9953 \,.\, \beta^{\mathrm{II}} - 1,0804834 = 0.$

2. $(2m(m+1) + 1,9953)b^{\mathrm{I}} + (mm + 2,6802)\beta^{\mathrm{I}}$
$- 1,9953 \,.\, b^{\mathrm{II}} - 2,6802 \,.\, \beta^{\mathrm{II}} + 0,3412535 = 0.$

3. $(9mm + 537,6822)b^{\mathrm{II}} + 6m(m+1)\beta^{\mathrm{II}} + 4,6105 \,.\, b^{\mathrm{I}}$
$- 1,9953 \,.\, \beta^{\mathrm{I}} - 1,8707519 = 0.$

4. $6m(m+1)b^{\mathrm{II}} + 9mm\beta^{\mathrm{II}} + 1,9953 \,.\, b^{\mathrm{I}} - 2,6802 \,.\, \beta^{\mathrm{I}}$
$+ 1,8684781 = 0.$

D'où l'on trouvera

$b^{\mathrm{I}} = - 0,11411\,;\; b^{\mathrm{II}} = + 0,00300\,;$
$\beta^{\mathrm{I}} = + 0,24168\,;\; \beta^{\mathrm{II}} = - 0,00287.$

Par conséquent

$$x^{\mathrm{I}} = - 0,11411 \,.\, a \,.\, cos.\, p + 0,00300 \,.\, a \,.\, cos.\, 3p$$
&
$$y^{\mathrm{I}} = + 0,24168 \,.\, a \,.\, sin.\, p - 0,00287 \,.\, a \,.\, sin.\, 3\,p.$$

VII.

Passons aux inégalités qui dépendent du produit ac; celles-ci seront renfermées dans les huit équations suivantes :

1. $((m-n)^2 + 537,6822)c^{\mathrm{I}} + 2(m+1)(m-n)\gamma^{\mathrm{I}}$
$+ 4,6105(c^{\mathrm{II}} + d^{\mathrm{I}}) + 1,9953(\gamma^{\mathrm{II}} + \delta^{\mathrm{I}})$
$- 638,7380 \,.\, b^{\mathrm{I}} - 651,8136 \,.\, \beta^{\mathrm{I}} + 1,4544 \,.\, b^{\mathrm{II}}$
$- 0,8643 \,.\, \beta^{\mathrm{II}} - 2,246594.$

II. $2(m+1)(m-n)c^{I}+(m-n)^{2}\gamma^{I}+2,6802$
$(\gamma^{II}-\delta^{I})+1,9953(c^{II}-d^{I})+218,3132.\beta^{I}$
$+430,3950.b^{I}-0,7272.\beta^{II}+0,8643.b^{II}$
$-0,294871=0.$

III. $((m+n)^{2}+537,6822)c^{II}+2(m+1)(m+n)\gamma^{II}$
$+4,6105(c^{I}+d^{II})+1,9953(\gamma^{I}+\delta^{II})$
$-536,2278.b^{I}+540,2400.\beta^{I}-101,0558.b^{II}$
$-110,7093.\beta^{II}-1.492918=0.$

IV. $2(m+1)(m+n)c^{II}+(m+n)^{2}\gamma^{II}+2,6802$
$(\gamma^{I}-\delta^{II})+1,9953(c^{I}-d^{II}+269,5683.\beta^{I}$
$-541,9686.b^{I}+50,5279.\beta^{II}+110,7093.b^{II}$
$+2,256521=0.$

V. $((3m-n)^{2}+537,6822)d^{I}+2(m+1)(3m-n)\delta^{I}$
$+4,6105.c^{I}-1,9953.\gamma^{I}-101,0558.b^{I}$
$+110,7093.\beta^{I}-537,6822.b^{II}-541,1043.\beta^{II}$
$-5,705881=0.$

VI. $2(m+1)(3m-n)d^{I}+(3m-n)^{2}\delta^{I}-2,6802.\gamma^{I}$
$+1,9953.c^{I}+50,5279.\beta^{I}-110,7093.b^{I}$
$+268,8411.\beta^{II}+541,1043.b^{II}$
$+5,873773=0.$

VII. $((3m+n)^{2}+537,6822)d^{II}+2(m+1)$
$(3m+n)\delta^{II}+4,6105.c^{II}-1,9953.\gamma^{II}$
$+1,4544.b^{I}+0,8643.\beta^{I}-537,6822.b^{II}$
$+541,1043.\beta^{II}+1,903115=0.$

VIII.

VIII. $2(m+1)(3m+n)d^{II}+(3m+n)^2\delta^{II}$
$-2,6802.\gamma^{II}+1,9953.c^{II}-0,7272.\beta^{I}$
$-0,8643.b^{I}+268,8411.\beta^{II}-541,1043.b^{II}$;
$-1,898676.$

D'où l'on trouvera ces déterminations :

$$c^{I}=+0,0467;\ c^{II}=-0,1213;$$
$$d^{I}=+0,0168;\ d^{II}=-0,0001;$$
$$\gamma^{I}=-2,6343;\ \gamma^{II}=-0,0554;$$
$$\delta^{I}=-0,0917;\ \delta^{II}=+0,0014.$$

VIII.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes.

$$x^{I}=-0,11411.a.\cos.p+0,00300.a.\cos.3p+0,0467.ac.\cos.(p-q)-0,1213.ac.\cos.(p+q)+0,0168.ac.\cos.(3p-q)-0,0001.ac.\cos.(3p+q).$$

$$y^{I}=+0,24168.a.\sin.p-0,00287.a.\sin.3p-2,6343.ac.\sin.(p-q)-0,0554.ac.\sin.(p+q)-0,0917.ac.\sin.(3p-q)+0,0014.ac.\sin.(3p+q).$$

ARTICLE III.

Détermination des inégalités parallactiques qui affectent la latitude de la Lune.

IX.

Ces inégalités sont très-petites, étant multipliées par le produit $a\,\omega$ dont la valeur est à peu près 0,00025. Pour les déterminer, reprenons notre troisième équation, qui est (§. 3.)

$$-\frac{ddz^{\text{I}}}{dt^2}+(1+\lambda)z^{\text{I}}+3\lambda u z^{\text{I}}+3\lambda x^{\text{I}} w-3a\,w\,cos.p=0.$$

Posons $u=b.cos.2p$; $w=\omega\,sin.r$ & $x^{\text{I}}=l^{\text{I}}.a\,cos.p$; & notre équation deviendra

$$-\frac{ddz^{\text{I}}}{dt^2}-(1+\lambda)z^{\text{I}}+3\lambda b z^{\text{I}}\,cos.\,2p-\tfrac{3}{2}(\lambda b^{\text{I}}-1)a\omega$$
$$sin.(p-r)+\tfrac{3}{2}(\lambda b^{\text{I}}-1)a\omega\,sin.(p+r)=0.$$

Soit donc $z^{\text{I}}=A'\,a\,\omega\,sin\,(p-r)+a'\,a\,\omega\,sin.(p+r)$, & nous obtiendrons

$$\left((m-l)^2-\lambda-1\right)A'-\tfrac{3}{2}\lambda b.a'-\tfrac{3}{2}(\lambda b^{\text{I}}-1)=0.$$
$$\left((m+l)^2-\lambda-1\right)a'-\tfrac{3}{2}\lambda b.A'+\tfrac{3}{2}(\lambda b^{\text{I}}-1)=0.$$

X.

Mettons pour m, l, λ, b & b^{I} leurs valeurs numériques, savoir:

$m=12,3688974$; $l=13,4226756$;

$\lambda = 179,2274$; $b = -0,00718$
&
$b^{I} = -0,11411$, & nous trouverons

$$-179,1169 \cdot A' + 1,9303 \cdot a' + 32,17736 = 0.$$
$$+484,9778 \cdot a' + 1,9303 \cdot A' - 32,17736 = 0.$$

D'où les coëfficiens A' & a' feront déterminés de cette façon

$A = +0,1803$; $a' = +0,0656$;

par conféquent

$$z^{I} = +0,1803 \cdot a\,\omega\,\mathit{fin.}\,(p-r) + 0,0656 \cdot a\,\omega\,\mathit{fin.}\,(p+r).$$

SIXIÈME SECTION.

Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la cinquième Classe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

ARTICLE PREMIER.

Introduction à la Recherche de ces inégalités.

I.

Les inégalités de cette classe sont renfermées dans les termes affectés par v, & ce v marque l'excentricité de la Terre. Soit pour abréger $mm + \frac{11}{2} = \mu$; de sorte que $\mu = 54,9755896$. Reprenons les trois équations différentio-différentielles, comme je les avois données au § 23 de la première section, & posons-y $mm + 2m + \frac{3}{2} = \lambda$; effaçons d'abord les termes multipliés par a auxquels nous venons de satisfaire dans la section précédente & négligeons tous ceux où x, y & z ont ensemble plus de deux dimensions. Ecrivons enfin $u + x^1$ au lieu de x, $v + y^1$ au lieu d'y & $w + z^1$ au lieu de z, où u, v & w signifient les valeurs de x, y & z trouvées dans les sections précédentes, de sorte que nous ayons déja fait évanouir ces trois expressions

$$-\frac{ddu}{dt^2}+\frac{2(m+1)du}{dt}+3\lambda u+\tfrac{3}{2}\cos.2p+\tfrac{3}{2}u\cos.2p$$
$$-\tfrac{3}{2}v\sin.2p-3\lambda uu+\tfrac{3}{2}\lambda vv;$$

$$-\frac{ddv}{dt^2}-\frac{2(m+1)du}{dt}-\tfrac{3}{2}\sin.2p-\tfrac{3}{2}v\cos.2p-\tfrac{3}{2}u$$
$$\sin.2p+3\lambda uv,$$

&

$$-\frac{ddw}{dt^2}-(1+\lambda)w+3\lambda uw.$$

Et nous obtiendrons les équations ſuivantes, auxquelles il nous reſte à ſatisfaire.

II.

Equations qui renferment les inégalités de cette dernière Claſſe.

1. $-\frac{ddx^{\mathrm{I}}}{dt^2}+\frac{2(m+1)dy^{\mathrm{I}}}{dt}+(3\lambda x^{\mathrm{I}}+(\tfrac{3}{2}\cos.2p-6\lambda u)x^{\mathrm{I}}$
$-(\tfrac{3}{2}\sin.2p-3\lambda v)y^{\mathrm{I}}-v((\mu\cos.t+\tfrac{9}{4}\cos.(2p-t))$
$(2p-t)+\tfrac{9}{4}\cos.-4v\cos.t.\frac{dv}{dt}-vu((\mu\cos.t+\tfrac{9}{4}$
$\cos.(2p-t)+\tfrac{9}{4}\cos.(2p+t))+vv(2\sin.t+\tfrac{9}{4}$
$\sin.(2p-t)+\tfrac{9}{4}\sin.(2p+t)).$

2. $-\frac{ddy^{\mathrm{I}}}{dt^2}-\frac{2(m+1)dx^{\mathrm{I}}}{dt}-(\tfrac{3}{2}\cos.2p-3\lambda u)y^{\mathrm{I}}$
$-(\tfrac{3}{2}\sin.2p-3\lambda v)x^{\mathrm{I}}-v(2\sin.t-\tfrac{9}{4}\sin.(2p-t)$
$-\tfrac{9}{4}\sin.(2p+t))+4v\cos.t.\frac{du}{dt}-vv((\mu\cos.t$
$-\tfrac{9}{4}\cos.(2p-t)-\tfrac{9}{4}\cos.(2p+t))-vu(2\sin.t$
$-\tfrac{9}{4}\sin.(2p-t)-\tfrac{9}{4}\sin.(2p+t)).$

$$3. \; -\frac{dd z^{\mathrm{I}}}{dt^2} - (1+\lambda) z^{\mathrm{I}} + 3\lambda u z^{\mathrm{I}} + 3\lambda x^{\mathrm{I}} w + 3 v m$$
$$cof.\, t = 0,$$

où il eſt à remarquer que

$$m = 12,3688974;\; 2(m+1) = 26,7377948.$$
$$\lambda = 179,2274177 \;\&\; \mu = 54,9755896:$$

Or il eſt à peu près $v = 0,0676$.

ARTICLE II.

Détermination des inégalités de cette Claſſe qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.

III.

Je ne conſidérerai donc d'abord que les deux premières équations, mais je ne m'arrêterai pas à la première approximation en poſant $u = 0$ & $v = 0$: je commencerai tout d'un coup par mettre pour u & v leurs valeurs principales qui ſont

$$u = b\, cof.2p + c\, cof.q + d\, cof.(2p-q) + e\, cof.(2p+q)$$
$$v = \beta\, fin.2p + \gamma\, fin.q + \delta\, fin.(2p-q) + \varepsilon\, fin\,(2p+q),$$

de ſorte que

$$b = -0,00718;\; \beta = +0,0102118;\; \gamma = -2,012729.c;$$
$$d = +0,187947\,c;\; \delta = -0,411802.c;$$
$$e = -0,002705.c;\; \varepsilon = -0,003215.c,$$

& où c marque l'excentricité de l'orbite lunaire.

IV.

De-là je tire d'abord pour les quatre derniers termes de la première équation.

Le coefficient de $cof. t\, v\left(-\mu - \frac{9}{4}(b - \beta)\right) = - 54,93646 . v.$

Le coefficient de $cof. (2p - t)\, v\left(-\frac{9}{4} - (4m - 1)\beta - \frac{1}{2}\mu b\right) = - 2,54826 . v.$

Le coefficient de $cof. (2p + t)\, v\left(-\frac{9}{4} - (4m + 1)\beta - \frac{1}{2}\mu b\right) = - 2,56809 . v.$

Le coefficient de $cof. (q - t)\, v\left(-(2n - 1)\gamma - \frac{1}{2}\mu c - \frac{9}{8}(d + e - \delta - \varepsilon)\right) = + 23,18529 . vc.$

Le coefficient de $cof. (q + t)\, v\left(-(2n + 1)\gamma - \frac{1}{2}\mu c - \frac{9}{8}(d + e - \delta - \varepsilon)\right) = + 27,21076 . vc.$

Le coefficient de $cof. (2p - q - t)\, v\left(-\left(2(m - n) - 1\right)\delta - \frac{1}{2}\mu d + \frac{9}{8}(\gamma - c)\right) = + 0,48915 . vc.$

Le coefficient de $cof. (2p - q + t)\, v\left(-\left(2(2m - n) + 1\right)\delta - \frac{1}{2}\mu d + \frac{9}{8}(\gamma - c)\right) = + 1,31275 . vc.$

Le coefficient de $cof. (2p + q - t)\, v\left(-\left(2(2m + n) - 1\right)\varepsilon - \frac{1}{2}\mu e - \frac{9}{8}(c + \gamma)\right) = + 1,45475 . vc.$

Le coefficient de $cof. (2p + q + t)\, v\left(-\left(2(2m + n) + 1\right)\varepsilon - \frac{1}{2}\mu e - \frac{9}{8}(c + \gamma)\right) = + 1,46119 . vc.$

V.

Enſuite les quatre derniers termes de la ſeconde équation donneront

Le coefficient de $\sin. t\ v(-2) = -2v$.

Le coefficient de $\sin. (2p-t)\ v\left(+\frac{9}{4}-(4m-1(b-\frac{1}{2}\mu\beta)\right)$ $= + 2,31735.v.$

Le coefficient de $\sin.(2p+t)\ v\left(+\frac{9}{4}-(4m+1)b-\frac{1}{2}\mu\beta\right)$ $= + 2,33171.v.$

Le coefficient de $\sin. (q-t)\ v\left(-(2n-1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma - \frac{9}{8}(\delta-\varepsilon-d+e)\right) = +30,48777.vc.$

Le coefficient de $\sin. (q+t)\ v\left(-(2n+1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma - \frac{9}{8}(\delta-\varepsilon-d+e)\right) = +28,48777.vc.$

Le coefficient de $\sin.(2p-q-t)\ v\left(-(2(2m-n)-1)d - \frac{1}{2}\mu\delta-\frac{9}{8}(\gamma-c)\right) = +10,58083.vc.$

Le coefficient de $\sin.(2p-q+t)\ v\left(-(2(2m-n)+1)d - \frac{1}{2}\mu\delta-\frac{9}{8}(\gamma-c)\right) = +10,20493.vc.$

Le coefficient de $\sin.(2p+q-t)\ v\left(-(2(2m+n)-1)e - \frac{1}{2}\mu\varepsilon+\frac{9}{8}(\gamma+c)\right) = -0,84811.vc.$

Le coefficient de $\sin.(2p+q+t)\ v\left(-(2(2m+n)+1)e - \frac{1}{2}\mu\varepsilon+\frac{9}{8}(\gamma+c)\right) = -0,84270.vc.$

VI.

On voit donc par-là qu'il faut donner à x^{I} & y^{I} les valeurs ſuivantes

$$x^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{I}}v\cos. t + b^{\mathrm{I}}v\cos.(2p-t) + c^{\mathrm{I}}vc\cos.(q-t) + d^{\mathrm{I}}vc\cos.(2p-q-t) + e^{\mathrm{I}}vc\cos.(2p+q-t) + b^{\mathrm{II}}v\cos.(2p+t) + c^{\mathrm{II}}vc\cos.(q+t) + d^{\mathrm{II}}vc\cos.(2p-q+t) + e^{\mathrm{II}}vc\cos.(2p+q+t).$$

$y^{\mathrm{I}} =$

$y^{\mathrm{I}} = \alpha^{\mathrm{I}}\, v\, \sin. t + \beta^{\mathrm{I}}\, v\, \sin. (2p - t) + \gamma^{\mathrm{I}}. vc\, \sin. (q - t)$
$+ \delta^{\mathrm{I}}\, vc\, \sin. (2p - q - t) + \varepsilon^{\mathrm{I}}\, vc\, \sin. (2p + q - t)$
$+ \beta^{\mathrm{II}}\, v\, \sin. (2p + t) + \gamma^{\mathrm{II}}\, vc\, \sin. (q + t)\, \delta^{\mathrm{II}}\, vc$
$\sin. (2p - q + t) + \varepsilon^{\mathrm{II}}\, vc\, \sin. (2p + q + t)$.

VII.

En substituant ces valeurs dans les équations différentio-différentielles pour x^{I} & y^{I}, on obtiendra pour les cinq premier termes de la première équation.

Coëfficient de $\cos. t\ (1 + 3\lambda) a^{\mathrm{I}} v + 2(m + 1) \alpha^{\mathrm{I}} v$
$- \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})\,(b^{\mathrm{I}} + b^{\mathrm{II}}) v + \frac{1}{2}(3\lambda \beta - \frac{3}{2})\,(\beta^{\mathrm{I}} + \beta^{\mathrm{II}}) v.$

Coefficient de $\cos. (2p - t)\ ((2m - 1)^2 + 3\lambda) b^{\mathrm{I}} v$
$+ 2(m + 1)(2m - 1) \beta^{\mathrm{I}} v - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2}) a^{\mathrm{I}} v$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda \beta - \frac{3}{2}) \alpha^{\mathrm{I}} v.$

Coefficient de $\cos. (2p + t)\ ((2m + 1)^2 + 3\lambda) b^{\mathrm{II}} v$
$+ 2(m + 1)(2m + 1) \beta^{\mathrm{II}} v - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2}) a^{\mathrm{I}} v$
$- \frac{1}{2}(3\lambda \beta - \frac{3}{2}) \alpha^{\mathrm{I}} v.$

Coefficient de $\cos. (q - t)\ ((n - 1)^2 + 3\lambda) c^{\mathrm{I}} vc$
$+ 2(m + 1)(n - 1) \gamma^{\mathrm{I}} vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})\,(d^{\mathrm{II}} + e^{\mathrm{I}}) vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda \beta - \frac{3}{2})\,(\delta^{\mathrm{II}} + \varepsilon^{\mathrm{I}}) vc - 3\lambda c. a^{\mathrm{I}} v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\gamma. \alpha^{\mathrm{I}} v - 3\lambda d. b^{\mathrm{I}} v + \frac{3}{2}\lambda\delta. \beta^{\mathrm{I}} v - 3\lambda e. b^{\mathrm{II}} v$
$+ \frac{3}{2}\lambda\varepsilon. \beta^{\mathrm{II}} v.$

Coefficient de $\cos. (q + t)\ ((n + 1)^2 + 3\lambda) c^{\mathrm{II}} vc$
$+ 2(m + 1)(n + 1) \gamma^{\mathrm{II}} vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})\,(d^{\mathrm{I}} + e^{\mathrm{II}}) vc$
$+ \frac{1}{2}(3\lambda \beta - \frac{3}{2})\,(\delta^{\mathrm{I}} + \varepsilon^{\mathrm{II}}) vc - 3\lambda c. a^{\mathrm{I}} v - \frac{3}{2}\lambda\gamma. \alpha^{\mathrm{I}} v$
$- 3\lambda d. b^{\mathrm{II}} v + \frac{3}{2}\lambda\delta. \beta^{\mathrm{II}} v - 3\lambda e. b^{\mathrm{I}} v + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon. \beta v.$

Le coefficient de $cof.(2p-q-t)$ $((2m-n-1)^2 + 3\lambda)a^{I}.vc + 2(m+1)(2m-n-1)\delta^{I}.vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})c^{II}.vc + \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})\gamma^{II}.vc - 3\lambda d.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v - 3\lambda c.b^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\gamma.\beta^{I}v$

Coefficient de $cof.(2p-q+t)$ $((2m-n+1)^2 + 3\lambda)d^{II}.vc + 2(m+1)(2m-n+1)\delta^{II}vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})c^{I}.vc + \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})\gamma^{I}.vc - 3\lambda d.a^{I}v - \frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v - 3\lambda c.b^{II}v + \frac{3}{2}\lambda\gamma.\beta^{II}v.$

Coefficient de $cof.(2p+q-t)$ $((2m+n-1)^2 + 3\lambda)e^{I}.vc + 2(m+1)(2m+n-1)\varepsilon^{I}.vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})c^{I}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})\gamma^{I}.vc - 3\lambda e.a^{I}v + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon\alpha^{I}v - 3\lambda c.b^{I}v - \frac{3}{2}\lambda\gamma.\beta^{I}v$

Coefficient de $cof.(2p+q+t)$ $((2m+n+1)^2 + 3\lambda)e^{II}.vc + 2(m+1)(2m+n+1)\varepsilon^{II}.vc - \frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{3}{2})c^{II}.vc - \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})\gamma^{II}.vc - 3\lambda e.a^{I}v - \frac{3}{2}\lambda\varepsilon.\alpha^{I}v - 3\lambda c.b^{II}v - \frac{3}{2}\lambda\gamma.\beta^{II}v.$

VIII.

Enfuite pour les quatre premiers termes de la feconde équation on trouvera

Coefficient de $fin.t\,\alpha^{I}.v + 2(m+1)a^{I}.v - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})(\beta^{I} - \beta^{II}) + \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})(b^{I} - b^{II}).$

Coefficient de $fin.(2p-t)$ $(2m-1)^2.\beta^{I}.v + 2(m+1)(2m-1)b^{I}.v - \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\alpha^{I}.v + \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{1}{2})a^{I}.v.$

Coefficient de $fin.(2p+t)$ $(2m+1)^2\beta^{II}.v + 2(m+1)(2m+1)b^{II}.v + \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{3}{2})\alpha^{I}.v + \frac{1}{2}(3\lambda\beta - \frac{3}{2})a^{I}.v$

Coefficient de $\sin.(q-t)$ $(n-1)^2\gamma^{I}.vc+2(m+1)(n-1)c^{I}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})(\delta^{II}-\varepsilon^{I}).vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})(d^{II}-e^{I}).vc-\frac{3}{2}\lambda c.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\gamma.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda d.\beta^{I}v-\frac{3}{2}\lambda\delta.b^{I}v-\frac{3}{2}\lambda e.\beta^{II}v+\frac{3}{2}\lambda\varepsilon.b^{II}v$,

Coefficient de $\sin.(q+t)$ $(n+1)^2\gamma^{II}.vc+2(m+1)(n+1)c^{II}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})(\delta^{I}-\varepsilon^{II}).vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})(d^{I}-e^{II}).vc+\frac{3}{2}\lambda c.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\gamma.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda d.\beta^{II}v-\frac{3}{2}\lambda\delta.b^{II}v-\frac{3}{2}\lambda e\beta^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\varepsilon.b^{I}v$.

Coefficient de $\sin.(2p-q-t)$ $(2m-n-1)^2\delta^{I}.vc+2(m+1)(2m-n-1)d^{I}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\gamma^{II}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})c^{II}.vc-\frac{3}{2}\lambda d.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda c.\beta^{I}v-\frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{I}v$.

Coefficient de $\sin.(2p-q+t)$ $(2m-n+1)^2\delta^{II}.vc+2(m+1)(2m-n+1)d^{II}.vc-\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\gamma^{I}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})c^{I}.vc+\frac{3}{2}\lambda d.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\delta.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda c.\beta^{II}v-\frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{II}v$.

Coefficient de $\sin.(2p+q-t)$ $(2m+n-1)^2\varepsilon^{I}.vc+2(m+1)(2m+n-1)e^{I}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\gamma^{I}vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})c^{I}.vc-\frac{3}{2}\lambda e.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\varepsilon.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda c.\beta^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{I}v$.

Coefficient de $\sin.(2p+q+t)$ $(2m+n+1)^2\varepsilon^{II}.vc+2(m+1)(2m+n+1)e^{II}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda b-\frac{3}{2})\gamma^{II}.vc+\frac{1}{2}(3\lambda\beta-\frac{3}{2})c^{II}.vc+\frac{3}{2}\lambda e.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda\varepsilon.a^{I}v+\frac{3}{2}\lambda c.\beta^{II}v+\frac{3}{2}\lambda\gamma.b^{II}v$.

Où il convient de remarquer que

$$\tfrac{1}{2}(6\lambda b - \tfrac{3}{2}) = -4,6105;\ \tfrac{1}{2}(3\lambda b - \tfrac{3}{2}) = -2,6802;$$
$$\tfrac{1}{2}(3\lambda \beta - \tfrac{3}{2}) = +1,9953.$$

$$3\lambda b = -3,8605;\ 3\lambda c = +537,6882.c;$$

$$3\lambda d = +101,0558.c;\ 3\lambda e = -,4544.c;$$

$$3\lambda\beta = +5,4907;\ 3\lambda\gamma = -1082,2087.c;$$

$$3\lambda\delta = -221,4187.c;\ 3\lambda\varepsilon = -1,7286.c.$$

IX.

Détermination des inégalités qui ne dépendent que de la simple excentricité de la Terre. v.

Ces inégalités dépendront des angles t, $2p-t$, & $2p+t$, & seront déterminées par les six équations suivantes :

I. $538,6822.a^{I} + 26,7378.\alpha^{I} - 54,93646$
$+ 4,6105(b^{I}+b^{II}) + 1,9953(\beta^{I}+\beta^{II}) = 0.$

II. $26,7378.a^{I} + 1,0000.\alpha^{I} - 2,00000$
$+ 1,9953(b^{I} - b^{II}) + 2,6805(\beta^{I} - \beta^{II}) = 0.$

III. $1101,1651.b^{I} + 634,6963.\beta^{I} - 2,54826$
$+ 4,6105.a^{I} + 1,9953.\alpha^{I} = 0.$

IV. $634,6963.b^{I} + 563,4829.\beta^{I} + 2,31735$
$+ 1,9953.a^{I} + 2,6805.\alpha^{I} = 0.$

V. $1200,1163.b^{II} + 688,1718.\beta^{II} - 2,56809$
$+ 4,6105.a^{I} - 1,9953.\alpha^{I} = 0.$

VI. $688,1718.b^{II} + 662,4341.\beta^{II} + 2,33171$
$+ 1,9953.a^{I} - 2,6805.\alpha^{I} = 0.$

D'où l'on trouvera :

$$a^{\mathrm{I}} = +0,00148\,;\; b^{\mathrm{I}} = +0,01868\,;$$
$$b^{\mathrm{II}} = +0,00699.$$

$$\alpha^{\mathrm{I}} = +2,02314\,;\; \beta^{\mathrm{I}} = -0,03476\,;$$
$$\beta^{\mathrm{II}} = -0,00264.$$

Qu'on ne ſoit point ſurpris de ce que le coefficient α^{I}, qui eſt celui de *ſin. t*, ſoit ici trouvé ſi grand ; par ce que j'ai remarqué au § 26 de la première ſection, il eſt évident que l'inégalité qui dépend de l'angle t, ou bien de l'anomalie du Soleil, doit néceſſairement contenir auſſi l'équation du centre du Soleil, qui eſt, comme on le peut voir par les Tables du Soleil, de 1° 55′ 15″ lorſqu'elle eſt la plus grande.

X.

Détermination des inégalités qui dépendent du produit des deux excentricités de l'orbite de la Terre & de la Lune v c.

Ces inégalités dépendront des angles

$q-t$, $q+t$, $2p-q-t$, $2p-q+t$, $2p+q-t$ & $2p+q+t$, & ſeront déterminées par les douze équations ſuivantes, où j'ai déja pour a^{I}, α^{I}, b^{I}, β^{I}, b^{II}, & β^{II} ſubſtitué leurs valeurs :

$$\text{I.}\;\; 687,8896\,.\,c^{\mathrm{I}} + 327,6961\,.\,\gamma^{\mathrm{I}} + 4,6105\,(d^{\mathrm{II}} + e^{\mathrm{I}})$$
$$+1,9953\,(\delta^{\mathrm{II}} + \varepsilon^{\mathrm{I}}) - 1070,3727 = 0.$$

$$\text{II.}\;\; 327,6961\,.\,c^{\mathrm{I}} + 150,2074\,.\,\gamma^{\mathrm{I}} + 1,9953\,(d^{\mathrm{II}} - e^{\mathrm{II}})$$
$$+2,6802\,(\delta^{\mathrm{II}} - \varepsilon^{\mathrm{I}}) - 513,9141 = 0.$$

III. $740,9133 \cdot c^{II} + 381,1716 \cdot \gamma^{II} + 4,6105 (d^{I} + e^{II})$
$+ 1,9953 (\delta^{I} + \varepsilon^{II}) + 1120,7892 = 0.$

IV. $381,1716 \cdot c^{II} + 203,2310 \cdot \gamma^{II} + 1,9953 (d^{I} - e^{II})$
$+ 2,6802 (\delta^{I} - \varepsilon^{II}) + 572,4573 = 0.$

V. $647,5521 \cdot d^{I} + 280,2624 \cdot \delta^{I} + 4,6105 \cdot c^{II}$
$+ 1,9953 \cdot \gamma^{II} - 214,8829 = 0.$

VI. $280,2624 \cdot d^{I} + 109,8698 \cdot \delta^{I} + 1,9953 \cdot c^{II}$
$+ 2,6802 \cdot \gamma^{II} - 91,0404 = 0.$

VII. $693,4796 \cdot d^{II} + 333,7380 \cdot \delta^{II} + 4,6105 \cdot c^{I}$
$+ 1,9953 \cdot \gamma^{I} + 222,8099 = 0.$

VIII. $333,7380 \cdot d^{II} + 155,7974 \cdot \delta^{II} + 1,9953 \cdot c^{I}$
$+ 2,6802 \cdot \gamma^{I} + 115,3429 = 0.$

IX. $1906,2157 \cdot e^{I} + 989,1299 \cdot \varepsilon^{I} + 4,6105 \cdot c^{I}$
$- 1,9953 \cdot \gamma^{I} - 29,1470 = 0.$

X. $989,1299 \cdot e^{I} + 1368,5335 \cdot \varepsilon^{I} + 1,9953 \cdot c^{I}$
$- 2,6802 \cdot \gamma^{I} - 36,8205 = 0.$

XI. $2058,1906 \cdot e^{II} + 1042,6055 \cdot \varepsilon^{II} + 4,6105 \cdot c^{II}$
$- 1,9953 \cdot \gamma^{II} - 1,9787 = 0.$

XII. $1042,6055 \cdot e^{II} + 1520,5084 \cdot \varepsilon^{II} + 1,9953 \cdot c^{II}$
$- 2,6802 \cdot \gamma - 12,7796 = 0.$

D'où l'on détermine

$c^{I} = + 1,6566$; $c^{II} = - 1,7983$; $d^{I} = + 0,2302$;
$d^{II} = - 1,0772$; $e^{I} = - 0,0067$; $e^{II} = + 0,0045$,
$\gamma^{I} = - 0,2056$; $\gamma^{II} = + 0,5509$; $\delta^{I} = + 0,2604$;
$\delta^{II} = + 1,5491$; $\varepsilon^{I} = + 0,0345$; $\varepsilon^{II} = + 0,0019$,

XI.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes:

$$x^{\mathrm{I}} = +0{,}00148 \,.\, v \,.\, cos.\, t + 0{,}01868 \,.\, v \,.\, cos.\, (2p - t) + 0{,}00699 \,.\, v \,.\, cos.\, (2p + t) + 1{,}6566 \,.\, vc \,.\, cos.\, (q - t) - 1{,}7983 \,.\, vc \,.\, cos.\, (q + t) + 0{,}2302 \,.\, vc \,.\, cos.\, (2p - q - t) - 1{,}0772 \,.\, vc \,.\, cos.\, (2p - q + t) - 0{,}0067 \,.\, vc \,.\, cos.\, (2p + q - t) + 0{,}0045 \,.\, vc \,.\, cos.\, (2p + q + t).$$

$$y^{\mathrm{I}} = +2{,}02314 \,.\, v \,.\, sin.\, t - 0{,}03476 \,.\, sin.\, (2p - t) - 0{,}00264 \,.\, v \,.\, sin.\, (2p + t) - 0{,}2056 \,.\, vc \,.\, sin.\, (q - t) + 0{,}5509 \,.\, vc \,.\, sin.\, (q + t) + 0{,}2604 \,.\, vc \,.\, sin.\, (2p - q - t) + 1{,}5491 \,.\, vc \,.\, sin.\, (2p - q + t) + 0{,}0345 \,.\, vc \,.\, sin.\, (2p + q - t) + 0{,}0019 \,.\, vc \,.\, sin.\, (2p + q + t).$$

ARTICLE III.

Détermination des inégalités de cette classe, qui affectent la latitude de la Lune.

XII.

Ces inégalités sont contenues dans notre troisième équation:

$$-\frac{ddz^{\mathrm{I}}}{dt^2} - (1+\lambda)z^{\mathrm{I}} + 3\lambda u z^{\mathrm{I}} + 3\lambda x^{\mathrm{I}} w + 3 v\omega\, cos.\, t = 0;$$

Je me contenterai ici de mettre

$$u = b \,.\, cos.\, 2p\,;\; w = \omega\, sin.\, r$$

&

$$x^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{I}} v \cos. t + b^{\mathrm{I}} v \cos. (2p - t) + b^{\mathrm{II}} v \cos. (2p + t)$$

de ſorte que

$$b = -0,00718; \; b^{\mathrm{I}} = +0,01868;$$
$$b^{\mathrm{II}} = +0,00699; \; a^{\mathrm{I}} = +0,00148.$$

De-là les deux derniers termes de notre équation donneront :

$$\tfrac{3}{2}(1 + \lambda a^{\mathrm{I}}) v\omega . \sin. (r - t) + \tfrac{3}{2}(1 + \lambda a^{\mathrm{I}}) v\omega . \sin. (r + t)$$
$$- \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{I}} v\omega . \sin. (2p - r - t) + \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{I}} v\omega .$$
$$\sin. (2p + r - b) - \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{II}} v\omega . \sin. (2p - r + t)$$
$$+ \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{II}} v\omega . \sin. (2p + r + t).$$

XIII.

Soit donc :

$$z^{\mathrm{I}} = A' v\omega \sin. (r - t) + B' v\omega \sin. (r + t)$$
$$+ C' v\omega \sin. (2p - r - t) + D' v\omega \sin. (2p + r - t)$$
$$+ E' v\omega \sin. (2p - r + t) + F' v\omega \sin. (2p + r + t).$$

Et nous obtiendrons les ſix déterminations ſuivantes :

I. $((l - 1)^2 - \lambda - 1) A' + \tfrac{3}{2} \lambda b (D' - E') + \tfrac{3}{2}(1 + \lambda a^{\mathrm{I}}) = 0.$

II. $((l + 1)^2 - \lambda - 1) B' - \tfrac{3}{2} \lambda b (C' - F') + \tfrac{3}{2}(1 + \lambda a^{\mathrm{I}}) = 0.$

III. $((2m - l - 1)^2 - \lambda - 1) C' - \tfrac{3}{2} \lambda b . B' - \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{I}} = 0.$

IV. $((2m + l - 1)^2 - \lambda - 1) D' + \tfrac{3}{2} \lambda b A' + \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{I}} = 0.$

V. $((2m - l + 1)^2 - \lambda - 1) E' - \tfrac{3}{2} \lambda b A' - \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{II}} = 0.$

VI. $((2m + l + 1)^2 - \lambda - 1) F' + \tfrac{3}{2} \lambda b B' + \tfrac{3}{2} \lambda b^{\mathrm{II}} = 0.$

D'où l'on trouvera :

$$A' = +0,07747; \; B' = -0,06327; \; C' = -0,06967;$$
$$D' = +0,00406; \; E' = +0,06055; \; F' = -0,00148.$$

Par

Par conséquent

$$z^{I} = +0{,}07747 \,.\, v\omega \,.\, \text{fin.}\,(r - t) - 0{,}06327 \,.\, v\omega \,.\, \text{fin.}\,(r + t) - 0{,}06967 \,.\, v\omega \,.\, \text{fin.}\,(2p - r - t) + 0{,}00406 \,.\, v\omega \,.\, \text{fin.}\,(2p + r - t) + 0{,}06055 \,.\, v\omega \,.\, \text{fiu.}\,(2p - r + t) - 0{,}00148 \,.\, v\omega \,.\, \text{fin.}\,(2p + r + t).$$

CONCLUSION.

Trouver le lieu de la Lune pour un tems quelconque.

QU'ON cherche pour ce tems propofé, par les Tables des moyens mouvemens du Soleil & de la Lune.

1. L'Anomalie moyenne du Soleil . . . . . t.

2. L'Élongation moyenne de la Lune à l'oppofition du Soleil . . . . p.

3. L'Anomalie moyenne de la Lnne . . . q.

4. L'Argument de latitude de la Lune . r.

Qu'on en forme les angles fuivans :

$2p$; $3p$; $4p$; $2p - t$; $2p + t$; $2q$; $3q$; $q - t$; $q + t$; $p - q$; $p + q$; $2p - q$; $2p + q$; $3p - q$; $3p + q$; $4p - q$; $4p + q$; $2p - 2q$; $2p + 2q$; $2p - q - t$; $2p - q + t$; $2p + q - t$; $2p + q + t$; 2 ; $r - t$; $r + t$; $2p - r$; $2p + r$; $p - r$; $2p - 2r$; $p + r$; $2p + 2r$; $2p - r - t$; $2p - r + t$; $2p + r - t$; $2p + r + t$; $q - r$; $q + r$; $2q - r$; $2q + r$; $2p - q - r$; $2p - q + r$; $2p - 2q - r$; $2p - 2q + r$; $2p - 3q$; $2p + 3q$;

Et nous obtiendrons pour nos trois coordonnées X, Y, Z les valeurs fuivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{a} = {} & 1{,}0000240 - 0{,}53931 \,.\, cc - 0{,}25012 \,.\, \omega\omega \\
& - 0{,}11411 \,.\, a \,.\, cof.\, p \\
& - (0{,}0071802 + 0{,}21986 . cc - 0{,}01310 . \omega\omega) cof.\, 2p \\
& + 0{,}00300 \,.\, a \,.\, cof.\, 3p \\
& + 0{,}0000061 \,.\, cof.\, 4p. \\
& + 0{,}00148 \,.\, v \,.\, cof.\, t \\
& + 0{,}01868 \,.\, v \,.\, cof.\, (2p - t) \\
& + 0{,}00699 \,.\, v \,.\, cof.\, (2p + t) \\
& + (1 + 0{,}8899 \,.\, cc) c \,.\, cof.\, q \\
& + 0{,}50962 \,.\, cc \,.\, cof.\, 2q \\
& - 0{,}3832 \,.\, c^3 \,.\, cof.\, 3q \\
& + 1{,}6566 \,.\, vc \,.\, cof.\, (q - t) \\
& - 1{,}7983 \,.\, vc \,.\, cof.\, (q + t) \\
& + 0{,}0467 \,.\, ac \,.\, cof.\, (p - q) \\
& - 0{,}20629 \,.\, cc \,.\, cof.\, (2p - 2q) \\
& - 0{,}1213 \,.\, ac \,.\, cof.\, (p + q) \\
& + 0{,}00468 \,.\, cc \,.\, cof.\, (2p + 2q) \\
& + (0{,}187947 - 0{,}5166 \,.\, cc) c \,.\, cof.\, (2p - q) \\
& - (0{,}002705 + 0{,}2455 \,.\, cc) c \,.\, cof.\, (2p + q) \\
& + 0{,}1782 \,.\, c^3 \,.\, cof.\, (2p - 3q) \\
& + 0{,}0011 \,.\, c^3 \,.\, cof.\, (2p + 3q) \\
& + 0{,}0168 \,.\, ac \,.\, cof.\, (3p - q) \\
& - 0{,}0001 \,.\, ac \,.\, cof.\, (3p + q) \\
& - 0{,}000512 \,.\, c \,.\, cof.\, (4p - q)
\end{aligned}
$$

$$- 0{,}000012 . c . \cos.(4p + q)$$
$$+ 0{,}2302 . vc . \cos.(2p - q - t)$$
$$- 1{,}0772 . ac . \cos.(2p - q + t)$$
$$- 0{,}0067 . vc . \cos.(2p + q - t)$$
$$+ 0{,}0045 . vc . \cos.(2p + q + t)$$
$$+ 0{,}24723 . \omega\omega . \cos. 2r$$
$$- 0{,}01330 . \omega\omega . \cos. (2p - 2r)$$
$$+ 0{,}00042 . \omega\omega . \cos. (2p + 2r)$$

$$\frac{Y}{e} = + 0{,}24168 . a . \sin. p$$
$$+ (0{,}0102118 + 0{,}09768 . cc - 0{,}01804 . \omega\omega) \sin. 2p$$
$$- 0{,}00287 . a \sin. 3p$$
$$+ 0{,}0000057 . \sin. 4p$$
$$+ 2{,}02314 . v . \sin. t$$
$$- 0{,}03476 . v . \sin. (2p - t)$$
$$- 0{,}00264 . v . \sin. (2p + t)$$
$$- (2{,}012729 + 0{,}4207 . cc) c . \sin. q$$
$$+ 0{,}25237 . cc . \sin. 2q$$
$$- 0{,}2996 . c^3 . \sin. 3q$$
$$- 0{,}2056 . vc . \sin. (q - t)$$
$$+ 0{,}5509 . vc . \sin. (q + t)$$
$$- 2{,}6343 . ac . \sin. (p - q)$$
$$+ 0{,}26228 . cc . \sin. (2p - 2q)$$
$$- 0{,}0554 . ac \sin. (p + q$$

$$
\begin{aligned}
&+ 0{,}00464 \,.\, cc \,.\, \sin.\, (2p + 2q) \\
&- (0{,}411802 - 1{,}3000 \,.\, cc \,.\, \sin.\, (2p - q) \\
&- (0{,}003215 + 0{,}1960 \,.\, cc) c \,.\, \sin.\, (2p + q) \\
&- 0{,}2850 \,.\, c^3 \,.\, \sin.\, (2p - 3q) \\
&+ 0{,}0007 \,.\, c^3 \,.\, \sin.\, (2p + 3q) \\
&- 0{,}0917 \,.\, ac \,.\, \sin.\, (3p - q) \\
&+ 0{,}0014 \,.\, ac \,.\, \sin.\, (3p + q \\
&- 0{,}000728 \,.\, c \,.\, \sin.\, (4p - q) \\
&- 0{,}000025 \,.\, c \,.\, \sin.\, (4p + q) \\
&+ 0{,}2604 \,.\, vc \,.\, \sin.\, (2p - q - t) \\
&+ 1{,}5491 \,.\, vc \,.\, \sin.\, (2p - q + t) \\
&+ 0{,}0345 \,.\, vc \,.\, \sin.\, (2p + q - t) \\
&+ 0{,}0019 \,.\, vc \,.\, \sin.\, (2p + q + t) \\
&- 0{,}24635 \,.\, \omega\omega \,.\, \sin.\, 2r \\
&+ 0{,}02334 \,.\, \omega\omega \,.\, \sin.\, (2p - 2r) \\
&- 0{,}00039 \,.\, \omega\omega \,.\, \sin.\, (2p + 2r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Z}{a} = {} & \omega \sin.\, r \\
&+ 0{,}1803 \,.\, a\omega \,.\, \sin.\, (p - r) \\
&+ 0{,}0656 \,.\, a\omega \,.\, \sin.\, (p + r) \\
&+ (0{,}036484 + 0{,}3498 \,.\, cc) \omega \sin.\, (2p - r) \\
&+ (0{,}001877 + 0{,}2102 \,.\, cc) \omega \sin.\, (2p + r) \\
&- 1{,}48582 \,.\, c\omega \,.\, \sin.\, (q - r) \\
&- 0{,}51163 \,.\, c\omega \,.\, \sin.\, (q + r) \\
&- 0{,}22643 \,.\, c\omega \,.\, \sin.\, (2p - q - r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 0{,}12553 \,.\, c\omega \,.\, \sin.(2p - q + r) \\
&+ 0{,}1195 \,.\, cc\omega \,.\, \sin.(2q - r) \\
&+ 0{,}3850 \,.\, cc\omega \,.\, \sin.(2q + r) \\
&+ 0{,}1522 \,.\, cc\omega \,.\, \sin.(2p - 2q - r) \\
&- 0{,}0614 \,.\, cc\omega \,.\, \sin.(2p - 2q + r) \\
&+ 0{,}07747 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(r - t) \\
&- 0{,}06327 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(r + t) \\
&- 0{,}06967 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(2p - r - t) \\
&+ 0{,}06055 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(2p - r + t) \\
&+ 0{,}00406 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(2p + r - t) \\
&- 0{,}00148 \,.\, v\omega \,.\, \sin.(2p + r + t)
\end{aligned}
$$

où a marque la moyenne distance de la Lune au centre de la Terre dans l'écliptique;

c. L'excentricité de l'orbite de la Lune.

v. L'excentricité de l'orbite du Soleil ou de la Terre.

&

ω. La tangente de la plus grande latitude moyenne de la Lune.

De ces quatre Lettres a, c, ω & v, on ne connoît ici que la seule v, les autres trois doivent être déterminées par la comparaison de ces formules avec les observations; outre cela, cette comparaison fera aussi connoître ce qu'il faudra ajouter aux angles p, q & r; de sorte qu'il y aura en tout six constantes arbitraires à déterminer, ce qui constitue le caractère d'une intégrale complette des trois équations différentielles du second degré.

Or ayant trouvé les valeurs des trois coordonnées, on en connoîtra par ce que j'ai dit au § 26 & ſuivans de la premiere Section, tout ce qu'il faut pour déterminer le lieu de la Lune.

Il me ſemble avoir pleinement ſatisfait à la Queſtion propoſée par L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. La nouvelle Théorie de la Lune, que j'ai l'honneur de lui préſenter ici, fixe abſolument toutes les équations de ce Satellite; il n'y en a aucune qui ſoit reſtée incertaine, & maintenant il paroît bien conſtaté, que l'équation ſéculaire du mouvement de la Lune ne ſauroit être produite par les forces de l'attraction.

Errantemque canit Lunam. VIRG.

Cette Pièce eſt de M. EULER.

FIN.

ESSAI

D'UNE NOUVELLE MÉTHODE

POUR RÉSOUDRE LE PROBLÊME

DES TROIS CORPS,

Qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences en 1772.

Par M. DE LA GRANGE.

AVERTISSEMENT.

CES recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problême des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps, d'autres élémens que les distances entre les trois Corps c'est-à-dire le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le tems; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps, par rapport à un plan fixe quelconque. On verra dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second sur-tout demande une Analyse délicate & assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je rassemble les principales formules que j'ai trouvées, & qui renferment la solution du Problême des trois Corps pris dans toute sa généralité.

Le Chapitre ſecond a pour objet d'examiner comment, & dans quels cas les trois Corps pourroient ſe mouvoir; enſorte que leurs diſtances fuſſent toujours conſtantes, ou gardaſſent au moins entre elles des rapports conſtans : je trouve que ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans deux cas ; l'un, lorſque les trois Corps ſont rangés dans une même ligne droite, & l'autre, lorſqu'ils forment un triangle équilatéral ; alors, chacun des trois Corps décrit autour des deux autres, des cercles ou des ſections coniques, comme s'il n'y avoit que deux Corps. Cette recherche n'eſt à la vérité que de pure curioſité ; mais j'ai cru qu'elle ne ſeroit pas déplacée dans un Ouvrage qui roule principalement ſur le Problême des trois Corps, enviſagé dans toute ſon étendue.

Dans le troiſième Chapitre, je ſuppoſe que la diſtance de l'un des trois Corps aux deux autres ſoit fort grande, & j'applique la ſolution générale du Chapitre premier à cette hypothèſe, qui eſt, comme l'on ſçait, celle de la Terre, de la Lune & du Soleil.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, je

traite en particulier de la Théorie de la Lune ; j'y donne les formules qui renferment cette Théorie, & je fais voir par un léger essai de calcul, comment on doit se servir de ces formules pour en déduire les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre.

Le défaut de tems, & d'autres occupations indispensables, ne m'ont pas permis d'entrer là-dessus dans tout le détail nécessaire pour répondre d'une manière convenable aux principaux Points de la Question proposée par l'Académie : aussi ai-je d'abord hésité si je lui présenterois ces Recherches pour le Concours ; & je ne m'y suis déterminé que par l'espérance que cette illustre Compagnie trouvera peut-être ma Méthode, pour résoudre le Problême des trois Corps, digne de quelque attention, tant par sa nouveauté & sa singularité, que par les difficultés considérables de calcul qu'elle renferme.

Si l'Académie daigne honorer mon travail de son suffrage, ce sera un puissant motif pour m'engager à le perfectionner, & je ne déses-

père pas de pouvoir tirer de ma Méthode une Théorie de la Lune aussi complète qu'on puisse le demander, dans l'état d'imperfection où est encore l'Analyse.

ESSAI
SUR
LE PROBLÊME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere Fontes.
LUCR.

CHAPITRE PREMIER.
Formules générales pour la ſolution du Problême des trois Corps.

I.

SOIENT A, B, C les maſſes des trois corps qui s'attirent mutuellement en raiſon directe les maſſes, & en raiſon inverſe du quarré les diſtances ; ſoient nommées de plus x, y, z les coordonnées rectangles de l'orbite du corps B

autour du corps A, x^{I}, y^{I}, z^{I} les coordonnées rectangles de l'orbite du corps C autour du même corps A, coordonnées qu'on suppose toujours paralelles à trois lignes fixes & perpendiculaires entre elles; enfin soient $r, r^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{II}}$ les distances entre les corps A & B, A & C, B & C, ensort que l'on ait

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2}$$
$$r^{\mathrm{I}} = \sqrt{(x^{\mathrm{I}2} + y^{\mathrm{I}2} + z^{\mathrm{I}2})}$$
$$r^{\mathrm{II}} = \sqrt{((x^{\mathrm{I}} - x)^2 + (y^{\mathrm{I}} - y)^2 + (z^{\mathrm{I}} - z)^2)}$$

On aura, comme l'on sait, en prenant l'élément du tems dt constant, les six équations suivantes.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{\mathrm{II}3}}\right)x + C\left(\frac{1}{r^{\mathrm{I}3}} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}3}}\right)x^{\mathrm{I}} = 0\\
\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{\mathrm{II}3}}\right)y + C\left(\frac{1}{r^{\mathrm{I}3}} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}3}}\right)y^{\mathrm{I}} = 0\\
\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{\mathrm{II}3}}\right)z + C\left(\frac{1}{r^{\mathrm{I}3}} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}3}}\right)z^{\mathrm{I}} = 0
\end{aligned}\right\} (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{\mathrm{I}3}} + \frac{B}{r^{\mathrm{II}3}}\right)x^{\mathrm{I}} + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}3}}\right)x = 0\\
\frac{d^2y^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{\mathrm{I}3}} + \frac{B}{r^{\mathrm{II}3}}\right)y^{\mathrm{I}} + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}}}\right)y = 0\\
\frac{d^2z^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r^{\mathrm{I}3}} + \frac{B}{r^{\mathrm{II}3}}\right)z^{\mathrm{I}} + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{\mathrm{II}3}}\right)z = 0
\end{aligned}\right\} (B)$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer les orbites relatives des corps B & C autour du corps A.

Si on fait encore

$$x^{\mathrm{I}} - x = x^{\mathrm{II}},\ y^{\mathrm{I}} - y = y^{\mathrm{II}},\ z^{\mathrm{I}} - z = z^{\mathrm{II}},$$

ensorte

enſorte que x^{II}, y^{II}, z^{II} ſoient les coordonnées rectangles de l'orbite du corps C autour de B, on aura

$$r^{II} = \sqrt{x^{II2} + y^{II2} + z^{II2}}$$

& retranchant reſpectivement les trois premières équations des trois dernières, on aura ces trois ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)x^{II} + A\left(\frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^3}\right)x^{I} = 0\\
&\frac{d^2y^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)y^{II} + A\left(\frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^3}\right)y^{I} = 0\\
&\frac{d^2z^{II}}{dt^2} + \left(\frac{B+C}{r^{II3}} + \frac{A}{r^3}\right)z^{II} + A\left(\frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^3}\right)z^{I} = 0
\end{aligned}\right\} (C)$$

qui exprimeront le mouvement relatif du corps C autour du corps B.

Il eſt bon de remarquer l'analogie qu'il y a entre ces neuf équations (A), (B), (C); c'eſt que les équations (A) ſe changent en les équations (B) en y changeant ſeulement B en C, x en x^{I}, y en y^{I}, z en z^{I}, r en r^{I} & réciproquement; & que de même ces équations ſe changent en les équations (C) en y changeant A en C, x en x^{II}, y en y^{II}, z en z^{II}, r en r^{II} & *vice verſa*; & la même analogie aura lieu dans toutes les formules que nous trouverons par la ſuite.

II.

Qu'on multiplie la première des équations (A) par y & la ſeconde par x, & qu'enſuite on les retranche l'une de l'autre, on aura

$$\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2} + C\left(\frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^{II3}}\right)(yx^{I} - xy^{I}) = 0.$$

Combinant de même les deux premières des équations (*B*) & les deux premières des équations (*C*) on aura ces deux ci:

$$\frac{y'd^2x' - x'dy^{2'}}{dt} + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xy' - yx) = 0.$$

$$\frac{y''dx^{2''} - x''dy^{2''}}{dt^2} + A\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)x'y'' - y'x'') = 0.$$

Mais

$x'' = x' - x$, $y'' = y' - y$; donc $x'y'' - y'x'' = xy' - yx'$; donc en ajoutant ensemble les trois équations précédentes, après avoir divisé la première par C, la seconde par B & la troisième par A, on aura celle-ci :

$$\frac{yd^2x - xd^2y}{Cdt^2} + \frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{Bdt^2} + \frac{y''d^2x'' - x''d^2y''}{Adt^2} = 0.$$

On trouvera de la même manière ces deux autres équations :

$$\frac{zd^2x - xd^2z}{Cdt^2} + \frac{z'd^2x' - x'd^2z'}{Bdt^2} + \frac{z''d^2x'' - x''d^2z''}{Adt^2} = 0.$$

$$\frac{zd^2y - yd^2z}{Cdt^2} + \frac{z'd^2y' - y'd^2z'}{Bdt^2} + \frac{z''d^2y' - y''d^2y''}{Adt^2} = 0.$$

De sorte qu'on aura en intégrant

$$\left.\begin{aligned} \frac{ydx - xdy}{Cdt} + \frac{y'dx' - x'dy'}{Bdt} + \frac{y''dx'' - x''dy''}{Adt} &= a \\ \frac{zdx - xdz}{Cdt} + \frac{z'dx' - x'dz'}{Bdt} + \frac{z''dx'' - x''dz''}{Adt} &= b \\ \frac{zdy - ydz}{Cdt} + \frac{z'dy' - y'dz'}{Bdt} + \frac{z''dy'' - y''dz''}{Adt} &= c \end{aligned}\right\} (D)$$

a, b, c étant des constantes arbitraires.

De plus, si on multiplie la première des équations (A) par $\frac{dx}{C}$, la première des équations (B) par $\frac{dx^{I}}{C}$, & la première des équations (C) par $\frac{dx^{II}}{A}$, & qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura, à cause de $x^{II} = x^{I} - x$,

$$\frac{dxd^2x}{Cdt^2} + \frac{dx^{I}d^2x^{I}}{Bdt^2} + \frac{dx^{II}d^2x^{II}}{Adt^2} + (A+B+C)$$
$$\left(\frac{xdx}{Cr^3} + \frac{x^{I}dx^{I}}{Br'^3} + \frac{x^{II}dx^{II}}{Ar''^3}\right) = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{dyd^2y}{Cdt^2} + \frac{dy^{I}d^2y^{I}}{Bdt^2} + \frac{dy^{II}d^2y^{II}}{Adt^2} + (A+B+C)$$
$$\left(\frac{ydy}{Cr^3} + \frac{y^{I}dy^{I}}{Br'^3} + \frac{y^{II}dy^{II}}{Ar''^4}\right) = 0,$$

$$\frac{dzdz}{Cdt^2} + \frac{dz^{I}d^2z^{I}}{Adt^2} + \frac{dz^{II}d^2z^{II}}{Adt^2} + (A+B+C)$$
$$\left(\frac{zdz}{Cr^3} + \frac{z^{I}dz^{I}}{Br'^3} + \frac{d^{II}dz^{II}}{Ar''^3}\right) = 0.$$

Donc, ajouant ensemble ces trois équations & mettant rdr à la place de $xdx + ydy + zdz$, $r^{I}dr^{I}$ à la place de $x^{I}dx^{I} + y^{I}dy^{I} + z^{I}dz^{I}$, & $r^{II}dr^{II}$ à la place de $x^{II}dx^{II} + y^{II}dy^{II} + z^{II}dz^{II}$, on aura une équation intégrable dont l'intégrale sera

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{Cdt^2} + \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{Bdt^2} + \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{Adt^2}$$
$$-2(A+B+C)\left(\frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br^{I}} + \frac{1}{Ar^{II}}\right) = f \ldots (E)$$

f étant une constante arbitraire.

Ce ſont-là les ſeules intégrales exactes qu'on ait pu trouver juſqu'à préſent ; or, comme il y a en tout ſix variables x, y, z, x^{I}, y^{I}, z^{I}, il eſt clair que ſi on pouvoit trouver encore deux autres intégrales, le problême feroit réduit aux premières différences ; mais on ne ſauroit guères ſe flatter d'y parvenir dans l'état d'imperfection où eſt encore l'analyſe.

I I I.

Suppoſons pour abréger

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

$$u'^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2}$$

$$u''^2 = \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{dt^2}$$

enſorte que u, u^{I} & u^{II} expriment les vitèſſes relatives des corps B autour de A, C autour de B ; il eſt clair qu'on aura :

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} = \frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + u^2$$

$$\frac{d^2.r'^2}{2dt^2} = \frac{x^{\mathrm{I}}d^2x^{\mathrm{I}} + yd^2y^{\mathrm{I}} + z^{\mathrm{I}}d^2z^{\mathrm{I}}}{dt^2} + u'^2$$

$$\frac{d^2.r''^2}{2dt^2} = \frac{x^{\mathrm{II}}d^2x^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{II}}d^2y^{\mathrm{II}} + z^{\mathrm{II}}d^2z^{\mathrm{II}}}{dt^2} + u''^2.$$

Donc mettant dans ces équations au lieu de

$$\frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2x^{\mathrm{I}}}{dt^2}, \text{&c.}$$

leurs valeurs tirées des équations (A), (B), (C), & faiſant attention que

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ x'^2+y'^2+z'^2=r'^2,\ x''^2+y''^2+z''^2=r''^2,$$

$$xx^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{I}}+zz^{\mathrm{I}}=\frac{r^2+r'^2-r''^2}{2}$$

&

$$x^{\mathrm{I}}x^{\mathrm{II}}+y^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}}+z^{\mathrm{I}}z^{\mathrm{II}}=x'^2+y'^2+z'^2-x^{\mathrm{I}}x-y^{\mathrm{I}}y-z^{\mathrm{I}}z$$
$$=\frac{r'^2+r''^2-r^2}{2},$$

on aura, après avoir fait paſſer tous les termes du même côté.

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2.r^2}{2dt^2}+\left(\frac{A+B}{r^3}+\frac{C}{r''^3}\right)r^2+\frac{C}{2}\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{1}{r'^3}\right) \\
\qquad (r^2+r'^2-r''^2)-u^2=0 \\
\frac{d^2.r'^2}{2dt^2}+\left(\frac{A+C}{r'^3}+\frac{B}{r''^3}\right)r'^2+\frac{B}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r''^3}\right) \\
\qquad (r^2+r'^2-r''^2) \qquad\qquad\qquad , \\
\frac{d^2.r''^2}{2dt^2}+\left(\frac{B+C}{r''^3}+\frac{A}{r^3}\right)r''^2+\frac{A}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^3}\right) \\
\qquad (r'^2+r''^2-r^2)-u''^2=0.
\end{array}\right\}(F)$$

Donc, ſi on peut avoir les valeurs de u^2, u'^2 & u''^2 exprimées en r, r' & r'' ſeulement, on aura trois équations entre ces trois dernières variables & le tems t, à l'aide deſquelles on pourra à chaque inſtant déterminer la poſition relative des corps.

IV.

Or, on a, en différentiant les valeurs de u^2, u'^2, & u''^2,

$$u\,d\,u = \frac{dxd^2x + dydy^2 + dzdz^2}{dt^2}$$

$$u^I du^I = \frac{dx^I d^2x^I + dy^I d^2y^I + dz^I d^2z^I}{dt^2}$$

$$u^{II} du^{II} = \frac{dx^{II} d^2x^{II} + dy^{II} d^2y^{II} + dz^{II} d^2z^{II}}{dt^2}$$

donc, si on fait ici les mêmes substitutions que ci-dessus, & qu'on suppose pour un moment

$$d\,\gamma = x^I dx + y^I dy + z^I dz$$

$$d\,\gamma^I = zdx^I + ydy^I + zdz^I$$

$$d\gamma^{II} = x^I dx^{II} + y^I dy^{II} + z^I dz^{II},$$

on aura, (à cause de

$$xdx + ydy + zdz = rdr,\ x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I = r^I dr^I,$$

&

$$x^{II}dx^{II} + y^{II}dy^{II} + z^{II}dz^{II} = r^{II}dr^{II})$$

$$u\,d\,u = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r'^3}\right) r\,d\,r - C\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right) d\gamma$$

$$u^I du^I = -\left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3}\right) r^I dr^I - B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right) d\gamma^I$$

$$u^{II} du^{II} = -\left(\frac{B+C}{r''^3} + \frac{A}{r^3}\right) r^{II} dr^{II} - A\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) d\gamma^{II}.$$

Soit pour abreger

$$d\,R = \frac{2rdr}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right) d\,\gamma$$

$$d\,R^I = \frac{2r^I dr^I}{r''^3} + 2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) d\,\gamma^I$$

$$dR^{II} = \frac{2r^{II}dr^{II}}{r^3} + 2\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) d\,\gamma^{II}$$

& l'on aura

$$u^2 = \frac{2(A+B)}{r} - CR$$

$$u'^2 = \frac{2(A+C)}{r^{\mathrm{I}}} - BR^{\mathrm{I}}$$

$$u''^2 = \frac{2(B+C)}{r^{\mathrm{II}}} - AR^{\mathrm{II}}$$

de sorte que les équations (F) deviendront

$$(G)\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2 . r^2}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} + C\left(\frac{r^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r^2 + r'^2 - r''^2) + R\right) = 0 \\ \frac{d^2 . r'^2}{2dt^2} - \frac{A+C}{r^{\mathrm{I}}} + B\left(\frac{r'^2}{r''^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r^2 + r'^2 - r''^2) + R^{\mathrm{I}}\right) = 0 \\ \frac{d^2 . r''^2}{2dt^2} - \frac{B+C}{r''} + A\left(\frac{r''^2}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\right. \\ \qquad \left.(r'^2 + r''^2 r^2) + r^{\mathrm{II}}\right) = 0 \end{array}\right.$$

& il ne restera plus qu'à trouver les valeurs de

$$d\gamma,\ d\gamma^{\mathrm{I}}\ \&\ d\gamma^{\mathrm{II}}.$$

Pour cela je fais

$$d\rho = x^{\mathrm{I}}dx + y^{\mathrm{I}}dy + z^{\mathrm{I}}dz - xdx^{\mathrm{I}} - ydy^{\mathrm{I}} - zdz^{\mathrm{I}}$$

& comme l'on a

$$xx^{\mathrm{I}} + yy + zz^{\mathrm{I}} = -\frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

on aura en différentiant

$$xdx^{\mathrm{I}} + ydy^{\mathrm{I}} + zdz^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{I}}dx + y^{\mathrm{I}}dy + z^{\mathrm{I}}dz$$
$$= rdr + r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}},$$

donc

$$d\gamma = \frac{rdr + r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}} + d\rho}{2}$$

$$d\gamma^{\mathrm{I}} = \frac{rdr + r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}} - d\rho}{2}$$

& enſuite

$$d\gamma^{\mathrm{II}} = r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}} - d\gamma,$$

ſavoir

$$d\gamma^{\mathrm{II}} = \frac{r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}} + r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}} - rdr - d\rho}{2}.$$

Tout ſe réduit donc maintenant à avoir la valeur de $d\rho$; pour y parvenir, je différentie, & j'ai

$$d^2\rho = x^{\mathrm{I}}dx^2 + y^{\mathrm{I}}dy^2 + z^{\mathrm{I}}dz^2 - xd^2x^{\mathrm{I}} - yd^2y^{\mathrm{I}} - zd^2z^{\mathrm{I}};$$

je ſubſtitue à la place de d^2x, d^2y, d^2z, &c. les valeurs tirées des équations (A) & (B), & faiſant les autres ſubſtitutions convenables, je trouve

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r'^3} - \frac{A+C}{r'^3} - \frac{B}{r^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2)$$
$$-C\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)r'^2 + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)r^2,$$

ou bien

$$\frac{2d^2\rho}{dt^2} + A\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2) + B\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3}\right)$$
$$(r'^2 - r^2 - r''^2) + C\left(\frac{1}{r''^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(r^2 - r'^2 - r''^2) = 0.$$

V.

V.

Supposons, pour mettre nos formules sous une forme plus simple,

$$\frac{r^2+r^{II2}-r^{I2}}{2}=p \qquad \frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}=q \qquad \frac{u^{I2}+u^{II2}-u^2}{2}=v$$

$$\frac{r^2+r^{II2}-r^{I2}}{2}=p^I \quad \frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{II3}}=q^I \quad \frac{u^2+u^{II2}-u^{I2}}{2}=v^I$$

$$\frac{r^2+r^{I2}-r^{II2}}{2}=p^{II} \quad \frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^3}=q^{II}=q-q^I$$

$$\frac{u^2+u^{I2}-u^{II2}}{2}=v^{II}$$

& l'on aura d'abord, pour la détermination de $d\rho$ cette équation

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+Cpq-Bp^Iq^I-Ap^{II}q^{II}=0\ldots(A)$$

On aura ensuite

$$dV=\frac{dp^{II}+d\rho}{2},\ dV^I=\frac{dp^{II}-d\rho}{2},\ dV^{II}=\frac{dp-d\rho}{2}$$

d'où

$$dR=\frac{2rdr}{r^{II3}}+q(dp^{II}+d\rho)$$

$$dR^I=\frac{2r^Idr^I}{r^{II3}}+q^I(dp^{II}+d\rho)$$

$$dR^{II}=\frac{2r^{II}dr^{II}}{r^3}+q^{II}(dp-d\rho)$$

Mais

$$\frac{1}{r^{II3}}=\frac{1}{r^3}-q^I \ \&\ 2rdr=dp^I+dp^{II};$$

donc

$$\frac{2rdr}{r^{II3}} = \frac{2dr}{r^2} - q^I(dp^I + dp^{II});$$

on trouvera de même

$$\frac{2r^I dr^I}{r^{II3}} = \frac{2dr^I}{r^{I2}} - q(dp + dp^{II})$$

&

$$\frac{2r^{II} dr^{II}}{r^3} = \frac{2dr}{r^{II2}} - q^I(dp^I + dp);$$

de forte qu'en fubftituant ces valeurs, & faifant pour plus de fimplicité

$$\left.\begin{aligned} dQ &= q^I dp^I - q^{II} dp^{II} - q d\rho \\ dQ^I &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I d\rho \\ dQ^{II} &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I d\rho \end{aligned}\right\} \ldots (I)$$

on aura

$$R = -\frac{2}{r} - Q,\ R^I = -\frac{2}{r^I} - Q^I,$$

$$R^{II} = -\frac{2}{r^{II}} - Q^{II},$$

& de-là

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \frac{2(A+B+C)}{2} + C\,Q \\ u^{I2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^I} + B\,Q^I \\ u^{II2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^{II}} + A\,Q^{II} \end{aligned}\right\} \ldots (J)$$

Maintenant on aura

$$\frac{r^2}{r^{II3}} = \frac{1}{r} - q^I(p^I + p^{II})$$

&

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}\right)(r^2+r^{I2}-r^{II2})=qp^{II};$$

donc ajoutant ces deux équations, & mettant q^{II} à la place de $q-q^{I}$, on aura

$$\frac{r^2}{r^{II3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^{II3}}\right)(r^2+r^{I2}-r^{II2})$$
$$=\frac{1}{r}-p^{I}q^{I}+p^{II}q^{II};$$

on trouvera de même

$$\frac{r^{I2}}{r^{II3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^{II3}}\right)(r^2+r^{I2}-r^{II2})$$
$$=\frac{1}{r^{I}}-pq-p^{II}q^{II},$$

$$\frac{r^{II2}}{r^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{I3}}-\frac{1}{r^3}\right)(r^{I2}+r^{II2}-r^2)$$
$$=\frac{1}{r^{II}}+p^{I}q^{I}+p^{II}q^{II};$$

donc faisant toutes ces substitutions dans les équations (G) ou (F) des articles précédents, elles deviendront celles-ci,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2.r^2}{2dt^2}-\frac{A+B+C}{r}-C(p^{I}q^{I}-p^{II}q^{II}+Q)=0\\
&\frac{d^2.r^{I2}}{2dt^2}-\frac{A+B+C}{r}-B(pq+p^{II}q^{II}+Q^{I})=0\\
&\frac{d^2.r^{II2}}{2dt^2}-\frac{A+B+C}{r^{II}}-A(-pq-p^{I}q^{I}+Q^{II})=0
\end{aligned}\right\}(K)$$

Ainsi, on pourra, à l'aide de ces trois équations, déterminer les trois rayons r, r^{I} & r^{II} en t, ce qui donnera pour chaque instant la position relative des Corps entre eux.

Il eſt bon de remarquer que ſi on diviſe la première de ces équations par C ; la ſeconde par B, & la troiſième par A ; & qu'enſuite on les ajoute enſemble, on aura (à cauſe de $dQ + dQ^{I} + dQ^{II} = 0$, & par conſéquent $Q + Q^{I} + Q^{II} =$ *à une conſtante*) celle-ci,

$$\frac{d^2 . r^2}{2Cdt^2} + \frac{d^2 . r^{I2}}{2Bdt^2} + \frac{d^2 . r^{II2}}{2Adt^2} - (A+B+C)\left(\frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br^{I}} + \frac{1}{Ar^{II}}\right)$$

$$= \text{à une conſtante} \ldots (L)$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois équations (K).

VI.

On peut encore mettre les mêmes équations (K) ſous une autre forme que voici.

Je multiplie la première de ces équation par $d . r^2$ & je l'intégre enſuite pour avoir

$$\frac{(d . r^2)^2}{4dt^2} - 2(A+B+C)r - C\int(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II})d . r^2$$

$$- C\int Q\, d . r^2 + L = 0,$$

L étant une conſtante arbitraire.

Or, $\int Q\, d . r^2 = Q\, r^2 - \int r^2\, d\, Q$; mais $d\, Q = q^{I} dp^{I} - q^{II} dp^{II} - q\, d\rho$; de plus, à cauſe de $r^2 = p^{I} + p^{II}$, on aura $(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II})d . r^2 - r^2(q^{I}dp^{I} - q^{II}dp^{II}) = -(p^{I}q - p^{II}q^{II})(dp^{I} + dp^{II}) + (p^{I} + p^{II})(q^{I}dp^{I} - q^{II}dp^{II}) = q(p^{II}dp^{I} - p^{I}dp^{II})$; de ſorte que, ſi on fait pour abréger $d\, P = q(p^{II}dp^{I} - p^{I}dp^{II} - r^2 d\rho)$, on aura, en négligeant la conſtante L qui peut être ſenſée contenue dans P, & diviſant toute l'équation par r^2,

$$\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r} + C\left(\frac{P}{r^2} - Q\right) = 0.$$

Faisant de même

$$dP = q^{\mathrm{I}}(p^{\mathrm{II}}dp - pdp^{\mathrm{II}} + r^{\mathrm{I}2}d\rho)$$

&

$$dP^{\mathrm{II}} = q^{\mathrm{II}}(pdp^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}dp + r^{\mathrm{II}2}d\rho),$$

on trouvera par des opérations semblables aux précédentes

$$\frac{dr^{\mathrm{I}2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^{\mathrm{I}}} + B\left(\frac{P^{\mathrm{I}}}{r^{\mathrm{I}2}} - Q^{\mathrm{I}}\right) = 0$$

$$\frac{dr^{\mathrm{II}2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^{\mathrm{II}}} + A\left(\frac{P^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}2}} - Q^{\mathrm{II}}\right) = 0.$$

Et si on retranche ces équations respectivement des équations (K) trouvées ci-dessus, qu'ensuite on divise les équations restantes par r, r^{I}, r^{II}, on aura ces trois-ci.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^2} - C\left(\frac{p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}}{r} + \frac{P}{r^3}\right) = 0\\
&\frac{d^2r^{\mathrm{I}}}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{\mathrm{I}2}} - B\left(\frac{pq + p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{I}}} + \frac{P^{\mathrm{I}}}{r^{\mathrm{I}3}}\right) = 0\\
&\frac{d^2r^{\mathrm{II}}}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{\mathrm{II}2}} - A\left(\frac{-pq - p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}}{r^{\mathrm{II}}} + \frac{P^{\mathrm{II}}}{r^{\mathrm{II}3}}\right) = 0
\end{aligned}\right\}(M)$$

VII.

Nous avons donc réduit les six équations primitives (A), (B) qui renferment la solution du Problême des trois Corps pris dans toute sa généralité à trois autres équations entre les trois distances r, r^{I}, r^{II} & le temps t. Il est vrai que ces réduites renferment chacune deux signes d'intégration (ce qui est évident en substituant les valeurs de Q, Q^{I}, Q^{II}, ou de P, P^{I}, P^{II} & de $d\rho$) & qu'à cet égard elles sont moins simples que les équations primitives ;

mais d'un autre côté elles ont l'avantage de ne renfermer aucun radical, ce qui me paroît d'une grande importance dans ces sortes de problêmes.

Supposons donc qu'on ait déterminé par les équations (K) ou (M) les trois variables r, r^{I}, r^{II} en t; on ne connoîtra encore par-là que la position relative des corps, c'est-à-dire le triangle que les trois Corps forment à chaque instant; ainsi il reste à voir comment on pourra déterminer ensuite l'orbite même de chaque corps, c'est-à-dire les six variables x, y, z, x^{I}, y^{I}, & z^{I}.

VIII.

Pour cet effet, nous remarquerons d'abord qu'en connoissant r, r^{I} & r^{II} on connoîtra aussi u, u^{I}, u^{II} & dV, dV^{I}, dV^{II} par les formeles de l'art 5. De sorte qu'on aura (en mettant p^{II} à la place de $\frac{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - r^{\mathrm{II}2}}{2}$ & v^{II} à la place de $\frac{u^2 + u^{\mathrm{I}2} - u^{\mathrm{II}2}}{2}$) les dix équations suivantes.

$$
\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 = r^2\\
&x^{\mathrm{I}2} + y^{\mathrm{I}2} + z^{\mathrm{I}2} = r^{\mathrm{I}2}\\
&xx^{\mathrm{I}} + yy^{\mathrm{I}} + zz^{\mathrm{I}} = p^{\mathrm{II}}\\
&xdx + ydy + zdz = rdr\\
&x^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}} + z^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}} = r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}}\\
&x^{\mathrm{I}}dx + y^{\mathrm{I}}dy + z^{\mathrm{I}}dz = dV\\
&xdx^{\mathrm{I}} + ydy^{\mathrm{I}} + zdz^{\mathrm{I}} = dV^{\mathrm{I}}\\
&dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dt^2\\
&dx^{\mathrm{I}2} + dy^{\mathrm{I}2} + dz^{\mathrm{I}2} = u^{\mathrm{I}2}dt^2\\
&dxdx^{\mathrm{I}} + dydy^{\mathrm{I}} + dzdz^{\mathrm{I}} = v^{\mathrm{II}}dt^2.
\end{aligned}
$$

Or, en regardant les quantités $x, y, z, x^{\mathrm{I}}, y^{\mathrm{I}}, z^{\mathrm{I}}$, $dx, dy, dz, dx^{\mathrm{I}}, dy^{\mathrm{I}}, dz^{\mathrm{I}}$, comme autant d'inconnues, il eſt clair que les équations précédentes ne ſuffiſent pas pour les déterminer, puiſqu'on auroit douze inconnues, & ſeulement dix équations; mais ſi on joint à ces équations les trois équations (D) de l'art. 2. On aura alors une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues; & la difficulté ne conſiſtera qu'à réſoudre ces équations.

I X.

J'obſerve, à l'égard des équations de l'article précédent, qu'elles ne peuvent tenir lieu que de neuf équations, parce qu'en éliminant quelques-unes des inconnues il arrive que les autres s'en vont d'elles-mêmes, de ſorte qu'on tombe par ce moyen dans une équation où il n'entre plns que les quantités connues r^2, $r^{\mathrm{I}2}$, p^{II}, &c. Pour le prouver de la manière la plus ſimple qu'il eſt poſſible, je prends d'abord les trois équations

$$xdx + ydy + zdz = rdr$$

$$x^{\mathrm{I}}dx + y^{\mathrm{I}}dy + z^{\mathrm{I}}dz = dV$$

$$dx^{\mathrm{I}}dx + dy^{\mathrm{I}}dy + dz^{\mathrm{I}}dz = v^{\mathrm{II}}dt^2;$$

& j'en tire par les régles ordinaires de l'élimination, les valeurs de dx; dy, dz; j'aurai en faiſant pour abréger

$$\alpha = y^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}},\quad \alpha^{\mathrm{I}} = zdy^{\mathrm{I}} - ydz^{\mathrm{I}},\quad \alpha^{\mathrm{II}} = yz^{\mathrm{I}} - y^{\mathrm{I}}z,$$

$$\beta = z^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}},\quad \beta^{\mathrm{I}} = xdz^{\mathrm{I}} - zdx^{\mathrm{I}},\quad \beta^{\mathrm{II}} = zx^{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}x,$$

$$\gamma = x^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}} - y^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}},\quad \gamma^{\mathrm{I}} = ydx^{\mathrm{I}} - xdy^{\mathrm{I}},\quad \gamma^{\mathrm{II}} = xy^{\mathrm{I}} - yx^{\mathrm{I}};$$

$$\delta = x(y^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}}) - y(x^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}} - z^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}}) + z(x^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}} - ydx^{\mathrm{I}}),$$

j'aurai, dis-je

$$dx = \frac{\alpha r dr + \alpha^{I} dy + \alpha^{II} v^{II} dt^{2}}{\delta}$$

$$dy = \frac{\beta r dr + \beta^{I} dy + \beta^{II} v^{II} dt^{2}}{\delta}$$

$$dz = \frac{\gamma r dr + \gamma^{I} dy + \gamma^{II} v^{II} dt^{2}}{\delta}$$

Or, je remarque que l'on a

$$\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}=(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2})(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2}) -(x^{I}dx^{I}+y^{I}dy^{I}+z^{I}dz^{I})^{2}=r^{I2}u^{I2}dt^{2}-(r^{I}dr^{I})^{2},$$

$$\alpha^{I2}+\beta^{I2}+\gamma^{I2}=(x^{2}+y^{2}+z^{2})(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2}) -(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})^{2}=r^{2}u^{I2}dt^{2}-dV^{I2},$$

$$\alpha^{II2}+\beta^{II2}+\gamma^{II2}=(x^{2}+y^{2}+z^{2})(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2}) -(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})^{2}=r^{2}r^{I2}-p^{II2},$$

$$\alpha\alpha^{I}+\beta\beta^{I}+\gamma\gamma^{I}=(x^{I}dx^{I}+y^{I}dy^{I}+z^{I}dz)(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})-(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})(dx^{I2}+dy^{I2}+dz^{I2})=r^{I}dr^{I}dV^{I}-p^{II}u^{I2}dt^{2},$$

$$\alpha\alpha^{II}+\beta\beta^{II}+\gamma\gamma^{II}=(x^{I}dx^{I}+y^{I}dy^{I}+z^{I}dz^{I})(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})-(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})(x^{I2}+y^{I2}+z^{I2})=p^{II}r^{I}dr^{I}-r^{I2}dV^{I},$$

$$\alpha^{I}\alpha^{II}+\beta^{I}\beta^{II}+\gamma^{I}\gamma^{II}=(xdx^{I}+ydy^{I}+zdz^{I})(xx^{I}+yy^{I}+zz^{I})-(x^{I}dx^{I}+y^{I}dy^{I}+zdz)(x^{2}+y^{2}+z^{2})=p^{II}dV^{I}-r^{2}r^{I}dr^{I};$$

de forte que si on carre les trois équations précédentes, & qu'on les ajoute ensuite ensemble, on aura, après avoir multiplié par δ^{2}, & fait les substitutions convenables,

δ^{4}

$$\delta^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (rdr)^2 (r^{I2} u^I dt^2 - r^{I2} dr^{I2})$$
$$+ dV^2 (r^2 u^{I2} dt^2 - dV^{I2}) + (v^{II} dt^2)^2 (r^2 r^{I2} - p^{II2})$$
$$+ 2 rdrdV (r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I2} dt^2)$$
$$+ 2 rdr v^{II} dt^2 (p^{II} r^I dr^I - r^{I2} dV^I)$$
$$+ 2 dV v^{II} dt^2 (p^{II} dV^I - r^2 r^I dr^I).$$

De même ſi on prend les trois équations

$$xx + yy + zz = r^2$$
$$x^I x + y^I y + z^I z = p^{II}$$
$$xdx^I + ydy^I + zdz^I = dV^I,$$

& qu'on en tire les valeurs de x, y & z, il eſt facile de voir qu'on aura pour x, y & z les mêmes expreſſions que l'on a trouvées plus haut pour dx, dy & dz, en y changeant ſeulement rdr en r^2, dV en p^{II} & $v^{II} dt^2$ en dV^I; donc faiſant les mêmes opérations & les mêmes ſubſtitutions que ci-deſſus, on aura cette autre équation

$$\delta^2 (x^2 + y^2 + z^2) = r^4 (r^{I2} u^{I2} dt^2 - (r^I dr^I)^2)$$
$$+ p^{II2} (r^2 u^{I2} dt^2 - dV^{I2}) + dV^{I2} (r^2 r^{I2} - p^{II2})$$
$$+ 2 r^2 p^{II} (r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I2} dt^2)$$
$$+ 2 r^2 dV^I (p^{II} r^I dr^I - r^{I2} dV^I)$$
$$2 p^{II} dV^I (p^{II} dV^I - r^2 r^I dr^I).$$

Or on a $dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2 dt^2$,
& $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; donc on aura les deux équations ſui-ſuivantes,

$$\delta^2 u^2 dt^2 = (rdr)^2 (r^{I2} u^{I2} dt^2 - r^{I2} dr^{I2})$$
$$+ dV^2 (r^2 u^{I2} dt^2 - dV^{I2})$$
$$+ (v dt^2)^2 (r^2 r^{I2} - p^{II2})$$

$$+\ 2rdrdV(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+\ 2rdrv^{II}dt^{2}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})$$
$$+\ 2dVv^{II}dt^{2}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I}),$$

$$\delta^{2}r^{2} = r^{4}(r^{I2}u^{I2}dt^{2} - r^{I2}dr^{I2})$$
$$+\ p^{II2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - dV^{I2})$$
$$+\ dV^{I}(r^{2}r^{I2} - p^{II2})$$
$$+\ 2r^{2}p^{II}(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+\ 2r^{2}dV^{I}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I2}dV^{I})$$
$$+\ 2p^{II}dV^{I}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I}).$$

D'où, chassant δ^{2}, on aura une équation entre les seules quantités connues r^{2}, r^{I2}, &c.

X.

Si on tire de la dernière équation la valeur de δ^{2}, on aura, en réduisant & effaçant ce qui se détruit

$$\delta^{2} = r^{I2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - r^{2}dr^{I2} - dV^{I2})$$
$$+\ 2p^{II}r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II2}u^{I2}dt^{2}.$$

Et cette valeur de δ^{2} étant substituée dans l'autre équation, on aura :

$$r^{II}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - r^{2}dr^{I2} - dV^{I2})u^{2}dt^{2}$$
$$+\ (2p^{II}r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})u^{2}dt^{2}$$
$$= (rdr)^{2}(r^{I2}u^{I2}dt^{2} - r^{I2}dr^{I2})$$
$$+\ dV^{2}(r^{2}u^{I2}dt^{2} - dV^{I2})$$
$$+\ (v^{II}dt^{2})^{2}(r^{2}r^{I2} - p^{II2})$$
$$+\ 2rdrdV(r^{I}dr^{I}dV^{I} - p^{II}u^{I2}dt^{2})$$
$$+\ 2rdrv^{II}dt^{2}(p^{II}r^{I}dr^{I} - r^{I}dV^{I})$$
$$+\ 2dVv^{II}dt^{2}(p^{II}dV^{I} - r^{2}r^{I}dr^{I});$$

ou bien, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned}&(r^2r^{I2}-p^{II2})(u^2u^{I2}-v^{II2})\,dt^4\\&+(rdr\,.\,r^Id^I-dV\,dV^I)^2\\&-(r^2(r^Idr^I)^2-2p^{II}r^Idr^IdV^I+r^{I2}dV^{I2})u^2dt^2\\&-2(p^{II}(rdr.r^Idr^I+dVdV^I)-r^2r^IdV-r^{I2}rdrdV^I)v^{II}\times\\&\quad dt^2=0.\end{aligned}$$

Or $dV=\frac{dp^{II}+d\rho}{2}$, & $dV^I=\frac{dp^{II}-d\rho}{2}$ (art. 5),

de plus on a, par les formules du même article,

$$r^2=p^I+p^I+p^{II},\ r^{I2}=p+p^{II},\ r^{II2}=p+p^I,$$

& de même

$$u^2=v^I+v^{II},\ u^{I2}=v+v^{II},\ u^{II2}=v+v^I;$$

donc si on fait ces substitutions, & qu'on suppose pour plus de simplicité

$$\begin{aligned}M&=p\left(\frac{2rdr}{dt}\right)^2+p^I\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2+p^{II}\left(\frac{dp^I}{dt}\right)^2\\&\quad-2\left(p^{II}\frac{dp^I}{dt}-p^I\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M^I&=p^I\left(\frac{2r^Idr^I}{dt}\right)^2+p\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2+p^{II}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\\&\quad+2\left(p^{II}\frac{dp}{dt}-p\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^I\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M^{II}&=p^{II}\left(\frac{2r^{II}dr^{II}}{dt}\right)^2+p^I\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+p\left(\frac{dp^I}{dt}\right)^2\\&\quad+2\left(p\frac{dp^I}{dt}-p^I\frac{dp}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt}+r^{II2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,\end{aligned}$$

l'équation suivante deviendra, après avoir été multipliée par $\frac{16}{dt^4}$,

$$16(pp^{\text{I}}+pp^{\text{II}}+p^{\text{I}}p^{\text{II}})(vv^{\text{I}}+vv^{\text{II}}+v^{\text{I}}v^{\text{II}})$$
$$+4(\Sigma v+\Sigma^{\text{I}}v^{\text{I}}+\Sigma^{\text{II}}v^{\text{II}})$$
$$+\left(\frac{dpdp^{\text{I}}+dpdp^{\text{II}}+dp^{\text{I}}dp^{\text{II}}+d\rho^2}{dt^2}\right)^2=0\ldots(N).$$

Il faut donc que cette équation ait lieu en même-tems que les trois équations (K) de l'art. 5 ; de forte que, comme elle ne contient d'ailleurs que les mêmes variables que les équations (K), & qu'elle eft d'un ordre moins élevé d'une unité que celle-ci, on pourra la regarder comme une intégrale de ces mêmes équations (K), mais intègrale particulière à caufe qu'elle ne renferme aucune nouvelle conftante ; ainfi, fi on intègre les équations (K) en y ajoutant les conftantes néceffaires, ces conftantes devront être telles qu'elles fatisfaffent à l'équation (N). De forte que, fi on ne veut pas fe fervir de cette dernière équation à la place de l'une des équations (K), il faudra néanmoins y avoir égard dans la détermination des conftantes ; mais pour cela il fuffira d'y fuppofer partout $t=0$.

Au refte, nous ferons toujours ufage de cette équation pour déterminer la conftante qui doit entrer dans la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ réfultante de l'intègration de l'équation (H) de l'art. 5.

XI.

Reprenons maintenant les équations (D) de l'art. 2, & faisant pour abreger

$$\lambda = y\,dx - x\,dy,\ \lambda^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}},\quad \lambda^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{II}}dx^{\mathrm{II}} - x^{\mathrm{II}}dy^{\mathrm{II}}$$

$$\mu = z\,dx - x\,dz,\ \mu^{\mathrm{I}} = z^{\mathrm{I}}dx^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}};\quad \mu^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{II}}dx^{\mathrm{II}} - x^{\mathrm{II}}dz^{\mathrm{II}}$$

$$\nu = z\,dy - y\,dz,\ \nu^{\mathrm{I}} = z^{\mathrm{I}}dy^{\mathrm{I}} - y^{\mathrm{I}}dz^{\mathrm{I}},\quad \nu^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{II}}dy^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{II}}dz^{\mathrm{II}},$$

on aura, après avoir multiplié par dt,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{C} + \dfrac{\lambda^{\mathrm{I}}}{B} + \dfrac{\lambda^{\mathrm{II}}}{A} = a\,dt \\[2ex] \dfrac{\mu}{C} + \dfrac{\mu^{\mathrm{I}}}{B} + \dfrac{\mu^{\mathrm{II}}}{A} = b\,dt \\[2ex] \dfrac{\nu}{C} + \dfrac{\nu^{\mathrm{I}}}{B} + \dfrac{\nu^{\mathrm{II}}}{A} = c\,dt \end{array}\right\} \ldots (O)$$

Or je trouve, comme plus haut,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 = r^2u^2dt^2 - (r\,dr)^2,$$

& par analogie

$$\lambda^{\mathrm{I}2} + \mu^{\mathrm{I}2} + \nu^{\mathrm{I}2} = r^{\mathrm{I}2}u^{\mathrm{I}2}dt^2 - (r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}})^2;$$

$$\lambda^{\mathrm{II}2} + \mu^{\mathrm{II}2} + \nu^{\mathrm{II}2} = r^{\mathrm{II}2}u^{\mathrm{II}2}dt^2 - (r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}})^2;$$

je trouve de même

$$\lambda\lambda^{\mathrm{I}}+\mu\mu^{\mathrm{I}}+\nu\nu^{\mathrm{I}}=(xx^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{I}}+zz^{\mathrm{I}})(dxdx^{\mathrm{I}}+dydy^{\mathrm{I}}+dzdz^{\mathrm{I}})$$
$$-(x^{\mathrm{I}}dx+y^{\mathrm{I}}dy+z^{\mathrm{I}}dz)(xdx^{\mathrm{I}}+ydy^{\mathrm{I}}+zdz^{\mathrm{I}})$$
$$=p^{\mathrm{II}}v^{\mathrm{II}}dt^2-dVdV^{\mathrm{I}}=p^{\mathrm{II}}v^{\mathrm{II}}dt^2-\left(\frac{dp^{\mathrm{II}}}{2}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2}\right)^2,$$

& par analogie

$$\lambda\lambda^{\mathrm{II}}+\mu\mu^{\mathrm{II}}+\nu\nu^{\mathrm{II}}=p^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{I}}dt^2-\left(\frac{dp^{\mathrm{I}}}{2}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2}\right)^2,$$

$$\lambda^{\mathrm{I}}\lambda^{\mathrm{II}}+\mu^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}}+\nu^{\mathrm{I}}\nu^{\mathrm{II}}=pvdt^2-\left(\frac{dp}{2}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2}\right)^2.$$

Donc si on fait pour plus de simplicité

$$\Pi=r^2u^2-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$$
$$\Pi^{\mathrm{I}}=r^{\mathrm{I}2}u^{\mathrm{I}2}-\left(\frac{r^{\mathrm{I}}dr^{\mathrm{I}}}{dt}\right)^2$$
$$\Pi^{\mathrm{II}}=r^{\mathrm{II}2}u^{\mathrm{II}2}-\left(\frac{r^{\mathrm{II}}dr^{\mathrm{II}}}{dt}\right)^2$$

&

$$\Psi=pv-\left(\frac{dp}{2dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2$$
$$\Psi^{\mathrm{I}}=p^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{I}}-\left(\frac{dp^{\mathrm{I}}}{2dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2$$
$$\Psi^{\mathrm{II}}=p^{\mathrm{II}}v^{\mathrm{II}}-\left(\frac{dp^{\mathrm{II}}}{2dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2,$$

enforte que l'on ait

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=\Pi dt^2,\ \lambda^{\mathrm{I}2}+\mu^{\mathrm{I}2}+\nu^{\mathrm{I}2}=\Pi^{\mathrm{I}}dt^2$$
$$\lambda^{\mathrm{II}2}+\mu^{\mathrm{II}2}+\nu^{\mathrm{II}2}=\Pi^{\mathrm{II}}dt^2,\ \lambda^{\mathrm{I}}\lambda^{\mathrm{II}}+\mu^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}}+\nu^{\mathrm{I}}\nu^{\mathrm{II}}=\Psi dt^2$$
$$\lambda\lambda^{\mathrm{II}}+\mu\mu^{\mathrm{II}}+\nu\nu^{\mathrm{II}}=\Psi^{\mathrm{I}}dt^2,\ \lambda\lambda^{\mathrm{I}}+\mu\mu^{\mathrm{I}}+\nu\nu^{\mathrm{I}}=\Psi^{\mathrm{II}}dt^2,$$

on aura, en carrant les trois équations (O) & les ajoutant enſemble,

$$\frac{\Pi}{C^2}+\frac{\Pi^{I}}{B^2}+\frac{\Pi^{II}}{A^2}+\frac{2\Psi}{AB}+\frac{2\Psi^{I}}{AC}+\frac{2\Psi^{II}}{BC}$$
$$=a^2+b^2+c^2\ldots(P).$$

Equation qui eſt auſſi comme l'on voit d'un ordre moins élevé d'une unité que les équations (K); & comme elle renferme la conſtante arbitraire $a^2+b^2+c^2$ qui ne ſe trouve point dans les équations (K), on peut la regarder comme une intégrale complette de ces mêmes équations.

X I I.

On pourroit croire que l'équation (E) que nous avons trouvée dans l'art. 2 pourroit ainſi, en y ſubſtituant les valeurs de u, u^{I} & u^{II}, donner une nouvelle intègrale; mais il eſt facile de voir qu'il n'en réſulteroit qu'une équation identique, car l'équation dont il s'agit, ſe réduit d'abord à

$$\frac{u^2}{C}+\frac{u^{I2}}{B}+\frac{u^{II2}}{A}-2(A+B+C)\left(\frac{1}{Cr}+\frac{1}{Br^{I}}+\frac{1}{Ar^{II}}\right)=f;$$

& mettant pour u, u^{I} & u^{II} leurs valeurs tirées des formules (J), on aura, en rejettant ce qui ſe détruit

$$Q+Q^{I}+Q^{II}=-f$$

ce qui ne renferme aucune nouvelle condition, car les quantités Q, Q^{I}, Q^{II} ſont déja d'elles-mêmes telles que $dQ+dQ^{I}+dQ^{II}=0$ (art. 5).

Au reſte, ſi on combine l'équation $Q+Q^{I}+Q^{II}=-f$ avec les équations (N) & (P) après y avoir ſubſtitué les valeurs de u, u^{I} & u^{II}, on pourra par le moyen de ces trois équations, déterminer les trois quantités Q, Q^{I} & Q^{II}, lesquelles ne renfermeront par conséquent que les variables finies r, r^{I}, r^{II} & leurs différentielles première dr, dr^{I}, dr^{II} avec la quantité $\frac{d\rho}{dt}$; ainsi substituant ces valeurs dans les équations (K), on aura trois équations du second ordre entre les variables r, r^{I} & r^{II}, dans lesquelles il n'y aura plus qu'à substituer la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$. Donc, si à l'aide d'une de ces équations on élimine la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ des deux autres, on aura d'abord deux équations purement du second ordre entre les variables r, r & r^{II}, t; ensuite si on différentie la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, & qu'on mette la valeur de $\frac{d\rho^2}{dt^2}$ dans l'équation (H), on aura une troisième équation entre les mêmes variables, qui ne sera que du troisième ordre. De sorte que l'on aura, par ce moyen, pour la détermination des variables r, r^{I}, & r^{II} deux équations différentielles du second ordre & une troisième; & ces équations suffiront, comme on le verra dans un moment pour la solution complette du Problème des trois Corps.

Nous croyons cependant qu'il est encore plus simple & plus commode pour le calcul, de substituer dans les équations (K) les valeurs de Q, Q^{I} & Q^{II} tirées des équations (J); car quoique les équations résultantes puissent monter

à

à des ordres plus élevés que le fecond, elles auront toujours ce grand avantage que les variables s'y trouveront peu mêlées entr'elles, & que l'analogie qui y regne facilitera beaucoup leur réfolution.

XIII.

Des dix équations de l'art. 8 il n'en refte donc plus que neuf, & des trois équations (D) ou (O) de l'art. 11 il n'en refte plus que deux; de forte qu'on n'aura en tout que onze équations pour la détermination des fix variables $x, y, z, x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}}$ & de leurs différentielles dx, dy, &c. d'où l'on voit qu'il eft impoffible de déterminer ces variables directement & par les feules opérations de l'algèbre; mais on pourra en venir à bout au moyen d'une intégration, comme on va le voir.

Je fuppofe que l'on veuille connoître les valeurs de x, y, z on aura d'abord l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \ldots \quad (Q).$$

Enfuite, multipliant les trois équations (O) de l'art. 11 refpectivement par λ, μ, ν, & les ajoutant enfemble, on aura

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{C} + \frac{\lambda\lambda^{\text{I}} + \mu\mu^{\text{I}} + \nu\nu^{\text{I}}}{B} + \frac{\lambda\lambda^{\text{II}} + \mu\mu^{\text{II}} + \nu\nu^{\text{II}}}{A}$$
$$= (a\lambda + b\mu + c\nu)dt; \quad -$$

ou bien en faifant les fubftitutions du même article

$$\left(\frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^{\text{I}}}{A} + \frac{\Psi^{\text{II}}}{B}\right)dt = a(ydx - xdy)$$
$$+ b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) \quad \ldots \quad (R).$$

Enfin, multipliant les mêmes équations (O) respectivement par z, $-y$, $-x$, & les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{\lambda z - \mu y + \nu x}{C} + \frac{\lambda^{\mathrm{I}} z - \mu^{\mathrm{I}} y + \nu^{\mathrm{I}} x}{B} + \frac{\lambda^{\mathrm{II}} z - \mu^{\mathrm{II}} y + \nu^{\mathrm{II}} x}{A}$$
$$= (az - by + cx)dt.$$

Or il est aisé de voir que l'on a $\lambda z - \mu y + \nu x = 0$, & que $-\lambda^{\mathrm{I}} z + \mu^{\mathrm{I}} y - \nu^{\mathrm{I}} x$ est la même quantité que nous avons désignée plus haut par δ (art. 9), donc puisqu'on a déja trouvé (art. 10)

$$\delta^2 = (r^2 r^{\mathrm{I}2} - p^{\mathrm{II}2}) u^{\mathrm{I}2} dt^2 - r^2 r^{\mathrm{I}2} dr^{\mathrm{I}2}$$
$$+ 2 p^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{I}} dr^{\mathrm{I}} dV^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{I}2} dV^{\mathrm{I}2},$$

on aura, en faisant les substitutions du même art. 10,

$$(\lambda^{\mathrm{I}} z - \mu^{\mathrm{I}} y + \nu^{\mathrm{I}} x)^2 = \left((pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}}) u^{\mathrm{I}2} - \frac{\Sigma^{\mathrm{I}}}{4}\right) dt^2$$

& par analogie

$$(\lambda^{\mathrm{II}} z - \mu^{\mathrm{II}} y + \nu^{\mathrm{II}} x)^2 = \left((pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}}) u^{\mathrm{II}2} - \frac{\Sigma^{\mathrm{II}}}{4}\right) dt^2$$

De sorte que l'équation ci-dessus deviendra

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(4(pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}}) u^{\mathrm{I}2} - \Sigma^{\mathrm{I}})}}{B} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(4(pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}}) u^{\mathrm{II}2} - \Sigma^{\mathrm{II}})}}{A}$$
$$= az - by + cx \quad \ldots\ldots \quad (S).$$

Ainsi on aura trois équations (Q), (R) & (S) à l'aide desquelles on pourra déterminer facilement les valeurs de x, y, z, dès qu'on connoîtra celles de r, r^{I}, & r^{II}.

On peut trouver de semblables formules pour la détermination de x^{I}, y^{I}, z^{I}; & même sans faire un nouveau calcul, il suffira de changer dans les précédentes B en C, & C en B, d'accentuer les lettres qui n'ont point d'accent, & d'effacer l'accent de celles qui en ont un, sans toucher à celles qui ont deux accents. Il faut seulement observer que la quantité $d\rho$ ne change point de valeur, mais seulement de signe lorsqu'on change entr'elles les masses A, B, C & les lettres accentuées, ce qui se voit clairement par l'équation (H) de l'art. 5.

XIV.

Supposons pour abréger

$$T = \frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^{I}}{A} + \frac{\Psi^{II}}{B},$$

$$Z = \frac{\sqrt{(4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{I2} - \Sigma^{I})}}{2B}$$

$$+ \frac{\sqrt{(4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{II2} - \Sigma^{II})}}{2A},$$

& l'on aura ces trois équations:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$az - by + cx = Z$$

$$a(ydx - xdy) + b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) = Tdt.$$

Comme les constantes a, b, c sont arbitraires (art. 2), & ne dépendent que de la position du plan de projection des orbites des corps B & C autour du corps A, il est facile de voir qu'on peut prendre ce plan de manière que l'on ait $b = 0$ & $c = 0$; car pour cela il suffira qu'on ait $b = 0$ & $c = 0$ au commencement du mouvement, c'est-à-dire lorsque $t = 0$.

Supposant donc $b = 0$ & $c = 0$, on aura $az = Z$, & $a(ydx - xdy) = Tdt$; donc $z = \frac{Z}{a}$, & à cause de $x^2 + z^2 + z^2 = r^2$, on aura $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{Z^2}{a^2}$;

donc $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2}$;

de sorte qu'en faisant $d\,\varphi = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2}$,

on aura $\frac{y}{z} = tang.\,\varphi$, & de-là

$$z = \frac{Z}{a}$$

$$y = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)}\,sin.\,\varphi.$$

$$x = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)}\,cos.\,\varphi.$$

XV.

Mais si on ne veut pas s'astreindre à la supposition de b & $c = 0$, ce qui oblige de prendre le plan de projection d'une manière déterminée : voici comment on pourra déterminer les quantités a, y & z avec toute la généralité possible.

Soit

$$lz - my + nx = X$$

$$\lambda z - \mu y + \nu x = Y$$

l, m, n, λ, μ, ν étant des coefficiens indéterminés; & X, Y deux nouvelles variables; on aura

$$YdX - XdY = (m\nu - n\mu)(ydx - xdy)$$
$$+ (n\lambda - l\nu)(zdx - xdz) + (l\mu - m\lambda)(zdy - ydz),$$

donc faisant

$$m\nu - n\mu = ka$$
$$n\lambda - l\nu = kb$$
$$l\mu - m\lambda = kc,$$

on aura l'équation (art. 14.)

$$YdX - XdY = kTdt.$$

Supposons maintenant que l'on ait $f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = x^2 + y^2 + z^2$, substituant les valeurs de X, Y & Z en x, y & z, & comparant ensuite les termes qui contiennent les mêmes puissances de x, y & z, on aura ces six équations.

$$f(l^2 + \lambda^2) + ga^2 = 1$$
$$f(m^2 + \mu^2) + gb^2 = 1$$
$$f(n^2 + \nu^2) + gc^2 = 1$$
$$f(lm + \lambda\mu) + gab = 0$$
$$f(ln + \lambda\nu) + gac = 0$$
$$f(mn + \mu\nu) + gbc = 0;$$

lesquelles étant combinées avec les trois précédentes serviront à déterminer les neuf inconnues l, m, n, λ, μ, ν, f, g, k.

XVI.

Cela fait on aura donc, à cause de $x^2 + y^2 + z^2$, l'équation

$$f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = r^2$$

d'où

$$f(X^2 + Y^2) = r^2 - gZ^2;$$

donc

$$\frac{YdX - XdY}{X^2 + Y^2} = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}.$$

Donc si on fait

$$d\varphi = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}$$

on aura

$$Y = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \text{ fin. } \varphi$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \text{ cof. } \varphi.$$

Ainsi on connoîtra les trois quantités X, Y & Z, à l'aide desquelles on pourra déterminer x, y & z.

Pour cela on prendra les trois équations

$$lz - my + nx = X$$

$$\lambda z - \mu y + \nu x = Y$$

$$az - by + cx = Z$$

& on les ajoutera ensemble après les avoir multipliées respectivement 1°. par fl, $f\lambda$, ga, 2°. par fm, $f\mu$, gb, 3°. par fn, $f\nu$, gc; on aura sur le champ, en vertu des équations de l'art. précédent,

$$z = f(lX + \lambda Y) + gaZ$$
$$y = -f(mX + \mu Y) - gbZ$$
$$x = f(nX + \nu Y) + gcZ.$$

XVII.

Maintenant, comme on a supposé $x^2 + y^2 + z^2 = f(X^2 + Y^2) + gZ^2$, on aura, en substituant les valeurs de x, y, z qu'on vient de trouver, & comparant les termes homogènes,

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$
$$f(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$$
$$g(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$
$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$
$$la + mb + nc = 0$$
$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0,$$

& ces équations devront être identiques avec les six qu'on a trouvées ci-dessus (art. 15), & pourront par conséquent être employées à la place de celles-là pour la détermination des inconnues l, m, &c.

Or, comme il faut satisfaire en même-tems à ces trois autres équations $m\nu - n\mu = ka$, $\nu l - l\nu = kb$, $l\mu - m\lambda = kc$ (art. 15) je remarque que si on ajoute ensemble ces dernières équations après les avoir multipliées respectivement 1°. par l, m, n, 2°. par λ, μ, ν; on aura ces deux ci:

$$k(la+mb+nc)=0$$

$$k(\lambda a+\mu b+\nu c)=0,$$

lesquelles s'accordent avec la cinquième & la sixième des précédentes; ainsi on peut déja réduire à une seule les trois équations dont il s'agit, & on y satisfera par la détermination de l'inconnue k. Or, si on ajoute ensemble les carrés de ces équations, on aura

$$k^2(a^2+b^2+c^2)=(m\nu-n\mu)^2+(n\lambda-l\nu)^2+(l\mu-m\lambda)^2$$

$$=(l^2+m^2+n^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(l\lambda+m\mu+n\nu)^2$$

$$=\text{(en vertu des six équations ci-dessus) } \frac{1}{f^2};$$

de sorte qu'on aura

$$k=\frac{1}{f\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Donc il n'y aura plus qu'à satisfaire aux six équations trouvées plus haut, c'est ce qu'on pourra exécuter de plusieurs manières à cause qu'il y a plus d'indéterminées que d'équations.

On aura d'abord

$$g=\frac{1}{a^2+b^2+c^2},$$

ensuite, si on chasse λ des deux équations $l\lambda+m\mu+n\nu=0$, & $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, on aura $(am-bl)\mu+(an-cb)\nu=0$, & chassant μ, on aura de même $(bl-am)\lambda+(bn-cm)\nu=0$, d'où je conclus qu'on aura

$\lambda=$

$$\lambda = (cm - bn)\delta$$

$$\mu = (an - cl)\delta$$

$$\nu = (bl - am)\delta$$

δ étant une inconnue qu'on déterminera par l'équation $f(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = 1$, laquelle donnera

$$f\delta^2((cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2) = 1\,;$$

mais on a $(cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2$ $= (a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (al + bm + cn)^2$ $= \frac{1}{fg}$, à cause de $a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{g}$, $l^2+m^2+n^2 = \frac{1}{f}$, & $al + bm + cn = 0$ par les équations ci-dessus ; donc on aura $\frac{\delta^2}{g} = 1$, & $\delta = \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2+c)}}$; & il ne restera qu'à satisfaire à ces deux équations

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$

$$la + mb + nc = 0.$$

Supposons pour plus de simplicité

$$a = h \cos.\, \alpha$$

$$b = h \sin.\, \alpha \cos.\, \varepsilon$$

$$c = h \sin.\, \alpha \sin.\, \varepsilon$$

l'on aura $\delta = \sqrt{g} = \frac{1}{h}$, de sorte que $h = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$; & la seconde des deux équations précédentes deviendra $l \cos.\, \alpha + \sin.\, \alpha (m \cos.\, \varepsilon + n \sin.\, \varepsilon) = 0$; soit donc $l = \sin.\alpha \sin.\eta$, & l'on aura, en faisant pour plus de simplicité $f = 1$,

$$fin.\,\alpha^2.\,fin.\,\eta^2+m^2+n^2=1$$

$$cof.\,\alpha\,.\,fin.\,\eta+m\,cof.\,\varepsilon+n\,fin.\,\varepsilon=0.$$

Donc $m\,cof.\,\varepsilon+n\,fin.\,\varepsilon=-cof.\,\alpha\,fin.\,\eta$; donc $m^2+n^2-(m\,cof.\,\varepsilon+n\,fin.\,\varepsilon)^2=(m\,fin.\,\varepsilon-n\,cof.\,\varepsilon)^2=1-fin.\,\alpha^2.\,fin.\,\eta^2-cof.\,\alpha^2.\,fin.\,\eta^2=1-fin.\,\eta^2=cof.\,\eta^2$; & tirant la racine carrée, $m\,fin.\,\varepsilon-n\,cof.\,\varepsilon=cof.\,\eta$;
de forte qu'on aura $m=fin.\,\varepsilon\,cof.\,\eta-cof.\,\alpha\,.\,cof.\,\varepsilon\,fin.\,\eta$,

$$n=-cof.\,\varepsilon\,.\,cof.\,\eta-cof.\,\alpha\,.\,fin.\,\varepsilon\,.\,fin.\,\eta;$$

& de-là on trouvera les valeurs de λ, μ, ν par les formules précédentes.

On aura de cette manière

$$l=fin.\,\alpha\,fin.\,\eta$$

$$m=fin.\,\varepsilon\,cof.\,\eta-cof.\,\alpha\,cof.\,\varepsilon\,fin.\,\eta$$

$$n=-cof.\,\varepsilon\,cof.\,\eta-cof.\,\alpha\,fin.\,\varepsilon\,fin.\,\eta$$

$$\lambda=fin.\,\alpha\,cof.\,\eta$$

$$\mu=-fin.\,\varepsilon\,fin.\,\eta-cof.\,\alpha\,cof.\,\varepsilon\,cof.\,\eta$$

$$\nu=cof.\,\varepsilon\,fin.\,\eta-cof.\,\alpha\,fin.\,\varepsilon\,cof.\,\eta.$$

Si on fubftitue ces valeurs dans les expreffions de x, y & z de l'art. 16, il eft facile de voir que les quantités X, Y & $\frac{Z}{h}$ ne font autre chofe que les coordonnées rectangles de la même courbe qui eft repréfentée par les coordonnées x, y, z, mais rapportée à un autre plan de projection, dont la pofition dépend des angles α, ε & η. En effet, fi on confidère les deux plans des coordonnées x, y, & des coordonnées X, Y, l'angle α fera celui de l'inclinaison de ces deux plans, l'angle η sera celui que la ligne d'interjection de ces plans fait avec l'axe des abscisses x, & l'angle ε sera celui que l'axe des abscisses X comprend avec la même ligne d'interrection. Or, comme l'expression des coordonnées X, Y & $\frac{Z}{h}$ est plus simple que celle des coordonnées x, y, z, il est clair que le plan de projection auquel appartiennent les coordonnées X, Y & $\frac{Z}{h}$ est plus propre que tout autre plan pour y rapporter les mouvemens des trois Corps, ou plutôt le mouvement relatif de deux de ces Corps autour du troisième.

On voit donc que la position du plan de projection n'est point du tout indifférente, & que parmi tous les plans possibles qu'on peut faire passer par le corps A, il y en a un qui doit être choisi de préférence, parce que les mouvemens des corps B & C autour de A sont par rapport à ce plan les plus simples qu'il est possible.

Cette remarque, qui me paroît de quelque importance dans le Problême des trois Corps, n'avoit point encore été faite, parce que personne, que je sache, n'avoit jusqu'à présent envisagé ce Problême d'une manière aussi générale que nous venons de le faire.

XVIII.

Nous prendrons donc, à la place des coordonnées x, y, z, celles-ci X, Y, $\frac{Z}{h}$, pour représenter le mouvement du corps B autour de A; & comme l'on a, à caufe de $h = \frac{1}{\sqrt{g}}$, $X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{h}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; & $Y = \sqrt{\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)} \, fin.\, \varphi$, $X = \sqrt{\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)} \, cof.\, \varphi$ (art. 15), il eft clair que φ fera l'angle décrit par le corps B autour de A dans le plan de projection, c'eft-à-dire la longitude du corps B dans ce même plan; & que $\frac{Z}{hr}$ fera le *finus* de la latitude. Ainfi on aura (art. 16) à caufe de $f = 1$, $k = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{1}{h}$,

Pour le corps B

Rayon recteur de l'orbite . . . . r

Longitude . . . . $\int \frac{T dt}{h\left(r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2\right)}$

Sinus de la latitude . . . $\frac{Z}{hr}$

Pour le corps C

Rayon recteur de l'orbite . . . . r^1.

Longitude . . . . $\int \frac{T^1 dt}{h\left(r^{12} - \left(\frac{Z^1}{h}\right)^2\right)}$

Sinus de la latitude . . . $\frac{Z^1}{hr^1}$.

Les valeurs de T & de Z font données par les formules de l'art. 14, & pour avoir celles de T^1 & Z^1, il n'y aura qu'à changer dans celles là l'accent o en ^{1} & ^{1} en o, & enfuite B en C & C en B.

Quant à la quantité h, c'eſt une conſtante arbitraire qui dépend du mouvement initial des corps ; mais il faudra la prendre telle qu'elle s'accorde avec l'équation (P) de l'art. 11 dans laquelle le ſecond membre eſt

$$= a^2 + b^2 + c^2 = h^2 ;$$

de ſorte qu'il n'y aura qu'à prendre pour h la racine carrée de la valeur du premier membre de cette équation lorſqu'on y fait $t = 0$.

XIX.

Les formules, que nous venons de trouver, ſervent à déterminer les orbites des B & C autour du corps A par rapport à un plan fixe paſſant par ce même corps ; mais il faut voir encore comment on peut déterminer par leur moyen, la poſition mutuelle de ces orbites. Pour cela, nous commencerons par remarquer que ſi on conſidère le triangle formé à chaque inſtant par les trois corps A, B, C, & dont les trois côtés ſont r, r^{I} & r^{II}, & qu'on nomme ζ, ζ^{I}, ζ^{II}, les trois angles oppoſés à ces côtés, on aura, comme on le ſçait, par la Géométrie élémentaire,

$$cof.\,\zeta = \frac{r^{\text{I}2} + r^{\text{II}2} - r^2}{2r^{\text{I}}r^{\text{II}}} = \frac{p}{r^{\text{I}}r^{\text{II}}}$$

$$cof.\,\zeta^{\text{I}} = \frac{r^2 + r^{\text{II}2} - r^{\text{I}2}}{2rr^{\text{II}}} = \frac{p^{\text{I}}}{rr^{\text{II}}}$$

$$cof.\,\zeta^{\text{II}} = \frac{r^2 + r^{\text{I}2} - r^{\text{II}2}}{2rr^{\text{I}}} = \frac{p}{rr^{\text{I}}}.$$

Or on a (art. 8) $p^{\text{II}} = xx^{\text{I}} + yy^{\text{I}} + zz^{\text{I}}$

donc $cof.\,\zeta^{\text{II}} = \frac{xx^{\text{I}} + yy^{\text{I}} + zz^{\text{I}}}{rr^{\text{I}}}$, ζ^{II} étant l'angle formé au centre du corps A par les rayons recteurs r, & r^{I} des deux autres corps B & C.

Qu'on imagine maintenant deux plans passants, l'un par le corps A, & par les deux points infiniment proches, dans lesquels s'est trouvé le corps B au commencement & à la fin du temps infiniment petit dt, & l'autre par le même corps A, & par les deux points infiniment proches, où le corps C étoit au commencement & à la fin du même temps dt; ces deux plans seront ceux des orbites des corps B & C autour de A, & ils se couperont nécessairement dans une ligne droite passant par le corps A, laquelle sera donc la ligne des nœuds des deux orbites.

Soit ω l'inclinaison de ces deux plans l'un à l'autre, ξ la distance du corps B à l'intersection des deux plans ou à la ligne des nœuds, c'est-à-dire l'angle compris entre le rayon r & la ligne des nœuds, & ξ^{I} la distance du corps C à la même ligne des nœuds, c'est-à-dire l'angle formé par le rayon r^{I} & la ligne des nœuds; si on imagine une sphère décrite autour de A comme centre, & que par les points, où les deux rayons r, r^{I} & la ligne des nœuds, traversent la surface de cette sphère, dont nous supposerons le rayon égal à 1, où mène des arcs de grands cercles, on aura un triangle sphérique, dont les trois côtés seront ξ, ξ^{I} & ζ^{II}, & dont l'angle opposé au côté ζ^{II} sera ω; de sorte qu'on aura par les formules connues

$$cos.\,\zeta^{II} = cos.\,\xi\, cos.\,\xi^{I} + sin.\,\xi\, sin.\,\xi^{I}\, cos.\,\omega,$$

donc $cos.\,\xi\, cos.\,\xi^{I} + sin.\,\xi\, sin.\,\xi^{I}\, cos.\,\omega = \frac{xx^{I}+yy^{I}+zz^{I}}{rr^{I}}$.

Supposons maintenant que pendant le temps dt le corps B décrive autour de A l'angle infiniment petit $d\theta$, & que le corps C décrive l'angle $d\theta^{I}$, il est clair que, tandis que les lignes x, y, z, r, croissent de leurs différentiels dx, dy, dz, dr, l'angle ξ croîtra de $d\theta$, & l'angle ω demeurera le même, parce qu'on suppose que la position des plans des orbites des corps B & C est la même au commencement & à la fin de l'inſtant dt; de même en faiſant croître les lignes x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I} de leurs différentiels dx^{I}, dy^{I}, dz^{I}, dr^{I}, il n'y aura que l'angle ξ^{I} qui variera en croiſſant de $d\theta^{\mathrm{I}}$. Or, comme l'équation précédente doit être identique & indépendante de la loi des mouvemens des corps B & C, il eſt clair qu'on pourra y faire varier les quantités x, y, z, r & ξ qui appartiennent au corps B indépendamment des quantités x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I} & Z^{I} qui appartiennent au corps C, & *vice-verſa* celles-ci indépendamment de celles-là; d'où il ſuit qu'en faiſant varier d'abord x, y, z, r & ξ, enſuite x^{I}, y^{I}, z^{I}, r^{I} & ξ^{I}; enfin les unes & les autres en même-temps, on tirera de l'équation dont il s'agit, les trois ſuivantes

$$(-\mathit{ſin.}\,\xi\,\mathit{coſ.}\,\xi^{\mathrm{I}} + \mathit{coſ.}\,\xi\,\mathit{ſin.}\,\xi\,\mathit{coſ.}\,\omega)d\theta =$$

$$-\frac{(xx^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{I}}+zz^{\mathrm{I}})dr}{r^2 r^{\mathrm{I}}} + \frac{x^{\mathrm{I}}dx+y^{\mathrm{I}}dy+z^{\mathrm{I}}dz}{rr^{\mathrm{I}}},$$

$$(-\mathit{coſ.}\,\xi\,\mathit{ſin.}\,\xi^{\mathrm{I}} + \mathit{ſin.}\,\xi\,\mathit{coſ.}\,\xi^{\mathrm{I}}\,\mathit{coſ.}\,\omega)d\theta^{\mathrm{I}} =$$

$$-\frac{(xx^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{I}}+zz^{\mathrm{I}})dr^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}2}} + \frac{xdx^{\mathrm{I}}+ydy^{\mathrm{I}}+zdz^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}}},$$

$$(\mathit{ſin.}\,\xi\,\mathit{ſin.}\,\xi^{\mathrm{I}} + \mathit{coſ.}\,\xi\,\mathit{coſ.}\,\xi^{\mathrm{I}}\,\mathit{coſ.}\,\omega)d\theta d\theta^{\mathrm{I}} =$$

$$\frac{(xx^{\mathrm{I}}+yy^{\mathrm{I}}+zz^{\mathrm{I}})drdr^{\mathrm{I}}}{r^2 r^{\mathrm{I}2}} - \frac{(x^{\mathrm{I}}dx+y^{\mathrm{I}}dy+z^{\mathrm{I}}dz)dr^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}2}}.$$

$$-\frac{(xdx^{\mathrm{I}}+ydy^{\mathrm{I}}+zdz^{\mathrm{I}})dr}{r^2 r^{\mathrm{I}}} + \frac{dxdx^{\mathrm{I}}+dydy^{\mathrm{I}}+dzdz^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}}}.$$

Donc ſi on fait dans toutes ces équations les ſubſtitutions de l'art. 8, on aura ces quatre-ci;

$$\cos.\xi \cos.\xi^{\mathrm{I}} + \sin.\xi \sin.\xi^{\mathrm{I}} \cos.\omega = \frac{p^{\mathrm{II}}}{rr^{\mathrm{I}}}$$

$$-\sin.\xi \cos.\xi^{\mathrm{I}} + \cos.\xi \sin.\xi^{\mathrm{I}} \cos.\omega = -\frac{p^{\mathrm{II}}dr + rdV}{r^2 r^{\mathrm{I}} d\theta}$$

$$-\cos.\xi \sin.\xi^{\mathrm{I}} + \sin.\xi \cos.\xi^{\mathrm{I}} \cos.\omega = -\frac{p^{\mathrm{II}}dr + r^{\mathrm{I}}dV^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}2}d\theta^{\mathrm{I}}}$$

$$\sin.\xi \sin.\xi^{\mathrm{I}} + \cos.\xi \cos.\xi^{\mathrm{I}} \cos.\omega$$

$$= \frac{p^{\mathrm{II}}drdr^{\mathrm{I}} - dVrdr^{\mathrm{I}} - dV^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{I}}dr + rr^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{II}}dt^2}{r^2 r^{\mathrm{I}2} d\theta d\theta^{\mathrm{I}}}.$$

Or, il eſt facile de concevoir que le carré du petit eſpace que parcourt le corps B dans le temps dt eſt exprimé par également par $dx^2 + dy^2 + dz^2$ & par $r^2d\theta^2 + dr^2$, de ſorte qu'on aura $rd\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2)}$ & par conſéquent (art. 8 & 11) $d\theta = \frac{\sqrt{(u^2dt^2 - dr^2)}}{r} = \frac{dt\sqrt{\Pi}}{r^2}$ & de même $d\theta^{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{(u^{\mathrm{I}2}dt^2 - dr^{\mathrm{I}2})}}{r^{\mathrm{I}}} = \frac{dt\sqrt{\Pi^{\mathrm{I}}}}{r^{\mathrm{I}2}}$.

Ainſi, les ſeconds membres des quatre équations précédentes ſeront tous donnés, dès qu'on connoîtra r, r^{I} & r^{II} en t (article cité); de ſorte qu'on aura quatre équations entre les trois inconnues ξ, ξ^{I} & ω par leſquelles on pourra non ſeulement déterminer ces trois inconnues, mais encore avoir une équation entre les quantités r, r^{I}, r^{II}, u, u^{I}, &c. & cette équation ſera la même que celle qu'on a déja trouvée plus haut (art. 10) par une voie bien différente.

XX.

X X.

Suppoſons, pour abréger, que les équations précédentes ſoient repréſentées ainſi :

$$\cos.\,\xi \cos.\,\xi^{\mathrm{I}} + \sin.\,\xi \sin.\,\xi^{\mathrm{I}} \cos.\,\omega = \lambda$$

$$\sin.\,\xi \cos.\,\xi^{\mathrm{I}} - \cos.\,\xi \sin.\,\xi^{\mathrm{I}} \cos.\,\omega = \mu$$

$$\cos.\,\xi \sin.\,\xi^{\mathrm{I}} - \sin.\,\xi \cos.\,\xi^{\mathrm{I}} \cos.\,\omega = \nu$$

$$\sin.\,\xi \sin.\,\xi^{\mathrm{I}} + \cos.\,\xi \cos.\,\xi^{\mathrm{I}} \cos.\,\omega = -\pi$$

en faiſant

$$\lambda = \frac{p^{\mathrm{II}}}{rr^{\mathrm{I}}},\ \mu = \frac{p^{\mathrm{II}}dr + rdV}{r^2 r^{\mathrm{I}} d\theta},\ \frac{p^{\mathrm{II}}dr + r^{\mathrm{I}}dV^{\mathrm{I}}}{rr^{\mathrm{I}2} d\theta^{\mathrm{I}}},$$

$$\pi = \frac{-p^{\mathrm{II}}drdr^{\mathrm{I}} + dVrdr^{\mathrm{I}} + dV^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{I}}dr - rr^{\mathrm{I}}\upsilon^{\mathrm{II}}dt^2}{r^2 r^{\mathrm{I}2} d\theta d\theta^{\mathrm{I}}}.$$

& il eſt facile de réduire ces quatre équations à ces deux-ci :

$$\cos.(\xi \mp \xi^{\mathrm{I}}) \times (1 \pm \cos.\,\omega) = \lambda \pm \pi,$$

$$\sin.(\xi \mp \xi^{\mathrm{I}}) \times (1 \pm \cos.\,\omega) = \lambda \pm \nu,$$

leſquelles, à cauſe de l'ambiguité des ſignes, équivalent réellement à quatre équations. Elevant ces deux équations au carré, & enſuite les ajoutant enſemble, on a

$$(1 \mp \cos.\,\omega)^2 = (\lambda \pm \pi)^2 + (\mu \pm \nu)^2$$

d'où, à cauſe de l'ambiguité des ſignes, on tire

$$-\cos.\,\omega = \lambda\pi + \mu\nu$$

$$1 + \cos.\,\omega^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2;$$

de ſorte qu'éliminant *coſ.* ω on aura

$$1 + (\lambda\pi + \mu\nu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2.$$

Si on ſubſtitue dans cette équation les valeurs de λ, μ, ν, π, comme auſſi celles de $d\theta$ & de $d\theta^I$, on aura une équation qui ſera la même que l'équation (N) de l'art 10; ce qui peut ſervir à confirmer la bonté de nos calculs.

L'équation $-\cos.\ \omega = \lambda\pi + \mu\nu$ donnera

$$\cos.\ \omega = \frac{p^{II}v^{II}dt^2 - dV\,dV^I}{r^2 r^{I2} d\theta\, d\theta^I} = \frac{\Psi^{II}}{\sqrt{(\Pi\Pi^I)}}$$

ce qui fera connoître l'inclinaiſon ω des deux orbites.

Connoiſſant ω, on connoîtra aiſément ξ & ξ^I; car en multipliant les deux équations

$$\cos.(\xi+\xi^I)\,(1 - \cos.\ \omega) = \lambda + \pi,$$
$$\cos.(\xi-\xi^I)\,(1 + \cos.\ \omega) = \lambda - \pi,$$

l'une par l'autre, on aura celle-ci:

$$\tfrac{1}{2}\,(\cos.\ 2\xi + \cos.\ 2\xi^I)\sin.\omega^2 = \lambda^2 - \pi^2;$$

& de même les deux autres équations

$$\sin.(\xi+\xi^I)(1-\cos.\omega) = \mu+\nu,\ \sin.(\xi-\xi^I)(1+\cos.\omega) = \mu-\nu;$$

étant multipliées enſemble donneront

$$-\tfrac{1}{2}\,(\cos.\ 2\xi - \cos.\ 2\xi^I)\sin.\ \omega^2 = \mu^2 - \nu^2$$

d'où l'on tire

$$\cos.\ 2\xi = \frac{\lambda^2 - \pi^2 - \mu^2 + \nu^2}{\sin.\ \omega^2}$$

$$\cos.\ 2\xi^I = \frac{\lambda^2 - \pi^2 + \mu^2 - \nu^2}{\sin.\ \omega^2},$$

ou bien en mettant à la place de π sa valeur $1 + cos.\ \omega^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2$ tirée de l'équation trouvée ci-dessus, on aura, à cause de $cos.\ \omega^2 = 1 - sin.\ \omega^2$,

$$cos.\ 2\,\xi = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \nu^2 - 1)}{sin.\ \omega^2}$$

$$cos.\ 2\,\xi^{\mathrm{I}} = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{sin.\ \omega\ 2}$$

d'où l'on tire

$$sin.\ \xi = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \nu_2)}}{sin.\ \omega}$$

$$sin.\ \xi^{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \mu^2)}}{sin.\ \omega},$$

c'est-à-dire, en substituant les valeurs de λ, μ, ν, & faisant attention que $r^2 d\theta^2 = u^2 dt^2 - dr^2$, & $r^{\mathrm{I}2} d\theta^{\mathrm{I}2} = u^{\mathrm{I}2} dt^2 - dr^{\mathrm{I}2}$,

$$sin.\xi = \frac{\sqrt{((r^2 r^{\mathrm{I}2} - p^{\mathrm{II}2}) u^{\mathrm{I}2} dt^2 - r^2 (r^{\mathrm{I}} dr^{\mathrm{I}})^2 + 2p^{\mathrm{II}} (r^{\mathrm{I}} dr^{\mathrm{I}}) dV^{\mathrm{I}} - r^{\mathrm{I}2} dV^{\mathrm{I}2})}}{r r^{\mathrm{I}2}\, sin.\ \omega\ d\theta^{\mathrm{I}}}$$

$$sin.\xi^{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{((r^2 r^{\mathrm{I}2} - p^{\mathrm{II}2}) u^2 dt^2 - r^{\mathrm{I}2} (r dr)^2 + 2p^{\mathrm{II}} (r dr) dV - r^2 dV^2)}}{r^{\mathrm{I}} r^2\, sin.\ \omega\ d\theta};$$

ou bien art. 13

$$sin.\ \xi = \frac{\sqrt{(4(pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} \nu^{\mathrm{II}}) u^{\mathrm{I}2} - \Sigma^{\mathrm{I}})}}{2r\sqrt{\Pi^{\mathrm{I}}}.\ sin.\ \omega}$$

$$sin.\ \xi^{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{(4(pp^{\mathrm{I}} + pp^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}}) u^2 - \Sigma)}}{2r^{\mathrm{I}}\sqrt{\Pi}.\ sin.\ \omega.}.$$

XXI.

Si on veut que les trois Corps se meuvent dans un même plan, on aura alors $\omega = 0$, & par conséquent $cos.\,\omega = 1$, & $sin.\,\omega = 0$; donc

$$\Sigma = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{2},$$

$$\Sigma^{I} = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{I2},$$

& par analogie

$$\Sigma^{II} = 4(pp^{I} + pp^{II} + p^{I}p^{II})u^{II2}.$$

De sorte que les quantités Z & Z^{I} (art. 14) seront nulles, & par conséquent les mouvemens des trois Corps s'exécuteront dans le même plan que nous avons pris pour le plan de projection (art. 18). Or, si on substitue les valeurs de u^{2}, u^{I2}, u^{II} tirées des équations précédentes dans l'équation (P) de l'art. 11, on aura une équation en r, r^{I}, r^{II} & $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr^{I}}{dt}$, $\frac{d\rho}{dt}$ par laquelle on pourra déterminer cette dernière quantité $\frac{d\rho}{dt}$; substituant ensuite la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ dans celles de Σ, Σ & Σ^{II}, on aura les valeurs de u^{2}, u^{I2}, & u^{II2} exprimées en r, r^{I}, r^{II} & $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr^{I}}{dt}$, $\frac{dr^{II}}{dt^{2}}$ seulement; ainsi mettant ces valeurs de u^{2}, u^{I2}, u^{II2} dans les équations (F) de l'art. 3, on aura enfin trois équations en r, r^{I}, r^{II} & t, lesquelles seront simplement différentielles du second ordre, au lieu que les équations générales (K) de l'art. 5 montent au quatrième ordre, lorsqu'on les délivre des signes d'intégration.

Au reste, je crois que dans le cas même dont il s'agit, ces dernières équations seront toujours préférables, parce qu'elles ont l'avantage singulier de ne renfermer aucun radical, ce qui n'auroit point lieu dans les équations où l'on employeroit les valeurs de u, u^{I}, u^{II} déterminées par les équations ci-dessus, valeurs qui renfermeroient nécessairement des radicaux carrés.

RÉCAPITULATION.

XXII.

Pour résumer ce qui vient d'être démontré dans ce Chapitre soient nommées.

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\} \text{les masses des trois Corps.}$$

$$\left.\begin{matrix} r \\ r^{I} \\ r^{II} \end{matrix}\right\} \text{les distances entre les Corps} \left\{\begin{matrix} A \,\&\, B \\ A \,\&\, C \\ B \,\&\, C \end{matrix}\right.$$

& supposant pour abréger

$$p = \frac{r^{I2} + r^{II2} - r^2}{2}, \quad q = \frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^{II3}}$$

$$p^{I} = \frac{r^2 + r^{II2} - r^{I2}}{2}, \quad q^{I} = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}}$$

$$p^{II} = \frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2}, \quad q^{II} = \frac{1}{r^{I3}} - \frac{1}{r^3} = q - q^{I}$$

on aura, en prenant l'élement du tems dt pour constant,

$$\frac{d^2p}{dt^2} + Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0 \quad \ldots \quad (H)$$

$$\left.\begin{array}{l} dQ = q^{I}dp^{I} - q^{II}dp^{II} - qd\rho \\ dQ^{I} = qdp + q^{II}dp^{II} + q^{I}d\rho \\ dQ^{II} = -qdp - q^{I}dp^{I} + q^{II}d\rho \end{array}\right\} \ldots (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II} + Q) = 0 \\ \frac{d^2.r^{I2}}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{I}} - B(pq + p^{II}q^{II} + Q^{I}) = 0 \\ \frac{d^2.r^{II2}}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{II}} - A(-pq - p^{I}q^{I} + Q^{II} = 0 \end{array}\right\} \ldots (M)$$

Ces équations serviront à déterminer les valeurs des diſtances r, r^{I}, r^{II} en t; après quoi on pourra trouver directement & ſans aucune intégration les valeurs de tous les autres élémens, d'où dépend la détermination des orbites des corps B & C autour du corps A.

En effet ſi l'on nomme

$$\left.\begin{array}{l} u \\ u^{I} \\ u^{II} \end{array}\right\} \text{la vîteſſe du corps} \left\{\begin{array}{l} B \\ C \\ C \end{array}\right. \text{autour de} \left\{\begin{array}{l} A \\ A \\ C \end{array}\right.$$

on aura d'abord

$$\left.\begin{array}{l} u^2 = \frac{2(A+B+C)}{r} + C\,Q \\ u^{I2} = \frac{2(A+B+C)}{r^{I}} + B\,Q^{I} \\ u^{II2} = \frac{2(A+B+C)}{r^{II}} + A\,Q^{II} \end{array}\right\} \ldots (I)$$

Si l'on nomme ensuite

φ l'angle parcouru par le corps B autour de A dans un plan supposé fixe & passant par A; c'est-à-dire, la longitude de B.

ψ l'angle de la latitude de B par rapport à ce même plan.

φ^{I} la longitude de C.

ψ^{I} sa latitude;

& qu'on fasse pour abréger

$$P = pp + pp^{II} + p^{I}p^{II} = r^2 r^{I2} - p^{II2} = 2r^2 r^{I2} + 2r^2 r^{II2} + 2r^{I2} r^{II2} - r^4 - r^{I4} - r^{II4} = (r + r^{I} + r^{II})(r + r^{I} - r^{II})(r - r^{I} + r^{II})(r - r^{I} - r^{II}),$$

$$\Sigma = p\left(\frac{d.r^2}{dt}\right)^2 + p^{I}\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2 + p^{II}\left(\frac{dp^{I}}{dt}\right)^2 - 2\left(p^{II}\frac{dp^{I}}{dt} - p^{I}\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma^{I} = p^{I}\left(\frac{d.r^{I2}}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp^{II}}{dt}\right)^2 + p^{II}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\left(p^{II}\frac{dp}{dt} - p\frac{dp^{II}}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r^{I2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma^{II} = p^{II}\left(\frac{d.r^{II2}}{dt}\right)^2 + p^{I}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{dp^{I}}{dt}\right)^2 + 2\left(p\frac{dp^{I}}{dt} - p^{I}\frac{dp}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} + r^{II2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2,$$

$$\Pi = r^2 u^2 - \left(\frac{d.r^2}{2dt}\right)^2,$$

$$\Pi^{\mathrm{I}} = r^{\mathrm{I}2}u^{\mathrm{I}2} - \left(\frac{d.r^{\mathrm{I}2}}{2dt}\right)^2$$

$$\Pi^{\mathrm{II}} = r^{\mathrm{II}2}u^{\mathrm{II}2} - \left(\frac{d.r^{\mathrm{II}2}}{2dt}\right)^2$$

$$\Psi = p\,v - \left(\frac{dp}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2$$

$$\Psi^{\mathrm{I}} = p^{\mathrm{I}}v^{\mathrm{I}} - \left(\frac{dp^{\mathrm{I}}}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2$$

$$\Psi^{\mathrm{II}} = p^{\mathrm{II}}v^{\mathrm{II}} - \left(\frac{dp^{\mathrm{II}}}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2dt}\right)^2,$$

en ſuppoſant

$$v = \frac{u^{\mathrm{I}2} + u^{\mathrm{II}2} - u^2}{2},$$

$$v^{\mathrm{I}} = \frac{u^2 + u^{\mathrm{II}2} - u^{\mathrm{I}2}}{2},$$

$$v^{\mathrm{II}} = \frac{u^2 + u^{\mathrm{I}2} - u^{\mathrm{II}2}}{2};$$

on aura ſur le champ

$$\sin.\Psi = \frac{\frac{1}{B}\sqrt{(4Pu^{\mathrm{I}2} - \Sigma^{\mathrm{I}})} + \frac{1}{A}\sqrt{(4Pu^{\mathrm{II}2} - \Sigma^{\mathrm{II}})}}{2hr},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^{\mathrm{I}}}{A} + \frac{\Psi^{\mathrm{II}}}{B}}{hr^2\cos.\Psi^2},$$

&

$$\sin.\Psi^{\mathrm{I}} = \frac{\frac{1}{C}\sqrt{(4Pu^2 - \Sigma)} + \frac{1}{A}\sqrt{(4Pu^{\mathrm{II}2} - \Sigma^{\mathrm{II}})}}{2hr^{\mathrm{I}}}.$$

$$\frac{d\varphi^{\mathrm{I}}}{dt} = \frac{\frac{\Pi^{\mathrm{I}}}{B} + \frac{\Psi}{A} + \frac{\Psi^{\mathrm{II}}}{C}}{hr^{\mathrm{I}2}\cos.\Psi^{\mathrm{I}2}},$$

Il

Il faut remarquer que ces formules renferment deux conſtantes qui ne ſont pas arbitraires, mais qui doivent être déterminées par des équations particulières; ce ſont, l'une la conſtante h, & l'autre la conſtante qui peut être ajoutée à la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ déduite de l'équation (H) par la voie de l'intègration.

Voici donc les équations qui ſerviront à déterminer ces conſtantes

$$(N) \ldots \quad 16Pu - 4(\Sigma v + \Sigma^{I} v^{I} + \Sigma^{II} v^{II}) + \left(\frac{dpdp^{I} + dpdp^{II} + dp^{I}dp^{II} + d\rho^{2}}{dt^{2}}\right)^{2} = 0,$$

en ſuppoſant

$$\Sigma = vv^{I} + vv^{II} + v^{I}v^{I} = u^{2}u^{I2} - v^{II2} = 2u^{2}u^{I2} + 2u^{2}u^{II2} + 2u^{I2}u^{II2} - u^{I} - u^{4} - u^{I4} - u^{II4};$$

&

$$(P) \ldots \frac{\Pi}{C^{2}} + \frac{\Pi^{I}}{B^{2}} + \frac{\Pi^{II}}{A^{2}} + 2\left(\frac{\Psi}{AB} + \frac{\Psi^{I}}{AC} + \frac{\Psi^{II}}{BC}\right) = h^{2}.$$

On pourroit, ſi on vouloit, employer ces équations à la place de deux quelconques des équations (K); mais comme elles ſont aſſez compliquées, il vaudra mieux ne s'en ſervir que dans la détermination des conſtantes dont il s'agit; & pour cela, il eſt clair qu'on y pourra ſuppoſer partout $t = 0$.

Or, ſi, pour plus de ſimplicité, on ſuppoſe que, lorſque $t = 0$, on ait $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr^{I}}{dt} = 0$, & que de plus les rayons r, r^{I} concident, enſorte que l'angle ζ^{II} compris entre ces rayons (art 19) soit nul, ce qui est toujours permis lorsque cet angle est variable, on aura à cause de $r^{II2}=r^2+r^{I2}-2rr^I\,cos.\,\zeta^{II}$ (article cité), $r^{II2}=(r^I-r)^2$,

& $\frac{d.^{II}}{dt}=0$; donc $\frac{dp}{dt}=0$, $\frac{dp^I}{dt}=0$, $\frac{dp^{II}}{dt}=0$;

de sorte que l'équation (N) deviendra

$$16\,PU-4(r^2u+r^{I2}v^I+r^{II2}v^{II})\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^4=0;$$

mais à cause de $r^{II2}-(r^I-r)^2$ on aura $P=0$; donc aussi $\frac{d\rho}{dt}=0$. Ainsi, il faudra prendre la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, ensorte qu'elle devienne nulle lorsque $t=0$.

L'équation (P) se simplifiera aussi beaucoup par les mêmes suppositions, & elle deviendra

$$h^2=\frac{r^2u^2}{C^2}+\frac{r^{I2}u^{I2}}{B^2}+\frac{r^{II2}u^{II2}}{A^2}+2\left(\frac{pv}{AB}+\frac{p^Iv^I}{AC}+\frac{p^{II}v^{II}}{BC}\right)..(P^I)$$

où il faudra prendre pour r, r^I, r^{II}, u; u^I, & u^{II} les valeurs qui répondent à $t=0$.

Quant aux constantes qui pourront entrer dans les valeurs de Q, Q^I & Q^{II}, elles seront entiérement arbitraires, & ne dépendront que des valeurs initiables de u, u^I, u^{II}, qui sont à volonté.

Enfin, si l'on nomme encore

$d\theta$ l'angle élémentaire décrit par le corps B autour du corps A dans l'instant dt,

$d\theta^I$ l'angle correspondant décrit par le corps C autour de A,

ω l'inclinaison mutuelle des orbites des corps B & C autour de A,

ξ la diſtance du corps B au nœud de ces deux orbites,

$\xi^{\prime}$ la diſtance du corps C au même nœud,

on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\Pi}}{r^2}, \quad \frac{d\theta^{\prime}}{dt} = \frac{\sqrt{\Pi^{\prime}}}{r^{\prime 2}},$$

$$cof.\ \omega = \frac{\Psi^{\prime\prime}}{\sqrt{(\Pi\Pi^{\prime})}},$$

$$fin.\ \xi = \frac{\sqrt{(4Pu^{\prime 2} - \Sigma^{\prime})}}{2r\, fin.\ \omega\, \sqrt{\Pi^{\prime}}},$$

$$fin.\ \xi^{\prime} = \frac{\sqrt{(4Pu^{2} - \Sigma)}}{2r^{\prime} fin.\ \omega\, \sqrt{\Pi}}.$$

CHAPITRE II.

Solution du Problême des trois Corps dans différens cas.

XXIII.

Nous allons examiner dans ce Chapitre quelques cas particuliers, où le Problême des trois Corps se simplifie beaucoup & admet une solution exacte ou presqu'exacte; quoique ces cas n'aient pas lieu dans le systême du monde, nous croyons cependant qu'ils méritent l'attention des Géomètres, parce qu'il en peut résulter des lumières par la solution générale du Problême des trois Corps.

XXIV.

Le premier cas qui se présente est celui où les trois distances r, r^{I}, r^{II} seroient constantes, ensorte que le triangle formé par ces corps demeurât toujours le même, & ne fît que changer de position.

On aura dans ce cas $dr = o$, $dr^{I} = o$, $dr^{II} = o$, & par conséquent aussi, $dp = o$, $dp^{I} = o$, $dp^{II} = o$; donc les trois équantions (K) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A+B+C}{r} + C(p^{I}q^{I} - pq + Q) = o \\
&\frac{A+B+C}{r^{I}} + B(pq + p^{II}q^{II} + Q) = o \\
&\frac{A+B+C}{r^{II}} + A(-pq - p^{I}q^{I} + Q^{II} = o
\end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

d'où l'on voit que les quantités Q, Q^{I}, Q^{II} feront pareillement conftantes, enforte qu'on aura $dQ = 0$, $dQ^{I}=0$, $dQ^{II} = 0$, moyennant quoi les équations (I) fe réduiront à celles-ci: $qd\rho = 0$, $q^{I}d\rho = 0$, $q^{II}d\rho = 0$, lefquelles donneront ou $q=0$, $q^{I}=0$, $q^{II}=0$, ou $d\rho=0$; examinons féparément ces deux cas.

XXV.

Soit d'abord $q=0$, $q^{I}=0$, $q^{II}=0$, donc $r=r^{I}=r^{II}$; de forte que le triangle formé par les trois Corps fera équilatère: les équations (a) donneront donc

$$CQ = BQ^{I} = AQ^{II} = -\frac{A+B+C}{r}$$

& ces valeurs étant fubftituées dans les formules (I) on aura

$$u^{2} = u^{I2} = u^{II2} = \frac{A+B+C}{r}.$$

Maintenant on aura

$$p = p^{I} = p^{II} = \frac{r^{2}}{2},\ v = v^{I} = v^{II} = \frac{u^{2}}{2},$$

donc $P = \frac{3r^{4}}{4}$, & $U = \frac{3u^{4}}{4}$; de plus l'équation (H) donnera $\frac{d^{2}\rho}{dt} = 0$, par conféquent $\frac{d\rho}{dt} = \alpha$

α étant une conftante arbitraire qui doit fatisfaire à l'équation (N).

Or, on trouve $\Sigma = \Sigma^{I} = \Sigma^{II} = r^{2}\alpha$; de forte que l'équation dont nous parlons, deviendra

$9r^4u^4 - 6r^2u^2\alpha^2 + \alpha^4 = 0$, c'eſt-à-dire $(3r^2u^2 - \alpha^2)^2 = 0$; d'où $\alpha^2 = 3r^2u^2 = 3(A+B+C)r$.

Ainſi, on aura ſatisfait à toutes les équations du Problême; de ſorte que la valeur de r demeurera indéterminée; d'où il s'enſuit que le ſyſtême des trois Corps peut ſe mouvoir de manière que les trois Corps forment toujours un triangle quelconque équilatéral.

Ayant trouvé

$$P = \frac{3r^4}{4}, \; \Sigma = \Sigma^{I} = \Sigma^{II} = r^2\alpha^2 = 3r^{II}u^2,$$

on aura

$$4Pu^2 - \Sigma = 0, \; 4Pu^{I2} - \Sigma^{I} = 0, \; 4Pu^{II2} - \Sigma^{II} = 0;$$

donc *ſin.* $\Psi = 0$, & *ſin.* $\Psi^{I} = 0$; d'où l'on voit que les trois Corps feront toujours néceſſairement dans un même plan.

On trouve enſuite $\Pi = \Pi^{I} = \Pi^{II} = r^2u^2$,

$$\Psi = \Psi^{I} = \Psi^{II} = pv + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{r^2u^2}{4} + \frac{3r^2u^2}{4} = r^2u^2;$$

donc à cauſe de $\Psi = 0$, & $\Psi^{I} = 0$, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{I}}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\frac{u^2}{h};$$

mais l'équation (P^{I}) donnera

$$h^2 = \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2} + \frac{2}{AB} + \frac{2}{AC} + \frac{2}{BC}\right)r^2u^4$$

ou bien

$$h^2 = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 r^2u^4,$$

par conféquent

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) ru;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{1}}{dt} = \frac{u}{r} = \sqrt{\left(\frac{A+B+C}{r^3}\right)}.$$

Ainfi les corps B & C ne feront que tourner autour du corps A avec une vîteffe angulaire conftante

$$\& = \sqrt{\left(\frac{A+B+C}{r^3}\right)}.$$

XXVI.

Examinons maintenant l'autre cas, où $\frac{dp}{dt} = 0$ fans que q, q^{I} & q^{II} foient nuls ; & fubftituons d'abord dans les équations (I) les valeurs de CQ, BQ^{I}, & AQ^{II} tirées des équations (a) ci-deffus, on aura

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \frac{A+B+C}{r} - C(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II}) \\ u^{I2} &= \frac{A+B+C}{r^{I}} - B(pq + p^{II}q^{II}) \\ u^{II2} &= \frac{A+B+C}{r^{II}} - A(-pq - p^{I}q^{I}) \end{aligned}\right\} \dots (b)$$

d'où l'on voit que les vîteffes relatives des corps feront auffi conftantes, mais non pas égales entr'elles comme dans le cas précédent.

Or, puisqu'il faut que $\frac{d\rho}{dt} = 0$, on aura donc aussi $\frac{d^2\rho}{dt} = 0$, & l'équation (H) deviendra

$$Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0 \ldots (C)$$

Ensuite l'équation (N) deviendra (à cause de $dr = 0$, $dr^{I} = 0$, $dr^{II} = 0$, & $dp = 0$, $dp^{I} = 0$, $dp^{II} = 0$, $d\rho = 0$) $16PU = 0$, savoir $P = 0$, ou $U = 0$; ainsi, en combinant l'une ou l'autre de ces équations avec l'équation précédente (C), on pourra, par leur moyen, déterminer deux quelconques des trois indéterminées r, r^{I}, r^{II} & le Problème sera résolu.

Supposons d'abord $P = 0$, l'on aura

$$(r+r^{I}+r^{II})(r+r^{I}-r^{II})(r-r^{I}+r^{II})(r-r^{I}-r^{II}) = 0,$$

donc puisque r, r^{I} & r^{II} sont supposées positives, on aura ces équations

$$r+r^{I}-r^{II}=0, \text{ ou } r-r^{I}+r^{II}=0, \text{ ou } r-r^{I}-r^{II}=0;$$

d'où l'on tire

$$r^{II}=r+r^{I}, \text{ ou } r^{I}=r+r^{II}, \text{ ou } r=r^{I}+r^{II};$$

c'est-à-dire que l'une des trois distances doit être égale aux deux autres, ce qui montre que les trois corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Imaginons que les trois corps A, B, C soient rangés de suite dans la même direction, ensorte que l'on ait $r^{II} = r^{I} - r$, & faisant pour plus de simplicité $r^{I} = mr$, il n'y aura qu'à substituer dans l'équation (c), mr à la place

place de r^{I}, & $(m-1)r$ à la place de r^{II}; l'inconnue r s'en ira, & l'on aura une équation qui servira à déterminer m. On trouvera donc

$$p = \frac{m^2+(m-1)^2-1}{2}\, r^2 = (m^2-m)r^2.$$

$$p^{\mathrm{I}} = \frac{1+(m-1)^2-m^2}{2}\, r^2 = (1-m)r^2.$$

$$p^{\mathrm{II}} = \frac{1+m^2-(m-1)}{2}\, r^2 = mr^2$$

$$q = \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m-1)^3}\right)\frac{1}{r^3} = -\frac{3m^2-3m+1}{m^3(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^{\mathrm{I}} = \left(1 - \frac{1}{(m-1)^3}\right)\frac{1}{r^3} = \frac{m^3-3m^2+3m}{(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^{\mathrm{II}} = \left(\frac{1}{m^3} - 1\right)\frac{1}{r^3} = \frac{1-m^3}{m^3} \times \frac{1}{r^3};$$

& ces substitutions étant faites dans l'équation (c) elle deviendra après avoir été multipliée par $m^2(m-1)^2r$,

$$C(-3m^2+3m-1) + Bm^3(m^2-3m+3)$$
$$-A(m-1)^2(1-m^3) = 0 \ldots (d),$$

laquelle étant ordonnée par rapport à m, montera au cinquième degré, & aura par conséquent toujours une racine réelle.

Il est bon de remarquer ici que, quoique nous ayons supposé $r^{\mathrm{II}} = r^{\mathrm{I}} - r$, la solution n'en renfermera pas moins tous les cas possibles, à cause que les distances r, r^{I} & r^{II} étant prises sur une même ligne droite, peuvent être positives ou négatives, suivant la différente position des corps.

Maintenant, à cause de $dr = 0$, $dr^{I} = 0$, $dr^{II} = 0$, & $d\rho = 0$, on aura $\Xi = 0$, $\Xi^{I} = 0$, $\Xi^{II} = 0$; de sorte que, comme on a déja $P = 0$, on aura $\mathit{fin}.\, \psi = 0$ & $\mathit{fin}.\, \psi^{I} = 0$ ce qui montre que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe.

XXVII.

Supposons maintenant l'autre facteur U égal à zero, on aura

$$U = vv^{I} + vv^{II} + v^{I}v^{II} = u^{2}u^{I2} - v^{II2} = 0:$$

Or, les équations (b) donnent

$$\frac{u^{2}}{r^{2}} - \frac{u^{I2}}{r^{I2}} = -(A+B+C)\,q^{II} - \frac{C}{r^{2}}\,(p^{I}q^{I} - p^{II}q^{II})$$
$$+ \frac{B}{r^{I2}}(pq + p^{II}q^{II}),$$

d'où, en multipliant par $r^{2}\,r^{I2}$, & mettant à la place de r^{2} & r^{I2} leurs valeurs $p^{I} + p^{II}$, & $p + p^{II}$, on aura (à cause de $q^{II} = q - q^{I}$) $r^{I2}u^{2} - r^{2}u^{I2} = (-Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P + (Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II})p^{II}$; mais $Cpq - Bp^{I}q^{I} - Ap^{II}q^{II} = 0$ par l'équation (c), donc on aura simplement

$$r^{I2}u^{2} - r^{2}u^{I2} = (-Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P,$$

& l'on trouvera de même par analogie

$$r^{II2}u^{2} - r^{2}u^{II2} = (Cq + Bq^{I} - Aq^{II})P,$$
$$r^{II2}u^{I2} - r^{I2}u^{II} = (Cq + Bq^{I} + Aq^{II})P;$$

d'où il est facile de tirer

$$p^{\text{II}}u^2 - r^2v^{\text{II}} = -CqP\,,$$

$$p^{\text{II}}u^{\text{I}2} - r^{\text{I}2}v^{\text{II}} = -Bq^{\text{I}}P\,,$$

& par conséquent

$$v^{\text{II}} = \frac{p^{\text{II}}u^2 + CqP}{r^2} = \frac{p^{\text{II}}u^{\text{I}2} + Bq^{\text{I}}P}{r^{\text{I}2}}\,;$$

donc

$$v^{\text{II}2} = \frac{p^{\text{II}2}u^2u^{\text{I}2} + p^{\text{II}}P(Bq^{\text{I}}u^2 + Cqu^{\text{I}2}) + BCqq^{\text{I}}P^2}{r^2r^{\text{I}2}}\,,$$

& de-là, à cause de $P = r^2r^{\text{I}2} - p^{\text{II}2}$,

$$U = u^2u^{\text{I}2} - v^{\text{II}2} = \frac{P}{r^2r^{\text{I}2}}\left(u^2u^{\text{I}2} - p^{\text{II}}(Bq^{\text{I}}u^2 + Cqu^{\text{I}2})\right.$$

$$\left. - BCqq^{\text{I}}P\right) = \frac{P}{r^2r^{\text{I}2}}\left((u^2 - Cqp^{\text{II}})(u^{\text{I}2} - Bq^{\text{I}}p^{\text{II}})\right.$$

$$\left. - BCr^2r^{\text{I}2}qq^{\text{I}}\right).$$

Mais les mêmes équations (b) donnent

$$u^2 - Cqp^{\text{II}} = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{\text{II}3}}\right)r^2,$$

&

$$u^{\text{I}2} = Bq^{\text{I}}p^{\text{II}} = -\left(\frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{\text{II}3}}\right)r^{\text{I}2}\,;$$

donc, substituant ces valeurs aussi bien que celles de q & q^{I}, on aura

$$U = P\left(\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{\text{II}3}}\right)\left(\frac{A+C}{r^{\text{I}3}} + \frac{B}{r^{\text{I}3}}\right)\right.$$

$$\left. - BC\left(\frac{1}{r^{\text{I}3}} - \frac{1}{r^{\text{II}3}}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{\text{II}3}}\right)\right).$$

ou bien

$$U = P\left(\frac{A^2}{r^3 r^{I3}} + \frac{B}{r^3 r^{II3}} + \frac{C^2}{r^{I3} r^{II3}} + \frac{AB}{r^3}\left(\frac{1}{r^{I3}} + \frac{1}{r^{II3}}\right) + \frac{AC}{r^{I3}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^{II3}}\right) + \frac{BC}{r^{II3}}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^{I3}}\right)\right).$$

D'où l'on voit que l'équation $U = o$ ne peut donner que celle ci $P = o$, l'autre facteur de U ne pouvant jamais devenir nul, à cause que les rayons r, r^I, r^{II} & les mapes A, B, C sont des quantités positives.

XXVIII.

L'équation $P = o$ étant donc la seule qui puisse satisfaire au cas que nous examinons, ce cas n'aura lieu, comme nous l'avons vu plus haut, que lorsque les trois Corps seront rangés dans une même ligne droite, & que leurs distances seront dans le rapport exprimé par l'équation (d).

Or, nous avons déja trouvé que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe; de sorte que, connoissant la vîtesse u du corps B autour de A, il n'y aura qu'à la diviser par r pour avoir la vîtesse angulaire des corps B & C; mais si l'on veut faire usage des formules générales de l'art. 22, on remarquera qu'à cause de $P = o$, on a (art. 27) $\frac{u^2}{r^2} = \frac{u^{I2}}{r^{I2}} = \frac{u^{II2}}{r^{II2}}$; mais les équations ($b$) donnent

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u^{I2}}{B} + \frac{u^{II2}}{A} = (A+B+C)\left(\frac{2}{r} + \frac{2}{r^I} + \frac{2}{r^{II}}\right);$$

donc substituant les valeurs précédentes de $u^{\text{I}2}$, & $u^{\text{II}2}$, & faisant pour abréger,

$$= K\,\frac{(A+B+C)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^{\text{I}}}+\frac{1}{r^{\text{II}}}\right)}{\frac{r^2}{C}+\frac{r^{\text{I}2}}{B}+\frac{r^{\text{II}2}}{A}}$$

on aura

$$u^2 = kr^2\text{, \& de même } u^{\text{I}2} = kr^{\text{I}2},\ u^{\text{II}2} = kr^{\text{II}2};$$

donc aussi

$$v = kp,\ v^{\text{I}} = kp^{\text{I}},\ v^{\text{II}} = kp^{\text{II}}.$$

Ainsi, on aura (art. 22)

$$\Pi = kr^4,\ \Pi^{\text{I}} = kr^{\text{I}4},\ \Pi^{\text{II}} = kr^{\text{II}4};$$

$$\Psi = kp^2,\ \Psi^{\text{I}} = kp^{\text{I}2},\ \Psi^{\text{II}} = kp^{\text{II}2};$$

mais à cause de $P=0$, on a

$$p^2 = r^{\text{I}2}r^{\text{II}2},\ p^{\text{I}2} = r^2r^{\text{II}2},\ p^{\text{II}2} = r^2r^{\text{I}2};$$

donc

$$\Psi = kr^{\text{I}2}r^{\text{II}2},\ \Psi^{\text{I}} = kr^2r^{\text{II}2},\ \Psi^{\text{II}} = kr^2r^{\text{I}2};$$

donc l'équation (P) deviendra

$$h^2 = k\left(\frac{r^2}{C}+\frac{r^{\text{I}2}}{B}+\frac{r^{\text{II}2}}{A}\right)^2;$$

d'où

$$h = \left(\frac{r^2}{C}+\frac{r^{\text{I}2}}{B}+\frac{r^{\text{II}2}}{A}\right)\sqrt{k};$$

ensuite, à cause de $\psi = 0$ & $\psi^{\text{I}} = 0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{\text{I}}}{dt} = \frac{k}{h}\left(\frac{r^2}{C}+\frac{r^{\text{I}2}}{B}+\frac{r^{\text{II}2}}{A}\right) = \sqrt{k};$$

XXIX.

Nous avons ſuppoſé ci-deſſus que les rayons r, r^{I}, r^{II} étoient conſtans, & nous avons vu que cela ne peut avoir lieu que dans deux cas; ſavoir, lorſque ces trois rayons ſont égaux entr'eux, & lorſque l'un d'eux eſt égal à la ſomme des deux autres. Suppoſons maintenant que ces trois rayons ſoient ſeulement dans un rapport conſtant entr'eux, & voyons dans quel cas cette condition pourra avoir lieu. Soit donc $r^{\mathrm{I}} = mr$, & $r^{\mathrm{II}} = nr$, m & n étant des quantités conſtantes, & l'on aura d'abord (art. 22).

$$p = \mu r^2,\ p^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} r^2,\ p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} r^2$$

$$q = \frac{\pi}{r^3},\ q^{\mathrm{I}} = \frac{\pi^{\mathrm{I}}}{r^3},\ q^{\mathrm{II}} = \frac{\pi^{\mathrm{II}}}{r^3}$$

en faiſant pour abréger

$$\mu = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2}\quad \pi = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}$$

$$\mu^{\mathrm{I}} = \frac{1 + n^2 - m^2}{2}\quad \pi^{\mathrm{I}} = 1 - \frac{1}{n^3}$$

$$\mu^{\mathrm{II}} = \frac{1 + m^2 - n^2}{2}\quad \pi^{\mathrm{II}} = \frac{1}{m^3} - 1 = \pi - \pi^{\mathrm{I}}.$$

Donc l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + (C\mu\pi - B\mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}} - A\mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})$$

ou bien, en faiſant pour abréger,

$$\lambda = C\mu\pi - B\mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}} - A\mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}},$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\lambda}{r} = 0 \text{, \& intégrant } \frac{d\rho}{dt} = \alpha - \lambda\int\frac{dt}{r};$$

α étant une constante arbitraire égale à la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$ lorsque $t=0$.

Ensuite on aura

$$dQ = 2(\mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})\frac{dr}{r^2} - \pi\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^{\mathrm{I}} = 2(\mu\pi + \mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})\frac{dr}{r^2} + \pi^{\mathrm{I}}\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^{\mathrm{II}} = 2(-\mu\pi - \mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}})\frac{dr}{r^2} + \pi^{\mathrm{II}}\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

donc, en intégrant,

$$Q = -\frac{2(\mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}}}{r} - \int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k$$

$$Q^{\mathrm{I}} = -\frac{2(\mu\pi + \mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})}{r} + \pi^{\mathrm{I}}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k^{\mathrm{I}}$$

$$Q^{\mathrm{II}} = -\frac{2(-\mu\pi - \mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}})}{r} + \pi^{\mathrm{II}}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3} + k;$$

k, k^{I} & k^{II} étant des constantes arbitraires.

Faisant toutes ces substitutions dans les équations (K) & divisant ensuite la seconde par m^2 & la troisième par n^2, elles deviendront celles-ci :

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C(1-\mu^{\mathrm{I}}\pi^{\mathrm{I}}+\mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})}{r} + C\pi\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$
$$- Ck = 0,$$

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C(1-(\mu\pi-\mu^{\mathrm{II}}\pi^{\mathrm{II}})m)}{m^3 r} - \frac{B\pi^{\mathrm{I}}}{m^2}\int\left(\alpha - \lambda\int\frac{dt}{r^3}\right)\frac{dt}{r^3}$$
$$- \frac{Bk}{m^2} = 0,$$

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C(1+\mu\pi+\mu^{I}\pi^{I})n)}{n^3 r} - \frac{A\pi^{II}}{n^2}\int\left(\alpha-\lambda\int\frac{dt}{r}\right)\frac{dt}{r^3}$$

$$-\frac{Ak}{n^2}=0,$$

lesquelles devront être identiques ; de sorte qu'on aura ces conditions à remplir :

$$1^{\circ}.\ A+B+C(1-\mu^{I}\pi^{I}+\mu^{II}\pi^{II})$$

$$=\frac{A+B+C(1-(\mu\pi-\mu^{II}\pi^{II})m)}{m^3}$$

$$=\frac{A+B+C(2+(\mu\pi+\mu^{I}\pi^{I})n)}{n^3};$$

$$2^{\circ}.\ C\pi=-\frac{B\pi^{I}}{m^2}=-\frac{A\pi^{II}}{n^2},$$

ou bien

$$\alpha=0\ \&\ \lambda=0;$$

$$3^{\circ}.\ Ck=\frac{Bk}{m^2}=\frac{A\,k^{II}}{n^2}.$$

Ces deux dernières conditions peuvent toujours se remplir par le moyen des constantes indéterminées k, k^{I} & k^{II} ; ainsi la difficulté ne consiste qu'à satisfaire à celles des n°. 1 & 2,

Or, si on fait pour abréger

$$\delta=\mu\mu+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II}=(1+m+n)(1+m+n)$$
$$(1-m+n)(1-m-n),$$

on pourra réduire les deux équations du n°. 1 à celle-ci par des transformations analogues à celles de l'article 27,

$$\ldots(e).$$

$$\left.\begin{array}{l}(-C\pi+B\pi^{\text{I}}-A\pi^{\text{II}})\delta+\mu^{\text{II}}\lambda=0\\(C\pi+B\pi^{\text{I}}-A\pi^{\text{II}})\delta-\mu^{\text{I}}\lambda=0\end{array}\right\}\ldots(e).$$

Ainsi, il n'y aura qu'à combiner ces deux équations avec celles du n°. 2, savoir $C\pi=-\frac{B\pi^{\text{I}}}{m^2}=-\frac{A\pi^{\text{II}}}{n^2}$, ou bien $\alpha=0$ & $\lambda=0$; ce qui fait deux cas que nous allons examiner séparément.

X X X.

Soit d'abord $C\pi=-\frac{B\pi^{\text{I}}}{m^2}=-\frac{A\pi^{\text{II}}}{n^2}$,

donc $\pi^{\text{I}}=-\frac{m^2C\pi}{B}$, & $\pi^{\text{II}}=-\frac{n^2C\pi}{A}$;

mais on a $\pi-\pi^{\text{I}}-\pi^{\text{II}}=0$ (art. 29):

donc $\pi\left(1+\frac{m^2C}{B}+\frac{n^2C}{A}\right)=0$,

savoir $\pi\left(\frac{1}{C}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{A}\right)=0$.

Or, il est visible que la quantité $\frac{1}{C}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{A}$ ne sauroit jamais devenir nulle, à cause que les masses A, B, C, sont des quantités positives; ainsi, il faudra que l'on ait $\pi=0$, & par conséquent aussi $\pi^{\text{I}}=0$, $\pi^{\text{II}}=0$; or, dans ce cas, on aura $\lambda=0$, & les deux équations (e) ci-dessus auront lieu d'elles-mêmes; de sorte que toutes les conditions se trouveront remplies, & le Problême des trois Corps sera résoluble exactement dans l'hypothèse de

$\pi = 0$, $\pi^{\mathrm{I}} = 0$, $\pi^{\mathrm{II}} = 0$, ce qui donnera $n = m = 1$, & par conféquent $r = r^{\mathrm{I}} = r^{\mathrm{II}}$, c'eft à-dire, les diftances entre les corps égales entr'elles, comme dans le cas de l'art. 14; mais avec cette différence, que dans le cas préfent, elles peuvent être variables.

Pour connoître le mouvement des Corps dans ce cas, on reprendra les équations différentielles de l'art. 29, lefquelles, en faifant $f = Ck = Bk^{\mathrm{I}} = Ak^{\mathrm{II}}$, fe réduifent à cette équation unique

$$\frac{d.^2 r^2}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - f = 0\,;$$

multipliant par $d.r^2$, & intégrant enfuite, on aura

$$\left(\frac{d.r^2}{2dt^2}\right)^2 - 2(A+B+C)r - fr^2 = H,$$ H étant une conftante arbitraire; & de-là

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{(H+2(A+B+C)r+fr^2)}}$$

moyennant quoi on connoîtra t en r, & *vice-verfa*; r en t.

Maintenant, puifque $\pi = 0$, $\pi^{\mathrm{I}} = 0$, $\pi^{\mathrm{II}} = 0$, on aura $Q = k$, $Q^{\mathrm{I}} = k^{\mathrm{I}}$, $Q^{\mathrm{II}} = k^{\mathrm{II}}$; donc (art. 22)

$$u^2 = u^{\mathrm{I}2} = u^{\mathrm{II}2} = \frac{2(A+B+C)}{r} + f.$$

De plus, ayant $\lambda = 0$, on aura $\frac{d\rho}{dt} =$ & cette conftante α devra être déterminée, enforte qu'elle fatisfaffe à l'équation (N): on peut donner pour cela à t telle valeur qu'on voudra; mais en ne faifant aucune fuppofition particulière, l'équation (N) devra être identique avec celle que nous avons trouvée ci-dessus, pour la détermination de r; & leur comparaison donnera la valeur de α.

En effet, à cause de $r = r^{\text{I}} = r^{\text{II}}$, on aura $p = p^{\text{I}} = p^{\text{II}} = \frac{r^2}{2}$

donc $P = \frac{3r^4}{4}$; & de même, à cause de $u = u^{\text{I}} = u^{\text{II}}$, on aura $v = v^{\text{I}} = v^{\text{II}} = \frac{u^2}{2}$ donc $U = \frac{3u^4}{4}$;

ensuite $\Sigma = \Sigma^{\text{I}} = \Sigma^{\text{II}} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{2rdr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$

$+ r^2\alpha^2 = 3r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2$;

& l'équation (N) deviendra

$$q r^4 u^4 - b u^2\left(3r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2\right) + 3\left(\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 + \alpha^2\right)^2 = 0;$$

ou bien

$$\left(3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - \alpha^2\right)^2 = 0;$$

d'ou l'on tire

$$3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0.$$

Or, on a déja trouvé $u^2 = \frac{2(A+B+C)}{r} + f$,

donc substituant cette valeur, & résolvant l'équation, il viendra

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{\left(-\frac{\alpha^2}{3} + 2(A+B+C)r + fr^2\right)}}$$

Comparant donc cette équation avec la précédente, on aura $H = -\frac{\alpha^2}{3}$, & par conséquent $\alpha = \sqrt{(-3H)}$; d'où l'on voit que H doit être néceſſairement une quantité négative.

On aura enſuite

$$\Pi = \Pi^{\text{I}} = \Pi^{\text{II}} = r^2 u^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{3},$$

&

$$\Psi = \Psi^{\text{I}} = \Psi^{\text{II}} = \frac{r^2 u^2}{4} - \left(\frac{rdr}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\alpha^2}{4 \cdot 3} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3};$$

donc l'équation (P) deviendra

$$\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right)^2 = h^2,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A}\right).$$

Or, puiſqu'on a déja trouvé $\Sigma = \Sigma^{\text{I}}\ \Sigma^{\text{II}} = 3r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 + r^2\alpha^2$, & que $3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0$; on aura $\Sigma = \Sigma^{\text{I}} = \Sigma^{\text{II}} = 3r^4u^2$;
d'ailleurs on a $4P = 3r^4$, & $u = u^{\text{I}} = u^{\text{II}}$;
donc on aura

$$4Pu^2 - \Sigma = 0,\ 4Pu^{\text{I}2} - \Sigma^{\text{I}} = 0,\ 4Pu^{\text{II}2} - \Sigma^{\text{II}} = 0;$$

& par conſéquent $\text{ſin.}\ \psi = 0$, & $\text{ſin.}\ \psi^{\text{I}} = 0$; c'eſt-à-dire, $\psi = 0$ & $\psi^{\text{I}} = 0$; ce qui montre que les

B & C doivent ſe mouvoir dans un même plan fixe paſſant par le corps A.

Maintenant, ſi on ſubſtitue dans les expreſſions de $\frac{d\varphi}{dt}$, & $\frac{d\varphi^{\text{I}}}{dt}$ les valeurs de Π, Π^{I}, Ψ, Ψ^{I}, Ψ^{II}, & de h trouvées ci-deſſus, on aura $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^{\text{I}}}{dt} = \frac{\alpha}{r^2\gamma^3}$;
& par conſéquent en ſubſtituant la valeur ci-deſſus de dt

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\left(-1 + \frac{6(A+B+C)}{\alpha^2}r + \frac{3f}{\alpha^2}r^2\right)}}$$

qui eſt l'équation polaire d'une ſection conique, rapportée au foyer, & dans laquelle $\frac{2(A+B+C)}{-f}$ eſt le grand axe, & $\frac{2\alpha^2}{3(A+B+C)}$ le paramètre.

Ainſi, les corps B & C décriront dans ce cas autour du corps A deux ſections coniques ſemblables & égales, dont l'eſpece & la forme dépendront des quantités arbitraires f, & α, leſquelles pourront ſe déterminer par les équations $\alpha^2 = 3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$, & $f = u^2 - \frac{3(A+B+C)}{r}$ en donnant à u, r & $\frac{dr}{dt}$ les valeurs qui conviennent au premier inſtant.

XXXI.

Reſte à examiner le cas où $\alpha = 0$, & $\lambda = 0$; or, la ſuppoſition de $\lambda = 0$ réduit d'abord les équations (e) à celles ci,

$$(-C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II}\delta = 0$$
$$(C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II})\delta = 0,$$

leſquelles donnent ou $= 0$, ou bien

$$C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0, \ \& \ C\pi + B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0;$$

c'eſt-à-dire, $C\pi = 0$ & $B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$.

Or, j'obſerve d'abord que ces deux dernières équations ſont inutiles ; car on auroit d'abord $\pi = 0$, enſuite, à cauſe de $\pi^{II} = \pi = \pi^{I}$, on auroit $\pi^{II} = -\pi^{I}$; de ſorte que l'équation $B\pi^{I} - A\pi^{II} = 0$ deviendroit $(B + A)\pi^{I} = 0$, ce qui donneroit $\pi^{I} = 0$; on auroit donc $\pi = \pi^{I} = \pi^{II} = 0$, ce qui rentre dans le cas que nous avons examiné ci-deſſus.

Il faut donc faire $\delta = 0$, de ſorte que la ſolution du Problême ſera renfermée dans ces trois équations

$$\delta = 0, \ \lambda = 0, \ \& \ \alpha = 0.$$

La première donnera (art. 29)

$$(1+m+n)\ (1+m-n\ (1-m+n)\ (1-m-n) = 0$$

donc $1 \pm m \pm n = 0$,

& par conſéquent $r \pm r^{I} \pm r^{II} = 0$,

c'eſt-à-dire, que l'une des trois diſtances r, r^{I}, r^{II} doit être égale aux deux autres, & conſéquemment que les trois Corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Ce cas est donc analogue à celui de l'art. 26, mais il est plus général en ce que les distances entre les corps peuvent être variables, pourvu que leurs rapports soient constans.

On déterminera ces rapports par l'équation $\lambda = 0$, & pour cela on pourra supposer, comme dans l'article cité, que les trois corps A, B, C, soient disposés de suite dans une même ligne droite, ensorte que $r^{II} = r^{I} - r$, ce qui donnera $n = m - 1$; on substituera donc cette valeur de n dans l'expression de λ de l'art. 29, & l'on aura une équation en m qui sera la même que l'équation (d) de l'art. 26. Mais il faut voir encore si la condition de $\alpha = 0$ peut avoir lieu; & comme la constante α doit être déterminée par l'équation (N), tout se réduit à savoir si cette équation peut subsister en y faisant $\alpha = 0$, c'est-à-dire $\frac{d\rho}{dt} = 0$ à cause de $\frac{d\rho}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}$ (art. 29) & de $\lambda = 0$.

Or, en supposant $\frac{d\rho}{dt}$ & substituant pour r^{I}, r^{II} & p, p^{I}, p^{II}, leurs valeurs (article cité) on aura

$$P = (\mu\mu^{I} + \mu\mu^{II} + \mu^{I}\mu^{II})r^4,$$

$$\Sigma = (\mu + \mu^{I}\mu^{II2} + \mu^{II}\mu^{I2})r^2\left(\frac{rdr}{at}\right)^2,$$

$$\Sigma^{I} = (\mu^{I}m^4 + \mu\mu^{II2} + \mu^{II}\mu^2)r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2,$$

$$\Sigma^{II} = (\mu^{II}n^4 + \mu^{I}\mu^2 + \mu\mu^{I2})r^2\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{dpdp^{I}+dpdp^{II}+dp^{I}dp^{II}+d\rho^{2}}{dt^{2}}=(\mu\mu^{I}+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II})\left(\frac{2rdr}{dt}\right)^{2};$$

mais par la nature des quantités μ, μ^{I}, μ^{II}, on a $\mu^{I}+\mu^{II}=1$, $\mu+\mu^{II}=m^{2}$, $\mu+\mu^{I}=n^{2}$; de plus, on a, en vertu de l'équation $\delta=0$,

$$\mu\mu^{I}+\mu\mu^{II}+\mu^{I}\mu^{II}=0;$$

donc on aura auſſi

$$\mu+\mu^{I}\mu^{II2}+\mu^{II}\mu^{I2}=0,\ \mu^{I}m^{4}+\mu\mu^{II2}+\mu^{II}\mu^{2}=0,$$
$$\mu^{II}n^{4}+\mu^{I}\mu^{2}+\mu\mu^{I2}=0:$$

de ſorte que toutes les quantités précédentes P, Σ, &c. ſeront nulles, & conſéquemment l'équation (N) ſe trouvera vérifiée d'elle-même.

XXXII.

Maintenant, il eſt clair qu'à cauſe de $\alpha=0$, & $\lambda=0$, les trois équations différentielles de l'art. 29 ſe réduiront à celle-ci,

$$\frac{d^{2}.r^{2}}{2dt^{2}}-\frac{F}{r}-f=0$$

en faiſant pour abréger

$$F=A+B+C(1-\mu^{I}\pi^{I}+\mu^{II}\pi^{II}),$$
$$\&\ f=Ck\ \frac{Bk^{I}}{m^{2}}=\frac{Ak^{II}}{n^{2}}.$$

Cette

Cette équation étant donc multipliée par $d.r^2$, & ensuite intégrée, donnera

$$\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - 2Fr - fr^2 = H,$$

H étant une constante arbitraire;
d'ou l'on tire

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{(H+2Fr+fr^2)}},$$

moyennant quoi on déterminera t en r, & par conséquent r & t.

De plus, si, dans les équations (J) de l'art. 22, on substitue les valeurs de Q, Q^{I}, Q^{II} de l'art. 29, on aura en vertu des équations du numero 1 du même article

$$u^2 = \frac{2F}{r} + f,\ u^{\mathrm{I}2} = \frac{2m^2F}{r} + m^2f,\ u^{\mathrm{II}2} = \frac{2n^2F}{r} + n^2f,$$

donc

$$v = \frac{2\mu F}{r} + \mu f,\ v^{\mathrm{I}} = \frac{2\mu^{\mathrm{I}}F}{r} + \mu^{\mathrm{I}}f,\ = \frac{2\mu^{\mathrm{II}}F}{r} + \mu^{\mathrm{II}}f.$$

De-là on trouvera

$$\Pi = 2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = -H,$$

$$\Pi^{\mathrm{I}} = m^4\left(2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right) = -Hm^4;$$

$$\Pi^{\mathrm{II}} = Hn^4,$$

$$\Psi = \mu^2\left(2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2\right) = -H\mu^2 = -Hm^2n^2\,;$$

$$\Psi^{\mathrm{I}} = -H\mu^{\mathrm{I}2} = -Hn^2\,,$$

$$\Psi^{\mathrm{II}} = -H\mu^{\mathrm{II}2} = -Hm^2\,,$$

à cause de $\mu\mu^{\mathrm{I}} + \mu\mu^{\mathrm{II}} + \mu^{\mathrm{I}}\mu^{\mathrm{II}} = 0$,

& par conséquent $\mu^2 = m^2n^2$, $\mu^{\mathrm{I}2} = n^2$, $\mu^{\mathrm{II}2} = m^2$.

Donc, si on substitue ces valeurs dans l'équation (P), elle deviendra

$$-H\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)^2,$$

d'où

$$h = \left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right)\sqrt{-H},$$

d'où l'on voit que H doit être une quantité négative.

Or, à cause de $P = 0$, & de $\Sigma = 0$, $\Sigma^{\mathrm{I}} = 0$, $\Sigma^{\mathrm{II}} = 0$, on aura $\mathit{sin}.\ \psi = 0$ & $\mathit{sin}.\ \psi^{\mathrm{I}} = 0$, ce qui montre que les deux corps B & C doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le corps A, & l'on trouvera ensuite pour les angles de rotation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\,{}^{1}}{dt} = \frac{-H}{hr^2}\left(\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}\right) = \frac{\sqrt{-H}}{r^2}.$$

Et si l'on substitue la valeur de dt, trouvée ci-dessus, on aura

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{\left(-1 + \frac{2F}{-H}r + \frac{f}{-H}r^2\right)}}$$

équation polaire d'une ſection conique, rapportée au foyer, dans laquelle $\frac{2F}{f}$ ſera le grand axe, & $-\frac{2H}{F}$ le paramètre.

XXXIII.

Nous venons donc de voir que le Problême des trois Corps eſt réſoluble exactement, ſoit que les diſtances entre les trois corps ſoient conſtantes, ou qu'elles gardent ſeulement entr'elles des rapports conſtants, & cela dans deux cas : ſavoir lorſque les trois diſtances ſont égales entr'elles, enſorte que les trois corps forment toujours un triangle équilatere, & lorſque l'une des diſtances eſt égale à la ſomme ou à la différence des deux autres, enſorte que les trois corps ſe trouvent toujours rangés en ligne droite.

Or, ſi on ſuppoſe que les diſtances r, r^{I}, r^{II} ſoient variables, mais de manière que leurs valeurs ne s'écartent que très-peu de celles qu'elles ddvroient avoir, pour que l'un des cas précédens eût lieu, il eſt clair que le Problême ſera réſoluble à très-peu-près, & par les méthodes connues d'approximation ; mais nous n'entrerons pas ici dans ce détail, qui nous écarteroit trop de notre objet principal.

J'avoue au reſte qu'on pourroit réſoudre les Problêmes précédens d'une manière plus ſimple par les formules ordinaires du Problême des trois Corps entre les rayons recteurs & les angles décrits par ces rayons, si on vouloit se borner d'abord à l'hypothèse que les corps se meuvent dans un même plan fixe; mais il ne seroit pas aisé, ce me semble, d'en venir à bout par les mêmes formules, si on supposoit, comme nous l'avons fait, que les corps pussent se mouvoir dans des plans différens.

CHAPITRE III.

Modification des formules du Chapitre premier, pour le cas où l'on suppose que l'un des trois Corps soit éloigné des deux autres.

XXXIV.

Le cas que nous allons examiner a lieu dans le Système du Monde, par rapport à ces trois Planètes, le Soleil, la Terre, & la Lune, dont les deux dernières sont beaucoup plus éloignées de la primière qu'elles ne le sont l'une de l'autre; mais nous ne considérons ici le cas dont il s'agit, que d'une manière générale, & seulement pour voir quelles modifications, cette supposition doit apporter aux formules générales de l'article 22.

Supposons donc que le corps C soit beaucoup plus éloigné des corps A & B que ceux-ci ne le sont entr'eux, ensorte que les quantités r^{I} & r^{II} soient fort grandes par rapport à la quantité r; pour cela nous prendrons une quantité i que nous supposerons constante & très-petite, & nous ferons $r^{\mathrm{I}} = \frac{R}{i}$, $r^{\mathrm{II}} = \frac{R^{\mathrm{I}}}{i}$, ensorte que R & R^{I} soient des quantités finies & comparables à r. Or si on nomme, comme dans l'article 19, ζ^{II} l'angle formé au centre du corps A par les rayons recteur r & r^{I} des corps

B & C, on aura $cos.\ \zeta^{II} = \frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2r^I r}$

d'où $r^{II2} = r^{I2} - 2r^I r\ cos.\ \zeta^{II} + r^2$,
ou bien $R^{I2} = R^2 - 2iRr\ cos.\ \zeta^{II} + i^2 r^2$.

Donc, si on fait $z = r\ cos.\ \zeta^{II}$,
on aura $R^{I2} = Q^2 - 2iRz + i^2 r^2$;

donc $r^{I2} = \frac{R^2}{i^2}$, $r^{II2} = \frac{R^2}{i^2} - \frac{2Rz}{i} + r^2$.

De-là on aura

$$\frac{1}{r^I} = \frac{i}{R},\ \frac{1}{r^{II}} = \frac{i}{R} + \frac{i^2(2Rz - ir^2)}{2R^3}$$

$$+ \frac{3i^3(2Rz - ir^2)^2}{8R^5} + \frac{5i^4(2Rz - ir^2)^3}{16R^7} + \&c.$$

$$= \frac{i}{R} + \frac{i^2 z}{R^2} + \frac{i^3(3z^2 - r^2)}{2R^3} + \frac{i^4(5z^3 - 3zr^2)}{2R^4} + \&c$$

$$\frac{1}{r^{I3}} = \frac{i^3}{R^3},\ \frac{1}{r^{II3}} = \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4(2Rz - ir^2)}{2R^5}$$

$$+ \frac{15i^5(2Rz - ir^2)^2}{8R^7} + \frac{35i^6(2Rz - ir^2)^3}{16R^9} + \&c.$$

$$= \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4 z}{R^4} + \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} + \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} + \&c,$$

Donc (art. 22),

$$p = \frac{R^2}{i^2} - \frac{Rz}{i},\ p^I = -\frac{Rz}{i} + r^2,\ p^{II} = \frac{Rz}{i};$$

$$q = -\frac{3i^4 z}{R^4} - \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5} - \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} - \&c$$

$$q^{\mathrm{I}} = \frac{1}{r^3} - \frac{i^3}{R^3} - \frac{3i^4 z}{R^4} - \frac{i^5(15z^2 - 3r^2)}{2R^5}$$
$$- \frac{i^6(35z^3 - 15zr^2)}{2R^6} - \&c.$$

$$q^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{r^3} + \frac{i^3}{R^3};$$

& de-là

$$pq = -\frac{3i^2 z}{R^2} - \frac{i^3(9z^2 - 3r^2)}{2R^3} - \frac{i^4(10z^3 - 12zr^2)}{2R^4} - \&c.$$

$$p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} = -\frac{Rz}{ir^3} + \frac{1}{r} + \frac{i^2 z}{R^2} + \frac{i^3(3z^2 - r^2)}{R^3}$$
$$+ \frac{i^4(15z^3 - 9r^2 z)}{2R^4} + \frac{i^5(35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4)}{2R^5} + \&c.$$

$$p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} = -\frac{Rz}{ir^3} + \frac{i^2 z}{R^2}.$$

O, comme pq eſt une quantité très-petite de l'ordre de i^2, & que $p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}$ ſont des quantités fort grandes de l'ordre de $\frac{1}{i}$, il eſt clair qu'en ſubſtituant les valeurs de ces quantités drns l'équation (H), les termes Cpq, $Bp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}$, $Ap^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}}$ ne pourront être homogènes, à moins que la maſſe C ne ſoit infiniment grande de l'ordre $\frac{1}{i^3}$ vis à-vis des deux autres.

Suppoſons donc $C = \frac{D}{i^3}$, & l'équation (H) de l'art. 22 deviendra après les ſubſtitutions

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2}\right)z - \frac{B}{r} - \frac{D(9z^2-3r^2)}{2R^3}$$

$$- \frac{iD(10z^3 - 12zr^2)}{2R^4} - \&c. = 0\,;$$

d'où l'on voit que la quantité $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{i}$, de ſorte que la quantité $\frac{d\rho}{dt}$ ſera auſſi du même ordre.

Donc, ſi on fait, pour abréger,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2}\right)z$$

$$- i\left(\frac{B}{r} + \frac{3D(3z^2-r^2)}{2R^3}\right)$$

$$- i^2\left(\frac{D(5z^3-6zr^2)}{R^4}\right)$$

$$- \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

on aura $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{i}$ & il faudra prendre la valeur de σ, telle qu'elle ſoit nulle lorſque $t = 0$.

XXXV.

$$q\,dp = -\frac{6i^2 z\,dR}{R^3} - \frac{i^3((15z^2-3r^2)dR - 3z\,d.Rz)}{R^4} - \&c.$$

$$q^{\mathrm{I}}dp^{\mathrm{I}} = -\frac{d.Rz}{ir^3}\,\frac{2dr}{r^2} + \frac{i^2 d.Rz}{R^3} + \frac{i\,(3z\,d.Rz - Rd.r^2)}{R^4}$$

$$+ \frac{i^4((15z^2-3r^2)d.Rz - 6Rz\,d.r^2)}{2R^5}$$

+

$$+\frac{i^5(35z^3-15zr^2)d.Rz-(15z^2-3r^2)Rd.r^2)}{2R^6}+\&c.$$

$$q^{II}dp^{II}=-\frac{d.Rz}{ir^3}+\frac{i^2d.Rz}{R^3}.$$

De forte que les valeurs de dQ, dQ^I & dQ^{II} deviendront

$$dQ=\frac{2dr}{r^2}+i^3\left(-\frac{d.r^2}{R^3}+\frac{3z(d.Rz-\sigma dt)}{R^4}\right)$$
$$+i^4\left(-\frac{3zd.r^2}{R^4}+\frac{(15z^2-3r^2)(d.Rz-\sigma dt)}{2R^5}\right.$$
$$+i^5\left(-\frac{(15z^2-3r^2)d.r^2}{2R^5}+\frac{(35z^3-15zr^2)(d.Rz-\sigma dt)}{2R^6}\right)$$
$$+\&c.$$

$$dQ^I=-\frac{1}{i}\left(\frac{d.Rz+\sigma dt}{r^3}\right)+i^2\left(\frac{-bzdR+d.Rz+\sigma dt}{R^3}\right)$$
$$+\&c.$$

$$dQ^{II}=\frac{1}{i}\left(\frac{d.Rz+\sigma dt}{r^3}\right)-\frac{2dr}{r^2}-i^2\left(\frac{-6zdR+d.Rz+\sigma d\sigma}{R^3}\right)$$
$$-\&c.$$

Donc, faifant toutes ces fubftitutions dans les équations (K), elles deviendront

$$\frac{d^2.r^2}{2dt^2}-\frac{A+B}{r}-D\left(\frac{3z^2-r^2}{R^3}+\int\left(-\frac{dr^2}{R^3}+\frac{3z(d.Rz-\sigma dt)}{R^4}\right)\right)$$
$$-iD\left(\frac{15z^3-9r^2z}{2R^4}+\int-\frac{3zd.r^2}{R^4}+\frac{(15z^2-3r^2)(d.Rz-\sigma dt}{2R^5}\right))$$

$$-i^2 D\left(\frac{35z^4-30z^2r^2+3r^4}{2R^5}+\int\left(-\frac{(15z^2-3r^2)d.r^2}{2R^5}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(35z^3-15zr^2)(d.Rz-\circ dt)}{}\right)\right)$$
$$-\&c. = \grave{a}\ une\ constante\ \ldots\ldots\ (g)$$

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2dt^2}-\frac{D}{i^2R}+\frac{B}{i}\left(\frac{Rz}{r^3}+\int\frac{d.Rz+\circ dt}{r^3}\right)$$
$$-\frac{i(A+B)}{R}-\&c. = \grave{a}\ une\ constante.$$

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2dt^2}-\frac{d^2.Rz}{idt^2}+\frac{d^2.r^2}{idt^2}-\frac{D}{i^2R}$$
$$-\frac{1}{i}\left(\frac{Dz}{R^2}+A\left(\frac{Rz}{r^3}+\int\left(\frac{d.Rz+\circ dt}{r^3}\right)\right)\right)$$
$$-\frac{D(3z^2-r^2)}{3R^3}-\frac{A}{r}-i\left(\frac{D(5z^3-3zr^2)}{2R^4}+\frac{A+B}{R}\right)$$
$$-\&c. = \grave{a}\ une\ constante\ ;$$

dont les deux dernières se réduisent à celles-ci :

$$\frac{d^2.R^2}{2dt^2}-\frac{D}{R}+iB\left(\frac{Rz}{r^3}+\int\left(\frac{d.Rz+\circ dt}{r^3}\right)\right)+\frac{i^3(A+B)}{R}$$
$$+\&c. = \grave{a}\ une\ constante\ \ldots\ldots\ (h).$$

$$\frac{d^2.Rz}{dt^2}+\frac{Dz}{B^3}+(A+B)\left(\frac{Rz}{r^3}+\int\left(\frac{d.Rz+\circ dt}{r^3}\right)\right)$$
$$-i\left(\frac{B}{r}+\frac{D(3z^2-r^2)}{2R^3}+D\int\left(-\frac{d.r^2}{R^3}+\frac{3z(d.Rz-\circ dt)}{R^4}\right)\right)$$
$$-i^2D\left(\frac{5z^3-3zr^2}{R^4}+\int\left(-\frac{3zd.r^2}{R^4}+\frac{(15z^2-3r^2)(d.Rz-\circ dt)}{2R^5}\right)\right)$$
$$-\&c. = \grave{a}\ une\ constante\ \ldots\ (i).$$

Ainſi, on aura à la place des équations (k) de l'art. 22 les trois équations (g), (h) & (i) dans leſquelles on n'a négligé que les quantités très-petites de l'ordre de i^3 & des ordres ſuivans; & ces équations ſerviront à trouver les valeurs de r, R & z en t; moyennant quoi le Problême ſera réſolu dans toute ſa généralité, puiſqu'il ne s'agira plus enſuite que de ſubſtituer ces valeurs dans les formules qui donnent les latitudes & les longitudes des corps B & C (art. 22). Or, comme la ſuppoſition de i très-petit ſimplifie auſſi beaucoup les ſubſtitutions dont il s'agit, nous allons donner encore les valeurs de *ſin.* ψ, *ſin.* ψ^{I} & de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi^{\mathrm{I}}}{dt}$, exprimé en r, R & z; mais nous ne pouſſerons pas la préciſion au-delà des quantités de l'ordre de i.

XXXVI.

Pour cela nous commencerons par chercher les valeurs des vîteſſes u, u^{I}, u^{II}; or, ſi dans les équations (J) on ſubſtitue à la place des quantités CQ, BQ^{I}, AQ^{II} leurs valeurs tirées des équations (k) on a en général

$$u^2 = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - C(p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}})$$

$$u^{\mathrm{I}2} = \frac{d^2.r^{\mathrm{I}2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - B(pq + p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}})$$

$$u^{\mathrm{II}2} = \frac{d^2.r^{\mathrm{II}2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{\mathrm{II}2}} - A(-pq - p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}).$$

Donc faisant ici les mêmes substitutions que ci-dessus ; & supposant pour abreger

$$(K)\begin{cases} L = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} + \frac{A+B}{r} - \frac{D(3z^2 - r^2)}{R3} \\ M = \frac{d^2.R^2}{2dt^2} + \frac{D}{R} \\ N = \frac{d^2.Rz}{dt^2} + \frac{(A+B)Rz}{r^3} - \frac{Dz}{R^2} \end{cases}$$

on aura

$$u^2 = L - \frac{iD(15z^3 - 9r^2z)}{2R^4} - \&c.$$

$$u^{I_2} = \frac{M}{i^2} + \frac{BRz}{ir^3} + \&c.$$

$$u^{II_2} = \frac{N}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{BRz}{r^3} - N\right) + L - \frac{B}{r}$$
$$+ \frac{3D(3z^2 - r^2)}{2R^3} + \&c.$$

Or on a

$$P = pp^I + pp^{II} + p^I p^{II} = pr^2 + p^I p^{II} = \frac{R^2(r^2 - z^2)}{i^2};$$

donc

$$4Pu^2 = \frac{LR^2(r^2 - z^2)}{i^2} - \frac{D(r^2 - z^2)(15z^3 - 9r^2z)}{2iR^2} - \&c.$$

$$4Pu^I = \frac{MR^2(r^2 - z^2)}{i^4} + \frac{BR^3z(r^2 - z^2)}{i^3 r^3} + \&c.$$

$$4Pu^{II_2} = \frac{NR^2(r^2 - z^2)}{i^4} + \frac{BR^3z\, r^2 - z^2)}{i^3 r^3} - \frac{NR^2(r^2 - z^2)}{i^3} - \&c$$

De plus, en faisant pour abréger

$$\Gamma = \frac{R^2(d.r^2)^2 + r^2(d.Rz)^2 - 2Rzd.Rzd.r^2}{dt^2}$$

$$+ \frac{2\sigma(Rzd.r^2 - r^2d.Rz)}{dt} + r^2\sigma^2$$

$$\Delta = \frac{R^2(d.Rz)^2 + r^2(d.R^2)^2 - 2Rzd.Rzd.R^2}{dt}$$

$$+ \frac{2\sigma(R^2d.Rz - Rzd.R^2)}{dt} + R^2\sigma^2$$

$$\Lambda = \frac{Rz(d.R^2d.r^2 - (d.Rz)^2 - d.(R^2r^2)}{dt^2}$$

$$- \frac{\sigma(R^2d.r^2 - r^2d.R^2)}{dt} - Rz\sigma^2$$

on aura

$$\Sigma = \frac{\Gamma}{i^2}, \quad \Sigma^{I} = \frac{\Delta}{i^4}, \quad \Sigma^{II} = \frac{\Delta}{i^4} + \frac{2\Lambda}{i^3} + \frac{\Gamma}{i^2},$$

donc substituant ces valeurs dans les expressions de $\sin\psi$, & $\sin.\psi^{I}$, & faisant encore

$$h = \frac{k}{i^2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)$$

$$\lambda = B^2(r^2 - z^2)\left(M + \frac{iBR}{r^3} - \frac{\Delta}{4}\right.$$

$$\mu = R^2(r^2 - z^2)N + \frac{\Lambda}{2}$$

on aura aux quantités de l'ordre i^2 près.

$$\left.\begin{aligned} \sin.\psi &= \frac{A\sqrt{\lambda} + B\sqrt{(\lambda - i\mu)}}{k(A+B)r} \\ \sin.\psi^{I} &= \frac{iB\sqrt{(\lambda - i\mu)}}{k(A+B)R} \end{aligned}\right\} \ldots (l)$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} \text{fin.}\,\psi &= \frac{V\lambda}{kr} - \frac{iB\mu}{2k(A+B)rV\lambda} \\ \text{fin.}\,\psi^{\text{I}} &= \frac{iBV\lambda}{k(A+B)R}. \end{aligned}\right\} \ldots (l^{\text{I}})$$

la quantité k étant une conſtante qu'on déterminera par l'équation (P^{I}) comme on le verra ci-deſſous.

Ainſi, on connoîtra par ces formules les latitudes ψ & ψ^{I} des corps B & C par rapport à un plan fixe paſſant par A.

On voit par-là qu'on aura à très peu-près

$$\frac{\text{fin.}\,\psi^{\text{I}}}{\text{fin.}\,\psi} = \frac{iBr}{(A+B)R} = \frac{Br}{(A+B)r^{\text{I}}}$$

ce qui donne un rapport bien ſimple & très-remarquable entre les latitudes des corps B & C.

XXXVII.

On trouvera enſuite

$$\Pi = Lr^2 = \left(\frac{d.r^2}{2dt}\right)^2 - \frac{iD(15z^3 - 9r^2z)r^2}{2R^4} - \&c.$$

$$\Pi^{\text{I}} = \frac{1}{i^4}\left(MR^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2\right) + \&c.$$

$$\Pi^{\text{II}} = \frac{1}{i^4}\left(MR^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2\right)$$

$$+ \frac{1}{i^3}\left(\frac{BR^3z}{r^3} - NR^2 - 2MRz - \frac{d.R^2d.Rz}{dt^2}\right)$$

$$+ \&c.$$

&, à cause de

$$v = \frac{M}{i^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{BRz}{r^3} - \frac{N}{2}\right) + \&c.$$

$$v^{I} = -\frac{N}{2i} + L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3z^2 - r^2)}{4R^3} + \&c.$$

$$v^{II} = \frac{N}{2i} + \frac{B}{2r} - \frac{3D(3z^2 - r^2)}{4R^3} + \&c.$$

on aura de même

$$\Psi = \frac{1}{i^4}\left(MQ^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2\right)$$
$$+ \frac{1}{i^3}\left(\frac{BR^3z}{r^3} - \frac{NR^2}{2} - MRz + \frac{d.R^2 d.Rz}{2dt^2}\right)$$
$$+ \&c.$$

$$\Psi^{I} = \frac{1}{i^2}\left(NRz - \left(\frac{d.Rz}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)$$
$$+ \frac{1}{i}\left(-\left(L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3z^2 - r^2)}{4R^3}\right)Rz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d.Rz d.r^2}{2dt^2}\right)$$
$$+ \&c.$$

$$\Psi^{II} = \frac{1}{i^2}\left(NRz - \left(\frac{d.Rz}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}\right)$$
$$+ \frac{1}{i}\left(\frac{B}{2r} - \frac{3D(3z^2 - r^2)}{4R^3}\right) Rz$$
$$+ \&c.$$

Donc, si on substitue ces valeurs dans les expressions de $\frac{d\varphi}{dt}$, & $\frac{d\varphi^{I}}{dt}$, & qu'on fasse pour abréger

$$\pi = NRz - \left(\frac{d.R\zeta}{2dt}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{BR\zeta}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)\zeta}{4R^2}$$

$$\eta = -LRz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d.R\zeta d.r^2}{2dt^2}$$

$$\rho = MR^2 - \left(\frac{d.R^2}{2dt}\right)^2$$

$$\nu = -MRz - \frac{NRz}{2}\ \frac{d.R^2 d.R\zeta}{2dt^2}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\pi + i\left(\varepsilon + \frac{B}{A+B}\eta\right)}{kr^2 \cos.\psi^2} \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= \frac{\rho + iB\left(\frac{R\zeta}{r^3} + \frac{\nu}{A+B}\right)}{kR^2 \cos.\psi'^2} \end{aligned}\right\} \ldots (m).$$

XXXVIII.

Voyons maintenant comment on doit déterminer la conſtante k & les autres conſtantes du Problême. Pour cela, on ſuppoſera, comme dans l'art. 22 que; lorſque $t =$, on ait $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr'}{dt} = 0$, & $\zeta'' = 0$; par conſéquent $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$, $z = r$, & $\frac{d\zeta}{dt} = 0$,

à cauſe

à cause de $z = r \cos. \zeta^{II}$; & l'équation (P^{I}) de l'article cité, donnera

$$k^2 = M R^2 + iB\left(\frac{R^3}{r^2} - \frac{2MRr + NR^2}{A+B}\right) \ldots (n),$$

d'où l'on tirera aisément la valeur de k en ayant soin de rapporter les valeurs de R, r, & de M, N au point ou $t = 0$.

De plus, on se souviendra que la valeur de σ doit être prise, ensorte qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$.

XXXIX.

Au reste, il est bon de remarquer que dès que l'on aura trouvé les latitudes ψ & ψ^{I}, on pourra avoir aisément les valeurs des vîtesses en longitude $\frac{d\varphi}{dt}$ & $\frac{d\varphi^{I}}{dt}$

par le moyen des vitesses réelles u & u^{I}.

En effet, nommant $d\theta$ l'angle décrit par le rayon r dans le tems dt on aura, comme nous l'avons vu dans l'art 19 $u^2\, dt^2 = r^2\, d\theta^2 + dr^2$; or il est facile de voir que $d\theta^2 = \cos. \psi^2 d\varphi^2 + d\psi^2$, donc $u^2 dt^2 = r \cos. \psi^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2 + dr^2$; donc

$$(m) \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr}{rdt}\right)^2\right)}}{\cos. \Psi} \\ \text{\& de même} \\ \dfrac{d\varphi^{I}}{dt} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{u^{I2}}{r^{I2}} - \left(\frac{d\Psi^{I}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr^{I}}{r^{I}dt}\right)^2\right)}}{\cos. \Psi} \end{cases}$$

donc en substituant les valeurs de u^2 & u^{I2}, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{L}{r^2} - \frac{d\psi^2}{dt^2} - \left(\frac{dr}{rdt}\right)^2 - \frac{iD(15z^3 - qr^2z)}{2R^4r^2}\right)}}{cos.\, \psi}$$

$$\frac{d\varphi^I}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{R^2} - \frac{d\psi^{I2}}{dt^2} - \left(\frac{dR}{Rdt}\right)^2 + \frac{iBz}{Rr^3}\right)}}{cos.\, \psi^I}$$

Ces formules peuvent quelquefois être plus commodes que les précédentes, sur-tout lorsque les quantités r, R varient très-peu, & que les latitudes ψ, ψ^I sont fort petites.

CHAPITRE IV.

De la théorie de la Lune.

§ I.

Application des formules du Chapitre précédent à cette théorie.

X L.

POUR faire cette application, il n'y a qu'à imaginer que le corps A que nous avons regardé comme immobile & auquel nous avons rapporté les mouvemens des deux autres, ſoit la Terre, que le corps B ſoit la Lune, & que le corps C que nous avons ſuppoſé beaucoup plus éloigné du corps A que ne l'eſt le corps B ſoit le ſoleil, dont la diſtance à la Terre eſt en effet trés- grande par rapport à la diſtance entre la Terre & la Lune. Ainſi r ſera le rayon recteur de l'orbite de la Lune autour de la Terre, r^{I} le rayon recteur de l'orbite apparente du Soleil, & r^{II} ſera la diſtance rectiligne entre le Soleil & la Lune.

De plus ψ repréſentera la latitude de la Lune par rapport à un plan fixe que nous prendrons pour l'écliptique, & ψ^{I} repréſentera la latitude du Soleil, φ ſera la longitude de la Lune, & φ^{I} celle du Soleil comptées à l'ordinaire dans l'écliptique

N ij

Pour ſavoir quel eſt ce plan que nous prenons ici pour l'écliptique, & que nous avons vu dans le Chapitre premier être celui par rapport auquel les mouvemens des corps B & C ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, nous remarquerons que après les ſuppoſitions de l'article 38, on trouve, (lorſque $t = 0$) $\lambda = 0$, $\mu = 0$, & $\nu = 0$; de ſorte qu'on aura (auſſi article 36 form. l) $\psi = 0$, & $\psi^{I} = 0$; donc puiſqne on a en même tems

$\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{dr^{I}}{dt} = 0$ & $\zeta^{II} = 0$ (art. 38), il s'enſuit que le plan dont il s'agit eſt celui dans lequel le Soleil & la Lune ſe trouvent en même-tems, lorſqu'ils ſont à la fois en conjonction, & dans leurs apſides.

Maintenant, puiſque nous avons fait (art. 34) $r = \frac{R}{i}$ on aura $\frac{r}{r^{I}} = i \frac{r}{R}$; de ſorte que ſi on ſuppoſe (ce qui eſt permis) que les valeurs moyennes de r, & de R ſoient égales à l'unité, on aura i égal à la valeur moyenne de $\frac{r}{r^{I}}$, c'eſt-à-dire $i = \frac{\text{parall.} \odot}{\text{parall. moy.} ☾}$; or, en prenant 57′ 30″ pour la parallaxe horizontale moyenne de la Lune, & 9″ pour celle du Soleil, on auroit $i = \frac{9}{3450} = \frac{1}{383}$ à très peu-près; d'où l'on voit que la quantité i ſera en effet très-petite.

Or, comme les obſervations nous apprennent que les orbites de la Lune & du Soleil ſont preſque circulaires, il eſt clair que les variations des quantités r & R devront être fort petites ; de ſorte que ſi on fait $r^2 = 1 + x$, $R^2 = 1 + X$, x & X devront être des quantités aſſez petites par rapport à l'unité ; & de plus, elles ne devront contenir aucun terme conſtant, autrement les valeurs moyennes de r & R ne feroient plus $= 1$ contre l'hypothèſe.

Donc le carré de la vîteſſe angulaire de la Lune $\frac{u^2}{r^2}$ ſera à-peu-près $= L = A + B - D(3z^2 - 1)$ & le carré de la vîteſſe angulaire du Soleil autour de la Terre $\frac{u'^2}{r'^2}$ ſera à-peu-près $= M = D$; (art. 36) ; mais on ſait que la vîteſſe angulaire de la Lune eſt à celle du Soleil environ comme 13 à 1 ; de ſorte que leurs carrés ſont à-peu près entr'eux comme 169 à 1 : d'où l'on voit que la quantité D doit être beaucoup plus petite que la quantité $A + B$, & cela dans une raiſon peu différente de 1 à 169. Donc, ſi on ſuppoſe, ce qui eſt permis, $A + B = 1$, & qu'on faſſe $D = \alpha^2$, on aura $\alpha = \frac{1}{13}$ environ, & α^2 ſera preſque $= 2i$; enſorte que l'on pourra regarder les quantités i & α^2 comme du même ordre.

De plus, on a, comme l'on ſait $\frac{☾}{☉} = i^3 \zeta$, le nombre ζ étant par la théorie de la préceſſion des équinoxes de M. d'Alembert $=$ environ $\frac{7}{3}$, & par celles des marées de M. Daniel Bernouilli $= \frac{5}{2}$; donc puisque ☾ $= B$, & ☉ $= C\frac{D}{i^3}$ (art. 34) on aura $B = \mathcal{C} D = \mathcal{C}\alpha^2$; ainsi, les quantités B & D seront à-peu-près du même ordre i.

Au reste, pour ce qui regarde la vraie valeur de α, il faudra la déterminer par le rapport connu entre le mouvement moyen du Soleil & celui de la Lune, rapport qui est, suivant les nouvelles Tables de M. Meyer de $11^s\,29^\circ\,45'\,40''$, 7 à $160^s\,9^\circ\,23'\,5''\,\frac{1}{2}$, quant au coëficient $\mathcal{C}$ qui est encore assez incertain; comme il se trouve partout multiplié par les coëficients très petits α^2 & i, il suffira de le connoître à-peu près, puisque l'erreur, qui en pourroit résulter, ne seroit que de l'ordre de i^2.

XLI.

On fera donc toutes ces substitutions dans les formules du Chapitre précédent; & mettant pour plus de simplicité y à la place de Rz, on aura

$$(p)\ldots\frac{d\varphi}{dt} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-i\alpha^2\left(\mathcal{C}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}y^2(1+X)\frac{5}{2} - \frac{3}{2}(1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$-i^2\alpha^2\left(5y(1+X)^{-\frac{7}{2}} - 6y(1+x)^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$-\ \&c.$$

$$(q)\ldots \frac{d^2x}{2dt^2} - (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\alpha^2\big(3y^2(1+x)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-\int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt)\big)$$

$$-i\alpha^2\big(\tfrac{15}{2}y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}} - \tfrac{9}{2}y(+x)(1+X)(1+X)^{\frac{5}{2}}$$

$$-3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx + \tfrac{1}{5}\int y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\tfrac{3}{2}\int(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt)\big)$$

$$-i^2\alpha^2\big(\tfrac{35}{2}y^4(1+X)^{-\frac{9}{2}} - 15y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\tfrac{3}{2}(1+x)^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{15}{2}\int y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}(1+x)dx$$

$$+\tfrac{35}{2}\int y^3(1+X)^{-\frac{9}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\tfrac{15}{2}\int y(1+x)(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)\big)$$

$-$ &c. $=$ *à une constante.*

$$(r)\ldots \frac{d^2X}{2dt^2} - \alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+i\alpha^2 6\big(y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \int(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy+\sigma dt)\big)$$

$+$ &c. *à une constante.*

$$(f)\ldots\frac{d^2y}{dt^2}+y(+x)^{-\frac{3}{2}}+\alpha^2y(1+X)^{-1}+f(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(dy+\sigma dt)-i\alpha^2(\mathfrak{C}(+x)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}}-f(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx+3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$(dy-\sigma dt))-i^2\alpha^2(5y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}}-3y(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}}dx+\frac{15}{2}fy^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy-\sigma dt)$$

$$-\frac{3}{2}f(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy-\sigma dt))$$

— &c. $=$ *à une conſtante.*

Or, comme les quantités x & X ſont aſſez petites, on aura aſſez exactement

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\frac{35x^4}{128}-\&c.$$

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}-\frac{35x^3}{16}+\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{1}{2}}=i-\frac{x}{2}+\frac{3X^2}{8}-\frac{5X^3}{16}+\frac{35X^4}{128}-\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3X}{2}+\frac{15X^2}{8}-\frac{35X^3}{16}+\&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{5}{2}}=1-\frac{5X}{2}+\frac{35X^2}{8}\ \frac{105X^3}{16}+\&c.$$

$(1+X)$

$$(1+X)^{-\frac{7}{2}} = 1 - \frac{7X}{2} + \frac{63X^2}{8} - \&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{9}{2}} = 1 - \frac{9}{X} + \frac{99X^2}{8} - \&c.$$

De sorte qu'en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, & mettant de plus dans les trois dernieres la valeur de σ tirée de la premiere par l'intégration, on aura trois équations en x, X, y, & t qui seront intégrables du moins par approximation par les méthodes connues, puisque les variables y seront toutes sous une forme rationelle & entiere.

XLII.

Ensuite on aura (art. 36)

$$L = \frac{d^2x}{2dt^2} + (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\alpha^2(3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}},)$$

$$M = \frac{d^2X}{2dt^2} + \alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}},$$

$$N = \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}},$$

& de là

$$\lambda = M(1+x)\ (1+X) - y^2) - \tfrac{1}{4}(1+X)\left(\frac{dy}{dt} + \sigma\right)^2$$

$$+ \frac{ydx}{2dt}\left(\frac{dy}{dt} + \sigma\right) + \tfrac{1}{4}(1+x)\frac{dX^2}{dt^2}$$

$$+i\mathfrak{b}\alpha^2\left((1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{3}{2}}-y^2(1+x)^{-\frac{3}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\mu=N\left((1+x)(1+X)-y^2\right)-\frac{y}{2}\left(\sigma^2+\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{dxdX}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{dx}{2dt}\left(\frac{dy}{dt}+(1+X)\sigma\right)-\frac{dX}{2dt}\left(\frac{dy}{dt}-(1+x)\sigma\right),$$

moyennant quoi on aura

$$(t)\begin{cases} \sin.\psi=\dfrac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{k}\left(\sqrt{\lambda}-\dfrac{i\mathfrak{b}\alpha^2}{2}\times\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ \sin.\psi^1=\dfrac{i\mathfrak{b}\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\lambda}}{k} \end{cases}$$

enfin, les formules de l'art. 39 donneront

$$(u)\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{1}{\cos.\psi}\sqrt{\left(L(1+x)^{-1}-(1+x)^{-2}\dfrac{dx^2}{4dt^2}-\dfrac{d\psi^2}{dt^2}\right.} \\ \qquad \overline{\left.-i\alpha^2\left(\frac{15}{2}y^3(1+x)^{-1}(1+X)^{-\frac{7}{2}}-\frac{9}{2}y(1+X)^{-\frac{5}{2}}\right)\right)} \\ \dfrac{d\varphi^1}{dt}=\dfrac{1}{\cos.\psi^1}\sqrt{\left(M(1+X)^{-1}-(1+X)^{-2}\dfrac{dX}{4dt^2}\right.} \\ \qquad \overline{\left.-\dfrac{d\psi^{1\,2}}{dt^2}+i\mathfrak{b}\alpha^2 y(1+X)^{-1}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\right)} \end{cases}$$

& quant à la constante k on la déterminera par l'équation

$$(x)\ldots k^2=M\left(1+X-2i\mathfrak{b}\alpha^2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$+i\mathfrak{b}\alpha^2\left((1+x)^{-\frac{3}{2}}(1+X)^{\frac{3}{2}}-N(1+X)\right)$$

en y faisant $t=0$.

On ſe ſouviendra au reſte que les valeurs de x, X & y doivent être priſes, enſorte que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ſoient nulles, lorſque $t=0$, & que y devienne alors

$$=Rr=(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}};$$

de plus, il faudra auſſi que la valeur de σ tirée par l'intégration de l'équation (p) ſoit telle qu'elle s'évanouiſſe lorſque $t=0$.

---

§ 2.

De l'intégration des équations qui donnent les mouvemens de la Lune & du Soleil.

XLIII.

LE Problême des mouvemens de la Lune & du Soleil ſe réduit à la recherche des quantités x, X, & y, leſquelles dépendent de l'intégration des équations (q), (r), (s), de l'art : 41. à quoi il faut joindre l'équation (p) comme ſubſidiaire. Si les variables x, X, y ne ſe trouvoient dans les équations que ſous la forme linaire, l'intégration ſeroit facile par les méthodes connues ; or il eſt aiſé de voir que les termes où ces variables ſe trouvent multipliées entr'elles ſont tous fort petits à cauſe que les coëficiers α^2 & i ſont très-petits & que les variables x & X ſont auſſi ſuppoſées fort petites ; ainsi on poura d'abord négliger les termes dont nous venons de parler, pour pouvoir trouver les premieres valeurs approchées des variables, & ces valeurs serviront ensuite à en trouver d'autres plus exactes & ainsi desuite.

Pour donner un essai du calcul qu'il faudra faire pour cet objet nous rejetterons d'abord dans les équations du § précédent tous les termes multipliés par i ; & qui dépendent de la parallaxe du Soleil ; l'erreur sera d'autant plus petite que ces termes sont en même-tems multipliés par la quantité très-petie α^2.

De cette manière, les équations (p), (q), (r), (s), deviendront

$$(\alpha) \ldots \frac{d\sigma}{dt} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(\beta) \ldots \frac{d^2x}{dt^2} - 2(1+x)^{-\frac{1}{2}} - 2\alpha^2(3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-(1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}} - \int(1+X)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$+ 3\int y(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt) = \text{à une constante.}$$

$$(\gamma) \ldots \frac{d^2X}{dt^2} - 2\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}} = \text{à une constante}$$

$$(\delta) \ldots \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\int(1+x)^{-\frac{3}{2}}dy + \sigma dt) = \text{à une const.}$$

où il n'y aura plus qu'à réduire en serie les puissances de $1+x$ & $1+X$.

XLIV.

Négligeons encore les produits de deux ou de plusieurs dimensions de x & X, on aura, à la place des équations précédentes, celles ci :

$$\frac{d\sigma}{dt} = y\left(2 - 3\alpha^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9\alpha^2 X}{2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{4} - 2\alpha^2\left(3y^2\left(1 - \frac{5X}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3X}{2} + 3\int 1\left(-\frac{5X}{2}\right)y(dy - \sigma dt)\right) = const.$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = const.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y\left(1 + \alpha^2 - \frac{3x}{2} - \frac{3\alpha^2 X}{2}\right) + \left(\int 1 - \frac{3x}{2}\right)(dy + \sigma dt)$$
$$= const.$$

lesquelles en substituant la valeur de σ se réduisent à ces trois-ci :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = const. \;\ldots\; (\varepsilon).$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{2}$$
$$-3\alpha^2\left(3y^2 - (1-3\alpha^2)\left(\int y\,dt\right)^2 + 3\int y\,dt\int yx\,dt\right)$$
$$+3\alpha^2\left((5y^2 - 1)X + 5\int Xy\,dy + 9\alpha^2\int y\,dt\int yX\,dt\right)$$
$$= const. \;\ldots\; (\zeta).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(2+\alpha^2)y+(1-3\alpha^2)\int dt\int y\,dt$$
$$-\frac{3}{2}\left(xy+\int x\,dy+\int dt\int yx\,dt+(1-3\alpha^2)\int x\,dt\int y\,dt\right)$$
$$-\frac{3\alpha^2}{2}\left(Xy-3\int dt\int yX\,dt\right)$$
$$=const. \quad .\ .\ .\ .\ .\ (n).$$

L V.

Comme les variables x & X font fuppofées fort petites vis-à-vis de la variable y qui eft finie, on peut d'abord négliger dans l'équation (n) les termes qui renferment x & X; on aura ainfi cette première équation approchée

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(2+\alpha^2)y+(1-3\alpha^2)\int dt\int y\,dt=const.$$

laquelle étant différentiée deux fois devient

$$\frac{d^4y}{dt^2}+(2+\alpha^2)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-3\alpha^2)y=0$$

qui eft intégrable par les méthodes connues.

Pour en trouver l'intégrable, il n'y a qu'à fuppofer $y=f\cos.(pt+a)$, ou bien, puifqu'on veut que $\frac{dy}{dt}=0$, lorfque $t=0$, on fera fimplement $y=f\cos.\,pt$, & l'on aura, après les fubftitutions, cette équation en p

$$p^4-(2+\alpha^2)p^2+1-3\alpha^2=0,$$

d'où l'on tire

$$p^2=1+\frac{\alpha^2}{2}\pm 2\alpha\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)}$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \pm 2\alpha\sqrt{(1 + \frac{\alpha^2}{16})}$$

ou bien en négligeant les puissances de α plus hautes que la seconde

$$p^2 = 1 \pm 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

&

$$p = 1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Donc dénotant par p l'une de ces valeurs, & par q l'autre, on aura

$$y = f\,cos.\,pt + q\,cos.\,qt$$

f & g étant des constantes indéterminées qui doivent être telles que lorsque $t = 0$ on ait $y = Rr = 1$; ce qui donne $f + g = 1$.

Cherchons maintenant d'après cette première valeur approchée de y, celle de $fin.\,\psi$ par les formules (t) de l'article 42 ; on aura, en négligeant les quantités x & X, $M = \alpha^2$; donc aussi $k^2 = \alpha^2$, & $k = \alpha$ (équation (x)) ; donc

$$\lambda = \alpha^2(1 - y^2) - \frac{1}{4}\frac{dy}{dt} + \sigma)^2,$$

&

$$fin.\,\psi = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$

Or $\frac{dy}{dt} = - pf \, \text{ſin.}\, pt - qg \, \text{ſin.}\, qt$,

$$\sigma = \int y dt = \frac{f \, \text{ſin.}\, pt}{p} + \frac{g \, \text{ſin.}\, qt}{q},$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} + \sigma = \frac{f(1-p^2)}{p} \, \text{ſin.}\, pt + \frac{g(1-q^2)}{q} \, \text{ſin.}\, qt.$$
$$= \mp 2\alpha \, (f \, \text{ſin.}\, pt - g \, \text{ſin.}\, qt)$$

en négligeant les puiſſances ſupérieures de α; donc

$$\lambda = \alpha^2 \big(1 - (f \, \text{coſ.}\, pt + g \, \text{coſ.}\, qt)^2$$
$$- (f \, \text{ſin.}\, pt - g \, \text{ſin.}\, qt)^2\big) = ,$$

$$\alpha^2 \big(1 - f^2 - g^2 - 2fg(\text{coſ.}\, pt \,.\, \text{coſ.}\, qt - \text{ſin.}\, pt \,.\, \text{ſin.}\, qt)\big)$$
$$= \alpha^2 \, 1 - f^2 - g^2 - 2fg \, \text{coſ.}\, (p+q)t \, ;$$

mais $f + g = 1$; donc $1 = f^2 + g^2 + 2fg$; donc

$$\lambda = 2\alpha^2 fg (1 - \text{coſ.} (p+q)t) = 4\alpha^2 fg \times \left(\text{ſin.}\, \frac{p+q}{2} \, t\right)^2 ;$$

donc enfin

$$\text{ſin.}\, \psi = 2\sqrt{fg} \times \text{ſin.}\, \frac{p+q}{2} \, t.$$

Or, comme on doit avoir $f + g = 1$, on peut ſuppoſer

$$f = \left(\text{coſ.}\, \frac{l}{2}\right)^2 \; \& \; g = \left(\text{ſin.}\, \frac{l}{2}\right)^2 ;$$

& l'on aura

$$\text{ſin.}\, \psi = \text{ſin.}\, l \times \text{ſin.}\, \frac{p+q}{2} \, t ,$$

l'angle

l'angle l étant arbitraire & dépendant de l'inclinaiſon primitive de l'orbite de la Lune : en effet, il eſt clair que la plus grande valeur de $\mathit{ſin.}\,\psi$ ſera $= \mathit{ſin.}\, l$ de ſorte que l exprimera la plus grande latitude, c'eſt à dire l'inclinaiſon de l'orbite ; donc puiſqu'on ſait par les obſervations que l'inclinaiſon de l'orbite lunaire eſt aſſez petite, & d'environ 5° 8′, la conſtante g ſera toujours très-petite & la conſtante f preſqu'égale à l'unité ; car on aura à peu près

$$g = (\mathit{ſin.}\ 2°,\ 34')^2 = \text{environ } \frac{1}{500};$$

de ſorte que la quantité g eſt encore plus petite que la quantité i qui exprime le rapport des parallaxes de la Lune & du Soleil ; d'où il s'enſuit qu'on pourra négliger ſans ſcrupule les termes qui ſe trouveront multipliés par le carré & les puiſſances plus hautes de g.

XLVI.

Il eſt facile de voir, par l'expreſſion de $\mathit{ſin.}\,\psi$ qu'on vient de trouver que l'angle $\frac{p+q}{2}t$ n'eſt autre choſe que la diſtance de la Lune au nœud, c'eſt-à-dire l'argument de latitude ; d'où il s'enſuit que ſi on retranche cet angle de la longitude de la Lune dans ſon orbite, on aura la longitude du nœud. Donc, ſi $h\,t$ denote la longitude moyenne de la Lune, on aura $\left(h - \frac{p+q}{2}\right)t$ pour la longitude moyenne du nœud ; or, les longitudes moyennes étant à peu-près les mêmes dans les orbites des planètes & dant l'écliptique, ht sera la valeur moyenne de φ; & h sera par conséquent égale à ce qu'il doit y avoir de constant dans la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$. Or, les formules de l'article 42 donnent, en rejettant x & ψ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{L} = \sqrt{(1 - \alpha^2(3y^2 - 1))},$$

& à cause de $y = f\, cos.\, pt$, on aura

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{3f^2}{2} - 1\right)\alpha^2\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

à-peu-près.

Mais on a aussi $\frac{p+q}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$, d'où l'on voit que la position du nœud est fixe du moins par cette première approximation; ce qui ne doit pas paroître surprenant vu que les valeurs de p & q ne peuvent tout au plus être censées exactes qu'aux quantités de l'ordre de α^2 près.

Pour savoir maintenant laquelle des deux valeurs $1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$ doit être prise pour p; on remarquera qu'en supposant l'inclinaison de l'orbite nulle, on a $y = f\, cos.\, pt = cos.\, pt$; mais on a $y = Rz$ (article 41) $= Rr\, cos.\, \zeta^{II} = a\, cos.\, \zeta^{II}$ (article 34), donc

$$cos.\, pt = cos.\, \zeta^{II} \;\&\; pt = \zeta^{II} = \varphi_{,} - \varphi^{I}_{,}$$

puisque ζ^{II} n'est autre chose que l'angle compris entre les deux rayons r & r^{I}; donc $p = h - h^{I}$, en nommant ht,

& $h^{I}t$ les valeurs moyennes de φ, & de φ^{I} ; or on a déja trouvé $h = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$; & pour avoir h^{I}, on prendra la partie constante de $\frac{d\varphi^{I}}{dt}$ qui est $= \sqrt{M} = \alpha$; de sorte que

$$h^{I} = \alpha, \text{ \& par conséquent } p = 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4};$$

donc $q = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4}$.

Ainsi, il faudra toujours avoir soin dans la suite de prendre pour p une valeur telle que ses deux premiers termes soient $1 -$, & pour q une valeur dont les deux premiers termes soient $1 + \alpha$; cette remarque est d'autant plus importante que les quantités p & q seront données dorenavant par des équations particulieres dont chacune montera cependant au quatrième dégré, comme on le verra ci-après.

XLVII.

Ayant trouvé la première valeur approchée de y, on la substituera dans l'équation (ζ) qui donne la valeur de x, en y négligeant d'abord les termes, oû x & y sont mêlés ; ce qui la réduit à celle-ci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \alpha^2(9y^2 - 3(\int y dt)^2) = const.$$

or, puisque

$$y = f \cos. pt + g \cos. qt,$$

on aura, en négligeant les g^2,

$$y^2 = f^2 \operatorname{cof.} pt^2 + 3\, fg \operatorname{cof.} pt \,.\, \operatorname{cof.} qt$$
$$= \tfrac{1}{2} f^2 (1 + \operatorname{cof.} 2pt) + fg(\operatorname{cof.}(p+q)t + \operatorname{cof.}(p-q)t)$$

&

$$\int y\,dt = \frac{f \operatorname{fin.} pt}{p} + \frac{g \operatorname{fin.} qt}{q},$$

$$\left(\int y\,dt\right)^2 = \frac{f^2}{p^2} \operatorname{fin.} pt^2 + \frac{2fg}{pq} \operatorname{fin.} pt \,.\, \operatorname{fin.} qt$$
$$= \frac{f^2}{2p^2}(1 - \operatorname{cof.} 2pt) - \frac{fg}{pq}(\operatorname{cof.}(p+q)t - \operatorname{cof.}(p-q)t);$$

donc fubftituant ces valeurs rejettant tous les termes conftants, à caufe qu'il ne doit y en avoir aucun dans la valeur de x par l'hypothèfe, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3\alpha^2 f^2 (3p^2+1)}{2p^2} \operatorname{cof.} 2pt$$
$$- \frac{3\alpha^2 fg}{pq}\Big((3pq+1)\operatorname{cof.}(p+q)t + (3pq-1)\operatorname{cof.}(p-q)t\Big)$$
$$= 0.$$

Ainfi la valeur de x fera de cette forme

$$x = a \operatorname{cof.} mt + \alpha^2 f^2 A \operatorname{cof.} 2pt$$
$$+ \alpha^2 fg(B \operatorname{cof.} (p+q)t + B^1 \operatorname{cof.}(p-q)t);$$

& la fubftitution faite, on aura

$$a \operatorname{cof.} mt\,(-m^2 + {}^2 + 1 + 4\alpha^2)$$
$$+ \alpha^2 f^2 \operatorname{cof.} 2pt \left(A(-4p^2 + 1 + 4\alpha^2) - \frac{3(3p^2+1)}{2p^2}\right)$$

$$+\alpha^2 fg \cos.(p+q)t\left(B(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq+1)}{pq}\right)$$

$$+\alpha^2 fg \cos.(p-q)t\left(A^I(-(p-q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq-1)}{pq}\right)$$

$$=0.$$

Donc égalant à zero les coefficiens de chaque *cofinus*, on aura les équations fuivantes :

$$-m^2+1+4\alpha^2=0$$

$$A(-4p^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3p^2+1)}{2p^2}=0,$$

$$B(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)-\frac{3(3pq+1)}{pq}=0,$$

$$B^I(-(p-q)^2+1+4\alpha)-\frac{3(3pq-1)}{pq}=0;$$

d'où l'on tire

$$m=\sqrt{(1+4\alpha^2)}$$

$$A=\frac{3(3p^2+1)}{2p^2(-4p^2+1+4\alpha^2)}=-2 \text{ à-peu-près.}$$

$$B=\frac{3(3pq+1)}{pq(-(p+q)^2+1+4\alpha^2)}=-4,$$

$$B^I=\frac{3(2pq-1)}{pq(-(p-q)^2+1+4\alpha^2)}=6.$$

La conftante a qui eft demeurée indéterminée dépend de l'excentricité de l'orbite lunaire, & doit par conféquent être fixée par les obfervations.

Ainfi l'angle mt repréfentera l'anomalie moyenne de la Lune, c'eft-à-dire fa diftance à l'apogée ; de forte que

$(h-m)t$ sera la longitude moyenne de l'apogée, ht étant comme plus haut celle du lieu de la Lune; mais comme nous avons négligé dans l'équation (ζ) des termes où x se trouve multiplié prr α^2 on doit s'attendre que la valeur de m ne sera exacte qu'aux quantités de l'ordre de α^2 près; c'est pourquoi on aura dans cette premiere approximation $m=1$, & $m-h=0$, en rejettant les α^2; ce qui donneroit les apsides fixes.

Venons maintenant à l'équation (ϵ) qui donne la valeur de X; & comme cette quantité ne doit contenir aucun terme tout constant, il est clair qu'on aura simplement

$\frac{d^2X}{dt^2}+\alpha^2X=0$; & que la valeur de X sera de cette forme

$$X=b\cos. nt$$

d'où l'on trouvera par la substitution

$$-n^2+\alpha=0, \quad \& \ n=\alpha.$$

Le coefficient indéterminé b dépend de l'excentricité de l'orbite du Soleil, & nt est par conséquent l'angle de l'anomalie moyenne; de sorte que $(n-h^{\text{I}})t$ sera la longitude de l'apogée du Soleil, qui est ici nulle à cause que $h^{\text{I}}=\alpha$, & $n=\alpha$.

XLVIII.

Puisqu'on connoît déja la forme des premiers terme des valeurs y, x & X, on pourra aisément trouver les suivans

& rectifier en même-temps les coefficiens de ceux qu'on a déja trouvés; pour cela, il n'y aura qu'à substituer dans les termes négligés des équations proposées, les valeurs qu'on vient de trouver, & l'on aura la forme des termes qu'il faudra introduire dans les nouvelles valeurs de y, x & X; on donnera à tous les termes des coefficiens indéterminés, & la substitution faite, on fera égaux à zero les termes analogues, c'est-à-dire ceux qui renferment les même *cosinus*; on aura par-là autant d'équations qu'il en faudra pour la détermination de tous les coefficiens.

Ainsi reprenant l'équation (n) & substituant dans les termes qui renferment x & X les valeurs de x, X & y trouvées ci-dessus, il viendra des termes de la forme

$$af\,cos.\,(p \pm m)t,\ ag\,cos.\,(q \pm m)t,$$

$$\alpha^2 f^3\,cos.\,(2p \pm p)t,\ \alpha^2 f^2 g\,cos.\,(2p \pm q)t,$$

$$\alpha^2 f^2 g\,cos.\,(p \pm q \pm p)t,$$

$$\alpha^2 f^2 g\,cos.\,(p \pm q \pm q)t,\ bf\,cos(p \pm n)t,$$

$$\&\ bg\,cos.\,(q \pm n)t;$$

on supposera donc

$$y = f\,cos. + g\,cos.\,qt + afP\,cos.\,(p+m)t$$
$$+ afP^I\,cos.\,(p-m)t + agQ\,cos.\,(q+m)t$$
$$+ agQ^I\,cos.\,(q-m) +, \&c.$$

& prenant pour x & X les expressions de l'art. 47, on aura l'équation suivante, dans laquelle j'ai négligé les qnantités affectées de a^2 de $a\alpha^2$ & de α^4, à cause que l'on a négligé dans l'équation (n) les termes où x se trouvoit à la seconde dimension,

$$
\begin{aligned}
&cos.\,pt\left(f\left(-p^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{3\alpha^2 f^3 A}{4}\left(1-1-\frac{1}{p^2}+\frac{1-3\alpha^2}{p^2}\right)\right)\\
&+cos.\,qt\left(g\left(-q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}\right)\right.\\
&\quad-\frac{3\alpha^2 f^2 g B}{4}\left(1-\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{1-3\alpha^2}{pq}\right)\\
&\quad\left.-\frac{3\alpha^2 f^2 g B^1}{4}\left(1-\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2}-\frac{1-3\alpha^2}{pq}\right)\right)\\
&+cos.(p+m)t\left(afP\left(-(p+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{3af}{4}\left(1+\frac{p}{p+m}-\frac{p}{(p+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p\,p+m)}\right)\right)\\
&+cos.(p-m,t\left(afP^1\left(-(p-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^3}{(p-m)^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{3af}{4}\left(1+\frac{p}{p-m}-\frac{1}{(p-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{p\,p-m)}\right)\right)\\
&+cos.\,(q+m)t\left(agQ\left(-(q+m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q+m)^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{3ga}{4}\left(1+\frac{q}{q+m}-\frac{1}{(q+m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{q(q+m)}\right)\right)\\
&+cos.(q-m)t\left(agQ^1\left(-(q-m)^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{3ga}{4}\left(1+\frac{q}{q-m}-\frac{1}{(q-m)^2}-\frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2}\right)\right)\\
&+\&c.=0,
\end{aligned}
$$

On

On égalera donc à zero les coefficiens de ces différens *cosinus*, & l'on aura

$$1^{\circ}.\ -p^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{p^2}=0\,;$$

équation d'où l'on tirera la même valeur de p que ci-dessus (art. 45), de sorte qu'on aura

$$p=1-\alpha-\frac{\alpha^2}{4},$$

& l'on sera maintenant assuré que cette valeur est exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement.

$$2^{\circ}.\ -q^2+2+\alpha^2-\frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2f^2(B+B^{\text{I}})}{4}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)$$
$$+\frac{3\alpha^2f^2(B-B^{\text{I}})}{4}\times\frac{p^2-1+3\alpha^2}{pq}=0\,;$$

or, comme nous négligeons les quantités de l'ordre de α^4 on aura (en mettant pour p & q leurs valeurs approchées)

$$\frac{p^2-1+3\alpha^2}{pq}=-2\alpha\,;$$

de sorte qu'à cause de $B=-3$, & $B^{\text{I}}=6$ (art. 48) l'équation précédente se réduira à

$$-q^2+2+\alpha^2\ \frac{1-3\alpha^2}{q^2}-\frac{3\alpha^2f^2}{2}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)$$
$$+15f^2\alpha^3=0,$$

ou bien

$$q^4-\left(2+\alpha^2-\frac{3\alpha^2f^2}{2}+15f^2\alpha^3\right)q^2$$
$$+1-3\alpha^2-\frac{3\alpha^2f^2}{2}=0\,;$$

d'où l'on tire d'abord, aux quantités de l'ordre α^3 près, en ayant égard à la remarque de l'art 46,

$$q^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + 2\alpha\sqrt{\left(1 + \frac{15 f^2 \alpha}{4}\right)}$$

$$= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + \frac{15 f^2 \alpha^2}{4}$$

$$= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + 3 f^2 \alpha^2;$$

& de-là

$$q = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2\alpha^2}{2} - \frac{4\alpha^2}{8} = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2\alpha^2}{2}.$$

On aura donc ici

$$\frac{p+q}{2} = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2\alpha^2}{4};$$

par conséquent le mouvement moyen du nœud qui est représenté par $(h - \frac{p+q}{2}t$ (art. 46) sera $= - \frac{3 f^2 \alpha^2}{4} t$ ce qui s'accorde avec les observations

$$3^\circ.\ P\left(-(p+m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1 - 3\alpha^2}{(p+m)^2}\right)$$
$$- \frac{3}{4}\left(1 + \frac{p}{p+m} - \frac{1}{(p+m)^2} - \frac{1 - 3\alpha^2}{p(p+m)}\right) = 0;$$

$$4^\circ.\ P^1\left(-(p-m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1 - 3\alpha^2}{(p-m)^2}\right)$$
$$- \frac{3}{4}\left(1 + \frac{p}{p-m} - \frac{1}{(p-m)^2} - \frac{1 - 3\alpha^2}{p(p-m)}\right) = 0$$

5°. &c.

d'où l'on tire à-peu-près

$$P = -\frac{1}{4},\ P^1 = \frac{3}{4},\ Q = -\frac{1}{4},\ Q^1 = \frac{3}{4}\ \text{\&c.}$$

XLIX.

On repaſſera préſentement à l'équation (ζ) pour trouver une valeur de x plus exacte que celle de l'art. 47.

Pour cet effet, on commencera par ſubſtituer dans les termes de cette dernière équation qui ſuivent les deux premiers, à la place de x, X & y leurs valeurs trouvées dans les articles précédens, & négligeant les quantités de l'ordre de g^2, auſſi bien que celles qui ſeroient affectées de α^2 multipliée par a^2, $a\alpha^2$, b^2, $b\alpha^2$ & α^4, à cauſe que nous avons rejetté dans la même équation les termes de l'ordre α^2 dans leſquels x & X pouvoient former enſemble des produits de deux dimenſions, on aura par ces ſubſtitutions des termes de la forme,

$$\alpha^2 f^2 \cos. 2pt,\ \alpha^2 fg \cos. (p \pm q)t,\ \alpha^2 af^2 \cos. (p \pm m \pm p)t,$$
$$\alpha^2 agf \cos. (p \pm m \pm q)t,\ \alpha^4 f^4 \cos. 4pt,\ \alpha^4 f^3 g \cos. (3p \pm q)t,$$
$$\alpha^2 bf^2 \cos. (2p \pm n)t,\ \alpha^2 b \cos. nt,\ \&\ \alpha^2 bgf \cos. (p \pm q \pm n)t:$$

c'eſt pourquoi on ſuppoſera

$$\begin{aligned} x = {} & a \cos. mt + \alpha^2 f^2 A \cos. 2pt \\ & + a^2 fgB \cos. (p+q)t + \alpha^2 fgB^{\mathrm{I}} \cos. (p-q)t \\ & + \alpha^2 af^2 C \cos. (2p+m)t + \alpha^2 af^2 C^{\mathrm{I}} \cos. (2p-m)t \\ & + \alpha^2 agfD \cos (p+q+m)t + \alpha^2 agf \cos. (p+q-m)t \\ & + \&c. \end{aligned}$$

& ſubſtituant cette valeur de x auſſi bien que celles de

y & X des articles précédens, on aura, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$a\, cof.\, mt\Big(-m^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-m^2)}-9\alpha^2 f^2(P+P^{\mathrm{I}})$$

$$+\frac{3\alpha^2 f^2}{p}\Big(\frac{P}{p+m}+\frac{P^{\mathrm{I}}}{p-m}\Big)+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2 cof.\, 2pt\Big(f^2 A\big(-4p^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-4p^2}\big)$$

$$-\frac{9f^2}{2}-\frac{3(1-3\alpha^2)f^2}{2p^2}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2 cof.(p+q)t\Big(fgB\big(-(p+q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-(p+q)^2)}\big)$$

$$-\frac{3\alpha^2 f^2 g AB^{\mathrm{I}}}{4}-9fg-\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2 cof.(p-q)t\Big(fgB^{\mathrm{I}}\big(-(p-q)^2+1+4\alpha^2-\frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2-p-q)^2)}\big)$$

$$-\frac{3\alpha^2 f^3 g AB}{4}-9fg+\frac{3fg(1-3\alpha^2)}{pq}+\&c.\Big)$$

$$+\alpha^2 a\, cof.(2p+m)t\Big(f^2 C\big(-(2p+m)^2+1+4\alpha^2\big)$$

$$-\frac{3f^2 A}{4}-9fP^2-\frac{3f^2 P}{p(p+m)}+\frac{9f^2}{4(p+m)(2p+m)}+\&c.\Big)$$

$$\alpha^2 a\, cof.(2p-m)t\Big(f^2 C^{\mathrm{I}}\big(-(2p-m)^2+1+4\alpha^2\big)$$

$$-\frac{3f^2 A}{4}-9f^2 P^{\mathrm{I}}-\frac{3f^2 P^{\mathrm{I}}}{p(p-m)}+\frac{9f^2}{4(p-m)(2p-m)}+\&c.\Big)$$

$$+\&c.=0.$$

Ainsi, il n'y aura plus qu'à égaler à zero les coefficiens de ces différens *cosinus*, pour déterminer les inconnues

$m, A, B, B^{\mathrm{I}}, C, C^{\mathrm{I}}$, &c.

Le coefficient de *cos.* mt donnera la valeur de m exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de α^2 inclusivement, & l'on aura, à cause de $P = -\frac{1}{4}$, & $P^{I} = \frac{3}{4}$ (art. préc.) l'équation

$$-m^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - m^2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4p(p+m)} + \frac{9\alpha^2 f^2}{4p(p-m)}$$
$$-\frac{9\alpha^2 f^2}{2} = 0;$$

ou bien

$$-m + 1 + 4\alpha^2 - \frac{3\alpha^2 f^2}{p(p+m)} - \frac{9\alpha^2 f^2}{2} = 0,$$

d'où, en mettant pour f, p, & m leurs valeurs approchées 1, on tire $m^2 = 1 - 2\alpha^2$, & $m = 1 - \alpha^2$. De sorte que le mouvement de l'apogée $(h - m)t$, deviendra $\frac{3\alpha^2}{4}t$, à cause de $h = 1 - \frac{\omega^2}{4}$.

Comme notre dessein n'est point de donner ici une théorie complette de la Lune, nous nous contenterons de ce léger essai, qui peut suffire pour donner une idée de la méthode qu'il faudra suivre dans l'intégration des équations différentielles de l'article 41 auxquelles nous avons réduits le Problême des mouvemens de la Lune & du Soleil autour de la Terre.

Quand on aura trouvé les valeurs de x, X & y en t, c'est-à-dire de r, r^{I} & r^{II}, on aura d'abord les latitudes ψ & ψ^{I} par les formules (t) de l'art. 42 & ensuite on aura les longitudes φ & φ^{I} par les formules (u) du même article; ou bien, comme $y = Rr$ *cos.* ζ^{II} en connoissant y, r & R, on connoîtra *cos.* $\zeta^2 = \frac{y}{\sqrt{(1 + x)(1 + x}}$;

or ζ^{II} eſt l'angle qui exprime la diſtance de la Lune au Soleil, de ſorte que comme la latitude du Soleil eſt très-petite & peut par conſéquent être négligée, on aura par la propriété connue des triangles ſphériques rectangles

$$cof.\ \zeta^{II} = cof.\ \psi \times cof.\ (\varphi - \varphi^{I})$$

& par conſéquent

$$cof.\ (\varphi - \varphi^{I}) = \frac{y}{cof.\ \psi\ \sqrt{(1 + x + X + xX)}}$$

Ainſi on aura par ce moyen la diſtance $\varphi - \varphi^{I}$ de la Lune au Soleil comptée ſur l'Ecliptique; mais la longitude φ^{I} du Soleil eſt aſſez connue par la loi de Kepler que cet Aſtre ſuit aſſez exactement puiſque les dérangemens que la Lune pourroit y produire ne feroit que de l'ordre de iB, ou de $i\alpha^2\sigma$, comme on le voit par l'équation (r) de l'article 41; donc en ajoutant cette longitude à la diſtance $\varphi - \varphi^{I}$ des deux aſtres, on aura la longitude φ de la Lune comptée à l'ordinaire dans l'écliptique.

FIN.

TRAITÉ
DE L'ARRIMAGE
DES VAISSEAUX.

Pondere tuta ſuo eſt navis jactata per undas.

CHAPITRE I.

Définitions, Notions préliminaires, conditions générales de l'Arrimage.

§. I.

L'ARRIMAGE eſt, comme on ſait, l'arrangement qu'on donne, dans le vaiſſeau, aux différentes matières qui en compoſent la charge. Cette diſtribution de la charge eſt une partie importante de la ſcience du Navigateur. En étudiant avec ſoin les divers mouvemens du vaiſſeau, & les cauſes qui peuvent les produire, on s'eſt apperçu que la tranſpoſition de quelques poids ſuffiſoit ſouvent pour augmenter la rapidité du ſillage, pour rendre le navire doux à la mer & ſenſible à l'action de ſon gouvernail. Mais l'utilité la plus évidente & la plus réelle d'un bon arrimage, c'eſt qu'il procure au navire la qualité de bien porter la voile, qualité qui doit être regardée comme la première de toutes : car non-ſeulement elle aſſure la navigation ; mais en faiſant conoître la quantité de mâture dont un vaiſſeau a beſoin, à proportion du volume d'eau qu'il déplace, elle permet encore, en certaines occaſions, de forcer de voiles pour doubler un cap, pour s'éloigner d'une côte, pour joindre, ou pour éviter l'ennemi, pour reprendre ſon poſte en corps d'armée, &c. Ces conſidérations montrent ſuffiſamment combien le ſujet propoſé mérite d'être approfondi. J'entreprens de le traiter dans toute ſon étendue, en le reprenant par les fondemens. On juge bien que je ſerai obligé de répéter des remarques & des détails qu'on peut trouver ailleurs. L'enchaînement des matières & l'envie de me rendre clair, m'en impoſent la néceſſité. La plupart des Géomètres, jaloux ſeulement de produire des choſes nouvelles, ne ſe mettent guères en peine d'en montrer la liaiſon avec celles qu'on connoiſſoit déja dans le même genre, & de réduire ainſi en corps la ſcience dont ils traitent ; mais cette méthode, ſouvent nuiſible au progrès des ſciences, parce qu'un habile homme dédaigne d'achever l'ouvrage d'un autre, & qu'un homme médiocre n'en eſt pas capable : cette méthode, dis-je, ſeroit ici entièrement vicieuſe, & contraire au but que l'Académie s'eſt propoſé de procurer à la Marine un ouvrage utile & facilement applicable à la pratique.

I I.

Lorſqu'un Conſtructeur veut entreprendre un vaiſſeau, il commence par en faire des desseins exacts & détaillés qui servent à le diriger dans son travail, & qui le mettent en état de reconnoître d'avance si le vaisseau projetté aura une belle batterie, de belles lignes d'eau, les capacités de l'avant & de l'arrière bien balancées, &c. Toutes ces dicussions essentielles doivent nécessairement précéder l'exécution de l'ouvrage, afin de donner infailliblement au vaisseau la forme la plus avantageuse. Elles ne sont pas aussi pénibles, ni aussi difficiles que bien des gens pourroient le penser. Depuis qu'on a appliqué la Géométrie, sur-tout les nouvelles méthodes des calculs différentiel & intégral, à l'Architecture navale, cette partie de l'Art nautique a fait des progrès immenses ; & la pratique est parvenue à éxécuter avec assez de précision les règles prescrites par la théorie. Mon objet n'est pas de me livrer à de nouvelles recherches en ce genre. Je considère le vaisseau tout construit, flottant à la mer, & je me propose de le charger de manière qu'avec une stabilité suffisante, il prenne & conserve dans l'eau les lignes déterminées par le Constructeur, ou même de lui donner, au moyen de l'arrimage, d'autres lignes d'eau, supposé que celles qui ont été déterminées par le Constructeur, fussent défectueuses.

III.

C'est un principe d'Hydrostatique que lorsqu'un corps solide flotte librement sur un fluide, 1.° le poids de ce corps est égal au poids du fluide qu'il déplace. 2.° Le centre de gravité de tout le corps & le centre de gravité de la partie submergée, considérée comme homogène, sont toujours placés sur une même ligne verticale. Ainsi le poids du vaisseau tout armé & prêt à faire voile, doit être égal au poids de l'eau déplacée par la carène. De plus le centre de gravité de tout le sistême qui compose la charge du navire doit être placé sur la verticale élevée par le centre de gravité de la carène. Je fais abstraction en ce moment de tout mouvement progressif ou oscillatoire; car si le navire n'est pas dans un parfait repos, son poids sera égal en général à la résultante de toutes les forces perdues verticalement dans le sens opposé.

Sur ce principe, il est essentiel de toiser la carène, & de déterminer la position de son centre de gravité; car on reconnoîtra par ce moyen le port du vaisseau & la manière générale dont la charge doit être arrangée, afin que le vaisseau arrive à la situation d'équilibre qu'on demande. Le pied cube d'eau de mer pèse, comme on sait, environ 72 livres: ainsi lorsqu'on aura calculé le nombre de pieds cubes que la carène déplace, on le multipliera par 72 livres pour avoir le poids total de la charge. On ne doit pas mettre moins de soin dans la distribution particulière de la charge. En effet, il est évident que cette distribution peut se faire d'une infinité de manières, telles que le vaisseau vienne toujours à la flottaison projettée. La question est de choisir, parmi tous ces arrangemens, celui qui procure, ou qui favorise le plus les qualités dont le vaisseau a besoin. Ceci sera pleinement éclairci dans la suite.

I V.

Tous les Auteurs qui ont écrit sur l'Architecturenavale, ont cherché des méthodes pour déterminer la carène & la position de son centre de gravité. On a tenté d'abord de résoudre le Problême, en rapportanr la figure du vaisseau à celle de quelque corps géométrique connu, par exemple, à celle d'une portion d'ellipsoïde. Mais cette supposition & les autres de ce genre étoient trop éloignées de la vérité; & dans ces derniers tems, on a eu recours à des moyens de pratique qui sont plus ou moins exacts, selon qu'on pousse plus ou moins loin l'approximation.

Ces moyens consistent à partager la carène en plusieurs parties qu'on regarde comme des Prismes, par des plans horisontaux également distans les uns des autres & par des plans verticaux aussi également distans les uns des autres Cela est expliqué fort au long dans les Ouvrages de MM. Bouguer & Duhamel qui sont entre les mains de tout le monde. Ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage: je me contenterai d'ajouter que si on veut résoudre ce problême d'une manière plus exacte & même plus commode à certains égards, on pourra employer les formules pour les quadratures des courbes, données par M. Cotes dans son livre intitulé *de Harmonia mensurarum*. Comme ces formules ne sont pas aussi connues, ni aussi en usage qu'elles devroient l'être, dans les problêmes d'approximation, je crois devoir les rapporter ici en faveur de quelques Lecteurs, mais sans en ajouter les démonstrations qui me méneroient trop loin, & qu'on déduira d'ailleurs facilement de l'ouvrage même de M. Cotes, ou de la méthode différentielle de Newton.

V.

Pour comprendre la table suivante, il faut savoir que *R* représente l'abscisse totale correspondante à l'aire entière qu'on veut quarrer, & que cette abscisse est partagée en plusieurs parties égales, auxquelles répondent des ordonnées dont le nombre est designé par le chiffre romain correspondant qui se trouve dans la première colonne à gauche. *A* est la somme de la première & de la dernière ordonnée, *B* la somme de la seconde & de la pénultième ordonnée, *C* la somme de la troisième & de l'antépénultième ordonnée, &c. Le reste s'entend de soi-même.

Nombre des ordonnées.	*Superficies.*
III.	$\left(\frac{A+4B}{6}\right)R$
IV.	$\left(\frac{A+2B}{8}\right)R$
V.	$\left(\frac{7A+32B+12C}{90}\right)R$
VI.	$\left(\frac{19A+75B+50C}{288}\right)R$
VII.	$\left(\frac{41A+216B+27C+272D}{840}\right)R$
VIII.	$\left(\frac{751A+3577B+1323C+2989D}{17280}\right)R$
IX.	$\left(\frac{989A+5888B-928C+10496D-4540E}{28350}\right)R$
X.	$\left(\frac{2857A+15741B+1080C+19344D+5778E}{89600}\right)R$

Cette Table, qu'il eſt facile de continuer, eſt aſſez étendue pour notre ſujet.

V I.

Les mêmes formules peuvent ſervir à déterminer le centre de gravité d'une courbe quelconque ; car ſuppoſons que FGKIL ſoit la courbe propoſée, AR ſon axe partagé en pluſieurs parties égales AP, PQ, QO, OR ;

Fig. I.

& que AF, PG, QK, &c, repréſentent les ordonnées qui répondent aux points A, P, Q, &c. Soit conſtruite ſur le même axe AR la courbe HMVXZ dont les ordonnées AH, PM, QV, &c, ſoient proportionnelles chacune à chacune des quantités $AF \times \frac{AF}{2}$, $PG \times \frac{PG}{2}$, $QK \times \frac{QK}{2}$, &c. Il eſt clair que l'aire AHMVXZR repréſentera le moment de l'aire AFGKILR, par rapport à l'axe AR. Ainſi diviſant l'aire AHMVXZR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la diſtance du centre de gravité cherché à l'axe AR. Qu'on conſtruiſe encore une troiſième courbe ANTDY dont les ordonnées PN, QT, &c, ſoient proportionnelles chacune à chacune des quantités $PG \times AP$, $QK \times AQ$, &c. En diviſant l'aire ANTDYR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la diſtance du centre de gravité cherché à l'axe AE.

Connoiſſant ainſi la diſtance du centre de gravité cherché aux deux axes AR, AE, il eſt clair qu'on connoîtra ſa véritable poſition.

VII.

Rien n'eſt plus facile que d'appliquer tout ce qu'on vient de dire à notre ſujet. Pour cela, on partagera la carène en pluſieurs tranches, qu'on regardera comme ſes élémens, & dont on déterminera les ſurfaces & les centres de gravité. Cela fait, on regardera ces tranches comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & l'aire de cette courbe repréſentera le volume de la carène. Enfin le centre de gravité ſe trouvera par le § précédent. Il eſt évident que pour plus de ſimplicité les tranches élémentaires de la carène doivent être parallèles ou perpendiculaires au plan de flottaiſon. Je crois que la ſeconde hypothèſe a quelqu'avantage ſur la première, & qu'il convient de procéder dans ce calcul de la manière ſuivante.

Soient AKBM (fig. 2), le plan de flottaiſon du vaiſſeau; Fig. 2, 3, 4.

ACDB (fig. 3), la coupe verticale faite suivant la direction de la quille, coupe qui divise le vaisseau en deux parties parfaitement égales & semblables; MFK (fig. 4), le maître couple dont le profil est représenté par la verticale EF (fig. 3), & la plus grande largeur par l'horisontale KM (fig. 2). Qu'à compter du maître couple EF, on partage chacune des deux parties EA, EB* de l'axe AB, en un certain nombre de parties égales, par exemple, chacune en cinq parties égales; & que par les points de division 1, 2, 3, 4, on mène des tranches parallèles au maître couple. Les profils de ces tranches sont marqués par les verticales $1f$, $2g$, $3h$, $4k$ (fig. 3). Toutes ces tranches, en y comprenant le maître couple, sont les élémens de la carène, & lorsqu'on en connoîtra les surfaces particulières, on connoîtra aussi le solide qu'elles forment par leur assemblage. Or pour déterminer, par exemple, la surface du Maître couple MFK, on partagera la hauteur EF en en certain nombre de parties égales; par exemple, en 5, aux points m, n, o, x, & on mènera les ordonnées mp, nq, or, xz, qu'on connoîtra d'après les dimensions connues du vaisseau; d'où il résulte qu'on connoîtra la surface MFK. Les surfaces des autres tranches se déterminent de même. Ainsi on aura tout ce qu'il faut pour connoître séparément la partie d'avant & la partie d'arrière de la carène, à compter du maître couple. Il est à propos de faire ainsi ces deux toisés à part, pour s'assurer si les capacités de l'avant & de l'arrière du vaisseau sont bien balancées. La partie d'avant doit être un peu plus grande que celle d'arrière, parce que l'arrière est fort pincé, afin de favoriser l'impulsion de l'eau sur le gouvernail.

Il ne sera pas moins facile de déterminer les centres de

* On doit remarquer que les deux parties EA, EB de l'axe ne sont pas égales entr'elles. Le maître couple est placé en avant du milieu de AB d'une certaine quantite qui n'est pas la même dans tous les vaisseaux.

de gravité des deux parties de la carène, & celui de leur ſiſtême; car multipliant l'aire de chaque couple par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe AB, regardant les produits comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & diviſant l'aire de cette courbe par l'aire de la courbe à laquelle le ſolide réſultant de l'aſſemblage des couples, eſt proportionnel, le quotient exprimera la diſtance du centre de gravité de ce ſolide à l'axe AB. Pareillement multipliant la ſurface de chaque couple par la diſtance de ſon centre de gravité à un plan perpendiculaire à la longueur AB, & paſſant par le point A ou B, regardant les produits comme les élémens d'une courbe à quarrer, diviſant l'aire de cette courbe par le ſolide correſpondant, on aura la diſtance du centre de gravité cherché au plan dont on a parlé. Donc enfin on connoîtra la vraie poſition de ce point.

Je n'ai pas beſoin d'ajouter que la quille, l'étrave & l'étambot doivent être déterminés ſéparément. Comme ces ſolides ſont des priſmes, ou peuvent être conſidérés comme des priſmes, leur toiſé n'a aucune difficulté. Les applications de toutes ces méthodes à des exemples particuliers ſont ſi aiſées, que je croirois abuſer de la patience du Lecteur d'en ſurcharger cet Ouvrage.

CHAPITRE II.

Énumération des matières qui composent la charge d'un vaisseau, emplacemens qu'elles ocupent, &c.

§. VIII.

COMME un vaisseau en mer, est, pour ainsi dire, un monde isolé, privé de tout secours étranger, il doit être pourvu de toutes les choses dont il peut avoir besoin relativement à l'objet, la durée, & la sureté de la navigation. Tels sont les trois points qui déterminent la nature, la quantité & l'arrangement de la charge. On comprend qu'il seroit aussi inutile qu'ennuyeux de nommer & compter ici en détail les différentes matières qui composent la charge d'un vaisseau. Mais en voici une notion générale & suffisante pour faire connoître les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Je commence par les vaisseaux de guerre.

IX.

D'abord on voit que la coque même du vaisseau & la mâture forment une partie considérable de la charge. On peut en déterminer le poids, en évaluant la quantité de bois & de ferrure qui y entrent. Mais cette méthode est longue, pénible & sujette à plusieurs erreurs. La manière la plus simple & la plus exacte de parvenir à la détermination dont il s'agit, est de calculer le poids de l'eau que le navire déplace en cet état. Il est évident que par ce même moyen, on peut connoître les poids de toutes les matières qu'on embarque; car la différence entre le poids de l'eau que le navire déplace, lorsqu'il a reçu quelques corps étrangers, & le poids de l'eau qu'il déplaçoit par le propre poids de sa coque & de sa mâture, est toujours égale au poids de ces corps étrangers. Entrons dans l'énumération succincte des parties de la charge, en commençant par le lest, qui est la première chose que l'on embarque.

X.

On appelle proprement *lest* une certaine quantité de matières pesantes, qu'on met au fond de la calle, & dont le seul objet est de faire enfoncer le vaisseau jusqu'à une profondeur convenable, & de le maintenir ferme dans son assiette, malgré les efforts contraires du vent ou des lames. Le lest le plus ordinaire est un gravier menu que la mer dépose sur les côtes. Les cailloux de pierres dures sont fort bons pour le même objet. Les éclats de pierres dures ont le défaut d'endommager les futailles contiguës. Les sables & les terres, qu'on employe dans quelques endroits, ne sont pas un bon lest, parce que l'eau entraîne ces matières dans l'archipompe, & qu'elles peuvent engorger les pompes, ce qui est extrêmement dangereux.

Pour éviter l'encombrement considérable qu'un lest tout en pierre occasionneroit dans la calle, & pour abbaisser d'ailleurs le centre de gravité de la charge, on compose la partie inférieure du lest avec des vieux canons, des boulets de rebut, des éclats de bombe, des saumons de fer fondus exprès pour cet usage, &c. Ensuite on met des pierres, entremêlant quelquefois des saumons & des boulets avec ces pierres; car cela est susceptible de plusieurs variétés. Le lest en fer doit être bien engravé, afin que l'assemblage n'ait pas de mouvement pendant le roulis. Il est visible que plus un lest est pesant à volume égal, plus il procure de stabilité au vaisseau. Ainsi, à cet égard, le lest en fer est très avantageux ; mais il y a des occasions où une trop grande quantité de lest en fer feroit descendre trop bas le centre de gravité de la charge, & par-là produiroit des secousses trop rudes au vaisseau, comme nous le verrons dans la suite.

Comme les canons qu'on veut embarquer pour lest, sont fort difficiles à arranger dans toute leur longueur, principalement aux extrémités de la calle ; on est en usage dans les ports, de scier tous les canons de fer de rebut par ruelles qui pèsent 100 à 150 livres, suivant le calibre des canons. Ces morceaux s'arrangent sans peine entre les porques Si l'on veut augmenter le poids du lest en canons, rien n'empêche de remplir l'intérieur de l'ame de ces canons, avec des pierres, ou avec de la féraille.

La quantité totale de lest est ordinairement environ le tiers du port du vaisseau. Mais on sent bien que cette règle n'est pas invariable. Dans plusieurs cas, les effets & les pacotilles dont le vaisseau est chargé, servent de lest en partie. Plus une campagne doit durer, plus il faut de vivres, de tonneaux de vin & d'eau, &c ; d'où il suit qu'il faut alors moins de lest. Mais à mesure qu'on consomme les provisions de bouche, on ne manque pas de faire du lest dans quelque rade ou port, lorsqu'il s'en présente, afin que le vaisseau demeure toujours également callé. La quantité de lest dépend aussi de l'âge du vaisseau. Plus un vaisseau est vieux, moins il peut porter de lest.

Il est facile de connoître la quantité de lest qu'on embarque. Pour cela, on a, dans le port de Toulon, des bateaux jaugés qui servent à mesurer la quantité de lest en gravier ou en cailloux Ces bateaux sont partie de 20 tonneaux, partie de 15 tonneaux, c'est-à-dire, d'une barquée & d'une barquée & demie A l'égard des morceaux de canons, on en connoît le poids par le calibre, comme nous l'avons déja dit: le poids des saumons est gravé sur leur tête.

Il eſt d'uſage de reſerver 10 à 15 tonneaux de leſt de fer en boulets ou en ſaumons, qu'on met à la grande écoutille, ou dans quelqu'autre endroit où l'on puiſſe le prendre commodément. C'eſt ce qu'on appelle le *leſt volant*. Il ſert à faire en mer quelques changemens à l'arrimage, comme nous le verrons dans la ſuite.

X I.

Les vaiſſeaux portent ordinairement ſept ancres, cinq groſſes & deux petites. L'une des cinq groſſes & la plus groſſe de toutes, qu'on appelle *la maitreſſe ancre*, l'ancre d'*eſpérance* ou de *miſéricorde*, ſe met dans la calle à la grande écoutille, afin de pouvoir être enlevée le plus aiſément qu'il eſt poſſible, ſuppoſé qu'on en eût malheureuſement beſoin. On voit qu'elle ſert de leſt en partie. Les quatre autres, qui ne diffèrent guères par leur poids, & que l'on nomme ancres de *poſte*, ainſi que les deux petites, que l'on nomme ancres à *jaſt*, ſe mettent dans l'avant du vaiſſeau, & en dehors depuis le commencement du gaillard d'avant juſqu'aux boſſoirs.

X I I.

Vers le milieu & dans la plus grande capacité de la calle ſont placées les futailles, au-deſſus du leſt, les tonneaux d'eau du côté de l'avant, & les tonneaux de vin du côté de l'arriere. Voyez les plans de l'*Altier*. On comprend aſſez que la quantité d'eau & de vin ſe regle ſur le nombre d'hommes de l'équipage, & ſur le tems que doit durer la campagne. Le Capitaine du vaiſſeau a ſa cave à part. L'emplacement de cette cave n'eſt pas le même dans tous les vaiſſeaux : il ſe prend dans l'endroit le plus commode, & le plus compatible avec les autres parties de l'arrimage. Fig. 5, 6, 7, 8, 9.

XIII.

Les barriques de lard, bœuf ſalé, morue, fromage, &c. ſont répandues dans la calle ſur le dernier rang des futailles, dans les endroits où l'on trouve à les loger. Seulement on obſerve que leur arrangement ſoit ſubordonné à la différence du tirant d'eau. Les barrils de farine ſe mettent dans des ſoutes particulières du côté de l'arrière. Il en eſt de même du biſcuit, avec cette différence néanmoins que les ſoutes au biſcuit ſont calfatées, brayées, & ſouvent nattées & fermées parfaitement. Les légumes ſont auſſi dans des ſoutes, quelquefois en grenier, quelquefois elles reſtent en ſacs.

XIV.

Dans les entredeux que laiſſent les barriques à vin & à eau, on diſtribue le bois, qu'on appelle *bois d'arrimage*. Le bois à brûler ſe place ſur les ailes du vaiſſeau, dans les endroits où on ne peut placer une barrique, ce qui arrive ſouvent dans l'emplacement des porques; & lorſque tous les plans d'arrimage ſont faits, ſoit qu'il y en ait deux ou trois, on couvre le dernier avec le reſtant du bois que l'on a ſoin de mettre bien horiſontalement.

XV.

A l'extrémité de la calle, vers la proue, eſt la *foſſe aux lions*. Cette foſſe dans laquelle ſe trouve le pied du mât de Mizaine, ſert à loger tout le rechange du Maître-d'équipage, en cordages, en poulies ſoit en roues de fonte ou de gayac, le ſuif en barriques, goudron, brai & autres choſes de ce genre. Vient enſuite la *foſſe aux cables* qui contient les cables, grêlins, brins & autres cordages relatifs au mouillage. Sous le plancher de la foſſe aux cables, qui eſt ordinairement à environ cinq pieds audeſſus de la carlingue, on met du leſt, ſoit en ſaumons ou en pierres. Si pourtant le vaiſſeau, par ſa configuration, n'a pas beaucoup de différence de tirant d'eau, on y en met peu, & quelquefois point du tout; car alors les effets contenus dans la foſſe aux lions, par leur ſituation & par leur poids, rappellent ſuffiſamment le vaiſſeau ſur l'avant.

Pluſieurs Capitaines ne font pas faire de foſſe aux cables. Alors on prolonge le plan d'arrimage juſques à la cloiſon de la foſſe aux lions, & l'on met les cables ſur un plancher porté par les faux baux, plus ou moins en avant, ſelon que la différence du tirant d'eau l'exige.

XVI.

Il y a encore dans la partie d'avant de la calle pluſieurs autres ſoutes, telles que celles du maître Charpentier, du maître Voilier, du Chirurgien, du Pilote, de MM. les Gardes de la Marine, &c.

Le Maître Charpentier a des bordages convenables à l'échantillon du vaiſſeau. Il a auſſi un rechange de la mâture, à l'exception, comme on peut bien penſer, des mâts majeurs & des deux baſſes vergues, qui ſont la grande & celle de mizaine.

La ſoute du maître Voilier contient un rechange de chaque voile, qui eſt en garniture, des piéces de toile neuve, pour le radoub des voiles, le calfat, goudron, brai gras & ſec, étoupe goudronnée, cloux de toutes ſortes, & autres matières relatives à ſon métier, pour remédier aux accidens qui peuvent arriver pendant la navigation. Il eſt auſſi muni de placards de plomb & de bois garnis d'étoupes pour boucher dans l'inſtant les trous faits par le canon dans un combat. Outre cette ſoute, on conſerve ſouvent un emplacement à pouvoir loger dans la calle les groſſes voiles qui ſont miſes dens des étuis de toile en prélarts ; & le Maître Voilier ne met dans ſa ſoute que les petites voiles & les piéces de rechange en toile pour radoub, ainſi que la vieille toile qu'il a pour ſervir de fourrure aux cables.

Dans la ſoute du Chirurgien, ſont les draps de lit & la terraille pour le ſervice des malades. Les coffres à médicamens ſe mettent ordinairement ſur le faux pont, avec les malles & autres effets des Officiers.

Le Pilote eſt pourvu de tous les inſtrumens néceſſaires pour diriger la route du vaiſſeau, &c,

XVII.

Le grand mât eſt environné d'une cloiſon quarrée dans laquelle ſont renfermées quatre pompes qui ſervent à épuiſer l'eau qui entre dans la calle. Cette cloiſon s'appelle *archepompe*, ou plus communément *archipompe*. Il y a auſſi une archipompe autour du mât de mizaine. Tout joignant l'avant de l'archipompe du grand mât, eſt un parquet où ſe tiennent les boulets, & dans lequel ſont différens compartimens, ſuivant le calibre des piéces. On fait encore ſur le pont, tout auprès du grand mât, des parquets qui contiennent des boulets du calibre des canons qui y ſont ; & l'on met à côté de chaque piéce une petite quantité de boulets pour le plus prompt ſervice de l'artillerie.

XVIII.

La ſoute aux barrils de poudre & aux artifices eſt tout-à-fait à l'arrière de la calle. Ordinairement on a auſſi à l'avant de la calle des caiſſons où l'on met des gargouſſes pleines, pour le plus prompt ſervice des canons de l'avant, lors d'un combat. Les uſtenſiles néceſſaires pour le ſervice des canons, comme pinces, anſpects, refouloirs, cuillers, tirebourres, gargouſſes vuides, porte-gargouſſes, gaargouffes, bouttefeu, méches, &c, fe mettent à l'arrière du vaiffeau dans une féparation qui eft faite dans l'entrepont depuis le mât d'artimon jufqu'à l'arrière. Cette féparation, qu'on appelle la *fainte-barbe*, fert encore à loger le maitre Canonier, l'Écrivain de la Marine, l'Aumônier, le premier Chirurgien & quelques-uns de Meffieurs les Gardes de la Marine, lorfqu'ils ne font pas tous logés fous le gaillard.

XIX.

Les ponts, gaillards, & dunettes, portent l'artillerie, les ancres, à l'exception de l'ancre d'efpérance, l'équipage, la chaloupe, les cuifines, les bœufs, vaches, moutons, chèvres, poules, &c.

On fait que les vaiffeaux de guerre fe diftribuent en différens rangs, & que c'eft par le nombre des canons que les rangs des vaiffeaux font diftingués. Les vaiffeaux du premier rang portent depuis cent vingt jufqu'à quatre-vingt-dix canons exclufivement; les vaiffeaux du fecond rang portent depuis quatre-vingt-dix jufqu'à foixante canons exclufivement; les vaiffeaux du troifième rang portent depuis foixante jufqu'à quarante-fix canons exclufivement. Viennent enfuite les *frégates* qui portent depuis quarante-fix jufqu'à vingt canons exclufivement. Les vaiffeaux qui ne portent pas plus de vingt canons s'appellent *corvettes*.

Nous avons déja indiqué les places des ancres fur les gaillards. Le premier pont, qu'on appelle ordinairement l'entrepont, contient, outre les canons de la première batterie & leurs uftenfiles, la plus grande partie de l'équipage, les différens poftes qui font ceux des Chirurgiens, des Malades, des Sergens, Caporaux, Charpentiers, Voiliers, apprentifs Canoniers, &c. Ces poftes font marqués par les entredeux des canons. Le parc aux moutons eft auffi fur ce même pont, au milieu de la partie d'avant. Sur le fecond pont, où eft la feconde batterie, font les canots & chaloupe, les cuifines du Capitaine & de l'équipage, le four. Sous le gaillard d'arrière qui eft à ce même pont, eft l'office du Capitaine. Lorfque l'on a embarqué des vaches & des bœufs, on les tient auffi fur ce même pont. Seulement pendant un combat on les fait defcendre dans la calle quand il y a de la place; car quand il n'y a pas de place, on les jette dans la mer, ainfi que les autres chofes qui embarraffent. Les cages à poulets fe mettent pareillement dans les entredeux des canons: elles fuivent le fort bœufs ou vaches, dans le cas d'un combat.

X X.

Je paffe rapidement fur tous ces détails qui ne contiennent rien de nouveau; mais pour éclaircir briévement la plupart des chofes qu'on vient de voir, j'ajoute les plans d'arrimage de deux vaiffeaux de foixante-quatre canons,
Fig. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. avec les explications marginales qui ont été jugées néceffaires. Je ne me fuis pas affujetti à deffiner ces figures fuivant les proportions rigoureufes des parties, parce qu'il ne s'agit pas ici de la conftruction des vaiffeaux, & qu'on n'a par conféquent pas befoin de connoître les véritables dimenfions des figures. On trouvera plufieurs différences dans l'arrimage des deux vaiffeaux dont il s'agit, foit par rapport à la qualité, la quantité & l'arrangement du left, foit même par rapport à la diftribution des futailles. Le refte de l'arrimage eft toujours à-peu-près le même dans tous les cas: car les autres emplacemens font déterminés, ou par la néceffité, ou par la commodité. Je renvoye à la fin de cet Ouvrage plufieurs devis des deux mêmes vaiffeaux.

X X I.

On juge bien qu'il eft comme impoffible de connoître en détail les poids de toutes les choses qu'on embarque; mais on connoît du moins les poids des principales. Supposons, par exemple, un vaisseau de 64 canons armé & approvisionné pour 6 mois, à 505 hommes d'équipage.

Le poids des vivres, non compris le poids des futailles au vin & à l'eau, mais en y comprenant le poids du bois d'arrimage & généralement tous les emballages qui servent a renfermer les vivres qui ne se mettent pas dans des soutes, peut monter à 971234 livres.

Le poids du bois d'arrimage monte à 204496 livres. Comme on ne peut pas prendre ce bois pour l'usage journalier des cuisines, puisque toutes les futailles sont pardessus, & qu'il est mis pour les contenir, on prend encore environ 2000 quintaux de bois pour le service des cuisines.

Le poids du vin, non compris le poids des futailles qui le contiennent, monte à 1715 quintaux.

Il y a dans un tel vaisseau

26 canons de $24^{\text{liv.}}$ de bale, & chacun pèse $5500^{\text{liv.}}$
28 canons de $12^{\text{liv.}}$ & chacun pèse .... 3200.
10 canons de $6^{\text{liv.}}$ & chacun pèse .... 1700.

Ce vaisseau porte 60 coups à tirer de chaque piéce, tant en poudre qu'en boulets, sans compter la mitraille.

La garniture en cordage pèse $43614^{\text{liv.}}$
Les cables pèsent .... 56047.
Les greslins .... 6896.
Le rechange en cordage ... 10939.
Les cinq grosses ancres .... 22500.
Les deux petites .... 3000.

Quant à la totalité de la charge, elle se détermine par le déplacement d'eau, comme nous l'avons dit §. IX: elle est ici d'environ 2180 tonneaux.

XXII.

Nous finirons par quelques remarques ſur l'arrimage des vaiſſeaux Marchands.

On ne peut guères donner une notion exacte, ni même approchée juſqu'à un certain point de la cargaiſon de ces ſortes de vaiſſeaux; car ils ſont chargées des marchandiſes convenables aux pays où ils vont. Lorſque le Négociant qui doit faire le chargement, en a donné l'état au Capitaine, celui ci a l'attention de ſe faire livrer d'abord toutes les marchandiſes les plus peſantes pour les mettre dans le fond ; & quand il n'y a pas de marchandiſes qui, par leur peſanteur, puiſſent ſervir de leſt, il fait prendre du leſt en pierre. Les navires qui vont porter leur cargaiſon aux Iſles de l'Amérique, embarquent pour leſt des briques, parce qu'on trouve à bien vendre ces briques dans les pays dont il s'agit.

Les marchandiſes qui ne ſont pas ſuſceptibles d'humidité ſont miſes dans la calle; celles qui peuvent prendre de l'humidité ſe mettent dans l'entrepont. Les Bâtimens marchands ne font pas d'arrimage avec des barriques dans la calle; la place leur eſt trop précieuſe pour cela. Ils font dans l'entrepont de l'avant une ſéparation dans laquelle le Capitaine fait enfermer les vivres embarquées pour ſon équipage. On met auſſi une partie des vivres dans la ſoute aux poudres. Pluſieurs barriques d'eau ſont encore miſes dans l'entrepont. Lorſqu'il reſte de la place dans la calle, on la réſerve à la grande écoutille, pour y loger des futailles d'eau ou devin. Au retour des Iſles, on fait le chargement en denrées du pays, & l'on place, par exemple, les barriques de ſucre dans l'endroit le plus bas, parce que leur poids ſert de leſt, &c.

CHAPITRE III.

Influence de l'arrimage ſur les qualités du vaiſſeau.

§. XXIII.

DANS le Chapitre précédent, nous avons expoſé les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Il nous reſte maintenant à diſcuter ces méthodes, & à leur donner toute la perfection dont elles ſont ſuſceptibles. Les qualités ſur leſquelles l'arrimage a de l'influence ſont la force que le vaiſſeau doit avoir pour conſerver ſa figure & ne pas s'arquer; la rapidité de la marche; les mouvemens de roulis & de tangage; les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles. Cette matière eſt, comme on voit, extrêmement abondante. Pour la conſidérer plus diſtinctement, nous la diviſerons en pluſieurs ſections.

SECTION I.

Influence de l'arrimage ſur le changement de forme du vaiſſeau.

XXIV.

SOIT *ACDB* le profil de la carène d'un vaiſſeau flottant à la mer. Imaginons que cette carène eſt partagée en une infinité de tranches verticales repréſentées par les droites *EF*, $1f$, $2g$, &c. On ſait qua la pouſſée perpendiculaire de l'eau ſur chacun des points *F*, *f*, *g*, &c, eſt exprimée par Fig. 3.

chacune des lignes correſpondantes EF, $1f$, $2g$, &c. Ainſi pour que l'aſſemblage des piéces qui forment la charpente du vaiſſeau, ne fut pas fatigué par la charge, cette charge devroit être diſtribuée proportionnellement aux capacités de la carène. Là où la pouſſée de l'eau eſt la plus grande, devroient être les plus grands poids: là où la pouſſée de l'eau eſt la moindre, devroient être les plus petits poids, &c. Souvent cette règle eſt violée au point que la quille vient à *s'arquer*, en formant une courbe convexe par en haut; parce que la charge des extrémités eſt trop conſidérable en comparaiſon de celle du milieu.

XXV.

On conçoit que la quille, par la réſiſtance dont elle eſt capable en elle-même, s'oppoſe aux puiſſances étrangères qui tendent à la faire plier, & qu'elle ne plie effectivement, que lorſque ſa propre réſiſtance en quelqu'un de ſes points eſt moindre que l'effort qu'elle ſouffre en ce même point. Examinons donc la réſiſtance de la quille dans un point donné de ſa longueur; & nous jugerons, par la comparaiſon de cette réſiſtance avec l'effort contraire, s'il n'y a pas de danger que la première force ne cède à la ſeconde. Cette recherche eſt intéreſſante, & peut avoir pluſieurs autres applications.

XXVI.

Fig. 14. Soit le rectangle $ABDC$ le profil d'une piéce de bois équarrie en parallépipéde rectangle. Qu'à cette piéce, conſidérée comme non peſante, & d'ailleurs parfaitement libre, ſoient appliquées trois puiſſances parallèles S, Q, R, qui ſe feroient mutuellement équilibre ſi la piéce de bois étoit une verge abſolument inflexible. Suppoſons que cette piéce vienne à ſe rompre dans la ſection verticale donnée

NT: on demande quelles doivent être pour cela les quantités des trois puiſſances *S*, *Q*, *R* ?

Imaginons, ſuivant l'hypothèſe ordinaire, la piéce compoſée d'une infinité de fibres ou filets parallèles à *AB* & à *CD*. Dans l'inſtant où elle eſt prête à ſe rompre, les fibres s'allongent d'une certaine quantité dans la ſection verticale donnée *NT*; & ces petits allongemens forment un eſpace triangulaire *FNI* dont le ſommet eſt en *N*, & la baſe, très-petite *FI*, ſur *AB*. De plus les élémens *HK*, *PM*, *FI*, &c, du triangle *FNI* ſont proportionnels aux forces avec leſquelles les fibres ſont tendues en ces endroits, puiſqu'ils expriment les quantités dont les fibres ſont tirées de leur état naturel pour réſiſter à l'effort contraire qui provient de l'action des trois puiſſances *S*, *Q*, *R*.

Cela poſé, en conſidérant *CNF* comme un levier angulaire dont l'appui eſt en *N*, & dont le bras *CN* eſt tiré perpendiculairement par la puiſſance *S*, & le bras *NF* par toutes les tenſions *HK*, *PM*, *FI*, &c, du triangle *FNI*, il y aura équilibre dans ce levier, ſi le moment de la force *S* par rapport au point *N*, eſt égal à la ſomme des momens des forces *HK*, *PM*, *FI*, &c, par rapport au même point.

Donc

ſi l'on ſuppoſe
- *AB* ou *CD* . . . . $=a$
- *AT* ou *AF* ou *CN* . . . . $=b$
- *AV* . . . . $=c$
- la hauteur ou épaiſſeur *NT* de la piéce $=h$
- ſa largeur . . . . $=k$
- *NP* . . . . $=x$
- la force de tenſion du filet *FI* . . . . . $=f$

on aura d'abord l'équation $S \times b = \int \frac{fkxxdx}{h}$, dans laquelle on doit ſuppoſer $x=h$, après l'intégration; ce qui donne

$$S=\frac{fkhh}{3b}.$$

De plus, puiſque les trois puiſſances S, Q, R, ſe feroient mutuellement équilibre, ſi la piéce étoit une verge inflexible, on a

$$S\times c=Q(a-c),$$

$$S+Q=R;$$

donc

$$Q=\frac{fkhhc}{3b(a-c)},$$

$$R=\frac{fkhh}{3b}+\frac{fkhhc}{3b.(a-c)}=\frac{fkhha}{3b.(a-c)}.$$

On remarquera que DNI peut être de même regardé comme un levier angulaire auquel ſont appliquées les forces Q, R, & les tenſions des fibres du triangle FNI; ce qui donneroit l'équation

$$\frac{fkhh}{3}=Q(a-b)-R(c-b).$$

Mais cetre équation eſt renfermée dans les précédentes.

Si l'on ſuppoſe $b=c$, ou que la piéce ſe rompe au point V, & qu'on faſſe $c=na$ (n étant un nombre fractionnaire), on aura

$$S=\frac{fkhh}{3na},$$

$$Q=\frac{fkhh}{3a.(1-n)},$$

$$R=\frac{fkhh}{3a.(n-n^2)}.$$

Il eſt évident qu'on trouveroit, par la même méthode, les valeurs des puiſſances capables de rompre la piéce en un point donné, quel que fût le nombre, & quelle que fût la loi de ces puissances, en supposant toujours qu'elles se fissent mutuellement équilibre, si la piéce étoit absolument inflexible.

XXVII.

Ces formules sont fort simples, & deviendront d'un usage très commode dans la pratique, lorsqu'on connoîtra la quantité f. Or pour déterminer f, nous nous servirons des expériences que M. de Buffon a faites sur la résistance des bois (Mém. de l'Acad. an. 1740 & 1741). Il est vrai que ce celebre Auteur n'a pas examiné le cas dont il est ici question; car il considère seulement une piéce de bois soutenue par ses extrémités sur deux appuis fixes, & chargée dans son milieu d'un poids qui la fait plier ou rompre. Mais on pourra, avec quelque préparation, déduire des résultats qu'il trouve, la quantité que nous cherchons. En effet, en regardant les deux puissances P & Q comme deux appuis, & supposant que la piéce se rompe dans son milieu, en vertu d'un poids connu F posé sur ce même milieu, on trouvera par notre méthode (en nommant toujours a la longueur de la piéce, h son épaisseur, k sa largeur, f la tension absolue du dernier filet),

$$F = \frac{4fkhh}{3a};$$

$$\text{donc } f = \frac{3a}{4khh}. F.$$

Substituant cette valeur de f dans les trois formules du § précédent, on aura

$$F = \frac{F}{4n}, \quad Q = \frac{F}{4.(1-n)}, \quad R = \frac{F}{4(n-n^2)}.$$

Maintenant, suivant la septième table de M. de Buffon, (Mém. de l'Acad. 1741, page 334), une piece de bois de chêne de 5 pouces d'équarissage, sur 7 pieds de longueur, se rompt sous la charge de 11525 livres; donc on aura en général $F = \frac{hhk}{a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525$ livres. Donc enfin $S = \frac{hhk}{4na} \times \frac{7^{\text{ieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525$ liv; $Q = \frac{hhk}{4\cdot(1-n)a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times$ 11525 livres; $R = \frac{hhk}{4\cdot(n-n^2)a} \times \frac{7^{\text{ieds}}}{5\times5\times5^{\text{pouc. cub.}}} \times 11525$ livres.

XXVIII.

Fig. 15. Tout cela posé, soit *ABDC* le profil de la quille flottante à la mer, dans une situation horisontale, & dans une immobilité absolue. Supposons que la poussée verticale de l'eau est réunie au centre de gravité de la carène, & que cette force est exprimée par la verticale *RO*. Qu'on représente par *MP* la résultante de tous les poids dont l'avant du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie *ACOV* de la quille; qu'on représente de même par *NQ* la la résultante de tous les poids dont l'arrière du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie *BDOV* de la quille. Alors la quille est pressée par les trois puissances *RO*, *MP*, *NQ* qui se feroient mutuellement équilibre, si elle étoit une verge absolument inflexible. Il ne s'agit plus que de chercher par le §. précédent les puissances qu'il faudroit appliquer en *V*, *P*, *Q*, afin que la quille se rompît, par exemple en *V*; & par la relation de ces trois nouvelles puissances aux forces *RO*, *MP*, *NQ*, on reconnoîtra si cet accident est à craindre.

On voit en général, par la formule $R = \frac{hhk}{4\,(n-n^2)a} \times \frac{7^{\text{pieds}}}{5\times5\times5^{\text{pou. cub.}}} \times 11525^{\text{liv.}}$ qu'à mesure que a ou *PQ* diminue, toutes choses d'ailleurs égales, la force qu'il faut appliquer en *V* pour rompre la quille augmente. Ainsi en rapprochant le plus qu'il est possible du milieu de la carène les poids qui composent la charge, le vaisseau sera d'autant moins exposé à s'arquer.

XXIX.

Appliquons cette théorie au vaisseau de soixante-dix canons, dont M. Duhamel a donné la construction, dans son Architecture navale.

Le poids total de ce vaisseau, ou la poussée verticale de l'eau, est de $2334^{\text{ton.}}\ 1409^{\text{liv.}}$ ou de $4669403^{\text{liv.}}$ la longueur de la quille est de $139^{\text{pieds}}\ 4^{\text{pou.}}\ 10^{\text{lig.}}$; l'épaisseur ou hauteur de cette même quille est de $1^{\text{pi.}}\ 7^{\text{po.}}\ 3^{\text{lig.}}$, & sa largeur horisontale de $1^{\text{pi.}}\ 5^{\text{po.}}\ 1^{\text{li.}}$

Supposons, pour la plus grande simplicité, que la force RO réponde au milieu de la quille, que la force MP réponde au milieu de la partie AV, & la force NQ au milieu de la partie BV. Ces suppositions auxquelles notre méthode n'est pas d'ailleurs assujettie, approchent ici suffisamment de la vérité, pour ne produire aucune erreur sensible. Nous aurons donc force $RO = 4669409^{\text{liv.}}$, force $MP = 2334704\frac{1}{2}^{\text{liv.}}$, force $NQ = 2334704\frac{1}{2}^{\text{liv.}}$; $a = 69^{\text{pi.}}\ 8^{\text{po.}}\ 5^{\text{lig.}}$. Or les trois forces R, S, Q, qui répondent chacune à chacune des trois forces RO, MP, NQ, deviennent à-très-peu-près, $R = 58392^{\text{liv.}}$, $S = 29196^{\text{liv.}}$, $Q = 29196^{\text{liv.}}$; d'où l'on voit que les forces capables de rompre la quille sont considérablement moindres que celles dont elle est effectivement pressée, & que par conséquent elle ne manqueroit pas de se rompre, si elle n'étoit pas fortifiée par les assemblages des piéces dont elle est composée, & par la ferrure; & si d'ailleurs les ponts & les couples ne la soulageoient pas d'une grande partie de la charge. Il est peut-être impossible de soumettre à un calcul satisfaisant ces secours étrangers dont la quille tire sa principale force. Quoi qu'il en soit, il est certain que pour empêcher un vaiſſeau de s'arquer, on doit rapprocher le plus qu'il eſt poſſible la charge du milieu de la carène.

Comme l'avant du vaiſſeau eſt néceſſairement chargé par le mât de mizaine, le petit hunier & le petit perroquet, tous les agrêts qui appartiennent à ces mâts, par les cuiſines, par le beaupré, par la poulaine, par les cables, &c; & que d'ailleurs cette partie doit être un peu pincée pour diviſer facilement le fluide, la charge n'y peut guères être proportionnelle aux capacités. J'en dis autant de l'arrière qui eſt chargé du gouvernail, des gaillards & dunettes, de l'artimon, de la ſainte-barbe, &c. Mais on pourroit mettre plus de leſt qu'on ne fait ordinairement au milieu de la calle, & en débarraſſer les extrémités du vaiſſeau. Cet arrangement que je propoſe, a encore l'avantage de favoriſer les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, ou des voiles, comme on le verra dans la ſuite; mais alors il convient d'employer un leſt fort peſant, afin qu'étant diſtribué ſur plus de hauteur dans la calle, le centre de gravité de la charge ne ſoit pas néanmoins trop élevé; ce qui pourroit enlever au navire la qualité de bien porter la voile, ou au moins occaſionner des mouvemens nuiſibles à la mâture.

SECTION II.

Influence de l'arrimage ſur le mouvement progreſſif uniforme du vaiſſeau.

XXX.

Je ſuppoſe un vaiſſeau qui cingle en pleine mer, avec une viteſſe parfaitement uniforme, & qui porte parfaitement la voile, c'eſt-à-dire, ſans s'incliner en aucun ſens. Ce cas n'a jamais lieu en rigueur; mais il mérite d'être examiné par sa simplicité, & parce qu'il va nous montrer clairement comment la distribution de la charge peut contribuer à augmenter la rapidité du sillage.

Soit donc *AKBM* le plan de flottaison d'un navire cinglant suivant la route oblique *GCH*, laquelle forme, avec la direction *AB* de la quille, l'angle donné *ACH* de la dérive. Soient *IC* la direction réelle du vent, que je suppose horisontale, *KM* la voile qui est censée parfaitement tendue, & qui forme, avec la direction du vent, l'angle donné *ICM*. Il est clair que la partie de l'effort du vent qui résulte perpendiculairement contre la voile, doit être en équilibre, à chaque instant, avec la force horisontale qui provient de toutes les impulsions perpendiculaires du fluide contre toutes les parties du navire que le fluide frappe en effet. Par conséquent, si par le point *C* où *KM* coupe l'axe *AB*, on mène *NL* perpendiculaire à *KM*, & que *LVN* (fig. 17) soit la coupe verticale du navire faite suivant *NL*, les directions des deux forces dont il s'agit seront situées dans le plan *LVN*. Supposons que *ZS* soit la direction de la force résultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles, que *XS* soit la direction de la force résultante des impulsions perpendiculaires de l'eau contre le navire: les deux droites *ZS*, *XS* se couperont nécessairement au point *S* centre d'impression des voiles. De plus, si l'on représente l'impulsion du vent par *ST*, l'impulsion de l'eau par *SO*, & qu'on décompose cette dernière force en deux autres *SK*, *SP*, l'une horisontale l'autre verticale, on aura *SK*=*ST*. A l'égard de la force verticale *SP*, elle ne pourra être détruite que par un poids particulier qu'on lui opposera.

Fig. 16.

Fig. 17.

Cela posé, en nommant A^2 l'étendue des voiles, B^2 la surface plane qui exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit une résistance égale à la force *SK*, m l'angle *ICM*, n l'angle *GCM*, *V* la vitesse absolue du vent suivant *IC*, u la vitesse absolue du navire suivant *CH*, 1 la densité du vent, p celle de l'eau : on aura, par le principe ordinaire de l'impulſion des fluides contre les corps expoſés à leur courant, l'équation

$$u = \frac{AV\,\text{ſin.}\,m}{A\,\text{ſin.}\,n + BVp}.$$

XXXI.

Il eſt viſible, par cette formule, que ſi l'angle de la dérive, la viteſſe & la direction du vent demeurent les mêmes, on ne pourra augmenter la rapidité du ſillage, qu'en augmentant A, c'eſt-à-dire, qu'en forçant de voiles. Or ſi l'on force en effet de voiles, on doit avoir ſoin de diſpoſer les nouvelles voiles de manière que le centre d'impreſſion de tout le ſiſtême demeure toujours au même endroit. Dans le cas où ce point changeroit de place, il eſt clair que la quantité B ſubiroit quelque variation. Alors il faudroit faire quelque tranſpoſition de poids, de manière que la réſultante des efforts perpendiculaires de l'eau paſſât par le nouveau centre d'impreſſion des voiles. Si l'angle de la dérive change, il pourra arriver que la viteſſe du vaiſſeau augmente ou diminue, ſuivant la relation qui ſe trouve entre le numérateur & le dénominateur de la fraction propoſée. Connoiſſant la figure de la carène, on pourroit déterminer dans chaque cas la viteſſe du vaiſſeau par la théorie ; mais en mer on ne fait pas ces ſortes de calculs. On tranſpoſe différens poids en tâtonnant, juſqu'à ce que le vaiſſeau ait toute la viteſſe qu'on en peut attendre. Cependant la formule précédente n'en eſt pas moins utile ; car elle indique les moyens certains de réuſſir, a l'excluſion de tous les autres.

XXXII.

C'eſt donc ainſi qu'on parviendra à augmenter la rapidité de la marche par l'arrimage. Si les lignes d'eau déterminées par le Conſtructeur ſont jugées bonnes dans une première campagne, & qu'on veuille cependant gagner encore quelque chose sur la rapidité du sillage, on aura soin de procurer une plus grande stabilité au vaisseau, en abaissant davantage le centre de gravité de la charge totale. Ensuite on déployera une plus grande quantité de voiles, de manière que le centre d'impression de tout le sistême demeure le même qu'il étoit auparavant. Si un vaisseau s'est mal comporté à la mer pendant une première campagne, & qu'on impute ses défauts, du moins en partie, à l'arrimage, on fera, pour une autre campagne, un arrimage tout différent du premier. La manière de distribuer les canons, les saumons, &c, dans la calle, étant absolument arbitraire, on est le maître de corriger, par un arrangement bien combiné & bien réfléchi du lest, les défauts du navire, qui proviennent de l'arrimage. Nous discuterons dans la suite les moyens qu'on doit mettre en œuvre pour s'opposer, autant qu'il est possible, aux mouvemens de roulis & de tangage. Si l'on veut faire en mer des changemens à l'arrimage, on transportera quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Le lest volant est destiné à faire ces sortes de changemens. Lorsqu'il n'est pas suffisant, il y a dans la fosse aux lions beaucoup de poulies, cordages & autres effets que l'on peut transporter sur l'arrière, si l'on est trop sur l'avant. Pareillement dans le cas où l'on est trop sur l'arrière, il y a dans cette partie des barils de farine, des légumes en sacs, &c, qu'on peut porter sur l'avant.

On peut aussi prendre dans l'archipompe une certaine quantité de boulets de service que l'on transportera sur l'avant ou sur l'arrière, selon le besoin, dans des forins vuides exprès pour cet usage. En tems de paix, on peut démonter quelques canons des batteries, qu'on pose à l'avant ou à l'arrière, & qu'on remet en place, lorsqu'on approche des rades. Comme l'on consomme journellement de l'eau & du vin, & que pour conserver le vaisseau dans son équilibre, & toujours également callé, on a attention, pour peu qu'il y ait de futailles vuides, de les remplir avec de l'eau de la mer; si l'on est trop sur l'arrière, on ne remplit pas les futailles de vin qui ont été consommées. Si on est trop sur l'avant, & qu'on n'ait pas de futailles vuides dans cette partie, on consomme celles qui y sont de préférence; & si elles sont pleines d'eau salée, on les fait vuider. On voit qu'on peut toujours tirer quelque parti des futailles pour les changemens de l'arrimage. Il n'en est pas de même des matières comestibles, parce qu'on ne peut pas remplacer en mer ces sortes de matières. Mais lorsqu'on est à portée de quelque port ou de quelque rade, on ne manque pas d'y descendre pour faire du lest, & maintenir par là le vaisseau dans l'assiette convenable.

Toutes les opérations que je viens d'exposer sont fort simples, & le bon sens suffit seul pour en faire connoître l'avantage, ou même la nécessité. Cependant on a été très-longtems à sentir l'influence marquée de l'arrimage sur les mouvemens du vaisseau. On a vu souvent des vaisseaux condamnés à une première campagne, comme mauvais voiliers, se faire, avec la même voilure, une réputation toute opposée, dans les campagnes suivantes: différence qui ne peut être attribuée qu'au changement d'arrimage. Les Marins éclairés regardent aujourd'hui cette distribution de la charge comme un objet important qui mérite toute leur attention. Quelquefois même il résulte des effets surprenans de la simple transposition de quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Il seroit donc bien essentiel, pour la perfection de la pratique de l'arrimage, qu'on étudiât exactement en mer tous les mouvemens du vaisseau, qu'on tînt un journal détaillé de tous les changemens qu'on fait en mer à l'arrimage, & des effets qui en proviennent, & qu'on ne se contentât pas d'attester en gros, à la fin d'une campagne, comme on fait ordinairement, que le vaisseau s'est comporté de telle ou telle façon à la mer.

SECTION

SECTION III.

Influence de l'arrimage sur les mouvemens d'oscillation du vaisseau.

XXXIII.

Il n'est pas possible qu'un vaisseau à la mer conserve toujours la même situation, comme nous l'avons supposé (§. XXX); car il est continuellement soumis à l'action de différentes forces qui ne se font jamais parfaitement équilibre. Ces forces sont sa propre pesanteur, la poussée verticale de l'eau, l'impulsion du vent sur les voiles, la résistance que le navire éprouve en divisant le fluide: à quoi on peut ajouter l'agitation des lames, qui tantôt viennent frapper avec force les flancs du vaisseau, tantôt se dérobent tout-d'un-coup sous quelqu'une de ses parties, pendant que les autres sont soutenues. Les mouvemens d'oscillation que ces puissances impriment au vaisseau, en toutes sortes de sens, peuvent tourmenter extrêmement la mâture & l'équipage. Il est donc important d'en bien connoître les loix, & d'en empêcher le plus qu'il est possible les mauvais effets, au moyen de l'arrimage. C'est le but que je me propose ici.

XXXIV.

Comme j'aurai besoin de quelques théorêmes de méchanique, dont l'énoncé joint à l'application que j'en ferai, couperoit trop le fil du discours, je vais les rappeller ici d'avance.

Qu'un corps de figure quelconque soit animé par des forces quelconques, & qu'on imagine par le centre de Fig. 18.

gravité A de ce corps trois axes AC, AB, AP perpendiculaires entr'eux qui conservent toujours leur parallélisme dans l'espace absolu, pendant tout le mouvement du centre de gravité. Si l'on réduit à chaque instant, comme cela est possible en effet, toutes les forces qui poussent le corps à trois forces seulement, qui soient dirigées suivant les lignes Ff, Dd, Ee, parallèles chacune à chacun des trois axes AP, AB, AC; qu'ensuite ayant mené dans le plan BAC les droites FQ, FO parallèles chacune à chacun des deux axes AB, AB; dans le plan BAP les deux droites ER, ES parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AP; dans le plan CAP les droites DK, DH parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AP; d'un point quelconque N du corps proposé les trois coordonnées AP, PM, MN, aux trois axes proposés : on nomme F la force dirigée suivant Ff, D la force dirigée suivant Dd, E la force dirigée suivant Ee, dt l'élément du tems, P la masse entière du corps, $d\Pi$ l'espace parcouru par le centre de gravité A, durant l'instant dt, parallélement à AP, $d\varpi$ l'espace parcouru par le centre de gravité A parallélement à AC, du l'espace par le centre de gravité parallélement à AB, q l'abscisse AP, r l'ordonnnée PM, s la seconde ordonnée MN, on aura ces six équations.

$$F = \frac{Pdd\Pi}{dt^2},$$

$$E = \frac{Pdd\varpi}{dt^2},$$

$$D = \frac{Pddu}{dt^2},$$

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{dPd(sdq - qds)}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{dPd(rdq - qdr)}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{dPd(rdr - rds)}{dt^2}.$$

Ces théorèmes sont fondés sur les premiers principes de la Statique, qui nous apprennent qu'afin qu'un corps, par l'inertie de ses molécules, fasse équilibre aux différentes forces qui le sollicitent au mouvement: 1.° La somme de ces forces étrangères, réduite à trois forces seulement, parallèles chacune à chacun de trois axes qui se croisent perpendiculairement entr'eux, & qui passent par le centre de gravité, doit être égale à la somme des résistances des molécules du corps, réduites aux mêmes sens. 2.° Les momens des premières forces, par rapport aux trois axes proposés, doivent être égaux aux momens des dernières, par rapport aux mêmes axes. Toutes ces choses sont démontrées en détail dans quelques Ouvrages auxquels on me permettra de renvoyer le Lecteur.

XXXV.

Cela posé, voici la manière d'appliquer ces formules aux mouvemens dont il s'agit §. 33, lorsqu'on connoîtra la figure du vaisseau & la loi de toutes les forces qui l'agitent.

Soient *ADBE* (fig. 20), le plan de flottaison du vaisseau au premier instant du mouvement, *AB* & *DE* les sections de ce plan avec deux plans verticaux, perpendiculaires entr'eux, & passant l'un & l'autre par le centre de gravité du vaisseau. Ces deux derniers plans sont représentés par *ARZB* (fig. 19), & par *DeE* (fig. 21), respectivement. Soit le point *G* (fig. 19 & 21), le centre de gravité du vaisseau au même instant: qu'on mène par ce point l'axe vertical *GC*, & les deux axes horisontaux *GQ*, *GT*, le premier dans le plan *ARZB*, le second dans le plan *DeE*. Il est clair que les trois axes *GC*, *GQ*, *GT* sont ici les mêmes que les trois axes *AB*, *AP*, *AC* de la figure 18. Fig. 19, 20, 21.

Supposons, comme dans le §. précédent, que chacun de ces trois axes, emporté avec le centre de gravité, demeure toujours parallèle à lui-même, pendant toute la durée du mouvement.

Quelques puissent être les mouvemens du vaisseau, il est évident qu'ils peuvent être regardés comme composés de trois mouvemens progressifs du centre de gravité G, le premier suivant GQ, le second suivant GT, le troisième suivant GC, & de trois mouvemens de rotation de toute la masse autour des trois axes, GQ, GT, GC. C'est donc sur cette hypothèse qu'on va indiquer la méthode de calculer les forces D, E, F, & les momens des mêmes forces par rapport aux trois axes de rotation, ainsi que les résistances des molécules du vaisseau, & les momens des mêmes résistances par rapport aux axes proposés.

XXXVI.

Les forces particulières qui composent ici les forces D, E, F, sont, comme nous l'avons déja dit, la pesanteur du vaisseau, la poussée verticale de l'eau, la résistance de l'eau, l'impulsion du vent & l'agitation des lames. De ces différentes forces, la pesanteur seule du vaisseau, est constante; les autres sont variables & dépendent ou de la figure du vaisseau & de la partie qui est plongée à chaque instant dans l'eau, ou de la figure des voiles. Supposons que le profil longitudinal $AKZB$, partant de la situation représentée dans la figure 22, où MN est la ligne d'eau au premier instant, parvienne au bout du tems proposé dans la situation $arzb$, où mn est la ligne d'eau; ensorte qu'il s'incline de la poupe à la proue d'une certaine quantité, & qu'en même tems le centre de gravité s'élève verticalement de la quantité VO. La figure du vaisseau étant donnée, il est clair qu'on connoîtra par la seule Géométrie, l'espace $hrzf$. Il n'est pas moins évident qu'après que le vaisseau aura subi les deux autres mouvemens de rotation, on connoîtra encore l'efpace qu il occupe dans l'eau. Par conféquent la pouffée verticale de l'eau & fes momens par rapport aux trois axes dont on a parlé, feront exprimés en fonctions de quantités conftantes, du mouvement d'afcenfion verticale, & des mouvemens de rotation. Les forces qui naiffent de l'impulfion de l'eau & des lames contre les flan s de la carène, & de l'impulfion du vent contre les voiles fe détermineront fuivant les méthodes ordinaires, ou fuivant les nouvell s hypothèfes qu'on croira les plus vraifemblables. Je n entre pas là-deffus dans de plus grands détails, parce qu'on verra bientôt l'inutilité d'envifager le problême fous un point de vue fi général. Il fuffit, quant à-préfent, qu'on apperçoive les moyens de traduire, relativement à notre queftion, les fix premiers membres des équations du §. 34.

XXXVII.

Soient dans la figure 23 les trois axes GQ, GC, GT, qui fe croifent perpendiculairement au centre de gravité G, axes qui font les mêmes refpectivement que ceux qui font défignés par les mêmes lettres dans les figures 19 & 21. D'un point déterminé H du navire au premier inftant du mouvement, foit abbaiffée HF perpendiculaire au plan horizontal IGQ, & du point F foit tirée FE perpendiculaire à GQ, de manière que GE, EF, FH foient les coordonnées du point H par rapport aux trois axes propofés. Suppofons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe vertical GC, la droite FH, en tournant parallélement à elle-même, prenne la pofition SV; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GQ, le point V parviennne en R; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GT, le point R parvienne en N. Il eft clair que fi de ce point N on abbaiffe NM perpendiculaire au plan horifontal IGQ, & qu'on tire MP perpendiculaire à GQ; les trois coordonnées GP, Fig. 23.

PM, MN sont celles que nous avons nommées q, r, s, respectivement dans le §. 34, & dont il s'agit maintenant de trouver les expressions en fonctions des trois angles de rotation.

Soient tirées les droites GF, GS, DV. Du point R soit abbaissée RO perpendiculaire sur le plan horisontal TGQ, & par le point O soit menée perpendiculairement à GT la droite XO qui passe nécessairement par le point M. Soient tirées les droites XR, XN. Enfin des points D & X soient élevées perpendiculairement au plan TGC, ou parallélement à l'axe GC, les droites DZ, XY.

Supposons $\begin{cases} GE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \psi \\ EF \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda \\ FH \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \mu \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GC \ldots = x \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GQ \ldots = y \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GT \ldots = z \end{cases}$

Cela posé, 1.° l'angle DGS étant la somme de l'angle EGF, & de l'angle FGS (x), on aura

$$\sin. DGS = \frac{\lambda \cos. x + \psi \sin. x}{GF},$$

$$\cos. DGS = \frac{\psi \cos. x - \lambda \sin. x}{GF}$$

donc

$$DS = \lambda \cos x + \psi \sin. x,$$
$$GD = \psi \cos. x - \lambda \sin. x.$$

2.° l'angle RDZ étant la somme de l'angle VDZ & de l'angle VDR (y), on aura

$$\sin. RDZ = \frac{DS \times \cos. y + SV \times \sin. y}{DV} = \frac{\lambda \cos. x \cos. y + \psi \sin x \cos. y + \mu \sin. y}{DV},$$

$$\cos. RDZ = \frac{SV \times \cos y - DS \times \sin. y}{DV} = \frac{\mu \cos. y - \lambda \cos. x \sin. y - \psi \sin. x \sin. y}{DV}.$$

donc

$DO = \lambda \, cos.\, x \, cos.\, y + \psi \, sin.\, x \, cos.\, y + \mu \, sin.\, y$,

$RO = \mu \, cos.\, y - \lambda \, cos.\, x \, sin.\, y - \psi \, sin.\, x \, sin.\, y$.

Donc, à cause de $PM = DO$,

$$r = \lambda \, cos.\, x \, cos.\, y + \psi \, sin.\, x \, cos.\, y + \mu \, sin.\, y.$$

3.° L'angle NXY étant la somme de l'angle RXY & de $RXN\,(z)$, on aura, (à cause de

$$sin.\, NXY = \frac{XO \times cos.\, z + RO \times sin.\, z}{RX},$$

$$cos.\, NXY = \frac{RO \times cos.\, z - XO \times sin.\, z}{RX}$$

& de $XO = GD$, $XM = GP = q$, $MN = s$),

$$q = \psi \, cos.\, x \, cos.\, z - \lambda \, sin.\, x \, cos.\, z + \mu \, cos.\, y \, sin.\, z - \lambda \, cos.\, x \, sin.\, y \, sin.\, z - \psi \, sin.\, x \, sin.\, y \, sin.\, z,$$

$$s = \mu \, cos.\, y \, cos.\, z - \lambda \, cos.\, x \, sin.\, y \, cos.\, z - \psi \, sin.\, x \, sin.\, y \, cos.\, z - \psi \, cos.\, x \, sin.\, z + \lambda \, sin.\, x \, sin.\, z.$$

Ces valeurs de r, q, s sont générales & applicables à toutes sortes de corps.

Nous aurons donc ici les valeurs des trois quantités

$$\int dP\, d\,(s dq - q ds),\ \int dP\, d\,(r dq - q dr),\ \int dP\, d\,(s dr - r ds).$$

Dans les deux différentiations qu'il faut faire d'abord pour trouver $d\,(sdq - qds)$, $d\,(rdq - qdr)$, $d\,(sdr - rds)$, les angles x, y, z sont variables, & les quantités ψ, λ, μ sont constantes. Mais dans l'intégration qui suit, il n'y a que les quatre quantités dP, ψ, λ, μ qui doivent être regardées comme variables, les autres doivent être écrites au devant des signes d'intégration, parce qu'alors les intégrales renferment les mouvemens en tant qu'ils sont appliqués à tous les points de la masse du corps.

XXXVIII.

Il suit des deux §. précédens, qu'on pourra traduire entièrement les équations générales du §. XXXIV, de manière qu'elles repréſentent en général tous les mouvemens d'un vaiſſeau flottant à la mer. Mais il faut avouer que l'exécution de cette méthode demanderoit des calculs immenſes & vraiſemblablement impraticables. Heureuſement pluſieurs raiſons diſpenſent d'entreprendre ce travail dans toute ſa complication.

1.° La figure du vaiſſeau eſt extrêmement irrégulière, & ne peut ſe rapporter à celle d'aucun corps géométrique. Elle eſt fort différente dans les différens vaiſſeaux: par conſéquent les calculs qu'on feroit à cet égard ſeroient purement hypothétiques, & n'iroient point au but dans la pratique.

2.° L'impulſion du vent ſur les voiles, & la réſiſtance que le navire éprouve en diviſant l'eau, ſont deux forces qui ſe font ſans ceſſe équilibre, du moins a-très-peu-près. Si cet équilibre vient à être dérangé, il ſe rétablit très-promptement & peut être conſidéré comme permanent. De plus ces deux mêmes forces ſont ordinairement fort petites en comparaiſon de la peſanteur du vaiſſeau & de la pouſſée verticale de l'eau. Ainſi les inégalités qu'elles produiſent dans les mouvemens du vaiſſeau peuvent le plus ſouvent être négligés, ſans craindre aucune erreur ſenſible.

3.° L'action des lames eſt une force qu'il eſt abſolument impoſſible de ſoumettre à un calcul réel & non hypothétique. Dans certains momens, cette force ſe fait ſentir avec violence: dans d'autres elle eſt comme nulle. Je crois qu'il convient de la rapporter plutôt au genre des forces de *percuſſion*, qui agiſſent par coups *finis* & *interrompus*, qu'au genre des forces de *preſſion*. Par-là elle doit être exclue du calcul. La fonction qu'elle aura alors ſera de troubler de tems en tems l'état actuel du vaiſſeau, ce qui ne peut qu'introduire certaines quantités conſtantes dans les intégrations.

4.° Il eſt inutile de déterminer en général les oſcillations d'un vaiſſeau, parce que ces oſcillations ne doivent jamais paſſer

passer certaines bornes, afin qu'il y ait sureté dans la navigation. Ainsi la solution de ce problême aura assez de généralité, si l'on détermine seulement les oscillations très-petites du vaisseau, & qu'on assigne de plus les conditions qui doivent avoir lieu, afin que ces mêmes oscillations dèmeurent très petites.

De ces quatre assertions, la première, la troisième & la quatrième sont évidentes par elles-mêmes. La seconde est la seule qui ait besoin d'une explication un peu plus développée.

XXXIX.

Le vent est la force motrice qui met le navire en mouvement, & qui le pousse vers le but désiré. Dans les premiers instans, cette force l'emporte beaucoup sur la résistance que le navire éprouve en divisant l'eau. Ainsi le sillage s'accélère avec rapidité. Mais cette accélération ne dure guères que trois ou quatre minutes. Au bout de ce tems le vaisseau a acquis toute sa vitesse, qu'il conserve dans la suite, en vertu de son inertie; & par conséquent l'impulsion du vent & la résistance de l'eau se font équilibre. Cela est constant par l'expérience.

La même chose peut encore se démontrer par le raisonnement. Quoique cette discussion n'appartienne pas proprement à mon sujet, je crois devoir y entrer, parce qu'un Auteur célebre qui a traité au long ce problême, n'a pas fait une remarque dont l'omission semble mettre le calcul en contradiction avec l'expérience.

Supposons, avec l'Auteur dont il s'agit, un navire qui se meut suivant la route directe, & qui étant en repos au premier instant du mouvement, est exposé tout-d'un-coup à l'action du vent. Il est question de déterminer le tems que ce navire employera à acquérir toute sa vitesse. On voit assez que si on trouve ce tems fort petit, on sera en droit d'affirmer, à plus forte raison, que l'accélération ou la rétardation auxquelles un navire en mer peut être sujet, s'opèrent en un tems très-court, & de regarder par conséquent sa vitesse comme sensiblement uniforme.

Nommons g la gravité, N la masse du navire, 1 la densité du vent, p celle de l'eau, A^2 la surface plane qui exposée au choc perpendiculaire du vent, éprouveroit la même choc qu'éprouvent les voiles parallélement à la quille, B^2 la surface qui exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même impulsion qu'éprouve le navire dans le sens de sa quille, V la vitesse du vent (qu'on peut regarder comme constante, au moins pendant un certain tems), u la vitesse variable du navire, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement. Supposons de plus que sous une vitesse donnée m, l'impulsion directe de l'eau contre un plan donné n^2, soit égale à un poids dont la masse est P.

Cela posé, on aura, suivant l'hypothèse ordinaire, que l'impulsion directe d'un fluide contre un plan est proportionnelle au produit de ce plan par la densité du fluide, & par le quarré de la vitesse avec laquelle se fait le choc,

$$\frac{gP}{pm^2n^2}\left[A^2(V-u)^2-pB^2u^2\right]dt=Ndu;$$

d'où l'on tire aisément

$$t=\frac{pm^2n^2}{gP}\times\frac{N}{2ABV\sqrt{p}}L.\left(\frac{AV-Au+Bu\sqrt{p}}{AV-Au-Bu\sqrt{p}}\right),$$

en complettant l'intégrale, de manière que $t=0$ donne $u=0$.

Maintenant il est évident que l'accélération devient nulle lorsqu'on a $A^2(V-u)^2-pB^2u^2=0$, ou bien $u=\frac{AV}{A+B\sqrt{p}}$. Il semble donc que pour déterminer le tems que le navire emploie à acquérir sa plus grande vitesse, il n'y auroit qu'à substituer cette valeur de u dans l'expression générale de t. Mais si l'on fait cette substitution, on trouvera que le dénominateur de la quantité logarithmique devient égal à zéro; d'où il s'ensuit que le tems cherché, au lieu d'être très-petit, seroit au contraire infini. Comment concilier le calcul avec l'expérience? voici le dénouement de cette petite difficulté.

Il est certain d'abord que suivant l'hypothèse de l'impulsion des fluides, dont nous venons de tirer la valeur du tems, la vitesse ne peut parvenir à une uniformité rigoureuse qu'au bout d'un tems infini. Dans le commencement du mouvement, l'impulsion du vent contre le navire est très-grande; d'où il suit que u augmente très-promptement: & comme le quarré de u entre dans l'expression de la résistance que l'eau oppose au navire, on comprend que u peut approcher très-près de $\frac{AV}{A+BVp}$, sans qu'on ait pour cela rigoureusement $A^2(V-u)^2=pB^2u^2$. Ainsi s'il n'y avoit pas d'autre cause qui influât sur la vitesse, elle ne parviendroit pas à l'uniformité absolue. Mais il faut remarquer que le navire éprouve encore une autre sorte de résistance qui achève d'opérer l'effet dont il s'agit. Cette seconde résistance est celle qui naît de la ténacité ou de l'adhésion mutuelle des parties de l'eau. Elle est comme nulle, en comparaison de la première, lorsque le navire a acquis une vitesse un peu considérable. Mais dans les premiers instans du mouvement, elle doit se faire sentir & produire quelque rétardation dans la vitesse du vaisseau, de manière que, par la combinaison des deux résistances, la vitesse devient bientôt uniforme, comme on l'observe en effet.

Quant à ce que nous avons ajouté que l'impulsion du vent & la résistance de l'eau sont des forces très-petites en comparaison de la pesanteur du vaisseau, & de la poussée verticale de l'eau; cela est aisé à voir par les calculs de l'impulsion de l'eau contre la proue de plusieurs vaisseaux, que M. Duhamel a faits dans son Architecture navale.

X L.

Je reviens à mon ſujet, & je vais en conſéquence de toutes les remarques qui précédent, déterminer les mouvemens d'oſcillation du vaiſſeau, en ſuppoſant ces oſcillations très-petites, & en n'ayant égard qu'à la peſanteur du vaiſſeau, & à la pouſſée verticale de l'eau. Je compte parmi ces oſcillations le mouvement d'aſcenſion verticale du centre de gravité. Les autres mouvemens du centre de gravité ſont ſuppoſés ou nuls, ou parfaitement uniformes. La réſiſtance que le navire éprouve en frappant l'eau, en vertu des mouvemens d'oſcillation dont on vient de parler, doit être négligée; parce que cette force renferme dans ſon expreſſion le quarré de la viteſſe, qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre.

Soient repriſes les hypothèſes & les conſtructions des §. XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII, en obſervant Fig. 19, 20, 21, 22. néanmoins qu'ici le plan *ARZB* peut être cenſé paſſer par la quille, & partager le vaiſſeau en deux parties parfaitement égales & ſemblables, parce que l'inclinaiſon primitive eſt très petite. Qu'outre les dénominations déja employées dans ces mêmes paragraphes, on ſuppoſe encore

La gravité . . . . $=g$
Le volume du navire . . . . $=N$
Sa denſité . . . . $=1$
Le volume de la carène primitive . . . . $=M$
La denſité de l'eau . . . . $=p$
La diſtance *OH* du centre de gravité du plan de flottaiſon *ADBE* (fig. 20) au point *O* . . . $=k$
La hauteur du centre de gravité du navire au-deſſus de celui de la carène au premier inſtant $=h$
La diſtance initiale très-petite du centre de gravité de la carène primitive aux plan vertical *ARZB* . . . . $=f$

La distance initiale aussi très-petite du centre de gravité de la carène primitive au plan vertial DeE (fig. 22) .... $=f'$

L'aire $ADBE$ (fig. 20) .... $=aa$

Le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité .... $=u$.

Nous aurons ici $F=0$, $E=0$.

La force D, la seule qui nous reste, est égale à l'excès de la poussée verticale de l'eau sur la pesanteur du navire. Supposons que le plan de flottaison AB ayant pris la position ab peu différente de la première, en vertu de la rotation du navire autour de l'axe GT, on abbaisse du centre de gravité G la perpendiculaire Go sur ab: il est clair que les points O & o étant très-proches l'un de l'autre, les deux plans de flottaison AB & ab peuvent être censés se couper sur la verticale GO; & que de plus les angles formés par la rencontre de AB & de ab sont égaux à l'angle OGo. Les mêmes remarques ont lieu relativement au mouvement du navire autour de l'axe GQ. Cela posé, il est évident que la nouvelle carène, après le tems t écoulé, est égale à la première M, moins un prisme qui a pour base le plan de flottaison $ADBE$, & pour hauteur la hauteur parcourue verticalement par le centre de gravité, moins un onglet formé par la rotation de la partie EBD autour de ED, plus un onglet formé par la rotation de la partie EAD autour de ED, moins un onglet formé par la rotation de la partie AEB autour de AB, plus un onglet formé par la rotation de la partie ADB autour de AB. Donc à cause de l'égalité de ces deux derniers onglets, la nouvelle carène sera $M-aau-\alpha z+\varepsilon z$, α & ε étant des coéficiens donnés par la nature de la courbe $ADBE$. Donc Fig. 22.

1.° $D=gP(M-aau-\alpha z+\varepsilon z)-gN$.

2.° La distance initiale du centre de gravité de M au plan DeE étant f', cette distance après le tems t sera

$f'+hz$. Soient $\alpha'z$ & $\varepsilon'z$ les momens des deux onglets αz, εz par rapport à l'axe GT, α' & ε' étant encore des coéficiens donnés. Je néglige deux momens de la forme $\alpha''y$, à cause de leur petitesse. Le moment du prisme aau par rapport à l'axe GT est $aaku$. Donc, en observant que le moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe GT doit être pris dans un sens contraire au moment de la force D dans la figure 18, nous aurons ici

$$-D\times DH = gp[M(f'+hz)-aaku-\alpha'z-\varepsilon'z].$$

De même, en nommant γy le moment de l'onglet formé par la rotation de AEB ou de ADB autour de AB, par rapport à l'axe GQ; & observant que le prisme aau & les deux autres onglets αz, εz n'ont point de momens par rapport à l'axe GQ, nous aurons

$$-D\times DK = gp[M(f+hy)-2\gamma y].$$

3.° Les oscillations étant supposées fort petites, il est évident que dans les valeurs de r, q, s trouvées ci-dessus, (§ XXXVII), on peut négliger tous les termes qui contiennent plus d'un sinus, & supposer dans les termes qui contiennent un sinus & un cosinus ou deux cosinus, chaque cosinus $=1$: d'où il résulte qu'on aura

$$sdq-qds = -\lambda\mu dx+(\mu^2+\psi^2)dz+\psi\lambda dy,$$
$$rdq-qdr = -(\psi^2+\lambda^2)dx+\lambda\mu dz-\psi\mu dy,$$
$$sdr-rds = \psi\mu dx+(\lambda^2+\mu^2)dy+\psi\lambda dz.$$

Donc

$$\int dPd(sdq-qds) = -ddx\int\lambda\mu dN+ddz\int(\mu^2+\psi^2)dN-ddy\int\psi\lambda dN,$$
$$\int dPd(rdq-qdr) = -ddx\int(\psi^2+\lambda^2)dN+ddz\int\lambda\mu dN-ddy\int\psi\mu dN,$$
$$\int dPd(sdr-rds) = ddx\int\psi\mu dN+ddy\int(\lambda^2+\mu^2)dN+ddz\int\psi\lambda dN.$$

Les quantités qui sont sous le signe d'intégration sont données por la figure du navire.

Ces formules peuvent ſe ſimplifier; car puiſque le navire eſt diviſé en deux parties égales & ſemblables par la coupe longitudinale $ARZB$, il eſt clair qu'on a $\int \lambda\mu dN=0$, $\int \psi\lambda dN=0$. Ainſi on aura ſimplement

$$\int dPd(sdq-qds)=ddz\int(\psi^2+\mu^2)dN,$$

$$\int dPd(rdq-qdr)=-ddx\int(\psi^2+\lambda^2)dN-ddy\int\psi\mu dN,$$

$$\int dPd(sdr-rds)=ddx\int\psi\mu dN+ddy\int(\lambda^2+\mu^2)dN.$$

Nous ſuppoſerons, pour abréger, $\int(\psi^2+\mu^2)dN=Q$, $\int(\psi^2+\lambda^2)dN=R$, $\int\psi\mu dN=S$, $\int(\lambda^2+\mu^2)dN=V$; & l'on ſe ſouviendra que

Q repréſente la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe latitudinal GT,

R repréſente la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe vertical GC,

S repréſente la ſomme des produits des particules du navire par leurs diſtances à la coupe latitudinale paſſant par le centre de gravité & à la coupe horiſontale paſſant auſſi par le centre de gravité,

V repréſente la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe longitudinal GQ.

Tout cela poſé, on aura ces quatre équations fondamentales,

$$gp(M-aau-\alpha z+\varepsilon z)-gN=\frac{Nddu}{dt^2},$$

$$gp[M(f'+hz)-aaku-\alpha' z-\varepsilon' z]=\frac{Qddz}{dt^2},$$

$$Rddx+Sddy=0,$$

$$gp[M(f+hy)-2\gamma y]=\frac{Sddx+Vddy}{dt^2},$$

dont les deux premières combinées enſemble ſont intégrables par des méthodes connues; les deux dernières auſſi combinées enſemble ſont encore plus faciles à intégrer.

XLI.

Pour parvenir à des résultats très-simples & facilement applicables à la pratique, nous négligerons encore le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité, qui ne peut jamais être fort sensible, lorsqu'on fait abstraction, comme nous faisons ici, de l'action des lames. Alors la première équation devient nulle, & le terme $aaku$ disparoit de la seconde. Par conséquent les trois mouvemens d'oscillation du vaisseau seront exprimées par ces trois équations

$$\text{(A)}\quad gp[M(f'+hz)-\alpha'z-\epsilon'z]=\frac{Qddz}{dt^2},$$

$$\text{(B)}\quad Rddx+Sddy=0,$$

$$\text{(C)}\quad gp[M(f+hy)-2\gamma y]=\frac{Sddx+Vddy}{dt^2}.$$

Multipliant tous les termes de la première par dz, & intégrant, on aura

$$gp\left[Mf'z+\frac{(Mh-\alpha'-\epsilon')zz}{2}\right]=\frac{Qdz^2}{2dt^2},$$

d'où l'on tire facilement

$$z=\frac{Mf'}{\alpha'+\epsilon'-Mh}-\frac{Mf'}{\alpha'+\epsilon'-Mh}\operatorname{cof.}\left(t\sqrt{\frac{gp.(\alpha'+\epsilon'-Mh)}{Q}}\right).$$

On trouvera de même

$$y=\frac{Mf}{2\gamma-Mh}-\frac{Mf}{2\gamma-Mh}\operatorname{cof.}\left(t\sqrt{\frac{gp.R(2\gamma-Mh)}{RV-SS}}\right);$$

$$x=-\frac{S}{R}\times\frac{Mf}{2\gamma-Mh}+\frac{S}{R}\times\frac{Mf}{2\gamma-Mh}\operatorname{cof.}\left(t\sqrt{\frac{gp\,R(2\gamma-Mh)}{RV-SS}}\right).$$

Ces intégrales sont complettes, parce qu'on doit avoir $z=0$, $y=0$, $x=0$, lorsque $t=0$.

Qu'on prenne une nouvelle variable v telle que l'on ait

$$t=v\sqrt{\frac{Q}{gp.(\alpha'+\epsilon'-Mh)}}$$

on

on trouvera

$$z = \frac{Mf'}{\alpha' + \epsilon' - Mh} - \frac{Mf'}{\alpha' + \epsilon' - Mh} \times cof. v,$$

$$y = \frac{Mf}{2\gamma - Mh} - \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \times cof.\left(v \sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(\alpha' + \epsilon' - Mh)}}\right),$$

$$x = -\frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} + \frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \times cof.\left(v \sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(\alpha' + \epsilon' - M)}}\right)$$

Dans chacune de ces valeurs de z, y, x, le premier terme eſt *conſtant*, le ſecond eſt *variable*. Celui ci peut être conſidéré comme l'équation du premier, en employant ce mot dans le même ſens que font les Aſtronomes en pareil cas. L'un & l'autre terme eſt fort petit, parce qu'on a ſuppoſé que f & f' étoient des quantités très- petites.

Ces formules vont nous fournir (au moins par une approximation ſuffiſamment exacte dans la pratique) les moyens de procurer aux vaiſſeaux toute la ſtabilité convenable, & de modérer les mouvemens de tangage, de roulis & de rotation horiſontale. Commençons par la ſtabilité.

XLII.

En remontant aux trois équations fondamentales (A), (B), (C), on trouve que ſi Mh eſt plus grand que $(\alpha' + \epsilon')$, ou que ces deux quantités ſoient ſeulement égales, lorſqu'il s'agit des mouvemens de tangage; & que ſi Mh eſt plus grand que 2γ, ou que ces deux quantités ſoient ſeulement égales, lorſqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horiſontale: on trouvera, dis-je, que les valeurs de z, y, x contiendront des logarithmes, & ſeront par conſéquent ſujettes à augmenter à meſure que le tems t augmentera. Or ces quantités ont été ſuppoſées très-petites. Donc alors le navire n'aura pas de ſtabilité. Ainſi lorſqu il s'agit des mouvemens de tangage, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge totale puiſſe être placée au-deſſus de celui de la carène, eſt donnée par cette équation

$$h = \frac{\alpha' + \varepsilon'}{M};$$

Et lorſqu'il s'agit des mouvemens de roulis, & de rotation horiſontale, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge puiſſe être placée au deſſus de celui de la carène, eſt donnée par cette équation

$$h = \frac{2\gamma}{M}.$$

Il eſt évident que cette dernière hauteur eſt moindre que la précédente, & doit être priſe dans tous les cas pour la limite de la diſtance des deux centres de gravité, parce que le vaiſſeau roule en même temps qu'il tangue, ou roule après avoir tangué. On cherchera donc la valeur de la quantité $\frac{2\gamma}{M}$, & on aura ſoin de diſtribuer la charge, de manière qu h ſoit plus petite que $\frac{2\gamma}{M}$. Le vaiſſeau aura d'autant plus de ſtabilité que h ſera moindre en comparaiſon de $\frac{2\gamma}{M}$.

Il me ſemble que cette manière de déterminer la ſtabilité du vaiſſeau, ou la poſition du *métacentre*, eſt plus ſimple & plus directe que toutes celles que l'on a employées juſques à préſent.

On doit ſe ſouvenir que conformément à nos dénominations, α' eſt le moment de l'onglet très-petit formé par la rotation de l'aire EBD autour de ED, par rapport à la même ligne ED; ε' eſt le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire EAD autour de ED, par rapport à la même ligne ED; γ eſt le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire AEB ou ADB autour de AB, par rapport à la même ligne AB. Comme on néglige le mouvement d'aſcenſion du centre de gravité du vaiſſeau, & que

Fig. 20.

par conséquent la verticale élevée par ce même centre de gravité passe, du moins à-très-peu-près, par le centre de gravité du plan de flottaison, on a $\epsilon'=\alpha'$, au moins sensiblement.

XLIII.

Il n'est pas moins facile de déterminer l'amplitude des oscillations du vaisseau.

Les valeurs de z, y, x, augmentent depuis o jusqu'à ce que chaque cosinus particulier qu'elles renferment, devienne égal à -1 : alors elles atteignent leur *maximum* ; après quoi elles diminuent par les mêmes degrés. Donc si l'on nomme Z, Y, X respectivement les amplitudes *totales* & *absolues* des mouvemens de tangage, de roulis, & de rotation horizontale, on aura (en supposant $\alpha'=\epsilon'$),

$$Z=\frac{2Mf'}{2\alpha'-Mh},$$

$$Y=\frac{2Mf}{2\gamma-Mh},$$

$$X=\frac{S}{R}\times\frac{2Mf}{2\gamma-Mh}.$$

D'où l'on voit que pour diminuer l'amplitude des mouvemens de tangage & de roulis, la question se réduit à diminuer h dont on est le maître, c'est-à-dire, à abbaisser de plus en plus le centre de gravité de la charge totale. Quant aux mouvemens de rotation horisontale, on les diminuera en abbaissant le centre de gravité dela charge, en distribuant la charge, de la même manière (autant qu'il est possible), soit par rapport à la coupe latitudinale passant par le centre de gravité, soit par rapport à la coupe horizontale passant par le centre de gravité, & en éloignant les poids de l'axe vertical.

Tel est donc le moyen d'empêcher qu'un vaisseau, dans le roulis & le tangage ne décrive de trop grands arcs, c'est d'abbaiffer le plus qu'il est possible le centre de gravité de la charge. Par-là le vaisseau acquiert encore de la stabilité. Lorsque la carène est fort pincée par le bas, le vaisseau plie sous le vent jusqu'à ce qu'il ait atteint son fort, & l'inclinaison peut être portée très-loin. On prévient cet inconvénient, en abbaissant le centre de gravité. Mais il est quelquefois dangereux que le vent & la poussée verticale de l'eau, en se combattant mutuellement, n'exposent la mâture à se briser, lorsque l'une des deux forces cède tout d'un coup à l'autre. La profondeur du centre de gravité ne doit donc pas passer certaines limites, qu'on ne peut assigner en général, mais que les Marins expérimentés trouveront sans peine dans chaque cas particulier. Au contraire un vaisseau dont les fonds sont arrondis, tend à tourner dans toutes les situations; il cède presque sans résistance aux efforts du vent & des lames. Ainsi pour lui procurer de la stabilité, & pour diminuer l'amplitude de ses oscillations, on ne sauroit trop faire descendre son centre de gravité. Malheureusement on n'est pas toujours le maître de placer ce point comme il conviendroit, parce qu'on est gêné par les emplacemens fixes que certaines matières doivent nécessairement occuper. Par exemple, dans les vaisseaux de guerre, l'artillerie élève considérablement le centre de gravité. Alors il sera du moins avantageux; toutes choses d'ailleurs égales, que les canons de la première batterie soient plus pesans que ceux de la seconde, les canons de la seconde plus pesans que ceux de la troisième, &c. C'est une règle que la pratique a enseignée, & que la théorie confirme.

XLIV.

Enfin nous déterminerons encore par nos formules la *vitesse* des oscillations. Le problême se réduit à trouver le tems que le navire emploie à faire les oſcillations totales Z, Y, X; car ſelon que ce tems ſera plus ou moins long, la viteſſe ſera moins ou plus rapide.

Nous avons trouvé en général (§. XLI)

$$t = v\sqrt{\frac{Q}{gp\,(2\alpha' - Mh)}};$$

or lorſque z devient Z, $cof.\, v = -1$, ou bien $v = 180°$, lorſque y devient Y, $cof.\left(v\sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS).(2\alpha' - Mh)}}\right) = -1$, ou bien $v = 180°\sqrt{\frac{(RV - SS)(2\alpha' - Mh)}{QR.(2\gamma - Mh)}}$; lorſque x devient X, $v = 180°\sqrt{\frac{(RV - SS)(2\alpha' - Mh)}{QR.(2\gamma - Mh)}}$.

Donc, en conſidérant que le ſinus total eſt 1, & nommant n le rapport de la demie circonférence au rayon, $t(T)$ le tems de l'oſcillation totale de tangage, $t(R)$ le tems de l'oſcillation totale de roulis, $t(H)$ le tems de l'oſcillation totale de rotation horizontale, on aura

$$t(T) = n\sqrt{\frac{Q}{gp.(2\alpha' - Mh)}},$$

$$t(R) = n\sqrt{\frac{(RV - SS)}{gpR(2\gamma - Mh)}},$$

$$t(H) = n\sqrt{\frac{(RV - SS)}{gpR(2\gamma - Mh)}}.$$

On voit que les deux derniers tems ſont égaux entr'eux. L'expreſſion de ces deux mêmes tems peut ſe ſimplifier, parce que la quantité S, dans tous les vaiſſeaux, étant fort petite par rapport à chacune des quantités Q, R, V, il eſt permis de négliger le terme S^2.

Comme les valeurs des trois tems propoſés ne contiennent point les lettres f & f', il eſt clair que les tems des oſcillations ſeront toujours les mêmes dans chaque espèce, quelles que puissent être les amplitudes de ces oscillations, pourvû néanmoins qu'elles demeurent toujours fort petites.

Pour employer commodément ces formules, supposons qu'on exprime par b & c respectivement les quantités $\frac{Q}{p(2\alpha'-Mh)}$ & $\frac{V}{p.(2\gamma-Mh)}$ qui sont évidemment des lignes ; de manière que l'on ait $t(T)=n\sqrt{\frac{b}{g}}$, $t(R)$ ou $t(H)=n\sqrt{\frac{c}{g}}$. Soient nommés θ & θ' respectivement les tems qu'un corps employeroit par sa pesanteur à parcourir les espaces b & c : on aura, comme on sait, $\theta=\sqrt{\frac{2b}{g}}$, $\theta'=\sqrt{\frac{2c}{g}}$; donc $t(T)=\frac{n\theta}{\sqrt{2}}$, $t(R)$ ou $t(H)=\frac{n\theta'}{\sqrt{2}}$. Or si l'on suppose qu'un corps pesant parcoure 15 pieds pendant la première seconde de sa chute, on aura $\theta=1''\sqrt{\frac{b \text{ pieds}}{15 \text{ pieds}}}$, $\theta'=1''\sqrt{\frac{c \text{ pi.}}{15 \text{ pi.}}}$; donc enfin

$$t(T)=1''\times n\sqrt{\frac{Q}{30^{\text{pi.}}p(2\alpha'-Mh)}},$$

$$t(R) \text{ ou } t(H)=1''\times n\sqrt{\frac{V}{30^{\text{pi}}p(2\gamma-Mh)}},$$

expressions dans lesquelles les quantités radicales sont des nombres absolus.

Toutes ces préparations faites, voici les réflexions pratiques sur la vitesse des oscillations.

1.° On voit que pour diminuer la vitesse des mouvemens de tangage, ou pour augmenter $t(T)$, il faut augmenter la fraction $\frac{Q}{2\alpha'-Mh}$. Or dans cette fraction, le volume M de la carène est donné ; la quantité α est aussi donnée. Restent donc seulement les deux quantités Q & h

qu'on eſt le maître de changer par l'arrimage. Or puiſque Q repréſente la ſomme des produits des particules de la charge par les quarrés de leurs diſtances à l'axe latitudinal, il eſt évident qu'on diminuera la viteſſe des mouvemens de tangage, en écartant le plus qu'on pourra de l'axe latitudinal des poids fort peſans, c'eſt-à-dire, en tranſportant ces poids vers la proue & vers la pouppe. Nous avons ſuffiſamment indiqué (§. XXXII), les poids dont on peut ſe ſervir pour faire ces ſortes d'arrangemens, ſoit qu'il s'agiſſe d'arrimer le vaiſſeau dans le port, ſoit qu'il faille changer quelque choſe en mer à l'arrimage. Quant à l'autre moyen, qui conſiſte à augmenter h, c'eſt-à-dire, à élever le centre de gravité de la charge, il n'eſt pas tout-à-fait ſi efficace que le premier; cependant il peut être utile en pluſieurs occaſions. Lorſqu'un vaiſſeau doit porter des effets très peſans, tels que des canons, des ancres, du marbre, &c, & qu'on veut l'empêcher d'oſciller avec trop de vivacité, on élève le centre de gravité de la charge, en arrimant les canons, les ancres, &c, ſur un fardage qui eſt compoſé de lits de fagots, & dont l'épaiſſeur eſt plus ou moins grande, ſuivant le beſoin.

2.° En raiſonnant de même au ſujet des mouvemens de roulis & de rotation horizontale, il eſt clair qu'on diminuera la viteſſe de ces mouvemens, ſi l'on écarte le plus qu'on pourra de l'axe longitudinal du vaiſſeau, des poids fort peſans, c'eſt-à-dire, ſi l'on tranſporte ces poids bas bord & ſtribord dans les flancs du vaiſſeau. Cette même viteſſe diminue auſſi par l'élévation du centre de gravité de la charge.

X L V.

Nous avons vu (§. XLII & XLIII) que pour augmenter la ſtabilité du vaiſſeau, & pour diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, il faut abbaiſſer le centre de gravité de la charge; & nous venons de voir au contraire qu'un des moyens de diminuer la viteſſe des oſcillations, eſt d'élever le même centre. Ainſi les deux qualités de bien porter la voile, & de faire de petites oſcillations ſont en oppoſition avec celles d'oſciller lentement. Dans les vaiſſeaux de guerre, l'artillerie élève le centre de gravité de la charge; d'où il réſulte que ces vaiſſeaux ſont moins ſtables & font de plus grandes oſcillations que ſi l'artillerie étoit dans la calle; mais en récompenſe ils oſcillent avec plus de lenteur qu'ils ne feroient dans le cas purement hypothétique dont nous venons de parler. C'eſt une obſervation que les Marins ne paroiſſent pas avoir ſuffiſamment développée; car on n'a pas encore fixé, ce me ſemble, d'une manière bien claire, ce qu'on entend par rouler ou tanguer plus ou moins. On n'a pas non plus une idée bien nette de l'action des différentes ſortes de leſt qu'on emploie dans l'arrimage. Tous les jours on entend dire qu'une trop grande quantité de leſt en fer procure des ſecouſſes rudes au vaiſſeau, parce que ce genre de leſt a moins d'élaſticité, & ſe prête moins aux mouvemens du vaiſſeau, que le leſt en caillou. Mais il eſt évident que cette raiſon eſt chimérique, & qu'il faut attribuer l'effet dont il s'agit à la poſition moins ou plus élevée du centre de gravité de la charge. Je crois qu'il ne reſtera aucune obſcurité ſur cette matière, ſi l'onconſidère la diſtinction qu'on doit mettre entre l'amplitude & la viteſſe des oſcillations. Lorſqu'on abbaiſſe le centre de gravité de la charge, l'amplitude des oſcillations diminue; mais leur viteſſe augmente. Lorſqu'on élève le centre de gravité; la viteſſe des oſcillations diminue; mais leur amplitude augmente. La perfection de l'arrimage eſt de diſtribuer tellement la charge que le vaiſſeau, en oſcillant, ne décrive ni de trop grands ni de trop petits arcs; car de trop grands arcs, quoique décrits lentement, ne manquent pas de tourmenter beaucoup la mâture & l'équipage; & de trop petits arcs, par la vivacité dont ils ſont décrits, ont les mêmes & peut-être de plus grands inconvéniens. On parviendra à l'objet l'objet proposé, en étudiant la capacité & la forme du vaisseau qu'on veut charger. Par exemple, un vaisseau, arrondi par les fonds, doit avoir son centre de gravité très-bas. Alors il faut employer un lest très-pesant. Un vaisseau qui a les façons hautes, n'a pas besoin que son centre de gravité soit si bas. Cette remarque s'applique, proportions gardées aux cas intermédiaires. Il est vrai qu'on est souvent gêné dans l'arrimage, comme nous l'avons déja observé ci dessus, & qu'on ne peut pas toujours atteindre au but que l'on apperçoit. Car, par exemple, lorsqu'une campagne doit durer long-tems, & qu'on prend des vivres en conséquence, ces provisions occupent une partie considérable de la calle; & il peut se faire qu'il ne reste pas assez de place pour la quantité nécessaire de lest. En ce cas, il convient sur-tout d'employer un lest très-pesant, & de diminuer d'ailleurs la vitesse des oscillations par l'autre moyen que nous avons proposé, c'est-à-dire en écartant le plus qu'il est possible les parties les plus pesantes de la charge, de l'axe latitudinal & de l'axe longitudinal du vaisseau.

XLVI.

Après avoir exposé la manière la plus avantageuse d'arrimer un vaisseau, il ne nous reste plus qu'à examiner les effets des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage. Cette nouvelle recherche demande quelques principes de méchanique qu'il faut d'abord établir.

1.° Soit une verge inflexible AM, à laquelle soient appliqués un nombre quelconque de poids A, B, C, K, M. Soit hH la direction de la résultante de tous ces poids; & supposons qu'on prenne, par exemple, le poids C dans un endroit connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu E. Il est clair que, par cette transposition, la résultante de tous les poids ne passera plus par le point H, mais par quelqu'autre point O situé du côté de M; & il n'est pas difficile de voir qu'en nommant F la somme de tous les Fig. 24.

poids, pour abréger, on aura $F : C :: CE : HO$, ou bien $HO = \frac{C \times CE}{F}$. Mais pour démontrer cela en rigueur, soit nN la direction de la résultante de tous les poids qui sont placés du côté de M par rapport au point H, & soit nommée N cette résultante. Pareillement soit dD la direction de la résultante de tous les poids qui sont du côté de B, à l'exception cependant du poids C, & soit nommée D cette résultante. On aura avant la transposition du poids C,

$$N \times NH = D \times DH + C \times CH,$$

& après la transposition du poids C,

$$N \times NO = D \times DO + C \times EO,$$

ou bien

$$N \times (NH - HO) = D \times (DH + HO) + C \times (CH + HO - CE);$$

donc

$$N \times HO + (D + C) \times HO = C \times CE,$$

&

$$HO = \frac{C \times CE}{N + D + C} = \frac{C \times CE}{F}.$$

2.° Si l'on nomme P la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à un axe passant par le point H, avant la transposition du poids C; il est clair qu'après la transposition de ce poids de C en E, la somme de tous les poids par les quarrés de leurs distances au point ou axe H sera $P - C \times \overline{CH}^2 + C \times \overline{EH}^2$.

3.° La somme des produits de plusieurs corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à un axe qui ne passe pas par le centre de gravité du systême, est égale à la somme des produits des mêmes corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à un axe qui passe par le centre de gravité du sistême, & parallèle au premier, plus au produit de la somme de tous les corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes. Cette proposition est démontrée dans plusieurs livres de Dynamique * auxquels je renvoye le Lecteur, pour ne pas trop m'écarter de mon objet.

Il résulte de tout ce qu'on vient de dire, que si après la transposition du corps C en E, on nomme R la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le quarré de sa distance au point ou axe O, on aura

$$P - C\times\overline{CH}^2 + C\times\overline{EH}^2 = R + F\times\frac{\overline{CE}^2\times C^2}{F^2},$$

$$R = P - C\times\overline{CH}^2 + C\times\overline{EH}^2 - \frac{C^2\times\overline{CE}^2}{F}.$$

* Voyez, par exemple, la Science Navale de M. Euler, tom. I, pag. 74.

XLVII.

Fig. 24. A.

Maintenant il est aisé de déterminer les changemens qui arrivent dans la stabilité, l'amplitude & la durée des oscillations, lorsqu'on transporte des poids d'un endroit du vaisseau dans un autre.

Soient les trois axes GC, GQ, GT qui se croisent perpendiculairement au centre de gravité G du vaisseau. Supposons qu'on prenne un poids E à un endroit quelconque mais connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu D. Des points E & D soient abbaissées sur le plan horizontal TGQ les perpendiculaires ER, DF; & des points R, F soient tirées perpendiculairement aux deux axes GQ, GT les droites RH, RM, FK, FV. Soient aussi tirées les droites EM, EH, EN qui expriment les distances respectives du point E aux trois axes GT, GQ, GC; les droites DV, DK, DO qui expriment les distances respectives du point D aux trois mêmes axes. Puisque la grandeur & la position de la droite ED sont données, les droites RM, RH, RE, FV, FK, FD, EM, EH, EN, DV, DK, DO sont connues.

Supposons $\begin{cases} EH \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = m \\ EM \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. = n \end{cases}$

$$\text{Supposons}\begin{cases} EN \ldots\ldots\ldots\ldots = q \\ DK \ldots\ldots\ldots\ldots = m' \\ DV \ldots\ldots\ldots\ldots = n' \\ DQ \ldots\ldots\ldots\ldots = q' \\ ER \ldots\ldots\ldots\ldots = \theta \\ DF \ldots\ldots\ldots\ldots = \theta' \\ FV \ldots\ldots\ldots\ldots = \Pi \\ RM \ldots\ldots\ldots\ldots = \Pi' \\ ER-DF \ldots\ldots\ldots = \varphi \\ RH-FK \ldots\ldots\ldots = \varphi' \\ FV-RM \ldots\ldots\ldots = \varphi'' \end{cases}$$

Cela posé, il est clair que par la transposition du poids E, le plan horisontal TGQ s'abbaissera parallélement à lui-même, de la quantité $\frac{\varphi' E}{N}$, en nommant N le poids total du navire, comme dans les §. XL, XLI, XLII, XLIII, XLIV; le plan vertical TGC s'éloignera parallélement à lui-même de sa première position de la quantité $\frac{\varphi'' E}{N}$. Par conséquent dans les formules de la stabilité, des amplitudes & des durées des oscillations, il faudra substituer

à la place de h la quantité $h-\frac{\varphi E}{N}$;

à la place de Q la quantité $Q-En^2+En'^2-\frac{(\varphi^2+\varphi''^2)E^2}{N}$;

à la place de V la quantité $V-Em^2+Em'^2-\frac{(\varphi^2+\varphi'^2)E^2}{N}$;

à la place de R la quantité $R-Eq^2+Eq'^2-\frac{(\varphi'^2+\varphi''^2)E^2}{N}$;

à la place de S la quantité $S-E\theta\Pi'+E\theta\Pi-\frac{E^2\varphi\varphi''}{N}$.

On voit donc qu'on peut soumettre à un calcul précis les phénomènes que la transposition de certains poids occasionne dans les mouvemens de roulis & de tangage d'un vaiſſeau. Nous avons déja eu l'occaſion de remarquer, dans un cas à-peu-près pareil, qu'on ne fait guères en mer ces ſortes de calculs. Auſſi ce n'eſt pas dans cette vue que nous en propoſons la méthode. Notre objet eſt d'indiquer les moyens de diſcuter exactement ce qui arrivera, lorſqu'ayant fait un certain arrimage pour une campagne, on jugera convenable ou néceſſaire d'y faire quelques changemens pour une autre campagne. Ces opérations ne doivent pas être abandonnées au hazard. L'eſprit n'eſt éclairé qu'autant qu'il peut ſe rendre raiſon des procédés de la pratique.

Application de la théorie précédente à un exemple.

XLVIII.

Quoique l'application de nos formules à chaque vaiſſeau particulier ſoit une opération fort ſimple, je ferai moi-même cette application à un exemple, mon intention étant de mettre, autant qu'il m'eſt poſſible, ces recherches à la portée des jeunes marins. On me permettra les détails aſſez étendus dans leſquels je vais entrer, en faveur de l'utilité dont j'eſpère qu'ils feront.

Je prends pour exemple le vaiſſeau du Roi, appellé *la Ville de Paris*, de quatre-vingt-dix canons, conſtruit à Rochefort par M. Deſlauriers, & lancé à la mer le 25 Janvier de cette année 1764. Ce vaiſſeau fut commencé en 1758. Il devoit alors porter le nom de *l'Impétueux ;* mais des circonſtances connues ont fait changer ce nom en celui qu'il a aujourd'hui.

Suivant des meſurages & des calculs faits ſous les yeux de M. Deſlauriers par un jeune Conſtructeur fort inſtruit, la longueur priſe à la la ligne d'eau en charge eſt de 173 pieds; la plus grande largeur, priſe toujours à la ligne d'eau & en dehors des membres, eſt de 48 pieds 5 pou. La plus grande profondeur de la carène eſt de $20^{pi.}$ $1^{po.}$, à compter du deſſous de la quille. La différence du tirant d'eau de l'avant à l'arrière eſt de $1^{pi.}$ $8^{po.}$. Le centre de gravité de la carène eſt élevé au-deſſus de la ſurface ſupérieure de la quille de $12^{pi.}$ $1^{po.}$, & en avant du vrai milieu, de 16 pouces. La quille a 1 pouce de hauteur. Le poids de l'eau déplacée par la carène, & par conſéquenr auſſi la charge totale du vaiſſeau eſt de 4256 tonneaux environ.

Lorſqu'il eſt queſtion de déterminer la carène & la poſition de ſon centre de gravité, il faut néceſſairement employer les méthodes expoſées dans les §. IV, V, VI, VII, ou d'autres équivalentes, parce qu'il eſt eſſentiel de connoître le port du vaiſſeau, & la proportion qui doit exiſter entre les poids de l'avant & de l'arrière. Mais on n'a pas beſoin d'une ſi grande préciſion, lorſqu'il s'agit de déterminer les loix de la ſtabilité & des balancemens du vaiſſeau. Il ſuffit alors d'avoir des termes de comparaiſon entre leſquels les quatités qu'on cherche ſe trouvent placées. Ainſi, pour éviter des calculs rebutans par leur longueur, j'examinerai les loix de la ſtabilité & des oſcillations de deux ſolides, entre leſquels *la Ville de Paris* eſt compris. Le

Fig. 25, 26. premier ſolide eſt un parallèlepipéde rectangle *FRZIYH* & *S* (fig. 25); le ſecond eſt une eſpèce d'ellipſoïde (fig. 26), qui a pour plan de flottaiſon l'ellipſe *ADBE*, pour coupe longitudinale la demie ellipſe *AVB*, & qui eſt formé d'une ſuite de demi-ellipſes *LKl* verticales & perpendiculaires à la demi-ellipſe *AVB*. Nous ſuppoſerons que dans l'un & l'autre ſolide, la longueur *AB* eſt de 173 pieds, la largeur *DE* de 48 pieds, la profondeur *CV* de 20 pieds, en nombres ronds. Pour mettre de la clarté dans notre recherche, nous la diviſerons en pluſieurs articles.

ARTICLE I.

Stabilité du Vaisseau.

La limite de la plus grande hauteur du centre de gravité de la charge au-dessus de celui de la carène, est déterminée en général (§. XLII), par ces équations

$h = \frac{2\alpha'}{M}$, lorsqu'il s'agit des mouvemens de tangage;

$h = \frac{2\gamma}{M}$, lorsqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horizontale.

La question est de trouver les valeurs des quantités M, α', γ, dans le cas de nos deux solides. Supposons en général la longueur $AB = 2a$, la largeur $DE = 2b$, la profondeur $CV = c$.

Dans le parallèlepipède, on a $M = 4abc$. Supposons qu'en vertu du mouvement de tangage, la partie $EDZI$ du plan de flottaison prenne la position $EDzi$; & imaginons que l'onglet $EDZIz$ est composé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à DE. Il est clair qu'en nommant, comme ci-dessus, z l'angle de rotation de tangage pour le rayon 1, & faisant $Cp = y$, le moment élémentaire de l'onglet, par rapport à DE, est $\frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3} ady \times \frac{Z}{1}$; donc la quantité $\alpha' = 2\int \frac{a^2}{3} \times \frac{2}{3} ady = \frac{2a^3b}{3}$, en supposant $y = b$ après l'intégration. On trouvera de même que la quantité $\gamma = \frac{2b^3a}{3}$. Par conséquent on aura Fig. 25.

$h = \frac{a^2}{3c} = 124 \frac{169}{240}$ pieds pour les mouvemens de tangage.

$h = \frac{b^2}{3c} = 9 \frac{9}{10}$ pieds pour les mouvemens de roulis.

On voit que le métacentre eſt placé à-très-peu-près ſur le plan de flottaiſon ; car la poſition de ce point doit toujours être déterminée relativemenr aux mouvemens de roulis, comme nous l'avons remarqué §. XLII.

Fig. 16. Dans le ſolide ellipſoïdal, toutes les ſections LKl parallèles à la demi-ellipſe latitudinale EVD ſont des demi-ellipſes ſemblables à cette demi-ellipſe EVD ; & toutes les ſections RYS parallèles à la demi-ellipſe longitudinale AVB ſont des demi-ellipſes ſemblables à cette demi-ellipſe AVB. Cela eſt trop facile à démontrer pour s'y arrêter. Suppoſons le rapport de la circonférence au diamètre $=n$, $CP=x$: on aura l'aire $EVD=\frac{nbc}{2}$, $PL=\frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$, $PK=\frac{c}{a}\sqrt{aa-xx}$, l'aire $LKl=\frac{nbc(aa-xx)}{2aa}$. Donc l'élément du ſolide eſt $\frac{nbc(aa-xx)dx}{2aa}$ dont l'intégrale eſt $\frac{ncbx}{2}-\frac{ncbx^3}{6a^2}$. Suppoſant $x=a$, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{2nbca}{3}$ pour la valeur de M.

De plus nous avons beſoin de connoître le centre de gravité du ſolide M. Ce centre eſt évidemment placé en quelque point G ſur l'axe vertical CV. Or on ſait, par la ſimple Géométrie élémentaire, que le moment de la demi-ellipſe LKl par rapport au point P eſt exprimé par $\frac{2}{3}PL\times\overline{PK}^2$. Donc le moment élémentaire du ſolide $ADEC$, par rapport à l'axe AB, eſt exprimé par $\frac{2bcc}{3a^3}dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$. Pour intégrer cette quantité, on remarquera que $dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=aadx\sqrt{aa-xx}-xxdx\sqrt{aa-xx}$; que $\frac{d\left(x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}\right)}{3}=\frac{dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}-xxdx\sqrt{aa-xx}$; que par conſéquent $dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}-d\left(\frac{x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=aadx\sqrt{aa-xx}-$

$\frac{dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{3}$, ou bien $\frac{4}{3}dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{d(x(aa-xx)^{\frac{3}{2}})}{3} + aadx$ $\sqrt{aa-xx}$; donc $\int dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4}aa\int dx\sqrt{aa-xx}$, intégrale qui est complette, parce qu'ellle doit s'évanouir lorsque $x=0$. Supposant $x=a$, le premier terme s'évanouit, & le facteur $\int dx\sqrt{aa-xx}$ devient un quart de cercle dont a est le rayon. Donc, en nommant toujours n le rapport de la circonférence au diamètre, le moment du solide $ADVE$, par rapport à AB, est exprimé par $\frac{nabcc}{8}$. Doublant cette quantité, & divisant par $\frac{2nbca}{3}$, valeur du solide entier M, on aura $\frac{3}{8}c$ pour la distance CG du centre de gravité de M au point C.

Enfin imaginons que l'onglet formé pour la rotation de l'aire EDB autour de ED, est composé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à l'axe ED. En faisant $Cp=y$, & par conséquent $pr=\frac{a}{b}\sqrt{bb-yy}$, il est clair que le moment élémentaire du demi-onglet, par rapport à ED, est $\frac{a^2(bb-yy)}{2b^2} \times \frac{2a\sqrt{bb-yy}}{3b} \cdot dy \times \frac{Z}{1}$; d'où il suit que $\alpha' = 2\int \frac{a^3(bb-yy)^{\frac{3}{2}}.dy}{3b^3}$, en supposant $y=b$ après l'intégration. On trouvera, par la même méthode dont on vient de se servir, $\alpha' = \frac{na^3b}{8}$. Pareillement $\gamma = \frac{nb^3a}{8}$ Donc on aura

$$h = \frac{3a^2}{8c} = 140\tfrac{187}{640} \text{ pieds pour les mouvemens de tangage.}$$

$$h = \frac{3b^2}{8c} = 10\tfrac{4}{5} \text{ pieds pour les mouvemens de roulis.}$$

Ainsi la hauteur du métacentre au dessus du centre de gravité de la carène, est de 10 pieds $\frac{4}{5}$; & comme ce dernier point est au dessous du plan de flottaison, de $7\frac{1}{2}$ pieds, il s'ensuit que le métacentre est élevé au-dessus du plan de flottaison, de $3\frac{2}{13}$ pieds.

Comme le vaisseau *la Ville de Paris* approche plus du solide ellipsoïdal que du parallèlepipéde, on doit conclure que son métacentre est élevé au-dessus du plan de flottaison, d'environ 1 ou 2 pieds.

ARTICLE II.

Amplitude des oscillations du vaisseau.

NOUS venons de voir que le métacentre de notre vaisseau est placé aux environs du plan de flottaison. Ainsi il convient de placer le centre de gravité de la charge au-dessous de ce même plan Supposons que la charge totale soit distribuée uniformément, de manière que son centre de gravité se confonde avec celui de la carène De l'examen de ce cas simple naîtront les observations qu'on doit faire, lorsqu'il faut avoir égard à la distribution réelle de la charge.

Les mouvemens absolus de tangage & de roulis sont exprimés (§. XLIII), par ces équations

$$Z=\frac{2Mf'}{2\alpha'-Mh},$$
$$Y=\frac{2Mf}{2\gamma-Mh},$$

& il n'y a point de rotation horisontale, parce qu'il est évident que la quantité $S=0$.

Comme on suppose le centre de gravité de la charge réuni à celui de la carène, on a $h=0$, & nos deux équations deviennent

$$Z=\frac{Mf'}{\alpha'},$$
$$Y=\frac{Mf}{\gamma};$$

ou bien en considérant que le sinus total est pris pour l'unité, & que ce sinus est égal à un arc de 57° 17′ 44″,

$$Z = \frac{Mf'}{\alpha'} \times (57^\circ\ 17' 44''),$$

$$Y = \frac{Mf}{\gamma} \times (57^\circ\ 17'\ 44'').$$

Or dans le parallèlepipéde, on a, par l'article précédent, $\frac{M}{\alpha'} = \frac{6c}{a^2}$, $\frac{M}{\gamma} = \frac{6c}{b^2}$; donc en supposant, par exemple, que par quelque coup de vent ou quelque coup de lame, ou par quelque bouffée de vent, le centre de gravité de la carène se soit écarté de 4 pouces de la coupe latitudinale & de la coupe longitudinale, c'est à-dire, $f' = 4$ pou., $f = 4$ pou.: on trouvera Fig. 25.

$$Z = 0^\circ\ 18'\ 22'',$$
$$Y = 3^\circ\ 58'\ 43''.$$

Dans le solide ellipsoïdal, on a $\frac{M}{\alpha'} = \frac{16c}{3a^2}$, $\frac{M}{\gamma} = \frac{16c}{3b^2}$; donc en supposant toujours $f' = 4$ pouces, $f = 4$ pouces: on trouvera Fig. 26.

$$Z = 0^\circ\ 16'\ 20'',$$
$$Y = 3^\circ\ 32'\ 12''.$$

On sent assez qu'on n'a supposé chacune des lignes f' & f de 4 pouces, que pour faire une application des formules à un cas particulier Les valeurs de ces lignes ne sont pas faciles à déterminer directement en général. Mais si au lieu de conclure les angles Z & Y des valeurs supposées connues de f' & f, on supposoit au contraire les angles Z & Y donnés par des observations immédiates; il est évident que par nos formules on connoîtroit f' & f, c'est-à-dire les bras de levier de la poussée verticale de l'eau pour ramener le vaisseau à sa situation d'équilibre. Cette connoissance est utile en plusieurs occasions, comme par exemple, quand on a besoin de comparer l'effort des lames ou des bouffées de vent avec la poussée verticale de l'eau.

Les mouvemens de tangage sont fort petits. Ceux de roulis sont plus considérables. Comme le centre de gravité de la charge totale est toujours placé au-dessus de celui de la carène, dans les vaisseaux de guerre, les mouvemens de tangage & de roulis du vaisseau *la Ville de Paris* pourront être plus sensibles qu'on ne vient de les trouver.

ARTICLE III.

Durée des oscillations du vaisseau.

Nous continuerons de supposer que le centre de gravité de la charge totale est confondu avec celui de la carène, comme dans l'article précédent.

Fig. 25 & 26. Les trois axes GC, GQ, GT sont ici les mêmes respectivement que les trois axes designés par les mêmes lettres dans la figure 23 : seulement on en a changé la perspective, pour faire mieux voir les autres lignes dont on a besoin; mais cela ne doit produire aucun embarras. Il suffit d'en être averti.

Les tems des mouvemens de tangage & de roulis sont représentés (§. XLIV), par ces équations

$$t(T) = 1'' \times n \sqrt{\frac{Q}{30^{\text{pi}}\, p(2\alpha' - Mh)}},$$

$$t(R) = 1'' \times n \sqrt{\frac{V}{30^{\text{pi}}\, p(2\gamma - Mh)}}.$$

Il s'agit de trouver les quantités V & Q, c'est-à-dire, les sommes des produits des particules de chaque solide par les quarrés de leurs distances aux deux axes horizontaux GQ, GT. La quantité $h = 0$.

Fig. 25. Soient $LXxl$ une section quelconque du parallèlepipéde ;

faite perpendiculairement à sa longueur; PK la rencontre de cette section avec la coupe longitudinale $ABba$; Nn un élément quelconque du rectancle $LXxl$. Qu'on prenne sur Nn une partie infiniment petite $\Pi\varpi$, & qu'on mène du point Π au point O, où l'axe longitudinal GQ & la verticale PK se rencontrent, la droite ΠO. Supposons $CP = x$, $PM = z$, $M\Pi = q$, & par conséquent $MO = \frac{c}{2} - z$. Il est clair que le produit de $\Pi\varpi$ par le quarré de sa distance à l'axe longitudinal GQ est $qqdq + dq(\frac{c}{2} - z)^2$, dont l'intégrale est $\frac{q^3}{3} + q(\frac{c}{2} - z)^2$. Supposant $Q = b$, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{2b^3}{3} + 2b(\frac{c}{2} - z)^2$ pour la somme des produits de tous les points de Nn par les quarrés de leurs distances à l'axe GQ. Multipliant cette quantité par dz, intégrant le produit, & supposant après l'intégration $z = c$, on trouvera $\frac{2b^3c}{3} + \frac{bc^3}{6}$ pour la somme des produits de tous les points du rectangle $LXxl$ par les quarrés de leur distance à l'axe GQ. Enfin multipliant cette dernière quantité par dx, intégrant, supposant $x = a$ après l'intégration, & doublant l'intégrale, on aura $\frac{4ab^3c}{3} + \frac{abc^3}{3}$ pour la somme des produits des particules du parallèlepipéde par les quarrés de leur distance à l'axe GQ. Nous aurons donc

$$V' = \frac{4ab^3c}{3} + \frac{abc^3}{3},$$

On trouvera pareillement

$$Q = \frac{4ba^3c}{3} + \frac{abc^3}{3}.$$

Donc

$$\frac{Q}{2a'} = \frac{4aac + c^3}{4.2a},$$

$$\frac{V}{2\gamma} = \frac{4bbc + c^3}{4bb}.$$

Donc en remarquant qu'ici $p=1$, on aura

$$t(T)=1''\times\frac{355}{113}\times\sqrt{\frac{60658}{89787}}=2''\frac{1}{2} \text{ à-peu-près,}$$

$$t(R)=1''\times\frac{355}{113}\times\sqrt{\frac{3408}{6912}}=2''\frac{4}{5} \text{ à-peu près.}$$

Les mouvemens de tangage & de roulis se font avec promptitude, comme on voit, & doivent paroître sensibles.

Fig. 26. Soit, comme ci-dessus, la demi-ellipse LKl un élément quelconque du solide ellipsoïdal. Que Nn soit une double ordonnée à l'axe PK. En faisant $CP=x$, $PM=z$, & considérant que $MN=\frac{PL}{PK}.\sqrt{\overline{PK}^2-\overline{PM}^2}=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}$, on trouvera, par la même méthode dont on vient de se servir pour le parallèlepipéde, que la somme des produits de tous les points de Nn par les quarrés de leurs distances à l'axe GQ, est exprimée par $\frac{2b^3}{3c^3}.\left(\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2b}{c}.\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}.\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2$. Donc cette somme élémentaire pour la demi-ellipse LKl, est $\frac{2b^3}{3c^3}.dz\left(\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2b}{c}.dz\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2\sqrt{\frac{aacc-ccxx}{aa}-zz}$, expression dans laquelle z seule est variable en ce moment. Supposons, pour abréger un peu le calcul, $\frac{aacc-ccxx}{aa}=A^2$. On aura $\int dz(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3A^2}{4}\int dz\sqrt{A^2-z^2}$. Le terme $\int dz\left(\frac{3}{8}c-z\right)^2\sqrt{A^2-z^2}=\frac{9cc}{64}\int dz\sqrt{A^2-z^2}+\frac{3}{4}c\int -zdz\sqrt{A^2-z^2}+\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}=\frac{9cc}{64}\int dz\sqrt{A^2-z^2}+\frac{c(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}$. Pour effectuer l'intégration du dernier terme, on remarquera que $d\left(z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right)=dz(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-3zzdz\sqrt{A^2-z^2}=A^2dz\sqrt{A^2-z^2}-4zzdz$

$\sqrt{A^2-z^2}$; que par conféquent $\int zzdz\sqrt{A^2-z^2}=\frac{A^2}{4}\int dz\sqrt{A^2-z^2}-\frac{z(A^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$. Donc, en reprenant les facteurs conftans négligés dans les intégrations, réuniffant toutes les parties de l'intégrale, & obfervant qu'elle doit s'évanouir, lorfque $z=0$; & recevoir fa valeur complette, lorfque $z=A$: on trouvera que la fomme des produits de tous les points de la demi-ellipfe LKl par les quarrés de leurs diftances à l'axe longitudinal GQ, eft exprimée par la quantité

$$\left(\frac{b^3}{2c}+\frac{25bc}{32}\right).\frac{ncc}{4aa}.(aa-xx)-\left(\frac{b^3}{2c}+\frac{bc}{2}\right).\frac{ncc}{4a^3}.(aaxx-x^4).$$

Multipliant cette quantité par dx, intégrant, fuppofant $x=a$, après l'intégration, & doublant l'intégrale, on trouvera

$$\frac{n}{2}\left(\frac{64ab^3c+19abc^3}{240}\right)$$

pour la fomme des produits des particules du folide entier par les quarrés de leus diftances à l'axe longitudinal.

On trouvera de même que la fomme des produits des particules du folide par les quarrés de leurs diftances à l'axe latitudinal GT eft exprimée par

$$\frac{n}{2}.\left(\frac{64ba^3c+19abc^3}{240}\right).$$

Nous aurons donc

$$\frac{Q}{2\alpha'}=\frac{64aac+19c^3}{120aa};$$

$$\frac{V}{2\gamma}=\frac{64bbc+19c^3}{120bb}.$$

Par conféquent on trouvera

$$t(T)=1''\times\frac{155}{113}\sqrt{\frac{1044928}{2693610}}=1''\frac{19}{20};$$

$$t(R) = 1'' \times \frac{355}{113} \times \sqrt{\frac{60928}{207360}} = 2'' \frac{17}{25}.$$

Dans le ſolide ellipſoïdal, les mouvemens de tangage & de roulis ſont un peu plus rapides que dans le parallèlepipéde.

Il ſuit de-là que ſi la charge de la *Ville de Paris* étoit diſtribuée uniformément dans la calle, & que ſon centre de gravité tombât ſur celui de la carène conſidérée comme homogène, les mouvemens de tangage & de roulis ſeroient très-rapides, & tourmenteroient extrêmement la mâture & l'équipage. Pour en diminuer la viteſſe, on aura ſoin de mettre le plus qu'il ſera poſſible les poids les plus peſans de la charge aux extrémités & dans les flancs du vaiſſeau. Il eſt vrai que par-là la quille ſera un peu fatiguée (§. XXIV); mais cette piéce a ordinairement beaucoup plus de force qu'il ne lui en faut pour réſiſter aux forces dont elle eſt preſſée (§. XXIX).

Réſultat de tout cet examen.

Le métacentre du vaiſſeau *la Ville de Paris* eſt placé à 1 ou 2 pieds au-deſſus du plan de flottaiſon. Si donc on veut que ce vaiſſeau porte bien la voile, il faudra diſtribuer la charge, de manière que ſon centre de gravité ſoit placé au moins à 1 ou 2 pieds au-deſſous du plan de flottaiſon. Il conviendra que la plus grande partie du leſt ſoit en fer, & qu'elle ſoit diſtribuée dans les flancs du vaiſſeau, ainſi que ſous la foſſe aux cables & vers la ſoute aux poudres. Ce vaiſſeau décrira de fort petits arcs dans le tangage; mais dans le roulis il en décrira qui, même par un tems calme, pourront monter à 7 ou 8 degrés. Il paroit qu'en arrimant comme on vient de le dire, les mouvemens de tangage ſeront peu ſenſibles; mais quelques précautions qu'on prenne, ceux de roulis ſeront peu-être un peu rudes, principalement lorſqu'on ira vent arrière. L'événement décidera de la juſteſſe de ces remarques; car en ce moment (Février

(Février 1764) *la Ville de Paris* eſt encore dans le port, dénuée de ſa mâture, & remplie de copeaux.

On diſcutera de la même manière tous les vaiſſeaux dont on connoîtra les dimenſions.

SECTION IV.

Influence de l'arrimage ſur les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles.

XLIX.

Je ne m'arrêterai pas ici à expliquer la manœuvre du gouvernail; c'eſt une choſe aſſez connue. Mais je ne puis me diſpenſer de remarquer que tous les Auteurs qui ont entrepris de donner la théorie des mouvemens que cette piéce imprime au vaiſſeau, ont regardé le vaiſſeau & le gouvernail comme ſolidement liés entr'eux, & ne faiſant, pour ainſi dire, qu'un ſeul & même corps; ce qui n'eſt pas exact, puiſque le vaiſſeau & le gouvernail ſont réellement deux corps ſéparés, mobiles l'un & l'autre ſur les gonds qui les uniſſent. D'où il réſulte que les ſolutions de ces Auteurs ſont incomplettes, au moins dans la rigueur géométrique En voici une qui n'a pas le même defaut.

Suppoſons que AB repréſente le corps du navire, BC le gouvernail qui eſt mobile ſur le gond ou la charnière B. Soit Ff la direction du choc de l'eau qui reſulte perpendiculairement au gouvernail. Cette force eſt ſuppoſée ici exercer librement ſon effet. Qu'au bout d'un inſtant, le ſyſtême ABC parvienne dans la ſituation abc, de manière que le point B ait parcouru Bb, & qu'ayant mené par le point b les droites $b\alpha$, bk parallèles à BA & à BC reſpectivement, le navire ait décrit autour du point B ou b l'angle $ab\alpha$, & le gouvernail l'angle cbk autour du même point. Je Fig. 27.

prolonge indéfiniment AB au-delà de B, & repréſentant l'impulſion de l'eau ſur le gouvernail par FD, je décompoſe cette force en deux autres FE, FH, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la direction AB de la quille. Soient R & Q deux points quelconques du vaiſſeau & du gouvernail. Il eſt clair que ſi on prend $bS=BR$, $bO=BQ$, & qu'on mène les lignes RS, QO, ces lignes feront les eſpaces parcourus par les points R & Q. Du point b ſoient décrits, avec les rayons bS, bO, les petits arcs ST, ON, & ſoit abbaiſſée bh perpendiculaire ſur AB prolongée, & bi ſur CB prolongée. Soit décompoſée la viteſſe RS en deux autres RX, RZ, l'une dirigée ſuivant AB, l'autre perpendiculaire à AB. Pareillement ſoit décompoſée la viteſſe QO en deux autres QM, QP ou MO, l'une dirigée ſuivant BC, l'autre perpendiculaire à BC. Suppoſant que QO prolongée, s'il eſt néceſſaire, rencontre en g le prolongement de AB, & ayant pris $gm=QO$, ſoit décompoſée la viteſſe gm en deux autres gp, gn, l'une dirigée ſuivant Bp, l'autre perpendiculaire à la même ligne.

Suppoſons
- L'impulſion FD de l'eau contre le gouvernail . . . . $=F$
- La viteſſe Bh du point B dans le ſens de la quille . . . . $=x$
- La viteſſe bh du même point B perpendiculairement à la quille . . . . $=y$
- La viteſſe de rotation du navire autour du point B, pour le rayon 1 . . . . $=V$
- La viteſſe de rotation du gouvernail autour du point B, pour le rayon 1 . . . . $=u$
- La maſſe du navire . . . . $=N$
- Chaque particule élémentaire du navire $=dN$
- La maſſe du gouvernail . . . . $=G$
- Chaque particule élémentaire du gouvernail . . . . $=dG$

Supposons $\begin{cases} \text{L'angle } CBp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a \\ BF \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h \\ BR \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p \\ BQ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = q. \end{cases}$

Il eſt clair qu'on aura la force $FE = F \cos. a$, la force $FH = F \sin. a$, $TS = pV$, $ON = qu$, $SX = y - pV$. De plus ſi l'on tire la droite RT, il eſt évident qu'à cauſe de $bT = bX$, & de $bT = bS = BR$, les deux triangles rectangles RXT, Bhb ſont parfaitement égaux; donc $RX = x$. Pareillement ſi l'on tire la droite QN, les deux triangles rectangles QMN, Bib ſont parfaitement égaux; donc $QM = Bi$, $MN = ib$, $MO = ib + ON = ib + qu$. Or l'angle bBi étant viſiblement le ſupplément de la ſomme des deux angles CBp, bBh, on aura

$$bi = y \cos. a + x \sin. a,$$

$$Bi = y \sin. a - x \cos. a.$$

Donc

$$QM = y \sin. a - x \cos. a,$$

$$MO = y \cos. a + x \sin. a + qu.$$

Dans le triangle BQg, le ſinus de l'angle BgQ ou de ſon égal pgm eſt égal au ſinus de la ſomme des deux angles QBg, BQg; donc

$$\sin. pgm = \sin. a \times \frac{QM}{QO} + \cos. a \times \frac{OM}{QO};$$

$$\cos. pgm = \sin. a \times \frac{OM}{OQ} - \cos. a \times \frac{QM}{QO};$$

Donc

$$pm = \sin. a\,(y \sin. a - x \cos. a) + \cos. a\,(y \cos. a + x \sin. a + qu),$$

$$gp = \sin. a\,(y \cos. a + x \sin. a + qu) - \cos. a\,(y \sin. a - x \cos. a).$$

Cela poſé, on ſait, par la loi fondamentale de la communicaton des mouvemens, que la ſomme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, parallélement à la quille, eſt égale à la force FH, & que la ſomme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, perpendiculairement à la quille, eſt égale à la force FE. Ainſi on aura d'abord ces deux équations

$$F\,\sin.a = Nx + Gx + u\,\sin.a\int qdG,$$

$$F\,\cos.a = NyV - N\int pdN + Gy + u\,\cos.a\int qdG.$$

De plus le moment de la force F par rapport au point B eſt égal à la ſomme des momens de toutes les particules du navire & du gouvernail, par rapport au même point B. Ainſi on aura

$$Fh = \int dN \times BR \times SX + \int dG \times BQ \times QP,$$

c'eſt-à-dire

$$Fh = y\int pdN - V\int ppdN + y\cos.a\int qdG + x\,\sin.a\int qdG + u\int qqdG.$$

Enfin on remarquera que la réſultante de toutes les forces RS, QO des particules du navire & du gouvernail, doit néceſſairement paſſer par le point B; car cette réſultante doit être telle que ſi on imprimoit au ſiſtême une force égale & contraire, tout le ſiſtême demeurât en équilibre. Or ſi cette dernière force ne paſſoit pas par le point B, il eſt évident qu'elle produiroit un mouvement de rotation autour de ce point, ce qui eſt contraire à l'hypothèſe. Cette nouvelle conſidération fournit l'équation

$$\int dN \times BR \times SX = \int dG \times BQ \times QP,$$

c'eſt-à-dire,

$$y\int pdN - V\int ppdN = y\,\cos.a\int qdG + x\,\sin.a\int qdG + u\int qqdG.$$

Dans ces quatre équations, les quantités $\int pdN$, $\int ppdN$, $\int qdG$, $\int qqdG$, ſont données par les figures du navire & du gouvernail. Par conſéquent on pourra déterminer les quatre inconnues x, y, V, u, c'eſt-à-dire, le mouvement du navire parallélement à la quille, le mouvement du navire perpendiculairement à la quille, le mouvement de rotation du navire autour du point B, enfin le mouvement de rotation du gouvernail autour du même point. La queſtion ſe réduit à réſoudre quatre équations du premier degré.

L.

Telle eſt la ſolution générale du problême propoſé. Mais comme la maſſe du gouvernail eſt fort petite en comparaiſon de celle du navire, dans l'application qu'on fera de ces formules au ſujet propoſé, il eſt très-permis de négliger tous les termes qui contiennent G, $\int qdG$, $\int qqdG$. Alors on trouvera

$$x = \frac{F \sin . a}{N},$$

$$y = \frac{F \cos . a \int ppdN}{N\int ppdN - (\int pdN)^2},$$

$$V = \frac{F \cos . a \int pdN}{N\int ppdN - (\int pdN)^2}.$$

Quant à la valeur de u, on voit bien qu'elle doit être regardée comme infinie par rapport à celle de V.

Ces formules peuvent encore ſe ſimplifier Car ſi l'on nomme b la diſtance du centre de gravité de la charge à un axe vertical élevé par le point B, S la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à un axe vertical paſſant par le centre de gravité de la charge, on aura, comme on ſait, par les loix de la méchanique, $\int pdN = Nb$, $\int ppdN = S + Nb^2$, & nos trois formules deviendront

$$x = \frac{F \sin . a}{N},$$

$$y = \frac{F cos. a (S + Nbb)}{N.S},$$

$$V = \frac{Fb\, cos. a}{S},$$

équations qui renferment toute la théorie des mouvemens communiqués au vaisseau par l'action du gouvernail.

L I.

Le choc de l'eau contre le gouvernail produit deux effets, comme on voit. Il retarde la rapidité du sillage, & il fait tourner le vaisseau. Le premier effet, qui est contraire au but de la navigation, est exprimé par les deux premières équations. Notre objet n'est pas de l'examiner en détail. Mais nous devons analyser le mouvement de rotation qui est représenté par la formule

$$V = \frac{Fb\, cos. a}{S}.$$

Dans cette formule, V est l'angle $ab\alpha$. Supposons que le point G représente le centre de gravité du vaisseau, & par ce point soit menée la droite LGl parallèle à AB : il est clair que les deux angles $ab\alpha$, bGl sont égaux. Ainsi V peut être considéré comme l'angle décrit par le vaisseau autour de l'axe vertical passant par le point G, en vertu d'une force $F cos. a$ appliquée en B, perpendiculairement à AB. Nommons s l'espace parcouru circulairement à la distance 1 de l'axe G, v la vitesse circulaire d'un point pris à la même distance, t le tems de la rotation : il est visible qu'on aura

$$vdv = \frac{Fb\, cos. a\, ds}{S},$$

$$dds = \frac{Fb\, cos. a. dt^2}{S};$$

Donc

$$v = \sqrt{\frac{2Fb\,cos.\,a.\,s}{S}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2S.s}{Fb\,cos.\,a}}.$$

Soient g la gravité, u la viteſſe qu'un corps acquerroit par la gravité, en parcourant l'eſpace s; θ le tems employé à acquerir cette viteſſe; & ſuppoſons que la force $F\,coſ.\,a$ ſoit égale à un poids dont la maſſe eſt P, c'eſt-à-dire, que cette force ſoit repréſentée par gP. On aura (en mettant la lettre R à la place du rayon 1, pour rétablir les homogènes),

$$v = u \times \sqrt{\frac{PbR}{S}},$$

$$t = \theta \times \sqrt{\frac{S}{PbR}},$$

formules dans leſquelles les quantités radicales ſont des nombres abſolus. Ces formules ſont d'un uſage très-commode. Mais il faut obſerver qu'elles n'ont lieu que pour le commencement du mouvement, parce qu'on a négligé la réſiſtance que le navire éprouve en diviſant l'eau par ſa rotation, & que cette réſiſtance augmente ſenſiblement à meſure que la viteſſe de rotation augmente.

L I I.

Ces principes poſés, il eſt queſtion de diſcuter l'influence de l'arrimage ſur les mouvemens dont nous venons de parler.

Or, 1.° on voit que ſi, toutes choſes égales d'ailleurs, on augmente la force F, ou que le gouvernail préſente une plus grande ſurface au choc de l'eau, la viteſſe de rotation du vaiſſeau autour de ſon centre de gravité augmentera. L'expérience & la théorie ont fixé les dimenſions du gouvernail dans chaque vaiſſeau. Il n'eſt pas permis d'y faire des changemens bien ſenſibles; car en même temps qu'une plus grande surface exposée au choc de l'eau, produiroit un plus grand mouvement de rotation, elle rallentiroit considérablement la rapidité du sillage. Mais il y a des occasions en mer, où l'on a besoin d'une action efficace & prompte de la part du gouvernail. Alors rien n'est plus utile que de faire enfoncer davantage le gouvernail dans l'eau. Cela s'exécute en transportant quelques poids assez pesans de l'avant à l'arrière. Il est vrai que par cette opération, il pourra arriver que la quantité S augmente, & que par conséquent la vitesse de rotation du vaisseau diminue d'un côté, tandis qu'elle augmente de de l'autre; mais l'augmentation l'emporte toujours sur la diminution, comme on pourra s'en assurer par la méthode que nous donnerons dans un moment; & c'est une très-bonne manœuvre de surcharger l'arrière du vaisseau, lorsque le vaisseau porte d'ailleurs bien la voile, & qu'il n'est pas assez docile à l'action de son gouvernail.

2° On peut augmenter la vitesse de rotation du vaisseau en laissant la même surface au gouvernail, mais en diminuant la quantité S, c'est à-dire en rapprochant le plus qu'il est possible les différens poids qui composent la charge, de l'axe vertical élevé par le centre de gravité du vaisseau. Ce moyen ne peut guères être pratiqué efficacement en mer, parce que le milieu de la calle est presqu'entièrement occupé par des poids qu'il n'est pas facile de mettre ailleurs, & que d'un autre côté il seroit quelquefois dangereux de faire des changemens trop considérables à la distribution primitive de la charge. Mais lorsqu'on fait le chargement dans le port, & qu'on discute l'influence de l'arrimage sur les qualités du vaisseau, on ne doit pas oublier qu'un des meilleurs moyens de rendre le navire sensible au gouvernail, est de rapprocher de l'axe vertical les principaux poids dont les emplacemens ne sont pas nécessairement assignés dans telle ou telle partie de la calle. L'arrangement dont il s'agit a de plus l'avantage de soulager la la quille, comme nous l'avons vu (§. XXIX); mais il peut avoir l'inconvénient d'augmenter les mouvemens de roulis & de tangage, comme il eſt aiſé de voir par les méthodes expoſées dans la ſection précédente. On ne procure preſque jamais une bonne qualité à un vaiſſeau, qu'on ne lui en faſſe perdre une autre. C'eſt aux Marins éclairés de bien peſer les raiſons favorables & contraires à l'opération propoſée. Cet examen ſera facile, & l'on choiſira infailliblement le parti le plus avantageux, lorſqu'on connoîtra exactement la forme & les capacités du vaiſſeau.

L I I I.

Nous nous ſommes engagés à examiner les changemens qui arrivent dans la fraction $\frac{F}{S}$, lorſqu'on fait augmenter la ſurface que le gouvernail préſente au choc de l'eau, en tranſportant quelques poids de l'avant à l'arrière Voici cette diſcuſſion qui dépend des mêmes principes que celle du § XLVII.

Soient AB le corps du navire, GC l'axe vertical élevé par ſon centre de gravité G. Suppoſons qu'on prenne à l'endroit connu K de l'avant un poids connu que je nomme K pour le tranſporter à l'endroit connu M de l'arrière; & qu'en vertu de cette tranſpoſition, l'axe GC prenne la poſition gc. Par les points G & g ſoient menés les deux axes horizontaux GT, gt perpendiculaires l'un & l'autre à AB. Le centre de gravité du vaiſſeau ayant paſſé de G en g, la pouſſée verticale de l'eau, qui s'exerce toujours ſuivant GC fera tourner le vaiſſeau autour de l'axe horiſontal gt, & lui fera décrire l'angle Bgb dans le plan vertical mené ſuivant AB. Il eſt clair que ſi l'on parvient à connoître cet angle, & la partie Bg, on connoîtra auſſi la grandeur abſolue du petit arc Bb qu'on peut regarder comme une ligne verticale. Par conſéquent on connoîtra la quantité Fig. 28.

dont tous les points de la surface du gouvernail se sont abbaissés verticalement ; d'où il suit qu'on connoîtra la nouvelle surface que le gouvernail présente au choc de l'eau, & la force avec laquelle cette surface est frappée.

Supposons:
- BG .... $=b$
- GK .... $=c$
- GM .... $=f$
- La gravité .... $=g$
- La masse du navire .... $=N$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal GT, avant la transposition du poids K .... $=Q$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe gt, après la transposition du poids K .... $=Q'$
- L'angle BGb, pour le rayon 1 .... $=Z$.

On aura (§. XLVI) $Gg=\frac{K.(c+f)}{N}$; donc $gN\times\frac{K(c+f)}{N}=Q'\times\frac{Z}{1}$;

mais (§. XLVI), $Q'=Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}$;

Donc

$$Z=\frac{gK.(c+f).}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}},$$

ou bien, en supposant le sinus total $1=R$, pour rétablir les homogènes,

$$Z=\frac{gK(c+f).R}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}}.$$

Ainsi l'angle Bgb sera connu. La ligne Bg est aussi connue, puisque $Bg=BG-gG=b-\frac{K\,c+f)}{N}$.

Maitenant reprenons la formule $V=\frac{Fb\,cos.a}{S}$ du §. L;

dans laquelle F eſt le choc que l'eau exerce perpendiculairement contre le gouvernail dans ſon premier état, a l'angle formé par la quille & par le gouvernail, b le bras de levier de la force $F \, cof. \, a$, c'eſt-à-dire la ligne BG, S la ſomme des produits des particules du vaiſſeau par les quarrés de leurs diſtances à l'axe vertical GC, V l'angle de rotation horizontale produite autour de l'axe GC par le choc de l'eau contre le gouvernail. Suivant la remarque que nous avons faite, la force F eſt augmentée d'une quantité connue que je nomme dF. De plus la rotation horizontale ſe fait maintenant autour de l'axe gc; & ſi l'on nomme S' la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe gc, après la tranſpoſition du poids K, V' l'angle de rotation autour de l'axe gc, on aura

$$(F+dF)\, cof.\, a.\left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)=S' \times \frac{V'}{1};$$

mais (§.XLVI) $S'=S-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}$;

Donc

$$V'=\frac{(F+dF)\, cof.\, a\left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)}{S-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}}.$$

Comparant cette valeur de V' avec celle de V, on trouvera dans chaque cas particulier applicable à la pratique, que V' eſt plus grand que V; d'où il réſulte que l'angle de rotation horizontale du vaiſſeau augmente à meſure que le gouvernail préſente une plus grande ſurface au choc de l'eau.

L I V.

Toutes ces formules ne ſervent pas ſeulement à démontrer en général que telle cauſe produira tel effet; elles ont de plus l'avantage de donner des meſures préciſes des cauſes & des effets. Nous voyons ici que ſi l'on fait, par exemple, $f=0$, ou qu'on tranſporte le poids K préciſément au centre de gravité de la charge, ou plutôt de la ligne verticale élevée par ce point, l'angle V' augmentera ſenſiblement, puiſque le numérateur de la fraction qui en eſt la valeur, augmentera, & que ſon dénominateur diminuera. Cette augmentation de l'angle V' peut être ſoumiſe à un calcul rigoureux. Il en eſt de même de toute autre tranſpoſition de poids. En quelqu'endroit de l'avant qu'on prenne un poids, pour le tranſporter à l'arrière, l'angle de rotation ſe calcule ſans peine. Il y a plus : la formule précédente fournit le moyen de reconnoître parmi toutes les tranſpoſitions poſſibles de poids de l'avant à l'arrière celle qui eſt la plus avantageuſe au mouvement de rotation ; & voici comment on réſoudra ce problême.

L V.

Conſidérons le gouvernail comme un rectangle vertical dont la largeur eſt très-petite par rapport à la demi longueur du vaiſſeau, de manière que toutes les lignes horizontales menées de l'axe vertical gc à tous les points de la ſurface du gouvernail puiſſent être regardées comme égales. Nous ne faiſons cette ſuppoſition que pour abréger ; car le problême ſe réſoud par la même méthode, quelles que ſoient la figure & les dimenſions du gouvernail. Il eſt clair que la rapidité du ſillage demeurant toujours la même, la force F eſt ſimplement proportionnelle à la ſurface du rectangle qui forme le gouvernail. Soient h la hauteur verticale de ce rectangle, avant la tranſpoſition du poids K, m ſa largeur horizontale. Par la tranſpoſition du poids K de l'avant à l'arrière, la hauteur h augmente de la quantité Bb, c'eſt-à-dire de $\frac{gK.(c+f)R}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}} \times \left(b-\frac{K(c+f)}{N}\right)$. Cela poſé, on mettra hm à la place de F, le produit de m par cette valeur de Bb à la place de dF, dans la valeur générale de V', & on fera $V'=maximum$, & par conſéquent $dV'=0$. Si dans cette différentiation, on regarde f ſeule comme variable, & le reſte comme conſtant, on déterminera l'endroit de l'arrière où il faut mettre un poids qu'on prend dans un endroit connu de l'avant. Si l'on regarde c comme variable & tout le reſte comme conſtant, on déterminera l'endroit de l'avant où il faut prendre un poids pour le mettre a un endroit connu de l'arrière. Je n'achève pas le calcul qui eſt un peu long, & dont vrai-ſemblablement la pratique ne tireroit pas grand ſecours. Il ſuffit d'avoir indiqué la ſolution du problême.

L V I.

L'objet principal des voiles eſt de procurer au vaiſſeau le mouvement de ſillage. Mais elles ſervent auſſi, de même que le gouvernail, à faire tourner le vaiſſeau autour de l'axe vertical GC élevé par le centre de gravité de la charge. Lorſqu'il y a un équilibre abſolu entre les voiles de l'avant & celles de l'arrière, par rapport à la ligne verticale dont on vient de parler, les voiles ne peuvent imprimer aucun mouvement de rotation au vaiſſeau. Mais ſitôt qu'on *cargue* quelques voiles d'un côté ſans toucher aux voiles qui ſont du côté oppoſé, l'équilibre eſt rompu, & le navire tourne néceſſairement autour de ſon centre de gravité. Suppoſons, par exemple, qu'on cargue quelques voiles du côté de l'avant A, de manière que la réſultante de tous les efforts du vent contre les voiles ſoit maintenant dirigée ſuivant Rr: il eſt clair que l'arrière GB du vaiſſeau tournera en allant de droite à gauche, & l'avant en allant de gauche à droite. Au contraire ſi l'on carguoit quelques voiles du côté de l'arrière, l'avant du vaiſſeau tourneroit en allant de droite à gauche, & l'arrière de gauche à droite. On voit par-là que la plupart des choſes que nous avons dites au ſujet des mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, s'appliquent aux mouvemens de rotation produits par l'action des voiles. Lorſqu'on voudra favoriſer ces

Fig. 28.

derniers mouvemens par l'arrimage, sans faire changer de position à l'axe vertical GC, il faudra rapprocher le plus qu'on pourra de cet axe quelques poids fort pesans, en prenant ces poids égaux deux à deux, à distances opposées & égales de GC, & les plaçant à distances opposées égales du même axe GC. Toutes ces conditions, ou du moins d'autres équivalentes doivent être remplies.

L V I I.

Nous avons dit, *sans faire changer de position à l'axe GC;* car si, par exemple, on cargue quelques voiles du côté de l'avant, & que le centre d'impression de celles qui restent tant à l'avant qu'à l'arrière, soit au point R du côté de l'arrière, qu'ensuite on prenne un poids K du côté de l'avant pour le porter en M à l'arrière, les résultats changent; & la nouvelle place du poids K doit être déterminée de manière que l'angle de rotation soit un *maximum*.

Supposons
- L'impulsion du vent dirigée suivant l'horizontale Rr perpendiculaire à AB . . . $=F$
- GR . . . . $=a$
- GK . . . . $=c$
- GM . . . . $=f$
- La masse du navire . . . . $=N$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe GC, avant la transposition du poids K . . . . $=S$
- L'angle de rotation pour le rayon 1 . . . . $=u$.

On trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

$$u = \frac{F\left(a - \frac{K(c+f)}{N}\right)}{S - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K(c+f)^2}{N}} = maximum;$$

Donc, en considérant qu'ici F est une quantité constante;

& faiſant varier f ſeulement, on trouvera que la valeur de f eſt exprimée par une équation du ſecond degré. Pareillement ſi l'on fait varier c, en regardant tout le reſte comme conſtant, la valeur de c ſera exprimée par une équation du ſecond degré.

Je ne fais pas d'application particulière de la théorie établie dans cette ſection, comme j'en ai fait de la théorie établie dans la ſection précédente. Ce détail ne peut avoir aucune difficulté. J'avertirai ſeulement les Lecteurs qui voudront appliquer nos formules au vaiſſeau du §. XLVIII, que la ſurface du gouvernail de ce vaiſſeau eſt d'environ 400 pieds quarrés.

CONCLUSION.

Il ne ſera peut-être pas inutile de remettre ici ſous les yeux du Lecteur les principaux réſultats de ces recherches.

Le problême de l'arrimage des vaiſſeaux eſt un problême indéterminé, qui admet autant de différentes ſolutions qu'on peut avoir de différens vaiſſeaux à arrimer. Cette propoſition évidente par elle-même eſt établie par toutes les réflexions que nous avons faites ſur la manière dont l'arrimage favoriſe ou contredit les qualités du vaiſſeau. En effet, nous avons vu dans la ſection I du chapitre III, que pour empêcher la quille de plier ſous les forces dont elle eſt preſſée, il conviendroit de diſtribuer la charge proportionnellement aux capacités de la carène: on a vu dans la ſection III du même Chapitre que pour augmenter la ſtabilité du vaiſſeau & diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, il faut abbaiſſer le centre de gravité de la charge totale; que pour diminuer la viteſſe des oſcillations il faut élever le centre de gravité de la charge, ou bien diſtribuer le plus qu'il eſt poſſible la charge dans les extrémités & dans les flancs du vaiſſeau: enfin nous venons de voir dans cette section, que pour favoriser les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles, il faut principalement rapprocher la charge de l'axe vertical du vaisseau. Or il peut se faire qu'un vaisseau, relativement à sa forme & à ses capacités, ait plus besoin que l'arrimage favorise telle ou telle qualité que telle autre. Ainsi la question proposée consiste à examiner exactement & en détail les phénomènes qui arriveront dans les mouvemens d'un vaisseau *donné*, lorsqu'on arrimera ce vaisseau de telle ou telle manière. Il est évident que cette méthode est la seule qu'on puisse employer pour découvrir l'arrimage qui convient le mieux à chaque vaisseau particulier. Ajoutons que la perfection de l'arrimage depend presqu'entièrement de la quantité & de la distribution du lest. Les autres matières ont des emplacemens assez fixes, & leurs poids sont limités. Si le point fondamental dont il s'agit est une fois manqué, on cherchera vainement en mer à y remédier: le vaisseau naviguera mal, quoique peut-être excellent en lui-même; & l'on ne pourra que pallier jusqu'à un certain point le vice de l'arrimage.

Pour mettre ces remarques dans le plus grand jour, je vais ajouter ici quelques devis de l'*Altier* & du *Fantasque* dont nous avons déja parlé dans le chapitre II, avec les observations des Capitaines sur la manière dont ces vaisseaux se sont conduits à la mer dans différentes campagnes. Commençons par les proportions générales de ces deux vaisseaux.

Proportions de l'ALTIER, vaisseau du Roi, de 64 canons, construit à Toulon par M. Coulomb en 1757, & lancé à l'eau le 23 Mars 1760.

	pieds	pou.
Longueur de l'étrave à l'étambot	151	0
Largeur au maître bau de dehors en dehors des membres	40	0

Creux

Creux au-dessus de la quille, sous le maitre bau	19 pieds	0 pou.
Longueur de la quille	135	0
Quête de l'étambot	2	0
Élancement de l'étrave	14	0
Tirant d'eau de l'arrière, le vaisseau armé en guerre	19	0
Tirant d'eau de l'avant, le vaisseau armé en guerre	17	0
Équipage en paix	320 hommes.	
Équipage en guerre	450	

Canons { de 24 liv. . . . 26 ; de 12 . . . . 28 ; de 6 . . . . 10 } Total 64

Port en tonneaux . . . . 1100 tonneaux

Proportions du FANTASQUE, *vaisseau du Roi, de 64 canons, construit à Toulon par M. Chapelle fils, en 1756, & lancé à l'eau le 10 Mai 1758.*

Longueur de l'étrave à l'étambot	151 pieds	0 pou.
Largeur au maître bau de dehors en dehors des membres	40	6
Creux de dessus la quille sous le maître bau	19	6
Longueur de la quille	133	9
Quête de l'étambot	3	0
Élancement de l'étrave	14	3
Tirant d'eau d'arrière, le vaisseau armé en guerre	20	6
Tirant d'eau d'avant, le vaisseau armé en guerre	17	3
Équipage en paix	320 hommes	
Équipage en guerre	450	

Canons	de 24$^{liv.}$	26	Total 64
	de 12	28	
	de 6	10	

Port en tonneaux . . . . 1150^{tonneaux}

Devis de l'ALTIER, commandé par M. de Rochemore, Capitaine de vaisseaux; campagne de 1762.

Vivres pour 6 mois; eau pour 3 mois; 450 hommes d'équipage & 45 mousses; 21 barquées de lest, savoir 17 $\frac{1}{2}$ en pierres, 3 $\frac{1}{2}$ en fer.

Ce vaisseau étant neuf, on a suivi, tant pour la quantité du lest, que pour la façon de le placer, l'avis du Constructeur. En conséquence on a placé 2 barquées de lest en canons en avant de l'archipompe, & une barquée & demie en saumons sous la fosse aux cables, sur le lest en pierres. Des 17 barquées & demie en pierres, deux ont été placées de l'arrière de l'archipompe; 12 à la calle à l'eau depuis l'archipompe jusqu'à la cloison de la fosse aux cables; 3 $\frac{1}{2}$ sous la fosse aux cables.

Suivant le Constructeur, on devoit avoir en lest 2 pieds 2 pouces de différence; & on trouva que le vaisseau tiroit de l'arrière 15 pieds, & de l'avant 12 pieds 6 pouces; que par conséquent la différence étoit 2 pieds 6 pouces, c'est-à dire de 4 pouces plus grande que le Constructeur ne pensoit. Ainsi on fut obligé de mettre la barquée & demie en saumons sous la fosse aux cables. Après avoir embarqué tous les vivres, & généralement toute la charge, le vaisseau tiroit d'eau

	pieds	pou.
de l'arrière	19	5
de l'avant	18	3
Différence	1	2

Ce vaisseau porte très-bien la voile, allant assez bien vent arrière ou vent largue, mais non aussi bien au plus près. Il va beaucoup mieux par un vent fort que par un vent foible. Son tangage est fort doux. Il soutient bien la cappe, & sur-tout celle de la grande voile. Il ne fatigue pas sa mâture. Il vire très-bien vent devant, mais il est un peu lâche pour arriver. Il dérive un peu à la cappe & ne va pas de l'avant. Pendant le premier mois, il étoit ce qu'on appelle vaisseau de compagnie; mais il n'a jamais été bon voilier.

Le Capitaine pense que ce vaisseau doit naviger au moins avec deux barquées de plus de lest; qu'ainsi il faut en mettre 23 au lieu de 21; & que la différence du tirant d'eau doit être de 14 pouces au lieu de 16 que le Constructeur avoit marqués. On n'a pas pu pendant la campagne mettre le vaisseau à cette différence, parce qu'on ne mouilla qu'à Tunis & à Alger, où la mer fut si grosse qu'il fut impossible de prendre le tirant d'eau dont il s'agit. Le Capitaine pense aussi qu'il ne faut mettre que deux barquées au plus sous la fosse aux cables, & une barquée de plus en arrière. De cette manière, le vaisseau marchera bien, car il n'a d'ailleurs aucune mauvaise qualité.

Premier devis du FANTASQUE, *commandé par M. de Castillon le cadet, Capitaine de vaisseaux, campagne de 1759.*

Vivres pour 5 mois; 481 hommes d'équipage, 54 mousses; eau pour 3 mois en trois plans; lest 240 tonneaux dont 70 en fer, 170 en pierre. Le plus fort du lest étoit depuis le grand mât en avant, & le reste en arrière jusqu'à la cloison des soutes à poudre.

Tirant d'eau de l'arrière	16 pieds	0 pou.
Tirant d'eau de l'avant	12	7
Différence	3	5 en lest.

On trouva que cette différence étoit un peu trop grande, & on fut obligé de passer du lest sous le plancher de la fosse aux cables, pour mettre le vaisseau à la différence de 2 pieds 4 pouces. Il ne faudroit donner à ce vaisseau, pour une pareille campagne, que 3 pieds 2 pouces de différence en lest, comme il suit des observations qu'on rapportera bientôt.

Le vaisseau en rade & prêt à partir, tiroit d'eau

		pieds	pou.	lig.
De l'arrière		20	0	
De l'avant		17	6	
Différence		2	6	
Hauteur de la batterie	au sabord du milieu	4	6	
	au sabord de l'arrière	5	6	9
	au sabord de l'avant	5	5	

On a observé, pendant la campagne, que la différence qui convient le mieux à ce vaisseau est de 2 pieds 2 à 3 pouces. Il a très-bien gouverné. Il n'a jamais manqué à virer. Ses mouvemens sont très-doux, & il ne fatigue pas sa mâture.

Second devis du FANTASQUE, commandé par M. de Rochemore, campagne de 1760.

Vivres pour 5 mois, & un mois en argent; 480 hommes d'équipage & 60 mousses; 20 barquées de lest, dont 10 en fer & 10 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 7 barquées en vieux canons de plusieurs calibres placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables. A travers du vaisseau une barquée en boulets qui remplissoient les vuides des canons; deux autres en saumons sous le plancher de la fosse aux cables.

Tirant d'eau avec le lest en fer seulement.

De l'arrière	15 pieds	3 pou.	
De l'avant	12	2	
Différence	3	1	

Des 10 barquées en pierre, 7 étoient répandues depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, & horizontalement; les 3 autres dans la calle au vin.

Tirant d'eau avec tout le lest tant en fer qu'en pierre,

De l'arrière	15 pieds	9 pou.	
De l'avant	11	8	6 lig.
Différence	3	0	6

Le vaisseau étant prêt à partir, tiroit d'eau,

de l'arrière	19 pieds	5 pou.	7 lig.
de l'avant	17	10	0
Différence	1	7	7

Il avoit alors 4 pieds 8 pouces 10 lignes de batterie au milieu.

Pendant la navigation, ce vaisseau a assez bien porté la voile. Il plioit facilement jusqu'à sa préceinte; mais il s'arrêtoit à cet endroit avec le gros comme avec le petit vent. Son fort pour la marche étoit le vent largue. Il ne marchoit pas si bien vent arrière, encore moins au plus près. Il gouvernoit bien, mais il ne marchoit pas avec un petit vent. Il viroit bien de bord. Ses mouvemens de tangage & de roulis étoient très-doux, & il ne fatiguoit pas sa mâture.

Comme ce vaisseau a son avant très-renforcé, le Capitaine jugea convenable de le mettre plus sur l'avant que ne porte le dernier devis; il le fit mettre à 2 pieds de différence, & on s'en trouva bien. Le vaisseau marcha mieux qu'auparavant; on présume que si on le mettoit à 22 pouces de différence, il marcheroit encore mieux.

Troisième devis du FANTASQUE, commandé par M. de Cabaroux, Capitaine de vaisseaux, campagne de 1762.

Vivres pour 6 mois ; eau pour 3 mois ; 450 hommes d'équipage & 45 mousses ; 22 barquées de lest, dont 5 en fer & 17 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 35 tonneaux de vieux canons placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, de 15 tonneaux en saumons, qui furent mis en réserve moitié de chaque côté du grand mât pour balancer le vaisseau. Des 17 barquées de lest en pierre, il en a été placé 25 tonneaux depuis la fosse aux cables jusqu'à l'archipompe ; & à l'arrière de l archipompe jusqu'à la soute aux poudres, il a été fait un remplissage entre les varanges de porques avec 1500 saumons de fer, sur lesquels on a mis seulement 15 tonneaux de lest en pierre.

Le vaisseau dans cet état, son gouvernail en place, ses affuts de canon chacun à leur bord, tiroit d'eau

	pieds	pou.
de l'arrière	15	6
de l'avant	12	8
Différence	2	10

Tout armé & prêt à partir, il tiroit d'eau

	pieds	pou.
de l'arrrière	19	8
de l'avant	17	7
Différence	2	1

Hauteur de la batterie au sabord du milieu 4 pieds 8 pou.

Ce vaisseau n'a jamais bien marché qu'en partant du port. Il étoit vaisseau de compagnie avec toute l'escadre ; il gouvernoit bien. Mais à mesure qu'il a été plus allégé par la consommation, il n'a plus marché. On a tenté de le mettre sur l'avant, sur l'arrière, mais inutilement ; ce qui a fait penser que ce vaisseau veut être appuyé, & que dans une pareille campagne, il auroit dû avoir 24 barquées de lest.

Il plie & va chercher son fort, haut; mais il se comporte parfaitement à la mer dans le gros temps. Sa batterie ne fait ni bruit ni mouvement. Il ne fatigue pas sa mâture; & ses mouvemens de tangage & de roulis sont fort doux.

Le fort de sa marche est vent largue & à quartier. Il n'est pas bon boulinier. Il craint la mer de l'avant & de l'arrière au plus près; ce qui fait penser qu'il seroit nécessaire de lui mettre une contrequille. Le Capitaine juge aussi qu'il conviendroit de porter ses deux mâts majeurs un peu plus à l'arrière: il est certain que par-là les voiles d'avant s'orienteroient mieux, & que le petit perroquet, qui ne porte jamais, boulineroit mieux.

Les exemples d'arrimage que je viens de rapporter, & les jugemens portés par les Capitaines sur les mouvemens des deux vaisseaux dont il s'agit, confirment plusieurs réflexions générales répandues dans le corps de cet Ouvrage. La plus importante de toutes, & qu'on ne sauroit trop répéter, est que la forme du vaisseau, la quantité & l'arrangement du lest, relativement à la durée de la campagne, ont ensemble une étroite liaison, qu'il faut étudier, parce que de-là dépend le sort de la navigation.

FIN.