



**ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.**

## Inhalt.

	Seite
<b>Beyel, Christian.</b> Über den Rechenschieber, insbesondere den von Pozzi . . . . .	369
<b>Blasius, H.</b> Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch . . . . .	182
<b>Blumenthal, Otto.</b> Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen	343
— Über die Genauigkeit der Wurzeln linearer Gleichungen . . . . .	359
<b>Distell, Martin.</b> Über das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der kinematischen Geometrie des Raumes . . . . .	261
<b>Einstein, Albert und Großmann, Marcel.</b> Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation . . . . .	225
I. Physikalischer Teil. Von <b>Albert Einstein</b> . . . . .	225
II. Mathematischer Teil. Von <b>Marcel Großmann</b> . . . . .	244
<b>Federhofer, Karl.</b> Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers . . . . .	40
<b>Fieid, Peter.</b> On constrained motion . . . . .	309
<b>Förster, R.</b> Über Flüssigkeitsstrahlen, deren Formen Drehungskörper sind.	319
<b>Francke, Adolf.</b> Drehungstützflächen . . . . .	162
<b>Großmann, Marcel.</b> s. Einstein, Albert.	
<b>Helwig, P. J.</b> Zur Planckschen Strahlungsformel . . . . .	156
<b>Jüttner, Ferencz.</b> Die Gesetze des Stoßes in der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie . . . . .	410
<b>Kolosoff, G.</b> Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. . . . .	384
<b>Lieb, E.</b> Über ungleichförmige Bewegungen eines Fadens, bei denen er seine Gestalt nicht ändert . . . . .	78
<b>Mehmke, R.</b> Graphische Berechnung von Determinanten beliebiger Ordnung	209
<b>Meißner, Otto.</b> Würfelversuche . . . . .	149
<b>Milankovitch, M.</b> Über ein Problem der Wärmeleitung und dessen Anwendung auf die Theorie des solaren Klimas . . . . .	63
<b>Noether, Fritz.</b> Über den Gültigkeitsbereich der Stockesschen Widerstandsformel . . . . .	1
<b>Pfeiffer, F.</b> Über ebene Gleit- und Rollbewegung starrer Körper . . . . .	113
<b>Roever, Wm H.</b> The design and theory of a mechanism for illustrating certain systems of lines of force and stream lines . . . . .	376
<b>Timerding, H. E.</b> Über die Einführung der Gaußischen Funktion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	362
<b>Timoschenko, St.</b> Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken . . . . .	198
<b>Waelsch, Emil.</b> Tangenten an Hellegleichen . . . . .	337
<b>Werkmeister, P.</b> Rechenschieber zur Berechnung von Funktionen mit drei, vier und fünf Veränderlichen . . . . .	93

## Bücherschau.

	Seite
H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	219
C. Schilling. Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	220
E. Müller. Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	221
Th. Schmid. Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	221
Dalwigk, F. v. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Zwei Bände. Erster Band: Die Methode der Parallelprojektion. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	328
G. Hauck. Vorlesungen über darstellende Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik. In zwei Bänden. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	434
J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Teil: Spezielle darstellende Geometrie. Von <b>K. Döhlemann</b> . . . . .	435
P. Harzer. Über die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	435
Annuaire pour l'an 1913 publié par le bureau des longitudes. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	436
J. Franz. Der Mond. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	437
A. Marcuse. Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	438
S. Oppenheim. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	438
P. Meth. Theorie der Planetenbewegung. Von <b>W. Wirtz</b> . . . . .	439
F. Ebner. Technische Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	440
Italo Ghersi. Matematica dilettevole e curiosa. Von <b>H. Wieleitner</b> . . . . .	440
—	
Neue Bücher . . . . .	107, 222, 330, 441
Eingelaufene Schriften . . . . .	111, 224, 333, 443
Berichtigungen zu dem Aufsatz von Max Sergelius: Untersuchungen kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume . . . . .	335

## Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel.

VON FRITZ NOETHER in Karlsruhe i. B.

### Einleitung.

Der Widerstand, den ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper findet, oder der Gesamtdruck, den strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt, hängt von der Spannungsverteilung in der Flüssigkeit längs der Körperoberfläche ab. Von der hydrodynamischen Potentialtheorie wird gerade diese Spannungsverteilung nicht richtig dargestellt<sup>5</sup>; im Zusammenhang damit, daß die Theorie der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit an der Körperoberfläche, die den beobachteten Strömungserscheinungen annähernd Ausdruck gibt, nicht genügen kann. Sie versagt daher bei der Berechnung des gesuchten Widerstandes, während die von Navier und Stokes begründete Theorie der Flüssigkeiten mit innerer Reibung auch der Haftbedingung gerecht wird. Die wesentliche Schwierigkeit aber für die strenge Behandlung des Problems mit Hilfe der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ist der quadratische Charakter dieser Gleichungen, der ihre vollständige Auswertung vorläufig kaum erwarten läßt. Nur von zwei extremen Seiten her wurde bisher der Versuch gemacht, sie zur Behandlung der vorliegenden Fragen anzugreifen. (Die Untersuchungen von Helmholtz über Wirbelbewegungen kommen in diesem Zusammenhang nicht in Betracht, da seine Voraussetzung von Unstetigkeitsflächen in der Strömung nicht den Bedingungen reibender Flüssigkeiten entspricht und auch bei verschwindender Reibung zu instabilen Strömungsformen führt.<sup>1</sup>))

Stokes<sup>2</sup>) behandelt den Fall einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit oder geringer Dichte, für die die inneren Widerstände so groß gegenüber den Trägheitskräften sind, daß letztere vernachlässigt

1) Helmholtz: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Ges. Werke, Bd. 1, S. 152. Vgl. auch Th. v. Kármán: Über den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstands, Gött. Nachr., 1911, S. 509 u. 1912, S. 547.

2) Stokes: On the Effect of the Internal Friction .., Camb. Trans. S. [8] 9 (1851); Papers, vol. III, p. 1.

werden können; oder, was auf das Gleiche hinauskommt, den Fall, daß die Trägheit wegen der Kleinheit der Geschwindigkeit, oder der Kleinheit der eingetauchten Körper und der dadurch bedingten geringen Geschwindigkeitsunterschiede vernachlässigt werden kann. In diesen Fällen werden die erwähnten Differentialgleichungen linear; das Stokessche Resultat für den Fall der Bewegung einer Kugel ist die bekannte Formel für den Widerstand:

$$W = 6 \pi \mu U a,$$

wo  $U$  die Geschwindigkeit der Kugel,  $a$  ihren Radius und  $\mu$  den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet.

Von der entgegengesetzten Richtung her, dem Falle kleiner Reibung, wo die Trägheit ein ausschlaggebender Faktor ist, hat zuerst L. Prandtl die Aufgabe angegriffen<sup>1)</sup>, durch Untersuchung der Grenzschichten d. h. der Schichten in der nächsten Nähe der Oberfläche, in denen die an der Oberfläche haftende Strömung sehr rasch zu der äußeren Geschwindigkeit ansteigt. Diese Untersuchungen führen zwar zur Erklärung der „Ablösung“ der Strömung und der Wirbelbildung hinter dem Körper, sie vermögen aber nicht die Strömung auf der Rückseite hinreichend zu berechnen, um zu einem Widerstandsgesetz zu führen. Die wesentliche Schwierigkeit liegt hier darin, daß die Flüssigkeitsbewegung auch bei beliebig verkleinerter Reibung nicht in die reibungsfreie Potentialbewegung übergeht, eben wegen der oben erwähnten Unterschiede in den Randbedingungen der Potentialströmung und der wirklichen wirbelnden Strömungen. Dadurch wird es erforderlich, entweder als erste Annäherung eine von der wirklichen Bewegung wesentlich abweichende Strömung zugrunde zu legen, oder aber die nur experimentell ermittelte Strömung in einiger Entfernung von der Oberfläche zu benutzen.

Wollte man diese Untersuchungen zu einem mathematisch exakten Näherungsverfahren ausbilden so müßte man, ausgehend von einer Potentialbewegung, die die Differentialgleichungen streng befriedigt, aber nicht die Randbedingungen, eine Lösung suchen, die die richtigen Randbedingungen sukzessive annähert. Leichter scheint aber der entgegengesetzte Weg zu sein: Ausgehend von der Stokesschen Bewegung, die zwar die Randbedingungen streng befriedigt, aber nicht die Differentialgleichungen, eine Annäherung an die Differentialgleichungen zu suchen. Dazu soll die folgende Untersuchung einen Beitrag liefern.

1) Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. d. int. Math. Kongresses, Heidelberg 1904; s. a. die Göttinger Dissertationen: H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten . . . , 1904 (Ztschr. f. Math. u. Physik, Bd. 55); E. Boltze: Grenzschichten an Rotationskörpern . . . , 1908; K. Hiemenz: Die Grenzschicht an einem . . . Kreiszyylinder, 1911 (Dinglers Polytechn. Journal, Bd. 326).

Zu dieser Problemstellung hat noch ein anderer Gesichtspunkt geführt, die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der genannten Stokesschen Formel, die für grundlegende Untersuchungen der modernen Physik eine wesentliche Rolle spielt, nämlich für die Bestimmungen des hypothetischen Elementarquantums der Elektrizität, der Elektronenladung, bezw. die Prüfung, ob ein solches Elementarquantum überhaupt existiert.<sup>1)</sup> Während für die Untersuchung des Gültigkeitsbereichs der Stokesschen Formel nach der Seite kleiner Dimensionen der bewegten Körper hin die kinetische Gastheorie in Frage kommt, bezieht sich die vorliegende hydrodynamische Untersuchung, die auch bereits experimentell in Angriff genommen worden ist<sup>2)</sup>, auf den Gültigkeitsbereich nach der Seite wachsender Dimensionen hin. Wie schon Rayleigh<sup>3)</sup> auf Grund einer einfachen Dimensionsbetrachtung bemerkt hat, hängt die Gültigkeit der Stokesschen Formel wesentlich nur von der Kleinheit der unbenannten „Reynoldsschen“ Zahl ab:

$$S = \frac{\sigma a U}{\mu},$$

wo  $\sigma$  die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet. Daher wird eine Annäherung an die Stokessche Bewegung eine Entwicklung der Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen nach Potenzen dieser Größe sein müssen. Zu dieser Entwicklung ist das Folgende nur ein erster Schritt, indem wir das erste zur Stokesschen Bewegung hinzutretende Glied explizit aufstellen.

Diese Aufgabe wurde früher schon von Whitehead in Angriff genommen<sup>4)</sup>, doch scheiterte sein Versuch an Schwierigkeiten, die in der Natur der Stokesschen Vernachlässigungen liegen, wie B. W. Oseen in Verbindung mit einer neuen Begründung der Stokesschen Widerstandsformel hervorgehoben hat.<sup>5)</sup> Obwohl im allgemeinen unter der Voraussetzung kleiner Werte der Reynoldsschen Zahl die Stokessche Vernachlässigung der Trägheitsglieder berechtigt ist, so trifft dies nicht mehr zu in sehr großer Entfernung von der Kugel, wo immer einzelne dieser Glieder groß werden gegen die berücksichtigten. Diese hat Oseen von vornherein mit beachtet und gelangt so zu einer Strömung, die in großen Entfernungen zwar wesentlich von der Stokesschen ab-

1) Zusammenstellung bei F. Ehrenhaft: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 940 f.

2) Allen: Phil. Mag. 5, 50 (1900), p. 323, 519. Zelony u. Mc. Keehan: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 78.

3) Phil. Mag. (4) 46 (1893) p. 354 f. (Papers VI, p. 78 f.).

4) Quarterly Journal of Mathematics 23 (1889) p. 78, 143.

5) Über die Stokessche Formel . . . , Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 6 (1910), Nr. 29. (Beim Erscheinen dieser Abhandlung war das Manuskript der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen fertiggestellt.)

weicht, in der Nähe der Kugel aber durch diese bei kleiner Reynoldsscher Zahl appoximiert wird und daher auch zur selben Widerstandsformel führt. Der von Stokes begangene Fehler erweist sich also für seinen Zweck als belanglos, dagegen macht er sich geltend bei dem von Whitehead eingeschlagenen Wege der weiteren Entwicklung, indem es sich als unmöglich erweist, diese eindeutig zu bestimmen.

Doch läßt sich die Stokessche Ableitung auch auf einem anderen als dem von Oseen eingeschlagenen Wege rechtfertigen, und dieses Verfahren scheint leichter zu der geforderten weiteren Annäherung zu führen. Wir betrachten nicht wie Stokes eine Parallelströmung, in der die Kugel ruht, sondern eine Strömung, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel befindliche Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung befindliche Senke hervorgerufen wird, eine Strömung, die sich ja in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von einer Parallelströmung unterscheidet, wenn die Entfernung der Quelle hinreichend groß ist gegenüber dem Kugelradius. In unendlicher Entfernung aber ist diese Strömung wesentlich von der Parallelströmung verschieden, und dadurch wird es ermöglicht, daß die bei der Stokesschen Bewegung gekennzeichneten Schwierigkeiten hier nicht auftreten. Es gelingt so in der Tat, eine eindeutige Lösung für die Differentialgleichungen und Randbedingungen der ersten Näherung zu finden.

Mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel hängt die andere zusammen, bei welcher unteren Geschwindigkeitsgrenze die bei großen Geschwindigkeiten stets beobachtete Rückströmung und Wirbelbildung auf der Rückseite des Körpers eintritt. Unsere erste Näherung gibt allerdings auch hier eine vorläufige Antwort, doch bleibt, da diese Grenze schon aus dem Gebiete sehr kleiner Reynoldsscher Zahl herausfällt, noch abzuwarten, wie durch die weitere Entwicklung diese Grenze beeinflußt wird.

Die folgende Untersuchung gründet sich auf die Annahme stationärer Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es müßte allerdings von vornherein in Zweifel gezogen werden, ob eine solche über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnte Bewegung mit den hydrodynamischen Differentialgleichungen und Randbedingungen überhaupt verträglich ist, ob nicht etwa jede Bewegung von periodisch wechselnden Wirbelungen begleitet ist. In der Tat würden die genannten Schwierigkeiten auch dann fortfallen, wenn wir die zugrunde gelegte stationäre Bewegung durch eine periodische Bewegung, äquivalent einem Pendeln der Kugel, ersetzten, aber die mathematischen Komplikationen würden sich dann schon wesentlich erhöhen. Doch hat C. W. Oseen in der genannten

und einer weiteren Arbeit<sup>1)</sup> den Existenzbeweis für die stationäre Lösung eines verwandten Problems durchgeführt und sein Ansatz dürfte wohl auch zu dem hier geforderten Existenzbeweis führen. Die im Folgenden untersuchte Bewegung stellt aber nur eine Näherungsbewegung in dem Sinne dar, daß in ihren Bedingungsgleichungen die vernachlässigten Glieder sicher klein sind neben den berücksichtigten.

§ 1. Die allgemeinen hydrodynamischen Differentialbeziehungen und die Stokessche Strömung.

Es bezeichne  $u, v, w$  die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung, an der Stelle  $x, y, z$  nach den Achsen der  $x, y, z$  gemessen.  $\sigma$  sei die Dichte,  $\mu$  die Viskositätskonstante,  $p$  der Druck der Flüssigkeit. Dann lauten die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für inkompressible stationäre Strömung:

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta v = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta w = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

gesetzt ist.

Dazu treten noch die Randbedingungen, die für den zu untersuchenden Fall einer ruhenden Kugel in Parallelströmung so lauten: An der Kugeloberfläche soll  $u = v = w = 0$  sein, während im Unendlichen in jeder Richtung  $u = U, v = 0, w = 0$  verlangt wird.

Die Inkompressibilitätsbedingung (2) pflegt man in allen Fällen, in denen eine ausgezeichnete Richtung, hier die  $x$ -Richtung, vorhanden ist, in die keine Wirbelkomponente der Strömung fällt, identisch zu erfüllen durch den Ansatz:

$$(3) \quad u = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad w = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Wenn die Strömung außerdem Achsensymmetrie um die  $X$ -Achse hat, ferner angenommen wird, daß die Stromlinien überall in den durch die

1) Über die Stokessche Formel . . . , II; Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 7, Nr. 1 (1911).

X-Achse hindurchgehenden Ebenen liegen, so kann die Funktion  $\varphi$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Funktion von  $x$  und

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

angesetzt werden. Bezeichnet nun  $q$  die in die Richtung des Radius  $r$  fallende Geschwindigkeitskomponente, so gehen die Gleichungen (3) über in:

$$u = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

$$q = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial x}.$$

Die Funktion

$$(4) \quad r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \psi$$

gewinnt also durch die genannten Einschränkungen der Strömungsform die Bedeutung der Stokesschen Stromfunktion<sup>1)</sup>, durch die sich die Geschwindigkeitskomponenten bekanntlich so ausdrücken:

$$(5) \quad u = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad q = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Aus dieser Ableitung folgen zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  sogleich die weiteren Beziehungen:

$$(6) \quad r \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = D(\psi).$$

Der so definierte Differentialprozeß  $D$  spielt in mancher Hinsicht für die Funktion  $\psi$  die gleiche Rolle, wie der Differentialprozeß  $\Delta$  für die Funktion  $\varphi$ , sein Verschwinden würde die Wirbelfreiheit der Strömung zum Ausdruck bringen. Genau in der gleichen Weise, wie die Gl. (6) aus der Gl. (4) gewonnen wurde, läßt sich nun auch noch weiter schließen:

$$(7) \quad r \frac{\partial \Delta \Delta \varphi}{\partial r} = DD\psi,$$

wo nun  $\Delta \Delta$  und  $DD$  die Wiederholung des Prozesses  $\Delta$  bzw.  $D$  bedeutet. Wir werden uns im folgenden nicht auf die Benützung einer der Funktionen  $\varphi$  oder  $\psi$  beschränken, sondern je nach dem vorliegenden Zweck die geeignetere Wahl treffen. Der Übergang von der einen zur anderen Funktion ist stets mittels der Gl. (4), (6), (7) leicht auszuführen.

Aus den Gl. (1) haben wir zunächst den Druck  $p$  zu eliminieren, da er in die Randbedingungen nicht eingeht, sondern erst nachträglich

1) Stokes: Camb. Trans. 7. 1842 (Papers, vol. I, p. 1). S. a. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

mittels der Gl. (1) aus den gefundenen Geschwindigkeitswerten berechnet wird. Aus (1) entstehen zunächst die folgenden Gleichungen:

$$(1') \quad \begin{cases} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u = 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu \left( \frac{y}{r} \Delta v + \frac{z}{r} \Delta w \right) = 0 \end{cases}$$

oder mittels der Gl. (3)

$$\begin{aligned} \sigma \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( p - \mu \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right) + \mu \Delta \Delta \varphi &= 0 \\ \sigma \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( p - \mu \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von  $p$  ergibt somit:

$$\begin{aligned} \sigma \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) + q \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] + \mu \frac{\partial \Delta \Delta \varphi}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

Hier ist nun die Einführung der Stromfunktion  $\psi$  mittels der Gl. (4), (5), (6), (7) am zweckmäßigsten, wir erhalten so aus der vorangehenden Gleichung durch Multiplikation mit  $r$  und mittels geringer Vereinfachungen die folgende für die Funktion  $\psi$ :

$$(8) \quad DD(\psi) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D\psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial D\psi}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} D\psi \right).$$

Zur Gl. (8) treten noch die Randbedingungen, welche ausdrücken, daß im Unendlichen (im Falle der Parallelströmung) überall

$$(8a) \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

sei, daß ferner für die Kugel  $R = \sqrt{x^2 + r^2} = a$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

sei. Da die Funktion  $\psi$  nur bis auf eine additive Konstante bestimmbar ist, so kann diese so gewählt werden, daß die letzteren Bedingungen übergehen in

$$(8b) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

für  $R = a$ , wobei  $\psi$  als Funktion des Radius  $R$  und des Polarwinkels  $\vartheta = \arctg \frac{r}{x}$  gedacht ist.

Unter den in der Einleitung genannten Voraussetzungen für die Stokessche Bewegung kann nun in (8) die rechte Seite, deren Glieder quadratisch in  $\psi$  sind, neben den linearen Gliedern der linken Seite

vernachlässigt werden, und es ergibt sich die Grundgleichung für die Stokessche Bewegung:

$$(9) \quad DD(\psi_0) = 0,$$

wozu noch die an sich linearen Randbedingungen unverändert hinzutreten. Die Erfüllung dieser Bedingungen lautet

$$(10) \quad \psi_0 = \frac{U}{4} r^2 \left( -2 + 3 \frac{a}{R} - \frac{a^3}{R^3} \right) = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta (R - a)^2 \frac{2R + a}{R},$$

wo der Definition nach

$$\begin{aligned} x &= R \cos \vartheta \\ r &= R \sin \vartheta \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Ausdrücken für die Spannungskomponenten<sup>1)</sup> in einer strömenden zähen Flüssigkeit, führen zu der in der Einleitung genannten Stokesschen Widerstandsformel für die Kugel.

## § 2. Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichung (8) in erster Näherung.

Um die quadratischen Glieder der Gl. (8) in erster Annäherung zu berücksichtigen, setzen wir

$$\psi = \psi_0 + \psi_1,$$

wo  $\psi_0$  der in Gl. (10) angegebene Ausdruck sei und  $\psi_1$  von der Ordnung  $S\psi_0$  vorausgesetzt wird, unter  $S$  die Reynoldssche Zahl  $\frac{\sigma a U}{\mu}$  verstanden. Die Vernachlässigung aller Glieder der Differentialgleichung (9), die den Faktor  $S^2$ , bzw.  $\frac{\sigma}{\mu} S$  enthalten, führt dann, unter Berücksichtigung, daß  $DD(\psi_0) = 0$ , zu der folgenden:

$$(11) \quad DD(\psi_1) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right),$$

die auf der rechten Seite nur bekannte Größen enthält. Dazu kommen die Randbedingungen, daß für  $R = a$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$$

und im Unendlichen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \text{ sei.}$$

1) Saint-Venant: Comptes Rendus 17 (1843) p. 1240. Stokes: Camb. Trans. 8 (1845) p. 287 (Papers, vol. I, p. 75). S. a. Lamb: Hydrodynamik, § 314.

Die Gleichung (11) ist durch Einsetzen aus (10) und der hieraus folgenden Gleichung:

$$(12) \quad D\psi_0 = -\frac{3}{2}aU \frac{\sin^2 \vartheta}{R} = -\frac{3}{2}aU \frac{r^2}{R^3}$$

auszuführen. Es ergibt sich (vgl. die Ausrechnung im Anhang 1)

$$(13) \quad DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right).$$

Bevor wir zur Behandlung dieser Gleichung gehen, sind einige Vorbemerkungen nötig über die Lösungen der Gleichungen

$$D\psi = 0 \text{ und } D\psi = F,$$

auf die wesentlich die sukzessiven Annäherungen der exakten Differentialgleichungen zurückzuführen sind.<sup>1)</sup>

Aus den im § 1 aufgestellten Beziehungen zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  folgt, daß man aus jeder Lösung  $\varphi$  der Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  durch den Prozeß  $\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  eine Lösung der Gleichung  $D\psi = 0$  erhält, und ebenso aus der Lösung der Gleichung  $\Delta\varphi = f$  die Lösung der Gleichung  $D\psi = r \frac{\partial f}{\partial r} = F$ . Nun läßt sich bekanntlich die Gleichung  $\Delta\varphi = 0$  durch eine Summe von homogenen Funktionen des Ortes  $x, y, z$  (bzw.  $x, r$ ), die räumlichen Kugelfunktionen, allgemein integrieren, die im vorliegenden Fall der Rotationssymmetrie um die  $X$ -Achse in die zonalen<sup>2)</sup> Kugelfunktionen übergehen. Es folgt also, daß sich in gleicher Weise die Gleichung  $D\psi = 0$  durch eine Summe von homogenen Funktionen der Koordinaten  $x, r$  integrieren läßt, die sich aus den Kugelfunktionen in einfacher Weise ableiten.

Weiter läßt sich die allgemeine Lösung der Gleichung  $\Delta\varphi = f$  durch Entwicklung von  $f$  in eine Reihe von homogenen Funktionen finden, deren jede das Produkt aus einer Kugelfunktion und einer Potenz des Radius  $R$  ist, und zwar einer zonalen Kugelfunktion, wenn  $f$  Achsensymmetrie in bezug auf die  $X$ -Achse hat. Die Lösung  $\varphi$  kann dann in gleicher Weise entwickelt werden, wobei jedem homogenen Bestandteil von  $f$  ein gleicher in  $\varphi$ , und zwar von einem um 2 höheren Grade, entspricht. Aus dem Zusammenhang zwischen den Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  folgt, daß die Lösung der Gleichung  $D\psi = r \frac{\partial f}{\partial r} = F$  sich in analoger Weise darstellen läßt, wobei an Stelle der Kugelfunktionen die homogenen Lösungen der Gleichung  $D\psi = 0$  treten.

1) Ausführliche Theorie dieser Funktionen bei Sampson: London Phil. Trans. Bd. 182 (1891), S. 449f.

2) Bezeichnung nach Thomson und Tait, Nat. Phil.

Für diese erhalten wir aus der Reihe der zonalen Kugelfunktionen  $\varphi$  die folgende Reihe:

$\varphi$ $P_0(\vartheta) = 1$ $R P_1(\vartheta) = x$ $R^2 P_2(\vartheta) = \frac{1}{2}(3x^2 - R^2)$ $R^3 P_3(\vartheta) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3xR^2)$ <p style="text-align: center;">usw.</p> $R^{-1} P_0(\vartheta) = R^{-1}$ $R^{-2} P_1(\vartheta) = x R^{-3}$ <p style="text-align: center;">usw.</p>		$\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ $0$ $0$ $-r^2 = -R^2 \sin^2 \vartheta$ $-3xr^2 = -3R^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$ <p style="text-align: center;">usw.</p> $-r^2 R^{-3} = -R^{-1} \sin^2 \vartheta$ $-3xr^2 R^{-5} = -3R^{-2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$ <p style="text-align: center;">usw.</p>
---	--	--

Um die Differentialgleichungen für die so definierten homogenen Funktionen  $\psi$  aufzustellen, setzen wir allgemein

$$\psi = B(\vartheta) \cdot \Psi(R)$$

und erhalten zunächst:

$$(14) \quad D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = B \frac{d^2 \Psi}{dR^2} + \frac{\Psi}{R^2} \left( \frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \text{ctg } \vartheta \frac{dB}{d\vartheta} \right).$$

Durch den speziellen Ansatz

$$\Psi = R^m$$

folgt dann aus  $D\psi = 0$  die Differentialgleichung für  $B$ :

$$(15) \quad \frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \text{ctg } \vartheta \frac{dB}{d\vartheta} + m(m-1)B = 0.$$

Hiernach besteht, wie auch schon aus der obigen Reihe ersichtlich ist, die Beziehung:

$$B_m = B_{-m+1}.$$

Ferner zeigt die Reihe, daß es zu jedem Grade  $m$  eine Lösung  $B_m$  von (13) gibt, die eine ganze rationale Funktion von  $\cos \vartheta$  ist. Eine ganz analoge Untersuchung wie die bei den Kugelfunktionen übliche würde zeigen, daß (ausgenommen im Falle  $m = 1$  bzw.  $m = 0^1$ ) je nur diese einzige rationale Funktion  $B_m$  zu jedem Index  $m$  existiert. Die Reihe dieser Funktionen lautet, unter geeigneter Festsetzung ihrer numerischen Faktoren, die noch später erfolgen wird:

$$B_1 = B_0 = 1 \text{ (und } \cos \vartheta)$$

$$B_2 = B_{-1} = -\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$$

$$B_3 = B_{-2} = -\sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

$$B_4 = B_{-3} = -\frac{3}{8} \sin^2 \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$B_5 = B_{-4} = -\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (7 \cos^2 \vartheta - 3)$$

usw.

1) Für diese Fälle werden die Lösungen aus der Gl. (15) leicht direkt erhalten.

Um nun die Gleichung

$$D\psi = F(x, r^2)$$

zu integrieren, denken wir uns  $F$  in eine Reihe von homogenen Funktionen

$$k_{m,n} R^n B_m(\vartheta)$$

entwickelt. Für die im Folgenden in Betracht kommenden Fälle ist das immer möglich. Die Lösung selbst wird dann eine Reihe

$$\psi = \sum \psi_{m,n},$$

deren einzelnes Glied der Differentialgleichung

$$D(\psi_{m,n}) = k_{m,n} R^n B_m(\vartheta)$$

genügen muß. Für  $\psi_{m,n}$  setzen wir hier

$$(16) \quad \psi_{m,n} = \mathfrak{F}_{m,n}(R) B_m(\vartheta)$$

und erhalten mittels (14) und (15) die Gleichung:

$$\frac{d^2 \mathfrak{F}_{m,n}}{dR^2} - m(m-1) \frac{\mathfrak{F}_{m,n}}{R^2} = k_{m,n} R^n,$$

deren vollständige Lösung im allgemeinen lautet:

$$(17) \quad \mathfrak{F}_{m,n} = \frac{k_{m,n} R^{n+2}}{(n-m+2)(n+m+1)} + c_1 R^m + c_2 R^{-m+1}.$$

Eine Ausnahme bilden ersichtlich die Fälle

$$n = m - 2 \text{ und } n = -m - 1,$$

für die die entsprechende Formel lautet:

$$(17') \quad \mathfrak{F}_{m,n} = \frac{k_{m,n} R^{n+2} \log R}{2n+3} + c_1 R^m + c_2 R^{-m+1},$$

unter  $c_1, c_2$  wie oben willkürliche Konstanten verstanden.

Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik, die für eine achsensymmetrische Strömung nach Elimination des Druckes in der nicht-linearen partiellen Differentialgleichung (8) zusammengefaßt sind, lassen sich allgemein durch sukzessive Lösung von linearen Näherungsgleichungen auf Grund der vorhergehenden Formeln integrieren. Denn jede der sukzessiven Näherungsgleichungen erhält ganz analog wie die oben abgeleitete Gl. (13) für die erste Näherung die Form

$$DD(\psi_i) = F_i(x, r^2),$$

ist also äquivalent mit dem System von linearen Gleichungen zweiter Ordnung:

$$D(E_i) = F_i(x, r^2)$$

$$D(\psi_i) = E_i(x, r^2).$$

Während diese formale Integration keine prinzipielle Schwierigkeit hat, zeigen sich aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, wesentliche Hindernisse, die Randbedingungen zu erfüllen, wenn das Strömungsgebiet unendliche Ausdehnung hat, und zwar tritt diese Schwierigkeit schon bei der nun folgenden Integration der ersten Näherungsgleichung (13) auf.

Wenden wir auf diese die obigen Bezeichnungen an, so lautet sie:

$$(13a) \quad D(E_1) = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right)$$

$$(13b) \quad D(\psi_1) = E_1.$$

Ein Integral von (13a) ist auf Grund der Gleichungen (16) und (17):

$$E_1 = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( -\frac{a}{3} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R} + \frac{a^4}{6R^3} \right).$$

Sodann ein partikuläres Integral von (13b), das mit  $\psi_1'$  bezeichnet sei:

$$(18) \quad \psi_1' = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{aR^2}{12} - \frac{a^2R}{8} - \frac{a^4}{24R} \right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichungen (8a) und (8b) setzt sich zusammen aus diesem partikulären Integral (18) und dem allgemeinen Integral der Gleichung  $DD\psi = 0$ , das sich auf Grund obiger Vorbemerkungen ergibt zu

$$(19) \quad -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sum_1^{\infty} B_m(\vartheta) (c_{m1} R^{-m+1} + c_{m2} R^{-m+3} + c_{m3} R^m + c_{m4} R^{m+2}).$$

Die unendlich vielen Konstanten  $c$  des Ausdruckes (19) sind nun geeignet zu bestimmen, damit die Randbedingungen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \text{ für } R = \infty$$

und 
$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0 \text{ für } R = a$$

durch die Kombination der Ausdrücke (18) und (19) erfüllt werden. Da nun die Funktionen  $B_m$  je Funktionen  $m$ -ter Ordnung von  $\cos \vartheta$  sind, wie aus ihrer Ableitung allgemein hervorgeht, da also keine linearen Beziehungen in dem System der Funktionen  $B_m$  bestehen können, da andererseits die aufgestellten Randbedingungen unabhängig vom Winkel  $\vartheta$  sind, so müssen die Randbedingungen in der Kombination der Ausdrücke (18) und (19) identisch je durch die Faktoren der Funktionen  $B_m$  erfüllt werden.

Zur Erfüllung der für  $R = \infty$  gültigen Bedingungen ist es erforderlich, daß sämtliche Glieder der Funktion  $\psi_1$  von niedrigerer Ord-

nung in  $R$  als der zweiten sind. Dieser Forderung widerspricht aber das erste Glied des Ausdrucks  $\psi'$  in (18):

$$\frac{3}{16} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3 (\vartheta) a R^2$$

und dieses Glied kann, weil der Faktor von  $B_3$ , aus (18) und (19) zusammengenommen, für sich die Bedingungen befriedigen muß, auch nicht durch irgend welche anderen Glieder der Summe (19) kompensiert werden.

Dies ist der Widerspruch, auf den bereits Whitehead auf anderem Wege geführt wurde. Seine Vermutung, daß deshalb das allgemeine hydrodynamische Problem überhaupt keine stetigen Lösungen zulasse, sondern daß Diskontinuitätsflächen im Sinne der Helmholtzschen Wirbeltheorie vorhanden seien, ist aber nicht begründet. Die Schwierigkeit erklärt sich daraus, daß die Stokessche Bewegung im Unendlichen keine Annäherung an die wirkliche Bewegung mehr darstellt, sondern Glieder vernachlässigt, die größer als die berücksichtigten sind. Eine unmittelbare Folge davon ist es, daß unser Ausdruck  $E_1 = D\psi_1$  von höherer Ordnung in  $R$  und daher im Unendlichen größer als  $D\psi_0$  wird.

Da ohne die Berücksichtigung der im Unendlichen geltenden Grenzbedingungen aber die eindeutige Bestimmung der Funktion  $\psi$  nicht ausführbar ist, so bleibt auch die Stromverteilung in der Nähe der Kugel, von der insbesondere der Widerstand abhängt, noch völlig unbestimmt. Doch wird es uns auf dem in der Einleitung angegebenen Wege gelingen, *eine andere Bewegung eindeutig zu bestimmen, für die die oben gesuchte Bewegung als eine in der Nähe der Kugel und in endlicher Entfernung von ihr gültige Annäherung angesehen werden kann.* So ist es dann möglich, die noch unbestimmten Konstanten in der Funktion  $\psi_1$  ebenfalls zu bestimmen, unabhängig davon, daß die gewonnene Formel für  $\psi_1$  im Unendlichen aufhört, Gültigkeit zu haben.

Da diese Untersuchung (§ 5 und 6) größeren Raum einnimmt, so geben wir hier zunächst nur ihr Resultat an. Dieses ist, daß in dem Ausdruck (19) die sämtlichen Faktoren der Funktionen  $B_m$ , mit Ausnahme desjenigen von  $B_3$ , verschwinden, und daß in dem Faktor von  $B_3$  die Konstanten  $c_{33}$  und  $c_{34}$  ebenfalls verschwinden. Zur Bestimmung der übrig bleibenden Konstanten  $c_{31}$  und  $c_{32}$  reichen die Randbedingungen an der Kugeloberfläche  $R = a$  aus.

Aus  $\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$  für  $R = a$  folgt:

$$-\frac{a^3}{12} + c_{31} a^{-2} + c_{32} = 0$$

$$\frac{a^2}{12} - 2c_{31} a^{-3} = 0.$$

Also 
$$c_{31} = \frac{a^5}{24}; c_{32} = -\frac{a^5}{24}$$

$$(20) \quad \text{und } \psi_1 = -\frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left( \frac{aR^2}{12} - \frac{a^2R}{8} - \frac{a^3}{24} - \frac{a^4}{24R} + \frac{a^5}{24R^2} \right) \\ = \frac{3}{32} S U \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{(R-a)^2(2R^2+aR+a^2)}{R^2}.$$

Nehmen wir das Glied  $\psi_0$  aus Gl. (10) hinzu, so erhalten wir endlich als erste Annäherung:

$$(21) \quad \psi_0 + \psi_1 = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \frac{(R-a)^2}{R^2} \left[ R(2R+a) \right. \\ \left. - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2+aR+a^2) \right].$$

Aus Gleichung (21) ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Einfluß des ersten Näherungsgliedes  $\psi_1$  nur von dem numerischen Wert der Reynoldsschen Zahl  $S = \frac{\sigma U a}{\mu}$  abhängen kann.

### § 3. Diskussion der ersten Annäherung.

Die Gleichung (21) läßt vorläufige Schlüsse auf die Strömungsform ziehen, die unter dem Einfluß der Trägheit eintreten wird. Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente,

$$v_\vartheta = u \sin \vartheta - q \cos \vartheta \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{r}{R} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{x}{R} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

verschwindet den Randbedingungen entsprechend für die Kugeloberfläche  $R = a$ . Ihr Anstieg senkrecht zur Oberfläche

$$\left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a}$$

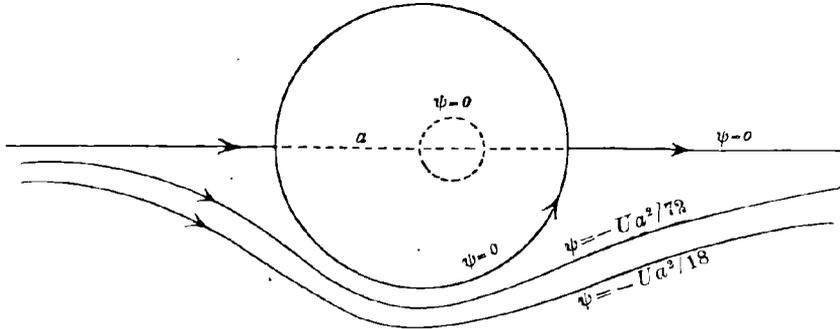
dagegen hat einen endlichen Wert und gibt ein Bild für die Strömungsverteilung in der Nähe der Kugel. Man erhält mit Rücksicht auf das Verschwinden von  $\frac{\partial \psi}{\partial R}$  für  $R = a$ :

$$(22) \quad \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)_{R=a} = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} (R=a) \\ = \frac{U}{2} \sin \vartheta \frac{R(2R+a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2+aR+a^2)}{R^3} (R=a) \\ = \frac{3}{2} \frac{U}{a} \sin \vartheta \left( 1 - \frac{S}{2} \cos \vartheta \right).$$

Hiernach ist der Geschwindigkeitsanstieg, der bei der Stokesschen Bewegung auf der Vorder- und Rückseite der Kugel gleich war (da  $\sin \vartheta =$

$\sin(\pi - \vartheta)$ ), durch das Hinzutreten des ersten Näherungsgliedes  $\frac{S}{2} \cos \vartheta$  unsymmetrisch geworden. Auf der der Strömung entgegenstehenden Vorderseite der Kugel ( $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \pi, \cos \vartheta < 0$ ) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg gleichgerichtet mit dem ursprünglichen für  $S=0$ , die Geschwindigkeit ist daher auf der Vorderseite erhöht gegen die der Stokesschen Bewegung. Auf der Rückseite der Kugel dagegen ( $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \cos \vartheta > 0$ ) ist der zusätzliche Geschwindigkeitsanstieg dem ursprünglichen entgegengerichtet und der Gesamtanstieg ist daher hier verzögert gegen den der Stokesschen Bewegung (s. Fig. 1). Dieses Geschwindigkeitsbild erinnert offenbar schon an die wirklich unter dem Ein-

Fig. 1. Stromlinie für  $S=1$ .



fluß der Trägheit stattfindende Strömung: Wenig beeinflusste Strömung bis nahe an die Vorderseite der Kugel heran; „Totwasser“, bezw. ein Gebiet wirbelnder Bewegung hinter der Kugel. Gehen wir einen Schritt weiter und lassen  $S$  in der Formel (22), ohne Rücksicht auf die noch unerledigte Konvergenzfrage, genügend groß werden. Sobald  $S > 2$  geworden ist, überwiegt für kleine Werte von  $\vartheta$  (wenn also  $\cos \vartheta$  nahe an 1 liegt) die rückströmende Zusatzbewegung über die ursprüngliche Vorwärtsbewegung, es tritt im Ganzen Rückwärtsströmung auf der Rückseite der Kugel ein, eine Bewegungsform, die der unter gewöhnlichen Verhältnissen (d. h. bei großen Werten der Reynoldsschen Zahl  $S$ ) beobachteten qualitativ ähnlich ist.

Der vollständige Ausdruck der Stromfunktion (Gl. 21) gibt näheren Aufschluß über die Strömung in der Nähe der Kugel. Die Rotationsflächen  $\psi = \text{const}$ , die „Stromflächen“, enthalten bekanntlich vollständig die Stromlinien, ihr Verlauf ergibt sich qualitativ aus dem Verlauf der Fläche  $\psi = 0$ . Letztere zerfällt in drei Bestandteile:

(1)  $\sin^2 \vartheta = 0$ , d. i. die X-Achse, die wegen der Rotationssymmetrie selbst Stromlinie sein muß.

(2)  $(R - a)^2 = 0$ , die Kugeloberfläche selbst, die nach den Bedingungen der Aufgabe Stromfläche ist.

(3) Die Fläche:

$$R(2R + a) - \frac{3}{8} S \cos \vartheta (2R^2 + aR + a^2) = 0.$$

oder

$$R(2R + a) = a^2 \frac{\frac{3}{8} S \cos \vartheta}{1 - \frac{3}{8} S \cos \vartheta}.$$

Die letztere Gleichung bestimmt, als quadratische Gleichung für  $R$  aufgefaßt, *einen* positiven Wert von  $R$ , solange die Bedingung

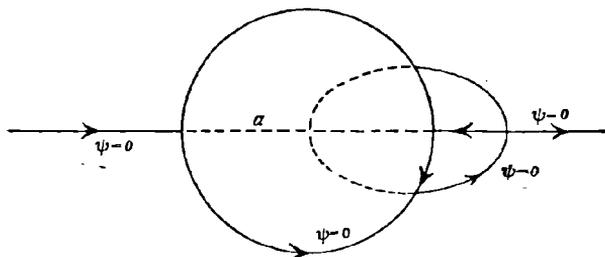
$$0 < \cos \vartheta < \frac{8}{3}$$

erfüllt ist, also für alle Werte des Winkels  $\vartheta$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  einen positiven Wert von  $R$ , solange

$$0 < S < \frac{8}{3}.$$

Für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich stets der Wert  $R = 0$  und für  $\vartheta = 0$  der maximale Wert von  $R$  bei vorgegebenem  $S$ . Dagegen ergibt sich für die Lagen des Winkels  $\vartheta$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  kein positiver Wert von  $R$ . Wenn  $S$  die obige Bedingung erfüllt, so hat die Fläche (3) daher einen geschlossenen reellen Teil, der ganz im Halbraum positiver  $x$ , d. h. in

Fig. 2. Stromlinie  $\psi = 0$  für  $S = 2, 2$ .



dem Halbraum verläuft, der, im Sinne der Strömung aufgefaßt, die rückwärtige Kugelhälfte enthält (s. Fig. 1 u. 2). Ihr Radiusvektor nimmt von dem Werte  $R = 0$  für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ausgehend

stetig zu bis zu dem Maximalwerte bei  $\vartheta = 0$ , der  $R = a$  wird, wenn  $S = 2$  angenommen ist. Solange also  $S < 2$ , so verläuft die Fläche (3) durchaus im Innern der Kugel vom Radius  $a$  und kommt als Stromfläche nicht in Betracht. Wenn aber  $S > 2$  ist, so tritt ein Teil von ihr über die Kugel auf deren Rückseite hinaus und bildet eine reale Stromfläche. Sie trennt von der äußeren Strömung ein Gebiet auf der Rückseite der Kugel ab, in dem wirbelnde Strömung stattfinden muß, der äußeren Strömung gleichgerichtete Bewegung längs der Innenseite der Fläche (3), Rückströmung längs

der Kugeloberfläche, wie wir oben schon für  $S > 2$  aus dem Geschwindigkeitsanstieg schlossen. Man erhält also das Bild des bei größeren Geschwindigkeiten beobachteten Wirbelringes auf der Rückseite der Kugel.

Als untere Grenze für den Eintritt der Wirbelbildung ergibt sich der Wert der Reynoldsschen Zahl  $S = 2$ . Da allerdings diese Grenze über das Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahl, der Voraussetzung unserer Näherung, hinausfällt, so bleibt abzuwarten, wie weit die Grenze durch die weitere Entwicklung noch verschoben wird. Es ist noch zu bemerken, daß mit wachsendem  $S$  der Wirbelring sich sehr rasch, besonders für kleine Werte von  $\vartheta$ , vergrößert, doch handelt es sich hier wohl um eine Wirkung der Vernachlässigung höherer Glieder, wie die Fortsetzung der Entwicklung zeigen würde.

#### § 4. Widerstand nach der ersten Annäherung.

Der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel hängt von dem Widerstand ab, den die aus der Stokesschen und der Annäherungsbewegung zusammengesetzte Bewegung ergibt. Es ist indes leicht einzusehen, daß die bisher aufgestellte Näherungsbewegung noch keinen Beitrag zum Widerstand liefert; wir beweisen das an den expliziten Formeln für den Widerstand.

Bezeichnet  $n$  die Normale eines Flächenelements an der Grenze einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit,  $s$  eine beliebige Richtung in diesem Flächenelement, so ist der Ansatz für die Spannungen in diesem Flächenelement, der den Differentialgleichungen (1) zu grunde liegt, der folgende<sup>1)</sup>:

Die Normalspannung (positiv, wenn vom Flächenelement nach der Seite der Flüssigkeit hin gerichtet) ist

$$(23) \quad p_{nn} = -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n},$$

die Tangentialspannung in Richtung  $s$ :

$$(24) \quad p_{ns} = \mu \left( \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right),$$

wo  $v_n$  und  $v_s$  die Geschwindigkeitskomponenten in den betreffenden Richtungen bedeuten. Die Größen  $v_n$  und  $v_s$  sind hier aus den gefundenen Formeln für die Stromfunktion  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  zu entnehmen, während  $p$  bis auf eine belanglose additive Konstante aus den Grundgleichungen (1) bestimmt ist. Wir erhalten aus diesen für die Kugeloberfläche, mit Rücksicht darauf, daß nach den Randbedingungen die Geschwindigkeits-

1) S. Fußnote auf S. 8.

komponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  verschwinden und nach der Gl. (22) der normal gerichtete Geschwindigkeitsgradient endlich ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= -\sin \vartheta \frac{\partial p}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial p}{\partial r} \\ &= \mu \left[ \sin \vartheta \left( \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial z^2} \right) + \cos \vartheta \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial x \partial r} \right] \\ &= \mu \left[ \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial D(\psi)}{\partial R} \quad (\text{s. die Gl. (3) u. (6)}) \end{aligned}$$

oder endlich die einfache Formel:

$$(25) \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\mu}{\sin \vartheta} \frac{\partial D(\psi)}{\partial R}.$$

Der zweite Bestandteil der Normalspannung  $p_{nn}$ ,  $2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}$ , verschwindet an jeder körperlichen Begrenzungsfläche der Flüssigkeit wegen der Randbedingungen und der Inkompressibilitätsbedingung (2), die hier lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r} \\ = \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{R \partial \vartheta} - \frac{v_n}{R} + \frac{q}{r} = 0 \end{aligned}$$

und wegen des Verschwindens der Geschwindigkeitskomponenten  $v_n$  und  $q$  längs der ganzen Oberfläche sofort ergibt:

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0.$$

Von der Tangentialspannung  $p_{ns}$  (24) verschwindet wegen der Randbedingungen an der Oberfläche das erste Glied, es bleibt also:

$$\begin{aligned} p_{ns} &= \mu \frac{\partial v_s}{\partial n} = \mu \frac{\partial}{\partial R} (-u \sin \vartheta + q \cos \vartheta) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \vartheta \right) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Randbedingung  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$  wird endlich:

$$(26) \quad p_{ns} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}.$$

Die Kraftkomponente, die in der Strömungsrichtung ( $x$ -Richtung) auf die Zone der Kugeloberfläche

$$d\sigma = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

wirkt, ist

$$dK = (p_{nn} \cos \vartheta - p_{ns} \sin \vartheta) d\sigma,$$

während die entsprechenden Kraftkomponenten in der  $y$ - und  $z$ -Richtung wegen der Rotationssymmetrie verschwinden, und die Gesamtkraft wird somit:

$$(27) \quad K = 2\pi R^2 \int_0^\pi (p_{nn} \cos \vartheta - p_{ns} \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Aus dieser Ableitung der Widerstandformel ist ersichtlich, daß die von der ursprünglichen Stokesschen Bewegung und die von den sukzessiven Annäherungen herrührenden Anteile am Widerstand sich einfach überlagern, da die schließlich in Betracht kommenden Ausdrücke für den Druck und die Spannungen durch lineare Prozesse aus den Geschwindigkeitskomponenten, bzw. den zugehörigen Stromfunktionen, entstehen. Die aus den Gleichungen (1) resultierenden quadratischen Glieder verschwinden wegen der Randbedingungen an der Kugeloberfläche in der Druckgleichung und daher auch in der Widerstandsformel.

Nun ist ersichtlich, daß der Widerstandsanteil der ersten Näherung ( $\psi_1$ ) verschwindet, und zwar wegen der Symmetrie der Kugel zu ihrer Äquatorfläche  $x = 0$ . Die Geschwindigkeitskomponenten dieser Strömung sind ja

$$\begin{aligned} v_{1n} &= \frac{1}{rR} \frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{3}{32} SU (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^4} \\ v_{1s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} \\ &= -\frac{3}{32} SU \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial (R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{\partial R R^3}. \end{aligned}$$

Hiernach ist auch die Strömung spiegelbildlich symmetrisch zur Äquatorebene  $x = 0$ , sie ist vorwärts gerichtet auf der Vorderseite ( $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ ), rückwärts gerichtet auf der Rückseite, und die auf die Hälften der Kugel von der Flüssigkeit ausgeübten Kräfte heben sich gegenseitig auf. Anders verhält sich in dieser Hinsicht die zweite Näherung, bei ihr ist, wie bei der Stokesschen Strömung selbst, die Bewegung auf der Vorder- und Rückseite symmetrisch und gleichgerichtet, und daher ist im ganzen ein Beitrag zum Widerstand zu erwarten. Die Stokessche Formel wird somit Gültigkeit haben bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldsschen Zahl  $S = \sigma a U / \mu$  ist.

In der Tat gibt die Gl. (25) für den Druck an der Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} &= \frac{3}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta \left( -6 \frac{a^4}{R^4} + 6 \frac{a^5}{R^5} - 9 \frac{a^2}{R^2} \right)_{R=a} \\ &= -\frac{27}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ p_1 &= P_1 + \frac{27}{32} \frac{\mu S U}{a} \cos^2 \vartheta,\end{aligned}$$

wo  $P_1$  den Druck in der Äquatorebene bedeutet. Ferner wird wegen Gl. (26)

$$\begin{aligned}p_{n.} &= \frac{\mu}{a} \frac{3}{16} S U \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{2R^2 + aR + a^2}{R^2} \right)_{R=a} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\mu S U}{a} \sin \vartheta \cos \vartheta\end{aligned}$$

und endlich

$$K_1 = 2\pi \mu a S U \int_0^\pi \left( -\frac{27}{32} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right) d\vartheta = 0,$$

wie oben behauptet wurde.

Mit diesem Resultat scheinen Beobachtungen von Zeleny und Mc. Keehan<sup>1)</sup> im Einklang zu stehen, daß sich nämlich der Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Formel bei genau kugelförmigen Körpern wesentlich größer erwies als bei annähernd kugelförmigen Körpern (Sporen). Während sich bei letzteren schon bei sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl ( $S = 10^{-3}$ ) Abweichungen von der Stokes'schen Formel zeigten, die bei Vernachlässigung der Trägheitsglieder nicht aus den Abweichungen von der Kugelgestalt zu erklären waren, fanden die Verfasser die Stokes'sche Formel bei Kugeln streng bestätigt bis zu Werten der Reynoldsschen Zahl, die die Grenze  $S = 0,1$  noch wesentlich überstiegen. In der Tat war ja das Verschwinden des in der Reynoldsschen Zahl linearen Widerstandsanteils lediglich eine Folge der Kugelsymmetrie bezüglich ihrer Äquatorebene. Auch bei geringer Unsymmetrie würde aber ein linearer Bestandteil auftreten, und dieser müßte sich in höherem Maße äußern, als der quadratische Bestandteil bei Kugeln.

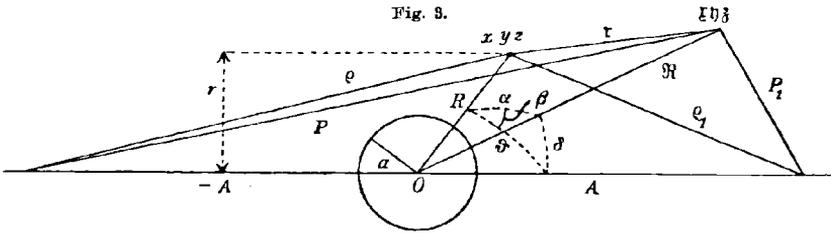
## § 5. Ersatz der Parallelströmung durch eine inhomogene Strömung (mit Quelle und Senke.)

Es bleibt uns noch übrig, die in § 2, S. 13 angegebene Konstantenbestimmung zu rechtfertigen, die mit den bisherigen Mitteln nicht begründet war, da unsere Näherungslösung im Unendlichen versagte. Zu

1) Phys. Ztschr. 11, 1910, S. 78f.

dem Zwecke betrachten wir folgenden Strömungsvorgang, der im Unendlichen überall verschwindende Geschwindigkeitskomponenten in jeder Richtung hat und sich in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von dem früher behandelten unterscheidet:

Die Kugel sei als ruhend angenommen (s. Fig. 3), ihr Mittelpunkt  $O$  befinde sich im Punkte  $x = y = z = 0$ . Der Punkt  $x = -A, y = 0, z = 0$  sei der Mittelpunkt eines endlich ausgedehnten, kugelförmigen Quellengebiets, der Punkt  $x = +A, y = 0, z = 0$  der Mittelpunkt eines ebensolchen Senkengebietes. Im übrigen sei die Strömung überall quellensfrei und daher die Gesamtergiebigkeit der Quelle entgegengesetzt gleich der



der Senke. Ferner sei der Radius des Quellengebiets wie des Senkengebietes von vornherein klein gedacht gegen die Entfernung  $A$  und ebenso der Kugelradius  $a$  klein gegen  $A$ .

Um nun zunächst die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, setzen wir die Bewegung zusammen aus einer Potentialströmung und einer überlagerten, die den Einfluß der Randbedingungen an der Kugel und der Reibung enthält. Auch die Potentialbewegung genügt ja, weil für sie  $D\psi = 0$ , der Grundgleichung (8). Bezeichnet  $e, -e$  die Gesamtergiebigkeit des Quellengebiets, bzw. Senkengebietes, ferner  $\rho, \rho_1$  die Abstände von ihren Mittelpunkten, so daß

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (x + A)^2 + r^2 \\ \rho_1^2 &= (x - A)^2 + r^2, \end{aligned}$$

so wird das Geschwindigkeitspotential der zugehörigen Potentialströmung

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{\rho} - \frac{e}{\rho_1}, \\ u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Hierbei ist noch vorausgesetzt, daß die Ergiebigkeit der Quelle auf konzentrischen Schichten konstant sei, ebenso der Senke. Um Stetigkeitsbetrachtungen vermeiden zu können, nehmen wir ferner an, daß die Ergiebigkeit im Inneren des Quellgebiets stetig sei und am Rande mit dem ersten und zweiten Differentialquotienten verschwinde.

Für den Kugelmittelpunkt  $x = y = z = 0$  wird

$$u = e \left( \frac{x + A}{e^3} - \frac{x - A}{e_1^3} \right) = \frac{2e}{A^2}.$$

Um möglichste Annäherung und, wenn  $A$  sehr groß wird, Übereinstimmung mit dem früheren Bewegungszustand in der Nähe der Kugel zu erhalten, müssen wir also

$$\frac{2e}{A^2} = U$$

wählen, und erhalten somit außerhalb der Quellgebiete die Potentialdarstellung:

$$\Phi = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} \right).$$

Die zugehörige Stromfunktion  $\psi$ , bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

lautet:

$$(28) \quad \psi = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A + x}{e} + \frac{A - x}{e_1} \right).$$

Wir entwickeln diese Formeln für das Gebiet  $R < A$ . In der bekannten Bezeichnung der Kugelfunktionen wird:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{A^n} P_n(\pi - \vartheta) = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{A} \sum_0^{\infty} \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

und daher

$$\frac{A + x}{e} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{R^n}{A^n} (P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta))$$

$$\frac{A - x}{e_1} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{R^n}{A^n} (P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta)).$$

Da diese beiden Summen, als Stromfunktionen je einer Potentialströmung, der homogenen Gleichung  $D\psi = 0$  genügen<sup>1)</sup>, so muß jedes einzelne Glied dieser Summen ebenfalls dieser Gleichung genügen, es folgt daher durch Vergleich mit den Entwicklungen des § 2 über die Gleichung  $D\psi = 0$ , daß, unter  $\alpha$  einen Zahlenfaktor verstanden,

$$P_n(\vartheta) - \cos \vartheta P_{n-1}(\vartheta) = \alpha B(\vartheta)$$

1) S. z. B. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

sein muß. Wir haben die Funktionen  $B_n$  früher (S. 10) eben so normiert, daß  $x = 1$  wird für alle positiven  $n$  (ausgenommen den hier belanglosen Fall  $n = 1$ ). Also erhalten wir für  $\psi$  (Gl. 28) den Ausdruck

$$(28') \quad \psi = U \left( A^2 + \sum_1^{\infty} m \frac{R^{2m}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta) \right).$$

Dies die ungestörte Potentialströmung. Um die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, haben wir diesen Ansatz durch Glieder, die der Gleichung  $DD\psi = 0$  genügen und deren zugehörige Geschwindigkeiten im Unendlichen verschwinden, so zu ergänzen, daß an der Kugeloberfläche vom Radius  $R = a$  die Bedingung

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

erfüllt wird. Nach der Gleichung (19) wird dies erreicht durch den Ansatz:

$$(29) \quad \psi_0 = U \sum_1^{\infty} m \frac{R^{2m} + k_{m1} a^{4m-3} R^{-2m+3} + k_{m2} a^{4m-1} R^{-2m+1}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta)$$

wo 
$$k_{m1} = -\frac{4m-1}{2}; \quad k_{m2} = \frac{4m-3}{2}.$$

Betrachten wir nun den Fall, daß die Entfernung  $A$  sehr groß ist gegen den Radius  $a$  und beschränken uns auf die Strömung in der Nähe der Kugel, so können wir in  $\psi_0$  (Gl. 29) alle Glieder, die negative Potenzen von  $A$  enthalten, vernachlässigen, und es bleibt daher nur das zum Index  $m = 1$  gehörige Glied:

$$(29') \quad \begin{aligned} \psi_0 &= U \left( R^2 - \frac{3}{2} a R + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R} \right) B_2(\vartheta) \\ &= -\frac{U}{4} \left( 2R^2 - 3aR + \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta, \end{aligned}$$

also die zur Stokesschen Bewegung gehörige Stromfunktion (10). Wir haben somit eine neue Ableitung dieser Gleichung gewonnen und haben nun nachzuweisen, daß in der Tat in der Grundgleichung (8) die vernachlässigten quadratischen Glieder bei kleiner Reynoldsscher Zahl überall klein sind gegen die berücksichtigten. Dazu müssen wir  $\psi_0$  (Gl. 29) auch in beliebiger Entfernung von der Kugel mittels (28) und (28') summieren, unter der Annahme, daß  $\frac{a}{A}$  zu vernachlässigen sei und erhalten:

$$(29a) \quad \psi_0 = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A+x}{\varrho} + \frac{A-x}{\varrho_1} \right) + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta.$$

Die für  $\frac{1}{\varrho}$  und  $\frac{1}{\varrho_1}$  gültige Entwicklung im Gebiet  $R > A$ :

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{R} \sum_0^{\infty} \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

gibt in großer Entfernung den Näherungsausdruck:

$$\psi_0 = \frac{UA^3 \sin^2 \vartheta}{R} + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta$$

und ferner ist

$$(12) \quad D\psi_0 = -\frac{2}{3} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta.$$

Hieraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (8) in großer Entfernung sich verhält wie der Ausdruck

$$-\frac{27}{4} \frac{\sigma}{\mu} \frac{U^2 a^2}{R^3} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = -\frac{27}{4} S \frac{Ua}{R^3} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta,$$

während die einzelnen Bestandteile des (in der Summe verschwindenden) Ausdrucks  $DD(\psi_0)$  auf der linken Seite sich wie

$$\frac{Ua}{R^3}$$

verhalten, also in gleicher Weise verschwinden. Daher ist bei kleiner Reynoldsscher Zahl die gemachte Vernachlässigung im Unendlichen unbedenklich.

Im ganzen endlichen Raum aber ist die Strömung, die zu  $\psi_0$  gehört, regulär und die vernachlässigten Glieder sind daher endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten Gliedern. Das Gleiche ist auch noch für die Quellgebiete der Fall; hier gilt allerdings nicht der Ausdruck (28) für die Stromfunktion der ungestörten Potentialbewegung, die in diesen Gebieten ja nicht mehr existiert, es gelten auch nicht die Grundgleichungen (1), die ebenfalls die Voraussetzung der Quellenfreiheit enthielten. Es erübrigt sich aber, für diese Gebiete die Grundgleichungen eigens aufzustellen, da aus den Stetigkeitsannahmen für die Ergiebigkeit der Quelle bzw. Senke folgt, daß die Geschwindigkeiten in diesen Gebieten endlich und stetig bleiben und daher ebenfalls die vernachlässigten quadratischen Glieder in den Grundgleichungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein gegen die berücksichtigten werden. Überdies zeigt die folgende Entwicklung, daß selbst bei Annahme punktförmiger Quelle und Senke die vernachlässigten Glieder von (8) und ebenfalls die daraus resultierenden Geschwindigkeiten der

ersten Näherung endlich bleiben, obgleich dann die Geschwindigkeiten der zugrunde gelegten Potentialbewegung unendlich sind. Um so mehr sind bei kleinem  $S$  jene Vernachlässigungen berechtigt. Das Gleiche gilt aber dann nicht mehr für die Grundgleichungen (1), die nach der Berechnung der Strömung die Druckverteilung bestimmen, vielmehr werden hier in der Nähe der Quellpunkte die quadratischen Glieder wesentlich, durch die bekanntlich in der Potentialtheorie der Druck berechnet wird.

§ 6. Erste Näherung und Konstantenbestimmung.

Als weitere Annäherung zur Ergänzung der zugrunde gelegten Bewegung fordern wir eine überall, auch im Quellgebiete der Grundbewegung, quellenfreie Strömung mit im Unendlichen verschwindenden Geschwindigkeiten, die die Randbedingungen an der Kugeloberfläche erfüllt und der aus (8) resultierenden Differentialgleichung (11) der ersten Näherung genügt.

Zu ihrer Aufstellung sind die Ausdrücke für  $\psi_0$  und  $D\psi_0$  aus den Gleichungen (29a) und (12) zu verwenden. Es folgt (s. die Ausrechnung in Anhang 2):

$$(30) \quad DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \left[ \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -3 \frac{a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right) + aA^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) - A \left( \frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3} \right) \right) \right].$$

Dieser Ausdruck der rechten Seite gilt zunächst nur für den Raum außerhalb der Quellgebiete, da er aber endlich bleibt bei Ausdehnung bis an die Punkte  $\varrho = 0$  bzw.  $\varrho_1 = 0$  hin<sup>1)</sup>, so können wir hier die Vorstellung punktförmiger Quelle und Senke voraussetzen und seine Gültigkeit daher über den ganzen unendlichen Raum außerhalb der festen Kugel erstrecken.

Die eindeutige Lösung unserer Randwertaufgabe erfordert die Angabe eines Integrals der Gleichung (30), das im Unendlichen die verlangte Eigenschaft hat, daß die zugehörigen Geschwindigkeiten verschwinden und dessen Wert in der Nähe der festen Kugel sich angeben läßt, so daß es durch Zufügung geeigneter Lösungen der Gl.  $DD(\psi) = 0$  möglich wird, die Randbedingungen an der Kugel zu erfüllen. Ein solches Integral in geschlossener Form anzugeben, scheint schwer möglich zu sein, doch folgt aus dem in § 1 erwähnten Zusammenhang der Gleichungen

$$DD(\psi) = F \text{ und } \Delta A(\varphi) = f$$

1) Die Ausdrücke  $\frac{r^2}{\varrho^2}$  und  $\frac{A+x}{\varrho}$  sind endlich.

eine geeignete Integraldarstellung. Mittels dieses Zusammenhanges gewinnen wir aus der Lösung  $\varphi$  der zweiten dieser beiden Gleichungen eine Lösung  $\psi$  der ersten, als

$$\psi = r \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

wenn  $f$  aus der Gleichung

$$(31) \quad F = r \frac{\partial f}{\partial r}$$

bestimmt worden ist.

Wir trennen zunächst  $\psi_1$  in 2 Bestandteile, der erste,  $\psi'$ , soll der Gleichung genügen:

$$DD(\psi') = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5} \right).$$

Als partikuläres Integral dieser Gleichung wählen wir mittels (16) und (17):

$$(32) \quad \psi' = -\frac{9}{32} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( a^3 R + \frac{a^4}{3R} \right),$$

das auch als Summand in Gl. (18) auftritt. Der zweite Bestandteil von  $\psi_1$ ,  $\psi''$ , soll der Gleichung:

$$(33) \quad DD(\psi'') = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{r^2}{R^5} \left[ \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1} \right) - A \left( \frac{A+x}{e^3} - \frac{A-x}{e_1^3} \right) \right]$$

genügen, so daß die Summe  $\psi' + \psi''$  der Gleichung (30) genügt.

Bezeichnen wir die rechte Seite der Gl. (33) mit  $F$ , und setzen

$$\psi'' = r \frac{\partial \varphi''}{\partial r}$$

so erhalten wir für  $\varphi''$  die folgende Gleichung.

$$AA(\varphi'') = f,$$

die mit (33) äquivalent ist, wenn wir  $f$  durch Integration der Gl. (31) ermitteln. Es ergibt sich

$$(34) \quad f = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \cdot \left[ \frac{1}{A^2(A+2x)^2} \left( \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2} \left( \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{A+x}{A^2(A+2x)^3} \left( 2 \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} + \frac{R}{e} - \frac{8}{3} \right) + \frac{A-x}{A^2(A-2x)^3} \left( 2 \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} + \frac{R}{e_1} - \frac{8}{3} \right) \right]$$

(Die Gl. (34) wird aus der rechten Seite von (33) durch elementare Integration der Gl. (31) gewonnen, wenn man beachtet, daß bei festem  $x$ :  $rdr = \rho d\rho$  zu setzen ist, oder es wird durch direkte Differentiation von (34) nach  $r$  das Bestehen der Gl. (31) bestätigt, mit Rücksicht darauf, daß

$$\rho^2 - R^2 = A(A+2x); \quad \rho_1^2 - R^2 = A(A-2x).$$

Als Integrationskonstante ist in (34) eine Funktion von  $x$  so zugefügt, daß  $f$  im Unendlichen in gleicher Weise verschwindet wie  $F$ . Daß auch  $f$  im ganzen Außenraume der Kugel endlich bleibt, ebenso wie  $F$ , wird durch eine Umformung von (34) deutlicher. Es ist:

$$\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \left( \frac{\varrho}{R} - 1 \right)^2 \left( \frac{\varrho}{R} + 2 \right)$$

$$2 \frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} + \frac{R}{\varrho} - \frac{8}{3} = -\frac{R}{3\varrho} \left( \frac{\varrho}{R} - 1 \right)^2 \left( \frac{\varrho}{R} + 3 \right)$$

und analoge Gleichungen gelten für  $\varrho_1$ . Daher wird:

$$(34a) \quad f = \frac{3}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \left[ \frac{-(\varrho + 2R)}{R^3(\varrho + R)^3} + \frac{(\varrho_1 + 2R)}{R^3(\varrho_1 + R)^3} \right. \\ \left. + \frac{A(A+x)(\varrho + 3R)}{R^3\varrho(\varrho + R)^3} - \frac{A(A-x)(\varrho_1 + 3R)}{R^3\varrho_1(\varrho_1 + R)^3} \right]$$

ein Ausdruck, der außer im Punkte  $R = 0$  nirgends unendlich wird; vgl. Fußnote S. 25).

In einem beliebigen Raumstück  $T$  ist nun ein Integral der Gleichung (33a) die Funktion:

$$(35) \quad \varphi^*(x, y, z) = \frac{-1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) r \, d\tau,$$

wo  $d\tau$  das Raumelement im Integrationspunkte,  $r$  den Abstand vom Aufpunkte zum Integrationspunkte

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

bedeutet und die den Koordinatenbezeichnungen des Aufpunktes:  $x, y, z$ ;  $R, \vartheta$ ;  $\varrho, \varrho_1$  entsprechenden im Integrationspunkte

$$\xi, \eta, \zeta; \Re, \delta; P, P_1$$

seien (s. Fig. 3). Der Beweis der obigen Integraldarstellung folgt aus der Gleichung

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

in Verbindung mit der bekannteren innerhalb  $T$  gültigen Gleichung:

$$\Delta \int f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\tau}{r} = -4\pi f(x, y, z).$$

Aus einem später ersichtlichen Grunde gehen wir von dem Integral (35) noch zu dem folgenden über

$$(35a) \quad J = -\frac{1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) \left[ r - \Re - \left( x \frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{(x=0)} + y \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{(x=0)} \right. \right. \\ \left. \left. + z \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{(x=0)} \right) \right] d\tau \\ = -\frac{1}{8\pi} \int_T f(\xi, \eta, \zeta) \left( r - \Re + R \cos(R \Re) \right) d\tau,$$

das sich von (35) nur um eine Konstante und ein in den Koordinaten des Aufpunktes,  $x, y, z$ , lineares Glied unterscheidet, während seine zweiten Differentialquotienten von denen von (35) überhaupt nicht verschieden sind. Daher genügt auch  $J$  der Gleichung  $\Delta \Delta J = f(x, y, z)$ .

Als untere Grenze des Integrals (35a) betrachten wir zunächst eine um  $O$  als Mittelpunkt gelegte Kugel vom Radius  $b < a$ ; bevor wir als obere Grenze  $\mathfrak{R} = \infty$  wählen, müssen wir  $f(\xi, \eta, \zeta)$  für sehr große Werte des Radius  $\mathfrak{R}$  (d. h.  $\mathfrak{R}$  groß gegen  $A$ , entwickeln, mittels der Formeln:

$$P = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2 + 2A\mathfrak{R}\cos\delta} = \mathfrak{R} \left( 1 + \frac{A}{\mathfrak{R}} \cos\delta + \dots \right)$$

$$P_1 = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2 - 2A\mathfrak{R}\cos\delta} = \mathfrak{R} \left( 1 - \frac{A}{\mathfrak{R}} \cos\delta + \dots \right)$$

So ist sofort ersichtlich, daß in  $f$  (Gl. 34a, in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) die Glieder der höchsten Ordnung ( $\mathfrak{R}^{-4}$ ) sich gegenseitig aufheben und  $f(\xi, \eta, \zeta)$  bis auf einen Zahlenfaktor sich verhält wie

$$\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5},$$

daß also das Integral (35a) auch bei Ausdehnung der oberen Grenze ins Unendliche für endliche Aufpunkte endlich bleibt.

Ferner haben wir das Verhalten der Funktion  $J(x, y, z)$  für Werte von  $R$  zu untersuchen, die wesentlich größer als  $A$  sind. Das Integrationsgebiet teilen wir zu dem Zweck in 3 konzentrische Kugelgebiete:

- 1)  $\mathfrak{R} \geq R$
- 2)  $R > \mathfrak{R} \geq C$
- 3)  $C > \mathfrak{R}$ .

Hier bedeutet  $C$  einen Radius, der so groß gegen  $A$  ist, daß  $f(\xi, \eta, \zeta)$  mit gegebener Genauigkeit bis auf einen Zahlenfaktor  $K$  durch den oben angegebenen Näherungsausdruck

$$\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5}$$

ersetzt werden kann, wenn  $\mathfrak{R} \geq C$ .

Dem ersten Teil des Integrationsgebiets entspricht daher der Anteil:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \int_{\mathfrak{R}=R}^{\mathfrak{R}=\infty} \left( r - \mathfrak{R} + R \cos(R\mathfrak{R}) \right) \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^6} d\tau \\ &= -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \int_R^{\infty} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \left( r - \mathfrak{R} + R \cos(R\mathfrak{R}) \right) \cos\delta \sin\delta d\delta. \end{aligned}$$

Dieses Integral hat höchstens die Ordnung  $\frac{1}{R}$ . Dem zweiten Teil des Integrationsgebiets entspricht der Anteil:

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (r - \mathfrak{R} + R \cos(R\mathfrak{R})) \cos \delta \sin \delta d\delta.$$

Setzen wir hier  $\mathfrak{R} = kR$ , so ergibt sich

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^3 \frac{K}{8\pi} \frac{1}{R} \int_0^1 \frac{dk}{k^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \left( \frac{r}{R} - k + \cos(R\mathfrak{R}) \right) \cos \delta \sin \delta d\delta,$$

wobei noch zu setzen ist:

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R} \cos(R\mathfrak{R})}}{R} = \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(R\mathfrak{R})}.$$

Wegen seines Verhaltens an der unteren Grenze  $k_0 = \frac{R}{C}$  wird das 3-fache Integral in  $J_2$  von der Ordnung  $k_0^{-2} = \frac{R^2}{C^2}$  und daher  $J_2$  von der Ordnung  $R$ .

Der dritte Bestandteil von  $J$  wird endlich:

$$J_3 = -\frac{1}{8\pi} \int_0^C \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (r - \mathfrak{R} + R \cos(R\mathfrak{R})) f(x, y, z) \sin \delta d\delta$$

und für  $r$  gilt hier die Entwicklung:

$$r = \sqrt{R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R} \cos(R\mathfrak{R})} = R \left( 1 - \frac{\mathfrak{R}}{R} \cos(R\mathfrak{R}) + \frac{\mathfrak{R}^2}{R^2} \dots \right).$$

Da  $f$  im dritten Teil des Integrationsgebiets überall endlich, und  $C$  von  $R$  unabhängig ist, wird also:

$$J_3 = \text{endliche Glieder} + R \int_0^C \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi (1 + \cos(R\mathfrak{R})) f \sin \delta d\delta.$$

Die drei Bestandteile zusammenfassend finden wir also, daß  $J = J_1 + J_2 + J_3$  sich aus endlichen Gliedern und solchen von der Ordnung  $R$  zusammensetzt. Seine zweiten Ableitungen nähern sich daher für großes  $R$  verschwindenden Werten, d. h. die Funktion  $J$  erfüllt im Unendlichen die an die Funktion  $\varphi$  gestellten Bedingungen.

Ferner folgt aus der Endlichkeit von  $f$  im ganzen Integrationsgebiet die dreifache Differenzierbarkeit von  $J$ . Diese besteht auch dann noch, wenn wir die Quelle und Senke punktförmig in den Punkten  $\varrho = 0$  bzw.  $\varrho_1 = 0$  annehmen und dementsprechend den Ausdruck (34a) von  $f$  bis an diese Punkte hin ausdehnen. Also ergeben sich aus  $J$  durch die in den Formeln (3) angegebenen Differentiationen endliche und im Unendlichen verschwindende Geschwindigkeitskomponenten. Somit kann

die gesuchte Funktion  $\varphi''$  angegeben werden als die Summe von  $J$  und so gewählten Lösungen der Gleichung  $\Delta \Delta \varphi = 0$ , daß den Randbedingungen an der Kugel genügt wird.

Zu ihrer Bestimmung muß das Verhalten von  $J$  an der Oberfläche der Kugel bekannt sein, und daher  $J$  entwickelt werden für Aufpunkte in der Nähe der Kugel, unter der Voraussetzung, daß  $a$  sehr klein gegen  $A$  sei. Wir beweisen zunächst, daß dann nur Integrationsgebiete in Betracht kommen, für die auch  $\mathfrak{R}$  klein gegen  $A$  ist. Deshalb können wir für diese Entwicklung von  $J$  den Abstand  $A$  beliebig groß werden lassen und kommen so zu der sehr einfachen, in der Umgebung der Kugel geltenden Darstellung (38) für  $J$ .

Beweis: In den Gebieten, in denen  $\mathfrak{R}$  mit  $A$  vergleichbar oder groß gegen  $A$  ist, wird die eckige Klammer in (34a) (in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) überall von der Größenordnung  $\frac{1}{\mathfrak{R}^4}$ . Denn  $P$  und  $P_1$  sind dann mit  $\mathfrak{R}$  vergleichbar oder von kleinerer Ordnung, die Faktoren  $\frac{(x+A)}{P}$  und  $\frac{(x-A)}{P_1}$  aber bleiben überall endlich (von der Ordnung  $\mathfrak{R}^0$ ). Ferner aber wechselt  $f(x, y, z)$  sein Vorzeichen, wenn  $x$  mit  $-x$  (und demnach auch  $P$  mit  $P_1$ ) vertauscht wird, während  $\mathfrak{R}$  unverändert bleibt, so daß  $\cos \delta$  in  $-\cos \delta$  übergeht. Trennen wir daher von dem ganzen Integrationsgebiet unseres Integrals  $J$  (35a) ein Gebiet zwischen den Kreisen  $\mathfrak{R} = b$  und  $\mathfrak{R} = \lambda A$  ab, wo  $\lambda$  einen nicht verschwindenden echten Bruch bedeuten soll, so können wir  $f$  für den Rest ( $\mathfrak{R} \geq \lambda A$ ) in der Form ansetzen:

$$f = \frac{\sigma}{\mu} a U^2 \frac{A^2}{\mathfrak{R}^4} \cos \delta f^*,$$

wo  $f^*$  eine eindeutige Funktion von  $\mathfrak{R}$  und  $\cos^2 \delta$  bedeutet, die in bezug auf  $\mathfrak{R}$  und in bezug auf  $A$  von nullter Ordnung und überall endlich ist. Dieser Bestandteil des Integrals wird dann

$$J_\lambda = - \frac{\sigma a U^2}{8 \pi \mu} A^2 \int_{\mathfrak{R} = \lambda A}^{\mathfrak{R} = \infty} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^4} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2 \delta) (\tau - \mathfrak{R} + R \cos(R\mathfrak{R})) d\tau.$$

Wir setzen hier den Winkel  $(\mathfrak{R}R) = \alpha$  und entwickeln für Integrationsgebiete  $\mathfrak{R} > R$ :

$$(36) \quad \tau - \mathfrak{R} + R \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{R^2}{\mathfrak{R}} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{R^3}{\mathfrak{R}^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{R^4}{\mathfrak{R}^3} \dots$$

Diese Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $\mathfrak{R}$  hatten wir im Auge, als wir von dem Integral (35) zum Integral (35a) übergingen. Wir erhalten:

$$(37) \quad J_\lambda = - \frac{\sigma a U^2}{8 \pi \mu} A^2 \int_{\mathfrak{R} = \lambda A}^{\mathfrak{R} = \infty} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2 \delta) \left( \frac{R^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{R^3}{2 \mathfrak{R}} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \dots \right) d\tau.$$

Das erste Entwicklungsglied dieses Integrals:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16 \pi \mu} A^3 R^3 \int_{\mathfrak{R}=\lambda A}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^5} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2 \delta) \sin^2 \alpha d\tau$$

verschwindet identisch, da in je zwei Punkten, die sich in bezug auf den 0-Punkt ( $\mathfrak{R} = 0$ ) diametral gegenüberliegen, der Integrand gleiche Absolutwerte, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Dies gilt aber nicht für das zweite und überhaupt alle geraden Entwicklungsglieder, für die der Integrand in diametral gegenüberliegenden Punkten gleiche Werte annimmt. Das zweite Glied lautet ausgeführt:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16 \pi \mu} A^2 R^3 \int_{\lambda A}^{\infty} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^4} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \cos \delta \sin \delta \cos \alpha \sin^2 \alpha f^* d\delta.$$

Das hierin enthaltene dreifache Integral wird von der Ordnung

$$\frac{1}{\lambda^3 A^3}$$

und daher der ganze Ausdruck von der Ordnung

$$\frac{\sigma U^2 R^3 a}{\mu A},$$

er ist also neben endlichen Gliedern zu vernachlässigen, weil  $A$  groß gegen  $a$  vorausgesetzt worden ist. Das gilt dann in noch höherem Maße für die höheren Entwicklungsglieder des Integrals (37), da die Entwicklung des Integranden nach steigenden Potenzen von  $\frac{R}{\mathfrak{R}}$  zu einer Entwicklung des Integrals nach steigenden Potenzen von  $\frac{R}{A}$  führt.

Es bleibt uns daher, wie oben behauptet wurde, von dem Integral (35a) nur noch der Bestandteil übrig, der von dem Integrationsgebiet zwischen den Kugeln  $\mathfrak{R} = b$  und  $\mathfrak{R} = \lambda A$  herrührt, und daher läßt es sich nun wesentlich vereinfachen. In diesem Gebiet entwickeln wir  $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$  nach Potenzen von  $\frac{\mathfrak{R}}{A}$  und erhalten (s. die Ausrechnung in Anhang 3):

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{\sigma a U^2}{\mu} \left[ -\frac{3}{2} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^2} + \frac{9}{4} \frac{(9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta)}{A^2} + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \dots \right].$$

Unser Integral wird daher

$$(35b) \quad J'_1 = -\frac{\sigma a U^2}{8 \pi \mu} \int_{\mathfrak{R}=b}^{\mathfrak{R}=\lambda A} \left[ -\frac{3}{2} \frac{\cos \delta}{\mathfrak{R}^2} + \frac{9}{4 A^2} (9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta) + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \dots \right] \cdot [r - \mathfrak{R} + R \cos \alpha] d\tau.$$

In der Entwicklung dieses Integrals kommt für das Integrationsgebiet  $b < \mathfrak{R} \leq R$  nur das erste Glied des Integranden,  $-\frac{3 \cos \delta}{2 \mathfrak{R}^2}$ , in Betracht

wegen der Annahme, daß  $\frac{\alpha}{A}$  und  $\frac{R}{A}$  klein seien. Für das Teilgebiet  $\Re > R$  entwickeln wir  $(r - \Re + R \cos \alpha)$  nach (36), und beachten, daß die von den ungeraden Gliedern dieser Entwicklung herrührenden Bestandteile wie oben in  $J_2$ , so auch hier in  $J'_2$  verschwinden, da der Integrand für sie in diametral gegenüberliegenden Punkten entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Von den geraden Gliedern der Entwicklung (36) liefert das erste,  $\cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{R^3}{2 \Re^3}$ , den größten Beitrag, nämlich:

$$\frac{-\sigma a U^2}{16 \pi \mu} R^3 \int_{\Re}^{\lambda A} \frac{d \Re}{\Re^2} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^\pi \left[ -\frac{3}{2} \cos \delta + \frac{9}{4} \frac{\Re^2}{A^2} (9 \cos \delta - 5 \cos^3 \delta) + \frac{\Re^4}{A^4} \dots \right] \cdot \cos \alpha \sin^2 \alpha \sin \delta d\delta.$$

Auch in diesem Integral kommt, wenn  $A$  groß gegen  $a$  und folglich auch groß gegen  $R$  ist, nur das erste Entwicklungsglied in Betracht, während alle übrigen von der Ordnung  $\frac{R}{A}$  klein werden. Von noch höherer Ordnung werden die entsprechenden Glieder klein, die von den höheren Entwicklungsgliedern der Entwicklung (36) (nach fallenden Potenzen von  $\Re$ ) herrühren. Also kommt auch für diese alle nur das erste Glied des Integranden von  $J'_2$ , nämlich das Glied  $-\frac{3 \cos \delta}{2 \Re^2}$  in Betracht.

Gehen wir also endlich zur Grenze  $A = \infty$  über, so folgt aus dem Obigen zunächst, daß wir  $J$  durch  $J'_2$  (35b) ersetzen können, und daß im Integranden von  $J'_2$  überhaupt nur das erste Glied zu berücksichtigen ist. Die obere Grenze von  $J'_2$  geht ebenfalls in  $\infty$  über, und wir erhalten für  $J$  an Stelle von (35a) die Gleichung

$$(38) \quad J_\infty = \frac{3 \sigma a U^2}{16 \pi \mu} \int_{\Re=b}^{\Re=\infty} \frac{\cos \delta}{\Re^2} (r - \Re + R \cos \alpha) d\tau.$$

Dieses Integral ist in der Tat eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Delta(\psi'') = -\frac{3 \sigma a U^2}{2 \mu} \frac{x}{R^3},$$

die äquivalent ist mit der Gleichung:

$$DD(\psi'') = \frac{9 \sigma a U^2}{2 \mu} \frac{x r^2}{R^5}.$$

Deren Integral  $\psi'' = r \frac{\partial J_\infty}{\partial r}$  genügt, in Verbindung mit dem Integral  $\psi'$  (Gl. 32), unserer früheren Gleichung (13). Der Unterschied unserer jetzigen gegen die frühere Lösung (18) und (19) ist aber, daß jene unendlich viele unbestimmbare Konstanten enthielt, während das Integral (38) keine Unbestimmtheit enthält.

Die im Integral  $J$  noch willkürlich gelassene untere Grenze  $\mathfrak{R} = b$  können wir, wie aus der Form (38) ersichtlich ist, unbedenklich zu  $b = 0$  annehmen. Zur genauen Berechnung von  $J_\infty$  führen wir jetzt Polarkoordinaten ein:

$\alpha$  bedeutet den  $\sphericalangle$  ( $R\mathfrak{R}$ );

$\beta$  (s. Fig. 3) bezeichne den Winkel der die Radien  $R$  und  $\mathfrak{R}$  enthaltenden Ebene mit der durch  $R$  und die  $X$ -Achse (Rotationsachse) gelegten Ebene. Aus dem sphärischen Dreieck, das die Rotationsachse und die beiden Radien  $R, \mathfrak{R}$  bilden, folgt dann:

$$\cos \delta = \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha \cos \beta.$$

ferner folgt:

$$d\tau = \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} d\beta \sin \alpha d\alpha.$$

Nach Ausführung der Integration nach  $\beta$  wird daher das Integral (38):

$$(38a) \quad J_\infty = \frac{3 \sigma a U^2}{8 \mu} \cos \vartheta \int_0^\infty d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha (r - \mathfrak{R} + R \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

wo

$$r^2 = R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2 R \mathfrak{R} \cos \alpha.$$

Für die Berechnung des inneren Integrals bilden wir hieraus:

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + \mathfrak{R}^2 - r^2}{2 R \mathfrak{R}}$$

und bei festgehaltenem  $\mathfrak{R}$ :

$$\sin \alpha d\alpha = -d \cos \alpha = \frac{r dr}{R \mathfrak{R}}.$$

Wir müssen nun das Integrationsgebiet wieder in zwei Gebiete trennen:

$$(1) \quad \mathfrak{R} \leq R; \quad (2) \quad \mathfrak{R} > R.$$

(1) Es wird:

$$(a) \quad R \int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3$$

$$(b) \quad \int_0^R \mathfrak{R} d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$(c) \quad \int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2 R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \int_{R-\mathfrak{R}}^{R+\mathfrak{R}} (R^2 + \mathfrak{R}^2 - r^2) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2 R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \left( -\frac{4}{3} R^2 \mathfrak{R}^3 + \frac{4}{15} \mathfrak{R}^5 \right)$$

$$= \frac{1}{2 R^2} \left( -\frac{2}{3} R^2 \mathfrak{R}^2 + \frac{1}{15} \mathfrak{R}^4 \right) \Big|_0^R = -\frac{3}{10} R^2.$$

Zusammen erhalten wir also für den ersten Teil des Integrals  $J_\infty$ , der dem Integrationsgebiet  $R \leq \Re$  entspricht:

$$J_i = \frac{1}{4} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta - \frac{9}{80} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta = \frac{11}{80} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta.$$

(2) Von dem Integral

$$\int_R^\infty d\Re \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha (r - \Re + R \cos \alpha) d\alpha$$

werden die einzelnen Bestandteile unendlich und nur ihre Summe bleibt endlich. Wir führen daher zuerst nur die Integration nach  $\alpha$  aus:

Es ist:

(a) 
$$R \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R,$$

(b) 
$$\Re \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0,$$

(c) 
$$\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha = \int_{\Re-R}^{\Re+R} \frac{(R^2 + \Re^2 - r^2) r^2 dr}{2 R^2 \Re^2}$$

(gegenüber dem entsprechenden Bestandteil von  $J_i$  sind hier die Grenzen verändert). Also

$$\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha r d\alpha = \frac{1}{2 R^2 \Re^2} \left( \frac{R^2 + \Re^2}{3} r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{\Re-R}^{\Re+R} = -\frac{2}{3} R + \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2}.$$

Daher im ganzen:

$$\int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha (r - \Re + R \cos \alpha) d\alpha = \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2}$$

Daher

$$J_a = \frac{3}{8} \frac{\sigma a U^2}{\mu} \cos \vartheta \int_R^\infty \frac{2}{15} \frac{R^3}{\Re^2} d\Re = \frac{1}{20} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^3 \cos \vartheta.$$

Zusammen endlich:

$$J_i + J_a = J_\infty = \frac{3}{16} \frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos \vartheta.$$

Dies ist die gesuchte Näherungsformel für das Integral  $J$ , für Werte von  $R$ , die klein gegen die als sehr groß vorausgesetzte Entfernung  $A$  sind. Setzen wir nach S. 30  $\psi'' = J$ , so gewinnen wir (nach S. 26) für  $\psi''$  die Näherungsformel:

(39) 
$$\psi'' = \frac{3}{16} \frac{\sigma a U^2}{\mu} \frac{r^2 x}{R},$$

und in Verbindung mit (32) die Gleichung:

$$\psi' + \psi'' = \frac{3}{16} \frac{\sigma U^2}{\mu} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( a R^2 - \frac{3}{2} a^2 R - \frac{a^4}{2 R} \right).$$

Wir sind hiermit zu dem partikulären Integral (18) der Gl. (13) zurückgeführt, das wir so als einen in der Umgebung der Kugel gültigen Näherungsausdruck für ein partikuläres Integral der Gl. (30) erkennen, das im Unendlichen die zu fordernden Randbedingungen erfüllt. Die Zufügung des Gliedes

$$\frac{3}{32} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -a^3 + \frac{a^5}{R^2} \right),$$

das der Gleichung  $DD(\psi) = 0$  genügt, führt also wie auf S. 14 zu dem Näherungsausdruck für die Stromfunktion:

$$(20) \quad \psi_1 = \frac{3}{32} S U \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{(R - a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^2},$$

der auch die Randbedingungen an der Kugel erfüllt. Er ist eine in der Umgebung der Kugel gültige Näherungsform für die bei großem Werte von  $\frac{A}{a}$  auch in beliebiger Entfernung bestehende Lösung:

$$(40) \quad \psi_1 = \frac{3}{32} S U a^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3R}{a} - 1 - \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right) + r \frac{\partial J}{\partial r},$$

in der  $J$  durch (35a) (mit  $b = 0$ ) und (34a) definiert ist und die alle an die Funktion  $\psi_1$  zu stellenden Bedingungen befriedigt. Die weiteren Folgerungen aus der Gl. (20) sind bereits früher gezogen worden.

Auf S. 29 hatten wir gesehen, daß die Funktion  $J$  im Unendlichen von der Ordnung  $R$  unendlich wird, folglich wird nach (40)  $\psi_1$  von gleicher Ordnung unendlich. Daraus folgt, daß  $D\psi_1$  von der Ordnung  $\frac{1}{R}$  verschwindet. Von den gleichen Ordnungen fanden wir auf S. 24  $\psi_0$ , bzw.  $D\psi_0$ . Hieraus folgt, daß die bei der Aufstellung der Gl. (30) vernachlässigten Glieder von Gl. (8) im Unendlichen von gleicher Ordnung in  $R$  wie die berücksichtigten sind und daß daher bei kleiner Reynoldsscher Zahl die Vernachlässigung unbedenklich ist. Wegen der Stetigkeitsannahmen, die wir für die Verteilung der Ergiebigkeit in den Quellgebieten machten, folgt ferner, daß nicht nur alle Geschwindigkeiten der überlagerten Näherungsbewegung, sondern auch die der Grundbewegung in den Quellgebieten endlich bleiben, daß daher die vernachlässigten Glieder der Gl. (8) endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten sind. Dagegen bedarf die Frage, wie groß die Vernachlässigungen sind, wenn die Quellgebiete punktförmig angenommen werden, noch einer eigenen Untersuchung.

## Anhang 1.

## Berechnung der Gleichung (13) in § 2.

Nach (11) ist:

$$(11) \quad DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right]$$

Da  $x = R \cos \vartheta$ ;  $r = R \sin \vartheta$ , so folgt hieraus:

$$DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu} \left[ \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial R} \frac{\partial D\psi_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial D\psi_0}{\partial R} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right]$$

wobei

$$\psi_0 = \frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \left( -2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R} \right) = \frac{U}{4} r^2 \left( -2 + \frac{3a}{R} - \frac{a^3}{R^3} \right).$$

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta = -\frac{3}{2} U \frac{ar^2}{R^3},$$

Also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial R} \frac{\partial D\psi_0}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \frac{\partial D\psi_0}{\partial R} \right) = \\ & = \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \left[ \frac{U}{4} \sin^2 \vartheta \left( -4R + 3a + \frac{a^3}{R^2} \right) + \frac{3}{2} U \frac{a}{R^2} \sin^2 \vartheta \right. \\ & \left. - \frac{U}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \left( -2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R} \right) - 3U \frac{a}{R} \sin \vartheta \cos \vartheta \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{6a}{R^2} - \frac{6a^3}{R^5} \right) \right] \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r^2} D\psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= \frac{3Ua}{R^3} \frac{U}{4} r^2 \left( -\frac{3ax}{R^3} + \frac{3a^3x}{R^5} \right) \\ &= \frac{2}{4} U^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( -\frac{3a^2}{R^3} + \frac{3a^4}{R^5} \right). \end{aligned}$$

Daher

$$DD(\psi_1) = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} U^2 \left( \frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^5} + \frac{a^4}{R^5} \right) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta.$$

## Anhang 2.

## Berechnung der Gleichung (30) in § 6.

Wir haben hier:

$$\psi_0 = \frac{A^2 U}{2} \left( \frac{A+x}{e} + \frac{A-x}{e_1} \right) + \frac{U}{4} \left( 3aR - \frac{a^3}{R} \right) \sin^2 \vartheta$$

und wie oben:

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2} U \frac{a}{R} \sin^2 \vartheta = -\frac{3}{2} U \frac{ar^2}{R^3}.$$

Gegen die Formeln im Anhang (1) ist hier nur das Glied  $-\frac{UR^2 \sin^2 \vartheta}{2}$  von  $\psi_0$  in das obige erste Glied von  $\psi_0$  abgeändert, während  $D\psi_0$  unverändert geblieben ist. Wir haben daher hier nur noch neu zu berechnen: Von dem Glied  $\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} \right)$  den Anteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4} \frac{a A^2 U^2}{r} \left| \begin{array}{cc} \left[ \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \left( \frac{(A+x)^2}{\varrho^3} - \frac{(A-x)^2}{\varrho_1^3} \right) \right] & -\frac{3r^2 x}{R^5} \\ \left[ -\frac{r(A+x)}{\varrho^3} + \frac{r(A-x)}{\varrho_1^3} \right] & \left( -\frac{3r^3}{R^5} + \frac{2r}{R^3} \right) \end{array} \right| \\ & = -\frac{3}{4} a A^2 U^2 r^2 \left| \begin{array}{cc} \left( \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho_1^3} \right) & -\frac{3x}{R^5} \\ \left( -\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3} \right) & \frac{2x^2 - r^2}{R^5} \end{array} \right| \\ & = -\frac{3}{4} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \frac{-x^2 - r^2 - 3Ax}{\varrho^3} + \frac{x^2 + r^2 - 3Ax}{\varrho_1^3} \right) \\ & = -\frac{3}{4} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \frac{\varrho^2 - 2Ax - A^2 + 3Ax}{\varrho^3} + \frac{\varrho_1^2 + 2Ax - A^2 - 3Ax}{\varrho_1^3} \right) \\ & = \frac{3}{4} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \frac{A^2 - Ax}{\varrho^3} + \frac{A^2 + Ax}{\varrho_1^3} \right). \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir zu dem Glied  $-\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0$  den Anteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{2A^2 U}{2r^2} \left( \frac{r^2}{\varrho^3} - \frac{r^2}{\varrho_1^3} \right) \cdot -\frac{3}{2} U a \frac{r^2}{R^3} \\ & = \frac{3}{2} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left( \frac{\varrho^2 - 2Ax - A^2}{\varrho^3} - \frac{\varrho_1^2 + 2Ax - A^2}{\varrho_1^3} \right) \\ & = \frac{3}{2} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left[ \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \frac{A^2 + 2Ax}{\varrho^3} + \frac{A^2 - 2Ax}{\varrho_1^3} \right]. \end{aligned}$$

Die beiden Anteile ergeben zusammen:

$$\frac{3}{4} a A^2 U^2 \frac{r^2}{R^5} \left[ 3 \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) - \frac{3A^2 + 3Ax}{\varrho^3} + \frac{3A^2 - 3Ax}{\varrho_1^3} \right].$$

Dieser Teil entspricht dem Glied  $\frac{9}{2} U^2 \frac{a}{R^2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$  in der Schlußgleichung von Anhang 1. Wir erhalten also hier im ganzen:

$$(30) \quad DD\psi_1 = \frac{9}{4} \frac{\sigma}{\mu} a U^2 \left\{ \frac{A^2 r^2}{R^5} \left[ \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - A \left( \frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3} \right) \right] + \left( -\frac{3a}{R^3} + \frac{a^3}{R^5} \right) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right\}.$$

## Anhang 3.

Entwicklung der Gl. (34) für kleine Werte von  $\frac{R}{A}$ .

Zur Entwicklung von  $f(x, y, z)$  nach Potenzen von  $\frac{R}{A}$  ist die Form (34) geeigneter als (34a): Wir haben:

$$\varrho = \sqrt{R^2 + A^2 + 2RA \cos \vartheta} = A \sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 + 2\frac{R}{A} \cos \vartheta}$$

$$\varrho_1 = \sqrt{R^2 + A^2 - 2RA \cos \vartheta} = A \sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 - 2\frac{R}{A} \cos \vartheta}.$$

Daher für kleine Werte von  $\frac{R}{A}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{R} &= \frac{A}{R} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( -\frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_1}{R} &= \frac{A}{R} \left( 1 - \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( +\frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^3}{R^3} &= \frac{A^3}{R^3} \left( 1 + \frac{3R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( \frac{3}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_1^3}{R^3} &= \frac{A^3}{R^3} \left( 1 - \frac{3R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^3}{A^3} \left( -\frac{3}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \frac{A^3}{R^3} - \frac{A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{6} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{A^3}{R^3} + \frac{A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{6} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Ferner ist noch:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{R}{A} \left( 1 - \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \right)$$

$$\frac{R}{\varrho_1} = \frac{R}{A} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta + \frac{R^2}{A^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \dots \right)$$

Also:

$$\begin{aligned} & \frac{e^3}{R^3} - \frac{6e}{R} + 8 - \frac{3R}{e} = \\ & = \frac{A^3}{R^3} + \frac{3A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( 8 - \frac{9}{2} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \\ & \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{6e_1}{R} + 8 - \frac{3R}{e_1} = \\ & = \frac{A^3}{R^3} - \frac{3A^2}{R^2} \cos \vartheta + \frac{A}{R} \left( -\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) + \left( 8 + \frac{9}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2(A+2x)^2} = \frac{1}{A^4 \left( 1 + \frac{2R}{A} \cos \vartheta \right)^2} \\ & = \frac{1}{A^4} \left( 1 - \frac{4R}{A} \cos \vartheta + \frac{12R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{32R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & \frac{1}{A^2(A-2x)^2} = \frac{1}{A^4} \left( 1 + \frac{4R}{A} \cos \vartheta + \frac{12R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta + \frac{32R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & \frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3} = \frac{1}{3A^4} \left( 1 + \frac{R}{A} \cos \vartheta \right) \left( 1 - \frac{6R}{A} \cos \vartheta + \frac{24R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{80R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \\ & = \frac{1}{3A^4} \left( 1 - \frac{5R}{A} \cos \vartheta + \frac{18R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta - \frac{56R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right) \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3} = \frac{1}{3A^4} \left( 1 + \frac{5R}{A} \cos \vartheta + \frac{18R^2}{A^2} \cos^2 \vartheta + \frac{56R^3}{A^3} \cos^3 \vartheta \dots \right)$$

Also wird:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2(A+2x)^2} \left( \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2} \left( \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{2}{3} \right) \\ & = \frac{2 \cos \vartheta}{3 R^2 A^2} + \frac{1}{A^4} \left( -3 \cos \vartheta + \frac{5}{3} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \\ & \frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3} \left( 2 \frac{e}{R} - \frac{1}{3} \frac{e^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{e} \right) + \frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3} \left( 2 \frac{e_1}{R} - \frac{1}{3} \frac{e_1^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{e_1} \right) \\ & = -\frac{4 \cos \vartheta}{3 A^2 R^2} + \frac{1}{A^4} \left( 12 \cos \vartheta - \frac{20}{3} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zusammen nach (34):

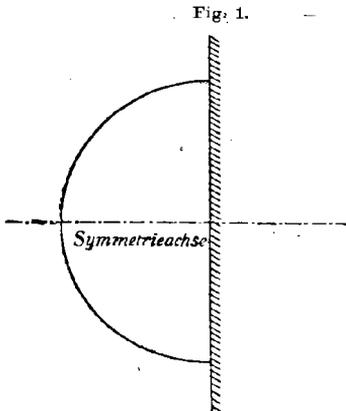
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{9}{4} \frac{aU^2 \sigma}{\mu} \left[ -\frac{2 \cos \vartheta}{3 R^2} + \frac{1}{A^2} (9 \cos \vartheta - 5 \cos^3 \vartheta) + \dots \right] \\ &= \frac{aU^2 \sigma}{\mu} \left[ -\frac{3 \cos \vartheta}{2 R^2} + \frac{9}{4A^2} (9 \cos \vartheta - 5 \cos^3 \vartheta) + \dots \right]. \end{aligned}$$

## Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers.

Von Dr. Ing. KARL FEDERHOFER in Graz.

### I. Allgemeines.

Das Problem des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Kreisbogens wurde hinsichtlich des Sonderfalles einer vollkommenen Einspannung der beiden Bogenenden bereits mehrfach behandelt.<sup>1)</sup> Abgesehen von einer kinematisch-statischen Untersuchung von Ramisch beruhen die übrigen Arbeiten auf der Anwendung des Satzes vom Kleinstwerte der Formänderungsarbeit. Stutz hat hierbei die von den übrigen Verfassern gemachte Annahme: Symmetrie von Belastung und Anlage (Fig. 1) fallen gelassen und die Berechnung für beliebigen senkrechten Lastangriff durchgeführt, welche auf die Untersuchung eines dreifach statisch unbestimmten Systems hinausläuft. Das Ziel der genannten Arbeiten liegt in der Ermittlung der statisch unbestimmten Größen; auf die Berechnung der Formänderung und auf die Untersuchung ihres Zusammenhanges mit den äußeren Kräften wird hierbei nicht eingegangen.



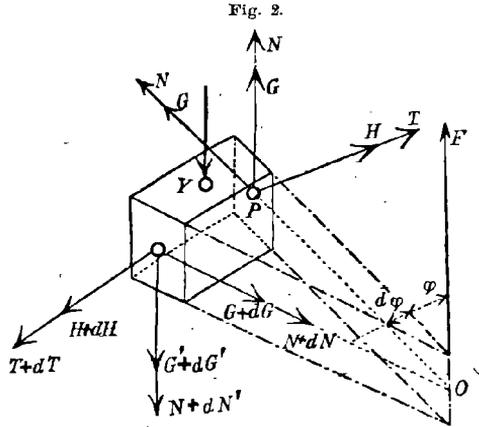
Love hat in seinem Lehrbuche<sup>2)</sup> die allgemeine Theorie der Biegung und Drillung dünner, von Hause aus krummer Stäbe — nach welcher das vorliegende Problem gelöst werden kann — übersichtlich dargestellt, und in den Anwendungen u. a. auf die Biegung eines unvoll-

1) Dieser Sonderfall enthält die Berechnung des in der Hochbaupraxis häufig verwendeten halbringförmigen Balkenträgers, mit welcher sich nachstehende Werke und Abhandlungen beschäftigen: Koenen, Deutsche Bauzeitung 1885, S. 607. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., 1904, S. 232. Zschetzsche, Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, 1901, S. 512. Pfeffer, Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, 1904, S. 801. Ramisch, Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Vereins 1904, S. 635. Stutz, Zeitschrift d. österr. Ing. u. Arch. Verreins 1904, S. 682. Kannenberg, Zschetzsche, Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst, 1912, Heft 7.

2) A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907.

ständigen Kreisringes aus seiner Ebene heraus hingewiesen, ohne diesen praktisch wichtigen Sonderfall eingehender zu behandeln. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit der Lösung des oben umschriebenen Problems unter Zugrundelegung der eben erwähnten Theorie.

Wir setzen geringe Formänderung voraus, so daß für die Aufstellung der Gleichungen des Gleichgewichtes ein Bogenelement mit den angreifenden Kräften im ursprünglichen Zustande betrachtet werden kann. Die äußeren Kräfte mögen in Punkten der Bogenachse angreifen; die Schwerpunkte der als konstant vorausgesetzten Querschnitte sollen auf einem Kreise vom Halbmesser  $r$  liegen. Es bezeichne (Fig. 2):



$\varphi$  den Winkel, den der zum Schwerpunkt  $P$  eines beliebigen Querschnitts gezogene Halbmesser mit einer festen Halbmesserrichtung  $OF$  einschließt,

$Y$  die auf die Längeneinheit des Kreisbogens, senkrecht zu seiner Ebene wirkende äußere Kraft, die beliebig veränderlich sein kann.

Wird nun aus dem Bogen ein Element vom Zentriwinkel  $d\varphi = \frac{ds}{r}$  herausgeschnitten, so können die an den beiden Schnittflächen wirkenden, das Gleichgewicht mit der am Elemente angreifenden äußeren Kraft herstellenden Spannungen in statischer Beziehung ersetzt werden:

durch die im Schwerpunkte angreifenden Kräfte  $N, N', T$  bzw.  $N + dN, N' + dN', T + dT$ , sowie durch die Biegemomente  $G, G'$ , bzw.  $G + dG, G' + dG'$  und endlich durch das Drillungsmoment  $H$ , bzw.  $H + dH$ ; diese Größen mögen in dem in Fig. 2 eingetragenen Sinne wirken.

Das Gleichgewicht dieses räumlichen Kraftsystems bedingt folgende Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} = 0; & \frac{dG'}{ds} + N = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} = 0; & \frac{dG}{ds} + \frac{H}{r} - N' = 0 \\ \frac{dN'}{ds} + Y = 0; & \frac{dH}{ds} - \frac{G}{r} = 0. \end{cases}$$

Nun gelten für die Biegemomente  $G$  und  $G'$ , und für das Drillungsmoment  $H$  folgende Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{cases} G = A\kappa \\ G' = B\left(\kappa' - \frac{1}{r}\right) \\ H = C\tau, \end{cases}$$

worin  $\kappa$  und  $\kappa'$  die Komponenten der Krümmung der deformierten Bogenachse in bezug auf die Biegungshauptachsen und  $\tau$  den Drall der Bogenachse an der gleichen Stelle bedeuten.  $A$  und  $B$  bezeichnen die Biegesteifigkeit für die genannten Hauptachsen,  $C$  die Drillungssteifigkeit.

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen zusammen den Formänderungs- und Spannungszustand des Kreisbogens für die angenommene Belastung. Ersterer ist mit der Kenntnis von  $\kappa$ ,  $\kappa'$  und  $\tau$  gegeben; es empfiehlt sich jedoch, ihn durch die Verschiebungskomponenten eines Bogenelementes nach drei zueinander senkrechten Richtungen zu kennzeichnen, wobei bekanntlich vorteilhaft die drei, in Fig. 2 eingetragenen Richtungen (Kreistangente und -Normale, sowie Belastungsrichtung) gewählt werden. Bezeichnet dann  $u$  die radiale, zum Kreismittelpunkt gerichtete positive Verschiebung,  $v$  die in der Krafrichtung  $Y$  positive Verschiebung und  $w$  die in der Kreistangente im Sinne des wachsenden Winkels  $\varphi$  positive Verschiebung eines Bogenelementes an der Stelle  $\varphi$ , bedeutet schließlich  $\beta$  den kleinen Winkel, den jene Hauptebene, die der Kreisebene nach der Deformation an der Stelle  $\varphi$  entspricht, mit der Kreisebene einschließt, so sind  $\kappa$ ,  $\kappa'$  und  $\tau$  in den genannten kleinen Werten durch nachstehende Gleichungen ausgedrückt<sup>1)</sup>:

$$(3) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{\beta}{r} - \frac{d^2v}{ds^2}, \\ \kappa' = \frac{1}{r} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2}, \\ \tau = \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds}. \end{cases}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß eine der Hauptachsen des durch einen Punkt der unverzerrten Bogenachse gelegten Querschnittes zusammenfällt mit der Normalen des Kreisbogens in jenem Punkte. Für das Bogenelement  $ds$  ist bei Vernachlässigung der geringen Dehnung der Bogenachse  $r d\varphi$  zu setzen.

1) Hinsichtlich der Abteilung der Formelgruppen (1)–(3) verweise ich auf Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, S. 456, 457 u. 513.

Die Betrachtung der Gleichungen (1) und (3) lehrt, daß bei Voraussetzung geringer Formänderung die Spannungs- und Formänderungszustände in der Kreisebene und in Ebenen senkrecht zu ihr voneinander unabhängig sind und daß demgemäß bei Vorhandensein nur lot-rechter äußerer Kräfte diese Formeln nur zur Kenntnis der Verschiebungen  $v$ , also der Biegung des Bogens aus seiner Ebene heraus führen, während die notwendigerweise eintretende Formänderung in der Ebene des Kreisbogens bei diesem Grade der Näherung unberücksichtigt bleibt.<sup>1)</sup>

Hiernach werden für die weitere Untersuchung von den Gleichungsgruppen (1) und (2) nur folgende Gleichungen beibehalten:

$$(4) \quad \frac{dN'}{ds} + Y = 0.$$

$$(5) \quad \frac{dH}{ds} - \frac{G}{r} = 0.$$

$$(6) \quad \frac{dG}{ds} + \frac{H}{r} - N' = 0.$$

$$(7) \quad G = A\kappa.$$

$$(8) \quad H = C\tau.$$

Wir wollen nun jene Differentialgleichung für die Verschiebungskomponente  $v$  aufstellen, welche ihren direkten Zusammenhang mit der äußeren Kraft  $Y$  angibt.

Zunächst liefert die einmalige Ableitung der Gleichung (6) nach  $s$  unter gleichzeitiger Bedachtnahme auf (5) und (4):

$$\frac{d^2G}{ds^2} + \frac{1}{r^2}G + Y = 0,$$

wofür wegen:

$$ds = r d\varphi,$$

auch:

$$(9) \quad \frac{d^2G}{d\varphi^2} + G = -Yr^2$$

gesetzt werden kann.

Weil nach (3):

$$\frac{\beta}{r} = \frac{d^2v}{ds^2} + \kappa,$$

so ergibt sich für den Drall:

$$\tau = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{ds} + r \left( \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{d\kappa}{ds} \right),$$

und daraus wegen:

$$\tau = \frac{H}{C} \quad \text{und} \quad \frac{d\kappa}{ds} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dG}{ds}$$

1) Die Werte  $u$  und  $w$  sind klein von der Ordnung  $v^2$  (siehe Love, S. 517).

die Beziehung:

$$\frac{H}{C} = \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} + r \cdot \frac{d^3v}{ds^3} + \frac{r}{A} \frac{dG}{ds}.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (5) zunächst:

$$(10) \quad \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = \frac{r^2}{C} \cdot G - \frac{r^2}{A} \cdot \frac{d^2G}{d\varphi^2}$$

oder in Verbindung mit Gleichung (9) für das Biegemoment  $G$ :

$$(11) \quad G = r \cdot \frac{AC}{A+C} \left[ r^3 \left( \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) - \frac{rY}{A} \right].$$

Wird dieser Wert in (10) eingesetzt, so erhält man die gesuchte Beziehung zwischen  $v$  und der äußeren Kraft  $Y$ . Sie lautet<sup>1)</sup>

$$(12) \quad \frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = r^4 \left( \frac{1}{A} \frac{d^2Y}{d\varphi^2} - \frac{1}{C} \cdot Y \right).$$

Da sich nun sämtliche übrigen Größen durch die Verschiebung  $v$  und deren Ableitungen nach  $\varphi$  ausdrücken lassen, so ist mit der Integration der Differentialgleichung (12) unsere Aufgabe als gelöst zu betrachten. Zunächst seien noch die Werte  $\beta$ ,  $H$ ,  $N'$  — ausgedrückt durch  $v$  — berechnet.

Es war:

$$\frac{\beta}{r} = \frac{d^2v}{ds^2} + \alpha,$$

woraus unter Bedachtnahme auf (7) und (11) für  $\beta$  die Beziehung folgt:

$$(13) \quad \beta = -\frac{r^3 C}{A(A+C)} Y + \frac{1}{r(A+C)} \left[ C \frac{d^4v}{d\varphi^4} + (A+2C) \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right].$$

Das Biegemoment  $G$  ist bereits in Gleichung (11) durch  $v$  ausgedrückt. Die Schubkraft  $N'$  beträgt nach (6):

$$N' = \frac{dG}{r d\varphi} + \frac{H}{r},$$

welcher Ausdruck mit Benutzung der bereits erhaltenen Beziehungen leicht umgeformt wird in:

$$(14) \quad N' = \frac{C}{r^3} \left( \frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{dv}{d\varphi} \right) - \frac{Cr}{A} \frac{dY}{d\varphi}.$$

1) Wird der Kreisbogen in seiner Ebene durch Kräfte gebogen, deren Komponenten für die Längeneinheit in Richtung des Radius und der Tangente durch  $X$ ,  $Z$  gegeben sind, so genügt die tangentielle Verschiebung  $w$  der Gleichung:

$$\frac{d^6w}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4w}{d\varphi^4} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} = \frac{r^3}{B} \left( \frac{dX}{d\varphi} - Z \right);$$

(Love, S. 515; Federhofer, Zeitschrift f. Arch. u. Ing.-Wesen 1910, S. 466.)  
hieraus folgt das interessante Ergebnis, daß die Gleichungen für  $w$  und  $v$  in ihrer homogenen Form vollkommen übereinstimmen.

Schließlich erhält man gemäß:

$$H = C\tau$$

für das Drehmoment  $H$  die Gleichung:

$$(15) \quad H = \frac{C}{r^2} \left[ \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} + \frac{C}{A+C} \left( \frac{d^5 v}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right) \right] - \frac{C}{A} \frac{C}{A+C} r^2 \frac{dY}{d\varphi}.$$

## II. Belastung durch Einzellasten.

Wird der Bogen lediglich durch Einzelkräfte belastet, die senkrecht zur Bogenebene wirken, so verschwindet der Wert  $Y$  samt seinen Ableitungen nach  $\varphi$ , so daß sich die Grundgleichung (12) vereinfacht zu

$$(16) \quad \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$

Für die Momente  $G$  und  $H$ , die Schubkraft  $N'$  und den Winkel  $\beta$  gelten dann die Werte:

$$(17) \quad \begin{cases} G = \frac{AC}{r^2(A+C)} \left( \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right), \\ H = \frac{C}{r^2} \left[ \left( \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) + \frac{C}{A+C} \left( \frac{d^5 v}{d\varphi^5} + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right) \right], \\ N' = \frac{C}{r^2} \left( \frac{d^5 v}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right), \\ \beta = \frac{1}{r(A+C)} \left[ C \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (A+2C) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right]. \end{cases}$$

Das allgemeine Integral der Grundgleichung, einer linearen homogenen Differentialgleichung 6. Ordnung, lautet:

$$(18) \quad v = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi,$$

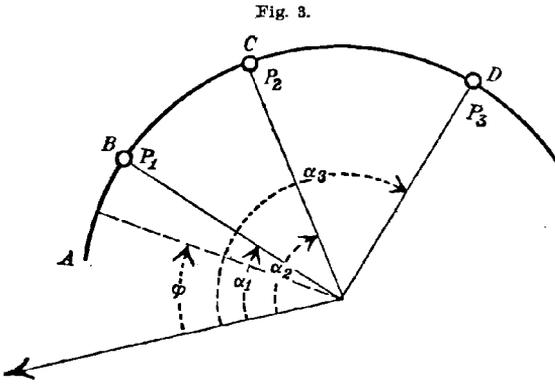
worin  $C_1, C_2, \dots, C_6$  sechs aus der Natur der Aufgabe (gewöhnlich aus gewissen Auflagerungsbedingungen) zu ermittelnde Integrationskonstante sind.

Der Vollständigkeit wegen seien die sechs Ableitungen von  $v$  nach  $\varphi$  angeführt:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\varphi} &= C_2 + (C_6 - C_3) \sin \varphi + (C_5 + C_4) \cos \varphi - C_5 \varphi \sin \varphi + C_6 \varphi \cos \varphi, \\ \frac{d^2 v}{d\varphi^2} &= (2C_6 - C_3) \cos \varphi - (2C_5 + C_4) \sin \varphi - C_5 \varphi \cos \varphi - C_6 \varphi \sin \varphi, \\ \frac{d^3 v}{d\varphi^3} &= -(3C_6 - C_3) \sin \varphi - (3C_5 + C_4) \cos \varphi + C_5 \varphi \sin \varphi - C_6 \varphi \cos \varphi, \\ \frac{d^4 v}{d\varphi^4} &= -(4C_6 - C_3) \cos \varphi + (4C_5 + C_4) \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi, \\ \frac{d^5 v}{d\varphi^5} &= (5C_6 - C_3) \sin \varphi + (5C_5 + C_4) \cos \varphi - C_5 \varphi \sin \varphi + C_6 \varphi \cos \varphi, \\ \frac{d^6 v}{d\varphi^6} &= (6C_6 - C_3) \cos \varphi - (6C_5 + C_4) \sin \varphi - C_5 \varphi \cos \varphi - C_6 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Gesetzt, es gelte für die Senkung der Elemente des Bogenteiles  $A - B$  (Fig. 3), innerhalb dessen keine äußere Kraft angreift, die Gleichung:

$$v_1 = C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi,$$



so wird, wenn in  $B$  eine äußere Kraft  $P_1$  hinzutritt, die Senkung  $v_2$  der Elemente des Bogenteiles  $BC$  offenbar gemäß (16) durch:

$$v_2 = v_1 + \Delta v$$

gegeben sein, worin die Funktion  $\Delta v$  genau die allgemeine Form von  $v$  mit sechs willkürlichen Konstanten aufweisen muß. Wir setzen demnach bei deren Ermittlung:

$$(19) \quad \Delta v = a_1 + a_2 \varphi + a_3 \cos \varphi + a_4 \sin \varphi + a_5 \varphi \cos \varphi + a_6 \varphi \sin \varphi.$$

Die Konstanten  $a$  erhält man aus der Erwägung, daß an der gemeinsamen Stelle  $\varphi = \alpha$  beider Bogenteile die Werte  $G, H, v, \beta$  und  $\frac{dv}{d\varphi}$  dem Vorzeichen und der Größe nach übereinstimmen müssen und daß dort lediglich die Schubkraft  $N'$  eine Unstetigkeit besitzt, indem sie sich sprunghaft um  $-P$  ändert, so daß dort die Beziehung gilt:  $N'_2 - N'_1 = -P$ .

Diese Bedingungen sind durch nachstehende Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + a_2 \alpha + a_3 \cos \alpha + a_4 \sin \alpha + a_5 \alpha \cos \alpha + a_6 \alpha \sin \alpha, \\ 0 &= a_2 - a_3 \sin \alpha + a_4 \cos \alpha + a_5 (\cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + a_6 (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha), \\ 0 &= -a_3 \cos \alpha - a_4 \sin \alpha - a_5 (\alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha) + a_6 (2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha), \\ 0 &= +a_3 \cos \alpha + a_4 \sin \alpha + a_5 (\alpha \cos \alpha + 4 \sin \alpha) + a_6 (\sin \alpha - 4 \alpha \cos \alpha), \\ 0 &= a_3 \sin \alpha - a_5 \cos \alpha - t a_5 \cos \alpha - t a_6 \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$-\frac{P_1 r^3}{C} = a_2.$$

Hierin ist der Abkürzung wegen:  $\frac{A}{C} = n, \frac{1 + 3n}{1 + n} = t$  gesetzt worden ( $t$  ist hiernach stets  $> 1$ ).

Obiges Gleichungssystem gibt aufgelöst:

$$a_2 = -\frac{P_1 r^3}{C},$$

$$a_1 = -a_2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_2 \cos \alpha}{(1-t) \cos \alpha} (t \sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \\ a_4 &= +\frac{a_2 \sin \alpha}{(1-t) \cos \alpha} (\alpha \sin \alpha + t \cos \alpha), \\ a_5 &= -\frac{a_2 \cos \alpha}{1-t}, \\ a_6 &= -\frac{a_2 \sin \alpha}{1-t}; \end{aligned}$$

womit sich die Funktion  $\Delta v$  nach einiger Umformung darstellen läßt durch:

$$(20) \quad \Delta v \cdot \frac{C}{P_1 r^3} = (\varphi - \alpha) - \frac{1}{1-t} [t \sin(\alpha - \varphi) - (\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi)].$$

Ist also die Senkung  $v_1$  im ersten Bogenteile bekannt, so kennt man auch jene in einem beliebigen  $n^{\text{ten}}$  Bogenfelde. Sie berechnet sich aus:

$$v_n = v_1 + \sum \Delta v,$$

worin  $\Delta v$  jeweils aus Gleichung (20) zu entnehmen ist und sich die Summe über sämtliche, zwischen dem ersten und  $n^{\text{ten}}$  Bogenfelde wirkenden Kräfte erstreckt. Aus den Gleichungen (17) erhält man dann unmittelbar auch die Werte von  $G$ ,  $H$ ,  $N'$  und  $\beta$  für jedes einzelne Feld, und zwar im ersten Felde:

$$(21) \quad \begin{cases} G_1 = \frac{2AC}{r^2(A+C)} (C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi), \\ H_1 = \frac{C}{r^2} \left[ C_2 - \frac{2n}{n+1} (C_6 \sin \varphi + C_5 \cos \varphi) \right], \\ N'_1 = \frac{C}{r^3} \cdot C_2, \\ \beta_1 = \frac{1}{r} [-C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi + C_6 (t \cos \varphi - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \\ \quad + C_5 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - t \sin \varphi)]; \end{cases}$$

im  $n^{\text{ten}}$  Felde:

$$(22) \quad \begin{cases} G_n = \frac{2AC}{r^2(A+C)} \left[ C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi - \frac{r^3}{C(1-t)} \Sigma P_1 \sin(\alpha_1 - \varphi) \right], \\ H_n = \frac{C}{r^2} \left[ \left( C_2 - \frac{r^3}{C} \Sigma P_1 \right) - \frac{2n}{n+1} (C_6 \sin \varphi + C_5 \cos \varphi) \right. \\ \quad \left. + \frac{r^3}{C(1-t)} \Sigma P_1 \cos(\alpha_1 - \varphi) \right], \\ N'_n = \frac{C}{r^3} C_2 - \Sigma P_1, \\ \beta_n = \beta_1 - \frac{r^3}{C(1-t)} \Sigma P_1 [\sin(\alpha_1 - \varphi) - (\alpha_1 - \varphi) \cos(\alpha_1 - \varphi)]. \end{cases}$$

Im folgenden kommt es daher lediglich noch auf die Bestimmung der sechs Integrationskonstanten  $C_1 \dots C_6$  an.

## III. Der halbringförmige Balkonträger.

Wird der nach einem Kreisbogen geformte Träger an seinen Enden vollkommen eingespannt und senkrecht zur Kreisebene belastet, so entsteht der Balkonträger mit beliebigem Öffnungswinkel.

Wir wollen nun die unter II entwickelte Theorie beim halbkreisförmigen Balkonträger (welcher Form man in der Regel begegnet), anwenden.

Da die beiden Bogenenden vollkommen eingespannt sind, so müssen dort die Werte  $v$ ,  $\frac{dv}{d\varphi}$  und  $\beta$  verschwinden; der mathematische Ausdruck für diese Bedingungen liefert sechs Gleichungen, welche die Berechnung der sechs unbekanntenen Konstanten  $C_1 \dots C_6$  ermöglichen. Die genannten Bedingungen sind, wenn der Winkel  $\varphi$  von dem die Einspannstellen verbindenden Durchmesser an gezählt wird, ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_3 \\ 0 &= C_2 + C_4 + C_5 \\ 0 &= -C_3 + (t-1)C_6 \\ \mathfrak{A} &= C_1 + C_2\pi - C_3 - C_5\pi \\ \mathfrak{B} &= C_2 - C_4 - C_5 - C_6\pi \\ \mathfrak{C} &= C_3 + C_5\pi - (t-1)C_6, \end{aligned}$$

wobei  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  nachstehende, von der Größe und dem Orte der Belastung abhängige Werte besitzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \Sigma a_2 \left[ \alpha - \pi + \frac{1}{1-t} \{ -t \sin \alpha + (\alpha - \pi) \cos \alpha \} \right] \\ \mathfrak{B} &= \Sigma a_2 \left[ -1 + \frac{1}{1-t} \{ -(1-t) \cos \alpha + (\alpha - \pi) \sin \alpha \} \right] \\ \mathfrak{C} &= \Sigma \frac{a_2}{1-t} [\sin \alpha - (\alpha - \pi) \cos \alpha]. \end{aligned}$$

In die Summe sind sämtliche, auf den Träger wirkenden äußeren Kräfte einzubeziehen.

Die Auflösung obigen Gleichungssystems liefert:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} C_6 &= \frac{2 \Sigma}{\pi^2 + 4(1-t)} a_2 \left[ \alpha - \frac{\pi}{2} + \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{2(1-t)} (\alpha - \pi) \sin \alpha \right] \\ C_3 &= -C_1 = (t-1)C_6 \\ C_2 &= \frac{2 \Sigma}{\pi^2 + 4(1-t)} \left[ \frac{\pi}{2} (\alpha - \pi) + \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha - (1-t)(1 + \cos \alpha) \right] \\ C_5 &= \frac{1}{\pi(1-t)} \Sigma a_2 [\sin \alpha - (\alpha - \pi) \cos \alpha] \\ C_4 &= -(C_2 + C_5). \end{aligned} \right.$$

Gemäß (18, 21 u. 22) sind hiermit sowohl Biegungs- und Drehmoment, als auch die Formänderungsgrößen  $\beta$  und  $v$  bestimmt.

1. Besteht die Belastung lediglich aus *einer*, im Bogenscheitel wirkenden Last  $P$ , so vereinfachen sich die Ausdrücke für die Konstanten in:

$$C_6 = + \frac{a_2}{2(1-t)}; C_1 = - C_3 = \frac{a_2}{2} = - C_2; C_5 = \frac{a_2}{(1-t)\pi},$$

und man erhält hiermit als allgemeinen Wert für das Biegemoment:

$$G = Pr \left( \frac{\sin \varphi}{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2} \right)$$

und für das Drehmoment:

$$H = - Pr \left( \frac{\cos \varphi}{\pi} + \frac{\sin \varphi}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

wobei:  $\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$ ; aus Symmetriegründen kann die Ermittlung der Formeln im Teile  $\pi > \varphi > \frac{\pi}{2}$  entfallen.

Die Senkung des Bogenscheitels beträgt:

$$v_{\frac{\pi}{2}} = - \frac{Pr^3}{\pi C(1-t)} \left\{ (\pi - 1) + t\pi \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) \right\} = Pr^3 \left( \frac{0.2335}{A} + \frac{0.0189}{C} \right).$$

2. Herrscht hinsichtlich der Belastungsanordnung Symmetrie um die Halbkreishalbierende (vgl. Fig. 1), so vereinfachen sich die in (23) vereinigten Ergebnisse für die Konstanten  $C$  in:

$$C_6 = \Sigma \frac{a_2 \cos \beta}{1-t}; C_2 = - \Sigma a_2; C_5 = \frac{2}{\pi(1-t)} \Sigma a_2 (\cos \beta + \beta \sin \beta)$$

$$C_3 = - C_1 = (t-1) C_6,$$

wobei:  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .

Besteht z. B. die Belastung nur aus zwei symmetrisch gelegenen, gleichen Lasten  $P$ , so liefern die Gleichungen (21) und (22) für das Biegemoment im ersten Felde, wo  $\alpha > \varphi > 0$ :

$$G_1 = Pr \left[ \frac{2}{\pi} (\cos \beta + \beta \sin \beta) \sin \varphi - \cos \beta \cos \varphi \right],$$

für das Biegemoment im zweiten Felde, wo  $\pi - \alpha > \varphi > \alpha$ :

$$G_2 = Pr \left[ \frac{2}{\pi} (\cos \beta + \beta \sin \beta) - \sin \beta \right] \sin \varphi.$$

Für die Drehmomente gilt:

$$H_1 = - Pr \left[ -1 + \cos \beta \sin \varphi + \frac{2}{\pi} \cos \varphi (\cos \beta + \beta \sin \beta) \right]$$

$$H_2 = - Pr \left[ \frac{2}{\pi} (\cos \beta + \beta \sin \beta) - \sin \beta \right] \cos \varphi.$$

Eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung besteht darin, daß man die Schubkraft an den Stellen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  berechnet; sie beträgt dort offenbar:  $N'_1 = + P$ ;  $N'_2 = - P$ ; die Beziehungen (21) und (22):

$$N'_1 = \frac{C}{r^2} C_2 = + P, \text{ und } N'_2 = N'_1 - 2P = - P$$

bestätigen die Richtigkeit der Rechnung.

Die Formeln für die Formänderungsgrößen  $v$  und  $\beta$  (Gl. 18 u. 21) erfahren in allgemeiner Form keine wesentliche Vereinfachung, wenn die vorhin bestimmten Konstanten eingeführt werden; diese Größen werden daher für einen gegebenen Fall unmittelbar aus (18) und (21) bestimmt. Erwähnt sei, daß die im Abschnitte 2. und 1. gewonnenen Ergebnisse übereinstimmen, falls  $\beta = 0$  ist und der Wert  $2P$  in den Formeln von 2. durch  $P$  ersetzt wird.

3. Besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung für den halbkreisförmigen Balkenträger, wenn er eine gleichmäßig verteilte Vollast  $p$  (für die Längeneinheit der Stabachse) trägt.

Dann lautet die Grundgleichung (12) für die Senkung eines Bogenelementes:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + = -\frac{pr^4}{C} = \nu$$

und ihr allgemeines Integral:

$$v = C_1 + C_2 \varphi + \nu \frac{\varphi^3}{2} + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi.$$

Es rechnet sich:

$$\frac{dv}{d\varphi} = C_2 + \nu \varphi + (C_5 - C_3) \sin \varphi + (C_5 + C_4) \cos \varphi - C_5 \varphi \sin \varphi + C_6 \varphi \cos \varphi$$

und aus (13) der Winkel  $\beta$ :

$$r \frac{n+1}{n} \beta = \nu \frac{(n+1)^2}{n} + [2nC_6 - (n+1)C_3] \cos \varphi - \\ - [2nC_5 + (n+1)C_4] \sin \varphi - (n+1)C_5 \varphi \cos \varphi - (n+1)C_6 \varphi \sin \varphi.$$

Hierin ist wieder das Verhältnis  $A : C = n$  gesetzt.

Messen wir den Winkel  $\varphi$  von der Halbkreissymmetralen aus, so lauten die Bedingungen der festen Einspannung an den Trägerenden:

$$v = 0, \frac{dv}{d\varphi} = 0; \beta = 0 \quad \text{für } \varphi = \pm \frac{\pi}{2},$$

wonach folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu \pi^2}{8} &= C_1 + \frac{\pi}{2} C_6 \\ 0 &= C_2 \frac{\pi}{2} + C_4 \\ 0 &= C_2 - \frac{\pi}{2} C_5 \\ -\frac{\nu \pi}{2} &= C_6 - C_3 \\ + \frac{\nu(n+1)}{n} &= \frac{\pi}{2} C_6 \\ 0 &= 2nC_5 + (n+1)C_4. \end{aligned}$$

Die Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_4 = C_5 = 0; \\ C_6 &= \frac{2\nu}{n\pi} (n + 1); \\ C_3 &= \frac{\nu\pi}{2} \left( 1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{n+1}{n} \right) \\ C_1 &= -\frac{\nu\pi^2}{8} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \frac{n+1}{n} \right). \end{aligned}$$

Damit erhält man gemäß (11) für das Biegemoment an der Stelle  $\varphi$ :

$$G = -pr^2 \left( 1 - \frac{4}{\pi} \cos \varphi \right)$$

und nach (15) für das Drehmoment an der gleichen Stelle:

$$H = -pr^3 \left( \varphi - \frac{4}{\pi} \sin \varphi \right).$$

Für  $\varphi = 0$  ist:

$$v_0 = C_1 + C_3,$$

so daß sich die Trägermitte um das Maß:

$$v_0 = \frac{pr^4}{C} \cdot \frac{\pi}{2} \left[ \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{A+C}{A} + \frac{\pi}{4} - 1 \right] = pr^4 \left[ \frac{0,0263}{C} + \frac{0,3634}{A} \right]$$

senkt.

4. Denkt man sich, daß eine Einzellast  $P = 1$  über den Träger wandert und trägt die an den Einspannstellen auftretenden Biegun- und Drehmomente am Orte der Lastwirkung auf, so erhält man die Einflußlinien für diese Größen. Um ihren Verlauf zu veranschaulichen, werde der Berechnung ein aus einem I-Profil Nr. 20 gebildeter Balkenträger zugrunde gelegt.

Hierfür ist<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2402 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= 178 \text{ cm}^4 \\ \text{daher: } I_p &= 2580 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche beträgt:  $F = 37,12 \text{ cm}^2$ .

Man erhält gemäß (26) für die Konstante  $n = 104 \frac{I_1 I_p}{F^4} = 339,464$ .

Nach den Gleichungen (21) und (22) ist das Biegemoment:

$$\begin{aligned} \text{in A: } G_1^0 &= -\frac{2AC}{r^2(A+C)} C_6 \\ \text{in B: } G_2^\pi &= +\frac{2AC}{r^2(A+C)} \left( C_6 - \frac{a_2 \sin \alpha}{1-t} \right), \end{aligned}$$

1) Mit den Bezeichnungen auf Seite 62.

ferner das Drehmoment:

$$\text{in A: } H_1^0 = \frac{CC_2}{r^2} - \frac{2AC}{r^2(A+C)} C_5$$

$$\text{in B: } H_2^\pi = \frac{C}{r^2} (C_2 + a_2) + \frac{2AC}{r^2(A+C)} \left( C_5 - \frac{a_2 \cos \alpha}{1-t} \right).$$

Hiernach wurde mit Benutzung der in (23) gemachten Anrechnungen folgende Tabelle berechnet, in der die Werte des Biegungs- und Drehmomentes an den Einspannstellen A und B für verschiedene Lastlagen angegeben sind. Erwähnt sei, daß zur Probe sein muß:

$$G_1^0 + G_2^\pi = -Pr \sin \alpha$$

$$H_1^0 + H_2^\pi = \frac{C}{r^2} [2C_2 + a_2(1 + \cos \alpha)].$$

$\alpha^0$	$G_1^0$	$G_2^\pi$	$H_1^0$	$H_2^\pi$
0°	0	0	0	0
30	0,45915	0,04085	0,08582	0,01884
60	0,63390	0,23213	0,18567	0,09640
90	0,5	0,5	0,18170	0,18170
120	0,23213	0,63390	0,09640	0,18567
150	0,04085	0,45915	0,01884	0,08582
180	0	0	0	0
	$-Pr$	$-Pr$	$+Pr$	$-Pr$

Der Verlauf der Einflußlinien für die Einspannmomente ist aus den Fig. 4 u. 5 zu entnehmen. Die Einflußlinie für  $G_2^\pi$  bzw.  $H_2^\pi$  ist das Spiegelbild jener von  $G_1^0$  bzw.  $H_1^0$  in bezug auf die Symmetrale OC.

Fig. 4.

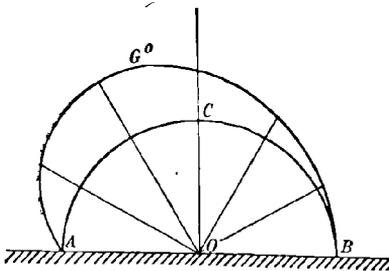
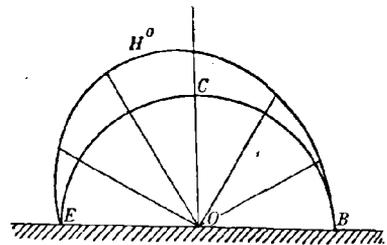


Fig. 5.



Für die Darstellung der Kurve der Biegungs- und Drehmomente bei bestimmter Stellung der Einzellast wurde  $\alpha = 60^\circ$  angenommen.

Dann ist im ersten Felde, wo also  $\frac{\pi}{3} > \varphi > 0$ :

$$G_1 = Pr [0,60899 \sin \varphi - 0,6339 \cos \varphi]$$

$$H_1 = Pr [0,79466 - (0,60899 \cos \varphi + 0,6339 \sin \varphi)],$$

während im zweiten Felde, wo  $\pi > \varphi > \frac{\pi}{3}$ :

$$G_2 = Pr [0,10899 \sin \varphi + 0,23213 \cos \varphi]$$

$$H_2 = Pr [-0,20534 - (0,10899 \cos \varphi - 0,23213 \sin \varphi)].$$

In der folgenden Tabelle sind einige Werte dieser Momente vereinigt.

$\varphi^0$	$G_1 : Pr$	$G_2 : Pr$	$H_1 : Pr$	$H_2 : Pr$
0	- 0,6339		+ 0,1857	
20	- 0,3874		+ 0,0056	
40	- 0,0941		- 0,0902	
60	+ 0,2105		- 0,0588	
80		+ 0,1476		+ 0,0043
100		+ 0,0670		+ 0,0422
120		- 0,0217		+ 0,0502
140		- 0,1078		+ 0,0274
160		- 0,1911		- 0,0253
180		- 0,2321		- 0,0964

Das Biegemoment wird im ersten Felde gleich Null, wenn:

$$tg \varphi_0 = \frac{C_3}{C_5},$$

woraus sich berechnet:

$$\varphi_0 = 46^{\circ} 9'.$$

Es erreicht einen extremen Wert, wenn:  $C_5 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi = 0$ ,

$$\text{oder: } tg \varphi_1 = - \frac{C_5}{C_3}, \text{ womit } G = + 0,879 Pr.$$

Die Richtungen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  stehen sonach aufeinander senkrecht.

Im zweiten Felde ist der Momentennullpunkt bestimmt durch:

$$tg \varphi_2 = \frac{C_5 - \frac{a_2 \sin \alpha}{1-t}}{C_5 - \frac{a_2 \cos \alpha}{1-t}} = \frac{C'_5}{C''_5},$$

woraus folgt:  $\pi - \varphi_2 = 64^{\circ} 51'$ .

Bedingung für einen extremen Wert ist:

$$C'_5 \cos \varphi_3 - C''_5 \sin \varphi_3 = 0,$$

woraus folgt:

$$tg \varphi_3 = \frac{C'_5}{C''_5}, \text{ und } G_2 = + 0,2564 Pr.$$

Die Richtungen  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  stehen demnach auch aufeinander senkrecht.

Die Beziehung:

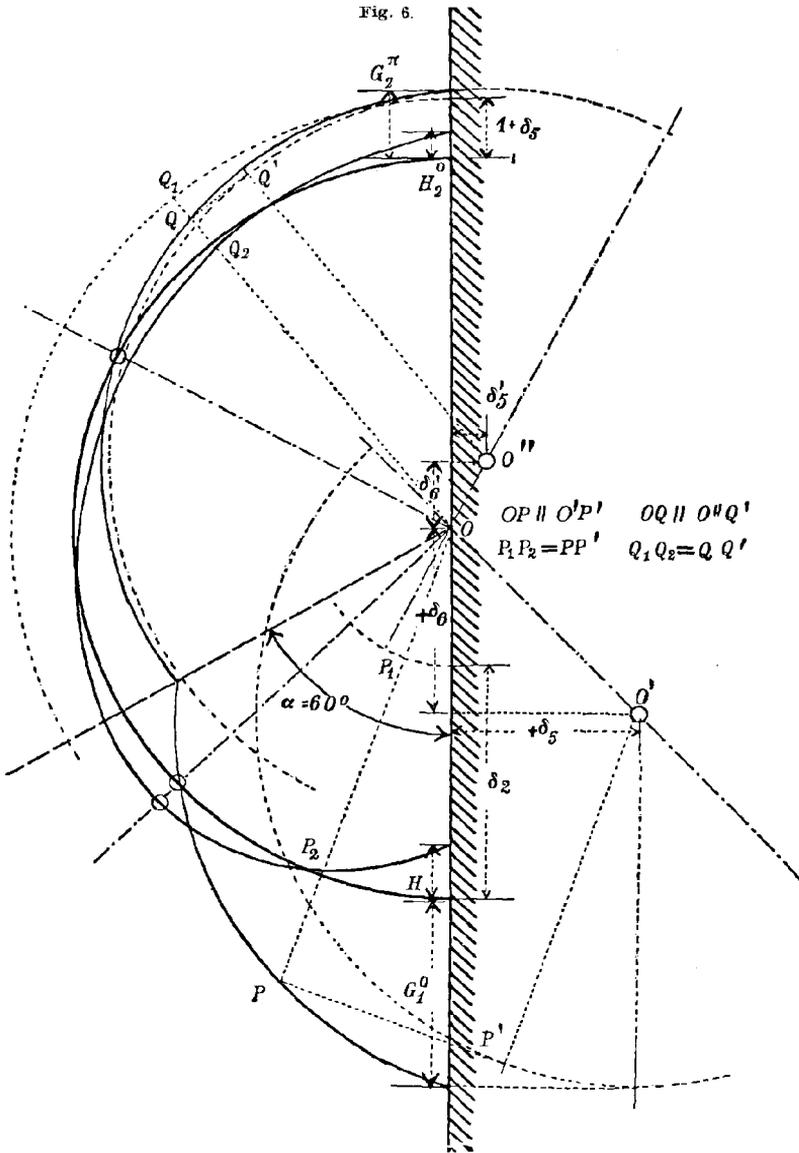
$$G = \frac{dH}{d\varphi}$$

zeigt, daß das Drehmoment an den Nullstellen des Biegemomentes extreme Werte besitzt, und zwar für

$$\varphi = 46^{\circ} 9', \quad H_1 = - 0,0844 Pr$$

und

$$\pi - \varphi = 64^{\circ} 51', \quad H_2 = + 0,0511 Pr.$$



Zur Konstruktion der Momentenlinien soll folgendes bemerkt werden: Besteht die Belastung aus einer Einzellast, deren Angriffspunkt am Balkenträger durch den Winkel  $\varphi = \alpha$  festgelegt ist, so sind im ersten Bogenfelde die Momente allgemein gemäß (21) darstellbar durch:

$$G_1 = Pr(\delta_5 \sin \varphi - \delta_6 \cos \varphi)$$

$$H_1 = Pr[-\delta_2 - (\delta_5 \cos \varphi + \delta_6 \sin \varphi)]$$

und im zweiten Felde durch:

$$G_2 = Pr (\delta'_5 \sin \varphi - \delta'_6 \cos \varphi)$$

$$H_2 = Pr [-(1 + \delta_2) - (\delta'_5 \cos \varphi + \delta'_6 \sin \varphi)],$$

wobei:

$$\delta_5 = \frac{1-t}{a_2} C_5; \quad \delta_6 = \frac{1-t}{a_2} C_6; \quad \delta_2 = \frac{C_7}{a_2};$$

$$\delta'_5 = \delta_5 - \cos \alpha; \quad \delta'_6 = \delta_6 - \sin \alpha.$$

Wir tragen die positiven (negativen) Momente radial nach innen (außen) auf.

Dann drücken obige Gleichungen offenbar folgendes aus: Wird der zur Darstellung des Balkenträgers verwendete Kreis vom Halbmesser  $r$  verschoben, und zwar in Richtung  $\varphi = 0$  um  $\delta_6$  ( $\delta'_6$ ), in der hierzu senkrechten Richtung um  $\delta_5$  ( $\delta'_5$ ), zerlegt man hierauf die Bewegung jedes Punktes des Kreises in eine radiale und tangentielle Komponente und vervielfältigt jede mit  $Pr$ , so ergibt erstere das Biegemoment  $G$ , letztere nach Hinzufügung des Wertes  $\delta_2$ ,  $(1 + \delta_2)$ , das Drehmoment. (Die in Klammern gemachten Angaben beziehen sich auf das zweite Feld, wo  $2\pi > \varphi > \alpha$ ). Die Einflußlinien für das Biegemoment und Drehmoment bei der Laststellung  $\alpha = 60^\circ$  sind in Fig. 6 dargestellt, worin auch die eben beschriebene Konstruktion angedeutet ist.

#### IV. Kreisring konstanten Querschnittes.

Ein Kreisring konstanten Querschnittes wird bei  $A$  (Fig. 7) durchgeschnitten und zu beiden Seiten der Schnittstelle von zwei entgegengesetzt gleichen, zur Ringebene senkrechten Kräften  $P$  beansprucht; um wieviel verschiebt sich hierbei ein beliebiges Bogenelement aus der Ringebene?

Offenbar gilt für  $\varphi = 0$ :

$$G = 0, \quad H = 0, \quad N' = P.$$

Damit erhält man aus den Gl. (21):

$$C_6 = 0; \quad C_2 = \frac{Pr^3}{C};$$

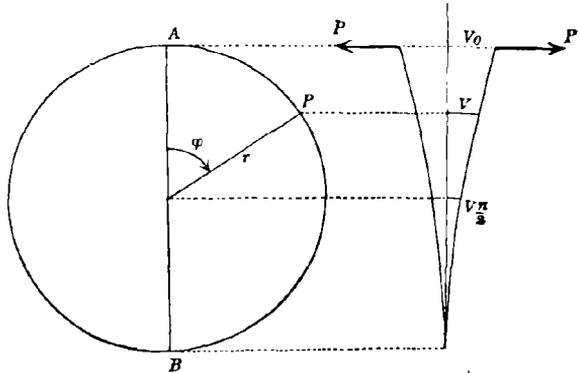
$$C_5 = \frac{n+1}{2n} C_2 = \frac{A+C}{2AC} \cdot Pr^3,$$

so daß allgemein an der Stelle  $P$ :

$$\text{ein Biegemoment } G = \frac{2AC}{r^2(A+C)} C_5 \sin \varphi = Pr \sin \varphi,$$

$$\text{und ein Drehmoment } H = \frac{C}{r^2} \left[ C_2 - \frac{2n}{n+1} C_5 \cos \varphi \right] = Pr(1 - \cos \varphi)$$

Fig. 7.



wirkt, was auch unmittelbar der Fig. 7 entnommen werden kann. Da bei der angegebenen Belastung an der Stelle  $B$  (wo  $\varphi = \pi$ ):

$$v = 0, \quad \frac{dv}{d\varphi} = 0 \text{ und } \beta = 0 \text{ ist,}$$

so erhält man aus (18) bzw. (21) die drei weiteren Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2\pi - C_3 - C_5\pi &= 0 \\ C_2 - (C_4 + C_5) &= 0 \\ C_3 + C_5\pi &= 0, \end{aligned}$$

wonach:

$$C_3 = -\pi C_5; \quad C_4 = \frac{1-n}{1+n} C_5; \quad C_1 = -\pi C_2 \text{ ist.}$$

Nun erhält man aus (18) die gesuchte Verschiebung  $v$ ; sie beträgt:

$$v = \frac{Pr^3}{C} \left[ (\varphi - \pi) \left( 1 + \frac{A+C}{2A} \cos \varphi \right) + \frac{C-A}{2A} \sin \varphi \right].$$

Der Ring öffnet sich daher bei  $A$  um den Betrag:

$$2v_0 = 2 \frac{Pr^3}{C} \pi \left( 1 + \frac{A+C}{2A} \right) = \pi \frac{Pr^3}{A} \left( 1 + \frac{3A}{C} \right).$$

Ist der Ringquerschnitt ein Kreis, so ergibt sich wegen:

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} &= \frac{EI_1}{G \cdot Ip} = \frac{m+1}{m} \quad (\text{wo } m \text{ die Ziffer der Querkontraktion}), \\ 2v_0 &= \pi \cdot \frac{Pr^3}{EI_1} \left( 1 + 3 \frac{m+1}{m} \right). \end{aligned}$$

Die Verschiebung im Ringviertel ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) beträgt, absolut genommen:

$$v_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr^3}{2A} \left[ (1 + \pi) \frac{A}{C} - 1 \right].$$

Bei kreisrundem Querschnitte liefert diese Formel:

$$v_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr^3}{2EI_1} \left[ (1 + \pi) \frac{1+m}{m} - 1 \right].$$

Wird  $m = \frac{10}{3}$  gesetzt, so ist demnach:

$$\begin{aligned} v_0 &= 7,683 \frac{Pr^3}{EI_1} \\ v_{\frac{\pi}{2}} &= 2,191 \frac{Pr^3}{EI_1}. \end{aligned}$$

## V. Der beliebig gestützte Kreisbogen.

Die folgende allgemeine Untersuchung bezieht sich auf die Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Kreisbogens, der auf beliebig vielen Stützen aufruhrt.

1) Man vgl. die Ausführungen auf S. 62.

2) Übereinstimmend mit Müller-Breslau: Neuere Methoden der Festigkeitslehre.

Hierbei ist zunächst zu beachten, daß für die senkrecht zur Kreisebene gemessene Einsenkung  $v$  gemäß Gl. (12) ein allgemeines Integral mit sechs gewissen Konstanten besteht, und daß dasselbe solange unverändert gilt, als die elastischen Größen (Schubkraft, Biegungs- und Drehmoment) keine plötzlichen Änderungen erfahren, wie sie etwa durch Hinzutreten einer äußeren Kraft von endlicher Größe oder durch eine Stützenwirkung hervorgebracht werden können.

Die Stützpunkte und Angriffspunkte äußerer Kräfte stellen sonach für die genannten elastischen Werte Unstetigkeitsstellen vor, und es ist klar, daß im allgemeinen die Formänderung jedes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Unstetigkeitsstellen liegenden Bogenteiles (eines Feldes) durch ein Integral  $v$  mit sechs Konstanten gegeben ist, so daß — wenn  $q$  die Anzahl der Felder —  $6q$  Konstante zu ermitteln sind. Wir werden zeigen, daß stets die hierzu erforderliche Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden ist.

Betrachten wir die  $k^{\text{te}}$  Stütze, so ist das Gleichgewicht der Kräfte, die an dem dort befindlichen Bogenelemente angreifen, ausgedrückt durch:

$$(23) \quad \begin{cases} N_{k,1} - N_{k-1,2} + P_k = 0 \\ G_{k,1} - G_{k-1,2} + g_k = 0 \\ H_{k,1} - H_{k-1,2} + h_k = 0, \end{cases}$$

wobei die Indices 1 und 2 den Ursprung, bzw. das Ende eines Feldes kennzeichnen, während  $P_k$ ,  $g_k$ ,  $h_k$ , die lotrechte Stützenkraft, das Biegungs- und Drehmoment an der  $k^{\text{ten}}$  Stütze darstellen. Diese Gleichungen gelten für jede Unstetigkeitsstelle; ist diese der Angriffspunkt einer äußeren Kraft  $P_k$ , dann ist  $g_k$  und  $h_k$  gleich Null zu setzen<sup>1)</sup>; handelt es sich hingegen um eine Stütze, so stellen  $P$ ,  $g$ ,  $h$  die allgemein von der Elastizität der Stütze abhängigen Stützenreaktionen vor, die als lineare Funktionen der Formänderung des entsprechenden Bogenelementes angenommen werden können.

Die Bedingung, daß die  $q$  Felder zusammen ein Ganzes bilden, liefert an jeder Unstetigkeitsstelle die drei Gleichungen:

$$(24) \quad \begin{cases} v_{k,1} - v_{k-1,2} = 0 \\ \left(\frac{dv_k}{d\varphi}\right)_1 - \left(\frac{dv_{k-1}}{d\varphi}\right)_2 = 0 \\ \beta_{k,1} - \beta_{k-1,2} = 0. \end{cases}$$

Hiermit sind, ohne daß neue Unbekannte in die Untersuchung eingeführt wurden, sechs lineare Gleichungen aufgestellt, die für jede Un-

1) Dieser Fall wurde im Abschnitte II ausführlich behandelt.

stetigkeitsstelle gelten; bei  $q$  Feldern stehen demnach  $6q$  Gleichungen zur Berechnung von ebensovielen Unbekannten zur Verfügung.

Bei Weiterführung der Betrachtung werde angenommen, daß die Stütze unelastisch sei und keine Verschiebung erleide. Dann sind die beiden Fälle freier Auflagerung und vollkommener Einspannung des Kreisbogens an der Stütze zu unterscheiden.

a) Bei freier Auflagerung gilt offenbar:

$$\begin{aligned} v_{k,1} = v_{k-1,2} = 0; & & N_{k,1} - N_{k-1,2} + P_k = 0; \\ \left(\frac{dv_k}{d\varphi}\right)_1 - \left(\frac{dv_{k-1}}{d\varphi}\right)_2 = 0; & & G_{k,1} - G_{k-1,2} = 0; \\ \beta_{k,1} - \beta_{k-1,2} = 0; & & H_{k,1} - H_{k-1,2} = 0; \end{aligned}$$

Hierin ist  $P_k$  der unbekannte, von der Formänderung unabhängige Auflagerdruck; es entstehen also anstatt sechs Unbekannter deren sieben, dafür hat sich auch die Zahl der Gleichungen auf sieben erhöht.

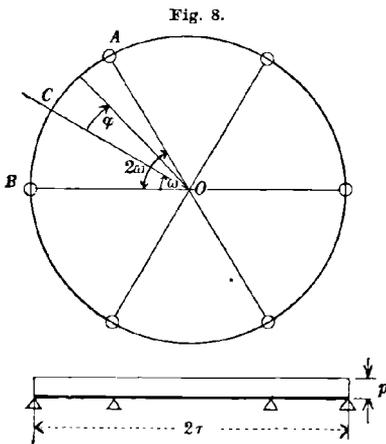
b) Im Falle vollkommener Einspannung ist zu setzen:

$$\begin{aligned} v_{k,1} = v_{k-1,2} = 0; & & N_{k,1} - N_{k-1,2} + P_k = 0; \\ \left(\frac{dv_k}{d\varphi}\right)_1 = \left(\frac{dv_{k-1}}{d\varphi}\right)_2 = 0; & & G_{k,1} - G_{k-1,2} + g_k = 0; \\ \beta_{k,1} = \beta_{k-1,2} = 0; & & H_{k,1} - H_{k-1,2} + h_k = 0. \end{aligned}$$

Bei dieser Lagerung entstehen an der Stütze drei von der Formänderung unabhängige Stützenwiderstände, nämlich eine Auflagerkraft und zwei Momente, so daß also zusammen neun Unbekannte zu bestimmen sind; ebensoviele Bedingungsgleichungen haben wir aber auch aufgestellt. Bei Anwendung dieser Theorie in praktischen Fällen wird die Konstantenbestimmung mit Rücksicht auf die stets vorhandene Symmetrie in der Verteilung der Belastung und der Stützpunkte eine erhebliche Vereinfachung erfahren.

Beispiel: Einigem Interesse dürfte z. B. die Berechnung eines vollen Kreisringes begegnen, der in einigen Punkten seines Umfanges gestützt ist und eine darüber gleichmäßig verteilte, zur Ringebene senkrechte Belastung  $p$  trägt (Fig. 8).

Angenommen werde, daß die  $q$  Stützpunkte gleichweit voneinander entfernt seien und daß je zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten ein Zentriwinkel  $2\omega = \frac{2\pi}{q}$  entspreche, wobei  $q$  eine gerade Zahl sei.



Die Senkung  $v$  der Elemente des ersten Feldes  $AB$  beträgt nach III, (3):

$$(25) \quad v_1 = C_1 + C_2 \varphi + v \frac{\varphi^2}{2} + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \varphi \cos \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi,$$

worin:

$$v = -\frac{pr^4}{C}$$

und  $C_1, C_2, \dots, C_6$  die sechs Integrationskonstanten bedeuten.

Zu deren Ermittlung dient die Erwägung, daß zufolge der Symmetrie der Stützung und Belastung um den für die Messung des Winkels  $\varphi$  gewählten Fahrstrahl  $OC$  folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$N_1 = 0; \quad H_1 = 0; \quad \frac{dv_1}{d\varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = 0;$$

$$v_1 = 0; \quad \frac{dv_1}{d\varphi} = 0 \quad \text{für } \varphi = \omega.$$

Als sechste Bedingung können wir hinzufügen, daß das Drehmoment in der Mitte des zweiten Feldes ( $H_{2\omega}$ ) verschwinden muß.

Unter Beachtnahme auf die Lösung (25) findet man:

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = v\varphi + C_2 + (C_6 - C_3) \sin \varphi + (C_5 + C_4) \cos \varphi - C_5 \varphi \sin \varphi + C_6 \varphi \cos \varphi$$

$$N' = -pr\varphi + \frac{CC_2}{r^3}$$

$$H = -pr^2\varphi + \frac{CC_2}{r^2} - \frac{2A}{r^2(n+1)} (C_6 \sin \varphi + C_5 \cos \varphi),$$

$$G = -pr^2 - \frac{2A}{r^2(n+1)} (C_6 \cos \varphi - C_5 \sin \varphi).$$

Die Berechnung des Drehmomentes  $H$  im zweiten Felde geschieht nach der zweiten der Gleichungen (22), da die dort gemachte Annahme: an der gemeinsamen Stelle zweier aufeinanderfolgender Felder wirke eine zum Bogen senkrechte Einzellast, hier erfüllt ist. Der Wert  $P$  dieser Einzellast — d. i. des Stützendrucks — folgt sofort aus der Gleichsetzung der in den Mitten zweier Felder entstehenden Schubkräfte; (wo  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\omega$ ).

$$\frac{CC_2}{r^3} = -pr \cdot 2\omega + \frac{CC_2}{r^3} - P;$$

daher:

$$P = -2pr\omega.$$

Die drei ersten der vorhin genannten Bedingungen sind nun ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} \frac{CC_2}{r^3} &= 0 \\ \frac{CC_2}{r^2} - \frac{2A}{r^2(n+1)} C_5 &= 0 \\ C_6 + C_4 &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$C_2 = C_4 = C_5 = 0,$$

was mit Rücksicht auf die Symmetrie des Formänderungszustandes um die Achse  $OC$  zu erwarten war. Daher vereinfachen sich die drei übrigen Bedingungen zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \nu \frac{\omega^2}{2} + C_1 + C_3 \cos \omega + C_6 \omega \sin \omega \\ 0 &= \nu \omega + (C_6 - C_3) \sin \omega + C_6 \omega \cos \omega \\ 0 &= -pr^2 2\omega - \frac{2A}{r^2(n+1)} C_6 \sin 2\omega + pr^2 \cdot 2\omega + Pr \cos \omega. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} C_6 &= \nu \frac{n+1}{2n} \frac{\omega}{\sin \omega}; \\ C_3 &= \nu \frac{\omega}{\sin \omega} + C_6 \left(1 + \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \omega\right); \\ C_1 &= -\nu \frac{\omega^2}{2} - \nu \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \omega - C_6 \left(\cos \omega + \frac{\omega}{\sin \omega}\right). \end{aligned}$$

Da die Konstanten ermittelt sind, so ist die Aufgabe allgemein gelöst. Für die Zwecke der Anwendung werden die folgenden Angaben von Wert sein.

Da das Biegemoment an beliebiger Stelle des ersten Feldes ausgedrückt war durch:

$$G = -pr^3 - \frac{2A}{r^2(n+1)} (C_6 \cos \varphi - C_3 \sin \varphi),$$

so liefert die Substitution von  $C_6$  und  $C_3$  nunmehr den Wert:

$$G = -pr^3 \left(1 - \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \varphi\right).^1)$$

Demnach wirken an den Auflagerstellen Biegemomente vom Betrage:

$$G_\omega = -pr^3 (1 - \omega \cotg \omega),$$

1) Der allgemeine Ausdruck für das Biegemoment im Mittenquerschnitte des  $k^{\text{ten}}$  Feldes lautet nach (22):

$$G_{2k\omega} = -pr^3 - \frac{Pr}{2 \sin \omega} \cos 2k\omega - Pr [\sin(2k-1)\omega + \sin(2k-3)\omega + \dots + \sin \omega];$$

die Symmetrie der Anordnung verlangt, daß dieser Wert gleich  $G_0$  sei, woraus man wegen:

$$G_0 = -pr^3 - \frac{Pr}{2 \sin \omega}$$

sofort den Summenwert nachstehender Reihe erhält:

$$\sin(2k-1)\omega + \sin(2k-3)\omega + \dots + \sin \omega = \frac{1 - \cos 2k\omega}{2 \sin \omega}.$$

während im Querschnitte  $C$  ein solches vom Betrage:

$$G_0 = -pr^2 \left(1 - \frac{\omega}{\sin \omega}\right)$$

herrscht, wobei stets:

$$|G_\omega| > |G_0|.$$

$G_\omega$  stellt übrigens auch zugleich das absolut größte Biegemoment dar.

Das Drehmoment  $H$  im ersten Felde hatten wir berechnet zu:

$$H = -pr^2\varphi + \frac{CC_2}{r^2} - \frac{2A}{r^2(n+1)}(C_6 \sin \varphi + C_5 \cos \varphi),$$

woraus mit Rücksicht auf die Werte der Konstanten  $C_2$ ,  $C_6$  und  $C_5$  folgt:

$$H = -pr^2 \left(\varphi - \frac{\omega}{\sin \omega} \sin \varphi\right).^{1)}$$

Hiernach verschwinden die Drehmomente ebenso an den Stützen wie in den Symmetrieebenen. Extreme Werte des Drehmoments sind bestimmt durch:

$$\frac{dH}{d\varphi} = G = 0,$$

so daß sich deren Ort berechnet aus:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Gemäß (25) senkt sich das Bogenelement an der Stelle  $\varphi$  um:

$$v = \frac{pr^4}{2C} \left\{ (\omega^2 - \varphi^2) - \frac{\omega}{\sin^2 \omega} \frac{n+1}{n} \left[ (\omega \cos \omega \cos \varphi + \varphi \sin \omega \sin \varphi - \omega) + \frac{3n+1}{n+1} \sin \omega (\cos \varphi - \cos \omega) \right] \right\}.$$

Hiernach beträgt die Senkung in der Mitte der Felder:

$$v_0 = \frac{pr^4}{2C} \left\{ \omega^2 - \frac{\omega(1 - \cos \omega)}{\sin^2 \omega} \left( \frac{3n+1}{n} \sin \omega - \frac{n+1}{n} \omega \right) \right\};$$

dieser Wert stellt auch die größte Senkung dar, weil für  $\varphi = 0$ :

$$\frac{dv}{d\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2v}{d\varphi^2} < 0.$$

1) Der allgemeine Ausdruck für das Drehmoment im Mittenquerschnitte des  $k$ ten Feldes lautet nach (22):

$$H_{2k\omega} = Pr \left[ -\frac{\sin 2k\omega \cos \omega}{2 \sin \omega} + \cos(2k-1)\omega + \cos(2k-3)\omega + \dots + \cos \omega \right].$$

Da dieser Wert der Symmetrie zufolge verschwinden muß, so erhält man sofort den Summenwert nachstehender Reihe:

$$\cos(2k-1)\omega + \cos(2k-3)\omega + \dots + \cos \omega = \frac{\sin 2k\omega \cos \omega}{2 \sin \omega}.$$

Ähnliche Überlegungen können auch hinsichtlich der Werte  $v$  und  $\beta$  angestellt werden.

In nachstehender Tabelle sind die Sonderwerte der gewonnenen Ergebnisse angeführt, die sich bei Auflagerung des Kreisringes an zwei, vier und sechs Stellen ergeben.<sup>1)</sup>

$\omega$	$-G : pr^2$	$-H : pr^2$	$G_0 : pr^2$	$G_\omega : pr^2$	$\varphi_1$	$H_{\max} : pr^2$	$v_0 : pr^4$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - \frac{\pi}{2} \cos \varphi$	$\varphi - \frac{\pi}{2} \sin \varphi$	0·5708	-1·00	49° 21'	+ 0·2579	$\frac{0\ 4483}{A} + \frac{0\ 1112}{C}$
$\frac{\pi}{4}$	$1 - \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \cos \varphi$	$\varphi - \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \sin \varphi$	0·1107	-0·2146	25° 48'	0·0331	$\frac{0\ 0180}{A} + \frac{0\ 0098}{C}$
$\frac{\pi}{6}$	$1 - \frac{\pi}{3} \cos \varphi$	$\varphi - \frac{\pi}{3} \sin \varphi$	0·0472	-0·0931	17° 16'	0·0095	$\frac{0\ 0033}{A} + \frac{0\ 0001}{C}$

Die in diesem Abschnitte entwickelten Formeln ermöglichen u. a. die Berechnung der *Auflageringe von Hochbehältern*, bei denen das Traggestelle in einzelne Pfeiler aufgelöst ist und die Belastung des Behälters durch den, die Pfeilerköpfe verbindenden Auflagering auf die Pfeiler und Fundamente übertragen wird.

(Man vgl. hierzu: Handbuch für Eisenbetonbau v. Dr. Ing. Emperger, Band V, „Flüssigkeitsbehälter“, 1910, S. 382 ff.)

Der Vollständigkeit wegen seien noch einige Bemerkungen über die Werte *A* und *C* angefügt.

Bezeichnet *E* den Elastizitätskoeffizienten des Bogenmaterials und *I*<sub>1</sub> das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes bezüglich der zur Belastungsrichtung senkrechten Schwerachse, so ist die Biegungsteifigkeit *A* gegeben durch:

$$A = EI_1.$$

Bezeichnet weiter *G* den Koeffizienten der Schubelastizität, der sich aus der Formel:

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E, \quad (m = \text{Ziffer der Querkontraktion})$$

ermittelt, und *I*<sub>p</sub> das polare Trägheitsmoment des Querschnittes bezüglich der in seinem Schwerpunkte errichteten Senkrechten, dann gilt beim kreisrunden Querschnitte für die Drillungsteifigkeit:

$$C = G \cdot I_p.$$

Saint-Venant<sup>2)</sup> hat das Drillungsmoment und die Drillungsteifigkeit für eine Reihe anderer Querschnitte berechnet und hierbei gefunden, daß sich eine gute Näherungsformel für die Torsionsfestigkeit eines

1) Der Sonderfall:  $\omega = \frac{\pi}{4}$  wurde hinsichtlich der Bestimmung der äußeren Angriffsmomente behandelt in der „Wochenschrift f. den öff. Baudienst“, 1905, S. 11.

2) Comptes rendus 1879, Band 88, S. 143.

Prismas ergibt, wenn dessen Querschnitt durch eine Ellipse von gleichem Inhalte  $F$  und gleichem polaren Trägheitsmomente  $I_p$  ersetzt wird. Hiernach ist also für beliebigen Querschnitt  $I_p$  durch  $I_p'$  zu ersetzen, wobei:

$$I_p' = \frac{F^4}{4\pi^2 I_p} = \frac{F^4}{40 I_p}.$$

Die Konstante  $n = \frac{A}{C}$  geht mit Beachtung dieser Werte über in:

$$n = \frac{E I_1}{G \cdot I_p'} = \frac{E I_1 I_p}{G \cdot F^4} \cdot 40.$$

Für Eisen gilt, wegen  $m = \frac{10}{3}$ :

$$(26) \quad n = 104 \cdot \frac{I_1 I_p}{F^4}.$$

In seiner beachtenswerten Abhandlung: „Das Torsionsproblem und die Berechnung elastischer Erkerträger“<sup>1)</sup> warnt Zschetzsche vor der Anwendung der Formel von Saint-Venant für die mit Ecken begabten Profile und empfiehlt, für  $I_p'$  in seiner Bedeutung als Trägheitsmoment zum Torsionsfalle zu setzen:

$$I_p' = \frac{I_p}{\alpha}$$

und erklärt hinsichtlich des Beiwertes  $\alpha$  „daß derselbe bei den in der Praxis zu berücksichtigenden Torsionsfällen zwischen 1 und 2 schwanken dürfte“. Für Querschnitte mit wenig verschiedenen Hauptträgheitsmomenten wird für  $\alpha$  der Wert Eins als zureichend richtig angegeben.

## Über ein Problem der Wärmeleitung und dessen Anwendung auf die Theorie des solaren Klimas.

Von M. MILANKOVITCH in Belgrad.

### Inhaltsangabe.

In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst das folgende Problem der Wärmeleitung behandelt:

Eine der beiden Begrenzungsebenen einer unendlich ausgebreiteten Platte endlicher Dicke wird auf einer konstanten Temperatur gehalten, während die andere periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist, welche sich als Superposition zweier harmonischer Änderungen von verschiedener Periode darstellen lassen. Man soll die Temperaturschwankungen im Innern der Platte bestimmen.

1) Vgl. die Fußnote auf S. 40 dieser Arbeit.

Nach Erledigung dieses Problems werden die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie des solaren Klimas angewendet, unter welchem bekanntlich jenes hypothetische Klima verstanden wird, welches sich auf der überall fest gedachten Erdoberfläche einstellen würde, wenn diese von keiner Atmosphäre umgeben wäre.

Der zweite Teil der Abhandlung befaßt sich mit der Bestimmung der Temperaturänderungen, welche sich unter den vorher angegebenen Voraussetzungen auf einer beliebig gewählten Stelle der Erdoberfläche einstellen würden.

Trabert<sup>1)</sup> hat eine diesbezügliche Berechnung angestellt unter der Annahme, daß die Temperatur der Erdoberfläche das Ergebnis folgender zweier Wärmebewegungen ist: der Wärmezufuhr durch die Sonnenstrahlung und der Wärmeabfuhr infolge der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum. Die Bedingung, daß sich die Einstrahlung und die Ausstrahlung das Gleichgewicht halten müssen, ergibt die mittlere Temperatur des in Betracht gezogenen Zeitraumes.<sup>2)</sup> Die Bewegung der Wärmemengen von der Oberfläche der Erde gegen das Innere und umgekehrt als eine Folge der Wärmeleitung hat Trabert bei seinen Berechnungen nicht in Betracht gezogen. Indessen ist der Einfluß der Wärmeleitung nicht zu vernachlässigen, und es ist leicht zu ersehen, in welchem Sinne sich dieser geltend machen wird.

Es ist eine bekannte Tatsache, und sie folgt auch aus der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung, daß die Temperaturschwankungen der Erdoberfläche in einer ziemlich geringen Tiefe nicht mehr wahrnehmbar sind. So kann man nach Trabert<sup>3)</sup> annehmen, daß sie im festen Lande in einer Tiefe von 10 m verschwindend klein werden. Es braucht demnach bei der Untersuchung der Bewegung der Wärmemengen infolge der Leitung nur die oberste Schichte der Erdkruste mit einer Dicke von 10 m in Betracht gezogen zu werden. Die untere Fläche dieser Schichte hat auf einer beliebig gewählten Stelle der Erde eine konstante Temperatur, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Temperaturänderungen der Oberfläche haben einen doppelt oszillatorischen Charakter, indem sie die Superposition der täglichen und der jährlichen Änderungen darstellen. Im Sommer wird die mittlere tägliche Temperatur der Oberfläche höher sein als die Temperatur, auf welcher die untere Begrenzungsfläche der betrachteten Schichte konstant gehalten wird, und es

1) Trabert, Das „solare“ Klima. Meteor. Zeitschr. 1894, S. 425.

2) Siehe auch: Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 487.

3) Ebenda S. 502.

wird sich demnach in dieser Jahreszeit ein Wärmefluß von der Oberfläche gegen das Innere der Erde einstellen, was zur Folge haben wird, daß die Temperatur der Erdoberfläche niedriger sein wird als sie ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung wäre. Das Umgekehrte wird im Winter eintreten.

Die Wärmeleitung vermindert demnach die Amplitude der Temperaturschwankungen und ihr Einfluß kann unter Umständen sehr bedeutend sein. Trabert, der diesen Einfluß nicht berücksichtigte, gibt z. B. in der vorher erwähnten Abhandlung die mittleren Temperaturen des kältesten bzw. des wärmsten Monats am Pole mit  $-273^{\circ}\text{C}$ , bzw.  $+82^{\circ}\text{C}$  an. Wird die Wärmeleitung berücksichtigt, so ergeben sich bedeutend kleinere Temperaturschwankungen und es erweist sich die Notwendigkeit, bei der Bestimmung der Temperaturen des solaren Klimas auch den Einfluß der Wärmeleitung in Betracht zu ziehen. Das Endziel dieser Abhandlung ist die quantitative Bestimmung dieses Einflusses und der Entwurf einer Theorie des solaren Klimas, welche diesen Einfluß berücksichtigt.

### Das Problem der Wärmeleitung.

Um das eingangs formulierte Problem der Wärmeleitung zu lösen, wird vor allem die Fouriersche Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

heranzuziehen sein. In derselben bedeutet  $x$  die Entfernung eines beliebigen Punktes im Innern der Platte von jener Begrenzungsebene, welche periodischen Temperaturänderungen unterworfen ist,  $u$  die Temperatur dieses Punktes zur Zeit  $t$  und  $K^2$  den Temperatur-Leistungskoeffizienten der Platte. Bezeichnen wir mit  $k$  die Wärmeleitfähigkeit, mit  $c$  die spezifische Wärme und mit  $\rho$  die Dichtigkeit der Substanz der Platte, so besteht die Beziehung:

$$K^2 = \frac{k}{c\rho}.$$

Die Begrenzungsebene  $x = 0$  der Platte sei periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche durch den Ausdruck:

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

darstellbar sind, worin  $u_0$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $\tau$  und  $t_0$  Konstanten bezeichnen. Diese Temperaturveränderungen sind also eine Superposition zweier harmonischer Oszillationen, und wir nehmen an, daß die Periode  $T$  der lang-

sameren Oszillation bedeutend größer ist als die Periode  $\tau$  der schnelleren Oszillation, so zwar, daß der Quotient

$$\frac{\tau}{T}$$

eine sehr kleine Zahl ist.

Die Amplitude  $A$  der langsamen Oszillation ist konstant, die Amplitude  $a$  der schnelleren Oszillation kann sich mit der Zeit langsam ändern, doch so, daß der Differentialquotient

$$\frac{da}{dt}$$

immer eine sehr kleine Zahl bleibt.

Die Dicke der Platte sei  $h$ . Diese Größe soll der Bedingung genügen, daß der Ausdruck

$$e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

ebenfalls eine sehr kleine Zahl ist.

Die andere Begrenzungsebene  $x = h$  der Platte soll auf der konstanten Temperatur  $v_0$  gehalten werden. Unsere Aufgabe ist demnach die folgende:

Man finde das Integral der Gleichung (1), welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet:

$$(2) \begin{cases} \text{für } x = 0 \\ u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \text{für } x = h \\ u = v_0. \end{cases}$$

Dabei sind die Größen:

$$\frac{\tau}{T}, \quad \frac{da}{dt}, \quad e^{-\frac{h}{K}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

gegenüber den übrigen sehr klein.

Setzen wir:

$$(4) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} [v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0)] + a e^{\alpha t + \beta x}.$$

Diese Funktion genügt bei entsprechender Wahl der Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  der Gleichung (1), denn es ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} A \left( \frac{x}{h} - 1 \right) \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + e^{\alpha t + \beta x} \frac{da}{dt} + \alpha a e^{\alpha t + \beta x}.$$

Da jedoch sowohl  $\frac{A}{T}$  als auch  $\frac{da}{dt}$  sehr klein sind, so können die ersten zwei Glieder der rechten Seite vernachlässigt werden, so daß:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \alpha e^{\alpha t + \beta x}.$$

Es ist weiter:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \beta^2 e^{\alpha t + \beta x}.$$

Setzen wir die Ausdrücke (5) und (6) in die Gleichung (1) ein, so sehen wir, daß diese befriedigt sein wird, wenn die Beziehung besteht:

$$\alpha = K^2 \beta^2.$$

Nehmen wir an,  $\beta$  sei komplex, d. h. setzen wir statt  $\beta$  die Ausdrücke:

$$p + i\beta, \quad p - i\beta$$

und statt  $\alpha$ :

$$K^2(p + i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) + 2i\beta p K^2$$

$$K^2(p - i\beta)^2 = K^2(p^2 - \beta^2) - 2i\beta p K^2.$$

Dann können wir die Größe:

$$e^{\alpha t + \beta x}$$

durch eine der folgenden zwei ersetzen:

$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + 2i\beta p K^2 t + p x + i\beta x}$$

$$e^{K^2(p^2 - \beta^2)t - 2i\beta p K^2 t + p x - i\beta x},$$

oder, noch allgemeiner, durch deren Summe, nachdem wir die erste mit einer willkürlichen Konstanten  $C'$ , die zweite mit  $C''$  multipliziert haben. Infolgedessen kann dem letzten Gliede der Gleichung (4) folgende Form gegeben werden:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + p x} \{ C' e^{i\beta(x + 2pK^2t)} + C'' e^{-i\beta(x + 2pK^2t)} \},$$

oder mit Rücksicht auf die Eulerschen Formeln:

$$a e^{K^2(p^2 - \beta^2)t + p x} \{ (C' + C'') \cos \beta(x + 2pK^2t) + i(C' - C'') \sin \beta(x + 2pK^2t) \}$$

Setzen wir

$$C' + C'' = C_1, \quad i(C' - C'') = C_2,$$

wo demnach  $C_1$  und  $C_2$  wieder zwei willkürliche Konstanten bedeuten, und außerdem:

$$p = \beta,$$

so kann der durch die Gleichung (4) dargestellten Funktion folgende Form gegeben werden:

$$(7) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} \left[ v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right] \\ + a e^{p x} \{ C \cos(p x + 2p^2 K^2 t) + C_2 \sin(p x + 2p^2 K^2 t) \}.$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (1) und hat eine solche Form, daß sie bei entsprechender Wahl der Konstanten auch den Grenzbedingungen (2) und (3) Genüge leistet; denn setzen wir:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad p = -\frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}},$$

so erhalten wir:

$$(8) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{x}{h} \left[ v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \right] + a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right).$$

Setzen wir in dieser Gleichung  $x = 0$ , so erhalten wir:

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t,$$

d. h. die Funktion (8) befriedigt die Grenzbedingung (2). Setzen wir in (8)  $x = h$ , so erhalten wir:

$$u = v_0 + a e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right).$$

Da aber

$$e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sehr klein ist, so ist mit großer Annäherung:

$$u = v_0,$$

und die Grenzbedingung (3) ist somit auch befriedigt.

Es stellt demnach die Gleichung (8) das gesuchte Integral der partiellen Differentialgleichung (1) dar und gibt das Gesetz an, nach welchem die Temperaturen in der Platte mit der Tiefe  $x$  und der Zeit  $t$  variieren.

Ziehen wir die Temperaturänderungen in Betracht, welche während des kurzen Zeitintervalles  $\tau$  in der Tiefe  $x$  stattfinden, so können während dieses Intervalles die Größen:

$$(9) \quad A \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = m$$

und  $a$  als konstant angenommen werden, da sich  $m$  und  $a$  mit der Zeit langsam ändern. Die mittlere Temperatur  $u_x$  des Intervalles  $\tau$  ist dann:

$$u_x = \frac{1}{\tau} \int_{t - \frac{\tau}{2}}^{t + \frac{\tau}{2}} u dt$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (8) und die vorstehenden Bezeichnungen:

$$u_x = u_0 + m + \frac{x}{h} [v_0 - u_0 - m] + \frac{a}{\tau} e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) dt.$$

Da aber

$$\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right) dt = 0$$

ist, so ist die mittlere Temperatur des Intervalles  $\tau$  in der Tiefe  $x$  gegeben durch die Gleichung:

$$(10) \quad u_x = u_0 + m + \frac{v_0 - u_0 - m}{h} x,$$

welche besagt, daß sich die mittleren Temperaturen  $u_x$  mit der Tiefe  $x$  linear ändern.

Tragen wir demnach in einem orthogonalen Koordinatensystem als Abszissen die Tiefen  $x$  und als Ordinaten die entsprechenden mittleren Temperaturen  $u_x$  auf, so stellt uns die Gerade  $ML$  die Abhängigkeit der mittleren Temperaturen von der Tiefe  $x$  während eines gewählten Intervalles  $\tau$  dar. Die Ordinate des Punktes  $M$  ist  $(u_0 + m)$ , die Abszisse des Punktes  $L$  ist  $h$  und seine Ordinate  $v_0$ .

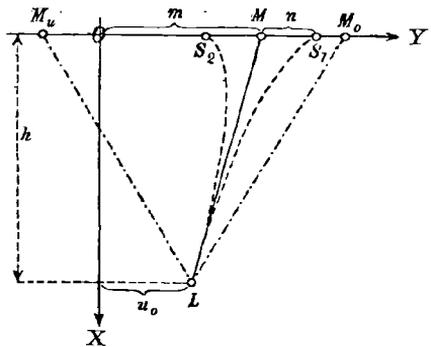
Der Gleichung (8) kann mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) folgende Form gegeben werden:

$$(11) \quad u = u_x + a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right).$$

Während des betrachteten Intervalles  $\tau$  oszillieren demnach die Temperaturen  $u$  um ihre Mittelwerte  $u_x$ , welche durch die Ordinaten der Geraden  $ML$  dargestellt sind. Die Amplituden dieser Oszillationen sind:

$$\pm a e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}},$$

sie nehmen also mit der Tiefe  $x$  ab. Auf der oberen Begrenzungsebene der Platte ist der Wert der Amplitude gleich  $a$ , auf der unteren ist diese Amplitude verschwindend klein.



Die Kurven  $S_1L$  und  $S_2L$ , deren Entfernungen in der Richtung  $Y$  von der Geraden  $ML$  gleich

$$+ ae^{-\frac{x}{k}}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

$$- ae^{-\frac{x}{k}}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

sind und welche sich dem Punkte  $L$  unendlich nähern, geben die Grenzen an, zwischen welchen die Temperaturen während des Intervalles  $\tau$  schwanken. Während des großen Zeitintervalles  $T$  oszilliert der Punkt  $M$  langsam zwischen den Lagen  $M_u$  und  $M_o$ , welche den mittleren Temperaturen des kältesten, bzw. des wärmsten Zeitintervalles  $\tau$  entspricht. Der Punkt  $L$  ist unbeweglich.

### Zur Theorie des solaren Klimas.

Denken wir uns die Atmosphäre der Erde weggeschafft und die Oberfläche der Erde überall erstarrt, so wird die Temperatur eines beliebigen Punktes der Oberfläche die Funktion folgender dreier Einflüsse sein: 1. der Sonnenstrahlung, die wir kurz Insolation nennen werden, und durch welche täglich gewisse Wärmemengen der in Betracht gezogenen Stelle zugeführt werden, 2. der Ausstrahlung in den interplanetarischen Raum, welche wir kurz Radiation nennen werden, und durch welche fortwährend eine Abfuhr der Wärmemengen von der Erdoberfläche gegen den interplanetarischen Raum bewirkt wird, 3. der Wärmeleitung, welche wir kurz Konduktion nennen werden, und durch welche nach dem Vorhergehenden eine Wärmeabfuhr von der Erdoberfläche gegen das Erdinnere oder auch umgekehrt hervorgerufen wird.

Untersuchen wir diese Einflüsse gesondert und bestimmen wir jene Wärmemengen, welche infolge dieser Einflüsse innerhalb eines Zeitintervalles  $\tau$  von 24 Stunden der Erdoberfläche zu-, bzw. abgeführt werden.

Durch die Insolation wird in der Zeiteinheit der Einheit der Erdoberfläche eine Wärmemenge zugeführt, welche — wenn die Exzentrizität der Erdbahn nicht berücksichtigt wird — durch den Ausdruck:

$$(12) \quad \frac{dq_1}{dt} = A_0 J \cos z$$

dargestellt ist.

Dabei bedeutet  $z$  die Zenitdistanz der Sonne,  $A_0$  das Absorptionsvermögen der Erdoberfläche und  $J$  die Solarkonstante.

$A_0$  hängt von der Beschaffenheit der Erdoberfläche an der in Betracht gezogenen Stelle ab. Wenn die Erdkruste ein vollkommen schwarzer Körper wäre, so würde  $A_0 = 1$  betragen. In Wirklichkeit ist  $A_0$  kleiner als Eins.

$I$  ist eine Wärmemenge, welche der Einheit der vollkommen schwarzen Oberfläche in der Zeiteinheit zugeführt wird, wenn die Sonnenstrahlen auf diese Fläche senkrecht auffallen und wenn sich die Sonne in der mittleren Entfernung befindet. Diese Konstante beträgt nach den neuesten Untersuchungen<sup>1)</sup> 2 Grammkalorien für  $\text{cm}^2$  und Minute.

Die Zenitdistanz  $z$  der Sonne ist gegeben durch die Gleichung:

$$(13) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega,$$

wo  $\varphi$  die geographische Breite der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche,  $\delta$  die Deklination der Sonne und  $\omega$  deren Stundenwinkel bedeutet.

Bezeichnen wir mit  $t$  die Sonnenzeit — gezählt von Mittag bis Mittag — und mit  $\tau$  das Zeitintervall des Sonnentages, so ist:

$$(14) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} t$$

und

$$(15) \quad \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

In der obigen Gleichung ist  $\tau$  streng genommen nicht konstant, weil die Sonnentage nicht vollkommen gleiche Länge haben, doch ist diese Abweichung geringfügig und kann vernachlässigt werden. Auch kann  $\tau = 24^{\text{h}}$  der mittleren Zeit gesetzt werden.

Die Gleichung (12) gilt nur für jene Zeitintervalle, wo sich die Sonne oberhalb des Horizontes befindet, d. h. nur für

$$z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sobald die Sonne untergeht, hört die Insolation vollkommen auf. Infolgedessen wird die Wärmemenge  $\Delta q_1$ , welche während des Zeitintervalles  $\tau$  der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche zugeführt wird, gleich sein:

$$(16) \quad \Delta q_1 = \int_{-\frac{\Theta}{2}}^{+\frac{\Theta}{2}} dq_1,$$

wo  $\Theta$  die Länge des Tagbogens der Sonne oder die Länge des Tages bedeutet. Diese Größe wird aus der Gleichung (15) bestimmt, wenn man in dieselbe einsetzt:

$$t = \frac{\Theta}{2}, \quad z = \frac{\pi}{2}.$$

1) Siehe Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig 1911, S. 444

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{\pi}{\tau} \Theta = 0,$$

woraus

$$(17) \quad \cos \frac{\pi}{\tau} \Theta = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta.$$

Aus den Gleichungen (12), (15) und (16) folgt dann:

$$\Delta q_1 = A_0 I \int_{-\frac{\Theta}{2}}^{+\frac{\Theta}{2}} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \frac{2\pi}{\tau} t) dt.$$

Die Größe  $\varphi$  ist, da wir eine bestimmte Stelle der Erdoberfläche ins Auge fassen, konstant; auch kann die Deklination  $\delta$  der Sonne während des Intervalles  $\tau$  als konstant angesehen werden, da ihre maximale Änderung während dieses Intervalles nur 0.0064 beträgt. Es ist deshalb:

$$(18) \quad \Delta q_1 = A_0 I \left\{ \Theta \sin \varphi \sin \delta + \frac{\tau}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \frac{\pi}{\tau} \Theta \right\}.$$

Die Größe  $\Delta q_1$  ist also als Funktion der Deklination der Sonne und der Tageslänge somit auch als Funktion des Datums dargestellt.

Wenden wir uns nun der Bestimmung der Wärmemenge  $\Delta q_1$  zu, welche innerhalb des Zeitintervalles  $\tau$  infolge der Radiation von der Erdoberfläche abgeführt wird.

Nach den Untersuchungen von Paschen<sup>1)</sup> ist die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{dq_2}{dt} = c T^\epsilon,$$

wo  $T$  die absolute Temperatur des ausstrahlenden Körpers,  $c$  und  $\epsilon$  zwei Konstanten bezeichnen, welche von der Natur dieses Körpers und dessen Oberfläche abhängen. Wenn dieser Körper vollkommen schwarz wäre und wir die Zeit in Minuten, die Flächen in  $\text{cm}^2$  messen würden, so hätte man für  $\epsilon = 4$  und für  $c = 0.768 \times 10^{-10}$ , d. h. die Ausstrahlung wäre durch das Stefansche Gesetz geregelt. Für einen nicht vollkommen schwarzen Körper ist  $c$  stets kleiner als der oben angegebene Wert, während sich  $\epsilon$  um so mehr der Zahl 5 nähert, je mehr sich der strahlende Körper von dem absolut schwarzen unterscheidet.

Siegl<sup>2)</sup> hat sowohl für eine Reihe von Gesteinen, als auch für Wasser und Eis die Konstanten  $c$  und  $\epsilon$  bestimmt, so daß gerade für

1) Paschen, Über die Gesamtemission glühenden Platins, Wied. Ann. 49. Über die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren fester Körper, ebenda 58 und 60.

2) Siegl, Über das Emissionsvermögen von Gesteinen, Wasser und Eis; Wiener Sitzungsber. Math.-naturw. Klasse Bd. CXVI.

den behandelten Fall ausreichendes Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht.

Um die Wärmemenge  $\Delta q_2$  zu bestimmen, nehmen wir — dem Beispiel Traberts folgend — die Temperatur der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche während des Zeitintervalles  $\tau$  als konstant und gleich der mittleren täglichen Temperatur  $u_\tau$  des betreffenden Tages an. Dann ist:

$$(19) \quad \Delta q_2 = c(273 + u_\tau)^\epsilon \tau,$$

wo  $u_\tau$  in Celsiusgraden zu nehmen ist:

Es erübrigt uns noch jene Wärmemenge  $\Delta q_3$  zu bestimmen, welche während des Zeitintervalles  $\tau$  der Erdoberfläche durch Konduktion aus der Erdkruste zugeführt wird. Wie wir bereits in der Einleitung dargetan haben, braucht bei dieser Untersuchung nur eine Schichte der Erdkruste von der Dicke  $h$  gleich rund 10 m in Betracht gezogen zu werden, da deren untere Begrenzungsfläche eine von der Zeit unabhängige Temperatur  $v_0$  aufweist, welche sich wenig von der mittleren Jahrestemperatur der Oberfläche unterscheidet. Die Oberfläche dieser Schichte ist periodischen Temperaturänderungen unterworfen, welche einen doppelt oszillatorischen Charakter haben, indem sie durch Superposition der täglichen und jährlichen Änderungen entstehen. Die Periode  $T$  der jährlichen Änderungen, das Jahr, ist viel größer als die Periode  $\tau$  der täglichen Änderungen, so daß der Quotient  $\frac{\tau}{T} = 0.0027$  eine kleine Zahl ist. Es kann — wie dies öfters geschehen ist — angenommen werden, daß diese Änderungen harmonisch sind, d. h. es kann die Temperatur  $u$  der Erdoberfläche an einer gegebenen Stelle als eine Funktion der Zeit  $t$  von folgender Form dargestellt werden:

$$(20) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

$A$  ist die Amplitude der jährlichen,  $a$  die Amplitude der täglichen Schwankungen.  $A$  ist konstant, weil nach einem Jahre dieselben die Temperatur der Oberfläche bestimmenden Verhältnisse wiederkehren;  $a$  ändert sich im allgemeinen von Tag zu Tag, doch erfolgen diese Änderungen so langsam, daß der Quotient  $\frac{da}{dt}$  eine kleine Zahl ist.

Hinsichtlich der Größe  $u_0$  ist folgendes zu bemerken: Die mittlere Jahrestemperatur  $u_\tau$  der Oberfläche ist gleich

$$u_\tau = \frac{1}{T} \int_0^\tau u dt = u_0 + \frac{A}{T} \int_0^\tau \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt + \frac{a}{T} \int_0^\tau \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt.$$

Da aber

$$\int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) dt = 0$$

und

$$\tau = \frac{\tau}{n},$$

wo  $n$  eine ganze Zahl (365 oder 366) ist, so ist auch

$$\int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt = \int_0^{\tau} \cos \frac{\alpha n \pi}{T} t dt = 0,$$

und demnach

$$u_{\tau} = u_0,$$

$u_0$  bedeutet also die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche an der in Betracht gezogenen Stelle.

Der betrachtete Teil der sphäroidischen Schichte der Erdkruste hat einen sehr großen Radius und kann deshalb durch eine Platte ersetzt werden, so daß die Wärmebewegung in diesem Teile der Fourierschen Gleichung:

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gehorschen wird. Die Dicke  $h$  der betrachteten Schicht ist so gewählt, daß in der Tiefe  $x = h$  die Temperaturänderungen der Oberfläche nicht

fühlbar sind, und es ist deshalb  $e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$  eine kleine Zahl. Die Temperaturänderungen in der betrachteten Schicht werden durch das partikuläre Integral der Gleichung (21) dargestellt sein, welches folgenden Grenzbedingungen Genüge leistet.

Für  $x = 0$

$$u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

und für  $x = h$

$$u = u_0.$$

Dabei sind die Größen

$$\frac{\tau}{T}, \quad \frac{da}{dt}, \quad e^{-\frac{h}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$$

sehr klein.

Das zu lösende Problem ist identisch mit dem eingangs behandelten Problem der Wärmeleitung, und es wird demnach die Temperatur  $u$  in der Tiefe  $x$  und zur Zeit  $t$  durch die Gleichung (8) dargestellt sein, welche wir hier wiedergeben:

$$(22) \quad u = u_0 + A \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) + \frac{x}{h} \left[ v_0 - u_0 - A \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) \right] + a e^{\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{T}} \right).$$

Die Wärmemenge  $\frac{dq_3}{dt}$ , welche in der Zeiteinheit der Flächeneinheit der Oberfläche durch Konduktion zugeführt wird, ist nach den Grundannahmen der Fourierschen Theorie proportional dem Temperaturgefälle und gleich:

$$(23) \quad \frac{dq_3}{dt} = K \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Aus der Gleichung (22) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{v_0 - u_0}{h} - \frac{A}{h} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \cdot \\ &+ \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \left\{ \sin \left( \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) - \cos \left( \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{x}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$(24) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{v_0 - u_0}{h} - \frac{A}{h} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) + \frac{a}{K} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \left\{ \sin \frac{2\pi}{\tau} t - \cos \frac{2\pi}{\tau} t \right\}.$$

Im Zeitintervalle  $t$  bis  $t + \tau$  wird der Oberfläche die Wärmemenge  $\Delta q_3$  zugeführt, welche gleich ist:

$$(25) \quad \Delta q_3 = \int_t^{t+\tau} dq_3$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (23) und (24):

$$\begin{aligned} \Delta q_3 &= K \frac{v_0 - u_0}{h} \tau - K \frac{A}{h} \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt \\ &+ a \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_t^{t+\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} t dt - \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t dt. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Integrale der vorstehenden Gleichung verschwinden und es ist

$$(26) \quad \Delta q_3 = K \frac{v_0 - u_0}{h} \tau - K \frac{A}{h} \int_t^{t+\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt.$$

Bezeichnen wir wie früher mit  $u_x$  die mittlere Temperatur an der Oberfläche während des in Betracht gezogenen Tages, so ist:

$$u_x \tau = \int_t^{t+\tau} u dt$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (20)

$$u_x \tau = u_0 \tau + A \int_i^{i+\tau} \cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) dt + \alpha \int_i^{i+\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - t_0) dt.$$

Das letzte Integral der vorstehenden Gleichung verschwindet, und es kann demnach der Gleichung (26) folgende Form gegeben werden:

$$(27) \quad \Delta q_3 = K \frac{v_0 - u_x}{h} \tau.$$

Nachdem nun die Wärmemengen  $\Delta q_1$ ,  $\Delta q_2$  und  $\Delta q_3$  berechnet worden sind, kann zur Bestimmung der mittleren Temperatur des Zeitintervalles  $\tau$ , d. h. der mittleren Temperatur eines beliebigen Tages, geschritten werden. Auf der Oberfläche der Erde wird sich jene Temperatur einstellen, für welche die zugeführten Wärmemengen gleich den abgeführten sind. Zugeführt wurden die Wärmemengen  $\Delta q_1$  und  $\Delta q_3$ , abgeführt die Wärmemenge  $\Delta q_2$ . Die Temperatur  $u_x$  wird man demnach aus der folgenden Gleichung bestimmen:

$$(28) \quad \Delta q_1 + \Delta q_3 = \Delta q_2.$$

Setzen wir in die obige Gleichung die Werte für  $\Delta q_1$ ,  $\Delta q_2$  und  $\Delta q_3$  aus den Gleichungen (18), (19) und (27) ein, so erhalten wir:

$$A_0 I \left\{ \Theta \sin \varphi \sin \delta + \frac{\tau}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \frac{\pi}{\tau} \Theta \right\} - c(273 + u_x) \tau + \frac{K}{h} (v_0 - u_x) \tau = 0.$$

Bezeichnen wir

$$(29) \quad \frac{\Theta}{\tau} = \lambda,$$

wo demnach  $\lambda$  das Verhältnis des Tagbogens der Sonne zum Bogen von  $360^\circ$  bedeutet, so bekommt die vorstehende Gleichung die Form

$$(30) \quad c(273 + u_x) \tau + \frac{K}{h} (u_x - v_0) \tau = A_0 I \left\{ \lambda \sin \varphi \sin \delta + \frac{1}{\pi} \cos \varphi \cos \delta \sin \lambda \pi \right\}.$$

In dieser Gleichung sind für einen gegebenen Tag alle Größen bis auf die Größen  $u_x$  und  $v_0$  bekannt. Hinsichtlich der Größe  $v_0$  kann folgendes bemerkt werden. Diese kann mit großer Annäherung der mittleren Jahrestemperatur  $u_0$  gleichgesetzt werden.

Die Temperatur  $u_0$  wird auf folgende Art berechnet: Der wärmste Tag der Oberfläche ist nach Gleichung (20) der Tag, für welchen:

$$\cos \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = 1$$

d. h.

$$t - t_0 = n_1 \tau.$$

Während dieses Tages kann die Temperatur der Oberfläche durch die Gleichung dargestellt werden:

$$u_1 = u_0 + A + a \cos \frac{2\pi}{\tau} t.$$

und es ist die mittlere Temperatur des wärmsten Tages

$$\max u_\tau = \frac{1}{\tau} \int_{n_1 \tau - \frac{\tau}{2}}^{n_1 \tau + \frac{\tau}{2}} u_1 = u_0 + A.$$

Auf dieselbe Art bekommt man die mittlere Temperatur des kältesten Tages:

$$\min u_\tau = u_0 - A,$$

und es ist demnach in erster Annäherung:

$$u_0 = \frac{1}{2} (\max u_\tau + \min u_\tau).$$

Mit einem angenommenen Werte für  $v_0 = u_0$  werden mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen des wärmsten und des kältesten Tages an der in Betracht gezogenen Stelle der Erdoberfläche bestimmt. Diese Tage treten an der nördlichen Hemisphäre für Orte, wo  $\varphi > 23^\circ 30'$  ein, wenn  $\delta = 23^\circ 30'$  bzw.  $\delta = -23^\circ 30'$  beträgt. Das arithmetische Mittel der berechneten Temperaturen gibt einen besseren Wert für  $u_0$ , mit welchem die Rechnung wiederholt werden kann. Dann kann man mit Hilfe der Gleichung (30) die mittleren Temperaturen für eine größere Anzahl der über das Jahr gleichmäßig verteilten Tage berechnen, um daraus mit einer noch größeren Genauigkeit die mittlere Jahrestemperatur  $u_0$  zu bestimmen.

Nachdem diese Berechnung durchgeführt worden ist, sind in der Gleichung (30) alle Größen bis auf die Größe  $u_\tau$  bekannt. Diese Gleichung gestattet uns demnach die mittlere Temperatur  $u_\tau$  eines beliebigen Tages im Jahre zu bestimmen, löst somit die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben.

Belgrad, 20. März 1912.

## Über ungleichförmige Bewegungen eines Fadens, bei denen er seine Gestalt nicht ändert.

Von E. LIEB in Maulbronn.

Das relative Gleichgewicht eines unausdehnbaren, nicht schweren Fadens, der an einer sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehenden Achse befestigt ist, wurde zuerst eingehend untersucht von Clebsch.<sup>1)</sup> Da die Winkelgeschwindigkeit eine gleichförmige ist, so wird der Faden die Gestalt, welche er unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft angenommen hat, dauernd behalten. Wenn jedoch die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit veränderlich ist, so wird im allgemeinen der Faden seine Gestalt ändern. Immerhin fragt es sich, ob es nicht auch hier Fälle gibt, in welchen der Faden seine Gestalt behält.

Wir werden im nachstehenden untersuchen, unter welchen Umständen bei ungleichförmiger Rotation der Achse ein mit ihr verbundener, unausdehnbarer, vollständig biegsamer Faden während der ganzen Dauer der Drehung seine Gestalt behält, wenn er, wie wir der Einfachheit halber annehmen, ganz in einer zur Drehachse senkrechten Ebene liegt.

Die Anregung zu dieser Arbeit hat mir mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Dr. v. Brill gegeben, hiefür, sowie für den mannigfachen Rat während der Ausarbeitung spreche ich ihm meinen herzlichsten Dank aus.

1. Wir werden im folgenden mehrfach auf Relationen von der Form

$$(1) \quad A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots + A_n T_n = 0$$

geführt, wo die  $A_i$  reine Funktionen einer Variablen  $a$  und die  $T_i$  reine Funktionen einer von  $a$  unabhängigen Variablen  $t$  sind. Für den Fall  $n = 4$  hat Appell<sup>2)</sup> die Lösungen der Relation (1) angegeben mit Hilfe einer Methode, die sich auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen läßt.<sup>3)</sup>

1) Crelles Journal Bd. 57, 1860. Weitere Literatur s. Encyclopädie der math. Wiss. Bd. IV 1 S. 534. Neuerdings ist auch der Fall des schweren Fadens behandelt worden: Wilson, The equilibrium of a heavy homogeneous chain in a uniformly rotating plane, Annals of Math. (2) 9, 1908.

2) Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe, Acta mathematica Bd. 12.

3) Vgl. hierzu meine Dissertation, Tübingen 1912; ferner die mir erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit von P. Stäckel: Die kinematische Erzeugung der Minimalflächen, American Trans. 7, 1906.

Sind  $P_1 \dots P_n$  irgend  $n$  der Funktionen  $A$ ,  $Q_1 \dots Q_k$   $k$  der Funktionen  $T$  derart, daß, wenn z. B.  $P_1 = A_1$  gesetzt wird,  $Q_1 = T_1$  zu setzen ist, und bedeuten  $\alpha, \beta, \dots x$  Konstanten, so ergibt sich die allgemeine Lösung der Relation (1) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \alpha_{k+1} + P_2 \beta_{k+1} + \dots + P_k x_{k+1} + P_{k+1} &= 0 \\ P_1 \alpha_{k+2} + P_2 \beta_{k+2} + \dots + P_n x_{k+2} + P_{k+2} &= 0 \\ \dots & \dots \\ P_1 \alpha_n + P_2 \beta_n + \dots + P_k x_n + P_n &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n - k \\ \text{Relationen} \end{array}$$
  

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_{k+1} \alpha_{k+1} + Q_{k+2} \alpha_{k+2} + \dots + Q_n \alpha_n \\ Q_2 &= Q_{k+1} \beta_{k+1} + Q_{k+2} \beta_{k+2} + \dots + Q_n \beta_n \\ \dots & \dots \\ Q_k &= Q_{k+1} x_{k+1} + Q_{k+2} x_{k+2} + \dots + Q_n x_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k \\ \text{Relationen} \end{array}$$

$k$  kann jeden Wert annehmen von  $1 \dots n - 1$ . Dazu kommen noch zwei weitere Fälle; entweder es verschwinden alle  $A$  identisch oder alle  $T$ .

Für  $n = 3$  erhält man unter der Annahme, daß keine der Funktionen  $A, T$  identisch verschwindet, die beiden Fälle:

1.  $A_1 = k_1 A_3$   $k_1 T_1 + k_2 T_2 + T_3 = 0$   
 $A_2 = k_2 A_3$
2.  $k_1 A_1 + k_2 A_2 + A_3 = 0$   $T_1 = k_1 T_3$   
 $T_2 = k_2 T_3$ .

2. Ist  $a$  die Bogenlänge des Fadens, gemessen von einem bestimmten Punkte des Fadens bis zu einem beliebigen Punkt,  $\Psi(a)$  die in Funktion des Bogens gegebene Dichte,  $\lambda$  die Spannung und sind  $\Psi X, \Psi Y$  die Komponenten der Kraft für die Längeneinheit, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\Psi \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \lambda \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \Psi X \quad \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 = 1.$$

$$\Psi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \lambda \frac{\partial y}{\partial a} \right) + \Psi Y$$

Wenn nun der Faden bei der Drehung seine Gestalt nicht ändert, so sind seine Koordinaten in einem System, das sich mit dem Faden dreht, Funktionen bloß des Bogens  $a$ . Die Koordinaten in diesem System seien  $x_1, y_1$ ; der Winkel  $\vartheta$ , den die  $x_1$ -Achse mit der  $x$ -Achse bildet, ist dann eine reine Funktion von  $t$ . Seine Ableitungen nach  $t$  mögen durch Punkte bezeichnet werden. Man hat dann, wenn beide Systeme den Drehpunkt zum Ursprung haben:

$$x = x_1 \cos \vartheta - y_1 \sin \vartheta$$

$$y = x_1 \sin \vartheta + y_1 \cos \vartheta.$$

Damit folgt aus den Bewegungsgleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \Psi(-y_1 \ddot{\vartheta} - x_1 \dot{\vartheta}^2) = \frac{\partial}{\partial a} \left( \lambda \frac{dx_1}{da} \right) + \Psi(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta) \\ \Psi(x_1 \ddot{\vartheta} - y_1 \dot{\vartheta}^2) = \frac{\partial}{\partial a} \left( \lambda \frac{dy_1}{da} \right) + \Psi(-X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta) \\ \left( \frac{dx_1}{da} \right)^2 + \left( \frac{dy_1}{da} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Dabei möge angenommen werden, daß der Faden mit seinen Enden in zwei Punkten der sich mit ihm drehenden reibungslosen Ebene befestigt sei. Integriert man nach  $a$  zwischen den Grenzen  $a_0$  und  $a$  und setzt:

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi = \frac{1}{\Theta} \\ u = \int_{a_0}^a \Psi x_1 da, \quad v = \int_{a_0}^a \Psi y_1 da, \quad U = \int_{a_0}^a \Psi X da, \quad V = \int_{a_0}^a \Psi Y da \\ x_1 = \Theta \frac{du}{da}, \quad y_1 = \Theta \frac{dv}{da}, \quad X = \Theta \frac{\partial U}{\partial a}, \quad Y = \Theta \frac{\partial V}{\partial a} \\ \left[ \lambda \right]_{a=a_0} = \lambda_0, \quad \left[ \frac{dx_1}{da} \right]_{a=a_0} = \cos \alpha_0, \quad \left[ \frac{dy_1}{da} \right] = \sin \alpha_0, \end{cases}$$

wo dann  $u, v$  den Schwerpunktskoordinaten des Fadenstücks  $a_0 a$  proportional, und  $U, V$  die Komponenten der Resultante der auf das Fadenstück  $a_0 a$  wirkenden äußeren Kräfte sind, so erhält man aus (2):

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_0 \cos \alpha_0 - v \ddot{\vartheta} - u \dot{\vartheta}^2 - U \cos \vartheta - V \sin \vartheta &= \lambda \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \\ \lambda_0 \sin \alpha_0 + u \ddot{\vartheta} - v \dot{\vartheta}^2 + U \sin \vartheta - V \cos \vartheta &= \lambda \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \\ \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \right]^2 + \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right]^2 &= 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung gewinnt man aus den beiden ersten:

$$(5) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) [\lambda_0 \cos \alpha_0 - v \ddot{\vartheta} - u \dot{\vartheta}^2 - U \cos \vartheta - V \sin \vartheta] \\ &+ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) [\lambda_0 \sin \alpha_0 + u \ddot{\vartheta} - v \dot{\vartheta}^2 + U \sin \vartheta - V \cos \vartheta]. \end{aligned}$$

Die Elimination von  $\lambda$  ergibt:

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{\vartheta} \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) + v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] + \dot{\vartheta}^2 \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) - v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \right] \\ + \lambda_0 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] \\ + \sin \vartheta \left[ U \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) + V \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] \\ + \cos \vartheta \left[ U \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) - V \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

In dieser Relation sind  $u, v, \Theta$  Funktionen von  $a$  allein,  $\dot{\Theta}, \lambda_0$  Funktionen von  $t$  allein und  $U, V$  Funktionen von  $a$  und  $t$ .

3. Wenn äußere Kräfte nicht vorhanden sind und die Dichte des Fadens konstant, etwa  $= 1$  ist, hat man zu setzen

$$U = V = 0, \quad \Theta = 1,$$

und es folgt aus (6)

$$(7) \quad \ddot{\Theta} \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \dot{\Theta}^2 \left( u \frac{d^2 v}{da^2} - v \frac{d^2 u}{da^2} \right) + \lambda_0 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form (1) ( $n = 3$ ). Man hat also nach Art. 1 zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall. Die Relation (7) wird befriedigt durch das System:

$$(8) \quad \begin{cases} u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} = k_1 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) \\ u \frac{d^2 v}{da^2} - v \frac{d^2 u}{da^2} = k_2 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) \\ k_1 \ddot{\Theta} + k_2 \dot{\Theta}^2 + \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

Daß die beiden ersten Gleichungen und die Bedingung der Unausdehnbarkeit

$$(4a) \quad \left( \frac{d^2 u}{da^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 v}{da^2} \right)^2 = 1$$

nicht miteinander verträglich sind, wird später (Art. 9) gezeigt werden.

2. Fall. Die Relation (7) wird ferner befriedigt durch das System:

$$\begin{cases} k_1 \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \left( u \frac{d^2 v}{da^2} - v \frac{d^2 u}{da^2} \right) + k_2 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) = 0 \\ \ddot{\Theta} = k_1 \dot{\Theta}^2 \\ \lambda_0 = k_2 \dot{\Theta}^2. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{d^2 u}{da^2} (-k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0) = \frac{d^2 v}{da^2} (u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0)$$

und hieraus mit Hilfe von (4a)

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{da^2} = \frac{u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0}{\pm [(u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0)^2 + (-k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0)^2]^{1/2}} \\ \frac{d^2 v}{da^2} = \frac{-k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0}{\pm [(u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0)^2 + (-k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0)^2]^{1/2}}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist die Gestalt des Fadens bestimmt. Die Gleichung

$$(10) \quad \ddot{\vartheta} = k_1 \dot{\vartheta}^2$$

ergibt, wenn  $B, C$  Integrationskonstanten sind:

$$(10a) \quad \dot{\vartheta} = -\frac{1}{k_1(t+B)}, \quad \vartheta = \frac{1}{k_1}[C - \log(t+B)].$$

Für die Spannung findet man aus (5)

$$\lambda = \mp \dot{\vartheta}^2 [(u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0)^2 + (-k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0)^2]^{1/2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß das obere Wurzelzeichen in (9) einer negativen, das untere einer positiven Spannung entspricht.

Wird ein ebener, homogener, biegsamer Faden, welcher anfänglich die durch (9) definierte Gestalt besitzt, in die durch (10a) definierte Drehbewegung versetzt, so behält er diese Gestalt, obgleich die Drehbewegung ungleichförmig ist.

Notwendig ist dabei nur, daß die nötigen Endspannungen angebracht werden. Das aber wird erreicht, indem man sich die Enden des Fadens in Punkten einer Ebene befestigt denkt, die mit ihm nach Gleichung (10a) rotiert.

Wenn in der Relation (7) Produkte verschwinden, so erhält man, wie leicht einzusehen, nichts, was nicht schon im Bisherigen enthalten wäre. Ist z. B.

$$\sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} = 0,$$

so folgt

$$\frac{d^2 u}{da^2} = \cos \alpha_0, \quad \frac{d^2 v}{da^2} = \sin \alpha_0,$$

damit aber ergibt sich aus (7)

$$\ddot{\vartheta}(u \cos \alpha_0 + v \sin \alpha_0) + \dot{\vartheta}^2(u \sin \alpha_0 - v \cos \alpha_0) = 0,$$

und die zweimalige Differentiation dieser Gleichung nach  $a$  liefert  $\ddot{\vartheta} = 0$ , einen trivialen Fall, denn der Faden hat die Gestalt einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und gleichförmig rotiert.

4. Die Gleichungen (9) lassen sich auf eine andere Form bringen durch die Substitution:

$$\begin{aligned} u + k_1 v - k_2 \cos \alpha_0 &= p + k_1 q \\ -k_1 u + v - k_2 \sin \alpha_0 &= -k_1 p + q, \end{aligned}$$

woraus sich, wenn  $k_1 = \operatorname{tg} \varepsilon$  gesetzt wird, ergibt:

$$(11) \quad \begin{cases} u = p + k_2 \cos \varepsilon \cdot \cos(\alpha_0 + \varepsilon) \\ v = q + k_2 \cos \varepsilon \cdot \sin(\alpha_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Man erhält daher die Kurve  $(u, v)$  aus der Kurve  $(p, q)$  durch eine Parallelverschiebung, welche jedoch auf die Kurve  $(x_1, y_1)$  keinen Einfluß hat, da

$$\frac{du}{da} = \frac{dp}{da} = x_1, \quad \frac{dv}{da} = \frac{dq}{da} = y_1.$$

Die Gleichungen (9) lauten in  $p, q$ :

$$(9a) \quad \begin{cases} \frac{d^2 p}{da^2} = \frac{p \cos \varepsilon + q \sin \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \frac{d^2 q}{da^2} = \frac{-p \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases}$$

und für die Spannung ergibt sich

$$\lambda = -\frac{\dot{\vartheta}^2}{\cos \varepsilon} \cdot \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Durch die Einführung des Winkels  $\varepsilon$  wird das doppelte Vorzeichen der Gleichungen (9) überflüssig, denn  $\frac{d^2 p}{da^2}, \frac{d^2 q}{da^2}$  erhalten das negative Zeichen, wenn man  $\varepsilon$  um  $\pi$  ändert. Insbesondere wird  $\lambda$  positiv, wenn  $\varepsilon$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  gewählt wird.

Denkt man sich in (9a)  $a$  durch  $t$  ersetzt, so definieren diese Gleichungen die Bahn, welche ein Punkt von der Masse 1 unter dem Einfluß einer Kraft 1 beschreibt, welche mit seinem Radiusvektor den konstanten Winkel  $\varepsilon$  bildet.

5. In einem speziellen Fall lassen sich die Gleichungen (9a) auf Quadraturen zurückführen. Ist  $\varepsilon = \pi$ , so wird  $k_1 = 0$  und damit folgt aus (10), daß die Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt, wir erhalten daher das Problem von Clebsch.

Die aus der Gleichgewichtskurve eines ebenen, homogenen Fadens, der sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine zu seiner Ebene senkrechte Achse dreht, durch die Substitution

$$u = \int_{a_0}^a x_1 da \quad v = \int_{a_0}^a y_1 da$$

hervorgehende Kurve  $(u, v)$  hat dieselbe Gestalt wie die Bahn eines Punktes von der Masse 1, auf den die Zentralkraft 1 wirkt.

Setzt man in (9a)  $\varepsilon = \pi$ , so wird

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d^2 p}{da^2} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \frac{d^2 q}{da^2} = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases} \quad \lambda = \dot{\vartheta}^2 \cdot \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Es gelten nun die dem Prinzip der lebendigen Kraft und dem Prinzip der Erhaltung der Flächenräume entsprechenden Sätze:

$$(12a) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dp}{da} \right)^2 + \left( \frac{dq}{da} \right)^2 \right] = -\sqrt{p^2 + q^2} + C \\ p \frac{dq}{da} - q \frac{dp}{da} = D \end{cases}$$

( $C, D$  sind Konstanten).

Hieraus folgen einige Beziehungen zwischen der Kurve  $(p, q)$  und der Kurve  $(x_1, y_1)$ . Sind  $R, \Phi$  Polarkoordinaten der Kurve  $(p, q)$  und  $r, \varphi$  Polarkoordinaten der Kurve  $(x_1, y_1)$ , so ist

$$\left( \frac{dp}{da} \right)^2 + \left( \frac{dq}{da} \right)^2 = r^2.$$

Damit folgt aus (12a), daß der Fahrstrahl der Kurve  $(p, q)$  mit demjenigen der Kurve  $(x_1, y_1)$  durch die Beziehung

$$(13) \quad R = C - \frac{r^2}{2}$$

verbunden ist. Ferner folgt aus (12a):

$$(14) \quad R^2 \frac{d\Phi}{da} = D.$$

Durchwandert ein Punkt auf der Kurve  $(x_1, y_1)$  gleiche Strecken, so überstreicht der Radiusvektor nach dem Punkte  $(p, q)$  gleiche Flächen.

Bedeutet  $E, F$  Konstanten, so werden die Integrale der Gleichungen (12)

$$(12b) \quad \begin{cases} a = E + \int \frac{R dR}{[2R^2(C-R) - D^2]^{1/2}} \\ \Phi = F + \int \frac{D dR}{R[2R^2(C-R) - D^2]^{1/2}} \\ x_1 = \frac{d}{da}(R \cos \Phi), \quad y_1 = \frac{d}{da}(R \sin \Phi). \end{cases}$$

Für die Spannung ergibt sich:

$$\lambda = \dot{\varphi}^2 R = \dot{\varphi}^2 \left( C - \frac{r^2}{2} \right),$$

wo  $C > \frac{r^2}{2}$  zu nehmen ist.

Die Einführung der Koordinaten  $(p, q)$  führt zu einer einfachen Beziehung zwischen dem Krümmungsradius  $\rho$  der Kurve  $(x_1, y_1)$  und ihrem vom Drehpunkt aus genommenen Radiusvektor  $r$ . Ist  $\alpha$  der Win-

kel, den die Tangente an die Kurve  $(x_1, y_1)$  mit der  $x_1$  Achse bildet, so hat man

$$\frac{d^2 p}{da^2} = \frac{dx_1}{da} = \cos \alpha, \quad \frac{d^2 q}{da^2} = \frac{dy_1}{da} = \sin \alpha,$$

und damit folgt aus (12)

$$\Phi = \alpha + \pi.$$

Die Gleichung (14) geht dadurch über in

$$R^2 \frac{d\alpha}{da} = D,$$

und weil

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so wird

$$\varrho = \frac{R^2}{D}$$

oder mit Hilfe von (13)

$$\varrho = \frac{1}{D} \left( C - \frac{r^2}{2} \right)^2.$$

Der Krümmungsradius der Gleichgewichtskurve eines ebenen, homogenen, unausdehnbaren Fadens, welcher sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um einen Punkt der Ebene dreht, ist eine ganze rationale Funktion des vom Drehpunkt aus gemessenen Fahrstrahls dieser Kurve.<sup>1)</sup>

6. Kehren wir nun wieder zurück zu den Gleichungen (9a). Sie können geschrieben werden

$$\cos \alpha = \cos (\Phi - \varepsilon)$$

$$\sin \alpha = \sin (\Phi - \varepsilon),$$

d. h. es ist

$$\Phi = \alpha + \varepsilon.$$

Der Polarwinkel der Kurve  $(p, q)$  unterscheidet sich von dem Neigungswinkel der Tangente der Kurve  $(x_1, y_1)$  gegen die  $x_1$ -Achse nur um den Winkel  $\varepsilon$ .

Daraus folgt wieder

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\Phi}{da}.$$

Führt man in den Gleichungen (9a) die Polarkoordinaten  $R, \Phi$  ein, so findet man

$$(9b) \quad \begin{cases} \frac{d^2 R}{da^2} - R \left( \frac{d\Phi}{da} \right)^2 = \cos \varepsilon \\ 2 \frac{dR}{da} \frac{d\Phi}{da} + R \frac{d^2 \Phi}{da^2} = -\sin \varepsilon \end{cases} \quad \lambda = -\frac{\dot{\Phi}^2 R}{\cos \varepsilon}$$

1) Dieses Ergebnis, welches sich durch einige Rechnung auch aus den Resultaten von Clebsch herleiten läßt, bleibt nicht so einfach, wenn der Faden eine Raumkurve bildet. Versteht man unter  $\varrho$  den Krümmungsradius der Kurve, welche durch Projektion dieser Raumkurve auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene entsteht, so ergibt sich  $\varrho$  als algebraische Funktion des Fahrstrahls der Projektion.

86 Ungleichförmige Bewegungen eines Fadens, bei d. er seine Gestalt nicht ändert.

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{d}{da} \left( R^2 \frac{d\Phi}{da} \right) = -\sin \varepsilon \cdot R,$$

oder wenn gesetzt wird:

$$(15) \quad \int R da + A = \sigma, \quad R = \frac{d\sigma}{da} \quad (A = \text{const.})$$

$$\left( \frac{d\sigma}{da} \right)^2 \frac{d\Phi}{da} = -\sin \varepsilon \cdot \sigma.$$

Die Elimination von  $\Phi$  aus dieser und der ersten Gleichung in (9b) ergibt

$$(16) \quad \left( \frac{d\sigma}{da} \right)^3 \cdot \frac{d^2\sigma}{da^2} - \cos \varepsilon \left( \frac{d\sigma}{da} \right)^3 - \sigma^2 \sin^2 \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung, in welcher nur noch  $\sigma$  vorkommt, ist homogen und läßt ein partikuläres Integral zu von der Form

$$\sigma = m \cdot a^n.$$

Durch Substitution dieses Wertes erhält man:

$$m^4 n^4 (n-1)(n-2) a^{4n-6} - \cos \varepsilon m^3 n^3 a^{3n-3} - \sin^2 \varepsilon m^2 a^{2n} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt allein durch die Zahl  $n = 3$ , wobei dann  $m$  der Gleichung

$$m^2 \cdot 3^4 \cdot 2 - \cos \varepsilon \cdot m \cdot 3^3 - \sin^2 \varepsilon = 0$$

genügen muß, also den Wert

$$m = \frac{3 \cos \varepsilon \pm \sqrt{9 \cos^2 \varepsilon + 8 \sin^2 \varepsilon}}{36}$$

besitzt, welcher stets reell ist. Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (16) ist daher

$$\sigma = m a^3,$$

somit nach (15)

$$R = 3 m a^2$$

und

$$\frac{d\Phi}{da} = -\frac{\sin \varepsilon}{3 m a},$$

also

$$\Phi = -\frac{3 m a}{\sin \varepsilon}.$$

Der Krümmungsradius ist daher der Bogenlänge proportional, eine Eigenschaft, welche nur der logarithmischen Spirale zukommt. Ferner wird

$$\lambda = -\frac{\dot{\Phi}^2}{\cos \varepsilon} \cdot 3 m a^2,$$

d. h. die Spannung verschwindet im Pol der Spirale. Bildet man  $p, q$  und sodann  $x_1, y_1$ , so sieht man, daß für  $a = 0$   $x_1 = y_1 = 0$  wird, der Pol der Spirale ist somit Drehpunkt.

Wenn ein biegsamer, unausdehnbarer Faden von der Gestalt einer logarithmischen Spirale sich um den Pol der Spirale mit der durch (10a) gegebenen Winkelgeschwindigkeit dreht, so behält er während der Bewegung diese Gestalt bei, vorausgesetzt, daß am freien Ende die nötige Endspannung angreift.

Die Differentialgleichung (16) kann durch einige Umformungen zurückgeführt werden auf Quadraturen und eine Differentialgleichung erster Ordnung vom Typus

$$y \frac{dy}{dx} + y = F(x),$$

wo  $F(x)$  eine rationale Funktion von  $\sqrt{x}$  ist.

7. Wir wollen nun die Gleichungen (9a) noch auf eine andere Form bringen. Sie lassen sich als simultanes System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung zunächst in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} = x_1 & \quad \frac{dx_1}{da} = \frac{p \cos \varepsilon + q \sin \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \frac{dq}{da} = y_1 & \quad \frac{dy_1}{da} = \frac{-p \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Die Einführung der Polarkoordinaten  $R, \Phi$  für  $p, q$  und  $r, \varphi$  für  $x_1, y_1$  liefert:

$$(9c) \quad \begin{cases} \frac{dR}{da} = r \cos (\Phi - \varphi) \\ \frac{d\Phi}{da} = -\frac{r}{R} \sin (\Phi - \varphi) \\ \frac{dr}{da} = \cos (\Phi - \varphi - \varepsilon) \\ \frac{d\varphi}{da} = \frac{1}{r} \sin (\Phi - \varphi - \varepsilon). \end{cases}$$

Dieses System ist zu integrieren unter der Voraussetzung, daß für  $a = a_0$

$$R = R_0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0$$

werde. Hierbei sind nun aber  $R_0$  und  $\Phi_0$  nicht beliebig; denn da nach (3) für  $a = a_0, u = v = 0$  sein muß, so folgt aus (11) für  $a = a_0$ :

$$\begin{aligned} p_0 &= -k_2 \cos \varepsilon \cdot \cos (\alpha_0 + \varepsilon) \\ q_0 &= -k_2 \cos \varepsilon \cdot \sin (\alpha_0 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Es muß daher sein

$$R_0 = -k_2 \cos \varepsilon, \quad \Phi_0 = \alpha_0 + \varepsilon.$$

Da nun aber nach S. 81.

$$\lambda_0 = k_2 \dot{\vartheta}^2,$$

so ist  $R_0$  bestimmt, wenn der Faktor  $k_2$ , durch welchen sich die Endspannung vom Quadrat der Winkelgeschwindigkeit unterscheidet, gewählt ist.

Die Gleichungen (9c) bilden ein Beispiel für ein System von Differentialgleichungen mit einem Parameter.<sup>1)</sup> Die Entwicklungen, welche nach Potenzen des Parameters  $\varepsilon$  fortschreiten, stellen dann diejenige ungleichförmig rotierende Fadenkurve dar, welche der zu denselben Anfangswerten gehörigen gleichförmig rotierenden entspricht.

8. Bisher wurden die äußeren Kräfte Null gesetzt. Nun soll untersucht werden, ob unter dem Einfluß von Kräften, deren Komponenten bezüglich des festen Systems reine Funktionen des Bogens sind, eine Drehbewegung des Fadens möglich ist, bei welcher er seine Gestalt nicht ändert.

Wir setzen

$$U = A_1(a), \quad V = A_2(a).$$

Damit geht (6) über in:

$$(17) \quad \ddot{\vartheta} \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \dot{\vartheta}^2 \left( u \frac{d^2 v}{da^2} - v \frac{d^2 u}{da^2} \right) + \lambda_0 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) \\ + \sin \vartheta \left( A_1 \frac{d^2 u}{da^2} + A_2 \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \cos \vartheta \left( A_1 \frac{d^2 v}{da^2} - A_2 \frac{d^2 u}{da^2} \right) = 0$$

Diese Relation wird nach Art. 1 beispielsweise durch folgendes System befriedigt:

$$(17a) \quad \begin{cases} u \frac{d^2 v}{da^2} - v \frac{d^2 u}{da^2} + \alpha_1 \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \beta_1 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) = 0 \\ A_1 \frac{d^2 u}{da^2} + A_2 \frac{d^2 v}{da^2} + \alpha_2 \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \beta_2 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) = 0 \\ A_1 \frac{d^2 v}{da^2} - A_2 \frac{d^2 u}{da^2} + \alpha_3 \left( u \frac{d^2 u}{da^2} + v \frac{d^2 v}{da^2} \right) + \beta_3 \left( \sin \alpha_0 \frac{d^2 u}{da^2} - \cos \alpha_0 \frac{d^2 v}{da^2} \right) = 0 \\ \ddot{\vartheta} - \alpha_1 \dot{\vartheta}^2 - \alpha_2 \sin \vartheta - \alpha_3 \cos \vartheta = 0 \\ \lambda_0 - \beta_1 \dot{\vartheta}^2 - \beta_2 \sin \vartheta - \beta_3 \cos \vartheta = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung ergibt die durch (9) definierte Kurve, die beiden nächsten liefern  $A_1$  und  $A_2$ . Setzt man:

$$\alpha_2 = -\alpha \cos \vartheta_0, \quad \alpha_3 = \alpha \sin \vartheta_0,$$

so erhält man aus der vierten Gleichung:

$$\ddot{\vartheta} - \alpha_1 \dot{\vartheta}^2 + \alpha \sin (\vartheta - \vartheta_0) = 0.$$

Wenn  $\alpha_1$  eine negative und  $\alpha$  eine positive Konstante ist, so sagt diese Gleichung aus, daß die Bewegung des Fadens erfolgt wie die eines

1) S. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung Schubert Bd. 50), Leipzig 1905, S. 298 ff.

Pendels von der Länge  $g/\alpha$  in einem Mittel, dessen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Setzt man  $\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta_1$ , so lautet das Integral:

$$t + C = \int \frac{d\vartheta_1}{e^{\alpha_1 \vartheta_1} \left[ B + \frac{2\alpha e^{-2\alpha_1 \vartheta_1}}{4\alpha_1^2 + 1} (2\alpha_1 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1) \right]^{1/2}}$$

Wird ein ebener, unausdehnbarer, homogener Faden dem Einfluß von bestimmten nur vom Bogen abhängigen Kräften ausgesetzt, so kann er sich, ohne seine Gestalt zu ändern, wie ein Pendel bewegen, welches in einem Mittel schwingt, dessen Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Die Gestalt des Fadens ist dieselbe, wie wenn Kräfte wirken. (Über die Endspannung vgl. S. 82.)

Da  $X, Y$  reine Funktionen von  $a$  sind, so hängt die Richtung der äußeren Kraft bezüglich des festen Systems von der Zeit nicht ab; während also der Faden rotiert, bleibt sich die an demselben Fadenpunkt angreifende Kraft stets parallel.

9. Wir haben bisher nur einen Faden von konstanter Dichte betrachtet. Im folgenden wollen wir nun die *Dichte* als *Funktion des Bogens* annehmen. Von äußeren Kräften möge wieder abgesehen werden.

Setzt man in (6):  $U = V = 0$ , so folgt:

$$(18) \quad \ddot{\vartheta} \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) + v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] + \dot{\vartheta}^2 \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) - v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \right] + \lambda_0 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] = 0.$$

Wir haben wiederum nur zwei Fälle zu unterscheiden:

1. *Fall:*

$$(19) \quad \begin{cases} u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) + v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) = k_1 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] \\ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) - v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) = k_2 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] \\ k_1 \ddot{\vartheta} + k_2 \dot{\vartheta}^2 + \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) (u - k_1 \sin \alpha_0) + \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) (v + k_1 \cos \alpha_0) &= 0 \\ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) (-v - k_2 \sin \alpha_0) + \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) (u + k_2 \cos \alpha_0) &= 0. \end{aligned}$$

90 Ungleichförmige Bewegungen eines Fadens, bei d. er seine Gestalt nicht ändert.

Nun setzt man:

$$\begin{aligned} p &= u + k_2 \cos \alpha_0 & m &= -k_2 \cos \alpha_0 - k_1 \sin \alpha_0 \\ q &= v + k_2 \sin \alpha_0 & n &= k_1 \cos \alpha_0 - k_2 \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Damit wird:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} (p + m) \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) + (q + n) \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) &= 0 \\ p \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) - q \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) &= 0 \\ \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) \right]^2 + \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) \right]^2 &= 1. \end{aligned} \right.$$

Da die Differentialquotienten nicht beide gleichzeitig verschwinden können, so kann man sie eliminieren und erhält:

$$p(p + m) + q(q + n) = 0.$$

Bedeutet  $B$  eine Konstante, so folgt aus der zweiten Gleichung in (20) durch Integration:

$$\Theta \left( p \frac{dq}{da} - q \frac{dp}{da} \right) = B,$$

also

$$\Theta = \frac{B}{p \frac{dq}{da} - q \frac{dp}{da}}.$$

Es sind nun noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p(p + m) + q(q + n) &= 0 \\ \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) \right]^2 + \left[ \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) \right]^2 &= 1 \end{aligned}$$

zu erfüllen. Die erstere stellt im  $(p, q)$ -System einen Kreis dar; um sie zu befriedigen, setzen wir:

$$\begin{aligned} p + \frac{m}{2} &= \sigma \sin \varphi & \frac{m}{2} &= -\sigma \sin \varphi_0 \\ q + \frac{n}{2} &= -\sigma \cos \varphi & \frac{n}{2} &= \sigma \cos \varphi_0, \end{aligned}$$

wo  $\sigma$  und  $\varphi_0$  Konstanten sind, somit:

$$\begin{aligned} p &= \sigma (\sin \varphi + \sin \varphi_0) & \frac{dp}{da} &= \sigma \cos \varphi \frac{d\varphi}{da} \\ q &= -\sigma (\cos \varphi + \cos \varphi_0) & \frac{dq}{da} &= \sigma \sin \varphi \frac{d\varphi}{da}, \end{aligned}$$

also

$$\Theta = \frac{B}{\sigma^2 \frac{d\varphi}{da} [1 + \cos(\varphi - \varphi_0)]}.$$

Ferner ist

$$\frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) = - \frac{B (\sin \varphi + \sin \varphi_0)}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]^2} \frac{d\varphi}{da}$$

$$\frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) = \frac{B (\cos \varphi + \cos \varphi_0)}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]^2} \frac{d\varphi}{da}.$$

Aus der dritten Gleichung von (20) erhält man damit

$$\frac{2 B^2}{\sigma^2} \left( \frac{d\varphi}{da} \right)^2 = [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]^3,$$

also, wenn  $C$  eine Konstante bedeutet:

$$a + C = \int \frac{\sqrt{2} B d\varphi}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]^{3/2}}.$$

Setzt man

$$\frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dp}{da} \right) = \cos \alpha, \quad \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dq}{da} \right) = \sin \alpha$$

und gibt man  $\frac{d\varphi}{da}$  das positive Zeichen, so ist  $\alpha$  mit  $\varphi$  durch die Gleichung  $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0 + \pi)$  verbunden, woraus ersichtlich ist, daß die Konstante  $C$  so bestimmt werden kann, daß für  $a = a_0$   $\alpha = \alpha_0$  wird. Damit folgt aber aus (19), daß die Bedingung, welcher die Variablen  $u, v$  unterliegen, nämlich für  $a = a_0$  zu verschwinden, erfüllt ist.

Weil

$$x_1 = \Theta \frac{dp}{da}, \quad y_1 = \Theta \frac{dq}{da},$$

so wird

$$x_1 = \frac{B \cos \varphi}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]}, \quad y_1 = \frac{B \sin \varphi}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]}$$

oder, wenn

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi$$

gesetzt wird

$$r = \frac{B}{\sigma [1 + \cos (\varphi - \varphi_0)]}.$$

Dies aber ist die Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten, deren Pol der Brennpunkt ist. Mit Hilfe von (21) erhält man

$$\Theta = \frac{r}{\sigma \frac{d\varphi}{da}},$$

woraus ersichtlich ist, daß, wenn  $\sigma$  positiv gewählt wird, auch  $\frac{d\varphi}{da}$  positiv zu nehmen ist. Für die Dichte ergibt sich

$$(22) \quad \Psi = \frac{\sqrt{B\sigma}}{\sqrt{2} \cdot r^{5/2}},$$

d. h. die Dichte erreicht ihren größten Wert im Scheitel der Parabel, von da an nimmt sie mehr und mehr ab und verschwindet im Unend-

lichen. Aus der dritten Gleichung in (19) folgt, daß die Winkelgeschwindigkeit in Funktion von  $t$  beliebig gewählt werden kann, ist dies geschehen, so ist die Endspannung  $\lambda_0$  bestimmt.

Wird ein unausdehnbarer biegsamer Faden, welcher das unter (22) angegebene Dichtegesetz besitzt, in Gestalt einer Parabel auf eine horizontale Ebene gelegt und werden ferner die Enden des Fadens mit der Ebene fest verbunden, so kann die Ebene um eine durch den Brennpunkt der Parabel gehende, zur Ebene senkrechte Achse mit beliebig variierender Winkelgeschwindigkeit in Umdrehung versetzt werden, ohne daß der Faden seine Gestalt verändert. Dies ist, sofern von Kräften abgesehen wird, der einzige Fall, bei welchem die Winkelgeschwindigkeit in Funktion der Zeit beliebig gewählt werden kann.<sup>1)</sup>

Für die Spannung gewinnt man

$$\lambda = 2\sigma \left( \ddot{\vartheta} \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} + \dot{\vartheta}^2 \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right).$$

Ist hierin  $\dot{\vartheta}$  in Funktion von  $t$  gewählt, so wird es im allgemeinen einen Punkt auf dem Faden geben, für welchen  $\lambda$  verschwindet; das ihm zugehörige  $\varphi$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = - \frac{\ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^2}.$$

Hierdurch ist  $\varphi$  in Funktion von  $t$  bestimmt, d. h. der Punkt, für welchen  $\lambda$  verschwindet, wandert längs des Fadens. Es ist daher für ein bestimmtes Fadenstück die Spannung im allgemeinen nur in einem gewissen Zeitintervall positiv.

Für  $\Theta = 1$  erhält man die Gleichungen (8). Setzt man nun in (22)  $\Psi = 1$ , so folgt  $r = \text{const.}$  und damit aus (21)  $\varphi = \text{const.}$ , d. h. die Gleichungen (8) sind nicht verträglich miteinander.

10. Die Relation (18) wird auch erfüllt durch das System

$$\begin{aligned} k_1 \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) + v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] + \left[ u \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) - v \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) \right] \\ + k_2 \left[ \sin \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{du}{da} \right) - \cos \alpha_0 \frac{d}{da} \left( \Theta \frac{dv}{da} \right) \right] = 0 \\ \ddot{\vartheta} = k_1 \dot{\vartheta}^2 \\ \lambda_0 = k_2 \dot{\vartheta}^2. \end{aligned}$$

---

1) Wegen einer Herleitung dieses Falles aus den natürlichen Gleichungen für das Gleichgewicht eines Fadens vgl. meine Diss. Tübingen 1912.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich, wenn man wieder durch (11) die  $p, q$  einführt und  $k_1 = \operatorname{tg} \varepsilon$  setzt:

$$\frac{d}{da} \left( \varrho \frac{dp}{da} \right) = \frac{p \cos \varepsilon + q \sin \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$\frac{d}{da} \left( \varrho \frac{dq}{da} \right) = - \frac{p \sin \varepsilon + q \cos \varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

und durch Einführung der Polarkoordinaten  $R, \Phi$  folgen auch hieraus wieder die Beziehungen

$$\Phi = \alpha + \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{da} = \frac{1}{\varrho}$$

## Rechenschieber zur Berechnung von Funktionen mit drei, vier und fünf Veränderlichen.

Von P. WERKMEISTER in Straßburg i. E.

### 1. Einleitung.

Die für die Ausrechnung mit dem Rechenschieber in Betracht kommenden Funktionsformen sind<sup>1)</sup>

- (1)  $f(x) = \varphi_1(a) \pm \varphi_2(b) \pm \varphi_3(c) \pm \dots$
- (2)  $f(x) = \varphi_1(a, b) \pm \varphi_2(c, d) \pm \dots$
- (3)  $f(x) = \varphi_1(a, b, c) \pm \varphi_2(d, e, f) \pm \dots$

Auf die Form (1) können auch Funktionen von der Form

$$F(x) = \frac{f_1(a)f_2(b)\dots}{\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta)\dots}$$

durch Logarithmieren gebracht werden.

Die Berechnung einer Funktion mit Hilfe eines Rechenschiebers wird im allgemeinen nur dann einen Vorteil bieten, wenn es möglich ist, den Rechenschieber so einzurichten, daß keine Zwischenablesungen ausgeführt werden müssen.

Die mechanische Addition bzw. Subtraktion der einzelnen Glieder der Gleichungen (1), (2) und (3) kann mit Hilfe von entsprechend angeordneten Teilungen auf dem Stab, der Zunge oder dem Läufer ausgeführt werden. Zur Berechnung der Glieder der Gleichungen (2) und (3), die selbst Funktionen von mehr als einer Veränderlichen vorstellen, sind binäre Skalen erforderlich, deren Hauptbestandteil — be-

<sup>1)</sup> Bei den Formen (2) und (3) können  $a, b, c \dots$  selbst Funktionen von je einer Veränderlichen sein.

stehend in einer Kurvenschar — entweder auf dem Stab oder der Zunge oder der durchsichtigen Platte eines Läufers angebracht werden kann. Sind für eine Funktion verschiedene Rechenschieberformen möglich, so wird man im allgemeinen — abgesehen von der technischen Ausführung — derjenigen Form den Vorzug geben, welche für die Berechnung des Funktionswertes die geringste Anzahl von Einstellungen der Zunge und des Läufers erfordert.

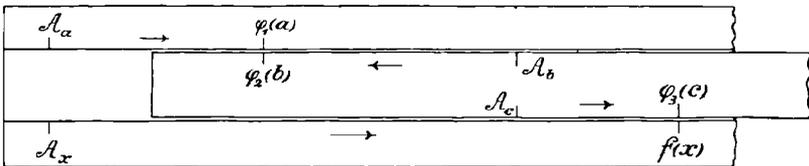
2. Funktionen mit drei Veränderlichen.

a) Die zu berechnende Funktion sei von der Form<sup>1)</sup>

(1)  $f(x) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b) + \varphi_3(c).$

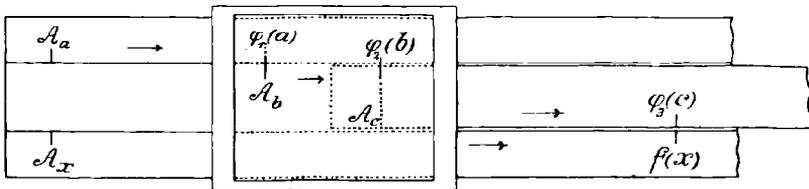
Die Berechnung einer Funktion von dieser Form mit Hilfe eines Rechenschiebers besteht im einfachsten Fall in der Addition der drei Glieder  $\varphi_1(a)$ ,  $\varphi_2(b)$  und  $\varphi_3(c)$ . Zwei hierfür in Betracht kommende Schiebereinrichtungen sind im folgenden angedeutet.

Fig. 1.



Die von Ch. A. Vogler angegebene<sup>2)</sup>, in der Figur 1 dargestellte Einrichtung besteht darin, daß auf dem Stab die Skalen für  $\varphi_1(a)$  und  $f(x)$ , und auf der Zunge diejenigen für  $\varphi_2(b)$  und  $\varphi_3(c)$  in entsprechendem Sinn angebracht sind, und zwar derart, daß die Anfangsstriche  $A_a$  und  $A_x$  bzw.  $A_b$  und  $A_c$  übereinander liegen.

Fig. 2.



Bei der anderen, in der Figur 2 gezeichneten Einrichtung, sind ebenfalls die Skalen für  $\varphi_1(a)$  und  $f(x)$  auf dem Stab, mit den An-

1) Es wird hier und im folgenden der Einfachheit halber angenommen, daß sämtliche Glieder der Funktion durch das Zeichen Plus verbunden sind; der Einfluß des Zeichens Minus ist in jedem Fall leicht ersichtlich.

2) Zeitschrift für Vermessungswesen 1881, S. 257.

fangspunkten übereinander angeordnet; die Skala für  $\varphi_3(c)$  befindet sich an der unteren Zungenkante, und diejenige für  $\varphi_2(b)$  auf der Glasplatte des Läufers. Diese Einrichtung des Schiebers kommt mit Rücksicht auf die Größe des Glasläufers, die — wenn auch über das übliche Maß hinausgehend — doch immerhin eine beschränkte sein wird, nur für solche Funktionen in Betracht, bei denen der Umfang einer der Skalen — z. B.  $\varphi_2(b)$  — gering ist.

Die zuletzt angegebene Einrichtung wurde von E. Hammer bei einem zum Berechnen von barometrisch gemessenen Höhenunterschieden bestimmten Rechenschieber benützt.<sup>1)</sup>

Die beiden angedeuteten Anordnungen unterscheiden sich u. a. dadurch, daß bei der ersten der Stab und die Zunge voll ausgenützt sind, während dies bei der zweiten nicht der Fall ist, indem die eine Zungenkante keine Teilung trägt. Dieser Umstand bedeutet für die zweite Anordnung einen Vorteil für den Fall, daß man die noch freie Zungenkante zur Unterbringung einer zur Ausführung von anderen Rechnungen benützbaren Teilung verwerten kann; im anderen Fall bedeutet die nicht volle Ausnützung der Zunge einen Nachteil.

Die Addition der Glieder der Funktion (1) kann auch zum Teil mit Hilfe einer binären Skala vorgenommen werden. Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$f(x) = \psi(a, b) + \varphi_3(c) \quad \text{wo} \quad \psi(a, b) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b),$$

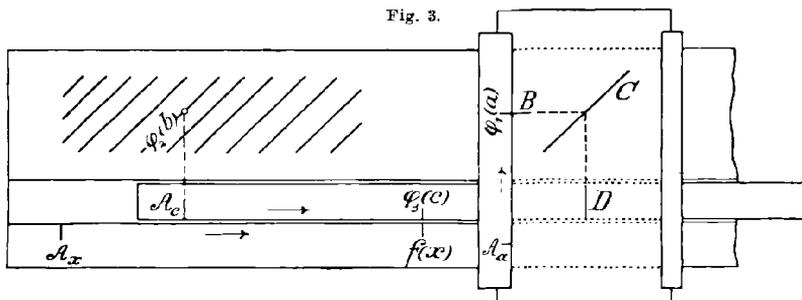
so entspricht der Funktion  $\psi(a, b)$  eine durch eine Geradenschar bestimmte binäre Skala, die man entweder auf dem Stab oder der Zunge oder der Glasplatte eines Läufers anbringen kann. Mit Rücksicht auf die Weiterrechnung — bestehend in der Addition von  $\varphi_3(c)$  und  $\psi(a, b)$  — muß die binäre Skala so gebaut sein, daß die Abszissen in entsprechender Richtung nach  $\psi(a, b)$  beziffert sind.

Bringt man die binäre Skala auf dem Stab an, so kann man dem Schieber die in der Figur 3<sup>2)</sup> angedeutete Einrichtung geben. Die nach  $\varphi_1(a)$  bezifferte Ordinaten skala ist auf der seitlichen Fassung eines Glasläufers angebracht, dessen Glasplatte sich quer zur Stabrichtung verschieben läßt. Der Stab trägt von der binären Skala die nach  $\varphi_2(b)$  bezifferte Geradenschar. An der oberen Stabkante ist Platz für die — nicht unbedingt erforderliche, in der Figur deshalb nicht angegebene — Teilung für  $\psi(a, b)$ ; an der anderen Stabkante ist die nach  $f(x)$  bezifferte Teilung aufgetragen. Anliegend an der letzteren Teilung

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1896, S. 161.

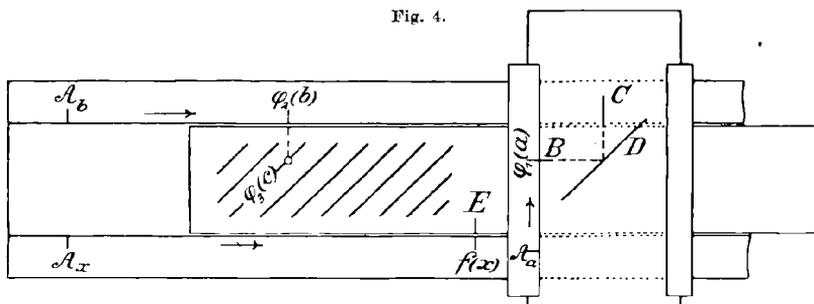
2) Die binäre Skala ist bei dieser Figur und den folgenden Figuren nur schematisch angegeben.

trägt die eine Zungenkante die Teilung für  $\varphi_3(c)$ . Die Glasplatte des Läufers trägt drei Einstellstriche, von denen der Strich *B* zum Ein-



stellen der Glasplatte auf  $\varphi_1(a)$ , der Strich *C* zum Einstellen des Läufers auf  $\varphi_2(b)$  und der Strich *D* zum Einstellen des Anfangsstriches  $\mathcal{A}_\alpha$  der Zungenskala  $\varphi_3(c)$  dient.

Benützt man die Zunge als Träger für die binäre Skala, so kann man die weitere Einrichtung des Schiebers auf zwei verschiedene Arten treffen, wobei eine in beiden Fällen quer zur Schieberrichtung ver-



schiebbare Platte aus durchsichtigem Stoff (Glas oder Zelluloid) vorhanden ist, die in der Längsrichtung das eine Mal ebenfalls verschiebbar, das andere Mal fest ist.

Die Einrichtung mit in beiden Richtungen verschiebbarer Platte ist in der Figur 4 dargestellt. Die nach  $\varphi_2(b)$  und  $f(x)$  bezifferten Skalen sind an den beiden Stabkanten angebracht; auf der Zunge befindet sich nur die Geradenschar  $\varphi_3(c)$  der binären Skala. Die Läuferplatte besitzt drei Einstellmarken, von denen der Strich *B* zum Einstellen der Läuferplatte auf  $\varphi_1(a)$  an der auf der seitlichen Läuferfassung angegebenen Skala, der Strich *C* zum Einstellen des Läufers auf  $\varphi_2(b)$  und der Strich *D* zum Einstellen der Zunge mit Hilfe von  $\varphi_3(c)$  dient; die Ablesung von  $f(x)$  geschieht mittels der Zungenmarke *E*.

Bringt man die quer verschiebbare Platte in der Längsrichtung fest auf dem Schieber an, so erhält man die in Figur 5 gezeichnete Einrichtung. Die Teilung für  $\varphi_1(a)$  ist hier an der einen Führungs-

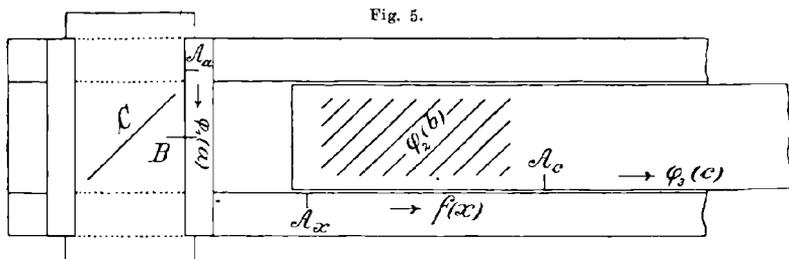


Fig. 5.

leiste der Platte angebracht; auf der Zunge befindet sich die nach  $\varphi_2(b)$  bezifferte Geradenschar der binären Skala und die Teilung für  $\varphi_3(c)$ ; anliegend an der letzteren trägt der Stab die Teilung für  $f(x)$ . Die Platte ist hier nur mit zwei Marken versehen, von denen die eine —  $B$  — zum Einstellen der Platte auf  $\varphi_1(a)$  und die andere —  $C$  — zum Einstellen der Zunge auf  $\varphi_2(b)$  dient. Die Einstellung von  $\varphi_3(c)$  und damit die Ablesung von  $f(x)$  wird am besten mit Hilfe eines ge-

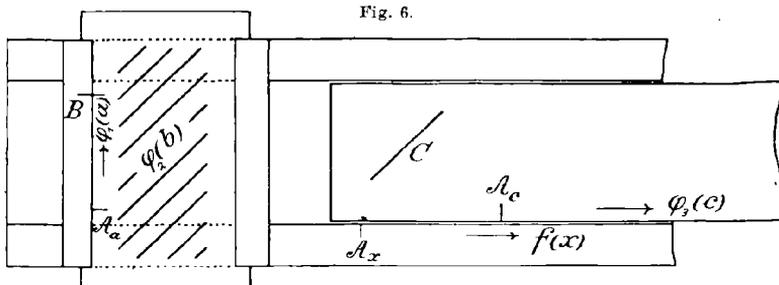


Fig. 6.

wöhnlichen — nicht unbedingt erforderlichen — Glasläufers vorgenommen. Zur Unterscheidung werden im folgenden die beiden Läufer — entsprechend der Richtung ihrer Verschiebbarkeit — als Quer- und Längsläufer bezeichnet.

Wird als Träger für die Geradenschar der binären Skala die durchsichtige Platte eines Läufers benutzt, die dann quer zum Schieber verschiebbar sein muß, so kann man ebenfalls — entsprechend der Trennung bzw. Vereinigung von Quer- und Längsläufer — zwei Einrichtungen unterscheiden.

Die Einrichtung mit besonderem Querläufer zeigt die Figur 6. Die Platte des Querläufers trägt die  $\varphi_1(a)$ -Skala und die nach  $\varphi_2(b)$  bezifferte Geradenschar; die Teilungen für  $\varphi_3(c)$  und  $f(x)$  sind auf an-

liegenden Kanten von Zunge und Stab angebracht. Die Einstellung des Läufers geschieht mit Hilfe der an der Führungsleiste angebrachten Marke  $B$  und der Skala  $\varphi_1(a)$ ; die Zunge wird mittels der Marke  $C$  auf die betreffende  $\varphi_2(b)$ -Gerade eingestellt. Für die Einstellung von  $\varphi_3(c)$  und die Ablesung von  $f(x)$  wird zweckmäßigerweise ein gewöhnlicher Längsläufer benutzt.

Die Einrichtung, bei der Quer- und Längsläufer vereinigt sind, ergibt sich aus den in den Figuren 4 und 6 dargestellten Einrichtungen.

Die angegebenen Einrichtungen des Rechenschiebers, bei denen eine binäre Skala zur Anwendung gelangt, kommen mit Rücksicht auf die Breite des Schiebers, und für den Fall, daß die Zunge die binäre Skala trägt, insbesondere mit Rücksicht auf die Breite der Zunge zunächst für solche Funktionen  $f(x)$  in Frage, bei denen eine der Skalen — z. B. diejenige für  $\varphi_1(a)$  — eine geringe Ausdehnung erfordert.

Die beiden, in den Figuren 3 und 4 angegebenen Anordnungen, bei denen der Querläufer mit dem Längsläufer vereinigt ist, sind mit Rücksicht auf die bei der technischen Ausführung sich bietenden Schwierigkeiten und insbesondere die erforderliche Unveränderlichkeit der Lage der Querskala  $\varphi_1(a)$  im Nachteil gegenüber derjenigen Anordnung, bei der Quer- und Längsläufer getrennt sind.

Auf die Verwendung von binären Skalen bei rechenschieberartigen Rechenhilfsmitteln haben M. d'Ocagne<sup>1)</sup> und R. Soreau<sup>2)</sup> aufmerksam gemacht. Ein mit Quer- und Längsläufer versehener Rechenschieber wurde für die Zwecke der barometrischen Höhenmessung nach den Angaben von P. Werkmeister<sup>3)</sup>, von der Firma A. Nestler in Lahr i. B. gefertigt.

Die Verwendung einer binären Skala zur Berechnung einer Funktion von der Form (1) ist — wie aus den in den Figuren 1 und 2 angedeuteten Einrichtungen hervorgeht — nicht erforderlich; sie bedingt — abgesehen von der etwas geringeren Übersichtlichkeit bei der Rechnung — unter Umständen insofern einen Nachteil, als der Stab und die Zunge nicht vollständig ausgenutzt werden. Dieser letztere Umstand bildet einen Vorteil, sobald es möglich ist, an den freien Stab- und Zungenkanten Teilungen für andere Zwecke anzubringen, oder der ganzen Einrichtung einen gewöhnlichen Rechenschieber zugrunde zu legen, wie dies bei dem zuletzt angeführten Schieber für die Zwecke der barometrischen Höhenmessung geschehen ist.

1) *Traité de Nomographie*, Paris 1899, S. 362.

2) *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie*, Paris 1901.

3) Vgl. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1911, S. 972.

Bei den angeführten Rechenschieberkonstruktionen ist bei keiner die Ausführung einer Zwischenablesung erforderlich. Bei allen Einrichtungen ist je eine Zungeneinstellung auszuführen; außerdem drei Einstellungen des Läufers bei der Einrichtung der Figur 3 und zwei bei denen der fünf übrigen Figuren. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Einstellungen zeigt also nur diejenige Einrichtung einen kleinen Nachteil, bei der die Geradenschar der binären Skala auf dem Stab angebracht ist.

Für den Fall, daß der Wert von  $x$  und die Werte von zwei der drei Veränderlichen gegeben sind, und der zugehörige Wert der dritten Veränderlichen gesucht ist, lassen sich alle Einrichtungen gleich bequem verwenden; es ist bei keiner die Ausführung einer Zwischenablesung erforderlich.

Die im vorstehenden angeführten Einrichtungen lassen sich bei mehr als drei Veränderlichen je nach Form der Funktion in passender Weise verbinden.

Ist die zu berechnende Funktion von der Form

$$f(x) = k + \varphi_1(a) + \varphi_2(b) + \varphi_3(c),$$

wo  $k$  eine konstante Größe bedeutet, so läßt sich die mechanische Addition von  $k$  in einfacher Weise dadurch ausführen, daß man die Anfangsstriche der betreffenden Skalen um das Stück  $k$  entsprechend verschiebt.

b) Die zu berechnende Funktion sei von der Form

$$(2) \quad f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c).$$

Eine Funktion von dieser Form erfordert die Einführung einer binären Skala, wozu eine der in den Figuren 3, 4, 5 und 6 dargestellten Einrichtungen benutzt werden kann; der einzige Unterschied dabei besteht darin, daß an Stelle der Geradenschar vielfach eine Schar von Kurven tritt, deren Geradmachung jedoch im allgemeinen ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden kann.

### 3. Funktionen mit vier Veränderlichen.

a) Die Funktion sei von der Form

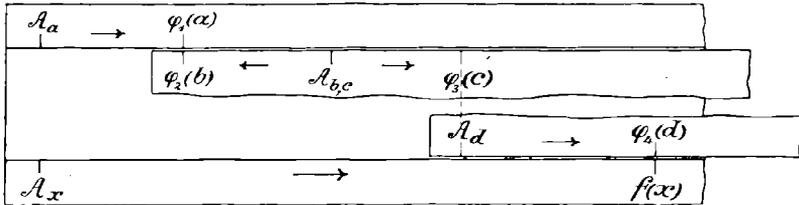
$$(1) \quad f(x) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b) + \varphi_3(c) + \varphi_4(d).$$

Die Einrichtung eines Rechenschiebers zur Berechnung einer Funktion von der angegebenen Form kann ohne oder mit Benutzung einer binären Skala ausgeführt werden. Findet keine solche Verwendung, so kann man die fünf erforderlichen Teilungen auf dem Stab und der Zunge allein oder auch noch auf dem Läufer anordnen.

Soll der Läufer nicht als Skalenträger verwendet werden, so kann man z. B. die in der Figur 7 gezeichnete Einrichtung treffen.<sup>1)</sup>

Der Stab trägt die nach  $\varphi_1(a)$  und  $f(x)$  bezifferten Teilungen; diejenigen für  $\varphi_2(b)$ ,  $\varphi_3(c)$  und  $\varphi_4(d)$  können in der in der Figur angegebenen Weise<sup>2)</sup> an den Zungenkanten angebracht werden. Die Addition

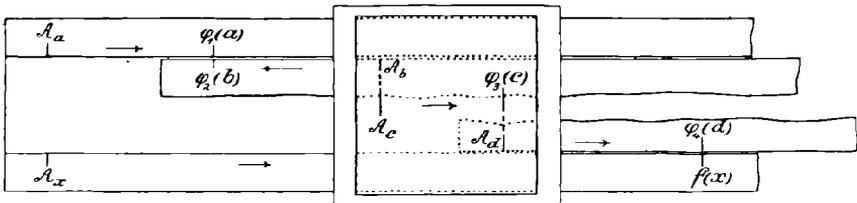
Fig. 7.



der drei ersten Glieder der Gleichung (1) kann mit einer Zungeneinstellung ausgeführt werden; zur Addition des vierten Gliedes ist das Festhalten — nicht Ablesen — eines Zwischenresultates mit Hilfe des Läufers und eine Neueinstellung der Zunge für die nach  $\varphi_4(d)$  bezifferte Skala erforderlich. Im ganzen sind drei Läufer-einstellungen und zwei Zungen-einstellungen auszuführen.

Eine Einrichtung, bei der auch der Glasläufer als Träger für eine Skala verwendet wird, zeigt die Figur 8. Als Läufer-skala ist diejenige

Fig. 8.



für  $\varphi_3(c)$  angenommen. An Einstellungen sind ebenfalls drei des Läufers und zwei der Zunge nötig. Die Länge der auf dem Läufer angebrachten Skala darf auch hier mit Rücksicht auf die Größe des Läufers eine gewisse Grenze nicht übersteigen.

1) Eine ähnliche Einrichtung, bei der auch nur die Stab- und Zungenkanten als Skalenträger verwendet werden, würde man bei Verwendung von mehr als einer Zunge erhalten (vgl. Ch. A. Vogler a. a. O.).

2) Je nach den erforderlichen Längen der einzelnen Zungenskalen kann man an einer Kante zwei, aneinander anstoßende Skalen anbringen, oder kann man auch — was aber eine weitere Läufer-einstellung erfordert — die eine der drei Skalen in der Mitte der Zunge zwischen den beiden andern anbringen.

Verwendet man — z. B. zur Addition von  $\varphi_1(a)$  und  $\varphi_2(b)$  — eine binäre Skala, so kann man dem Schieber z. B. die in der Figur 9 angedeutete Einrichtung geben. Die Teilung für  $\varphi_1(a)$  ist auf einer Führungsleiste des Querläufers angegeben; die nach  $\varphi_2(b)$  bezifferte Geradenschar ist auf der Zunge angebracht. Die beiden Teilungen für

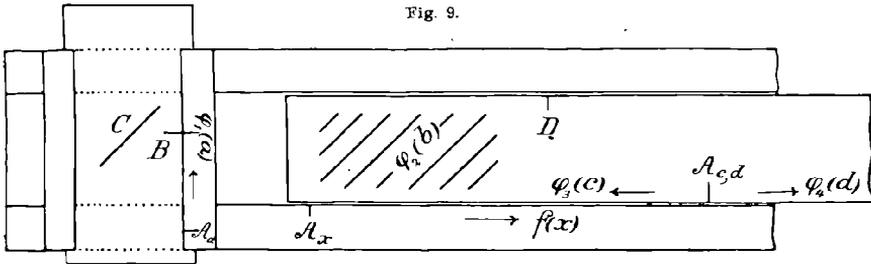


Fig. 9.

$\varphi_3(c)$  und  $\varphi_4(d)$  sind an derselben Zungenkante nebeneinander angetragen; die anliegende Stabkante trägt die Teilung für  $f(x)$ . Die Einstellung des Querläufers wird mittels der Marke  $B$  und der  $\varphi_1(a)$ -Skala vorgenommen; die Marke  $C$  dient zum Einstellen der Zunge auf  $\varphi_2(b)$ . Die durch  $\varphi_1(a)$  und  $\varphi_2(b)$  bestimmte Stellung der Zunge hält man mit Hilfe der Marke  $D$  und des — in der Figur nicht angegebenen — Längsläufers fest, um sodann die durch  $\varphi_3(c)$  bestimmte Zungeneinstellung vornehmen zu können. Zusammen sind auch hier zwei Einstellungen der Zunge und drei der beiden Läufer vorzunehmen.

Ebenso wie die Addition von  $\varphi_1(a)$  und  $\varphi_2(b)$  kann auch diejenige von  $\varphi_3(c)$  und  $\varphi_4(d)$  mit Hilfe einer binären Skala vorgenommen werden. Damit die Addition von  $\{\varphi_1(a) + \varphi_2(b)\}$  und  $\{\varphi_3(c) + \varphi_4(d)\}$  ebenfalls mechanisch mit Hilfe des Schiebers ausgeführt werden kann, müssen die beiden auftretenden binären Skalen so konstruiert sein, daß bei ihnen die Abszissen nach  $\{\varphi_1(a) + \varphi_2(b)\}$  bzw. nach  $\{\varphi_3(c) + \varphi_4(d)\}$  beziffert sind; dabei ist die Richtung der Bezifferung der Abszissen bei beiden Skalen der gegebenen Funktionsform entsprechend zu wählen.

Eine für zwei binäre Skalen in Betracht kommende Einrichtung ist in der Figur 10 gezeichnet. Die beiden Führungsleisten des Querschleibers tragen die beiden Teilungen für  $\varphi_1(a)$  und  $\varphi_3(c)$ ; die beiden nach  $\varphi_2(b)$  und  $\varphi_4(d)$  bezifferten Geradenscharen sind auf der Zunge angebracht, die außerdem an einer Kante die Teilung für  $f(x)$  trägt. Bei Benutzung des Schiebers sind der Querläufer und die Zunge je zweimal einzustellen. Die erste Einstellung des Querläufers geschieht mit Hilfe der Marke  $B$  an der Skala für  $\varphi_1(a)$ ; hierauf erfolgt die erste Einstellung der Zunge mittels der Marke  $C$  auf  $\varphi_2(b)$ . Die durch  $\varphi_1(a)$  und  $\varphi_2(b)$  bestimmte Stellung der Zunge wird mit Hilfe des

Anfangsstriches  $A_x$  der Teilung für  $f(x)$  durch den Längsläufer festgehalten. Die zweite Einstellung des Querläufers wird mittels der Marke  $D$  an der nach  $\varphi_3(c)$  bezifferten Skala vorgenommen; die zweite Zungeneinstellung erfolgt dann mit der Marke  $C$  auf  $\varphi_4(d)$ . Die Ablesung erfolgt unter dem Strich des durch die erste Zungeneinstellung

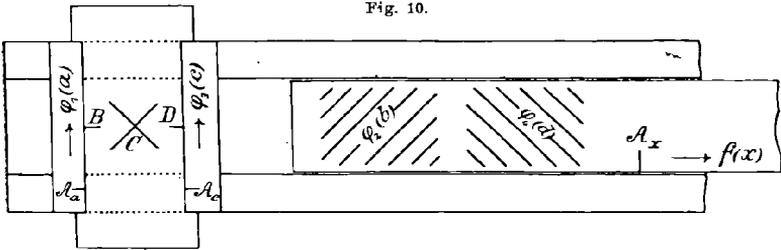


Fig. 10.

festgelegten Längsläufers. Zusammen sind auch hier zwei Einstellungen der Zunge und drei der Läufer vorzunehmen; in bezug auf die Anzahl der auszuführenden Einstellungen der Zunge und der Läufer sind demnach die vier angeführten Einrichtungen gleichwertig.

Über die Verwendung von binären Skalen, insbesondere hinsichtlich der Ausnutzung der Stab- und Zungenkanten gilt das schon oben bei den Einrichtungen für Funktionen mit drei Veränderlichen Gesagte. Unumgänglich ist auch hier die Anwendung von binären Skalen nicht, wie die Einrichtungen der Figuren 7 und 8 zeigen. Die durch die Einführung von binären Skalen bedingte geringere Übersichtlichkeit bei der Benutzung eines Schiebers tritt natürlich bei Verwendung von zwei solchen Skalen noch mehr in Erscheinung.

Für den Fall, daß gelegentlich  $x$  gegeben und eine der vier andern Veränderlichen gesucht ist, können alle vier Einrichtungen benutzt werden.

Eine Zwischenablesung ist bei keiner der angegebenen Einrichtungen erforderlich.

b) Die Funktion sei von der Form

$$(2a) \quad f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c) + \varphi_3(d)$$

Zur Berechnung einer Funktion von dieser Form ist die Einführung einer binären Skala erforderlich; hierzu kann die in der Figur 9 angegebene Einrichtung gewählt werden, wobei jedoch im allgemeinen an Stelle der Geraden der binären Skala zunächst Kurven treten. Die Einführung einer zweiten binären Skala ist nicht notwendig.

c) Hat die zu berechnende Funktion die Form

$$(2b) \quad f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c, d),$$

so ist man gezwungen, zwei binäre Skalen zu verwenden; diese müssen derart konstruiert sein, daß ihre Abszissen nach  $\varphi_1(a, b)$  bzw.  $\varphi_2(c, d)$  beziffert sind, so daß die Addition der beiden Glieder mechanisch mit Hilfe des Schiebers ausgeführt werden kann.

Die Einrichtung eines zur Berechnung der angegebenen Funktionsform benutzbaren Schiebers ist diejenige der Figur 10, wobei auch hier hinsichtlich der beiden Geradenscharen die oben gemachte Bemerkung gilt.

d) Die Funktion habe die Form

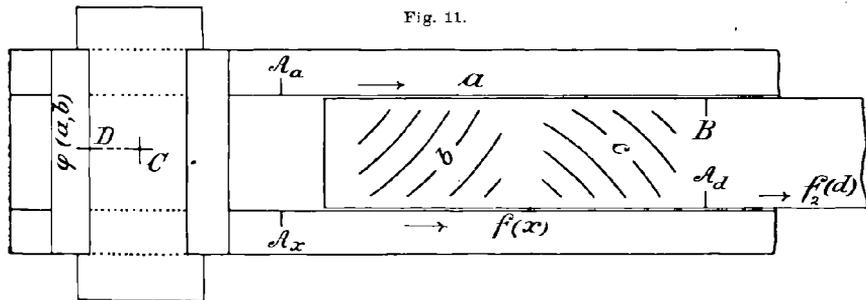
$$(3) \quad f(x) = f_1(a, b, c) + f_2(d).$$

Setzt man in dieser Gleichung z. B.

$$f_1(a, b, c) = f_1(\varphi(a, b), c),$$

so sieht man, daß zur Berechnung von  $f(x)$  zwei binäre Skalen — die eine für  $\varphi(a, b)$  und die andere für  $f_1$  — erforderlich sind. Um die Addition von  $f_1$  und  $f_2$  mechanisch mittels des Schiebers vornehmen zu können, muß bei der binären Skala für  $f_1$  die Abszisse nach  $f_1$  beziffert sein; ferner müssen bei beiden binären Skalen die Ordinaten die Bezifferung nach  $\varphi(a, b)$  haben. Dann tragen die Kurven bei der binären Skala für  $f_1$  die Bezifferung nach  $c$  und bei derjenigen für  $\varphi(a, b)$  z. B. nach  $b$ .

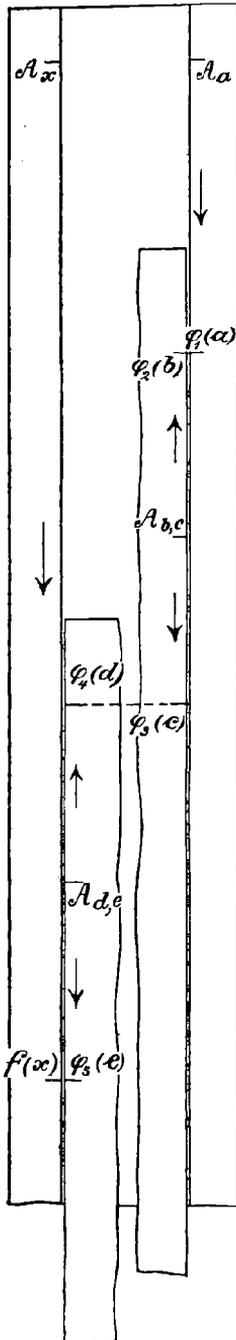
Die Anordnung der einzelnen Skalen auf dem Schieber ist in der Figur 11 in schematischer Weise dargestellt. Die beiden Stabkanten



tragen die Teilungen für  $a$  und  $f(x)$ ; die beiden nach  $b$  und  $c$  bezifferten Kurvenscharen sind auf der Zunge untergebracht, die außerdem — der Stabskala  $f(x)$  zugewandt — die nach  $f_2(d)$  bezifferte Skala trägt. Die Angabe einer Teilung für  $\varphi(a, b)$  auf der Führungsleiste des Querläufers ist nicht erforderlich.

Die Berechnung eines Funktionswertes  $f(x)$  beginnt mit der Einstellung der Zunge auf  $a$  mit Hilfe der Marke  $B$ ; stellt man sodann

Fig. 12.



die Marke  $C$  des Querläufers auf die betreffende  $b$ -Kurve, so ist die — nicht erforderliche — Marke  $D$  auf  $\varphi(a, b)$  eingestellt. Die zweite Zungeneinstellung erfolgt mit Hilfe der  $c$ -Kurven auf die Läufermarke  $C$ ; die Ablesung von  $f(x)$  geschieht bei  $f_2(d)$  mittels des Längsläufers. Im ganzen sind zwei Einstellungen der Läufer und zwei der Zunge erforderlich. Die Ausführung einer Zwischenablesung ist nicht nötig.

Die Einrichtung kann auch benutzt werden für den Fall, daß ausnahmsweise eine der vier Veränderlichen gesucht ist.

#### 4. Funktionen mit fünf Veränderlichen.

a) Die zu berechnende Funktion habe die Form

$$(1) f(x) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b) + \varphi_3(c) + \varphi_4(d) + \varphi_5(e).$$

Wie schon bei der Betrachtung von Funktionen mit nur drei Veränderlichen angedeutet wurde, können die dort angegebenen Einrichtungen verschieden kombiniert werden, wenn es sich um die Berechnung von Funktionen mit mehr als drei Veränderlichen handelt. Von den verschiedenen dadurch sich ergebenden Einrichtungen soll hier nur eine solche ohne binäre Skala angegeben werden. Die Einrichtung ist in der Figur 12 angedeutet; der Stab trägt die Teilungen für  $\varphi_1(a)$  und  $f(x)$ , diejenigen für die vier andern Veränderlichen sind an den beiden Zungenkanten je paarweise nebeneinander — mit gemeinsamem Anfangspunkt — angetragen. Die leicht übersehbare Berechnung von  $f(x)$  erfordert zwei Einstellungen der Zunge und drei des Läufers.

Andere Einrichtungen — mit Benutzung des Läufers als Skalenträger und mit Verwendung von binären Skalen — ergeben sich zum Teil aus den für drei und vier Veränderliche angegebenen Einrichtungen, zum Teil aus den im folgenden noch zu besprechenden.

b) Für eine Funktion von der Form

$$(2a) f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c) + \varphi_3(d) + \varphi_4(e)$$

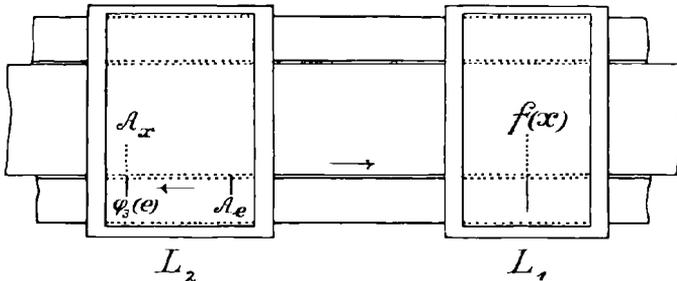
kann im Grundgedanken die in der Figur 9 angedeutete Einrichtung verwendet werden; sie erfordert nur die Hinzufügung einer weiteren, nach  $\varphi_4(e)$  bezifferten Teilung, die z. B. an der noch freien Zungenkante Platz finden kann. Die Einrichtung für die weitere Veränderliche erfordert eine Zungen- und eine LäuferEinstellung mehr.

c) Die Funktionsform

$$(2b) \quad f(x) = \varphi_1(a, b) + \varphi_2(c, d) + \varphi_3(e)$$

erfordert zwei binäre Skalen. Die Einrichtung eines hierfür in Betracht kommenden Schiebers ist im Grundgedanken die in der Figur 10 angegebene, der noch eine Vorrichtung zur Addition von  $\varphi_3(e)$  beizufügen ist. Eine solche ist in der Figur 13 angedeutet; sie besteht aus einem

Fig. 13.



zweiten Längsläufer  $L_2$ , der die Teilung für  $\varphi_3(e)$  trägt. Die erste Zungeneinstellung (vgl. das zur Figur 10 Gesagte) ergibt die Stellung des gewöhnlichen Läufers, der nach Ausführung der zweiten Zungeneinstellung die Ablesung  $\varphi_1(a, b) + \varphi_2(c, d)$  ergeben würde. Die Addition von  $\varphi_3(e)$  geschieht dadurch, daß man den zweiten Läufer mit Hilfe des Anfangsstriches  $A_e$  der  $\varphi_3(e)$ -Teilung auf den Anfangsstrich  $A_x$  der  $f(x)$ -Skala und sodann die Zunge mit dem Strich  $A_x$  auf  $\varphi_3(e)$  einstellt. Die Ablesung wird mittels des durch die erste Zungeneinstellung festgelegten Läufers  $L_1$  vorgenommen.

Zwischenablesungen sind bei der angedeuteten Einrichtung nicht auszuführen.

d) Die Funktion habe die Form

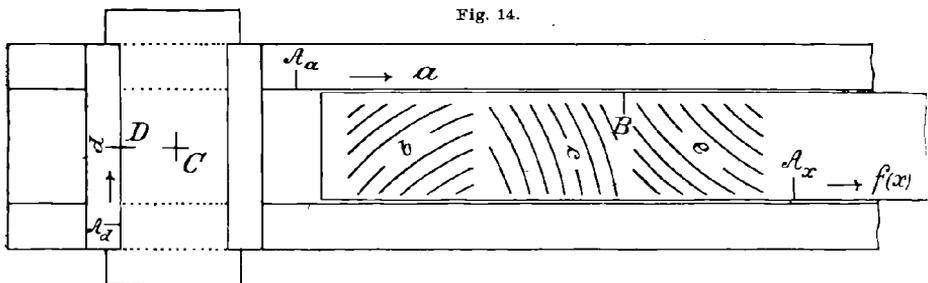
$$(3a) \quad f(x) = f_1(a, b, c) + f_2(d) + f_3(e)$$

Ein für diese Form eingerichteter Schieber ist in der Figur 11 gezeichnet; man hat nur noch auf der Zunge eine Teilung für  $f_3(e)$  — am besten anstoßend an diejenige für  $f_2(d)$  — anzubringen.

e) Die zu berechnende Funktion sei von der Form

$$(3b) \quad f(x) = f_1(a, b, c) + f_2(d, e).$$

Eine Schiebereinrichtung für diese Funktionsform ist in der Figur 14 schematisch angegeben; sie stellt eine Verbindung der in den Figuren 11 und 10 angedeuteten Einrichtungen vor. Der Stab trägt die Teilung für  $a$ ; diejenige für  $d$  ist an einer Führungsleiste des Querläufers und diejenige für  $f(x)$  an einer Zungenkante angebracht. Die Zunge trägt ferner die drei nach  $b$ ,  $c$  und  $e$  bezifferten Kurvenscharen. Die erste Einstellung der Zunge geschieht mit Hilfe der Marke  $B$  an



der  $a$ -Teilung; hierauf folgt die Einstellung des Querläufers mit der Marke  $C$  auf die betreffende  $b$ -Kurve. Die jetzt folgende zweite Zungen-einstellung wird mit Hilfe der nach  $c$  bezifferten Kurvenschar auf die Marke  $C$  vorgenommen; die so erhaltene Stellung des Anfangsstriches  $A_x$  der  $f(x)$ -Skala — bestimmt durch die Werte von  $a$ ,  $b$  und  $c$  — wird mit dem Längsläufer festgehalten. Die letzte Zungenstellung ergibt sich durch Einstellen der Läufermarke  $D$  auf  $d$  und Einstellen der betreffenden  $e$ -Kurve unter der Marke  $C$ . Die Ablesung von  $f(x)$  wird an dem vorher eingestellten Längsläufer ausgeführt.

Zusammen sind drei Einstellungen der Zunge und drei der Läufer vorzunehmen. Zwischenablesungen sind keine erforderlich.

Auch die für Funktionen mit fünf Veränderlichen angeführten Schiebereinrichtungen eignen sich für den Fall, daß der Wert von  $x$  gegeben und derjenige einer der andern Veränderlichen gesucht ist.

## Neue Bücher.

### Astronomie, Geodäsie, mathematische Geographie, Nautik.

1. CAPELLE, HANS, Die mathematische Geographie und ihre Nutzenanwendung. Für den Gebrauch an nautischen und höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Berlin 1913, Mittler u. Sohn. *M* 8.—; geb. *M* 10.—.
2. FREISCHAUF, JOHNS., Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids. Stuttgart 1913, Wittwer.  
*M* 7.50; geb. in Leinw. *M* 8.40.
3. HEATH, T. E., Tracts of the sun and stars. A. D. 1900 to A. D. 37900. Photographs from stereoscopic perspective drawings made at Tenby, A. D. 1912—1913, showing in space of three dimensions the tracks of the sun and stars. London 1913, Wesley. 5 s.
4. HÖFLEH, ALOIS. Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie mit Beiträgen von W. Förster, K. Haas, M. Koppe, S. Oppenheim und A. Schülke. (Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen, II.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.  
*M* 11.—; geb. *M* 12.—.
5. Jahrbuch, Nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1915 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. 64. Jahrg. Berlin 1913, Heymann.  
geb. in Halbleinw. *M* 1.50.
6. MAYHEE, W., Die astronomische Zeitrechnung der Völker von ihrem Ursprung bis zur Gegenwart und die Einheitszeit. Mit allen Kalendern vom Jahre 300—1582 im julian. u. von 1583—2000 n. Chr. im gregorian. Stil. Diessen 1913, Huber.  
geb. in Leinw. *M* 5.—.
7. PIZZETTI, T., Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti. Pisa 1913.  
L. 12.—.
8. SCHOY, CARL, Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen. Hamburg 1913, Grand.

### Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

9. JAROSCH, JULIUS, Methodik des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Wien 1913, Pichlers Witwe & Sohn.  
*M* 2.—; geb. *M* 2.40.
10. KIRSCH, B., Darstellende Geometrie. (Zugleich Heft 3 der Ausg. B des grundlegend. Maschinenzeichnens v. B. Kirsch u. H. Kracht.) Dortmund 1913, Ruhfus.  
geb. *M* 1.80.
11. LORIA, GINO, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. 2. Teil: Anwendungen auf ebenflächige Gebilde. Kurven und Flächen. (Teubners Sammlung Band XXV, 2.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.  
*M* 11.—; geb. in Leinw. *M* 12.—.
12. RUNGE, CARL, Graphical methods. London 1913, Milford. 6 s. 6 d.
13. ZÜHLKE, P., Konstruktionen in begrenzter Ebene. (Mathem. Bibliothek XI.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. kart. *M* —.80.

**Geschichte.**

14. HARTMANN, WILH., Gedenkrede bei der Enthüllung des Denkmals für Franz Rouleaux. Berlin 1913, Vossische Buchh. *M* 1, 20.

**Mechanik.**

15. BAUMANN, A., Mechanische Grundlagen des Flugzeugbaues 2 Tle. („Luftfahrzeugbau u. Führung“. Hand- u. Lehrbücher des Gesamtgebietes. 10. u. 11. Bd.) München 1913, Oldenbourg. geb. in Leinw. je *M* 4.—
16. CRANZ, C., Lehrbuch der Ballistik. 3. Band. Experimentelle Ballistik, oder Lehre von den ballistischen Messungs- und Beobachtungs-Methoden, hrsg. v. C. Cranz u. K. Becker. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 14 —; geb. in Leinw. *M* 15.—
17. DÜBI, ERNST, Über die Wirkungsweise des Gefällevermehrs nach Cl. Herschel in Verbindung m. e. Turbine. (Preisgekrönte Promotionsarbeit.) Zürich 1912. Rascher & Co. *M* 4.—
18. GUICHARD, C., Problèmes de mécanique et cours de cinématique. Conférences, faites en 1912 aux candidats au certificat de Mécanique rationnelle. (Cours et conférences de la Sorbonne, publiés par l'Association générale des étudiants de Paris.) Rédaction de M. M. Dautry et Deschamps. Paris 1913, Hermann & Fils. Frs. 6.—
19. HARTMANN, WILH., Die Maschinengetriebe. Ein Lehr- u. Handbuch zum Gebrauch in Vorlesungen, sowie zum Selbstunterricht für Maschineningenieure und Studierende der Maschinentechnik. 1. Band. Die geometrische Bewegungslehre mit Rücksicht auf die Untersuchung der Bewegungsverhältnisse und das Entwerfen von Maschinengetrieben. Stuttgart 1913, Deutsche Verlagsanstalt. *M* 18 —; geb. *M* 20.—
20. PERRY, JOHN, Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association“ in Leeds. Übersetzt von August Walzel. 2., verbesserte und erweiterte Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
21. PRÁŠIL, FRZ., Technisché Hydrodynamik. Berlin 1913, Springer. Geb. in Leinw. *M* 9.—
22. RAMSAY, A. S., A treatise on hydromechanics, part. II. Hydrodynamics. London 1913, Bell. 10 s. 6 d.
23. RITTER, H., Die Berechnung von bogenförmigen Stauauern. Karlsruhe 1913, Lang. *M* 2.50.
24. SLOCUM, S. E., The theory and practice of mechanics, London 1913, Constable. 16 s. S. auch 7, 14, 30, 31, 39, 46, 57.

**Physik.**

25. BARLOW, C. W. C., Mathematical physics. Vol. 1. Electricity and magnetism. London 1913, Clive. 4 s. 6 d.
26. CAMPBELL, NORMAN, R., Moderne Elektrizitätslehre. Übersetzt von Ulfilas Meyer. Dresden 1913, Steinkopff. *M* 14.—; geb. in Leinw. *M* 15.50.
27. CANTONE, MICHELE, Corso di fisica sperimentale. Vol. I (Meccanica e termodinamica). Napoli 1913. L. 12.—
28. CHWOLSON, O. D., Lehrbuch der Physik. IV. Bd. Die Lehre von der Elektrizität. 2. Hälfte. — I. Abtlg. Unter Mitwirkung von A. A. Dobiasch und A. L. Gerschun. Übers. von H. Pflaum und A. B. Foehringer. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 7.50.
29. DRESSEL, LUDWIG, S. J., Elementares Lehrbuch der Physik nach den neuesten Anschauungen. 4., vermehrte und verbesserte Aufl., besorgt von Joseph Paffrath S. J. 2 Bde. Freiburg i. B. 1913, Herder. *M* 20.—; geb. in Leinw. *M* 22.—

30. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von Albert Einstein. II. Mathematischer Teil von Marcel Großmann. (Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 62.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 1.20.
31. Fortschritte, Die, der Physik im Jahre 1912. Dargestellt von der deutschen physikalischen Gesellschaft. 68. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikal. Chemie. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 27.—.
32. GRITTEL, H., Die Bestätigung der Atomlehre durch die Radioaktivität. Vortrag, gehalten am 16. Februar 1913 zum 50jährigen Stiftungsfeste des Vereins für Naturwissenschaft in Braunschweig. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* —.80.
33. GRIMSEHL, E., Lehrbuch der Physik für Realschulen. 2., verbesserte Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.60.
34. HAHN, HERM., Handbuch für physikalische Schülerübungen. 2., verb. Aufl. Berlin 1913, Springer. *M* 20; geb. in Leinw. *M* 22.—.
35. Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. In 5 Bdn. bearbeitet v. F. Auerbach, K. Baedeker, P. Cermak, u. a. Hrsg. v. L. Graetz. IV. Bd. 1. Lfg. Leipzig 1913, Barth. *M* 10.—.
36. LECHER, ERNST, Lehrbuch der Physik für Mediziner und Biologen. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 8.—; geb. in Leinw. *M* 9.—.
37. MACAULEY, W. H., The laws of thermodynamics. (Cambridge Engineering tracts, Nr. 2). Cambridge 1913, Univ. Press. 3 s.
38. PARTINGTON, JAMES RIDDICK, A textbook of thermodynamics. With special reference to chemistry. London 1913, Constable. 14 s.
39. RADAKOVIĆ, M., Über die Bedingungen für die Möglichkeit physikalischer Vorgänge. (Das Gesetz der Erhaltung der Energie und das Gesetz der Vermehrung der Entropie.) Volkstümliche Vorträge, gehalten an der Universität Czernowitz. Leipzig 1913, Barth. *M* 1.40.
40. RECKNAGEL, H., Die Berechnung der Warmwasserheizungen. München 1913, Oldenbourg. *M* 6.—.
41. Report of the Committee on electrical standards. Cambridge 1913. Univ. Press. 12 s. 6 d.
42. VOLKMANN, PAUL, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. 2., mehrfach umgearbeitete Auflage. Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* 13.—; geb. in Leinw. *M* 14.—.
43. VOLKMANN, PAUL, Fragen des physikalischen Schulunterrichts. Vier Vorträge, für den vom 7.—12. Oktober 1912 in Königsberg i. Pr. abgehaltenen Oberlehrer-Ferienkursus ausgearbeitet, sowie mit Anmerkungen und Vorwort versehen. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 2.—.
44. WUNDER, L., Physikalische Plaudereien für 10- bis 14jährige Schüler aller Schulgattungen. (Bastian Schmidts naturwissenschaftl. Schülerbibliothek 19.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. Kart. *M* 1.—.
45. ZERKOWITZ, GUIDO, Thermodynamik oder Turbomaschinen. Thermodynamische Bewertung und Berechnung der Dampfturbinen, Turbo-Kompressoren, Turbo-Kältemaschinen und Gasturbinen, unter besonderer Berücksichtigung graphischer Verfahren. München 1913, Oldenbourg. Geb. in Leinw. *M* 6.50.

S. auch 15, 16, 21, 22, 51, 52, 59.

#### Tafeln.

46. GIRARD, RAFFAELE, Prontuario di tavole numeriche e formole per il computo metrico rapidissimo dei ponti in muratura, muri di sostegno e gallerie. Vol. I (Tavole numeriche di calcoli fatti.) Roma 1913. L. 35.—.

47. GODFREY, C. and SIDONS, A. W., Four-figure tables. Cambridge 1913, Univ. Press. 9 d.
48. Kotentafeln zum Gebrauch bei Meßtischaufnahmen. Berlin 1912, Mittler & Sohn. *M* —.30; geb. *M* —.60.
49. MÖNKEMYER, K., Vollständige vierstellige Logarithmentafel zum Gebrauch für Schule und Praxis. Frankfurt a. M. 1913, Diesterweg. Geb. *M* 2.—.
50. Opus palatinum, Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10'' zu 10''. Hrg. v. W. Jordan. 2. berichtigte Aufl. Hannover u. Leipzig 1913, Hahn. *M* 7.—.
51. RUNGE, C., und EMDK, F., Rechnungsformular sur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. Mit Erläuterung von C. Runge. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn.
52. SMITH, C. A. M., and WARREN, A. G., The new steam tables, together with their derivation and application. London 1913, Constable. 4 s.  
S. auch 5.

### Verschiedenes.

53. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Bd. II, Heft 8. Neue Erlasse in Bayern, Württemberg und Baden, von W. Lietzmann, E. Geck, H. Cramer. Mit einem Schlußwort zu Band II von A. Thaer. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 1.50.
54. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. VII, enthaltend: P. Staeckel, Nachruf auf Peter Treutlein. W. Lietzmann, Der internationale Mathematikerkongreß in Cambridge.
55. DRESSLER, H., Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen. (Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale math. Unterrichtskommission, IX.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 1.—.
56. Fortschritte der Mathematik, Jahrbuch über die, 41. Bd., Jahrg. 1910. 3. (Schluß-)Heft. Berlin 1913, Reimer. *M* 17.50.
57. HÄNERT, LUDWIG, Angewandte Mechanik. Zum Gebrauch als Leitfaden für den Unterricht in Naturlehre an der Kaiserl. Marineschule und als Hilfsbuch für die Praxis. Hierzu als Anhang: Kurze Einführung in die Chemie unter bes. Berücksichtigung der Explosivstoffe. Berlin 1913, Mittler u. Sohn. *M* 6.25; geb. *M* 7.—.
58. KILLING, W., und HOVESTADT, H., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2. Bd. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 10 —, geb. in Leinw. *M* 11.—.
59. KNESER, ADF., Mathematik und Natur. Rektoratsrede. 2. Abdr. Breslau 1913, Trewendt & Granier. *M* —.50.
60. KUNTZE, FRIEDRICH, Denkmittel der Mathematik im Dienst der exakten Darstellung erkenntniskritischer Probleme. (Philosophische Vorträge, veröffentlicht von der Kantgesellschaft, Nr. 3.) Berlin, Reuther & Reichard. *M* 1.—.
61. LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht i. J. 1912. (Schriften des deutschen Ausschusses für den mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht, Heft 16.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 1.—.
62. UMLAUF, K., Mathematik und Naturwissenschaften an den deutschen Lehrerbildungsanstalten. (Bund für Schulreform, Arbeiten 3.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 3.60.
63. Vorschläge für den mathematischen, naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminaren. Unter Mitwirkung von Fachmännern ausgearbeitet vom Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. (Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Heft 14.) Leipzig u. Berlin 1912, Teubner. *M* 1.80.

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 53.
- Annales de l'Institut Polytechnique du Don du Césarévitch Alexis à Novotcherkassk, vol. I, 1912. Извѣстія Алексѣевскаго Донскаго Политехническаго Института въ Новочеркасскѣ. 1912 годъ. Томъ I. Новочеркасскъ 1912.
- BARDY, E., Aufgabensammlung für bayerische Mittelschulen, bearbeitet von Jos. Lengauer. 4., umgearb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. *M* 2.20.
- Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. s. N. B. 54.
- BEUTEL, E., Die Quadratur des Kreises. (Mathem. Bibliothek, XII.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. Kart. *M* —.80.
- CAPELLE, HANS, Die mathematische Geographie und ihre Nutzenanwendung, s. N. B. 1.
- CRANZ, C., Lehrbuch der Ballistik, III, s. N. B. 16.
- DRESSEL, LUDWIG, Elementares Lehrbuch der Physik, I, II, s. N. B. 29.
- DRESSLER, H., Mathematische Lehrmittelsammlungen, s. N. B. 55.
- EINSTEIN-GROSSMANN, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, s. N. B. 30.
- GAUDECZKA, JOSEF, Auflösungen von arithmetischen und geometrischen Textaufgaben für die Mittel- und Oberstufe der Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und für Handelsakademien. Wien und Leipzig 1912, Deuticke. *M* 2.50.
- GEISTBECK, MICHAEL, Physische Erdkunde für höhere Lehranstalten. Freiburg i. B. 1913, Herder. Geb. in Leinw. *M* 1.80.
- GEITEL, H., Die Bestätigung der Atomlehre durch die Radioaktivität, s. N. B. 32.
- GRIMSEHL, E., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 33.
- GUICHARD, C., Problème de mécanique et cours de cinématique, s. N. B. 18.
- HÄNERT, L., Angewandte Mechanik, s. N. B. 57.
- HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie. („Wissenschaft und Hypothese“ VII.), 4., durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 6.—.
- JAKOBI, SIEGFRIED, Sammlung arithmetischer Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik für höhere Maschinenbauschulen und verwandte technische Lehranstalten. Zugleich Ergänzungsband zu den arithmetischen Aufgaben für Metallindustrieschulen von Bardey-Jakobi-Schlie. (Teubners Unterrichtsbücher für maschinen-technische Lehranstalten, 7.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Kart. *M* 1.60.
- JAROSCH, J., Methodik des Unterrichts in der darstellenden Geometrie, s. N. B. 9.
- KEMPE, A., Der große Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung. 2., verb. Aufl. Amsterdam 1913, Versluys.
- KILLING-HOVESTADT, Handbuch des mathematischen Unterrichts, II, s. N. B. 58.
- KUNTZE, FR., Denkmittel der Mathematik im Dienst der exakten Darstellung erkenntnistheoretischer Probleme, s. N. B. 60.
- LECHER, E., Lehrbuch der Physik für Mediziner und Biologen, s. N. B. 36.
- LIEZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im J. 1912, s. N. B. 61.
- und TRIER, V., Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler. (Mathematische Bibliothek, 10.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. Kart. *M* —.80.
- LILIENTHAL, R. v., Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. Bd. Flächentheorie. Erster Teil. (Teubners Sammlung Bd. XXVIII, 2, 1.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 12.—; geb. *M* 13.—.

- LORIA, G., Vorlesungen über darstellende Geometrie, II, s. N. B. 11.
- MÖNKEMEYER, K., Vierstellige Logarithmentafel, s. N. B. 49.
- Opus palatinum, s. N. B. 50.
- PERRY-WALZEL, Drehkreisel, s. N. B. 20.
- RÜEFLI, J., Kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen. 7., vollständig umgearb. Aufl. Bern 1913, Francke. Geb. *M* 1.15.
- RUNGE, C. und EMDÉ, F., Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen, s. N. B. 51.
- SCHOY, CARL, Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie, s. N. B. 8.
- SCHRÖDER, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands. (Abh. über den mathem. Unterricht in Deutschland, Bd. I, Heft 5.) Mit einem Schlußwort zu Bd. I von F. Klein. Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* 6.—.
- SCHWAB, KARL, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Erster Teil. Ausgabe A: Für die mittleren Klassen der Realanstalten. 3. Aufl. Leipzig 1913, Freytag. Geb. in Leinw. *M* 3.60.
- SUINI, A., A., Sul vizio d'origine delle geometrie non euclidee. Dissertazione geometrico-filosofica. Piacenza 1913, Tipografia Porta.
- SVEDBERG, The, Die Existenz der Moleküle. Experimentelle Studien. Leipzig 1912, Akadem. Verlagsgesellschaft. *M* 12.—; geb. *M* 13.20.
- Verwaltungs-Bericht über das neunte Geschäftsjahr 1911—1912 und Bericht über die neunte Ausschußsitzung des unter dem Protektorate Seiner Kgl. Hoheit des Prinzregenten Ludwig von Bayern stehenden Deutschen Museums. München 1913, Druck von R. Oldenbourg.
- VOLKMANN, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, s. N. B. 42.
- , Fragen des physikalischen Schulunterrichts, s. N. B. 43.
- VORSCHLÄGE für den mathematischen, naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminaren, s. N. B. 63.
- WEITZEL, C. G., Unterrichtsbriefe zur Einführung in die höhere Mathematik, enthaltend: Stereometrie, Trigonometrie, Analysis, analytische Geometrie der Ebene, Differential und Integral, in Gesprächsform zum Selbstunterrichte und für solche, die beim Erlernen der Mathematik Schwierigkeiten haben (alle Beispiele und Aufgaben sind mit Erklärungen und vollständiger Ausrechnung versehen). 1. Lfg. (Vollständig in 30 Lfgn.) Wien u. Leipzig 1913, Hartleben.
- WEYL, HERMANN, Die Idee der Riemannschen Fläche. (Mathem. Vorlesungen an der Universität Göttingen: V.) Leipzig u. Berlin, 1913, Teubner. *M* 7.—; geb. in Leinw. *M* 8.—.
- WUNDER, L., Physikalische Plaudereien, s. N. B. 44.
- ZÜHLKE, P., Konstruktionen in begrenzter Ebene, s. N. B. 13.

## Über ebene Gleit- und Rollbewegung starrer Körper.

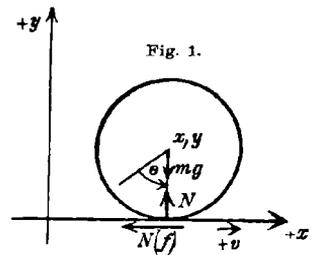
Von F. PFEIFFER in Halle a. S.

Die folgenden Ausführungen schließen sich an Resultate an, die sich bei einem ganz einfachen Beispiel zur Theorie der gleitenden Reibung starrer Körper ergeben; wir werden daher zunächst dieses Beispiel behandeln und erst nach Besprechung desselben auf Seite 118 die den ferneren Ausführungen zugrunde liegende Fragestellung angeben.

### I. Bewegung einer homogenen Kreisscheibe auf einer festen Geraden.

1. Eine vertikal stehende, unendlich dünne, homogen mit Masse belegte Kreisscheibe vom Radius  $R$  werde auf eine in ihrer Ebene liegende, horizontale, rauhe Gerade aufgesetzt und bewege sich, nachdem man ihr eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes parallel der Geraden und Anfangsrotation um den Schwerpunkt erteilt hat, unter der Wirkung der Schwere auf der Geraden. Der Reibungskoeffizient der gleitenden Reibung habe den absoluten Betrag  $f$ , der der rollenden Reibung sei Null.

Es seien (Fig. 1)  $x$  und  $y$  die Koordinaten des Scheibenschwerpunktes in einem in der Ebene der Scheibe liegenden rechtwinkligen  $xy$ -System, dessen  $x$ -Achse die Führungsgerade ist; ferner sei  $\theta$  der im positiven Sinne gezählte Winkel von einem mit der Scheibe festverbundenen Radius bis zu dem Radius nach dem Berührungspunkt,  $m$  die Masse der Scheibe,  $k$  ihr Trägheitsradius für den Schwerpunkt,  $N$  der Normaldruck der Führung auf die Scheibe und  $g$  die Schwerebeschleunigung. Die Geschwindigkeit des mit dem Berührungspunkt zusammenfallenden Punktes des Scheibenrandes sei relativ zur Führungsgeraden  $v$ , dann ist, wenn wir  $v$  positiv zählen in Richtung der positiven  $x$ -Achse,



(1) 
$$v = x' - R\theta',$$

(wo — wie auch im folgenden — die Striche in der gebräuchlichen Weise die Ableitungen nach der Zeit  $t$  bedeuten).

Wir nehmen an,  $x'$  und  $\theta'$  haben für  $t = 0$  Werte  $x'_0$  und  $\theta'_0$ , die so gewählt sind, daß  $v_0 = v_{(t=0)} \neq 0$  ist. Dann leiten diese Werte eine

*Gleitbewegung*<sup>1)</sup> ein, die dadurch charakterisiert ist, daß während der ganzen Dauer derselben  $v \neq 0$  und  $N > 0$  ist, und deren Differentialgleichungen lauten:

$$(2) \quad \begin{cases} mx'' = -N(f) \\ my'' = N - mg \\ mk^2\theta'' = N(f)R. \end{cases}$$

Dazu tritt die geometrische Relation

$$y = R,$$

und die Bedingung für Gleitreibung, daß  $(f) = \pm f$  so zu wählen ist, daß

$$(3) \quad N(f)v > 0$$

ist, solange  $v \neq 0$  ist. Aus der Relation  $y = R$  ergibt sich  $y'' = 0$ , und daher ist wegen der mittleren der Gleichungen (2)

$$N = mg.$$

Die deshalb aus der ersten und letzten der Gleichungen (2) folgenden Gleichungen

$$(2^a) \quad \begin{cases} mx'' = -mg(f) \\ mk^2\theta'' = mg(f)R \end{cases}$$

ergeben durch Kombination und einmalige Integration

$$(4) \quad -m(Rx' + k^2\theta') = J_0 = -m(Rx'_0 + k^2\theta'_0).$$

Wir können den Inhalt dieser Gleichung so ausdrücken: *Das gesamte Impulsmoment der sich bewegenden Scheibe in bezug auf den jeweiligen Berührungspunkt ist während der ganzen Gleitbewegung konstant.*

Übrigens lassen sich die Gleichungen (2<sup>a</sup>) auch vollständig integrieren und liefern:

$$x' = -g(f)t + x'_0; \quad x = -g(f)\frac{t^2}{2} + x'_0t + x_0$$

$$\theta' = \frac{R}{k^2}g(f)t + \theta'_0; \quad \theta = \frac{R}{k^2}g(f)\frac{t^2}{2} + \theta'_0t + \theta_0,$$

wenn  $x_0$  und  $\theta_0$  die Werte von  $x$  und  $\theta$  für  $t = 0$  sind. Für

$$t = t_1 = \frac{|v_0|}{gf\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)}$$

wird

$$v = 0;$$

1) Das Wort „Gleitbewegung“ soll hier nicht etwa eine reine Parallelverschiebung der Scheibe längs der festen Geraden bezeichnen, sondern die Übereinanderlagerung einer solchen mit gleichzeitig stattfindendem Rollen der Scheibe auf der festen Geraden. Dagegen soll das Wort „Rollbewegung“ reines Rollen ohne gleichzeitige Parallelverschiebung bezeichnen.

für diesen Zeitmoment ist

$$(5) \quad \begin{cases} x' = -\frac{v_0 k^2}{k^2 + R^2} + x'_0 = \frac{-J_0 R}{m(k^2 + R^2)} \\ \theta' = \frac{R v_0}{k^2 + R^2} + \theta'_0 = \frac{-J_0}{m(k^2 + R^2)}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen (2) gelten indessen nur, solange  $v \neq 0$  ist; sie sagen also nur aus, daß bei unbegrenzter Annäherung von  $t$  an den Zeitmoment  $t_1$  die Geschwindigkeit des an der Berührungsstelle befindlichen Randpunktes der Scheibe gegen Null abnimmt. Setzt man aber die Stetigkeit der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten der Scheibe im Momente  $t_1$  voraus, so ergibt sich, daß im Momente  $t = t_1$  für die sich bewegende Scheibe  $v = 0$  ist und  $x'$  und  $\theta'$  die Werte (5) haben.

Waren  $x'_0$  und  $\theta'_0$  speziell so gewählt, daß  $J_0 = 0$  ist, so kommt im Momente  $t = t_1$  die Scheibe zur Ruhe. Andernfalls tritt eine durch die Eigenschaft  $v = 0$ ,  $N > 0$  charakterisierte *Rollbewegung* ein. Diese Rollbewegung setzt sich unbegrenzt lange fort, da weder Gleitbewegung noch Ruhe für einen Zeitmoment  $t_2 \geq t_1$  eintreten kann, sobald man  $v$  vom Momente  $t = t_1$  ab stetig voraussetzt. Denn würde  $v$  für ein  $t > t_1$  einen von Null verschiedenen Wert annehmen, so befände sich für jeden noch so kleinen Absolutwert  $\varepsilon > 0$  von  $v$  die Scheibe in einem Anfangszustand, der dem auf Seite 113 besprochenen analog ist; also würde  $v$  wieder gleich Null werden nach Verlauf einer Zeit, die mit  $\varepsilon$  selbst gegen Null konvergiert. Es muß daher von  $t = t_1$  ab  $v = 0$  bleiben, und die Scheibe kann nur dauernd rollen oder schließlich stehen bleiben. Daß das letztere nicht eintritt, ergibt sich sofort.

Die Differentialgleichungen der Rollbewegung gehen aus den Gleichungen (2\*) hervor, wenn man dort  $mg(f)$  durch eine unbekannte Reibungskraft  $F$  ersetzt und die Rollbedingung

$$(6) \quad v = x' - R\theta' = 0$$

hinzunimmt. Es gilt also auch für die Rollbewegung die Gleichung (4):

*Das gesamte Impulsmoment der sich bewegenden Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt ist also während der ganzen Gleit- und Rollbewegung konstant.*

Aus dem Bestehen der Gleichungen (4) und (6) folgt die Giltigkeit der Gleichungen (5) während der Rollbewegung; die Scheibe kommt also nicht zur Ruhe.

Soweit ist das Beispiel u. a. bei Appell, *Traité de mécanique rationelle*, T. II, 2. Aufl., S. 111—114 behandelt; wir wollen noch einige Ergebnisse betreffend den Energieumsatz bei der Bewegung anführen.

2. Die gesamte Arbeit, welche die Reibungskraft  $N(f)$  während der Dauer der Gleitbewegung leistet, ist

$$(7) \quad A = - \int_{t=0}^{t=t_1} N(f) v dt = - mg(f) \int_0^{t_1} \frac{v_0}{v(f) \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} \left( -g(f)t + x'_0 - \frac{R^2}{k^2} g(f)t - R\theta'_0 \right) dt \\ = - \frac{m}{2} \frac{v_0^2}{1 + \frac{R^2}{k^2}}.$$

Die gesamte Energiemenge, die während der Gleitbewegung der Scheibe auf der rauhen Führungsgeraden ( $f \neq 0$ ) durch die Reibung verzehrt wird, ist ihrem Betrage nach unabhängig von der Größe des Reibungskoeffizienten.<sup>1)</sup>

3. Aus

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + k^2 \theta'^2)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Werte

$$x' = -g(f)t + x'_0$$

$$\theta' = \frac{R}{k^2} g(f)t + \theta'_0$$

$$(8) \quad T = \frac{m}{2} \left\{ g^2 f^2 \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) t^2 - 2g(f) (x'_0 - R\theta'_0) t + (x'_0{}^2 + k^2 \theta'_0{}^2) \right\}.$$

Diese Funktion  $T(t)$  gibt bei Beschränkung der unabhängig Veränderlichen  $t$  auf das Intervall  $0 \leq t < t_1$  zu jedem Wert von  $t$  den entsprechenden Wert der lebendigen Kraft der Scheibe während der Gleitbewegung. Wir fassen nun  $T(t)$  auf als Funktion der unbeschränkt Veränderlichen  $t$  und bestimmen den Wert von  $t$ , für welchen eventuell ein Extremwert von  $T(t)$  existiert. Dafür muß

$$\frac{dT}{dt} = mg(f) \left\{ g(f) \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) t - (x'_0 - R\theta'_0) \right\} = 0$$

oder

$$t = \frac{v_0}{g(f) \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)}$$

sein. Da ferner

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = mg^2 f^2 \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) > 0$$

ist, so hat die Funktion  $T(t)$  der unbeschränkt Veränderlichen  $t$  bei dem

1) Darauf hat übrigens schon Painlevé, *Leçons sur le frottement*, Paris 1896, p. 79 hingewiesen.

jenigen Werte  $t = t_1$ , welcher dem Eintreten der Rollbewegung entspricht, ein Minimum. Der Wert dieses Minimums

$$(9) \quad T_{\min} = \frac{m}{2} \left( x_0'^2 + k^2 \theta_0'^2 - \frac{v_0^2}{1 + \frac{R^2}{k^2}} \right)$$

ist — wie auch aus 2. folgt — unabhängig von dem von Null verschiedenen Werte  $f$  des Reibungskoeffizienten.

4. Fassen wir nun die Funktion

$$T(x', \theta') = \frac{m}{2} (x'^2 + k^2 \theta'^2),$$

welche für jedes der Gleit- und Rollbewegung entsprechende Wertepaar  $x', \theta'$  den diesem Wertepaar zugehörigen Wert der lebendigen Kraft der Scheibe gibt, als Funktion der unbeschränkt Veränderlichen  $x'$  und  $\theta'$  auf und bestimmen einen eventuellen Extremwert von  $T(x', \theta')$  mit der Nebenbedingung, daß  $x'$  und  $\theta'$  stets der Gleichung (4)

$$(4) \quad -m(Rx' + k^2\theta') = J_0$$

genügen sollen. Für die Existenz eines solchen Extremwertes ist notwendig, daß  $x'$  und  $\theta'$  außer der Gleichung (4) noch die Relation

$$x' - R\theta' = 0$$

erfüllen, und hieraus und aus (4) berechnen sich die Werte

$$(5) \quad \begin{cases} x' = \frac{-RJ_0}{m(k^2 + R^2)} \\ \theta' = \frac{-J_0}{m(k^2 + R^2)}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} = m > 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta'^2} - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x' \partial \theta'} \right)^2 = m^2 k^2 > 0, \end{array} \right.$$

und da die Nebenbedingung (4) in  $x'$  und  $\theta'$  linear ist, so sind diese letzteren Relationen hinreichende Bedingung dafür, daß die der Rollbewegung zugehörigen Werte (5) von  $x'$  und  $\theta'$  die Funktion  $T(x', \theta')$  zum Minimum machen mit (4) als Nebenbedingung.

Dieses Resultat mit dem Endergebnis in 1. zusammenfassend, erhalten wir:

1. Die Scheibe befinde sich in einer beliebigen Anfangslage  $x_0, \theta_0$  auf der Führungsgeraden und habe Geschwindigkeitskoordinaten  $x'_0$  und

$\theta'_0$ ; dadurch erhält das gesamte Impulsmoment  $-m(Rx'_0 + k^2\theta'_0)$  der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt einen bestimmten Zahlenwert  $J_0$ . (Wir setzen voraus,  $x'_0$  und  $\theta'_0$  seien so gewählt, daß sowohl  $J_0 \neq 0$ , als auch  $x'_0 - R\theta'_0 \neq 0$  sei.) Dieser Wert  $J_0$  wird während der ganzen folgenden Bewegung beibehalten, und die lebendige Kraft  $T$  der Scheibe ist in jedem Moment gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + k^2\theta'^2).$$

*Die erste Phase der Bewegung ist eine Gleitbewegung; zu einem bestimmten Zeitmoment tritt Rollbewegung ein. Das Wertepaar  $x', \theta'$ , das diesem Moment entspricht und während der darauf folgenden Rollbewegung beibehalten wird, macht  $T$  zum Minimum unter denjenigen Werten  $T$ , welche man für alle Wertepaare  $x', \theta'$  erhält, die auch das gesamte Impulsmoment gleich  $J_0$  machen.*

2. Die Kreisscheibe werde in irgendeine Anfangslage  $x, \theta$  gebracht, und es sollen ihr Geschwindigkeitskoordinaten  $x', \theta'$  so erteilt werden, daß

- a) das aus diesen Werten sich berechnende gesamte Impulsmoment  $-m(Rx' + k^2\theta')$  in bezug auf den momentanen Berührungspunkt gleich einer vorgeschriebenen Konstanten  $J_0$  ( $J_0 \neq 0$ ) sei und daß
- b) die anfängliche lebendige Kraft  $T = \frac{m}{2}(x'^2 + k^2\theta'^2)$  für die eintretende Bewegung kleiner sei als für irgendein anderes Wertepaar  $x', \theta'$ , das auch der Bedingung a) genügt.

Dann erfüllen die gesuchten Werte  $x', \theta'$  auch die Relation  $v = 0$ , leiten also eine Rollbewegung ein, deren lebendige Kraft konstant gleich  $\frac{J_0^2}{2m(k^2 + R^2)}$  ist.

(Wir formulierten den Satz 2 besonders wegen einer später zu besprechenden Verallgemeinerung.)

5. Die im folgenden zu behandelnde Aufgabe besteht nun darin, zu untersuchen, wie weit die bei dem einfachen Beispiel gewonnenen — in den Nummern 1. bis 4. durch Kursivdruck hervorgehobenen — Resultate sich sinngemäß auf das allgemeine Problem der Gleit- und Rollbewegung einer beliebigen mit Masse belegten ebenen Scheibe auf einer beliebigen in ihrer Ebene liegenden, rauhen festen Kurve<sup>1)</sup> ausdehnen lassen.

Wesentlich war bei dem betrachteten Beispiel, daß die an der

1) Genauere Festsetzungen über die in Betracht zu ziehenden Kurven und Begrenzungslinien der Scheiben werden wir später treffen.

Scheibe angreifenden äußeren Kräfte mit Ausnahme der Reibungskraft bei keiner Bewegung Arbeit leisteten; wir wollen auch bei der Verallgemeinerung zunächst voraussetzen, daß außer der Normalreaktion zwischen Scheibe und Führung und der Reibungskraft nur eine der Größe nach konstante Kraft  $P$  auf die Scheibe wirke, welche im jeweiligen Berührungspunkt zwischen beweglicher und fester Kurve normal zur gemeinsamen Tangente der beiden Kurven von der beweglichen gegen die feste Kurve gerichtet ist, und über deren absolute Größe noch zweckentsprechend verfügt werden soll.

Das somit dem folgenden zunächst zugrunde liegende mechanische Problem der Gleit- und Rollbewegung einer beliebigen mit Masse belegten ebenen Scheibe auf einer rauhen in ihrer Ebene liegenden beliebigen festen Kurve — allerdings unter sehr einschränkenden Voraussetzungen über die an der Scheibe wirkenden äußeren Kräfte — scheint unter so allgemeinen Festsetzungen über die feste und bewegliche Kurve, wie sie hier benützt werden, in der vorliegenden Weise bisher nicht durchgeführt zu sein. Allerdings hat A. Mayer in den Berichten über die Verhandlungen der K. Sächs. Ges. d. Wiss. (Math.-phys. Cl.) Bd. 53, (1901), S. 266—280 die ebene Bewegung einer Scheibe auf einer festen rauhen Kurve behandelt, doch ist die Durchführung in der Arbeit von A. Mayer und in der vorliegenden ganz verschieden. In engerem Zusammenhang stehen unsere Ausführungen mit Herrn Painlevés eingehender Diskussion der Gleit- und Rollbewegung einer elliptischen Scheibe, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt der Begrenzungsellipse liegt, auf einer in ihrer Ebene liegenden Geraden unter der Wirkung der Schwere (Painlevé, *Leçons sur le frottement*, Paris 1895, p. 82ff.), und der kurzen Erörterung der Bewegung eines beliebig gestalteten Zylinders eine raue geneigte Ebene hinab, deren Horizontalspur der Achse des Zylinders parallel ist, unter der Wirkung der Schwere in der „Theorie der Reibung“ von Jellett (deutsch von Lüroth und Schepp), S. 146ff.

Es wird sich ergeben, daß sich nur ein Teil der im Abschnitt I gewonnenen Resultate sinngemäß auf das eben skizzierte allgemeinere Problem ausdehnen läßt, daß diese Resultate aber durchweg eine Erweiterung auf den Spezialfall zulassen, in dem die rollende Scheibe von einer Kreislinie begrenzt ist, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt der auf der Scheibe verteilten Massen zusammenfällt.

Am Schlusse soll dann noch ein auf die lebendige Kraft der Rollbewegung bezüglicher *Minimalatz* angegeben werden, der gilt, falls sich die Scheibe auf der festen Kurve *unter der Wirkung beliebiger äußerer Kräfte in Rollbewegung* befindet.

II. Bewegung einer beliebigen Scheibe auf einer beliebigen festen Kurve.

Festsetzungen über die feste und die bewegliche Kurve.

6. Die Funktionen

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = \xi(\tau) \\ \eta = \eta(\tau) \end{cases}$$

sollen mindestens viermal stetig differentiierbare reellwertige Funktionen der in jedem endlichen Intervall unbeschränkt veränderlichen reellen Hilfsvariablen  $\tau$  ( $-\infty < \tau < +\infty$ ) sein. Ferner soll für jeden Wert<sup>1)</sup> von  $\tau$

$$\sqrt{\xi_\tau^2 + \eta_\tau^2} \geq \varepsilon_1$$

sein, wo  $\varepsilon_1$  eine (beliebig kleine) positive Konstante ist. Die Funktionen  $\xi(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$  sollen weiter so beschaffen sein, daß in jedem Punkt der durch sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  dargestellten Kurve, der nicht Wendepunkt ist, für den Krümmungsradius  $\rho$  die folgende Festsetzung gilt: Als positive Richtung der Tangente werde diejenige gewählt, deren Richtungskosinus bzw. die Vorzeichen von  $\xi_\tau$  und  $\eta_\tau$  haben, als positive Normale derjenige Halbstrahl der Normalen, welcher gegen die positive Tangentenrichtungs-

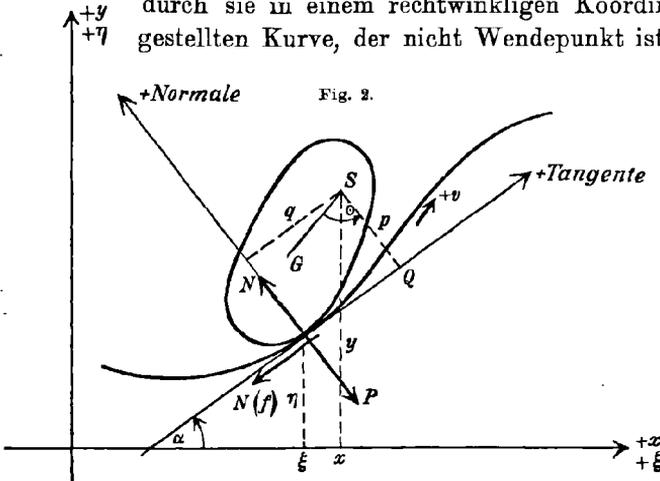


Fig. 2.

Tangentenrichtungs-  
Tangentenrichtungso

gelegen ist, wie die positive  $\eta$ -Achse gegen die positive  $\xi$ -Achse. Dem Krümmungsradius  $\rho$ , dessen absolute Länge durch die Gleichung

$$|\rho| = \frac{|\sqrt{\xi_\tau^2 + \eta_\tau^2}|^3}{|\xi_\tau \eta_{\tau\tau} - \eta_\tau \xi_{\tau\tau}|}$$

gegeben ist, legen wir das positive oder negative Vorzeichen bei, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Normalen liegt. Dann soll, solange  $\rho$  positiv ist,  $\rho \geq R + \varepsilon_2$  sein, wo  $R$  und  $\varepsilon_2$  positive Konstante sind, und solange  $\rho < 0$  ist,  $|\rho| \geq \varepsilon_3$  sein, wo  $\varepsilon_3$  eine positive Konstante ist.

1) Unter dem „Wert“ einer Größe schlechthin ist im folgenden immer ein endlicher Wert verstanden.

Vermöge der zu Anfang gemachten Voraussetzungen können wir die Bogenlänge  $\sigma$  der Kurve als neuen Parameter einführen durch die Substitution

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\xi_{\tau}^2 + \eta_{\tau}^2} d\tau,$$

worin  $\sigma_0$  und  $\tau_0$  zusammengehörige Anfangswerte von  $\sigma$  und  $\tau$  bedeuten sollen. Dann werden  $\xi$  und  $\eta$  mindestens viermal stetig differentiierbare Funktionen  $\xi(\sigma)$  und  $\eta(\sigma)$  von  $\sigma$  im Intervall  $-\infty < \sigma < +\infty$  und insbesondere wird

$$\xi_{\sigma}^2 + \eta_{\sigma}^2 = 1$$

und

$$(12) \quad |\rho| = \frac{1}{|\xi_{\sigma}\eta_{\sigma\sigma} - \eta_{\sigma}\xi_{\sigma\sigma}|}.$$

Wegen des häufigen Auftretens des Faktors  $\frac{1}{\rho}$  in den folgenden Ausführungen möge hier noch besonders erwähnt werden, daß somit  $\frac{1}{\rho}$  wegen der oben gemachten Voraussetzungen für jeden Wert von  $\sigma$  (insbesondere also auch in den Wendepunkten der Kurve) eine mindestens zweimal stetig differentiierbare Funktion von  $\sigma$  ist.

In der Ebene dieser (festen) Kurve nehmen wir dann eine mit Masse belegte ebene Scheibe an, das sei ein zweifach ausgedehnter mit Masse belegter ebener Bereich, für dessen Begrenzungslinie folgende Konstruktion möglich sei: Es werde durch den Schwerpunkt  $S$  der Massenverteilung irgendeine gegen die Massen beliebig liegende Gerade  $SG$  gezogen und der im positiven Sinne gezählte Winkel, den irgendein Halbstrahl durch  $S$  mit  $SG$  bildet, mit  $\theta$  bezeichnet. Ferner sei

$$p = p(\theta)$$

eine für jeden Wert von  $\theta$  ( $-\infty < \theta < +\infty$ ) eindeutig definierte, stets positive, mindestens viermal stetig differentiierbare, periodische Funktion von  $\theta$  mit der Periode  $2\pi$ , und es sei stets

$$(13) \quad p + p_{\theta\theta} \neq 0.^1)$$

(Die aufeinander folgenden Ableitungen von  $p(\theta)$  nach  $\theta$  sind durch angefügte Indizes bezeichnet.) Es sei nun auf dem zum Winkel  $\theta$  gehörigen Halbstrahl die Strecke  $SQ = p(\theta)$  aufgetragen und in  $Q$  die Senkrechte auf  $SQ$  errichtet. Die Einhüllende der für alle  $\theta$  so gezogenen Senkrechten sei die Begrenzungslinie.

1) Diese Voraussetzung besagt, daß der Krümmungsradius der Begrenzungslinie der Scheibe, der sich zu  $\rho_1 = p + p_{\theta\theta}$  ergibt, in keinem Punkte der Begrenzungslinie den Wert Null hat; sie hat übrigens mit den vorhergehenden Voraussetzungen über  $p(\theta)$  zur Folge, daß stets  $p + p_{\theta\theta} > 0$  ist.

Wählen wir als positive Richtung der Tangente an die Begrenzungslinie diejenige, welche wachsenden Werten von  $\theta$  entspricht, und orientieren die positive Tangenten- und Normalenrichtung in derselben Weise gegeneinander wie bei der festen Kurve, so liegt der Krümmungsmittelpunkt für jeden Punkt der Begrenzungslinie auf der positiven Normalen im betreffenden Punkt. Der bereits bei der Definition der festen Kurve eingeführte Buchstabe  $R$  bezeichne das Maximum der Länge des Krümmungsradius  $\rho_1 = p + p_{00}$  der Begrenzungslinie.

**Definition der Bewegung der Scheibe auf der festen Kurve.**

7. Wir sagen, *die unter dem Einfluß kontinuierlicher äußerer Kräfte stehende Scheibe berühre die feste Kurve*, wenn ein Punkt der Begrenzungslinie der Scheibe mit einem Punkt der festen Kurve zusammenfällt, die positiven Richtungen der Tangente an die Begrenzungslinie der Scheibe und der Tangente an die feste Kurve in diesem Punkt übereinstimmen und die Normalreaktion  $N$  der festen Kurve auf die Scheibe einen bestimmten positiven Wert hat.  $N$  werde positiv gezählt, wenn seine Richtung mit der Richtung der positiven Normalen im Berührungspunkt übereinstimmt. (Wir beschränken uns damit von vornherein auf eine Berührung unter Druck zwischen Scheibe und fester Kurve.) Berühren sich die feste Kurve und die Begrenzungslinie der Scheibe in der angegebenen Weise, so gehört dieser gegenseitigen Lage ein bestimmter Wert von  $\sigma$  und ein bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmter Wert von  $\theta$  zu, und andererseits entspricht der Forderung, daß sich die feste Kurve und die Begrenzungslinie der Scheibe bei einem vorgegebenen Wertepaar  $\sigma, \theta$  berühren sollen, eine ganz bestimmte Lage zwischen fester Kurve und Scheibe.

Wir sagen, *die Scheibe*, deren Begrenzungslinie wir kurz als die bewegliche Kurve bezeichnen wollen, *bewege sich unter dem Einfluß kontinuierlicher äußerer Kräfte in einem Zeitintervall auf der festen Kurve*, wenn ihre Begrenzungslinie in jedem Zeitmoment  $t$  des Intervalls die feste Kurve berührt, und wenn ferner die dieser gegenseitigen Lage zugehörigen Lagekoordinaten  $\sigma, \theta$  in dem Intervall für  $t$  zweimal differenzierbare, den mechanischen Differentialgleichungen genügende Funktionen von  $t$  sind, ohne daß die ersten Ableitungen  $\sigma'$  und  $\theta'$  jemals beide gleich Null sind.

Seien nun  $x$  und  $y$  die Koordinaten des Scheibenschwerpunktes  $S$  in einem mit dem System  $(\xi, \eta)$  zusammenfallenden rechtwinkligen Koordinatensystem  $(x, y)$ , (s. Fig. 2, S. 120), sei ferner  $\alpha$  der Winkel der positiven Richtung der Tangente im Berührungspunkt mit der positiven  $x$ -Achse,  $m$  die Masse der Scheibe,  $k$  ihr Trägheitsradius für den Schwer-

punkt, so gelten zunächst für jeden Moment einer solchen Bewegung die geometrischen, bzw. kinematischen Relationen

$$(14) \quad \begin{cases} x = \xi + q \cos \alpha - p \sin \alpha \\ y = \eta + q \sin \alpha + p \cos \alpha, \end{cases}$$

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta_\sigma}{\xi_\sigma}; \quad \xi_\sigma^2 + \eta_\sigma^2 = 1; \quad \frac{\sigma'}{\varrho} = \alpha',$$

$$(16) \quad q = -p_\theta$$

und die aus ihnen durch Differentiation nach  $t$  folgenden

$$(17) \quad \begin{cases} x' = \xi_\sigma \sigma' - p_{\theta\theta} \xi_\sigma \theta' + p_\theta \eta_\sigma \frac{\sigma'}{\varrho} - p_\theta \eta_\sigma \theta' - p \xi_\sigma \frac{\sigma'}{\varrho} \\ y' = \eta_\sigma \sigma' - p_{\theta\theta} \eta_\sigma \theta' - p_\theta \xi_\sigma \frac{\sigma'}{\varrho} + p_\theta \xi_\sigma \theta' - p \eta_\sigma \frac{\sigma'}{\varrho} \end{cases}$$

und

$$(18) \quad \begin{cases} x' \cos \alpha + y' \sin \alpha = \sigma' - p_{\theta\theta} \theta' - p \frac{\sigma'}{\varrho} \\ x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = p_\theta \frac{\sigma'}{\varrho} - p_\theta \theta'. \end{cases}$$

Derjenige Punkt des Scheibenrandes, der mit dem momentanen Berührungspunkt zwischen fester und beweglicher Kurve zusammenfällt, hat, wie man leicht an Hand der Fig. 2, S. 120 erkennt, gegen die feste Kurve die relative Geschwindigkeit

$$(19^a) \quad v = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p(\theta' - \alpha'),$$

vorausgesetzt, daß wir  $v$  positiv zählen in Richtung der positiven Tangente der festen Kurve. Mit Hilfe der ersten der Gleichungen (18) läßt sich die Gleichung (19<sup>a</sup>) umformen in

$$(19^b) \quad v = \sigma' - (p + p_{\theta\theta})\theta',$$

oder

$$(19^c) \quad v = (\varrho - p - p_{\theta\theta})\theta' - \varrho\left(\theta' - \frac{\sigma'}{\varrho}\right).$$

Wir nennen die Bewegung der Scheibe auf der festen Kurve eine *Gleitbewegung*, wenn für sie  $v \neq 0$  ist, wir nennen sie eine *Rollbewegung*, wenn für sie  $v = 0$  ist.

Um auch das Verhalten der Scheibe in einem *einzelnen Zeitmoment* bequem charakterisieren zu können, fügen wir noch folgende Definition bei:

Gehören irgendeinem Zeitmoment  $t$ , in dem die Scheibe die feste Kurve berührt, auf Grund der mechanischen Differentialgleichungen bestimmte Werte von  $\sigma, \theta, \sigma', \theta', \sigma'', \theta''$  zu, so sagen wir, die Scheibe befinde sich in diesem Moment unter der Wirkung der äußeren Kräfte *in Gleit- bzw. Rollbewegung auf der festen Kurve*, wenn  $\sigma'$  und  $\theta'$  nicht beide Null sind. Sind  $\sigma'$  und  $\theta'$  beide Null, so befindet sich die Scheibe in diesem Moment *auf der festen Kurve in Ruhe*.

An äußeren Kräften wirke an der Scheibe außer der Normalreaktion  $N$

1. eine der Größe nach konstante Kraft  $P$ , welche stets senkrecht zu der gemeinsamen Tangente der festen und der beweglichen Kurve im jeweiligen Berührungspunkt von der beweglichen gegen die feste Kurve gerichtet ist und ihrer Größe nach nicht kleiner ist als eine stets angebbare positive Konstante  $M$ , deren Bedeutung später erörtert werden wird.  $P$  sei positiv gezählt in Richtung der negativen Normalen der beiden Kurven im Berührungspunkt.

2. eine Reibungskraft, welche dem Eintreten oder Statthaben des Gleitens zwischen fester und beweglicher Kurve entgegenwirkt, welche in Richtung der Tangente im Berührungspunkt zwischen beiden Kurven wirkt, und welche im Falle statthabender Gleitbewegung der relativen Gleitgeschwindigkeit  $v$  entgegengesetzt gerichtet und ihrer absoluten Größe nach gleich  $fN$  ist, wo  $f$  eine positive Konstante, der Betrag des Reibungskoeffizienten für Gleitbewegung, ist. Einem Rollen der beweglichen auf der festen Kurve dagegen soll kein Reibungswiderstand entgegenwirken<sup>1)</sup>, oder mit anderen Worten: Der Koeffizient der rollenden Reibung soll Null sein.

8. Wir nehmen an,  $\sigma, \theta, \sigma', \theta'$  haben für  $t = 0$  Anfangswerte  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$ , die so gewählt sind, daß  $v_0 = v_{(t=0)} > 0$  ist.<sup>2)</sup> Dann befindet sich die Scheibe im Moment  $t = 0$  in Gleitbewegung auf der festen Kurve, wenn die mechanischen Differentialgleichungen

$$(20) \quad \begin{cases} mx'' = -(N - P) \sin \alpha - N(f) \cos \alpha \\ my'' = (N - P) \cos \alpha - N(f) \sin \alpha \\ mk^2(\theta'' - \alpha'') = N(f)p + (N - P)q, \end{cases}$$

in denen  $(f) = \pm f$  so zu wählen ist, daß

$$(21) \quad (f)Nv > 0$$

ist, und die wegen der Gleichungen (14) bis (17) äquivalent sind mit drei Gleichungen für  $\sigma'', \theta''$  und  $N$ , für  $t = 0$  bestimmte Werte für  $\sigma''$  und  $\theta''$  und einen positiven Wert für  $N$  geben. In diesem Falle leiten die gegebenen Anfangswerte der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten eine Gleitbewegung ein, deren Differentialgleichungen die Gleichungen (20) sind, und die solange andauert, als die bei der Definition der Gleitbewegung der Scheibe auf der festen Kurve aufgestellten Bedingungen erfüllt sind.

1) Der bei der Rollbewegung vorhandene Reibungswiderstand wirkt dem Eintreten des Gleitens, nicht dem Rollen entgegen.

2) Für  $v_0 < 0$  würden zu den folgenden ganz analoge Ausführungen gelten.

Um die Gleichungen (20) in drei Gleichungen für  $\sigma''$ ,  $\theta''$  und  $N$  umzusetzen, führen wir zunächst die durch Differentiation der Gleichungen (17) erhaltenen Werte von  $x''$  und  $y''$  in die beiden ersten der Gleichungen (20) ein und lösen das nach Heranziehen der Gleichungen (15) und (16) erhaltene System der drei Gleichungen (20) nach den Größen  $\sigma''$ ,  $\theta''$  und  $N$  auf. Die Auflösung ist prinzipiell einfach, erfordert aber eine etwas umständliche Rechnung und möge aus diesem Grunde hier nicht durchgeführt werden. Sie liefert die Gleichungen

$$(22) \quad \sigma'' = A_1(\sigma, \theta) + A_2(\sigma, \theta)\sigma'^2 + A_3(\sigma, \theta)\sigma'\theta' + A_4(\sigma, \theta)\theta'^2$$

$$(23) \quad \theta'' = B_1(\sigma, \theta) + B_2(\sigma, \theta)\sigma'^2 + B_3(\sigma, \theta)\sigma'\theta' + B_4(\sigma, \theta)\theta'^2$$

$$(24) \quad N = \frac{1}{1 - \frac{(f)pp_{\theta\theta}}{k^2 + p_{\theta}^2}} \left\{ P + \frac{mk^2}{k^2 + p_{\theta}^2} \left[ (e - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{e^2} + p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{e} \right)^2 \right] \right\},$$

in denen die Koeffizienten  $A_i(\sigma, \theta)$ ,  $B_i(\sigma, \theta)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) die folgende Bedeutung haben; es ist

$$A_1(\sigma, \theta) = \frac{-(f)(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)}{(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}) \left( 1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e} \right)^m} P$$

$$A_2(\sigma, \theta) = \frac{-1}{1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}} \frac{1}{e^2} \left[ \frac{k^2(f)(e - p) + p_{\theta}(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}) + (e - p)p_{\theta\theta}(p_{\theta} - (f)p)}{k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}} + (p + p_{\theta\theta}) \frac{d e}{d \sigma} \right]$$

$$A_3(\sigma, \theta) = \frac{2[k^2(f)p_{\theta\theta} + p_{\theta}(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}) + p_{\theta\theta}^2(p_{\theta} - (f)p)]}{e \left( 1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e} \right) (k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})}$$

$$A_4(\sigma, \theta) = \frac{p_{\theta\theta\theta}(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}) - p_{\theta\theta}^2(p_{\theta} - (f)p) - k^2(f)p_{\theta\theta}}{\left( 1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e} \right) (k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})}$$

$$B_1(\sigma, \theta) = \frac{(f)[(e - p)p - (p_{\theta}^2 + k^2)]}{e \left( 1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e} \right) (k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})} \frac{P}{m}$$

$$B_2(\sigma, \theta) = - \frac{1}{1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}} \left[ \frac{(e - p)[k^2(f) - p(e - p)(f) + p_{\theta}(e - p)]}{e^3(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})} + \frac{1}{e^2} \frac{d e}{d \sigma} \right]$$

$$B_3(\sigma, \theta) = \frac{1}{1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}} \frac{2(f)k^2p_{\theta\theta} + p_{\theta}(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta}) + p_{\theta\theta}(e - p)(p_{\theta} + (f)p)}{e^2 (k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})}$$

$$B_4(\sigma, \theta) = \frac{1}{1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}} \frac{[k^2(f) + (e - p)(p_{\theta} - (f)p)]p_{\theta\theta} + (k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})p_{\theta\theta\theta}}{e(k^2 + p_{\theta}^2 - (f)pp_{\theta})}$$

Beachten wir zunächst, daß in diesen Koeffizienten der Nenner

$$1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}$$

stets positiv ist. Denn wegen  $p + p_{\theta\theta} > 0$  (Anm. 1, S. 121) ist bei negativem  $\varrho$  der Ausdruck  $1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}$  stets größer als Null. Bei positivem  $\varrho$  ist nach Voraussetzung (S. 120)  $R = \text{Max}(p + p_{\theta\theta}) < e$ , daher auch  $1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e} > 0$ .

**Erörterung eventuell eintretender Sperrungsvorgänge.**

9. Wir wollen nun zunächst an Hand eines einfachen Beispiels, das einen Spezialfall unseres Problems darstellt, Vorgänge erörtern, die bei diesem eintreten können, die wir aber im folgenden durch eine Voraussetzung über den absoluten Betrag des Reibungskoeffizienten  $f$  ausschließen werden.

Wählen wir die Funktionen

$$p(\theta) = a \sin \theta + R,$$

wo  $0 < a < R$  ist,

$$\xi(\sigma) = \sigma$$

$$\eta(\sigma) = 0$$

und die absolute Größe von  $P$  beliebig, so entsprechen diese Annahmen dem Fall, daß sich eine von einer Kreislinie begrenzte Scheibe, deren Schwerpunkt in der Entfernung  $a$  vom Mittelpunkt

der Kreislinie liegt, auf einer rauhen Geraden unter der Wirkung der Kraft  $P$  bewegen soll.

Für diese speziellen Annahmen gehen die Gleichungen (22) bis (24) über in

$$(22^a) \quad \sigma'' = - \frac{(f)(k^2 + a^2)}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta - (f)(a \sin \theta + R) a \cos \theta} \frac{P}{m} + \left\{ -a \cos \theta - \frac{a^2 \sin^2 \theta [a \cos \theta - (f)(a \sin \theta + R)] - (f)k^2 a \sin \theta}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta - (f)(a \sin \theta + R) a \cos \theta} \right\} \theta',$$

$$(23^a) \quad \theta'' = \frac{(f)(a \sin \theta + R)}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta - (f)(a \sin \theta + R) a \cos \theta} \frac{P}{m} + \frac{[a \cos \theta - (f)(a \sin \theta + R)] a \sin \theta}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta - (f)(a \sin \theta + R) a \cos \theta} \theta'^2$$

$$(24^a) \quad N = \frac{P(k^2 + a^2 \cos^2 \theta) - mk^2 a \sin \theta \theta'^2}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta - (f)(a \sin \theta + R) a \cos \theta}.$$

Wir nehmen nun an,  $\theta$  habe für  $t = 0$  einen Anfangswert  $\theta_0$ ,

$$\frac{3\pi}{2} < \theta_0 < 2\pi,$$

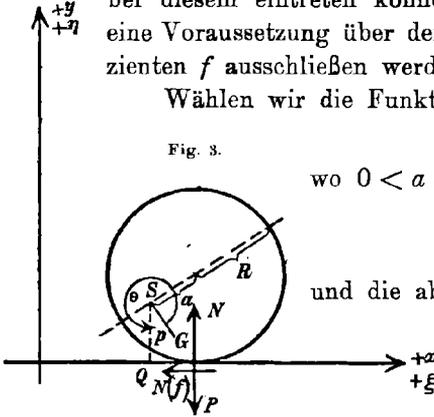


Fig. 3.

und  $(f)$  habe einen absoluten Betrag

$$f > \frac{k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0}{(R - a |\sin \theta_0|) a \cos \theta_0}.$$

Ferner sei  $\sigma_0$  beliebig,  $\sigma'$  und  $\theta'$  mögen für  $t=0$  beliebige Werte  $\sigma'_0 > 0$ ,  $\theta'_0 \leq 0$  haben, sodaß also

$$v_0 = \sigma'_0 - R\theta'_0 > 0$$

ist. Der einzige Bewegungszustand, in dem sich auf Grund unserer Definitionen in Nummer 7 die Scheibe bei diesen Anfangswerten auf der Geraden allenfalls befinden kann, ist der der Gleitbewegung, und die Werte  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  für  $t=0$  leiten tatsächlich eine solche ein, wenn das Vorzeichen von  $(f)$  so gewählt werden kann, daß die Ungleichung

$$N_0(f)v_0 > 0$$

erfüllt ist und bei dieser Wahl von  $(f)$  die Gleichungen (22<sup>a</sup>) bis (24<sup>a</sup>) den Größen  $\sigma''$ ,  $\theta''$  und  $N$  bestimmte Werte  $\sigma''_0, \theta''_0$  und einen bestimmten positiven Wert  $N_0$  zuordnen.

Es zeigt sich aber, daß in unserem Falle eine solche Bestimmung von  $(f)$  nicht möglich ist. Die letzte Ungleichung verlangt bei positivem  $N_0$  und  $v_0$  für  $(f)$  den Wert  $+f$  zu wählen; damit ergibt sich aber nach der aus Gleichung (24<sup>a</sup>) folgenden Gleichung

$$N_0 = \frac{P(k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0) + mk^2 a |\sin \theta_0| \theta_0'^2}{k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0 - (f)(R - a |\sin \theta_0|) a \cos \theta_0},$$

wegen der Voraussetzung über die Größe von  $f$ , ein negativer Wert  $N_0$ . Die für das Eintreten einer Gleitbewegung nötigen Bedingungen lassen sich daher im Momente  $t=0$  nicht erfüllen, auch nicht durch irgendwelche Voraussetzungen über den absoluten Wert der positiven Größe  $P$ . Es kann daher von einer mit  $t=0$  beginnenden Bewegung der Scheibe auf der festen Kurve im Sinne unserer Definitionen überhaupt nicht die Rede sein.

Wäre bei Anfangswerten, die denselben Ungleichungen wie vorhin unterliegen, der absolute Betrag von  $(f)$

$$f = \frac{k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0}{(R - a |\sin \theta_0|) a \cos \theta_0},$$

so ließe sich zwar — wenn man diese Gleichung als Grenzfall der Ungleichung

$$f < \frac{k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0}{(R - a |\sin \theta_0|) a \cos \theta_0}$$

auffaßt — durch die Wahl  $(f) = +f$  die Ungleichung

$$N_0(f)v_0 > 0$$

befriedigen, aber  $\sigma''_0, \theta''_0$  und  $N_0$  würden unendlich große Werte erhalten;

als einen Moment einer Bewegung der Scheibe auf der Geraden würden wir auch dann den Moment  $t = 0$  nicht bezeichnen.

Selbst wenn für

$$f < \frac{k^2 + a^2 \cos^2 \theta_0}{(R - a |\sin \theta_0|) a \cos \theta_0}$$

die gewählten Anfangswerte tatsächlich eine Gleitbewegung der Scheibe auf der Geraden einleiten, erscheint es nicht ausgeschlossen, daß im Laufe der Bewegung  $\theta$  einen Wert erhält, für den

$$f = \left| \frac{k^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(a \sin \theta + R) a \cos \theta} \right|$$

wird, und daß dann für den zugehörigen Zeitmoment das soeben erörterte Verhalten eintritt.

Derartige singuläre Fälle treten nun auch bei anderen mechanischen Systemen beim Vorhandensein von Gleitreibung auf; die genaue Behandlung eines besonders einfachen Systems dieser Art<sup>1)</sup> zeigt, daß es sich bei diesem mechanischen System in solchen Fällen um „Sperrungsvorgänge“ handelt. Zu dieser Deutung führt dabei folgende Überlegung: Ersetzt man das starre System durch ein etwas elastisch nachgiebiges, so leiten die das singuläre Verhalten des starren Systems bedingenden Anfangswerte beim elastischen System eine Gleitbewegung ein, bei der das System sehr bald zur Ruhe kommt, und die Zeit zwischen dem Beginn und dem Aufhören der Gleitbewegung konvergiert gegen Null, wenn man die elastische Nachgiebigkeit des Systems unbegrenzt verringert. Dadurch, daß man dann die Vorgänge beim starren System identifiziert mit den Grenzvorgängen beim elastischen System bei unbegrenzt abnehmender elastischer Nachgiebigkeit, kommt man dazu, beim starren System von *Sperrung* zu sprechen und zwar von *instanter Sperrung*, wenn die Sperrung bei von Null verschiedenem Wert einer der Geschwindigkeitskoordinaten des Systems eintritt.

Es scheint berechtigt, auch in unserem Fall der nicht-homogen mit Masse belegten Kreisscheibe in den angeführten Fällen von einer in dem betreffenden Moment einsetzenden *Sperrung* zu sprechen.<sup>2)</sup>

1) Vgl. die Arbeiten von F. Klein, R. v. Mises, G. Hamel, L. Prandtl, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 58 (1910), S. 186—197 und F. Pfeiffer, ebendasselbst S. 273—311 u. Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht, 24 (1911), S. 101—109.

2) Auf derartige „singuläre Fälle“ hat P. Painlevé zuerst hingewiesen, L. Lecornu und L. Prandtl haben sie als Sperrungsvorgänge erkannt. Eine Zusammenstellung der Arbeiten von Painlevé und der anschließenden Publikationen findet sich in der letzten der in voriger Anmerkung zitierten Arbeiten. Während der Drucklegung dieses Aufsatzes sind zwei weitere Arbeiten erschienen, die sich mit dem Gegenstand befassen: P. Field, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 61 (1912), S. 68—74 und J. Wellstein, ebenda S. 338—367.

Solche Vorkommnisse, die also, solange  $f$  beliebige Werte annehmen kann, bei unserm allgemeinen Problem — zu dem wir jetzt wieder zurückkehren — eintreten können, wenn nicht  $p_\theta \equiv 0$  ist<sup>1)</sup>, schließen wir weiterhin aus durch eine in der nächsten Nummer zu besprechende Festsetzung über die absolute Größe von  $f$ .<sup>2)</sup>

**Festsetzungen über die Größe von  $f$  und  $P$ .**

10. Wir verlangen nun, daß für das Folgende der in den Koeffizienten  $A_i$ ,  $B_i$  der Gleichungen (22) und (23) und in Gleichung (24) auftretende Ausdruck

$$1 - \frac{(f)p p_\theta}{k^2 + p_\theta^2}$$

für positives und negatives  $p_\theta$  und unabhängig von dem Vorzeichen von  $(f)$  dauernd dasselbe Vorzeichen habe und erfüllen diese Forderung sicher dadurch, daß wir

$$f < f_0$$

voraussetzen, wo  $f_0$  durch die Gleichung

$$(25) \quad f_0 = \frac{k^2}{\text{Max } p \ p_\theta}$$

definiert ist. Ein solcher Wert  $f_0$  läßt sich stets angeben, solange  $p_\theta \neq 0$  ist; in dem Falle, daß  $p_\theta \equiv 0$  ist, kann  $f$  irgendeinen positiven Wert haben. Wir werden finden, daß bei der Voraussetzung  $f < f_0$  irgendwelchen Anfangswerten der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten der beweglichen Scheibe stets Bewegungsvorgänge im Sinne unserer Definitionen entsprechen. Den Fall, daß  $\sigma'_0$  und  $\theta'_0$  beide Null sind, werden wir nicht erörtern.

Ganz andere Gründe führen uns zu den Voraussetzungen über die absolute Größe von  $P$ , die wir nach einigen Vorbemerkungen in Nummer 11 in der übernächsten Nummer formulieren werden. Die Festsetzungen über  $P$  sollen nur bewirken, daß einerseits während des ganzen Verlaufes irgendeiner Gleit- oder Rollbewegung der Normaldruck  $N$  positiv ist, d. h. kein Abheben der Scheibe von der festen Kurve eintritt, und daß andererseits während der ganzen Dauer einer Gleitbewegung die relative Geschwindigkeit des mit dem Berührungspunkt zwischen fester und beweglicher Kurve zusammenfallenden Scheibenpunktes gegen die feste Kurve ihrem absoluten Betrag nach abnimmt.

11. Aus dem Umstande, daß für eine eventuell auf  $t = 0$  folgende Gleitbewegung die Differentialgleichungen (20) oder (22) und (23) gelten

1) Vgl. die S. 119 zitierte Arbeit von A. Mayer, S. 274.

2) Es wäre eine Aufgabe für sich, gerade die hierdurch ausgeschlossenen Fälle eingehender zu behandeln.

müssen und wegen der Definition der Gleitbewegung die Größen  $\sigma$  und  $\theta$  zweimal differentiiertbare Funktionen von  $t$  sein müssen, folgt, daß auch die lebendige Kraft  $T$  der Scheibe eine differentiiertbare Funktion von  $t$  sein muß, und zwar ist vermöge der Gleichungen (20), (18) und (19<sup>a</sup>) während der ganzen Dauer einer Gleitbewegung

$$(26) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [x'^2 + y'^2 + k^2(\theta' - \alpha')^2] = -N(f)v.$$

Wegen der Relation (21) und  $v_0 > 0$  bedeutet dies aber, daß solange  $v > 0$  und  $N \neq 0$  ist, die lebendige Kraft  $T$  abnimmt. Wenn man also den Wert von  $T$  für  $t=0$  mit  $T_0$  bezeichnet und den Ausdruck

$$(27) \quad T = \frac{m}{2} [x'^2 + y'^2 + k^2(\theta' - \alpha')^2]$$

mit Hilfe der Gleichungen (18) und (15) umformt, so erhält man damit die für die ganze Dauer der eventuellen Gleitbewegung geltende Relation

$$(28) \quad T = \frac{m}{2} \left\{ \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'}{\varrho} - p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right) \right]^2 + (k^2 + p_{\theta}^2) \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right\} \leq T_0.$$

Diese Beziehung gestattet nun, eine obere Grenze für die Werte der Größen  $\frac{\sigma'^2}{\varrho^2}$ ,  $\theta'^2$  und  $\left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2$  während der Gleitbewegung aufzustellen.

Aus Ungleichung (28) folgt nämlich:

$$\left[ \frac{\sigma'}{\varrho} - \frac{p_{\theta\theta}}{\varrho - p - p_{\theta\theta}} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right) \right]^2 \leq \frac{1}{(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2} \left( \frac{2T_0}{m} - (k^2 + p_{\theta}^2) \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right);$$

das heißt aber, während der ganzen Dauer einer Gleitbewegung ist

$$(29) \quad \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \leq \frac{2T_0}{m(k^2 + p_{\theta}^2)}.$$

Durch Umsetzen der Ungleichung (28) in die Formen

$$\left[ \theta' - \frac{p_{\theta\theta}(\varrho - p - p_{\theta\theta}) + (k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2) \frac{\sigma'}{\varrho}}{k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2} \right]^2 \leq \frac{1}{(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)^2} \left\{ \frac{2T_0}{m} (k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2) - (k^2 + p_{\theta}^2) (\varrho - p - p_{\theta\theta})^2 \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} \right\}$$

bzw.

$$\left[ \frac{\sigma'}{\varrho} - \frac{p_{\theta\theta}(\varrho - p) + (k^2 + p_{\theta}^2)}{(\varrho - p)^2 + (k^2 + p_{\theta}^2)} \theta' \right]^2 \leq \frac{1}{[(\varrho - p)^2 + (k^2 + p_{\theta}^2)]^2} \left\{ \frac{2T_0}{m} [(\varrho - p)^2 + (k^2 + p_{\theta}^2)] - (k^2 + p_{\theta}^2) (\varrho - p - p_{\theta\theta})^2 \theta'^2 \right\}$$

ergibt sich ferner, daß für die ganze Dauer einer Gleitbewegung

$$(30) \quad \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} \leq \frac{2T_0(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)}{m(k^2 + p_{\theta}^2)(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2}$$

bzw.

$$(31) \quad \theta'^2 \leq \frac{2T_0[(\varrho - p)^2 + k^2 + p_{\theta}^2]}{m(k^2 + p_{\theta}^2)(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2}$$

ist.

12. Nach diesen Vorbemerkungen läßt sich nun zu dem vorgegebenen System von Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  eine untere Grenze  $M_1$  für  $P$  bestimmen, so daß für jedes  $P \geq M_1$  das  $N$  für  $t = 0$  und für jeden Moment einer eventuell auf  $t = 0$  folgenden Gleitbewegung nicht kleiner ist als eine vorgegebene positive Konstante  $\nu$ .

Denn dazu ist nach Gleichung (24) nur nötig, daß während der ganzen Dauer dieser eventuellen Gleitbewegung

$$\frac{P}{1 - \frac{(f)p p_{\theta}}{k^2 + p_{\theta}^2}} + \frac{mk^2}{k^2 + p_{\theta}^2 - (f)p p_{\theta}} \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} + p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right] \geq \nu$$

ist, oder daß

$$P \geq \left( 1 - \frac{(f)p p_{\theta}}{k^2 + p_{\theta}^2} \right) \nu - \frac{mk^2}{k^2 + p_{\theta}^2} \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} + p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right]$$

ist. Das ist sicher der Fall, wenn

$$P \geq \text{Max} \left( 1 - \frac{(f)p p_{\theta}}{k^2 + p_{\theta}^2} \right) \nu + \frac{mk^2}{\text{Min}(p_{\theta}^2 + k^2)} \text{Max} \left\{ (|\varrho| + p + p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} \right\} \\ + \frac{mk^2}{\text{Min}(k^2 + p_{\theta}^2)} \text{Max} \left\{ |p_{\theta\theta}| \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right\},$$

oder wenn (wegen der Relationen (29) und (30))

$$P \geq \text{Max} \left( 1 - \frac{(f)p p_{\theta}}{k^2 + p_{\theta}^2} \right) \nu + \frac{mk^2}{\text{Min}(k^2 + p_{\theta}^2)} \text{Max} \frac{2T_0(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)}{m(k^2 + p_{\theta}^2)(|\varrho| + p + p_{\theta\theta})} \\ + \frac{mk^2}{\text{Min}(k^2 + p_{\theta}^2)} \text{Max} \left( |p_{\theta\theta}| \frac{2T_0}{m(k^2 + p_{\theta}^2)} \right),$$

oder wenn wegen Ungleichung (25)

$$P \geq 2\nu + 2T_0 \frac{\text{Max}(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)}{\text{Min}(k^2 + p_{\theta}^2)(|\varrho| + p + p_{\theta\theta})} + 2T_0 \frac{\text{Max}|p_{\theta\theta}|}{\text{Min}(k^2 + p_{\theta}^2)},$$

oder wenn

$$(32) \quad P \geq 2\nu + \frac{2T_0}{k^2} \left\{ \frac{\text{Max}(k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2)}{\text{Min}(p + p_{\theta\theta})} + \text{Max}|p_{\theta\theta}| \right\}.$$

Für jede vorgegebene Funktion  $p(\theta)$  von der Art, wie wir sie gemäß unsern Voraussetzungen in Betracht ziehen, hat die rechte Seite dieser Ungleichung bei jedem vorgegebenen System von Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  einen bestimmten Zahlenwert  $M_1$ .

Zu dieser ersten Einschränkung der Größe von  $P$  soll nun noch eine zweite hinzutreten. Während der ganzen Dauer einer eventuell auf  $t = 0$  folgenden Gleitbewegung muß wegen der zweimaligen Differentiierbarkeit von  $\sigma$  und  $\theta$  und der Voraussetzungen über die Funktion  $p(\theta)$  auch  $v = \sigma' - (p + p_{\theta\theta})\theta'$  differentiierbar sein, und zwar folgt aus Gleichung (19<sup>a</sup>), nämlich

$$v = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p(\theta' - \alpha')$$

mit Verwendung der Gleichungen (20)

$$(33) \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{N(f)}{mk^2} (k^2 + p^2) + \frac{N-P}{mk^2} pp_p - p_\theta \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2,$$

oder mit Benützung der Gleichung (24)

$$(34) \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{(f)(k^2 + p^2 + p_\theta^2)}{m(k^2 + p_\theta^2 - (f)pp_p)} P \\ - \frac{(f)(k^2 + p^2) - pp_p}{k^2 + p_\theta^2 - (f)pp_p} \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} + p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right] - p_\theta \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2.$$

Man kann nun  $P$  so groß wählen, daß  $\frac{dv}{dt}$  nicht größer ist als  $-\mu$ , wo  $\mu$  eine vorgegebene (beliebig kleine) positive Konstante ist, sobald  $(f) = f < f_0$  ist und die Größen  $\frac{\sigma'^2}{\varrho^2}$  und  $\left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2$  den Ungleichungen (29) und (30) unterworfen sind.

Dazu ist nur nötig, daß

$$P \geq \mu \frac{m(k^2 + p_\theta^2 - fpp_p)}{f(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} - \frac{m[f(k^2 + p_\theta^2) - pp_p]}{f(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} \\ - \frac{m[f(k^2 + p_\theta^2) - pp_p]}{f(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 - \frac{m(k^2 + p_\theta^2 - fpp_p)}{f(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} p_\theta \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2.$$

Das ist sicher der Fall, wenn

$$P \geq \frac{\mu m}{f} \frac{\text{Max}(k^2 + p_\theta^2 - fpp_p)}{\text{Min}(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} + \frac{m}{f} \frac{\text{Max}[f(k^2 + p_\theta^2) + p|p_{\theta\theta}|]}{\text{Min}(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} \text{Max} \left| (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'^2}{\varrho^2} \right| \\ + \frac{m}{f} \frac{\text{Max}[f(k^2 + p_\theta^2) + p|p_{\theta\theta}|]}{\text{Min}(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} \text{Max} |p_{\theta\theta}| \text{Max} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \\ + \frac{m}{f} \frac{\text{Max}(k^2 + p_\theta^2 - fpp_p)}{\text{Min}(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} \text{Max} |p_\theta| \text{Max} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2,$$

oder, wegen der Relationen (29) und (30) und weil

$$\text{Max}[k^2 + p_\theta^2 - fpp_p] < 2 \text{Max}(k^2 + p_\theta^2)$$

und

$$\text{Min}(k^2 + p^2 + p_\theta^2) > k^2$$

ist, wenn

$$P \geq \frac{2m}{fk^2} \text{Max}(k^2 + p_\theta^2) \left\{ \mu + \frac{2T_0}{mk^2} \text{Max} |p_\theta| \right\} \\ + \frac{2T_0}{fk^2} \text{Max} \{ f(k^2 + p^2) + p|p_{\theta\theta}| \} \left\{ \frac{\text{Max}(k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}^2)}{\text{Min} \varrho - p - p_{\theta\theta}} + \text{Max} |p_{\theta\theta}| \right\}.$$

Das ist bestimmt der Fall, wenn für  $\varrho > 0$

$$(35) \quad P \geq \frac{2m}{fk^2} \text{Max}(k^2 + p_\theta^2) \left\{ \mu + \frac{2T_0}{mk^2} \text{Max} |p_\theta| \right\} \\ + \frac{2T_0}{fk^2} \text{Max} \{ f(k^2 + p^2) + p|p_{\theta\theta}| \} \left\{ \frac{\text{Max}(k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}^2)}{\varepsilon_2} + \text{Max} |p_{\theta\theta}| \right\},$$

und wenn für  $q < 0$

$$(35^a) \quad P \geq \frac{2m}{\sqrt{k^2}} \text{Max}(k^2 + p_0^2) \left\{ \mu + \frac{2T_0}{mk^2} \text{Max}|p_\theta| \right\} \\ + \frac{2T_0}{fk^2} \text{Max}\{f(k^2 + p^2) + p|p_\theta|\} \left\{ \frac{\text{Max}(k^2 + p_0^2 + p_{\theta 0}^2)}{\text{Min}(p + p_{\theta 0})} + \text{Max}|p_{\theta\theta}| \right\}$$

ist. Für jedes System von Werten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  läßt sich nach Gleichung (28)  $T_0$  berechnen und wegen unserer Voraussetzungen über die Funktion  $p(\theta)$  haben dann die rechten Seiten der Ungleichungen (35) und (35<sup>a</sup>) positive Zahlenwerte  $M'$  bzw.  $M''$ . Sei  $M_2$  weder kleiner als  $M'$  noch kleiner als  $M''$ , so erfüllt  $\frac{dv}{dt}$  die aufgestellte Forderung, falls nur

$$P \geq M_2$$

gewählt wird.

Ist ferner

$$(36) \quad M_3 = \nu + \frac{2T_0}{k^2} (\text{Max}(p + p_{\theta 0}) + \text{Max}|p_{\theta\theta}|),$$

so machen wir mit Rücksicht auf spätere Entwicklungen über  $P$  noch die dritte Annahme, daß auch  $P \geq M_3$  sei. Sie bezweckt, daß auch während der ganzen Dauer einer allenfalls auf die Gleitbewegung folgenden Rollbewegung  $N > 0$  bleibt. Sei nun  $M$  nicht kleiner als irgend eine der Größen  $M_1, M_2, M_3$ , so wollen wir festsetzen, daß die an der Scheibe wirkende äußere Kraft  $P$  für jedes System von Werten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  so gewählt sei, daß  $P$  nicht kleiner ist als das diesem Wertsystem zugehörige  $M$ .

In dem speziellen Fall, daß die Scheibe von einem Kreis vom Radius  $R$  begrenzt ist, dessen Mittelpunkt der Scheibenschwerpunkt ist, ist die zweite Voraussetzung über die Größe von  $P$  von selbst erfüllt, sobald die erste erfüllt ist. Denn hier ist, da  $p \equiv R$  und  $p_\theta \equiv 0$  ist,  $\frac{dv}{dt} = -\frac{N(f)}{mk^2} (R^2 + k^2)$  (nach Gleichung (33)). Sobald also  $N \geq \nu$  ist, ist auch  $\frac{dv}{dt}$  bei  $(f) = f$  nicht größer als eine negative Konstante.

### Diskussion der Gleitbewegung.

13. Wir nehmen nun an, es sei der Reibungskoeffizient  $(f)$  für Gleitbewegung seinem Absolutwert nach  $< f_0$ , es gehöre ferner dem Zeitmoment  $t = 0$  ein System von Werten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  zu, für das  $v_0 > 0$  ist, und es sei die äußere Kraft  $P$  nicht kleiner als die diesem Wertsystem entsprechende Konstante  $M$ . Dann gehören auf Grund der Gleichungen (22) bis (24), nach erfolgter Wahl von  $(f)$  entsprechend der Gleichung (21), dem Moment  $t = 0$  auch ein Wert  $N_0 > 0$  und

bestimmte Werte  $\sigma'_0$  und  $\theta'_0$  zu. Die Scheibe befindet sich also im Moment  $t = 0$  sicher in Gleitbewegung auf der festen Kurve.

Wir behaupten, die Werte  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  leiten eine Gleitbewegung ein, die während eines gewissen Zeitintervalls  $0 \leq t < t_2$ , wo  $t_2$  eine positive Konstante ist, andauert.

Dazu müssen vor allem in diesem Intervall  $\sigma$  und  $\theta$  zweimal differentiierbare Funktionen von  $t$  sein, die den Differentialgleichungen (22) und (23) genügen, in denen das Vorzeichen von  $(f)$  so zu wählen ist, daß  $(f)Nv > 0$  ist. Da aber dann wegen (24) und (19<sup>b</sup>) auch  $N$  und  $v$  stetige Funktionen von  $t$  sind und  $N_0 > 0, v_0 > 0$  sind, so muß  $(f) = f$  gewählt werden.

Es wird sich also in erster Linie darum handeln, zu zeigen, daß die Gleichungen (22) und (23) mit  $(f) = f$  in einem Intervall  $0 \leq t < t_1$  zweimal differentiierbare Lösungen  $\sigma$  und  $\theta$  haben, die für  $t = 0$  die Werte  $\sigma_0, \theta_0$  annehmen und deren erste Ableitungen für  $t = 0$   $\sigma'_0$  und  $\theta'_0$  sind. Die Differentialgleichungen (22) und (23) sind aber gleichbedeutend mit dem System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = A_1(\sigma, \theta) + A_2(\sigma, \theta)z^2 + A_3(\sigma, \theta)zu + A_4(\sigma, \theta)u^2 \equiv f_1 \\ \frac{d\sigma}{dt} = z \equiv f_2 \\ \frac{du}{dt} = B_1(\sigma, \theta) + B_2(\sigma, \theta)z^2 + B_3(\sigma, \theta)zu + B_4(\sigma, \theta)u^2 \equiv f_3 \\ \frac{d\theta}{dt} = u \equiv f_4, \end{cases}$$

in dem jetzt — nach unseren Voraussetzungen über  $(f)$  — die Koeffizienten  $A_i, B_i (i = 1, \dots, 4)$  für alle Werte von  $\sigma$  und  $\theta$  sicher einmal stetig differentiierbare Funktionen von  $\sigma$  und  $\theta$  sind, und in denen daher die Funktionen  $f_i (i = 1, \dots, 4)$  für alle Werte von  $t, \sigma, \theta, z, u$  eindeutige und stetige Funktionen der Variablen  $t, \sigma, \theta, z, u$  mit stetigen ersten partiellen Ableitungen nach  $\sigma, \theta, z, u$  sind. Der Punkt  $t = 0, \sigma = \sigma_0, \theta = \theta_0, z = z_0, u = u_0$  ist ein innerer Punkt des „Stetigkeitsbereiches“ dieser Funktionen, und es gibt daher ein Funktionensystem  $\sigma(t), \theta(t), z(t), u(t)$ , welches in einem Intervall  $0 \leq t < t_1$  eindeutig definiert, stetig und stetig differentiiierbar ist, den Differentialgleichungen (37) genügt und für  $t = 0$  bzw. die Werte  $\sigma_0, \theta_0, z_0, u_0$  annimmt. Dabei ist entweder die obere Grenze  $t_1$  des „Stetigkeitsintervalls“ der Funktionen  $\sigma, \theta, z, u$  eine positive Konstante, oder sie ist größer als jede positive Konstante.

1) Vgl. etwa Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, § 23, S. 168 ff.

Gleitbewegung besteht nun in demjenigen Teil  $0 \leq t < t_2$  dieses Intervalls, in dem  $v > 0$  bleibt. ( $N$  bleibt in diesem Teil sicher  $> 0$  wegen unserer Voraussetzungen über  $P$ .)

14. Wir zeigen nun, daß es stets eine Stelle  $t = t_2$  ( $0 < t_2 < t_1$ ) gibt, für die  $v = 0$  wird. Beachten wir dabei die folgenden Eigenschaften von  $v$ :

1.  $v$  ist wegen Gleichung (19<sup>b</sup>) im Intervall  $0 \leq t < t_1$  stetig und differenzierbar;

2.  $\frac{dv}{dt}$  ist negativ und  $\left| \frac{dv}{dt} \right| > \mu$ , solange  $v > 0$  ist;

denn solange gelten die Relationen (29) und (30), die wir bei der Größenbestimmung von  $P$  auf Seite 132 verwendet haben.

Ist nun die obere Grenze  $t_1$  des Stetigkeitsintervalles der Funktionen  $\sigma, \theta, z, u$  größer als jede positive Konstante, so wird wegen 1. und 2. sicher auch  $v = 0$  für einen positiven Wert  $t = t_2$ . Ist dagegen diese obere Grenze  $t_1$  eine positive Zahl, so gibt es wegen 1. und 2. für  $v$  höchstens die beiden Möglichkeiten:

entweder es wird 0 für einen Wert  $0 < t_2 < t_1$ , dann ist unsere Behauptung richtig,

oder es nähert sich für  $\lim t = t_1$  einem nicht negativen Grenzwert. Diese zweite Möglichkeit würde aber — wie wir gleich zeigen werden — zur Folge haben, daß das Stetigkeitsintervall der Funktionen  $\sigma, \theta, z, u$  über  $t = t_1$  hinausreicht, was der Voraussetzung widerspricht. Daher ist sie ausgeschlossen und unsere zu Beginn dieser Nummer aufgestellte Behauptung in jedem Falle richtig.

Um den noch zu erbringenden Beweis zu führen, zeigen wir vorerst: Strebt  $v$  für  $\lim t = t_1$  stets abnehmend einem nicht negativen Grenzwert zu, dann streben auch  $\sigma, \sigma', \theta, \theta'$  für  $\lim t = t_1$  Grenzwerten  $\sigma_1, \sigma'_1, \theta_1, \theta'_1$  zu.

Zunächst können  $\sigma$  und  $\theta$  bei unbegrenzter Annäherung an  $t = t_1$  weder mit endlich bleibenden Schwankungen oszillieren, noch unendlich werden, denn sonst müßten  $|\sigma'|$  und  $|\theta'|$  über alle Grenzen wachsen, was aber wegen des Bestehens der Relationen (29) bis (31) nicht möglich ist. Also streben  $\sigma$  und  $\theta$  Grenzwerten  $\sigma_1$  und  $\theta_1$  zu, und insbesondere bleibt daher  $\sigma$  im Innern des Intervalles  $0 \leq t \leq t_1$  unterhalb einer Konstanten. Weder  $\sigma'$  noch  $\theta'$  kann ferner bei Annäherung an  $t = t_1$  unendlich viele Oszillationen von nicht gegen Null konvergierender Amplitude haben, da sonst  $|\sigma''|$  bzw.  $|\theta''|$  über alle Grenzen wachsen müßten. Dies ist wegen des Bestehens der Gleichungen (22) und (23) nicht möglich; denn die in denselben auf-

tretenden Koeffizienten  $A_i(\sigma, \theta)$  und  $B_i(\sigma, \theta)$  bleiben absolut genommen kleiner als eine positive Konstante, eben weil auch  $|\sigma|$  im Innern des Intervalls  $0 \leq t \leq t_1$  unterhalb einer positiven Konstanten bleibt. Also nähern sich auch  $\sigma'$  und  $\theta'$  Grenzwerten  $\sigma'_1 = z_1$  und  $\theta'_1 = u_1$ .

Aus der Tatsache, daß  $\sigma, \theta, z, u$  für  $\lim t = t_1$  Grenzwerten  $\sigma_1, \theta_1, z_1, u_1$  zustreben, folgt aber nun weiter, daß ihr Stetigkeitsintervall über  $t = t_1$  hinausreicht. Die Grenzwerte  $t_1, \sigma_1, \theta_1, z_1, u_1$  gehören zu einem Punkt im Innern des Stetigkeitsbereiches der Funktionen  $f_i (i = 1, \dots, 4)$  in Gleichung (37). Infolgedessen gibt es (vgl. Seite 134) eine positive Konstante  $h$ , für die folgendes gilt: Ist  $\tau$  irgend eine die Forderung  $0 \leq \tau \leq t_1$  erfüllende Zahl, so sind die Funktionen  $\sigma(t)$  und  $\theta(t)$  durch die Anfangswerte, welche sie und ihre Ableitungen für  $t = \tau$  annehmen sollen und durch die Differentialgleichungen (37) in dem Intervall  $(\tau \dots \tau + h)$  als stetige und differentiierbare Funktionen von  $t$  eindeutig definiert. Man braucht jetzt nur  $\tau = t_1 - \frac{h}{2}$  zu wählen, um zu erkennen, daß das Stetigkeitsintervall der Funktionen  $\sigma(t)$  und  $\theta(t)$  über die Stelle  $t = t_1$  hinausreicht.

15. Hier ist nun folgendes zu beachten: Die Lösungen der Differentialgleichungen (22) und (23) liefern uns für  $t = t_2$  bestimmte Werte  $\sigma_2, \theta_2, \sigma'_2, \theta'_2$ , für die  $v = 0$  ist. Den mechanischen Vorgang unseres Problems schildern diese Differentialgleichungen solange, als  $v > 0$  ist. Wir erhalten also zunächst nur *das Ergebnis, daß den Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  bei unseren Voraussetzungen über  $f$  und  $P$  eine Gleitbewegung während eines bestimmten Zeitintervalles  $0 \leq t < t_2$  entspricht, in deren Verlauf  $v$  beständig abnehmend gegen Null konvergiert.*

Um für den Zeitpunkt  $t = t_2$  selbst eine Aussage über den Bewegungsvorgang machen zu können, müssen wir die Annahme hinzunehmen, daß im Moment  $t = t_2$  die Größen  $\sigma, \theta, \sigma', \theta'$  die Werte  $\sigma_2, \theta_2, \sigma'_2, \theta'_2$  haben sollen, die ihnen auf Grund der Lösungen der Differentialgleichungen (22) und (23) für diesen Moment zugewiesen werden. Dann ist für  $t = t_2$   $v = 0$ . Sind gleichzeitig  $\sigma'_2$  und  $\theta'_2$  gleich Null, so ist mechanisch unmittelbar klar, daß die Scheibe sich im Moment  $t = t_2$  auf der Kurve in Ruhe befindet und auch weiterhin in Ruhe bleibt; doch soll hier die Frage der Reibung der Ruhe nicht eingehender erörtert werden. Der Fall, daß  $\sigma'_2$  und  $\theta'_2$  nicht beide gleich Null sind, soll in Nummer 17 weiter behandelt werden.

16. Wir fügen hier noch ein Resultat an, das für die Gleitbewegung gilt, und das dem in Nummer 3 des Abschnittes I gewonnenen Ergebnis entspricht.

Da die Funktionen  $\sigma$  und  $\theta$  in dem ganzen Intervall  $0 \leq t < t_1$

zweimal stetig differentierbar sind, so definiert auch der Ausdruck für  $T$  (Gleichung (28)) eine in dem ganzen Intervall  $0 \leqq t < t_1$  differentierbare Funktion von  $t$ , und zwar ist (Gleichung (26))

$$\frac{dT}{dt} = -Nfv,$$

also speziell an der Stelle  $t = t_2$

$$(38) \quad \left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=t_2} = 0.$$

Nun ist  $\frac{dT}{dt}$  selbst wieder eine im Intervall  $0 \leqq t < t_1$  differentierbare Funktion von  $t$ , und zwar ist  $\frac{d^2T}{dt^2}$  an der Stelle  $t = t_2$

$$(38^a) \quad \left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_{t=t_2} = -Nf\frac{dv}{dt}.$$

Also ist

$$\left(\frac{d^2T}{dt^2}\right)_{t=t_2} > 0,$$

weil für jedes  $0 \leqq t < t_2$   $N$  größer als eine positive und  $\frac{dv}{dt}$  kleiner als eine negative Konstante ist und bei  $t = t_2$   $N$  und  $\frac{dv}{dt}$  stetig sind.

Daher hat die Funktion  $T(t)$ , die für jeden Wert  $0 \leqq t \leqq t_2$  die lebendige Kraft der Scheibe gibt, an der Stelle  $t = t_2$  ein Minimum.

### Diskussion der Rollbewegung.

17. Wir kehren nun zurück zu den Resultaten von Nummer 15. Es seien also  $\sigma'_2$  und  $\theta'_2$  nicht beide gleich Null. Dann kann mit dem Moment  $t = t_2$  eine Rollbewegung der Scheibe auf der festen Kurve beginnen, die während eines von Null verschiedenen Intervalls  $t_2 \leqq t < t_3$  andauert, wenn die Differentialgleichungen

$$(39) \quad \begin{cases} mx'' = -(N - P) \sin \alpha - F \cos \alpha \\ my'' = (N - P) \cos \alpha - F \sin \alpha \\ mk^2(\theta'' - \alpha'') = Fp + (N - P)q, \end{cases}$$

in denen  $F$  eine unbekannte Reibungskraft ist, zusammen mit der Relation

$$(40) \quad v = 0$$

und den Relationen (14) bis (19) Funktionen  $\sigma(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $N(t)$  bestimmen, die während dieses Intervalls  $t_2 \leqq t < t_3$  den Bedingungen für Rollbewegung genügen, und für die  $\sigma(t_2) = \sigma_2$ ,  $\theta(t_2) = \theta_2$ ,  $\sigma'(t_2) = \sigma'_2$ ,  $\theta'(t_2) = \theta'_2$  ist.

Setzt man jetzt die durch Differentiation der Gleichungen (17) entstehenden Werte von  $x''$  und  $y''$  in die Gleichungen (39) ein und be-

rücksichtigt noch die Gleichungen (15) und (16), so bilden die so umgeformten Gleichungen (39) zusammen mit der durch Differentiation der Gleichung (40) erhaltenen Gleichung

$$\sigma'' - (p + p_{\theta\theta})\theta'' - (p_{\theta} + p_{\theta\theta\theta})\theta'^2 = 0$$

ein System von vier Gleichungen für die vier Größen  $\sigma''$ ,  $\theta''$ ,  $N$  und  $F$ . Die Auflösung desselben nach diesen Unbekannten, deren Durchführung — aus dem auch bei Aufstellung der Gleichungen (22) bis (24) maßgebenden Grunde — hier unterlassen sei, liefert das System der Differentialgleichungen

$$(41) \quad \sigma'' = \left( \frac{e(p + p_{\theta\theta})}{e - p - p_{\theta\theta}} \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{e} + \frac{e}{e - p - p_{\theta\theta}} \frac{p_{\theta} + p_{\theta\theta\theta}}{(p + p_{\theta\theta})^2} - \frac{p_{\theta}}{k^2 + p^2 + p_{\theta}^2} \right) \sigma'^2$$

$$(42) \quad \theta'' = \left( \frac{e(p + p_{\theta\theta})^2}{e - p - p_{\theta\theta}} \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{e} + \frac{p_{\theta} + p_{\theta\theta\theta}}{e - p - p_{\theta\theta}} - \frac{p_{\theta}(p + p_{\theta\theta})}{k^2 + p^2 + p_{\theta}^2} \right) \theta'^2$$

für  $\sigma$  und  $\theta$  und der Gleichungen

$$(43) \quad N = P + m \left\{ \frac{(e - p - p_{\theta\theta})(p + p_{\theta\theta})}{e^2(k^2 + p^2 + p_{\theta}^2)} \left[ (p + p_{\theta\theta})(k^2 + p^2) - p_{\theta}^2(e - p - p_{\theta\theta}) \right] + \frac{(e - p - p_{\theta\theta})^2}{e^2} p_{\theta\theta\theta} \right\} \theta'^2$$

$$(44) \quad F = m \left\{ \frac{p p_{\theta}(p + p_{\theta\theta})(e - p - p_{\theta\theta})}{e(k^2 + p^2 + p_{\theta}^2)} - \frac{p_{\theta}}{e^2}(e - p - p_{\theta\theta})^2 - p_{\theta\theta\theta} \right\} \theta'^2$$

für  $N$  und  $F$ , unter Aufrechterhaltung der Anfangsbedingungen für  $\sigma$  und  $\theta$ .

*Wir zeigen nun, daß tatsächlich eine mit  $t = t_2$  beginnende Rollbewegung während eines Zeitintervalles  $t_2 \leq t < t_3$  möglich ist, und daß dabei  $t_3$  größer als jede positive Konstante ist, d. h. daß die Rollbewegung unbegrenzt lange andauern kann.*

18. Bezeichnen wir die Koeffizienten von  $\sigma'^2$  bzw.  $\theta'^2$  in den Gleichungen (41) und (42) mit  $A(\sigma, \theta)$  und  $B(\sigma, \theta)$ , so sind  $A(\sigma, \theta)$  und  $B(\sigma, \theta)$  stetige Funktionen von  $\sigma$  und  $\theta$  mit stetigen ersten partiellen Ableitungen nach  $\sigma$  und  $\theta$  für alle Werte  $\sigma$  und  $\theta$ , und das Gleichungssystem (41), (42) ist identisch mit dem System

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = A(\sigma, \theta) z^2 \\ \frac{d\sigma}{dt} = z \\ \frac{du}{dt} = B(\sigma, \theta) u^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = u. \end{cases}$$

Darin sind die Funktionen auf der rechten Seite stetige Funktionen von  $t, \sigma, \theta, z, u$  mit stetigen ersten partiellen Ableitungen nach  $\sigma, \theta, z, u$  für alle Werte  $t, \sigma, \theta, z, u$  und der Punkt  $t = t_2, \sigma = \sigma_2, \theta = \theta_2, z = z_2, u = u_2$  ist ein innerer Punkt des Stetigkeitsbereiches dieser Funktionen. Daher gibt es ein System von Funktionen  $\sigma(t), \theta(t), z(t), u(t)$ , welche in einem Intervall  $t_2 \leq t < t_3$  eindeutig definiert, stetig und differenzierbar sind, den Differentialgleichungen (45) genügen und für  $t = t_2$  bzw. die Werte  $\sigma_2, \theta_2, z_2, u_2$  annehmen.

Es bleibt nun zu zeigen, erstens daß in diesem Intervall auch die gemäß unserer Definition der Rollbewegung notwendige Forderung  $N > 0$  erfüllt ist, und zweitens, daß  $t_3$  größer ist als jede positive Zahl, d. h. daß das Stetigkeitsintervall der Funktionen  $\sigma, \theta, z, u$  von  $t$  jeden Wert  $t > t_2$  im Innern enthält.

Zunächst folgt aus der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktionen  $\sigma(t), \theta(t), \sigma'(t), \theta'(t)$  im Intervall  $t_2 \leq t < t_3$ , daß auch (Gleichung (28))

$$T = \frac{m}{2} \left\{ \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'}{\varrho} - p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right) \right]^2 + (k^2 + p_\theta^2) \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right\}$$

eine in demselben Intervall stetige und differenzierbare Funktion von  $t$  ist; und zwar ist — wie sich leicht aus den Gleichungen (27), (39), (40) und (18) ergibt —

$$(46) \quad \frac{dT}{dt} = 0,$$

d. h.

$$(47) \quad T = \frac{m}{2} \left\{ \left[ (\varrho - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'}{\varrho} - p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right) \right]^2 + (k^2 + p_\theta^2) \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\varrho} \right)^2 \right\} = T_2,$$

wenn die Konstante  $T_2$  den Wert von  $T$  für  $t = t_2$  bedeutet: Während der Rollbewegung bleibt die lebendige Kraft konstant. Die Gleichung (40), nämlich

$$\sigma' - (p + p_{\theta\theta}) \theta' = 0,$$

und die Gleichung (47) gestatten nun  $\sigma'^2$  und  $\theta'^2$  für das ganze Intervall  $t_2 \leq t < t_3$  als Funktionen von  $\sigma$  und  $\theta$  zu berechnen. Es ergibt sich

$$(48) \quad \sigma'^2 = \frac{2 T_2}{m} \frac{\varrho^2 (p + p_{\theta\theta})^2}{(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2 (k^2 + p^2 + p_\theta^2)}$$

$$(49) \quad \theta'^2 = \frac{2 T_2}{m} \frac{\varrho^2}{(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2 (k^2 + p^2 + p_\theta^2)}.$$

Damit folgt nun nach Gleichung (43)

$$N = P + 2 T_2 \left\{ \frac{(p + p_{\theta\theta})^2 (k^2 + p^2)}{(\varrho - p - p_{\theta\theta})^2 (k^2 + p^2 + p_\theta^2)} - \frac{p_\theta^2 (p + p_{\theta\theta})}{(k^2 + p^2 + p_\theta^2)} + \frac{p_{\theta\theta}}{k^2 + p^2 + p_\theta^2} \right\}.$$

Die Forderung  $N \geq \nu$  im ganzen Intervall  $t_2 \leq t < t_3$  liefert

$$P \geq \nu - 2 T_2 \frac{(p + p_{\theta\theta})^2 (k^2 + p^2)}{(q - p - p_{\theta\theta}) (k^2 + p^2 + p_{\theta}^2)^2} + 2 T_2 \frac{p_{\theta}^2 (p + p_{\theta\theta})}{(k^2 + p^2 + p_{\theta}^2)^2} - \frac{2 T_2 p_{\theta\theta}}{k^2 + p^2 + p_{\theta}^2},$$

und diese Forderung ist sicher erfüllt, wenn — wie eine kurze Rechnung zeigt —

$$(50) \quad P \geq \nu + \frac{2 T_2}{k^2} \left\{ \text{Max}(p + p_{\theta\theta}) + \text{Max}|p_{\theta\theta}| \right\}$$

ist. Das ist aber wegen unserer dritten Voraussetzung über die Größe von  $P$  (s. Gleichung (36)) der Fall.

Zum Nachweis der zweiten der auf der vorigen Seite aufgestellten Behauptungen beweisen wir nun, daß die Funktionen  $\sigma(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\sigma'(t)$ ,  $\theta'(t)$ ,  $\sigma''(t)$ ,  $\theta''(t)$  für keinen Wert  $t_4$  ( $t_4 > t_2$ ) aufhören, stetig zu sein;  $\sigma$  und  $\theta$  können bei  $t = t_4$  nicht in der Weise unstetig werden, daß sie absolut genommen unendlich groß werden, denn sonst müßten auch  $\sigma'$  und  $\theta'$  unendlich werden, was aber wegen der Relationen (48) und (49) nicht möglich ist; aus demselben Grunde können  $\sigma$  und  $\theta$  nicht in der Weise unstetig werden, daß sie bei unbegrenzter Annäherung an  $t = t_4$  unendlich oft um Beträge oszillieren, die nicht gegen Null konvergieren. Es bliebe noch die Möglichkeit, daß sich  $\sigma$  und  $\theta$  bei unbegrenzter Annäherung von  $t$  an  $t_4$  Grenzwerten nähern, aber an der Stelle  $t_4$  selbst diese Grenzwerte nicht annehmen. Mit  $\sigma$  und  $\theta$  konvergieren dann aber auch  $\sigma'$  und  $\theta'$  wegen der Gleichungen (48) und (49) gegen bestimmte Grenzwerte, und eine ganz ähnliche Überlegung zu der auf Seite 136 durchgeführten zeigt, daß dann  $\sigma$  und  $\theta$ ,  $\sigma'$  und  $\theta'$  an der Stelle  $t_4$  auch stetig sind. Damit ist die Stetigkeit von  $\sigma$  und  $\theta$  an der Stelle  $t_4$  dargetan, daraus folgt aber wegen der Gleichungen (48), (49) und (41), (42) auch die von  $\sigma'$  und  $\theta'$  und  $\sigma''$  und  $\theta''$ .

Daher gehören jedem Wert  $t \geq t_2$  bestimmte Werte von  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $\sigma'$ ,  $\theta'$ ,  $\sigma''$ ,  $\theta''$  und ein positiver Wert von  $N$  zu, und zwar sind wegen der Gleichungen (48) und (49)  $\sigma'$  und  $\theta'$  niemals gleich Null. Daher kann Ruhe nicht eintreten, und Rollbewegung ist während des ganzen unendlichen Zeitintervalls  $t \geq t_2$  möglich.

19. Es bleibt noch zu zeigen, daß in keinem Moment  $t > t_2$  eine Gleitbewegung beginnen kann. Angenommen, es gäbe ein mit  $t = t_5$  ( $t_5 > t_2$ ) beginnendes Intervall, in dem Gleitbewegung bestände, dann müßte im Innern dieses Intervalls  $\nu$  von Null verschieden sein. Nehmen wir etwa an  $\nu > 0$ ; für  $\nu < 0$  wäre die Durchführung ganz analog. Gemäß unserer Definition der Gleitbewegung müßte sich, dann  $\nu$ , von  $\nu = 0$  für  $t = t_5$  ausgehend, stetig ändern; es müßte also für jede positive Zahl  $\varepsilon$  ein positives  $\Delta t$  geben, so daß  $0 < \nu < \varepsilon$  wäre für  $t = t_5 + \Delta t$ .

Im Moment  $t = t_5 + \Delta t$  hätten wir dann aber Anfangsbedingungen, die denen in Nummer 13, Seite 133 ganz analog sind. Also würde  $v = 0$  werden in einem Zeitmoment  $t = t_5 + \Delta t + \Delta_1 t$ , wo  $\Delta_1 t$  wegen  $\left| \frac{dv}{dt} \right| > \mu$  gleichzeitig mit  $\Delta t$  und  $\varepsilon$  gegen Null konvergiert. Da dies für jedes noch so kleine  $\varepsilon$  gelten müßte, so kann eine Gleitbewegung überhaupt nicht eintreten. Damit ist gezeigt, daß die als möglich erkannte Rollbewegung vom Moment  $t = t_2$  ab auch die einzig mögliche Bewegung der Scheibe auf der festen Kurve ist.

Wir erhalten so zusammenfassend das Resultat: *Bei unsern speziellen Voraussetzungen über die an der Scheibe wirkenden Kräfte und über die Größe des Reibungskoeffizienten der Gleitbewegung und bei unsern sehr allgemeinen Annahmen über die feste und die bewegliche Kurve entspricht einem System von Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$ , für die  $v_0 \neq 0$  ist, eine Bewegung der Scheibe auf der festen Kurve, die während eines endlichen Zeitintervalls eine Gleitbewegung und, falls im Moment des Aufhörens der Gleitbewegung nicht gerade Ruhe eintritt, nachher eine Rollbewegung von unbegrenzter Dauer ist.*

Die lebendige Kraft als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten.

20. Der Ausdruck (Gleichung (28))

$$T = \frac{m}{2} \left\{ \left[ (q - p - p_{\theta\theta}) \frac{\sigma'}{\rho} - p_{\theta\theta} \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\rho} \right) \right]^2 + (k^2 + p_{\theta}^2) \left( \theta' - \frac{\sigma'}{\rho} \right)^2 \right\}$$

oder

$$(51) \quad T = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(q-p)^2 + k^2 + p_{\theta}^2}{\rho^2} \sigma'^2 + (k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}^2) \theta'^2 - 2 \frac{k^2 + p_{\theta}^2 + p_{\theta\theta}(q-p)}{\rho} \sigma' \theta' \right\}$$

ist eine Funktion der Veränderlichen  $\sigma, \theta, \sigma', \theta'$ , die für jeden Moment der Gleit- und Rollbewegung für das diesem Moment zugehörige Wertesystem  $\sigma, \theta, \sigma', \theta'$  die zugehörige lebendige Kraft der Scheibe gibt.

Bezeichnen wir mit  $J$  das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt, so ist

$$(52) \quad J = m \{ -x'(p \cos \alpha + q \sin \alpha) + y'(q \cos \alpha - p \sin \alpha) - k^2(\theta' - \alpha') \},$$

oder

$$(53) \quad J = m \left\{ -(k^2 + p_{\theta}^2 - p p_{\theta\theta}) \theta' - [p(q - p) - (k^2 + p_{\theta}^2)] \frac{\sigma'}{\rho} \right\}.$$

Für irgendein festes Wertepaar  $\sigma, \theta$  sind die Ausdrücke für  $T$  und  $J$  rationale ganze Funktionen von  $\sigma'$  und  $\theta'$ , und wir können die Forderung stellen, ein eventuelles Minimum von  $T(\sigma', \theta')$  zu bestimmen mit der Gleichung

$$(54) \quad J(\sigma', \theta') = i,$$

wo  $i$  eine von Null verschiedene Konstante ist, als Nebenbedingung.

Notwendige Bedingungen, denen  $\sigma'$  und  $\theta'$  zum Zwecke der Existenz eines solchen Minimums genügen müssen, sind bei Einführung einer zunächst unbekanntesten Konstanten  $\mathcal{A}$  die Gleichungen

$$m \left\{ \frac{(e-p)^2 + k^2 + p_\theta^2}{e^2} \sigma' - \frac{k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}(e-p)}{e} \theta' \right\} - \mathcal{A} m \frac{p(e-p) - (k^2 + p_\theta^2)}{e} = 0$$

und

$$m \left\{ (k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}) \theta' - \frac{k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}(e-p)}{e} \sigma' \right\} - \mathcal{A} m (k^2 + p_\theta^2 - p p_{\theta\theta}) = 0,$$

aus denen sich durch Elimination von  $\mathcal{A}$  nach einfacher Umrechnung die Gleichung

$$\left(1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}\right) (k^2 + p_\theta^2) [\sigma' - (p + p_{\theta\theta}) \theta'] = 0$$

ergibt. Da die beiden ersten Faktoren der linken Seite dieser Gleichung nicht Null sind, so müssen  $\sigma'$  und  $\theta'$  notwendig außer der Bedingung (54) noch die Gleichung

$$(55) \quad \sigma' - (p + p_{\theta\theta}) \theta' = 0,$$

oder

$$v = 0$$

befriedigen.

Da die Nebenbedingung (54) linear in  $\sigma'$  und  $\theta'$  ist, so ist das Hinzutreten der Relationen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta'^2} = m (k^2 + p_\theta^2 + p_{\theta\theta}^2) > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma'^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta'^2} - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma' \partial \theta'} \right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{p + p_{\theta\theta}}{e}\right)^2 (k^2 + p_\theta^2) > 0$$

auch hinreichend dafür, daß die Werte  $\sigma'$  und  $\theta'$ , die  $v = 0$  machen und Gleichung (54) genügen,  $T(\sigma', \theta')$  zum Minimum machen mit der Nebenbedingung (54).

Damit bekommen wir aber nun folgendes Ergebnis:

Die Scheibe befinde sich in einem Zeitmoment in einer Lage  $\sigma, \theta$  auf der festen Kurve, und es gelten für die an ihr wirkenden äußeren Kräfte die auf Seite 124 getroffenen Festsetzungen. Die äußere Kraft  $P$  sei ihrem Betrage nach nicht kleiner als die auf Seite 133 definierte Konstante  $\mathcal{M}$ , diese berechnet für den Fall, daß in den sie definierenden Relationen (32), (35), (35<sup>a</sup>), (36) die Größe  $T_0$  durch  $\frac{i^2}{2mk^2}$  ersetzt wird, wo  $i$  eine von Null verschiedene vorgegebene Konstante ist.

Es sollen der Scheibe nun solche Geschwindigkeitskoordinaten  $\sigma'$  und  $\theta'$  erteilt werden, daß

1. das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt gleich der vorgegebenen Konstanten  $i$  wird und

2. die lebendige Kraft der Scheibe in dem betrachteten Zeitmoment kleiner ist als für irgendein anderes Wertepaar  $\sigma'$ ,  $\theta'$  das auch die Bedingung 1. erfüllt.

Dann erfüllen die gesuchten Geschwindigkeitskoordinaten  $\sigma'$ ,  $\theta'$  auch die für das vorgegebene Wertepaar  $\sigma$ ,  $\theta$  gebildete Gleichung  $v = 0$  und leiten eine Rollbewegung ein, die sich unbegrenzt fortsetzt, und deren lebendige Kraft

$$(56) \quad T = 2m \sqrt{k^2 + p^2 + p_0^2} \frac{i^2}{p_0^2}$$

ist, wo  $(k^2 + p^2 + p_0^2)$  für das dem Ausgangsmoment zugehörige  $\theta$  zu bilden ist.

Den Beweis dafür, daß die den Bedingungen 1. und 2. entsprechend bestimmten Werte  $\sigma'$  und  $\theta'$  das  $v$  zu Null machen, enthalten die Ausführungen dieser Nummer; daß die gefundenen Werte  $\sigma'$  und  $\theta'$  dann wirklich eine unbegrenzt dauernde Rollbewegung einleiten, folgt — wegen der Voraussetzungen über  $P$  — aus den Auseinandersetzungen in den Nummern 17 bis 19, und daß  $T$  den angegebenen Wert hat, ergibt sich durch Einsetzen der aus den Gleichungen (54) und (55) für  $\sigma'$  und  $\theta'$  zu gewinnenden Werte in Gleichung (51).

Für die ganze Dauer der Rollbewegung gilt folgendes:

Für irgendeinen bestimmten Moment der Rollbewegung der Scheibe hat das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt einen bestimmten Zahlenwert  $i$ , der sich im allgemeinen von Moment zu Moment ändert. Setzt man die dem betreffenden Moment zugehörigen Werte von  $\sigma$  und  $\theta$  in die Gleichungen (51) und (53) ein, so werden  $T$  und  $J$  Funktionen  $T(\sigma', \theta')$  und  $J(\sigma', \theta')$  von  $\sigma'$  und  $\theta'$  allein. Das dem betrachteten Moment der Rollbewegung zugehörige Wertepaar  $\sigma'$ ,  $\theta'$  hat nun die Eigenschaft, daß es der Funktion  $J(\sigma', \theta')$  — dem gesamten Impulsmoment — den Zahlenwert  $i$  und der Funktion  $T(\sigma', \theta')$  — der lebendigen Kraft — einen kleinern Wert verleiht als jedes andere Wertepaar  $\sigma'$ ,  $\theta'$ , das auch  $J(\sigma', \theta') = i$  macht.

21. Die eben aufgestellten Sätze bleiben dem Sinne nach unverändert bestehen, wenn man an Stelle von  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $\sigma'$ ,  $\theta'$  neue, allgemeinere Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\lambda'$ ,  $\mu'$  der Scheibe einführt durch die Transformationsformeln

$$(57) \quad \begin{cases} \sigma = \varphi(\lambda, \mu) \\ \theta = \psi(\lambda, \mu). \end{cases}$$

Dabei sollen  $\varphi$  und  $\psi$  folgende Bedingungen erfüllen:

1.  $\varphi$  und  $\psi$  sollen für alle Wertepaare der unbeschränkt Veränderlichen  $\lambda$ ,  $\mu$  eindeutige und stetige Funktionen von  $\lambda$  und  $\mu$  mit stetigen ersten partiellen Ableitungen nach  $\lambda$  und  $\mu$  sein;

2. Die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi_\lambda & \varphi_\mu \\ \psi_\lambda & \psi_\mu \end{vmatrix}$$

soll für kein Wertepaar  $\lambda$ ,  $\mu$  gleich Null sein;

3. Sei mit  $\omega_\vartheta$  das Minimum der Werte

$$\omega = \sqrt{\frac{d\sigma^2 + d\theta^2}{d\lambda^2 + d\mu^2}}$$

auf dem Kreise

$$\lambda^2 + \mu^2 = \vartheta^2$$

bezeichnet, so soll das Integral

$$\int_0^\infty \omega_\vartheta d\vartheta$$

unendlich werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist nicht nur jedem Wertepaar  $\lambda$ ,  $\mu$  ein einziges Wertepaar  $\sigma$ ,  $\theta$  zugeordnet, sondern auch umgekehrt jedem Wertepaar  $\sigma$ ,  $\theta$  ein und nur ein Wertepaar  $\lambda$ ,  $\mu$ .<sup>1)</sup>

Sei  $\bar{T}(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  die in den neuen Koordinaten geschriebene lebendige Kraft  $T$  (Gleichung (51)) und  $\bar{J}(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  das ebenfalls in den neuen Koordinaten geschriebene gesamte Impulsmoment  $J$  (Gleichung (53)) der Scheibe, so ist wegen

$$\sigma' = \varphi_\lambda \lambda' + \varphi_\mu \mu'$$

$$\theta' = \psi_\lambda \lambda' + \psi_\mu \mu'$$

nach den Gleichungen (51) und (53)

$$\begin{aligned} (51^a) \quad & \bar{T}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \\ & = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\bar{\varrho} - \bar{p})^2 + k^2 + \bar{p}\bar{\sigma}^2}{\bar{\varrho}^2} (\varphi_\lambda \lambda' + \varphi_\mu \mu')^2 + (k^2 + \bar{p}\bar{\sigma}^2 + \bar{p}\bar{\sigma}\bar{\sigma}') (\psi_\lambda \lambda' + \psi_\mu \mu')^2 \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{(k^2 + \bar{p}\bar{\sigma}^2) + \bar{p}\bar{\sigma}\bar{\theta}(\bar{\varrho} - \bar{p})}{\bar{\varrho}} (\varphi_\lambda \lambda' + \varphi_\mu \mu') (\psi_\lambda \lambda' + \psi_\mu \mu') \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (53^a) \quad & \bar{J}(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = m \left\{ -(k^2 + \bar{p}\bar{\sigma}^2 - \bar{p}\bar{p}\bar{\sigma}\bar{\theta}) (\psi_\lambda \lambda' + \psi_\mu \mu') \right. \\ & \quad \left. - [\bar{p}(\bar{\varrho} - \bar{p}) - (k^2 + \bar{p}\bar{\sigma}^2)] \frac{1}{\bar{\varrho}} (\varphi_\lambda \lambda' + \varphi_\mu \mu') \right\}, \end{aligned}$$

1) Vgl. Hadamard, Sur les transformations ponctuelles, Bull. de la société math. de France, 34, (1906).

wo die überstrichenen Größen die in die neuen Koordinaten umgerechneten gleichbezeichneten unüberstrichenen Größen bedeuten.

Wir werden die Formeln (51<sup>a</sup>) und (53<sup>a</sup>) später noch zu verwenden haben.

### III. Bewegung einer homogenen Kreisscheibe auf einer beliebigen festen Kurve.

22. In Abschnitt II ist gezeigt, inwieweit die beim einfachen Beispiel in Abschnitt I gewonnenen Resultate sich auf den in II behandelten allgemeinen Fall ausdehnen lassen. Aber vor allem gilt ein wesentliches Resultat des ersten Abschnittes im allgemeineren Falle nicht, nämlich der Satz, daß das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt während der ganzen Gleit- und Rollbewegung konstant bleibt (vgl. S. 115). Es liegt die Frage nahe: Welche einschränkenden Voraussetzungen über die feste und die bewegliche Kurve müssen zu den bei II getroffenen Festsetzungen über diese beiden Kurven noch hinzutreten, damit dieser Satz auch beim allgemeinen Problem noch gilt? Diese Frage soll hier zunächst beantwortet werden.

Damit während der ganzen Gleit- und Rollbewegung das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt konstant ist, also wegen Gleichung (52) die Gleichung

$$m\{-x'(p \cos \alpha + q \sin \alpha) + y'(q \cos \alpha - p \sin \alpha) - k^2(\theta' - \alpha')\} = \text{const.}$$

gilt, muß auch während der ganzen Dauer dieser Bewegungen die hieraus durch Differentiation nach  $t$  folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & -x''(p \cos \alpha + q \sin \alpha) + y''(q \cos \alpha - p \sin \alpha) - k^2(\theta'' - \alpha'') \\ & - (x' \sin \alpha - y' \cos \alpha)(-p\alpha' + q') - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)(p' + q\alpha') = 0 \end{aligned}$$

bestehen. Wegen der Gleichungen (20) und (39) ist für jeden Moment dieser Bewegungen die erste Zeile der linken Seite der letzten Gleichung gleich Null; also folgt nach kurzer Umformung mit Hilfe der Gleichungen (15), (16), (18) die Bedingung

$$p_0 q \alpha' (\theta' - \alpha') = 0,$$

oder

$$p_0 \sigma' \left( \theta' - \frac{\sigma'}{q} \right) = 0.$$

Der Fall  $\sigma' \equiv 0$ , der einer Bewegung entsprechen würde, bei der die Berührung zwischen Scheibe und fester Kurve stets in demselben Punkt der festen Kurve statt hat, und der Fall

$$\theta' - \frac{\sigma'}{q} \equiv 0 \text{ oder } \theta' - \alpha' \equiv 0,$$

der einer reinen Parallelverschiebung der Scheibe längs der festen Kurve zugehören würde, erfordern, daß schon die Anfangswerte von  $\sigma'$  und  $\theta'$  den durch diese Identitäten ausgesprochenen Bedingungen unterliegen. Wir verlangen aber, daß der in Rede stehende Satz bei Anfangswerten von  $\sigma'$  und  $\theta'$  gelten soll, die — abgesehen von der für den Beginn der Gleitbewegung geltenden Einschränkung  $v_0 \neq 0$  — beliebig sein können. Dann ist die Gleichung

$$p_0 \sigma' (\theta' - \frac{\sigma'}{\rho}) = 0$$

gleichbedeutend mit

$$(58) \quad p_0 = 0.$$

D. h.: *Dann und nur dann, wenn die bewegliche Scheibe von einer Kreislinie begrenzt ist, deren Mittelpunkt mit dem Scheibenschwerpunkt zusammenfällt, ist bei den übrigen in Abschnitt II benützten Festsetzungen das gesamte Impulsmoment der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt während der ganzen Dauer irgendeiner Gleit- und Rollbewegung konstant.<sup>1)</sup>*

Der konstante Wert  $J_0$  des Impulsmomentes berechnet sich aus dem System der Anfangswerte  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$ , wenn man diese Werte an Stelle von  $\sigma, \theta, \sigma', \theta'$  in Gleichung (53) einsetzt.

Es ist zu beachten, daß in dem eben charakterisierten Fall der am Schlusse der Nummer 20 angegebene Satz, in dem nun die für jeden Moment der Rollbewegung einen anderen Wert annehmende Konstante  $i$  durch die festbleibende Konstante  $J_0$  zu ersetzen ist, eine für die Beschreibung des Bewegungsvorganges wesentlich wertvollere Aussage enthält als im Fall einer beliebigen Rollkurve. Das zeigt deutlich folgende Fassung:

Es seien  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  Anfangswerte der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten der Kreisscheibe, für die  $J_0 \neq 0$  sei und die eine Gleitbewegung einleiten, und es seien  $\sigma$  und  $\theta$  die Lagekoordinaten, die einem Moment der auf die Gleitbewegung folgenden Rollbewegung zukommen. *Dann lassen sich die diesem Moment zugehörigen Geschwindigkeitskoordinaten  $\sigma'$  und  $\theta'$  der Scheibe allein aus den Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  berechnen auf Grund der Eigenschaft, daß sie die lebendige Kraft der Scheibe für das angenommene Wertepaar  $\sigma, \theta$  zum Minimum machen mit der Nebenbedingung, daß das gesamte Impulsmoment für*

1) Ähnliche, dem Flächensatz verwandte Theoreme finden sich bei C. Neumann, Math. Annalen, 27 (1886), p. 497 und S. Tschaplygin, Moskau. Math. Sammlg. 20, p. 1—32 (russisch, 1897); vgl. über die letztere Arbeit Fortschritte d. Math. 27 (1896), p. 625.

dieses Wertepaar  $\sigma, \theta$  den Anfangswert  $J_0$  haben soll. Diese Fassung ist im Falle der beliebigen Rollkurve nicht möglich.

Übrigens läßt sich im Spezialfall der Kreisscheibe auch aus den die Gleitbewegung einleitenden Anfangswerten  $\sigma_0, \theta_0, \sigma'_0, \theta'_0$  allein die lebendige Kraft der auf die Gleitbewegung folgenden Rollbewegung berechnen. Wegen der Gleichungen (51), (53) und (19<sup>b</sup>) gilt allgemein die Beziehung

$$m^2 v^2 (k^2 + p_\theta^2) + J^2 = 2 T m (k^2 + p^2 + p_\theta^2),$$

und für den Spezialfall der Kreisscheibe wird daraus, weil  $J = J_0$ ,  $p = R$  (wo  $R$  der Radius der Kreisscheibe ist),  $p_\theta = 0$  ist,

$$m^2 v^2 k^2 + J_0^2 = 2 T m (k^2 + R^2);$$

also ist für die Rollbewegung, wegen  $v = 0$ ,

$$T = \frac{J_0^2}{2 m (k^2 + R^2)}.$$

Da die Differenz  $T_0 - \frac{J_0^2}{2 m (k^2 + R^2)}$  die während der Gleitbewegung durch die Reibung verzehrte Energie darstellt, so ergibt sich hiermit weiter, daß für den hier betrachteten Fall der Kreisscheibe auch das im Abschnitt I, Nr. 2 erhaltene Resultat gilt, daß die gesamte Energiemenge, die während der Gleitbewegung der Kreisscheibe auf der rauhen festen Kurve verzehrt wird, ihrem Betrage nach unabhängig von der Größe des Reibungskoeffizienten ist.

#### IV. Rollbewegung einer beliebigen Scheibe auf einer beliebigen festen Kurve unter Wirkung äußerer Kräfte.

23. Wir knüpfen noch einmal an die Ausführungen des Abschnittes II an. Es ist zu beachten, daß der am Schlusse der Nr. 20 aufgestellte Satz, der für die Rollbewegung gültig war, noch gilt, falls bei irgendeiner Anordnung äußerer Kräfte die Scheibe sich unter der Wirkung derselben auf der festen Kurve in Rollbewegung befindet.<sup>1)</sup> Berücksichtigen wir außerdem, daß eine Koordinatentransformation, wie sie in Nummer 21 angegeben wurde, die Richtigkeit des Satzes nicht beeinträchtigt, so erhalten wir den folgenden allgemeinen *Minimalsatz*,

1) Daß es außer der besprochenen noch andere solche Anordnungen gibt, wäre für unsere allgemeinen Festsetzungen über Scheibe und feste Kurve erst zu beweisen. Aber für jede solche Anordnung, die es gibt, gilt der Satz, ebenso wie für jedes Beispiel, das sich unserm allgemeinen Problem unterordnet.

dessen Gültigkeit nicht an das Bestehen der bisher benutzten speziellen Festsetzungen über die an der Scheibe wirkende äußere Kraft gebunden ist:

Befindet sich die ebene Scheibe unter der Wirkung äußerer Kräfte in Rollbewegung auf der festen Kurve in ihrer Ebene, und benutzt man den zwei Freiheitsgraden der Scheibe entsprechend zur Festlegung der Lage der Scheibe auf der festen Kurve Koordinaten  $\lambda, \mu$ , wie sie in Nr. 21 eingeführt wurden, und werden die ihnen entsprechenden Geschwindigkeitskoordinaten mit  $\lambda', \mu'$  bezeichnet, so werden für jeden Moment einer solchen Rollbewegung das gesamte Impulsmoment  $\bar{J}(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  der Scheibe in bezug auf den momentanen Berührungspunkt durch Gleichung (53<sup>a</sup>) und die lebendige Kraft  $\bar{T}(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  der Scheibe durch Gleichung (51<sup>a</sup>) gegeben. Für irgendeinen bestimmten Moment der Rollbewegung hat das gesamte Impulsmoment in bezug auf den momentanen Berührungspunkt einen bestimmten Zahlenwert  $i$ . Setzt man die dem betreffenden Zeitmoment zugehörigen Werte von  $\lambda$  und  $\mu$  in die Ausdrücke  $\bar{T}$  für die lebendige Kraft und  $\bar{J}$  für das gesamte Impulsmoment ein, so werden diese Ausdrücke Funktionen  $\bar{T}(\lambda', \mu')$  und  $\bar{J}(\lambda', \mu')$  von  $\lambda'$  und  $\mu'$  allein. Das dem betrachteten Moment der Rollbewegung zugehörige Wertepaar  $\lambda', \mu'$  der Geschwindigkeitskoordinaten hat nun die Eigenschaft, daß es dem gesamten Impulsmoment  $\bar{J}(\lambda', \mu')$  den Zahlenwert  $i$  und der lebendigen Kraft  $\bar{T}(\lambda', \mu')$  einen kleineren Wert verleiht, als jedes andere Wertepaar  $\lambda', \mu'$ , das auch das gesamte Impulsmoment  $\bar{J}(\lambda', \mu')$  gleich  $i$  macht.

Es scheint — und auch das Beispiel der Rollbewegung einer homogenen Kugel auf einer schiefen Ebene unter der Wirkung der Schwere spricht dafür —, daß sich diesem Satz ein analoger für die Rollbewegung eines starren Körpers auf einer festen rauhen Fläche unter der Wirkung äußerer Kräfte an die Seite stellen läßt. Ich hoffe, später darauf zurückzukommen.

Danzig-Langfuhr, Ende März 1912.

### Würferversuche.

Von OTTO MEISSNER in Potsdam.

In der Zeit vom 17. Oktober 1905 bis zum 27. Februar 1906 habe ich mit 4 Würfeln 4320 Würfe ausgeführt, und zwar stets gleichzeitig mit allen 4. Es waren ein weißer und ein mit roter Tinte gefärbter Hornwürfel von etwa 1 cm Kantenlänge, ein etwas kleinerer schwarzer Holz- und ein kleiner weißer Marmorwürfel, die in der oben angegebenen Reihenfolge im folgenden stets kurz mit W, R, S und M bezeichnet werden sollen.

Die Würfe, zeitlich geordnet und in Abteilungen von je 180 zusammengefaßt, haben die in Tabelle 1 vorliegenden Resultate ergeben; die römischen Ziffern bedeuten die Gruppennummer, die Spaltenüberschriften sind die Zahlen der Würfelseiten, das Argument der Tabelle ist die Häufigkeit, wie oft die Zahl in den 180 Würfeln vorkam, theoretisch 30 im Mittel.

Tabelle 1a.

	Würfel W.						Würfel R.						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
I.	43	28	34	28	28	19	26	30	22	27	40	35	I.
II.	32	29	31	35	32	21	29	22	39	29	30	31	II.
III.	37	26	24	23*	32	38	27	30	33	33	27	30	III.
IV.	24	31	29	36	29	31	30	30	25	25	38	32	IV.
V.	26	30	37	30	28	29	34	29	19*	36	26	36	V.
VI.	28	30	32	31	32	27	38	27	23	29	33	30	VI.
VII.	26	35	24	34	23	38	31	26	45	28	25	25	VII.
VIII.	28	29	20*	34	38	31	26	26	32	32	30	34	VIII.
IX.	27	25	40	29	23	36	25	32	40	27	38	18*	IX.
X.	28	32	32	27	24	37	30	35	32	34	19*	30	X.
XI.	27	26	26	31	36	34	36	26	30	29	29	30	XI.
XII.	34	20	32	32	34	28	30	31	24	31	26	32	XII.
XIII.	30	21	39	29	35	26	34	29	35	21*	25	36	XIII.
XIV.	40	24	35	28	19*	34	35	36	27	25	27	30	XIV.
XV.	30	35	28	29	31	27	29	18*	32	29	37	35	XV.
XVI.	21*	27	34	31	40	27	30	38	27	27	28	30	XVI.
XVII.	36	23	28	24	32	37	19*	31	35	37	28	30	XVII.
XVIII.	30	25	30	31	27	37	28	22	42	28	35	25	XVIII.
XIX.	29	24	23	35	34	35	25	39	30	30	34	22	XIX.
XX.	25	25	38	34	25	33	40	28	30	25	25	32	XX.
XXI.	30	28	34	39	31	18*	26	30	27	30	24	43	XXI.
XXII.	37	19*	37	28	33	26	34	26	28	33	32	27	XXII.
XXIII.	26	25	31	39	25	34	23	30	23	41	33	30	XXIII.
XXIV.	28	28	32	33	27	32	34	42	25	26	24	29	XXIV.
Mittel	30.1	26.9	31.2	31.2	29.9	30.6	30.2	29.7	30.2	29.7	29.7	30.5	

Tabelle 1b.

Würfel S.

Würfel M.

	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
I.	29	29	29	35	31	27	40	30	31	25	19*	35	I.
II.	23	29	32	33	25	33	33	27	26	27	36	31	II.
III.	25	36	22	42	24	31	31	23	28	37	30	31	III.
IV.	32	31	37	22	29	29	37	28	19	35	28	33	IV.
V.	33	31	31	42	19*	24	31	26	30	27	33	33	V.
VI.	34	36	26	27	27	30	27	31	22	41	28	31	VI.
VII.	28	33	30	29	26	34	29	26	34	31	25	35	VII.
VIII.	32	29	29	31	28	31	38	21*	26	26	41	28	VIII.
IX.	33	28	37	25	30	27	29	24	30	24	38	35	IX.
X.	36	34	28	26	26	30	33	22	36	40	27	32*	X.
XI.	33	36	32	35	23	21	31	26	35	27	39	22*	XI.
XII.	40	27	24	36	24	29	40	25	28	31	27	29	XII.
XIII.	31	32	19*	36	22	40	33	25	32	37	31	22*	XIII.
XIV.	35	34	32	25	29	25	35	21*	25	32	32	35	XIV.
XV.	31	25	35	29	32	28	45	32	32	15*	26	30	XV.
XVI.	39	33	30	21*	34	23	33	36	18*	29	27	37	XVI.
XVII.	31	33	30	32	22	32	28	27	34	29	33	29	XVII.
XVIII.	30	30	27	34	41	18*	30	28	23	34	36	29	XVIII.
XIX.	39	28	34	25	31	23	29	27	32	35	23	34	XIX.
XX.	33	30	29	31	29	28	35	28	31	23	31	32	XX.
XXI.	36	29	22	39	29	25	24*	26	23	38	30	39	XXI.
XXII.	26	31	34	30	27	32	29	37	34	31	21	28	XXII.
XXIII.	21*	18*	30	34	44	33	37	26	35	23	29	30	XXIII.
XXIV.	45	25	25	20	39	24	36	34	23	21	27	39	XXIV.
Mittel	32.5	30.3	29.3	30.9	28.8	28.2	33.0	27.3	28.6	29.9	29.9	31.2	

Auf Grund dieser Tabelle ist nun für jede Zahl jedes Würfels die durchschnittliche (D. A.) und mittlere Abweichung (M. A.) von ihrem Mittelwerte berechnet. Theoretisch müßten diese Werte sein<sup>1)</sup>:

$$M. A. = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5,$$

$$D. A. = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot M. A. = 0.8 \cdot 5 = 4.$$

Das Verhältnis  $M. A. : D. A. \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  ist fast genau  $= \frac{5}{4}$ . In Tab. 2 sind die wirklich beobachteten Werte gegeben, dabei sind natürlich die Abweichungen der einzelnen Serien nicht von 30, sondern von dem der betr. Zahl des Würfels zukommenden Mittel, also z. B. für die Zahl 2 des weißen Würfels von 27, ab gerechnet. Ferner ist für jeden Würfel das Mittel dieser Abweichungen und dessen mittlerer Fehler angegeben.

1) Vgl. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. I<sup>2</sup>, S. 126 und 128. Leipzig 1908. Teubner.

Schon die einzelnen Würfel geben eine große Annäherung an die theoretischen Werte, ihr Mittel entspricht der Theorie fast ganz genau. Gleiches gilt für das Verhältnis der mittleren zur durchschnittlichen Abweichung. Die mittleren Fehler  $\pm 0.04$  und  $\pm 0.08$  für D. A. und M. A. erhält man aus den Abweichungen der Einzelwerte für die 4 Würfel vom Mittel, die in Klammern gesetzt, merklich größeren ( $\pm 0.14$  und  $\pm 0.16$ ) dagegen aus den mittleren Fehlern der Ergebnisse für die einzelnen Würfel.

Tabelle 2.

	D. A.	M. A.	M. A. : D. A.	Disp.	C	F'
W 1	4.0	5.19	1.30	1.04	+ 70	$\pm 132$
2	3.3	4.10	1.24	0.82	+ 113	$\pm 83^*$
3	4.2	5.18	1.23	1.04	- 7	$\pm 131$
4	3.2	4.01	1.25	0.80	- 58	$\pm 79$
5	4.25	5.08	1.19	1.02	- 150	$\pm 126^*$
6	4.8	5.79	1.21	1.16	+ 218	$\pm 164^*$
W	<b>3.95 <math>\pm 0.25</math></b>	<b>4.89 <math>\pm 0.28</math></b>	<b>1.24</b>	<b>0.98</b>		
R 1	4.1	4.98	1.24	1.00	+ 12	$\pm 122$
2	4.0	5.92	1.48	1.18	- 44	$\pm 173$
3	5.2	6.52	1.25	1.30	+ 125	$\pm 209$
4	3.4	4.36	1.28	0.87	- 53	$\pm 107$
5	4.5	5.27	1.18	1.05	- 88	$\pm 136$
6	3.3	4.95	1.50	0.99	- 17	$\pm 120$
R	<b>4.08 <math>\pm 0.29</math></b>	<b>5.33 <math>\pm 0.32</math></b>	<b>1.31</b>	<b>1.07</b>		
S 1	3.9	5.19	1.33	1.04	+ 7	$\pm 132$
2	3.0	4.03	1.34	0.81	+ 59	$\pm 80$
3	3.4	4.58	1.34	0.92	- 89	$\pm 105$
4	4.9	5.83	1.19	1.17	- 167	$\pm 166^*$
5	4.4	5.90	1.34	1.18	+ 206	$\pm 171^*$
6	3.8	4.76	1.25	0.95	- 31	$\pm 111$
S	<b>3.90 <math>\pm 0.28</math></b>	<b>5.05 <math>\pm 0.30</math></b>	<b>1.29</b>	<b>1.01</b>		
M 1	3.9	4.75	1.25	0.95	+ 52	$\pm 111$
2	2.9	3.97	1.37	0.79	+ 49	$\pm 77$
3	4.3	5.20	1.21	1.04	- 155	$\pm 132^*$
4	5.2	6.43	1.23	1.29	+ 33	$\pm 202$
5	4.3	5.40	1.25	1.08	- 63	$\pm 143$
6	3.6	4.66	1.30	0.93	+ 29	$\pm 107$
M	<b>4.02 <math>\pm 0.32</math></b>	<b>5.07 <math>\pm 0.33</math></b>	<b>1.26</b>	<b>1.01</b>		
Mittel	<b>3.99 <math>\pm 0.04</math></b> ( $\pm 0.14$ )	<b>5.08 <math>\pm 0.09</math></b> ( $\pm 0.16$ )	<b>1.28</b> $\pm 0.02$	<b>1.02</b> $\pm 0.02$		

Die fünfte Spalte der Tabelle gibt die Dispersion für die Zahlen der Würfel. Diese ist nach den üblichen Formeln<sup>1)</sup> berechnet; sie ist bekanntlich gleich dem Quotienten der beobachteten und der theoretisch

1) Czuber, a. a. O. II<sup>2</sup>, S. 37—39 sowie I<sup>2</sup>, S. 162.

zu erwartenden mittleren (oder auch durchschnittlichen, der Faktor  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  hebt sich ja im Bruch weg) Abweichung. Auch sie ist vollkommen „normal“, alle Werte sind sehr nahe an 1.

Die letzten Spalten ( $C$  und  $F$ ) der Tab. 2 endlich beziehen sich auf das Abbe-Helmertsche Zufallskriterium.<sup>1)</sup> Nennt man  $A$  die Summe der Fehlerquadrate,  $B$  die Summe der Quadrate der Differenzen von je zwei aufeinanderfolgenden Fehlern, so muß  $A - \frac{B}{2}$  (nach Abbe) = 0 sein, mit dem mittleren Fehler  $\pm F$  (nach Helmert).  $F$  ist gleich  $A : \sqrt{n-1}$ , wenn  $n$  die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Aus der Tab. 2 sieht man, daß nur in 6 (in der Tabelle durch \* gekennzeichneten) von 24 Fällen  $C$  um ein wenig größer ist als  $F$ ; man wird also annehmen dürfen, daß die Würfel während der Beobachtungszeit keine Veränderung erlitten haben; die Abnutzung infolge der 4320 Würfe ist also gleichmäßig und wohl auch nur sehr gering gewesen. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, auch dies einmal genauer zahlenmäßig festgestellt zu haben.

Kehren wir noch einmal zu der Verteilung der Häufigkeitszahlen zurück. In jeder der 144 Abteilungen von je 180 Würfeln sollte durchschnittlich jede Zahl 30mal erscheinen. Tatsächlich schwanken die Häufigkeitszahlen von 15 bis 45, wie aus Tab. 3 hervorgeht, in welcher die Ergebnisse für die einzelnen Würfel getrennt und zusammengefaßt aufgeführt sind.

Tabelle 3.

Häufigkeit	W	R	S	M	Zus.	$\Sigma_u$	Häufigkeit	W	R	S	M	Zus.	$\Sigma_0$
15	.	.	.	1	1	320	45	.	1	1	1	3	306
16	.	.	.	.	.	319	44	.	.	1	.	1	303
17	.	.	.	.	.	319	43	1	1	.	.	2	302
18	1	2	2	1	6	319	42	.	2	2	.	4	300
19	3	3	2	2	10	313	41	.	1	1	2	4	296
20	2	.	.	.	2	303	40	3	3	2	3	11	292
21	3	1	3	4	11	301	39	3	2	4	3	12	281
22	.	4	6	5	15	290	38	4	4	.	3	11	269
23	5	3	3	7	18	275	37	7	2	2	6	17	258
24	7	3	5	3	18	257	36	4	6	7	5	22	241
25	7	12	10	5	34	239	35	7	7	4	10	28	219
26	8	10	5	9	32	205	34	12	7	9	6	34	191
27	9	12	7	11	39	173	33	3	5	10	8	26	157
28	15	6	8	10	39	134	32	12	9	10	7	38	131
29	9	10	16	10	45	95	31	11	5	13	14	43	93
30	8	23	11	8	50	50	30	8	23	11	8	50	50

1) Helmert, Ausgleichsrechnung usw. 2. Aufl. (Leipzig 1907, Teubner). S. 341f.

Man erkennt aus der symmetrisch angeordneten Tabelle eine etwas größere Häufigkeit der zu kleinen Werte; die Zahlen  $\Sigma_u$  sind durchweg größer als die entsprechenden  $\Sigma_0$ , aber nur um 5—10 Prozent; man braucht dieser Verschiedenheit also keine große Bedeutung beizulegen; übrigens ist noch dabei zu beachten, daß jedesmal 6 Werte der Bedingung genügen mußten, als Summe 180 zu geben. Doch kann dieser Zwang für die hier angestellten Betrachtungen außer Acht gelassen werden.

Tabelle 4.

Abw.	W		R		S		M		Mittel		Theoretisch			
	A	$\Sigma$	A	$\Sigma$	A	$\Sigma$	A	$\Sigma$	Anzahl	Summe	Anzahl	Summe		
$\leq \pm 1$	28	28	38	38	40	40	32	32	34	$\pm 4.8$	34	<b>23</b>	<b>4.3</b>	<b>23</b>
2	27	55	15	53	18	58	17	49	19	4.6	53	<b>22</b>	<b>4.4</b>	<b>45</b>
3	12	67	17	70	17	75	19	68	16	2.5	69	<b>20</b>	<b>4.2</b>	<b>65</b>
4	20	87	17	87	14	89	15	83	17	2.4	86	<b>18</b>	<b>4.0</b>	<b>83</b>
5	14	101	19	106	14	103	15	98	16	2.1	102	<b>15</b>	<b>3.7</b>	<b>98</b>
6	11	112	9	115	12	115	8	106	10	1.6	112	<b>14</b>	<b>3.6</b>	<b>112</b>
7	12	124	5	120	5	120	13	119	9	3.8	121	<b>8</b>	<b>2.8</b>	<b>120</b>
8	4	128	8	128	6	126	8	127	6	1.7	127	<b>8</b>	<b>2.8</b>	<b>128</b>
9	6	134	3	131	7	133	7	134	6	1.7	133	<b>5</b>	<b>2.2</b>	<b>133</b>
10	5	139	3	134	2	135	3	137	3	1.1	136	<b>4</b>	<b>2.0</b>	<b>137</b>
11	3	142	4	138	3	138	4	141	3	$3\frac{1}{2}$	9.7	<b>3</b>	<b>1.7</b>	<b>140</b>
12	1	143	4	142	4	142	1	142	1	$2\frac{1}{2}$	1.6	<b>2</b>	<b>1.4</b>	<b>142</b>
13	1	144	1	143	.	142	.	142	1	0.7	143	<b>1</b>	<b>1.0</b>	<b>143</b>
14	.	144	.	143	1	143	.	142	0	0.5	143	.	<b>1.0</b>	<b>143</b>
15	.	144	1	144	1	144	2	144	1	0.7	144	<b>1</b>	<b>1.0</b>	<b>144</b>

Die aus Tab. 3 durch Zusammenfassung der gleichgroßen positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwerte 30 (wie gesagt, ohne Berücksichtigung der geringen Asymmetrie) entstandene Tabelle 4 gibt für jeden Würfel unter A die Anzahl der Werte mit einer gewissen Abw. von 30 (nur in der ersten Zeile die  $\Sigma$  der Abw. 0 und  $\pm 1$ ) unter  $\Sigma$  die Summe aller Werte mit höchstens dieser Abw. Ferner ist das Mittel nebst mittlerem Fehler gebildet und sind auch die nach der Theorie<sup>1)</sup> zu erwartenden Zahlenwerte hinzugefügt. Letztere stimmen von  $\pm 4$  ab mit den Beobachtungswerten nahezu vollständig überein; dagegen ist festzustellen, daß die Häufigkeiten 29 bis 31 (Abw.  $\leq \pm 1$ ) etwa 50% häufiger sind, als nach der Theorie zu erwarten wäre (dafür die Abw.  $\pm 2, \pm 3, \pm 4$  etwas zu selten).

1) Czuber a. a. O. I<sup>2</sup>, S. 133. Die Zahlen sind mit Hilfe der Tab. für  $\Phi$  am Schlusse des Werkes berechnet.

Als „wahrscheinliche Abweichung“<sup>1)</sup> erhält man

	für W	R	S	M	statt theoretisch
die Werte	3.2	3.1	2.9	3.3	3.4,

also auch eine ganz gute Übereinstimmung. Daß diese Resultate, die man durch einfache Abzählung auf Grund der Tab. 4 (man hat bis  $\frac{1}{2} 144 = 72$  zu zählen, die Interpolation kann linear geschehen) leicht erhält, durchweg etwas kleiner als der theoretische Wert sind, liegt an der übergroßen Häufigkeit der geringen Abweichungen. Als Verhältnis zur „mittleren Abweichung“ erhält man

	für W	R	S	M	theoretisch:
die Quotienten	0.66	0.58	0.58	0.65	0.67;

da die wahrscheinliche Abweichung vom Fehlergesetz abhängt, kann man also auch aus diesen Zahlen schließen, daß die Häufigkeitsverteilung sich sehr nahe dem bekannten Exponentialgesetz anschließt.

Ferner sind die „Sequenzen“ gezählt, d. h. also die Fälle, in denen dieselbe Zahl (eines bestimmten Würfels) zweimal ( $S_2$ ), dreimal ( $S_3$ )... hintereinander fiel. Tabelle 5 gibt die Resultate, Tabelle 6 enthält die Anzahl der geworfenen „Pasche“. WR bedeutet einen Pasch der Würfel W und R usw.

Tabelle 5.

	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$
W	712	135	27	11	2	1	.
R	706	113	14	2	1	.	.
S	686	121	18	3	1	.	.
M	700	127	21	4	.	.	.
Theoret.	<b>720</b>	<b>120</b>	<b>20</b>	<b>3</b>	$\frac{1}{2}$	<b>0</b>	<b>0</b>

Tabelle 6.

	WR	WS	WM	RS	RM	SM	WRS	WRM	WSM	RSM	WRSM
Beob.	754	702	712	719	731	691	124	153	115	112	21
Theoret.	<b>720</b>	<b>720</b>	<b>720</b>	<b>720</b>	<b>720</b>	<b>720</b>	<b>120</b>	<b>120</b>	<b>120</b>	<b>120</b>	<b>20</b>
Dispersion	1.12	0.84	1.08	0.99	1.08	1.16	1.02	0.84	1.13	1.03	1.02

Auch aus diesen Tabellen erhellt wiederum die große Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie. Auch die aus den 24 Gruppen zu je 180 Würfeln abgeleitete Dispersion der Pasche ist so normal, wie man sie sich nur wünschen kann.

1) Von der Bruns freilich nichts wissen will; vgl. seine „Kollektivmaßlehre“ (Leipzig 1906, Teubner), S. 123.

Vergleichung mit Wolfs Resultaten aus 20000 Würfeln.<sup>1)</sup> Da die umfangreichen, aber mit der Theorie schlecht stimmenden Ergebnisse der sehr ausgedehnten Versuchsreihe von R. Wolf mit 2 Würfeln in der Literatur sehr häufig angeführt werden, hielt ich es für vielleicht nicht ganz unangebracht, auch die Resultate meiner Beobachtungsreihe mitzuteilen, die mit der Theorie, man kann sagen, in völliger Übereinstimmung steht. Hierbei sei gleich auf einen kleinen — an sich ziemlich belanglosen — Irrtum Czubers betr. die Herleitung der Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen bzw. Seiten der Wolfschen Würfel aufmerksam gemacht. Wolf hat die Wahrscheinlichkeiten nicht auf Grund irgendeiner Annahme über den Schwerpunkt der Würfel gemacht, sondern, wie auch ganz richtig, die Häufigkeit der betr. Zahl: 20000, also die einfache „Wahrscheinlichkeit a posteriori“ angesetzt.

Tabelle 7.

Beob.	Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Zahl der Würfe
Meißner	W	0.168	0.149	0.173	0.173	0.166	0.170	} je 4320
	R	0.168	0.165	0.168	0.165	0.165	0.169	
	S	0.181	0.168	0.163	0.171	0.160	0.157	
	M	0.183	0.152	0.159	0.166	0.166	0.173	
Wolf	W	0.162	0.172	0.149	0.142	0.182	0.197	} je 20000
	R	0.170	0.182	0.159	0.146	0.172	0.171	
Abweichung vom theoret. Wert in 0.001								
Meißner	W	+ 1	- 18	+ 6	+ 6	- 1	+ 3	± 9 (4)
	R	+ 1	- 2	+ 1	- 2	- 2	+ 2	± 2 (1)
	S	+ 14	+ 1	- 4	+ 4	- 7	- 10	± 9 (4)
	M	+ 16	- 15	- 8	- 1	- 1	+ 6	± 11 (5)
Wolf	W	- 5	+ 5	- 16	- 25	+ 15	+ 30	± 20
	R	+ 3	+ 15	- 6	- 21	+ 5	+ 4	± 12

Trotz der etwa 5mal so umfangreichen Wolfschen Reihe sind besonders die Abweichungen seines „weißen“ Würfels erheblich größer als bei der hier vorliegenden; auf gleichen Umfang reduziert<sup>2)</sup>, sind Wolfs Werte viermal ungenauer als die meinigen.

Während ferner bei meiner Beobachtungsreihe mittlere, durchschnittliche und wahrscheinliche Abweichung bis auf wenige Prozente ihres Betrages mit den Werten, wie die Theorie sie fordert,

1) Czuber, a. a. O. I<sup>1</sup>, S. 118 = I<sup>2</sup>, S. 149.

2) In Tab. 7 sind die in ( ) gesetzten Zahlen durch Multiplikation mit  $1 : \sqrt{5}$  auf eine Reihe vom Umfang von (etwa) 20000 zurückgeführt.

übereinstimmten, weichen sie bei Wolf in schroffer Weise nach oben hin ab (also enorme übernormale Dispersion!);

		von Wolf beobachtet	theoretisch
mittlere	Abweichung	60	13
durchschnittliche	„	76.8	23.2
wahrscheinliche	„	66.0	18.5

Gegenüber einer Dispersion von 3, die sich hieraus ergibt, liegen die verschiedenen von mir berechneten Dispersionen im Extrem zwischen 0.8 und 1.3. Bei Wolfs Würfeln sind eben offenbar starke Unregelmäßigkeiten vorhanden gewesen, die meinigen zeigen, daß dies als außergewöhnlich anzusehen ist, denn die von mir benutzten Würfel sind gewöhnliche Durchschnittsware, keineswegs etwa besonders ausgewählt. Auch hatten sie schon fast 2 Jahrzehnte hindurch zeitweise häufig in Benutzung gestanden (bei harmlosen Kinderspielen nämlich), ohne daß die Beobachtungen etwas von unregelmäßiger Abnutzung spüren ließen.

Potsdam, 27. Mai 1912.

## Zur Planckschen Strahlungsformel.

Von P. J. HELWIG in Amsterdam.

1. Wir denken uns einige Körper, deren Freiheitsgrade die Energiebeträge  $U_1, U_2$  bis  $U_n$  liefern, und sich in einem Raume befinden, derart, daß die totale Energie konstant oder stationär bleibt. Dann ist

$$(1) \quad U_1 + U_2 + \dots + U_n = nU = \text{const.}$$

$U$  stellt die mittlere Energie vor.

Es ist also auch

$$(2) \quad dU_1 + dU_2 + \dots + dU_n = ndU = 0.$$

Weiter denken wir uns, daß zu jedem Freiheitsgrade eine Größe  $w_n = f(U_n)$  gehört und daß die  $w$  so beschaffen sind, daß in dem genannten Raume der geometrische Mittelwert aller  $w$  ein Extremum, also ein Maximum oder Minimum wird oder stationär bleibt. Dann ist

$$m = \sqrt[n]{w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n} = \text{Extremum,}$$

und deshalb

$$(3) \quad d \log w_1 + d \log w_2 + \dots + d \log w_n = n d \log m = 0.$$

Benutzen wir den unbestimmten Multiplikator  $-b$ , dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 (d \log w_1 - b d U_1) + (d \log w_2 - b d U_2) + \dots + (d \log w_n - b d U_n) \\
 = n(d \log m - b d U) = 0.
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Beziehungen (2) und (3) wollen gelten lassen unabhängig von der Zahl  $n$ , dann muß sein:

$$(4) \text{ und } (5) \quad \frac{d \log w_p}{d U_p} = b \quad \text{und auch} \quad \frac{d \log m}{d U} = b.$$

Setzt man  $b = \frac{1}{kT}$ , dann ist die Gleichung (5) analog mit der Entropie-Definition,  $d\eta = \frac{dU}{T}$  wenn  $\eta = k \log m = \text{Entropie}$ ,  $T = \text{absol. Temp.}$  und  $k = \text{konstant}$  ist. Wir müssen aber sofort die wichtige Bemerkung machen, daß die Gleichungen (4) und (5) nicht dieselbe sind, nicht auseinander folgen können. Denn wohl ist  $w_p = f(U_p)$ , nicht aber  $m = f(U)$  erfüllt. Es ist nicht erlaubt in einer funktionellen Beziehung die Veränderlichen durch willkürliche Mittelwerte zu ersetzen.

Die Gleichung (5) kann also nur als eine Beziehung zwischen den totalen Differentialen  $d \log m$  und  $dU$  aufgefaßt werden. Wir müssen daher  $w' = f(U)$  setzen, wobei  $w'$  ungleich  $m$  ist. Ebenso hat man  $m = f(U)$ .

Für zwei Freiheitsgrade z. B.  $x$  und  $y$  mit Masseneinheiten oder Trägheitsmomenten gleich Eins haben wir dann

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 = \text{const.}^1) \quad \dot{x}\dot{y} = m^2 = \text{extremum.}$$

$$\text{Also} \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} + \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = 0.$$

Ist die Anzahl der Freiheiten ohne Einfluß, dann muß sein:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - b\dot{x}\ddot{x} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} - b\dot{y}\ddot{y} = 0.$$

Das heißt für die  $x$  ist  $\ddot{x} = 0$  oder  $1 - b\dot{x}^2 = 0$ , welche Gleichungen inhaltsgleich sind und deshalb ist  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{2b} = \frac{kT}{2} = U_x$  und  $w_x = \dot{x}$ .

Es bedeuten unsere Gleichungen (2) und (3) also, daß die Energie pro Freiheitsgrad zur Geltung kommt und daß man die  $w$  als Geschwindigkeit oder als Winkelgeschwindigkeit auffassen kann (Prinzip der Äquipartition der Energie).

2. Zu jedem Atome in unserem Raume gehören einige Werte von  $U_p$  und  $w_p$ ; es werden schon einige Atome die Werte  $U$  und  $w'$  haben

1)  $\dot{x}$  bedeutet  $\frac{dx}{dt}$  und  $\ddot{x}$  entsprechend  $\frac{d^2x}{dt^2}$ .

und auf die Dauer wird im ganzen Raume  $U$  herrschen. Durch Stöße können die Energiebeträge abwechseln; es wird aber für jedes Atom etwas Besonderes sein, wenn gerade der Wert  $w_p = w'$  erreicht wird für jeden Freiheitsgrad. Bei Zunahme von  $w'$  wird auf die Dauer wenigstens das Atom Energie abgeben müssen, während es, falls  $w'$  abnimmt, noch Energie aufnehmen kann.

Im stationären Zustande ist die Abgabe von Energie, also wenn  $w'$  steigt, als *Strahlung* aufzufassen.

Es ist aber nicht notwendig, daß das Atom plötzlich seine Energie abgibt, sobald  $w = w'$  geworden ist. Bei der atomistischen Vorstellung der Materie, wonach ein Atom ein mechanisches Gebilde für sich darstellt, ist das sogar ausgeschlossen. Wir müssen vielmehr denken, daß  $w$  von  $w' - q$  bis  $w' + p$  zunehmen kann, bevor die Strahlung anfängt. Es ist klar:  $w$  kann niemals bis ins Unendliche zunehmen; es muß also einen oberen Grenzwert  $w = w' + p$  geben, solange  $U_p = U$  noch besteht, gleich wie ein unterer Grenzwert  $w = w' - q$  bestehen muß. Wie können wir nun diese Grenze bestimmen?

Wir müssen dabei wohl in Betracht ziehen, daß ein Atom wieder ein System darstellt, wofür die Gleichungen (1) bis (5) gelten, denn von  $w = w' - q$  bis  $w = w' + p$  sollte die Energie  $U$  des Atomsystems konstant bleiben. Das Atomsystem wird zwischen diesen Grenzen also als konservatives mechanisches System betrachtet. Im Unterschied aber von dem mit diskreten Partikeln gefüllten Raume, haben wir beim Atomsystem zu beachten, daß  $w$  von  $w' - q$  bis  $w' + p$  stetig zunehmen muß.

Wir kommen also zu dem Schlusse, daß  $w'$  abhängt von dem arithmetischen Mittelwert der Energie  $U$  der Umgebung, daß diese  $U$  im Atome konstant bleibt, während  $w'$  von  $w' - q$  bis  $w' + p$  stetig wachsend den geometrischen Mittelwert annimmt und dieser extremal wird.

3. Im Atome haben wir also diese Gesetze bei der Strahlung zu erwarten:

$$(6) \quad \text{Mittlere Energie} = U = \text{stationär};$$

$$(7) \quad \log m = \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} \log w \, dw = \text{Extremum}$$

$$(8) \quad w_1 = w' - q \quad w_2 = w' + p$$

$$(9) \quad \frac{d \log m}{d U} = \frac{d \log m}{d w'} \cdot \frac{d w'}{d U} = b = \frac{1}{k T}.$$

Nun ist

$$\log m = \frac{1}{w_2 - w_1} \left[ w \log w - w \right]_{w_1}^{w_2} = \log \left\{ \frac{1}{e} \left[ \frac{w_2}{w_1} \right]^{w_2 - w_1} \right\},$$

also

$$(10) \quad m = \frac{1}{e} \left[ \frac{w_2^{w_2}}{w_1^{w_1}} \right]^{\frac{1}{w_2 - w_1}}$$

4. Die Anwendung der Formeln ist nur möglich, sobald wir uns näher ausgesprochen haben über die Beziehung  $w' = f(U)$ .

Im ursprünglichen Raume, wo die Atome sich befinden, müssen wir  $U = \frac{1}{2} M(w')^2$  nehmen.  $M$  ist die Masse einer Molekel,  $w'$  ihre Geschwindigkeit. Es folgt dann sofort aus (4), wenn  $b = \frac{1}{kT}$  gesetzt wird:

$$(11) \quad U = \frac{1}{2} kT.$$

Es ist (11) die mittlere Energie pro Freiheitsgrad einer Molekel. Gibt man der Molekel drei Freiheitsgrade, so folgt für die mittlere Energie einer Molekel  $\frac{3}{2} kT$ , ein bekanntes Resultat.

Im Atome selbst betrachten wir  $w$  als Winkelgeschwindigkeit und setzen

$$(12) \quad U = hw' \quad h = \text{const.}$$

Es bedeutet diese Annahme, daß wir im Atome einen konstanten Impulsvektor voraussetzen.

Weiter haben wir zwei Grenzen  $w_1 = f(U_1)$  und  $w_2 = f(U_2)$  und nach (6)

$$(13) \quad U = \frac{1}{U_2 - U_1} \int_{U_1}^{U_2} U dU = \frac{U_1 + U_2}{2} = \text{stationär.}$$

Nach (8) und (12) ist  $U_1 = hw_1 = hw' - hq$  und  $U_2 = hw_2 = hw' + hp$ , also

$$U = hw' + \frac{1}{2} h(p - q).$$

Damit nun (12) im Atome gelte, müssen wir  $p = q$  nehmen und setzen

$$(14) \quad p = q = \frac{n}{2}.$$

5. Das Formelgerüst ist nun aufgestellt, um die Energieformel der Strahlung zu bilden. Aus (9) folgt in Verbindung mit (12) und (10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{kT} &= \frac{1}{h} \frac{d \log m}{dw'} = \frac{1}{h} \frac{d}{dw'} \left\{ \frac{w' + \frac{1}{2}n}{n} \log(w' + \frac{1}{2}n) - \frac{w' - \frac{1}{2}n}{n} \log(w' - \frac{1}{2}n) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{hn} \log \frac{w' + \frac{n}{2}}{w' - \frac{n}{2}} \end{aligned}$$

oder

$$(15) \quad w' = \frac{U}{h} = \frac{n}{2} \frac{e^{\frac{hn}{kT}} + 1}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1} = \frac{n}{2} + \frac{n}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1}.$$

Es liefert (15) die bekannte mittlere Energie in der Planckschen Strahlungsformel. Wir schreiben nun ausführlicher

$$(16) \quad U = \frac{w' + \frac{n}{2}}{w' - \frac{n}{2}} = \frac{hn}{2} + \frac{hn}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1}.$$

Nimmt man in (16)  $n = 0$ , so kommt, wie eine leichte Rechnung zeigt,  $U = kT$ , die Rayleighsche Formel, wobei offenbar die innere Kinetik des Atoms nicht in Betracht gezogen ist.

6. Die Nernst-Lindemannsche Atomwärmeformel<sup>1)</sup> folgt auch ganz einfach aus der Bemerkung, daß, wo  $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ , auch eben-  
sogut nach (13)

$$(17) \quad U = \frac{1}{2} \left( U_{\frac{w' + \frac{n}{2}}{w' - \frac{n}{2}}} + U_{\frac{w' + \frac{n}{4}}{w' - \frac{n}{4}}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} hn + \frac{hn}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1} + \frac{\frac{1}{2} hn}{e^{\frac{hn}{2kT}} - 1} \right).$$

gesetzt werden kann. Differenziert man (17) nach  $T$ , dann kommt die Atomwärmeformel hervor pro Freiheitsgrad. Die ganze Atomwärme ist das Dreifache, wenn wir nach Einstein<sup>2)</sup> dem Atome wieder drei Freiheiten zuschreiben und jedes Atom also eine Energie hat gleich

$$(18) \quad E = \frac{3hn}{2} + \frac{3hn}{e^{\frac{hn}{kT}} - 1}.$$

Es bleibt freilich dann noch in (17) unaufgeklärt, weshalb neben  $\frac{n}{2}$  zweitens  $\frac{n}{4}$  genommen werden muß. Die Nernst-Lindemannsche Annahme ist aber nach dieser Theorie vollkommen zulässig und nach der Quantentheorie wenigstens befremdend.

7. Schließlich werden wir noch einige Beziehungen ableiten. Der Kürze halber setzen wir statt  $U$  das Symbol  $(p, -q)$  und  $\frac{h}{kT} = m$ . Dann ist

$$(p, -q) = \frac{q-p}{2} \cdot h + \frac{(p+q)h}{2} \cdot \frac{e^{(p+q)m} + 1}{e^{(p+p)m} - 1}$$

und deshalb

$$(p+q, 0) = -\frac{(p+q)h}{2} + \frac{(p+q)h}{2} \cdot \frac{e^{(p+q)m} + 1}{e^{(p+q)m} - 1}.$$

1) W. Nernst und F. A. Lindemann. Spez. Wärme und Quantentheorie Zeitschr. f. Elektrochem. Bd. 17, 1911.

2) A. Einstein, Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spez. Wärme. Ann. Phys. 22, 1907.

Es folgt also

$$(19) \quad (p, -q) - (p + q, 0) = qh,$$

ebenso für  $p = 0$ :

$$(20) \quad (0, -q) - (q, 0) = qh.$$

Außerdem ist

$$(21) \quad (p, 0) = \frac{ph}{e^{2m} - 1}$$

und

$$(22) \quad (0, -p) = e^{2m}(p, 0).$$

Es ist also

$$(23) \quad (p, -p) = ph + \frac{2ph}{e^{2p} - 1} = \frac{e^{2p} + 1}{e^{2p} + 1} (p, 0).$$

Da aber

$$(24) \quad (2p, 0) = \frac{2ph}{e^{2p} - 1} = \frac{2}{e^{2p} + 1} (p, 0),$$

so folgt

$$(25) \quad (2p, 0)^2 = (p, -p) \cdot (4p, 0).$$

8. Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, dann kommen wir zu dem Schlusse, daß die Plancksche Energieformel der Strahlung, die Atomwärmeformel von Nernst-Lindemann gleichwie die Einsteinsche Atomenergieformel<sup>1)</sup> für drei Freiheitsgrade aus unseren Annahmen folgen.

Diese Annahmen machen die Quantenhypothese überflüssig, sie setzen aber im Atome innere Freiheitsgrade voraus. Wo unsere Größe  $w$  von der Form einer Winkelgeschwindigkeit oder einer Schwingungszahl ist, müssen im Atome einige Rotationen oder Schwingungen stattfinden, deren mittlere Energie ausgestrahlt wird und natürlich im Atome auch vorher aufgenommen ist, so daß die mittlere Atomenergie konstant bleibt.

Ob es möglich ist, auf diesen Grundlagen eine Atomkinetik aufzubauen, muß vorderhand noch dahingestellt bleiben.

Jedenfalls ist ein kinetischer Atomaufbau im Sinne von Ritz<sup>2)</sup> mit unseren Auffassungen in Übereinstimmung.

9. Schließlich möchte ich noch eine Bemerkung machen. Unsere Annahmen führen zu der Betrachtung von Drehungen im Atomsysteme. Wenden wir deshalb unsere Hypothese, daß im Atome die Gleichung

1) A. Einstein: Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme. Ann. der Phys. Bd. 22, 1907.

2) W. Ritz, Magnetische Atomfelder und Serienspektren. Annalen der Physik Bd. 25, 1908. Auch in seinen Gesammelten Werken, Paris 1911, p. 98.

(12) gilt, an auf den kräftefreien Kreisel. Die Bewegungsgleichungen<sup>1)</sup> sind bekanntlich

$$(26) \quad A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq.$$

Nach (12) setzen wir also

$$(27) \quad Ap = Bq = Cr = 2h = \text{const.}$$

Es kommt dann

$$(28) \quad \frac{d \log p}{dt} = r - q \quad \frac{d \log q}{dt} = p - r \quad \frac{d \log r}{dt} = q - p$$

$$\text{oder } \frac{d \log (pqr)}{dt} = 0.$$

$$\text{Also } pqr = \text{const.}$$

Es ist das Produkt der Winkelgeschwindigkeiten dann eine Konstante: unsere ursprüngliche Annahme.

Ein zweites Integral erhält man, wenn man die Gleichungen (28) der Reihe nach mit  $p$ ,  $q$  und  $r$  multipliziert und dann addiert. Es kommt

$$p + q + r = \text{const.},$$

also auch

$$\frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2 = \text{const.}$$

Es ist diese Gleichung unsere Gl. (1).

Diese Andeutung möge genügen, um klar zu machen, daß (27) oder (12) mit den Grundgleichungen (2) und (3) logisch zusammenhängen.

## Drehungsstützflächen.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Alfeld a. d. Leine.

Wir betrachten lotrecht wirkende Belastung  $p$  und setzen im Umkreis der lotrechten Ursprungsachse  $OO_1$  Symmetrie voraus.

Die Stützfläche werde erzeugt durch Drehung der Leitlinie  $y = \varphi(x)$ ; die Lasthöhe sei gegeben durch  $p = f(x)$ .

Wird also  $p$  von einer wagerechten Ebene ab gerechnet, so wird auch die Lasthöhenfläche erzeugt durch Drehung ihrer Leitlinie  $p = f(x)$  um die Ursprungs- oder Polachse  $OO_1$ .

Geometrisch betrachtet ist die Beziehung zwischen Belastungsart  $p$  und Stützflächenform  $y$  eindeutig willkürlich.

1) Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels I S. 140.

Dieses wird anschaulich, wenn wir das als Stützfläche tragende Sphäroid durch lotrechte Polebenen in Einzelflächen vom dreieckigen Grundriß  $OAA$ , Fig. 1, zerlegen.

Bezeichnen wir die im Sphäroid wirkende Ringkraft auf die Längeneinheit mit  $R$ , so erscheint jede Einzelfläche  $OAA$  als Träger, Stützfläche, der auf sie fallenden lotrechten Last  $p$  und der äußeren wagerechten Seitenbelastung  $R$ .

Ist  $p$  gegeben, so ist die Stützform nur dann mitbestimmt, sofern auch  $R$  gegeben ist.

Bei der festgeschlossenen vollwandigen Stützschaale ist die Entwicklung der inneren Kräfte  $R$  abhängig vom elastischen Verhalten. Insbesondere wird  $R$  beeinflußt durch die Entwicklung der Stärke der Wandung.

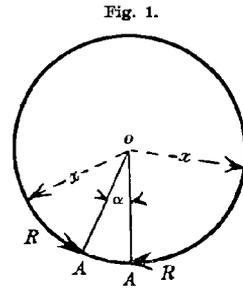


Fig. 1.

Zur nämlichen Sphäroidschaalenform gehören ganz verschiedene Stützbelastungsarten, je nachdem die Wandstärke  $f$  der Sphäroidschaale unveränderlich oder veränderlich ist.

Wir unterscheiden daher ausdrücklich die vollwandige Stützschaale und die geometrische Stützfläche.

Bei der ersteren verschwindet, wie wir weiter unten genauer sehen werden, jede Unbestimmtheit durch den Zwang einer bestehenden Elastizitätsgleichung.

Zunächst aber betrachten wir als allgemeineren Fall rein geometrisch den Inbegriff der ein Sphäroid umhüllenden Stützkräfte.

Spannt man — alles gleichartig in bezug auf die Polachse gedacht — ein System je für sich lotrechtbelasteter Einzelfäden über eine feste kreisförmige Öffnung, so schaut man eine gezogene hängende Sphäroidstützfläche. Die Formgestaltung dieser Fläche fällt verschieden aus, je nachdem man starke, schwache oder keine Ringbänderkräfte einfügt.

### I. Das Sphäroid als geometrische Stützfläche lotrechter Belastung.

Sei also  $y = \varphi(x)$  die Gleichung der erzeugenden Leitlinie  $s$ , sei  $\text{tg } \omega = \frac{dy}{dx}$ ; die innere, in Richtung der Leitlinie  $s$  wirkende Stützkraft auf die Längeneinheit sei  $S = \frac{H}{\cos \omega} = \frac{V}{\sin \omega}$ ,  $R$  bezeichne die Ringkraft.

Alsdann gelten die Gleichungen:

$$(I) \quad H \text{tg } \omega = S \sin \omega = V = \frac{\int_0^x p x dx}{x}$$

$$(II) \quad \frac{d(xH)}{ds} = R.$$

Diese letztere Gleichung folgt aus der Betrachtung des Gleichgewichtes der wagerechten Kräfte:

$$\alpha d\{xH\} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot R ds$$

für ein Element  $ds$  des Dreiecksträgers  $OAA$  bei beliebig kleinem Winkel  $\alpha$ .

Anderweitiger aus diesen beiden Gleichungen nicht ableitbarer statischer Zwang ist nicht vorhanden.

Aus Gleichung I  $xH \operatorname{tg} \omega = \int_0^x p x dx$  folgt durch Ableitung:

$$\operatorname{tg} \omega \frac{d[xH]}{d\omega} + \frac{xH}{\cos^2 \omega} = p x \frac{dx}{d\omega}$$

oder, da  $dx = \cos \omega ds$ ,  $\frac{ds}{d\omega} = \rho$ ,  $d[xH] = R ds$  ist,

$$(IIa) \quad p \cos^2 \omega = \frac{S}{\rho} + \frac{R \sin \omega}{x}$$

oder für  $\frac{\sin \omega}{x} = \frac{1}{\rho_1}$ :

$$p \cos^2 \omega = \frac{S}{\rho} + \frac{R}{\rho_1}.$$

Diese letztere Gleichung (IIa) ist ein Sonderfall der allgemeinen Beziehung  $n = \frac{S}{\rho} + \frac{S_1}{\rho_1}$ , in welcher die senkrechte Druckhöhe  $n$  zu den Spannungen  $S, S_1$  und den Krümmungshalbmessern  $\rho, \rho_1$  zweier Flächenhauptschnitte steht, indem  $\frac{x}{\sin \omega}$  als Seitenlänge des Kreiskegels der Senkrechten nicht verschieden ist vom Krümmungshalbmesser  $\rho_1$ .

Für  $R$  ergibt sich der allgemeine Ausdruck:

$$R = \frac{p x \cos^2 \omega}{\sin \omega} - \frac{\int_0^x p x dx}{\rho \sin^2 \omega}.$$

Dem Wert  $R = 0$  gehört hiernach allgemein die Beziehung zwischen Last und Stützform zu

$$p = \frac{C}{x \rho \cos \omega^3}.$$

Will man eine bestimmte Sphäroidflächenform zur Stützfläche einer bestimmten Belastungsart  $p$  machen, so hat man technisch vorzusorgen, daß eine der maßgebenden inneren Kräfte, z. B.  $R$  — etwa durch Regeln von Schraubenverbindung zwischen den einzelnen Trägerflächen

*OAA* — dem aus der gemachten bestimmten Annahme folgenden Bildungsgesetze tatsächlich entspricht.

Wir geben einige Anwendungen.

**Die Kugelfläche.**

Die Bedingungen des Tragens der Belastung  $p$  ohne innere Biegemomente lauten:

$$(I) \quad H \operatorname{tg} \omega = S \sin \omega = V = \frac{\int_0^x p x dx}{x} = r \frac{\int_0^\omega p \cos \omega \sin \omega d\omega}{\sin \omega}$$

$$(II) \quad \frac{d[\sin \omega H]}{d\omega} = R; \quad (IIa) \quad p r \cos^2 \omega = S + R;$$

$$R = p r \cos^2 \omega - \frac{r \int p \sin \omega \cos \omega d\omega}{\sin^2 \omega}.$$

Daraus ergibt sich beispielsweise:

1) Unter der Bedingung  $R = S \cos 2\omega = p_0 r \left\{ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{r^2} \right\}$  ist die Kugelfläche die Stützfläche gleichförmiger Belastung  $p = p_0$ .

Hierbei ist  $S = \frac{p_0 r}{2} =$  unverändert.

Es ist gleichgültig, ob hierbei etwa die Bedingung  $S =$  unverändert, oder etwa die Bedingung  $H = \frac{p_0 r \cos \omega}{2}$ , oder die Bedingung  $R = \frac{p_0 r \cos 2\omega}{2}$  technisch erzwungen wird. Die Erfüllung der einen Bedingung bedingt zwangsweise die Erfüllung der andern.

2) Unter der Bedingung  $S = \frac{p r}{3}$  ist die Kugelfläche die Stützfläche kegelförmiger Belastung  $p = \gamma x$ . Hierbei wechselt  $R = \gamma r x \left( \frac{2}{3} - \frac{x^2}{r^2} \right)$  sein Zeichen für  $\operatorname{tg} \omega = \sqrt{2}$ .

3) Für  $R = \gamma r x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{x^2}{r^2} \right)$ ;  $S = \frac{p r}{4}$  gilt parabolische Belastung  $p = \gamma x^2$ .

4) Für  $p = \frac{p_0}{\cos \omega}$  gilt  $\frac{R}{p_0 r} = \cos \omega - \frac{1}{1 + \cos \omega}$ .

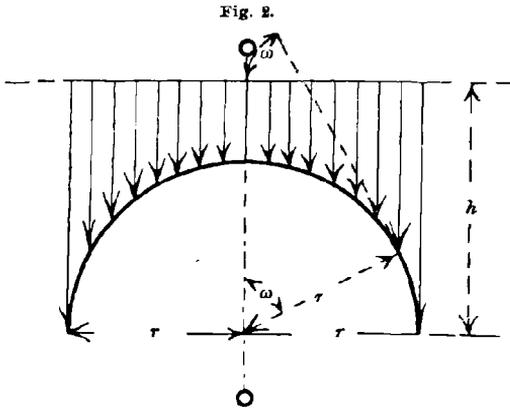
5) Für  $R + S =$  unveränderlich gilt  $p = \frac{p_0}{\cos^2 \omega}$ .

6) Für  $R = H$  gilt  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^3}$ .

7) Für  $R = S$  gilt  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^4}$ .

8) Für  $H =$  unverändert  $= \frac{p_0 r}{2}$  gilt  $p = \frac{p_0 (1 + \cos^2 \omega)}{2 \cos \omega^3}$ .

9) Der wagerecht begrenzten Belastung, Fig. 2,  $p = h - r \cos \omega$  entspricht der Zwang für die Entwicklung der Ringkraft  $R = \frac{hr \cos^2 \omega}{2}$



$$-\frac{r^2}{3} \left( 3 \cos \omega^3 - \cos \omega - \frac{1}{1 + \cos \omega} \right).$$

10) Dem Werte  $R = \frac{p_0 r}{2} =$  unveränderlich entspricht die Belastung  $p = p_0 \frac{(\omega + \sin \omega \cos \omega)}{\cos^2 \omega \cdot \sin 2\omega}$  mit den Werten  $H = \frac{p_0 r \omega}{2 \sin \omega}$ ;  $S = \frac{p_0 r \omega}{\sin 2\omega}$ .

11) Dem Werte  $R = 0$  entspricht  $p = \frac{C}{\sin \omega \cdot \cos \omega^3}$ .

Wird für die Ringkraft  $R$  zwangsweise eine Entwicklung gewählt, welche nicht im Einklang steht mit dem natürlichen Kräfteverlauf

$$H_0 = R_0 = S_0 - \frac{p_0 r}{2}$$

im Pol homogener geschlossener Stützschaalen, so erhält man für die zugehörige Polbelastung keinen endlichen, von Null verschiedenen Wert, vielmehr entweder  $p_0 = 0$  oder  $p_0 = \infty$ .

Beispielsweise gehört zu  $R = -C \sin \omega$  die hyperbolische Belastung  $p = \frac{C}{x}$  mit den Werten  $V = C$ ,  $S = \frac{C}{\sin \omega}$ ,  $H = \frac{C \cos \omega}{\sin \omega}$ .

Dem Werte  $R = -S$  entspricht nach Gl. (IIa) der unbelastete Zustand der Kugelfläche, jedoch mit Einzellast  $P$  im Pol. Man hat hierbei die willkürliche Größe in  $\int p x dx$  zu beachten und kann allgemein schreiben

$$(I) \quad x H \operatorname{tg} \omega = x \sin \omega S = x V = C + \int_0^x p x dx.$$

Für  $p = 0$ ,  $C$  nicht  $= 0$ , hat man mithin

$$\sin \omega H = \frac{P}{2\pi r} \operatorname{cotg} \omega; \quad R = \frac{d[\sin \omega H]}{d\omega} = -S.$$

### Die Paraboloidfläche.

Wir schreiben die Gleichung der Leitlinie:

$$y = \frac{x^2}{2r} = h \frac{x^2}{a^2}; \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{x}{r}; \quad \cos^2 \omega = \frac{r^2}{r^2 + x^2}; \quad \sin^2 \omega = \frac{x^2}{r^2 + x^2}$$

$$p = \frac{r}{\cos \omega^3}; \quad dx = \cos \omega ds = \frac{r d\omega}{\cos^2 \omega}.$$

Für  $\text{Cof } \alpha \cos \omega = 1$ ;  $\sin \omega = \text{Tang } \alpha$ ,  $\text{tg } \frac{\omega}{2} = \text{Tang } \frac{\alpha}{2}$  können wir auch die Schreibweise wählen:

$$x = r \text{Sin } \alpha; \quad y = \frac{r \text{Sin}^2 \alpha}{2}; \quad \frac{s}{r} = \frac{2\alpha + \text{Sin } 2\alpha}{4}; \quad d\omega = \frac{d\alpha}{\text{Cof } \alpha} = \cos \omega d\alpha.$$

Die Bedingungen für das Tragen der Belastung  $p$  als Stützfläche lauten:

$$(I) \quad H \text{tg } \omega = S \sin \omega = V = \frac{\int_0^x p x dx}{x} = r \cotg \omega \int \frac{p \sin \omega d\omega}{\cos \omega^3} \\ = \frac{r}{\text{Sin } \alpha} \int p \text{Sin } \alpha \text{Cof } \alpha d\alpha.$$

$$(II) \quad d[xH] = R ds; \quad d\{\text{tg } \omega H\} = \frac{R d\omega}{\cos \omega^3} \text{ oder } \frac{d[\text{Sin } \alpha H]}{d\alpha} = R \text{Cof } \alpha^2,$$

$$(IIa) \quad r p \cos \omega = S \cos^2 \omega + R \text{ oder } r p = \frac{S}{\text{Cof } \alpha} + R \text{Cof } \alpha.$$

Wir schließen daraus beispielsweise:

1) Für  $H = \text{unveränderlich}$  gilt  $p = p_0 = \text{unveränderlich}$ ;  $R = H \cos \omega$ .

2) Für  $H = \frac{R}{2 \cos \omega}$  gilt kegelförmige Belastung  $p = \frac{c x}{r}$ .

3) Für  $R = 3H \cos \omega$  ist das Paraboloid die Stützfläche parabolischer Belastung  $p = c \frac{x^2}{r^2} = y$ , mit den Werten  $H = \frac{y r}{4}$ ,  $S = \frac{y r}{4 \cos \omega}$ ;  $R = \frac{3 y r \cos \omega}{4}$ .

4) Für  $p = \frac{p_0}{\cos \omega} = p_0 \text{Cof } \alpha$  gilt  $R = \frac{r p_0}{3} \left\{ 2 - \frac{1}{\text{Cof } \alpha (1 + \text{Cof } \alpha)} \right\}$ .

5) Für  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^2}$  gelten die Werte:

$$H = \frac{r(p_0 + p)}{4}; \quad S = \frac{r(p_0 + p)}{4 \cos \omega}; \quad R = \frac{r(3p - p_0)}{4} \cos \omega.$$

6) Für  $R = 0$  ist das Paraboloid die Stützfläche hyperbolischer Belastung  $p = \frac{C}{x}$ .

7) Für  $R = -S \cos^2 \omega$  wird  $p = 0$ .

Die Stützfläche trägt eine Einzellast  $P = 2\pi Q$  im Scheitel mit den Werten  $V = \frac{Q}{x}$ ;  $R = -\frac{Q}{x \text{Sin } \alpha \text{Cof } \alpha}$ .

Man kann, indem mathematische Punkteinzellasten in natura nicht vorkommen, die belastete Scheitelhaube durch einen entsprechenden Berührungskegel sich ersetzt denken.

## Das Sphäroid der kubischen Parabel.

$$y = h \frac{x^3}{a^3}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3hx^2}{a^3}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6hx}{a^3}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{6hx \cos \omega^3}{a^3}; \quad \frac{\sin \omega}{x} = \frac{3hx \cos \omega}{a^3}$$

Es gelten die Bedingungen der Stützfläche

$$(I) \quad H \operatorname{tg} \omega = S \sin \omega = V = \int \frac{px dx}{x}$$

$$(II) \quad \frac{d[\alpha H]}{ds} = R; \quad (IIa) \quad R = \frac{p a^3 \cos \omega}{3hx} - 2S \cos^2 \omega.$$

Wir schließen daraus beispielsweise:

1) Für  $R = 0$  gilt  $p = p_0$ ,  $S = \frac{p_0 x}{2 \sin \omega}$ ;  $V = \frac{p_0 x}{2}$ .

2) Für  $H =$  unveränderlich gilt  $p = \frac{Cx}{a} = x$ .

3) Für  $p = p_0 + \frac{cx}{a}$  gilt  $R = \frac{c a^2 \cos \omega}{9h}$ .

4) Für die durch eine wagerechte Ebene abgegrenzte Belastung  $p = p_0 + y$  gilt  $R = \frac{x^2 \cos \omega}{5} = \frac{a^3 \sin \omega}{15h}$ .

5) Für  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^2}$  gilt  $R = 2p_0 y \cos \omega$ .

Das Sphäroid der Gleichung  $\rho = \frac{r}{\cos \omega^2}$ 

liegt zwischen Kugel und Paraboloid. Für  $\cos \alpha \cos \omega = 1$  haben wir die Gleichungen  $x = r\alpha$ ;  $y = r(\cos \alpha - 1)$ ;  $s = r \sin \alpha$ .

$$(I) \quad H \operatorname{tg} \omega = H \sin \alpha = S \operatorname{Tang} \alpha = \frac{r \int p \alpha d\alpha}{\alpha}$$

$$(II) \quad \frac{d[\alpha H]}{d\alpha} = R \cos \alpha, \quad (IIa) \quad pr = S + \frac{R \sin 2\alpha}{2\alpha}$$

Für  $p =$  unveränderlich gilt beispielsweise  $R = \frac{rp_0 \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \right\}$ , während der Bedingung  $R = 0$  die Belastung  $p = \frac{C \cos \alpha}{\alpha}$  entspricht bei den Werten  $S = rp$ ,  $H = \frac{rc}{\alpha}$ .

Der Unveränderlichkeit von  $H$  entspricht die Belastung

$$p = \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right).$$

Das Sphäroid der Gleichung  $\rho = \frac{r}{\cos \omega}$ .

Es ist  $x = r\omega$ ;  $y = -r \operatorname{lognat}(\cos \omega)$ ;  $\cos \omega = e^{-\frac{y}{r}}$ ;  $\frac{d(\omega H)}{d\omega} = \frac{R}{\cos \omega}$ ;  
 $pr \cos^2 \omega = H + \frac{R \sin \omega}{\omega}$ .

Beispielsweise entspricht dem Werte  $R = 0$  die Belastung  $p = \frac{C}{\omega \cos^2 \omega}$ ,  
dem Werte  $p = 0$  die Ringkraft  $R = -\frac{H \omega}{\sin \omega} = \frac{C \cos \omega}{\sin^2 \omega}$ .

**Das gleichseitige Hyperboloid.**

Setzt man  $\cos 2\omega \operatorname{Cof} 2\varphi = 1$ ;  $\cos^2 \omega = \frac{\operatorname{Cof}^2 \varphi}{\operatorname{Cof}^2 2\varphi}$ ;  $\sin^2 \omega = \frac{\operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cof}^2 2\varphi}$ , so  
kann man die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel schreiben:

$$x = r \operatorname{Sin} \varphi, \quad y = r \operatorname{Cof} \varphi; \quad \varrho = r \frac{\operatorname{Cof}^3 \varphi}{\cos \omega^3}.$$

Man erhält für das Stützgleichgewicht des Hyperboloids:

$$(IIa) \quad pr \cos \omega \operatorname{Cof} \varphi = \frac{H \cos \omega}{\operatorname{Cof}^2 \varphi} + R.$$

1) Für  $p = p_0$  gilt  $V = \frac{p_0 x}{2}$ ;  $H = \frac{p_0 y}{2}$ ;  $R = \frac{p_0 y}{2 \cos \omega}$ .

Für  $H =$  unverändert, also für  $R = H_0 \cos \omega$  gilt  $p = \frac{p_0(1 + \operatorname{Cof}^2 \varphi)}{2 \operatorname{Cof}^3 \varphi}$ .

Für  $R = -\frac{S}{\operatorname{Cof}^2 \varphi}$ ,  $p = 0$ , gilt Einzellast im Scheitel.

**Das Cykloidsphäroid**

$$\varrho = r \cos \omega; \quad x = \frac{r(\omega + \sin \omega \cos \omega)}{2}; \quad y = \frac{r \sin^2 \omega}{2}$$

hat als Stützfläche die Kräfteverteilung

$$(IIa) \quad pr \cos \omega^3 = S + \frac{2R}{1 + \frac{2\omega}{\sin 2\omega}}.$$

Dem Werte  $R = 0$  entspricht daher die Belastung

$$p = \frac{C}{x \cos \omega^4}.$$

Dem Werte  $H =$  unverändert entspricht die Belastung  $p \equiv \frac{1}{\cos \omega^4} + \frac{r \sin \omega}{x \cos \omega}$ .

Wir betrachten im Folgenden Sphäroide mit verschwindendem Krümmungshalbmesser im Scheitel.

**Das semikubische Paraboloid.**

Für  $\cos \omega \operatorname{Cof} \alpha = 1$  schreiben wir die Gleichungen der Leitlinie

$$x = \frac{r \operatorname{Sin}^2 \alpha}{2}; \quad y = \frac{r \operatorname{Sin}^3 \alpha}{3}; \quad \varrho = r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cof} \alpha^3 \quad \varrho_1 = \frac{r \operatorname{Sin} 2\alpha}{4};$$

$$(IIa) \quad pr \operatorname{Sin} \alpha = H + 2R \operatorname{Cof} \alpha.$$

Für  $H =$  unverändert gilt die Stützbelastung  $p = \frac{3H}{r \sin \alpha}$ .

Für  $p = p_0 =$  unverändert gilt  $R = \frac{3p_0 r \sin \omega}{8}$ .

Für  $p = y$  gilt  $R = \frac{3yr \sin \omega}{7}$ .

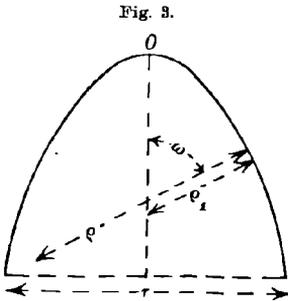
Daher entspricht der Belastung  $p = p_0 + y$  die Ringspannung

$$R = 3r \sin \omega \left\{ \frac{p_0}{8} + \frac{y}{7} \right\}.$$

### Das Sphäroid der Leitlinie $\varrho = r \sin \omega$

läßt sich leicht aus einzelnen Kreisbögen zeichnen, indem (Fig. 3)  $\varrho = 2\varrho_1$  ist.

Für den Schlußwinkel  $\omega = \frac{\pi}{2}$  ist dasselbe im Vergleich zur Halbkugel über dem nämlichen Grundkreis im Verhältnis  $\frac{\pi}{2}$  überhöht. Der Umfang  $2s = 2r = 4a$  ist im Verhältnis  $\frac{4}{\pi}$  größer als der Halbkreis.



Die Oberfläche  $\frac{2\pi r^2}{3} = \frac{8\pi a^2}{3}$  ist  $\frac{3}{4}$  mal so groß als die Halbkugelfläche, während der Inhalt des Sphäroids  $\frac{5\pi^2 a^3}{16}$  beträgt, mithin die Halbkugel  $\frac{15\pi}{32}$  fach übertrifft.

Für diese Sphäroidfläche gilt die Stützkräfteentwicklung:

$$(IIa) \quad rp \cos^2 \omega \sin \omega = S + 2R.$$

Für  $p = p_0$  gilt daher  $R = \frac{p_0 r \sin \omega (4 \cos^2 \omega - 1)}{8}$ ; für  $p = \frac{c}{\sin \omega}$ ;  $S = \frac{cr}{3}$ ;  $R = \frac{cr}{2} \left\{ \cos^2 \omega - \frac{1}{3} \right\}$ .

Einer Einzellast im Scheitel entspricht  $R = -\frac{S}{2}$ .

### Das Sphäroid $\varrho = 3\varrho_1$

hat die Werte  $x = \frac{r \sin \omega^2}{3}$ ;  $y = \frac{r[2 - \cos \omega (2 + \sin \omega^2)]}{3}$ . Die Höhe hat den zweifachen, der Meridianumfang den  $\frac{3}{2}$  fachen, die Oberfläche den  $\frac{8}{5}$  fachen, der Inhalt den  $\frac{64}{55}$  fachen Wert der Halbkugel über dem nämlichen Grundkreis. Es gilt die Verteilung der Stützkräfte

$$rp \cos^2 \omega \sin^2 \omega = S + 3R.$$

Für  $H =$  unverändert gilt daher beispielsweise die Stützbelastung

$$p = \frac{H}{\varrho} \frac{(1 + 3 \cos^2 \omega)}{\cos \omega^3} = \frac{H(1 + 3 \cos^2 \omega)}{\sin^2 \omega \cos \omega^3}.$$

Das Sphäroid  $\rho = r \operatorname{tg} \omega$

hat den Wert  $\rho_1 = \frac{x}{\sin \omega} = r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{r(1 - \cos \omega)}{\sin \omega}$  und daher als Stützfläche die Kräfteverteilung:

$$(IIa) \quad pr \cos^2 \omega \sin \omega = H + R(1 + \cos \omega).$$

Weil, wie wir hier nochmals betonen, die Gestaltung des Ringdruckes  $R$  in der geometrischen Stützfläche des Sphäroids an und für sich betrachtet statisch unbestimmt ist, so steht es in Willen und Macht des Erbauers von Sphäroidtragwerken, durch zweckdienliche Maßnahmen zweckentsprechenden Verlauf der inneren Stützkräfte zu erzwingen.

In diesem Sinne pflegt man Bau und Ausbildung der Kuppel häufig auf die einfache Forderung

$$H = \text{unverändert}$$

zu gründen. Bei Erfüllung dieser Forderung steht die Stützliniengestaltung der sphäroidischen Fläche in einfacher Analogie zur Stützliniengestaltung des Tonnengewölbes, also zum Stützgleichgewicht in der Ebene.

Wir betrachten daher als Sonderfall im folgenden allgemein

Die sphäroidische Stützfläche mit unveränderlichem Schub  $H$  auf die Längeneinheit.

Mit der Erfüllung der Forderung  $H = \text{unveränderlich}$  ist gleichwertig die Erfüllung der Gleichung  $H \cos \omega = R$  oder  $\frac{R}{\cos \omega} = \text{unveränderlich}$ . Die eine Erscheinung bedingt wechselseitig die andere.

Für unveränderlichen Wert  $H$  folgt aus  $Hx \frac{dy}{dx} = \int p x dx$  durch Ableitung und nach Teilung durch  $x$ :

$$(1) \quad H \left\{ \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right\} = p,$$

während Gleichung (IIa) die Form annimmt

$$(IIa) \quad p \cos \omega^3 = H \left\{ \frac{1}{\rho} + \frac{\sin \omega \cos^2 \omega}{x} \right\}$$

oder

$$\frac{p}{H} = \frac{1}{\rho \cos \omega^3} + \frac{1}{\rho_1 \cos \omega}.$$

Gleichungen (1) und (IIa) sind gleichwertig, die eine entsteht durch Vervielfältigung mit  $\cos \omega^3$  aus der andern.

In der Ebene haben wir die entsprechenden Gleichungen

$$(1) \quad H \frac{d^2 y}{dx^2} = p; \quad (\text{IIa}) \quad \frac{p}{H} = \frac{1}{\rho \cos \omega^3}.$$

Hiernach entspricht in beiden Fällen, also sowohl in der Ebene wie im Sphäroid jeder besonderen einfachen Belastungsform  $p \equiv x^{n-2}$  die nämliche Stützlinienform  $y \equiv x^n$ . Weil aber  $y = \frac{x^n}{n(n-1)}$  das Integral der Gleichung  $\frac{d^2 y}{dx^2} = x^{n-2}$ , dagegen  $y = \frac{x^n}{n^2}$  dasjenige der Gleichung  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = x^{n-2}$  ist, so ist die Bewertung der Bestimmungsgrößen zu unterscheiden.

Es entspricht beispielsweise der nämlichen Belastungslinie

$$p = p_0 \{ 1 + x + x^2 + x^4 + \sqrt{x} \}$$

die Stützlinie in der Ebene:

$$y = \frac{p_0}{H} \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{3 \cdot 5} \right\},$$

die Leitlinie  $s$  der sphäroidischen Stützfläche:

$$y = \frac{p_0}{H} \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^6}{36} + \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{25} \right\}.$$

Betrachtet man  $H$  als Einheit oder schreibt  $x = z \sqrt{H}$ , so hat man die Schreibweise:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} = p; \quad (1b) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = p.$$

In der Ebene ist unter den entsprechenden Werten der Last- und Stützlinie  $p = y = \text{Cof} z$  das sich selbst entsprechende Element.

Im Sphäroidstützgleichgewicht entspricht sich selbst der Funktionswert:

$$p = y = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{4 \cdot 4^2} + \frac{z^6}{4 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{z^{2n}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2},$$

während zur Sphäroidform  $y \equiv \text{Cof} z$  die Belastung  $p \equiv \text{Cof} z + \frac{\text{Sin} z}{z}$  zugehört, die Belastung  $p \equiv \text{Cof} z$  aber die Sphäroidform

$$y \equiv \text{Cof} z - \int \frac{(\text{Cof} z - 1) \cdot dz}{z}$$

erfordert.

Für  $H =$  unverändert hat die Kugelfläche die Belastung

$$p = \frac{p_0(1 + \cos^2 \omega)}{2 \cos \omega^3},$$

das Paraboloid  $p =$  unverändert.

Zum Sphäroid der Leitlinie  $\rho = r \sin \omega$  gehört  $p = \frac{H}{r} \left\{ \frac{1 + 2 \cos^2 \omega}{\sin \omega \cos \omega^3} \right\}$ .

Betrachtet man den allgemeinsten Fall der durch Drehung einer beliebigen Leitkurve  $s$  entstehenden Fläche, so kann man in eine Spitze auslaufende oder auch oben überhaupt nicht geschlossene Sphäroidflächen behandeln.

Für alle gelten sinngemäß die oben gegebenen statischen Gleichgewichtsgleichungen auch für den Fall entgegengesetzter, also negativer Krümmung.

Wird in Fig. 4 durch  $AA_1$  der Verlauf irgendwelcher Leitkurve dargestellt, so gelten mithin die allgemeinen Gleichungen:

$$Vx = C + \int_a^x px \, dx = V_1 a + \int_a^x px \, dx$$

$$H \operatorname{tg} \omega = S \sin \omega = V$$

$$\frac{d[xH]}{ds} = R; \quad p \cos^2 \omega = \frac{S}{\rho} + \frac{R}{\rho_1}.$$

Als einfaches Beispiel nicht geschlossener Formen betrachten wir:

**Das Sphäroid  $\rho = -\rho_1$  als Stützfläche ringförmiger Belastung.**

Diese Sphäroidfläche beginnt, Fig. 5, am Kopfe in einem wagerechten Kreise vom Halbmesser  $a$  mit dem Winkelwert

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dy}{dx_a} = \operatorname{tg} \omega = \infty.$$

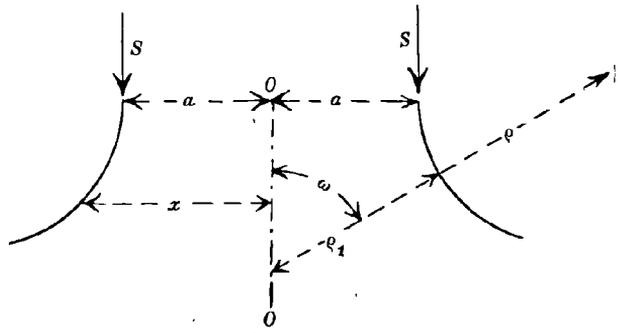
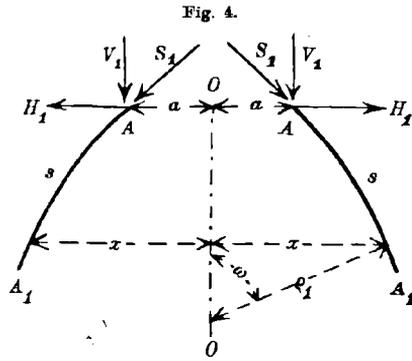
Die Leitlinie  $s$  läßt sich sehr einfach aus einigen Kreisbögen zeichnen, indem  $\rho_1$  stets unmittelbar in der vorhandenen oder entstehenden Zeichnung gegeben ist.

Bei der Kugelfläche mit der Kreisleitlinie ist

stets  $\rho = +\rho_1 = \frac{x}{\sin \omega}$ , während hier das geometrische Formbildungsgesetz besteht

$$\rho = -\rho_1 = \frac{-x}{\sin \omega}.$$

Weil  $\rho = \frac{dx}{\cos \omega d\omega}$  ist, so folgt aus  $\frac{dx}{x} + \frac{\cos \omega d\omega}{\sin \omega} = 0$  der Zwang



$x \sin \omega = \text{konstant} = a$  und daher  $x = \frac{a}{\sin \omega}$ ,  $\varrho = -\frac{a}{\sin^2 \omega}$ ;  $y = -a \log \left( \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right)$ ;  
Bogenlänge  $s = a \operatorname{ctg} \omega$ .

Diese Leitlinie ist nicht verschieden von der in bezug auf die lotrechte Krafrichtung um  $\frac{\pi}{2}$  gedrehten Kettenlinie.

Für die Wirkung dieser Fläche als Stützfläche gilt die Bedingung (IIa)

$$\varrho_1 p \cos^2 \omega = -S + R.$$

Ist  $p = 0$  und lediglich ringförmig verteilte Kopflast  $P = 2\pi a Q$  vorhanden, so ist

$$R = S = Q.$$

Diese Stützfläche hat mithin die bemerkenswerte Eigenschaft, mit unveränderlichen Druckwerten  $R = S = Q$  die lotrechte Ringlast auf sich stets erweiternde Kreise  $2\pi x$  zu übertragen.

Wählt man Sphäroidformen  $\varrho = -2\varrho_1$ ,  $\varrho = -3\varrho_1$ , allgemein  $\varrho = -n\varrho_1$ , deren Leitlinien sich sämtlich in einfacher analoger Weise leicht zeichnen lassen, so erhält man für das Tragen der ringförmigen Belastung die Kräfteverteilung  $R = \frac{S}{2}$ ,  $\frac{S}{3}$ ,  $\frac{S}{n}$ .

Für  $n = 2$  erhalten wir beispielsweise die bestimmte Leitlinie:

$$x = \frac{a}{\sin^2 \omega}; \quad y = 2a \operatorname{ctg} \omega; \quad \varrho = -\frac{2a}{\sin \omega^3} = -2\varrho_1$$

und für  $n = 10$

$$x = \frac{a}{\sin \omega^{10}}; \quad \varrho = -10\varrho_1 = -\frac{10a}{\sin \omega^{11}}.$$

Hierbei hat  $S$  den statisch bestimmten Wert  $S = \frac{aQ}{x \sin \omega}$ , welcher für die Beispiele die abnehmenden Werte  $S = Q \sin \omega$ ,  $S = Q \sin \omega^3$  zeigt, während  $\omega$  mit zunehmender Tiefe vom Anfangswerte  $\omega = \frac{\pi}{2}$  an abnimmt.

## II. Die elastische Stützschaale.

Wir verstehen unter der elastischen Stützschaale einen homogenen, vor Aufbringen oder Wirken der Stützbelastung spannungslosen Sphäroidträger, dessen Mittelfläche in der oben beschriebenen Weise durch Drehung einer Leitlinie  $s$  um eine Polachse  $OO_1$  beschrieben wurde.

Wir setzen hier zunächst die Erzeugung durch eine geschlossene, im Scheitel wagerechte Leitlinie voraus, betrachten also eine geschlossene Schaale von voller Wandstärke  $f$ . Diese Wandstärke  $f$  wird senkrecht zur Mittelfläche gemessen.

Für die inneren Kräfte einer solchen als Stützfläche tragenden Schale gelten die nämlichen oben angegebenen Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$(I) \quad H \operatorname{tg} \omega = S \sin \omega = V = \frac{\int p x dx}{x}$$

$$(II) \quad d[xH] = R ds; \quad (IIa) \quad p \cos^2 \omega = \frac{S}{\rho} + \frac{R \sin \omega}{x}.$$

Die Ringkraft  $R$  eines solchen geschlossenen Trägers ist nicht willkürlich gestaltbar, vielmehr gebunden und bestimmt durch die elastischen Eigenschaften der vollwandigen Schale. Daher verschwindet jede Unbestimmtheit und Willkürlichkeit in der Gestaltung der inneren Stützkkräfte und die einzelne bestimmt gegebene Schale kann lediglich einer einzigen bestimmt gegebenen Belastungsform  $p$  als Stützfläche dienen.

Wir aber bedürfen, um dieses klarzustellen — abgesehen von den gegebenen statischen Beziehungen — noch einer neuen Gleichung für die zwangsweise Entwicklung der inneren Stützkkräfte.

Diese ist aus dem elastischen Verhalten der tragenden Stützschaie herzuleiten.

Im Stützgleichgewicht findet keinerlei Verbiegung, sondern lediglich elastische Zug- oder Druckerregung der einzelnen Flächenelemente der Schalenwandung statt.

In jedem Meridian, also in jeder Leitlinie  $s$  läuft die Spannung auf die Flächeneinheit  $\sigma = \frac{S}{f}$ , in jedem wagerechten Ringe, also in jedem Breitenkreise wirkt auf die Flächeneinheit die Spannung

$$\frac{R}{f} = \mu.$$

Die Spannungen  $\sigma$  und  $\mu$  stehen senkrecht zueinander und sind für jeden Stützschaalenpunkt die Hauptspannungen der in der Fläche wirkenden inneren Kräfte. Die Richtung, Tangente, des Meridians und des Breitenkreises bilden die Achsen der Spannungsellipse für jeden Punkt.

Die Wandstärke  $f$  wird hierbei im allgemeinen als veränderlich gedacht, natürlich stets gleichartig im Umkreise der Polachse  $OO_1$ .

Vorausgesetzt wird, daß  $f$  stets klein sei gegenüber dem Krümmungshalbmesser oder der Längenausdehnung der Spannweite oder Pfeilhöhe der Schale.

Alsdann wird angenommen, daß jede der beiden Hauptspannungen  $\sigma$ ,  $\mu$  je im geraden Verhältnis steht zu der in ihrer Wirkungsrichtung bestehenden elastischen Dehnung.

Diese Annahme ergibt sich als Analogie des Satzes, daß ein homogenes ebenes Verzerrungssystem gleichwertig ist mit zwei *einfachen* Dehnungen

$$\Delta = \lambda \left( \frac{S}{f} \right); \quad \Delta_1 = \lambda \left( \frac{R}{f} \right).$$

Weil bei der elastischen Erregung und Bewegung der Schale jeder beliebige Ring  $2\pi x$  stets der Grundkreis der über ihn gespannten Sphäroidhaube ist und bleibt, jeder Durchmesser  $2x$  als Spannweite seines Meridianbogens erscheint, so besteht die Elastizitätsgleichung:

$$(III) \quad \mu x = \int_0^x \cos \omega \cdot \sigma ds$$

oder da  $\cos \omega ds = dx$  ist:

$$(IIIa) \quad \mu x = \int_0^x \sigma dx.$$

Daraus folgt durch Ableitung

$$(IIIb) \quad \frac{d[\mu x]}{dx} = \sigma,$$

oder anders geschrieben

$$x d\mu = (\sigma - \mu) dx \\ \frac{d\mu}{dx} = \frac{\sigma - \mu}{x}.$$

Gleichung (IIIb) gilt sinngemäß allgemein für jedes, auch das oben nicht geschlossene Drehungsschalengebilde. Die Gültigkeit dieser Gleichung ist gebunden an die Richtigkeit der Anschauung, daß Spannung und Dehnung als gleichzeitige und gleichwertige Erscheinungen aufzufassen sind. Daher hat gemäß Gleichung (IIIb) die Änderung der Dehnung jedes Ringhalbmessers der Meridiandehnung zu entsprechen.

Weil  $\int \sigma dx = \sigma x - \int x d\sigma$  ist, so findet für eine oben geschlossene Schale auch die Beziehung statt

$$x(\sigma - \mu) = \int x d\sigma.$$

Wir erkennen zunächst die allgemeine Wahrheit des Satzes:

Für  $S = R$ , also  $\frac{S}{f} = \frac{R}{f}$ ,  $\sigma = \mu$  sind alle Spannungsellipsen der Stützfläche Kreise und die Stützschaale ist ein Träger vom gleichen Widerstande mit der zugehörigen Entwicklung der Wandung  $f \equiv R = S$ .

Im übrigen sind für jede gegebene Schalenform, die als Stützschaale für eine bestimmte Belastung  $p$  dienen soll, gemäß Gleichungen (I), (II), (IIa) die zugehörigen Funktionswerte der inneren Spannungen  $S$  und  $R$  bekannt.

Mithin kann in jedem solchen Einzelfalle die notwendig zugehörige bestimmte Entwicklung der Wandung  $f$  nach Maßgabe der Elastizitätsgleichung (IIIa), (IIIb) festgestellt werden.

Weil  $d\mu = d \frac{R}{f} = \frac{f dR - R df}{f^2}$  ist, so erhalten wir aus

$$dR - \frac{R df}{f} = (S - R) \frac{dx}{x}$$

$$\frac{df}{f} - \frac{dR}{R} = \left( \frac{R - S}{R} \right) \frac{dx}{x}$$

die allgemeine Beziehung zwischen der Wandstärke  $f$  einer Stützschaale und den, statisch bei gegebenem  $p$  bekannten, Spannungen  $S$  und  $R$  in der Gleichung

(IV) 
$$\log \text{ nat } \left\{ \frac{f}{R} C \right\} = \int \left( \frac{R - S}{R} \right) \frac{dx}{x}$$

oder

$$f = R \cdot e^{\int \left( \frac{R - S}{R} \right) \frac{dx}{x}}$$

Nicht immer und insbesondere nicht für alle beliebige angenommenen Belastungsarten  $p$  sind solche Stützschaalen möglich. Ihre Lebensfähigkeit ist vielmehr beschränkt und gegeben durch die Bedingung, daß nach Gleichung (IV) reale positive Werte  $f$  erscheinen.

Wir betrachten zunächst einige einfache Beispiele.

#### Die Kugelschale.

Für dieselbe ist  $\frac{R}{r} = p \cos^2 \omega - \frac{\int p \sin \omega \cos \omega d\omega}{\sin^2 \omega}$ , während die Entwicklung der Wandung gegeben ist durch die Gleichung:

$$\log \text{ nat } \left[ \frac{f}{R} C \right] = \int \left( 2 - \frac{rp \cos^2 \omega}{R} \right) \text{ctg } \omega d\omega.$$

Daraus folgt beispielsweise:

1) Für  $f = \frac{f_0}{\cos^2 \omega}$  ist die Kugelschale der Stützschaalenträger vom gleichen Widerstande für die Belastung  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^4}$ .

2) Für  $f = f_0 \cos 2\omega^{\frac{3}{2}}$  ist die Kugelschale die Stützschaale konstanter Belastung  $p = p_0$ .

3) Bei konstanter Wandung  $f = f_0$  ist die Kugelschale die Stützschaale der Belastung  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^3}$  beim Werte  $R = H = \frac{p_0 r}{1 + \cos \omega}$ .

4) Für  $f = f_0 \cos^2 \omega (2 \cos 2\omega - 1)^{\frac{3}{2}}$  ist die Kugelschale die Stützschaale der Belastung  $p = p_0 \cos 2\omega$ .

5) Für  $f = \frac{f_0 e^{\sin^2 \omega}}{\cos 2\omega^2}$  ist die Kugelschale die Stützschale der Belastung  $p = \frac{p_0}{\cos 2\omega^2}$ .

6) Für  $f = f_0 \cos^2 \omega$  ist die Kugelschale bei konstantem Schub  $H$  die Stützschale der Belastung  $p = \frac{p_0(1 + \cos^2 \omega)}{2 \cos \omega^2}$ .

#### Die Parabelschale.

Die Wandung der Parabelschale als Stützschale ist gegeben durch die Gleichung:

$$\log \text{nat} \left[ \frac{f}{R} C \right] = \int \left( \frac{R-S}{R} \right) \frac{d\omega}{\sin \omega \cos \omega}.$$

Wir erfahren daraus beispielsweise folgendes:

1) Für  $f = f_0 \cos \omega e^{-\frac{\text{tg}^2 \omega}{2}}$  ist die Parabelschale die Stützschale konstanter Belastung  $p = p_0$ .

2) Für  $f = \cos \omega \text{tg} \omega^{\frac{8}{3}} e^{-\frac{\text{tg}^2 \omega}{6}} = \cos \omega y^{\frac{4}{3}} e^{-\frac{y}{3r}}$  ist die Parabelschale die Stützschale parabolischer Belastung  $p = y = \frac{r \text{tg}^2 \omega}{2}$ .

3) Bei der Entwicklung der Wandung  $f = \frac{f_0 e^{\frac{\text{tg}^2 \omega}{2}}}{\cos \omega}$  ist die Parabelschale als Träger vom gleichen Widerstande die Stützschale der Belastung  $p = \frac{p_0(1 + \cos^2 \omega) e^{\frac{\text{tg}^2 \omega}{2}}}{2 \cos^2 \omega}$ , bei dem Werte  $R = S = \frac{r p_0 e^{\frac{\text{tg}^2 \omega}{2}}}{2 \cos \omega}$ .

4) Für  $S = \text{unverändert} = \frac{p_0 r}{2}$ ,  $p = p_0 \frac{\cos \omega (1 + \cos^2 \omega)}{2}$  gilt

$$f = f_0 \cos \omega^4 e^{-\frac{(1 + 3 \cos^2 \omega) \sin^2 \omega}{4 \cos \omega^4}}.$$

5) Für  $f = \text{unverändert}$  gilt diejenige Stützbelastung, welche der Gleichung entspricht:

$$\sin \omega \cos \omega p^{\text{II}} - (1 + \sin^2 \omega) p^{\text{I}} - \text{tg} \omega^3 p = 0,$$

und das ist die Belastung:

$$p = p_0 \cdot e^{\frac{1 - \cos \omega}{\cos \omega}}.$$

Hierbei ist  $S = \frac{pr}{1 + \cos \omega}$ ,  $R = H = \frac{pr \cos \omega}{1 + \cos \omega}$ .

Entwickelt man  $e^{\frac{1 - \cos \omega}{\cos \omega}}$  als Reihe, so erhält man:

$$p = p_0 \left\{ \frac{1}{\cos \omega} + \dots \right\}.$$

Da bei gleichbleibender Wandstärke für genügend flache Schalen das Eigengewicht gegeben ist durch  $p = \frac{p_0}{\cos \omega}$ , so ist die flache Parabelschale von gleichbleibender Wandstärke die Stützschaale ihres Eigengewichtes.

**Stützschaalen von unveränderlicher Wandstärke**

haben allgemein die Verteilung der inneren Stützkräfte:

$$xR = \int S dx; \quad \frac{dR}{dx} = \frac{S - R}{x}.$$

Durch diese Gleichung wird im Verein mit den allgemeinen Gleichungen

$$Sx \sin \omega = \int p x dx$$

$$p \cos \omega^2 = \frac{S}{\rho} + \frac{R \sin \omega}{x}$$

die Beziehung der Schale von gleichbleibender Wandstärke zu ihrer Stützbelastung festgestellt.

**Stützschaalen mit unveränderlichem wagerechten Schub.**

Für Schalen mit unverändertem Schub  $H = C$  ist die Stützbelastung gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{p}{C} = \frac{1}{\rho \cos \omega^3} + \frac{1}{\rho_1 \cos \omega} = \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx},$$

während die Wandung die Entwicklung hat:

$$f = f_0 \cos \omega e^{-\int \frac{\operatorname{tg}^2 \omega dx}{x}}$$

oder

$$\log \operatorname{nat} \left[ \frac{f}{f_0 \cos \omega} \right] = - \int \frac{\operatorname{tg}^2 \omega dx}{x}.$$

Beispielsweise ist die Schale der Gleichungen

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{\sin \omega}}; \quad x = 2 \sqrt{\sin \omega} r; \quad y = r \int \sqrt{\sin \omega} d\omega$$

bei einer Wandstärke  $f = f_0 \cos \omega^{\frac{3}{2}}$  die Stützschaale der Belastung

$$p \equiv \frac{\sqrt{\sin \omega} (2 + \cos \omega^2)}{\cos \omega^3}.$$

Der Meridianbogen  $s$  einer solchen Schale kann stets ohne jede Rechnung einfach gezeichnet werden, indem  $\rho = \frac{\rho_1}{2}$  stets zeichnerisch vorliegt.

Die Schale  $\varrho = 2\varrho_1$ ,  $\varrho = r \sin \omega$ ;  $x = \frac{r \sin^2 \omega}{2}$  ist für  $f = f_0 \cos \omega^3$  die Stützschaale der Belastung  $p \equiv \frac{(1 + 2 \cos \omega^2)}{\sin \omega \cos \omega^3}$  bei konstantem Schube.

Die Schale des Meridianbogens der Parabelevolute  $\varrho = e \frac{\sin \omega}{\cos \omega^4}$  ist bei konstantem Schub, bei der Schalenstärke  $f = f_0 \cos \omega e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$  die Stützschaale der Belastung  $p \equiv \text{ctg } \omega$ .

#### Stützschaalen von gleichem Widerstande.

Es gelten die Werte:

$$S = R = \frac{\varrho \varrho_1 \cos^2 \omega}{\varrho + \varrho_1} \cdot p; \quad f \equiv S.$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Beziehung zwischen der Stützlast und der Formgestaltung der Schale:

$$p \frac{\varrho \varrho_1^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\varrho + \varrho_1} = \int p x dx = \int p \varrho \varrho_1 \sin \omega \cos \omega d\omega.$$

Setzen wir  $\frac{\varrho \varrho_1^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\varrho + \varrho_1} = F$ , so erhalten wir durch Ableitung und Teilung durch  $pF$ :

$$\frac{dp}{p} + \frac{dF}{F} = \frac{\varrho \varrho_1 \sin \omega \cos \omega d\omega}{F}$$

und daraus:

$$\log \text{nat} \left[ \frac{p \varrho \varrho_1^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{C \cdot (\varrho + \varrho_1)} \right] = \int \frac{(\varrho + \varrho_1) d\omega}{\varrho_1 \sin \omega \cos \omega}.$$

Für Kugel- und Parabelschale erhalten wir daraus die bereits oben angeführten Werte  $p = \frac{p_0}{\cos \omega^4}$ ,  $p = \frac{(1 + \cos^2 \omega)}{2 \cos^2 \omega} e^{\frac{1}{2}\omega^2}$ .

Für  $\varrho = n\varrho_1 = r \sin \omega^{n-1}$  erhalten wir beispielsweise:

$$p = \frac{C \cdot \sin \omega^{1-n}}{\cos \omega^{n+3}}, \quad f = \frac{f_0}{\cos \omega^{n+1}}.$$

#### Stützschaalen von unveränderlicher Ringspannung.

Ist  $R = C$ , so gilt die Gleichung

$$d[xH] = C ds.$$

Ist die Schale nur mit Flächenlast  $p$  belastet, so folgt daraus durch Integration:

$$xH = Cs; \quad S = \frac{s}{x \cos \omega} \cdot C,$$

und es ergeben sich die Werte:

$$p = \frac{p_0 r}{2 \varrho_1 \cos^2 \omega} \left\{ \frac{s}{\varrho \sin \omega \cos \omega} + 1 \right\},$$

$$\log \text{nat} f = \int \left( 1 - \frac{s}{x \cos \omega} \right) \frac{dx}{x}.$$

Beispielsweise ergeben sich für die Parabelschale die Werte:

$$p = p \left\{ \frac{\alpha + 3 \sin \alpha \operatorname{Cof} \alpha}{4 \sin \alpha} \right\}; \quad f = f_0 e^{\frac{\alpha \operatorname{Cof} \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{(\alpha^2 + \sin^2 \alpha)}{4}}$$

**Stützschalen von unveränderlicher Meridianspannung  $S$  auf die Längeneinheit**

haben die Stützbelastung:

$$p = C \left\{ \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \right\} = \frac{p_0 r}{2} \left\{ \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \right\}$$

und die Entwicklung der Wandung:

$$\log \operatorname{nat} \left( \frac{f}{Rx} \right) \equiv \int \frac{-d\omega}{(\cos^2 \omega - \frac{\varrho_1}{\varrho} \sin^2 \omega) \frac{\varrho_1}{\varrho} \operatorname{tg} \omega}.$$

Daher ist beispielsweise die Parabelschale der Wandstärke

$$f = f_0 \cos \omega^4 e^{-\operatorname{tg}^2 \omega - \frac{\operatorname{tg}^4 \omega}{4}}$$

die Stützschale der Belastung

$$p = p_0 \frac{\cos \omega (1 + \cos^2 \omega)}{2}$$

bei den Spannungen  $S = \frac{p_0 r}{2}$ ;  $R = \frac{p_0 r}{2} \cos \omega^4$ .

**Stützschalen, deren Hauptspannungen  $S, R$  sich verhalten wie die Krümmungshalbmesser  $\varrho, \varrho_1$ .**

Ist  $\frac{S}{R} = \frac{\varrho}{\varrho_1}$  dann gelten die Gleichungen

$$p = \frac{p_0 r^2}{\varrho \varrho_1 \cos \omega^4}; \quad \log \operatorname{nat} (f \varrho \cos^2 \omega) = \int \left( 1 - \frac{\varrho}{\varrho_1} \right) \frac{dx}{x}$$

$$R = \frac{p_0 r^2}{2 \varrho \cos^2 \omega}; \quad S = \frac{p_0 r^2}{2 \varrho_1 \cos^2 \omega}.$$

Für Kugel- und Parabelschale erhalten wir daraus die bereits oben betrachteten Werte.

Für  $\varrho = \frac{r}{\sin \omega}$  erhalten wir beispielsweise die im Scheitel verschwindenden Werte  $p \equiv \frac{\sin \omega}{\cos \omega^4}$ ;  $f = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\cos^2 \omega}$ .

**Offene Sphäroidschalen als Stützschalen ringförmiger Außenbelastung am Kopfe.**

Die Sphäroidschale der Leitlinie  $\varrho = -\varrho_1$  (Fig. 5) ist bei gleichbleibender Wandung  $f = f_\alpha = \text{konstant}$  die Stützschale der Ringlast  $P = 2\pi a S$  mit gleichbleibenden Werten  $S = R = \text{konstant}$ .

Allgemein erfordert eine solche Stützschale der Leitlinie der Gleichung  $\varrho = -n\varrho_1$ ,  $n > 0$ , die Entwicklung der Wandung

$$\frac{f}{f_a} = \left(\frac{a}{e_1}\right)^{n-1} = \sin \omega^{n^2-1} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1-n^2}{n}}.$$

Für  $n = 1$  bleibt die Wandung konstant, für  $n \leq 1$  nimmt  $f$  zu oder ab. Für  $n = 2$  haben wir beispielsweise die parabolische Schale, welche die abnehmende Wandstärke

$$f = f_a \cdot \frac{a}{\rho}$$

erfordert.

## Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch.

Von H. BLASIUS in Hamburg.

1. **Träger gleichen Widerstandes.** Die übliche Berechnung der Träger, welche das Moment im gefährlichen Querschnitt für die Wahl der Querschnittsabmessungen benutzt, arbeitet bekanntlich nicht mit der größtmöglichen Materialersparnis, da sie im Interesse der Einfachheit der Herstellung einen über die ganze Länge gleichmäßigen Querschnitt annimmt. Die Formeln für „Träger gleichen Widerstandes“ (Hütte XX. Aufl. Bd. I, S. 463ff.) geben die Trägerform für größte Materialersparnis an, wenn Belastungen senkrecht zur Trägerachse gegeben sind. Die Gleichung entsteht hier einfach aus der Forderung, daß das Widerstandsmoment in jedem Querschnitt den kleinsten zulässigen Wert erhält, der aus dem Moment der gegebenen Lasten unmittelbar zu berechnen ist.

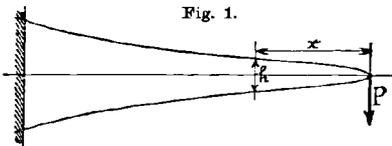


Fig. 1.

hält, der aus dem Moment der gegebenen Lasten unmittelbar zu berechnen ist.

In der Auflösung schwieriger, aber doch noch mit derselben Gleichung zu lösen sind die Fälle, wo auch das Eigengewicht des Trägers berücksichtigt wird: Ein Träger von rechteckigem Querschnitt konstanter Breite  $b$  und veränderlicher Höhe  $h$  (Fig. 1) hat das Widerstandsmoment  $W = \frac{1}{6}bh^2$ . Er sei links eingespannt und rechts mit  $P$  belastet, dann lautet die Gleichung wie sonst:

$$k_B \cdot W = M$$

$$\frac{1}{6} k_B b h^2 = P x + \int_0^x \gamma b h(\xi)(x - \xi) d\xi.$$

Die *Auflösung* dieser Integralgleichung für  $h(x)$  erfordert zunächst zweimalige Differentiation nach  $x$ , um das Integral fortzuschaffen. Man erhält eine Differentialgleichung für  $h$ :

$$\frac{k_B}{6\gamma} \frac{d^2(h^2)}{dx^2} = h$$

oder allgemeiner:

$$k_B \cdot \frac{d^2 W}{dx^2} = \gamma b h = \text{Gewicht pro Längeneinheit.}$$

Die weitere Auflösung geschieht, indem man  $h^2$  als unabhängige,  $x$  als abhängige Veränderliche einführt. Man erhält dann die Lösung durch Quadraturen. Für  $P = 0$  erhält man

$$h = \frac{\gamma}{2k_B} x^2$$

als Form des Trägers, der so dünn ist, daß er nur sein Eigengewicht trägt.

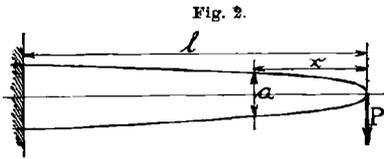
**2. Träger kleinster Durchbiegung.** Eine andere Aufgabe über Träger veränderlichen Querschnittes ist von G. Kull gelöst worden (Hütte XX Aufl. Bd. I, S. 467 — Dinglers Polytechn. Journal 1906 S. 481), nämlich die Berechnung von Trägern kleinster Durchbiegung bei gegebener Materialmenge. Die Durchbiegung ergibt sich aus der Differentialgleichung der Biegelinie:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M,$$

wobei das Moment  $M$  als Funktion von  $x$  bekannt, das Trägheitsmoment  $J$  dagegen noch zu bestimmen ist.

In der genannten Arbeit setzt der Verfasser z. B. bei rechteckigem Querschnitt die Höhe proportional zu einer Potenz  $x^n$  und integriert dann die Durchbiegung  $f$  bei zunächst noch unbestimmtem  $n$ . Die Ausrechnung des Wertes  $n$  für kleinstes  $f$  ist dann eine einfache Minimaufgabe.

Dieses Verfahren ist nicht einwandfrei, da man ja von vornherein garnicht weiß, ob die Querschnittsabmessungen als Funktion von  $x$  gerade eine Potenzfunktion werden. Man muß auch die Funktionsform unbestimmt lassen, und hat also nicht *eine* Größe  $n$  aus der Minimumbedingung zu bestimmen, sondern *unendlich viele*, nämlich den Wert der Querschnittsabmessung an *jedem* Punkte der Länge. Da die Ergebnisse der Arbeit trotzdem richtig geworden sind, so wäre kein Grund, die Einschränkung auf eine Unbekannte anzugreifen; aber es erscheint mir zur Erläuterung der nachher bei der Knickformel an-



zuwendenden Methoden vorteilhaft, die vorliegende Aufgabe genauer durchzuführen für den Träger von kreisförmigem Querschnitt mit Einzellast  $P$  (Fig. 2).

**3. Berechnung von Durchbiegung und Materialverbrauch.** Die Differentialgleichung der Biegelinie  $y(x)$  ist hier:

$$E \frac{\pi a^4}{64} \frac{d^2 y}{dx^2} = Px.$$

Die Integration muß durchgeführt werden bei gänzlich unbestimmtem Durchmesser  $a(x)$  ( $a$  Funktion von  $x$ )

$$\frac{E\pi}{64P} \cdot \frac{dy}{dx} = \int_l^x \frac{x dx}{a^4}.$$

Die untere Grenze  $l$  steht da mit Rücksicht auf die Einspannung bei  $x = l$ . Nochmalige Integration liefert:

$$\frac{E\pi}{64P} \cdot y = \int_l^x dx \int_l^x \frac{x}{a^4} dx.$$

Die Durchbiegung am Ende  $f$  ist also:

$$\frac{E\pi}{64P} \cdot f = \int_l^0 dx \int_l^x \frac{x}{a^4} dx.$$

Durch partielle Integration kann das doppelte Integral beseitigt werden:

$$= \left[ x \int_l^x \frac{x}{a^4} dx \right]_l^0 - \int_l^0 x \cdot \frac{x}{a^4} dx.$$

Der integrierte Teil verschwindet gerade an beiden Grenzen und es bleibt:

$$\frac{E\pi}{64P} f = \int_0^l \frac{x^2}{a^4} dx,$$

während der Materialverbrauch den Wert hat:

$$M = \frac{\pi}{4} \int_0^l a^2 dx.$$

Hierdurch sind die Durchbiegung  $f$  und der Materialverbrauch  $M$  ausgedrückt als bestimmte Integrale über die noch unbekannte Funktion  $a$  von  $x$ ; und dieses  $a(x)$  ist so zu bestimmen, daß  $f$  einen kleinsten Wert erhält, wenn  $M$  konstant gehalten wird:

**4. Minimumregel.** Eine Funktion  $Y$  von einer *einzelnen Größe*  $X$  hat nun einen größten oder kleinsten Wert, wenn der Differentialquotient Null ist, d. h. wenn bei einer kleinen Änderung von  $X$  sich  $Y$  *nicht* ändert. Genau so werden wir hier eine Änderung der *Funktion*  $a$  vornehmen, und verlangen, daß die daraus auszurechnende Änderung von  $f$  Null ist. Ein Unterschied gegen die einfache Minimaufgabe besteht aber darin, daß man hier die Abhängigkeit des  $f$  von der Wahl der *Funktion*  $a(x)$  und nicht mehr von einer einzelnen Größe untersucht: Die Änderung (Variation)  $\delta a$  von  $a$  ist als eine Größe zu betrachten, die an jedem Punkte  $x$  willkürlich vorgenommen werden kann, nur die Materialmenge soll dabei ungeändert bleiben. Wir bezeichnen die Änderung mit  $\delta$ , weil der Buchstabe  $d$  bereits für das Fortschreiten längs der Koordinate  $x$  gilt, was natürlich scharf unterschieden werden muß. Um dies hervorzuheben, nennt man die Funktion  $\delta a$  von  $x$  bzw.  $\delta f$  die „Variation“ von  $a(x)$  bzw. von  $f$ . Wenn nun  $a$  sich an jedem Punkte um  $\delta a$  ändert, so ist der Zuwachs des Materials:

$$\delta M = \frac{\pi}{4} \int_0^l 2a \cdot \delta a \cdot dx$$

$\delta M$  ist Null zu setzen:

$$\int_0^l a \cdot \delta a \cdot dx = 0 \quad \text{Nebenbedingung.}$$

Dies ist die einzige Bedingung, der die sonst völlig willkürlichen Werte von  $\delta a$  unterliegen. Es sind immer noch *unendlich viele* Möglichkeiten, die Funktion  $a(x)$  zu „variieren“, darin besteht der Unterschied gegen die einfache Minimaufgabe.

Die Variation  $\delta f$  ist nun:

$$\frac{E\pi}{64P} \cdot \delta f = \int_0^l x^2 \left( -\frac{4}{a^5} \delta a \right) dx,$$

nach der Minimumregel ist  $\delta f$  Null zu setzen:

$$\int_0^l \frac{x^2 \delta a}{a^5} dx = 0 \quad \text{Minimumregel,}$$

dabei kann an jedem Punkte  $x$  ein ganz beliebiger Wert von  $\delta a$  angenommen werden, wenn nur obige Nebenbedingung erfüllt ist.

**5. Auflösung der Minimumbedingung.** Um die Tragweite der so aufgestellten Bedingung zu übersehen, denken wir uns die Integrale als Summen, und nehmen z. B. 4 Punkte  $x$  an —  $dx$  sei konstant — dann muß sein:

$$\frac{x_1^2}{a_1^5} \delta a_1 + \frac{x_2^2}{a_2^5} \delta a_2 + \frac{x_3^2}{a_3^5} \delta a_3 + \frac{x_4^2}{a_4^5} \delta a_4 = 0 \quad \text{Minimumregel}$$

für ganz beliebig gewählte Werte von  $\delta a_1$ ,  $\delta a_2$ ,  $\delta a_3$  und  $\delta a_4$ , wenn nur diese  $\delta a$  der einen Bedingung genügen:

$$a_1 \delta a_1 + a_2 \delta a_2 + a_3 \delta a_3 + a_4 \delta a_4 = 0 \quad \text{Nebenbedingung.}$$

Würden die  $\delta a$  alle willkürlich sein, so müßte in der Minimumregel jedes einzelne Glied  $\frac{x^2}{a^5}$  Null werden. Diese  $\frac{x^2}{a^5}$  spielen ja die Rolle der Differentialquotienten  $\frac{\delta f}{\delta a}$ . Sie bringen den Einfluß jedes Funktionswertes  $a(x)$  auf  $f$  zum Ausdruck. Da nun aber nach der Nebenbedingung  $\delta a_4$  nicht mehr willkürlich ist, wenn  $\delta a_1$ ,  $\delta a_2$ ,  $\delta a_3$  gewählt sind, so ist zunächst  $\delta a_4$  aus der Nebenbedingung auszurechnen und in die Minimumregel einzusetzen, worauf dann die so entstehenden drei Faktoren von  $\delta a_1$ ,  $\delta a_2$  und  $\delta a_3$  Null zu setzen sind. Führt man diese einfache Rechnung durch, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\frac{x_1^2}{a_1^6} = \frac{x_2^2}{a_2^6} \quad \frac{x_2^2}{a_2^6} = \frac{x_3^2}{a_3^6} \quad \frac{x_3^2}{a_3^6} = \frac{x_4^2}{a_4^6}$$

oder allgemein:

$$\frac{x^2}{a^6} = C.$$

$$a = c \cdot \sqrt[3]{x}$$

in Übereinstimmung mit der von Kull erhaltenen Formel. Der Unterschied besteht nur darin, daß dort der Nachweis des Minimums nur für eine Änderung der Potenz  $n$  von  $x$  geführt ist, während hier die Variation  $\delta a$  von  $a$  an jedem Punkte  $x$  völlig freigestellt war.

#### 6. Andere Darstellung für die Auflösung der Minimumbedingung.

Die Richtigkeit der Auflösung der Minimumbedingung, die wir soeben an den Summen von vier Gliedern klar gemacht haben, kann man nachträglich auch in folgender Weise einsehen: Es soll die aus  $\delta f = 0$  hervorgegangene Summe

$$\int_0^l \frac{x^2}{a^5} \cdot \delta a \cdot dx = 0 \quad \text{Minimumbedingung}$$

Null sein für alle  $\delta a$ , für die die Gleichung  $\delta M = 0$ :

$$\int_0^l a \cdot \delta a \cdot dx = 0 \quad \text{Nebenbedingung}$$

erfüllt ist. Wenn nun:

$$\frac{x^2}{a^6} = C \cdot a$$

ist, so ist das Integral der Minimumbedingung gleich dem mit  $C$  multiplizierten Integral der Nebenbedingung:

$$\int_0^l \frac{x^2}{a^6} \delta a \, dx = C \int_0^l a \delta a \, dx.$$

Es ist also in der Tat das erste Integral *immer dann* Null, wenn auch das zweite Null ist. — Wenn  $\frac{x^2}{a^6} = C \cdot a$  ist, so ist  $\delta f = 0$  für alle diejenigen Variationen  $\delta a$  der Funktion  $a(x)$ , für die  $\delta M = 0$  ist. — Die Durchbiegung ist ein Minimum bei allen Veränderungen des Durchmessers  $a(x)$ , bei denen das Materialgewicht nicht geändert, sondern nur anders verteilt wird.

### Knickfestigkeit.

**7. Eulersche Formel.** Bei der Aufgabe, eine Stütze größter Knickfestigkeit zu konstruieren, ist das Querschnittsgesetz so zu wählen, daß bei gegebener Belastung  $P$  die Knicklänge ein Maximum erreicht, ohne daß der Materialverbrauch geändert wird. Die Differentialgleichung der Biegelinie ist hier

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0.$$

Bei *konstantem* Trägheitsmoment  $J$  ist das Integral dieser Gleichung, die Gestalt der Knicklinie:

$$y_1 = c_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EJ}} x.$$

Sind  $x = 0$  und  $x = l$  die Grenzen des Stabes, so tritt der Grenzfall der Knickung dann ein, wenn dieses Integral  $y_1$ , welches bei  $x = 0$  Null wird, bei  $x = l$  seine nächste Nullstelle erreicht. Die Bedingung hierfür ist die Eulersche Formel:

$$\frac{Pl^2}{EJ} = \pi^2.$$

Das andere Integral der Differentialgleichung

$$y_2 = c_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EJ}} x$$

kommt für den Fall der Knickung ohne Einspannung nicht in Betracht.

**8. Verfahren bei veränderlichem Querschnitt.** Hat der Stab veränderlichen Querschnitt, so ist das Trägheitsmoment  $J$  Funktion der Querschnittsdimensionen und damit von  $x$ , so daß die Differentialgleichung allgemein nicht zu integrieren ist. Wir können also nicht, wie vorher die Durchbiegung, so jetzt die Knicklänge als Integral über  $J(x)$

darstellen und dieses Integral variieren; sondern es muß ohne vorherige Integration der Differentialgleichung die Bedingung dafür gesucht werden, daß die Variation der Knicklänge Null ist.

Die Variation  $\delta J$  des Trägheitsmomentes an jedem Punkte  $x$  veranlaßt eine Variation  $\delta y$  der Knicklinie (Fig. 3). Für  $\delta y$  stellt man die Gleichung durch Variation der Gleichung für  $y$  auf. Die Integration dieser Gleichung für  $\delta y$  wird sich als möglich erweisen. Nun soll durch die Variation der Querschnitte die Knicklänge nicht geändert

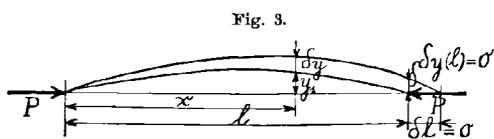


Fig. 3.

werden. Diese Bedingung bringen wir dadurch zum Ausdruck, daß  $\delta y$  bei  $x=0$  und  $x=l$  Null wird, denn mit  $\delta y(l)$  wird zugleich  $\delta l=0$

(Fig. 3!). Daß  $\delta y$  bei  $x=0$  Null wird, ist durch Integrationskonstante zu erreichen, daß es auch bei  $x=l$  Null wird, ist die gesuchte Minimumbedingung.

Als Nebenbedingung erscheint, wie vorhin, die Forderung, daß die Variation des Materialinhaltes Null ist.

### 9. Variation der Biegelinie. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EJ(x)} y = 0$$

schreiben wir kürzer:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + F(x) \cdot y = 0 \quad \text{Gleichung für die Biegelinie } y(x),$$

und indem wir die einzelnen Glieder dieser Gleichung variieren, erhalten wir eine Differentialgleichung für die Variation  $\delta y$  der Biegelinie:

$$\frac{d^2 \delta y}{dx^2} + F(x) \cdot \delta y = -y \cdot \delta F(x) \quad \text{Gleichung für } \delta y.$$

Die Integrale der Gleichung für  $y$ , deren Ausdruck in  $x$  wir freilich noch nicht kennen, schreiben wir:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

wobei  $y_1$  die Gestalt der Knicklinie sein soll, so daß also für  $x=0$  und  $x=l$ :  $y_1 = 0$ ,  $y_2 \neq 0$  ist.

Das Integral  $\delta y$  der inhomogenen Differentialgleichung wird durch die Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  der homogenen Gleichung in folgender Formel, die u. a. durch die Methode der Variation der Konstanten zu gewinnen ist, ausgedrückt:

$$\delta y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - \int_0^x z(x\xi) \cdot y_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi.$$

Der „Einflußkoeffizient“  $z(x\xi)$  gibt an, welchen Anteil der Wert  $-y_1 \delta F$  der „Störungsfunktion“ an der Stelle  $\xi$  an dem Wert von  $\delta y$  an der Stelle  $x$  hat; er ist hier:

$$z(x\xi) = \frac{y_1(x)y_2(\xi) - y_2(x)y_1(\xi)}{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_2'(\xi)y_1(\xi)},$$

wobei übrigens der Nenner eine Konstante ist.

**10. Minimumbedingung.** Nun soll  $\delta y = 0$  sein für  $x = 0$  und  $x = l$ .  $y_1$  verschwindet an beiden Stellen; darin liegt eben die Besonderheit des Knickproblems, daß die Integrationskonstante  $c_1$  unwendbar wird.  $c_2$  muß Null sein, damit  $\delta y$  für  $x = 0$  Null wird. Und nun gibt  $\delta y = 0$  für  $x = l$  die Bedingung:

$$\int_0^l z(l\xi) \cdot y_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi = 0.$$

Wenn diese Gleichung besteht, ist auch (Fig. 3) die Variation der Knicklänge Null. Setzt man in  $z(x\xi)$  für  $x$  den Wert  $l$  ein, so wird wegen  $y_1(l) = 0$ :

$$z(l\xi) = \frac{-y_2(l)}{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_2'(\xi)y_1(\xi)} \cdot y_1(\xi),$$

also proportional zu  $y_1(\xi)$ , und wenn man konstante Faktoren als unwesentlich fortläßt, so erhält die Minimumbedingung die Form:

$$\int_0^l y_1^2 \cdot \delta F \cdot d\xi = 0. \quad \text{Minimumbedingung.}$$

### Kreisförmiger Querschnitt.

**11. Auflösung der Minimum- und Nebenbedingung.** Wir müssen nun die Querschnittsform des Knickstabes festsetzen und haben hier verschiedene Fälle zu unterscheiden:

- a. Ähnliche (z. B. kreisförmige) Querschnitte.
- b. Rechteck: Breite konstant, Höhe veränderlich.
- c. Rechteck: Höhe konstant, Breite veränderlich.

Im ersten Falle sei der Durchmesser des Stabes  $a(x)$ , dann ist also  $J = \frac{\pi}{64} a^4$  und in der Differentialgleichung  $y'' + F(x) \cdot y = 0$  ist

$$F = \frac{P}{EJ} = \frac{64P}{\pi E a^4}.$$

In die Minimumbedingung:

$$\int_0^l y_1^2 \cdot \delta F \cdot dx = 0$$

190 Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit usw.

ist

$$\delta F = - \frac{64 P}{\pi E} \cdot \frac{4 \delta a}{a^5}$$

einzusetzen, wobei konstante Faktoren keine Rolle spielen. Es ist also:

$$\int_0^l y_1^2 \frac{\delta a}{a^5} dx = 0 \quad \text{Minimumbedingung.}$$

Der Materialverbrauch soll konstant gehalten werden, es ist also wie in Absatz 3 und 4:

$$M = \frac{\pi}{4} \int_0^l a^2 dx$$

$$\int_0^l a \cdot \delta a \cdot dx = 0. \quad \text{Nebenbedingung.}$$

Aus den Überlegungen von Absatz 5 und 6 folgt daher:

$$\frac{y_1^2}{a^5} \text{ proportional zu } a.$$

Dies schreiben wir am besten:

$$y_1 = c_1 \left( \frac{a}{a_0} \right)^3.$$

Den Größen  $c_1$  und  $a_0$  werden wir im weiteren Verlauf der Rechnung die Bedeutung von  $y$  bzw.  $a$  in der Mitte des Knickstabes beilegen.

**12. Differentialgleichung für  $a(x)$ .** Wir haben damit, noch ohne die Differentialgleichung integriert zu haben, für die Biegelinie  $y_1$  und den Durchmesser  $a$  zwei Gleichungen erhalten. Erstens die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{64 P}{\pi E a^4} y_1 = 0 \quad \text{Differentialgleichung der Knicklinie}$$

nebst den Grenzbedingungen:

$$y_1 = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und} \quad x = l$$

und zweitens die Minimumbedingung:

$$\frac{y_1}{c_1} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \quad \text{Minimumbedingung.}$$

Es gelingt nun, nachdem  $a(x)$  — wenn auch nur in Beziehung zu  $y_1(x)$  — festgelegt ist, die Differentialgleichung zu integrieren. Zunächst wird eine Unbekannte,  $y_1$ , eliminiert, dann bleibt:

$$\frac{d^2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^3}{dx^2} + \frac{64 P}{\pi E a_0^4} \frac{a_0}{a} = 0.$$

$\frac{64P}{\pi E a_0^4}$  ist  $= \frac{P}{E J_0}$ , wenn  $J_0$  das Trägheitsmoment in der Mitte des Knickstabes ist. Das Verhältnis  $\frac{a}{a_0}$  bezeichnen wir mit  $\eta$ , dann ist:

$$\frac{d^2(\eta^3)}{dx^2} + \frac{P}{E J_0} \cdot \frac{1}{\eta} = 0 \quad \text{Differentialgleichung für } \eta$$

$$\eta = \frac{a}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{y_1}{c_1}}$$

nebst den Grenzbedingungen:

$$\eta = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und } x = l.$$

**13. Lösung der Differentialgleichung.** Für solche Gleichungen:

$$\frac{d^2(\eta^3)}{dx^2} + \frac{P}{E J_0} \frac{1}{\eta} = 0,$$

in denen  $x$  selbst nicht mehr vorkommt, betrachtet man besser  $x$  als Funktion von  $\eta$ . Wir bezeichnen vorübergehend  $\eta^3 = \xi$  als unabhängige,  $x$  als abhängige Veränderliche,  $\frac{dx}{d\xi} = x'$  als Differentialquotient, dann ist:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x'}$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d \frac{1}{x'}}{dx} = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d \frac{1}{x'}}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d \left( \frac{1}{x'^2} \right)}{d\xi},$$

und hiermit kann man die Differentialgleichung einmal integrieren.

$$\frac{1}{2} \frac{d \left( \frac{1}{x'^2} \right)}{d\xi} = - \frac{P}{E J_0} \frac{1}{\eta}$$

$$\frac{1}{x'^2} = - \frac{2P}{E J_0} \int \frac{d\xi}{\eta} = - \frac{6P}{E J_0} \int \eta \cdot d\eta = \frac{3P}{E J_0} (C - \eta^2).$$

Die zweite Integration führt ebenfalls auf bekannte Integrale:

$$\sqrt{\frac{3P}{E J_0}} \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{C - \eta^2}}$$

$$\sqrt{\frac{3P}{E J_0}} x = \int_0^\eta \frac{3\eta^2 d\eta}{\sqrt{C - \eta^2}}.$$

Die Integrationskonstante  $C$  der ersten Integration ist  $= 1$  zu setzen, weil  $\eta$  schon als Verhältnis von  $a$  zum größten Wert  $a_0$  eingeführt worden war. Das Integral ist nach bekannten Formeln auszuführen:

$$\sqrt{\frac{P}{E J_0}} x = \sqrt{3} \cdot \int_0^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \arcsin \eta - \frac{1}{2} \eta \sqrt{1 - \eta^2} \right). \quad \text{Integral.}$$

Diese Formel, deren Auflösung nicht nötig ist, liefert mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $\eta$ :

$$\eta = \frac{a}{a_0} = \sqrt[3]{\frac{y_1}{c_1}}$$

sowohl das Querschnittsgesetz, als auch die Biegelinie.

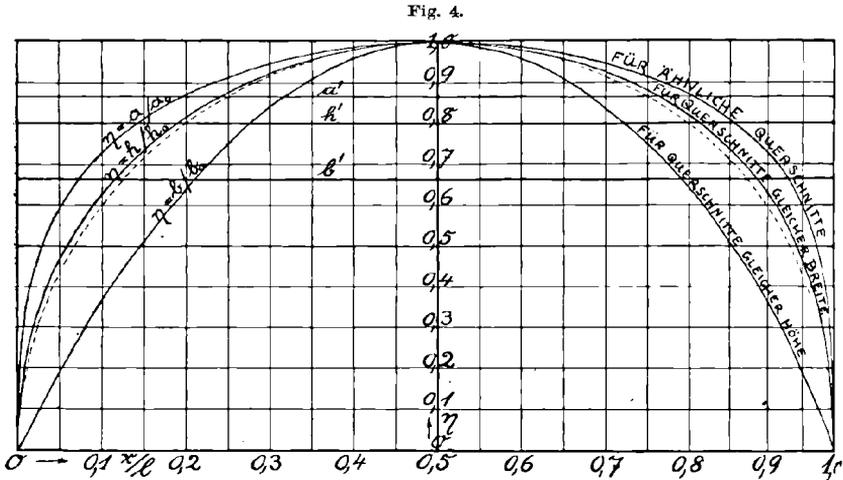
14. **Knicklänge.**  $\eta$  wird zuerst Null für  $x = 0$ . Wächst dann  $\eta$  bis  $+1$  und nimmt wieder auf Null ab, so erreicht  $\eta \sqrt{1 - \eta^2}$  wieder den Wert Null,  $\arcsin \eta$  den Wert  $\pi$ . Wir haben also für die Knicklänge  $l$ :

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_0}} l = \sqrt{3} \frac{\pi}{2},$$

oder die „Eulersche Formel“:

$$\frac{Pl^2}{EJ_0} = \frac{3\pi^2}{4}, \quad \text{Knickformel,}$$

wobei  $J_0$  das Trägheitsmoment des mittleren stärksten Querschnittes ist.



Mit dem so berechneten Werte von  $l$  heißt die Gleichung der Querschnittsform:

$$\frac{x}{l} = \frac{\arcsin \eta - \eta \sqrt{1 - \eta^2}}{\pi}$$

$$\eta = \frac{a}{a_0}$$

Diese Kurve ist in Fig. 4 dargestellt. Zahlwerte sind:

$\frac{x}{l} = \left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,5 \end{array} \right.$	0,4	0,3	0,2	0,1	0
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\eta = 1,000$	0,987	0,947	0,870	0,725	0

15. Vergleich mit gleichmäßigen Stäben. Die Knicklast  $P$  ist nach unserer Formel

$$\frac{Pl^2}{EJ_0} = \frac{3\pi^2}{4}$$

nur  $\frac{3}{4}$  der Last, die dem gleichmäßig durchgeführten  $J_0$  entspricht; aber natürlich darf unser Knickstab nicht hiermit, sondern mit dem gleichmäßigen Stab von gleichem Materialverbrauch verglichen werden.

Es ist:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{4} \int_0^l a^2 dx = \frac{\pi}{4} a_0^2 \int_0^1 \eta^2 \frac{dx}{d\eta} \cdot d\eta \\ &= a_0^2 l \cdot \int_0^1 \frac{\eta^4 d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{3\pi}{16} a_0^2 l. \end{aligned}$$

Der gleichmäßige Träger von gleichem  $M$  hat den Durchmesser  $a'$ :

$$\frac{\pi}{4} a'^2 l = \frac{3\pi}{16} a_0^2 l$$

$$a' = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} a_0,$$

das Trägheitsmoment:

$$J' = \frac{\pi}{64} a'^4 = \frac{9}{16} J_0.$$

Seine Knicklast  $P'$  folgt aus:

$$\frac{P' l^2}{EJ'} = \pi^2,$$

so daß

$$\frac{P}{P'} = \frac{3}{4} \frac{J_0}{J'} = \frac{4}{3}$$

ist. Durch die geänderte Materialverteilung ist also die Knickfestigkeit um  $\frac{1}{3}$  erhöht. Mehr kann man mit demselben Material überhaupt nicht erreichen. Dieselben Verhältnisse gelten nicht nur für kreisförmige, sondern für beliebige *ähnliche* Querschnitte.

Rechteckiger Querschnitt von gleicher Breite und veränderlicher Höhe.

16. Minimumbedingung. Beim rechteckigen Querschnitt sei die Breite  $b$  konstant, die Höhe  $h$  Funktion von  $x$ , dann ist in der Differentialgleichung  $y'' + F(x) \cdot y = 0$

$$F = \frac{P}{EJ} = \frac{12P}{Eb^3h^3}$$

$$\delta F \text{ proportional zu } \frac{\delta h}{h^4}.$$

Die Minimumbedingung  $\int_0^l y_1^2 \delta F dx = 0$  ergibt:

$$\int_0^l y_1^2 \frac{\delta h}{h^4} dx = 0.$$

Als Nebenbedingung folgt aus  $M = b \int_0^l h \, dx$

$$\int_0^l \delta h \cdot dx = 0$$

und daher gilt:

$$y_1^2 \text{ proportional zu } h^4$$

als zweite Gleichung für die 2 Unbekannten  $y_1$  und  $h$  neben:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{12P}{Eb h^5} y_1 = 0.$$

**17. Integration.** Einführung von  $\eta$ :

$$\eta = \frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{y_1}{c_1}}$$

liefert die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2(\eta^2)}{dx^2} + \frac{P}{EJ_0} \frac{1}{\eta} = 0.$$

Zur Durchführung der Integration wird vorübergehend  $x$  abhängige,  $\eta^2 = \zeta$  unabhängige Veränderliche,  $x' = \frac{dx}{d\zeta}$ . Dann wird wie in Absatz 13:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{x'^2}\right)}{d\zeta} &= -\frac{2P}{EJ_0} \cdot \frac{1}{\eta} \\ \frac{1}{x'^2} &= -\frac{2P}{EJ_0} \int \frac{2\eta \, d\eta}{\eta} = \frac{4P}{EJ_0} (1 - \eta), \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante mit Rücksicht auf die Bedeutung des Verhältnisses  $\eta$  bestimmt ist. Die zweite Integration ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\frac{P}{EJ_0}} x &= \int_0^l \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\eta}} \\ \sqrt{\frac{P}{EJ_0}} x &= \int_0^\eta \frac{\eta \, d\eta}{\sqrt{1-\eta}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1-\eta}^3 - 2\sqrt{1-\eta} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**18. Knicklänge.** Es ist  $x=0$  für  $\eta=0$  und positives Vorzeichen der Wurzeln. Geht man mit  $\eta$  von Null über 1 nach Null zurück, so ändern die Wurzeln ihre Vorzeichen, und wir erhalten für den Ort  $x=l$  der zweiten Nullstelle:

$$\sqrt{\frac{P}{EJ_0}} l = -\frac{2}{3} + 2 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

oder die Eulersche Formel:

$$\frac{Pl^2}{EJ_0} = \frac{64}{9}.$$

Durch Einführung von  $l$  erhält die Gleichung des Stabes die Form:

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4} \sqrt{1-\eta}^3 - \frac{3}{4} \sqrt{1-\eta} + \frac{1}{2}$$

$$\eta = \frac{h}{h_0}.$$

Zahlwerte sind (vgl. Fig. 4):

$\frac{x}{l} = \left\{ \begin{array}{cccccc}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\eta =$	1,000	0,982	0,927	0,818	0,630	0

Zum Vergleich ist in Fig. 4 gestrichelt der Kreis eingetragen, der in nicht-reduzierten Koordinaten  $x$  und  $h$  einen elliptischen Längsschnitt ergeben würde. Man sieht, daß die beiden bisher gewonnenen Kurven erheblich völliger sind.

19. Vergleich. Die Materialmenge ist:

$$M = b \cdot \int_0^l h dx = b h_0 \int_0^1 \eta \frac{dx}{d\eta} d\eta$$

$$= \frac{3}{4} b h_0 l \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1-\eta}} = \frac{4}{5} b h_0 l.$$

Der Stab von gleichmäßigem Querschnitt und gleichem  $M$  hat also die Höhe:

$$h' = \frac{4}{5} h_0,$$

das Trägheitsmoment:

$$J' = \frac{64}{125} J_0$$

und die Knicklast:

$$\frac{P' l^2}{E J'} = \pi^2.$$

Es ist also:

$$\frac{P}{P'} = \frac{64}{9 \pi^2} \cdot \frac{125}{64} = 1,37.$$

Rechteckiger Querschnitt von gleicher Höhe und veränderlicher Breite.

20. Differentialgleichung für die Breite  $b$ . Im Falle des rechteckigen Querschnittes ist in der Gleichung für  $y$  (Absatz 9):

$$F = \frac{12 P}{E h^3 b}$$

$$\delta F \text{ proportional zu } \frac{\delta b}{b^2}.$$

Minimumbedingung:

$$\int_0^l y_1^2 \frac{\delta b}{b^2} dx = 0.$$

Nebenbedingung:

$$\int_0^l \delta b \, dx = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Biegelinie  $y_1$  proportional zur Breite  $b$  wird:

$$\frac{y_1}{c_1} = \frac{b}{b_0} = \eta.$$

Dadurch wird aus der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{12P}{Eh^3 b} y_1 = 0$$

die Gleichung für  $\eta$ :

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{P}{EJ_0} = 0.$$

**21. Integration und Knickformel.** Umformung ist diesmal nicht nötig, weil das zweite Glied konstant geworden ist. Das Integral wird eine einfache Parabel, deren Konstanten so zu normieren sind, daß der Höchstwert für  $\eta$  gleich 1, und daß  $\eta = 0$  für  $x = 0$  wird. Am einfachsten ist es, den hierdurch gegebenen Ansatz (Fig. 4):

$$\eta = 4 \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

in die Differentialgleichung einzusetzen, dann folgt:

$$-\frac{8}{l^2} + \frac{P}{EJ_0} = 0$$

oder die Eulersche Gleichung:

$$\frac{Pl^2}{EJ_0} = 8.$$

**22. Vergleich.** Der Materialverbrauch des parabolischen Querschnittes ist:

$$M = \frac{2}{3} h b_0 l,$$

der Vergleichsstab von gleichmäßigem Querschnitt und gleichem  $M$  hat daher die Breite:

$$b' = \frac{2}{3} b_0,$$

das Trägheitsmoment

$$J' = \frac{2}{3} J_0$$

und die Knickformel:

$$\frac{P'l^2}{EJ'} = \pi^2.$$

Durch die bessere Materialverteilung ist die Knicklast im Verhältnis

$$\frac{P}{P'} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{3}{2} = 1,216$$

erhöht.

**Andere Knickfälle.**

**23. Minimumbedingung.** Dieselben Querschnittsgesetze gelten auch für andere Einspannungsbedingungen. Im Falle der Fig. 5 ist die Differentialgleichung dieselbe wie früher:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + F(x) \cdot y_1 = 0$$

$$F(x) = \frac{P}{EJ(x)}$$

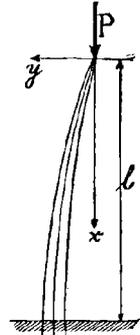
mit den Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad y_1 = 0$$

$$\text{für } x = l \quad y_1' = 0.$$

Die Gleichung für die Variation:

$$\frac{d^2 \delta y}{dx^2} + F \cdot \delta y = - y_1 \delta F$$



wird auch hier gelöst durch den Einflußkoeffizienten  $z(x\xi)$  (Absatz 9)

$$\delta y = c_1 y_1 - \int_0^x \frac{y_1(x)y_2(\xi) - y_2(x)y_1(\xi)}{y_1(\xi)y_2(\xi) - y_2(\xi)y_1(\xi)} y_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi,$$

wobei auch hier das  $c_2 y_2$  wegen der ersten Grenzbedingung fehlt. So dann muß zum Ausdruck gebracht werden, daß

$$\text{für } x = l \quad \delta y' = 0$$

wird. Es ist dazu der Differentialquotient von  $\delta y$  zu bilden, wobei der Differentialquotient nach der oberen Grenze des Integrals Null wird:

$$\delta y' = c_1 y_1' - \int_0^x \frac{y_1'(x)y_2(\xi) - y_2'(x)y_1(\xi)}{y_1(\xi)y_2(\xi) - y_2(\xi)y_1(\xi)} y_1(\xi) \cdot \delta F(\xi) \cdot d\xi.$$

Für  $x = l$  verschwindet  $y_1'(l)$ , der Nenner ist konstant, es bleibt:

$$\delta y'(l) = \frac{y_2'(l)}{\text{Nenner}} \cdot \int_0^l y_1^2 \cdot \delta F \cdot d\xi$$

und daher dieselbe Minimumbedingung:

$$\int_0^l y_1^2 \cdot \delta F \cdot d\xi = 0.$$

Der Unterschied gegen früher bestand nur darin, daß wegen der geänderten Grenzbedingung  $y_2'(l)$  als Faktor vor das Integral tritt, was auf das Nullwerden keinen Einfluß hat.

Es folgen daher dieselben Integrale für  $y_1$  und für die Querschnittsform, nur ist, den geänderten Grenzbedingungen entsprechend, die Knicklänge halb so groß als vorhin; ebenso wie im Falle des gleichmäßigen Trägers.

## Zur Frage nach der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken.

Von ST. TIMOSCHENKO in St. Petersburg.

### § 1. Annäherungsformeln.

Bei der Berechnung von Bau- und Maschinenkonstruktionen kommt man manchmal in die Lage, die bruchfesten Dimensionen von Stäben bestimmen zu müssen, auf welche Stöße ausgeübt werden. In der Praxis löst man diese Aufgabe näherungsweise auf Grund äußerst elementarer Erwägungen. Gewöhnlich vernachlässigt man das Trägheitsverhalten der einzelnen Volumenelemente des gestoßenen Körpers und macht die Annahme, daß zwischen der am Stoßort entstehenden Kraft und den dadurch hervorgerufenen Deformationen dieselbe Abhängigkeit wie bei statischer Belastung besteht: innerhalb der Elastizitätsgrenzen wird die Kraft am Stoßort von einer Deformation begleitet sein, die mit ihr proportional wächst, und das Anwachsen der Deformation dauert solange, bis die ganze lebendige Kraft des stoßenden Körpers in potentielle Energie der Deformation verwandelt ist.

Sei  $\lambda$  die Verrückung desjenigen Punktes, auf den der stoßende Körper unmittelbar wirkt, dann erhalten wir auf Grund der oben gemachten Annahmen für die potentielle Energie der Deformation den Ausdruck  $\frac{\alpha \lambda^2}{2}$ . Hier ist  $\alpha$  ein Koeffizient, der von den elastischen Eigenschaften und den Dimensionen des gestoßenen Systems abhängt;  $\alpha$  ist gleich der Kraft, die angreifen muß, um die Verrückung  $\lambda = 1$  zu erzeugen. Die maximale Verrückung  $\lambda_d$  beim Stoß erhält man durch Gleichsetzen der potentiellen Energie mit der anfänglichen kinetischen Energie des stoßenden Körpers:

$$(1) \quad \frac{\alpha \lambda_d^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Diese elementare Lösung (wir wollen sie im Folgenden „erste Näherung“ nennen) die Joung<sup>2)</sup> gegeben hat, zieht gar nicht die Trägheit des stoßenden Systems in Betracht und gibt deshalb für  $\lambda_d$  einen zu großen Wert. Später schlug Hodgkinson<sup>3)</sup> bei der Verarbeitung seiner Ver-

1) Zur Vereinfachung wollen wir im Folgenden annehmen, daß die Geschwindigkeit  $v$  horizontal ist und somit die Arbeit der Schwerkraft bei der Verrückung wegfällt.

2) A course of Lectures on natural Philosophy and mechanical Arts, 1807.

3) Eation Hodgkinson, Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway-Structure, 1849, Appendix A page 4.

suche, die er an Balken mit unterstützten Enden machte, vor, bei der Berechnung der verlorenen kinetischen Energie von der Annahme auszugehen, daß die stoßende Last am Stoßort (in der Mitte des Balkens) eine Masse trifft, die gleich der halben Masse des Balkens ist. Eine theoretische Begründung für dieses Verfahren gab Homersham Cox.<sup>1)</sup> Die Aufgabe der Bestimmung der dynamischen Durchbiegung eines Balkens zerlegt Cox in zwei Teile: 1. Bestimmung der Geschwindigkeitsänderung des stoßenden Körpers unmittelbar nach dem Zusammenstoß und 2. Bestimmung der dynamischen Durchbiegung des Balkens durch Gleichsetzen der kinetischen Energie des Systems unmittelbar nach dem Stoß mit der potentiellen Energie der Durchbiegung. Zur Lösung des ersten Teils der Aufgabe macht Cox die Annahme, daß bei dem Zusammenstoß die Balkenachse sich in dieselbe Kurve durchbiegt, wie bei einer statischen Belastung, die im Stoßpunkt angreift. Dann ist die Geschwindigkeit  $v_1$  des stoßenden Körpers unmittelbar nach dem Zusammenstoß gegeben durch

$$v_1 = \frac{m}{m + kM} v.$$

Hier ist  $kM$  die „reduzierte Masse“ des Balkens. Der Koeffizient  $k$  hängt ab von der Art, wie die Balkenenden befestigt sind, und von der Lage des Stoßpunktes. Im speziellen Fall eines an den Enden gestützten Balkens und eines Stoßes auf die Mitte des Balkens ist  $k = \frac{17}{35}$ . Diese Größe ist ganz nahe gleich der, die Hodgkinson seinen Berechnungen zugrunde legte. Nachdem man so die Geschwindigkeitsänderung des stoßenden Körpers bestimmt hat, finden wir für die kinetische Energie unmittelbar nach dem Stoß den Ausdruck.

$$\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m + kM}.$$

Durch Gleichsetzen mit der potentiellen Energie der Deformation erhalten wir für  $\lambda_d$  die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\alpha \lambda_d^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m + kM},$$

welche eine zweite Annäherung für die Lösung der Stoßaufgabe darstellt. Sie weicht desto stärker von (1) ab, je beträchtlicher die Balkenmasse im Vergleich zur Masse des stoßenden Körpers ist. Die Näherungslösungen (1) und (2) beruhen auf der Annahme, daß die Verrückung

1) Cambr. Phil. Trans. vol. IX Part I pp. 73—78. History of the Elasticity ... vol. I. S 771.

der einzelnen Punkte des gestoßenen Systems beim Stoß dieselben sind wie bei statischer Belastung. In Wirklichkeit ist der Stoß immer von Schwingungen begleitet, die stark die Verrückungen des gestoßenen Systems beeinflussen und unter gewissen Bedingungen einen beträchtlichen Teil der kinetischen Energie verzehren. Deshalb wendeten sich naturgemäß die weiteren Untersuchungen über den Stoß hauptsächlich der Erforschung der Schwingungen zu, die beim Zusammenstoß entstehen. Das Problem der longitudinalen Schwingungen, die beim Stoß in prismatischen Stäben entstehen, wurde schon von Navier gelöst. Die Schwingungen der Stäbe beim *transversalen* Zusammenstoß wurde näher von St. Venant betrachtet.<sup>1)</sup> Beide Forscher gingen von der Annahme aus, daß im Moment der Berührung der stoßende Körper seine Geschwindigkeit nur demjenigen Querschnitt des Stabes mitteilt, in welchem der Stoß stattfindet, so wie daß, weil die Stoßwirkung sich im ersten Moment nur auf eine kleine Masse ausbreitet, keine merkliche Geschwindigkeitsänderung stattfindet, die Geschwindigkeit erst nach Maßgabe der Ausbreitung der Stoßwirkung abnimmt. Indem St. Venant<sup>2)</sup> weiter noch die Annahme macht, daß die Berührung zwischen der stoßenden Last und dem Balken wenigstens während der halben Periode der Grundschwingungen andauert, reduziert er die Aufgabe über die Wirkung eines Stoßes auf einen Balken auf das Problem der Transversalschwingungen eines prismatischen Balkens, an dem eine Last befestigt ist. Die Lösung dieser Aufgabe erhält man in Gestalt einer unendlichen Reihe. Beschränkt man sich auf die ersten Glieder, so erhält man die oben auf elementarem Weg gewonnene zweite Annäherung (2). Zahlreiche Versuche über den *longitudinalen* Stoß prismatischer Stäbe haben die Ergebnisse von Navier und St. Venant nicht bestätigt, und eine genauere Untersuchung<sup>3)</sup> der Deformation am Stoßpunkt zeigte, daß die lokalen Deformationen einen sehr wesentlichen Einfluß auf die Stoßdauer besitzen.

## § 2. Genauere Untersuchung des transversalen Stoßes.

Das Problem des transversalen Stoßes auf einen prismatischen Balken wurde trotz seiner großen praktischen Bedeutung nicht näher untersucht, und wir bringen im Folgenden einen Versuch einer näherungs-

1) Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, trad. p. St. Venant, Note finale du § 61.

2) Navier, Résumé des leçons . . . Historique pp. CCXXXII.

3) Sears, On the longitudinal impact, Trans. Camb. Phil. Soc. 1908 C. Ramsauer, Annalen d. Physik Bd. 30, 1909.

weisen Lösung dieser Aufgabe in Verbindung mit der Untersuchung des Einflusses der lokalen Deformation. Diese Lösung beruht auf einer Überlegung, die schon Hertz gelegentlich seiner Untersuchung über den Zusammenstoß von Kugeln aussprach. Hertz nahm an, daß wir wahrscheinlich das Gesetz des Zusammenstoßes für beliebige Körper erhalten könnten, wenn wir die statische Deformation in denjenigen Teilen des Körpers, die in unmittelbarer Nähe der Stoßstelle liegen, mit den allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der übrigen Teile des Körpers verbinden.

Wir wollen diese allgemeinen Erwägungen anwenden auf das Studium der Wirkung eines Stoßes auf einen Balken mit gestützten Enden. Um die lokale Deformation finden zu können, muß man vorweg eine Annahme machen über die Gestalt der Oberfläche des stoßenden Körpers und des Balkens an der Stoßstelle: die stoßende Last möge Kugelgestalt haben, der Balken sei von einer Ebene begrenzt normal zur Geschwindigkeitsrichtung der stoßenden Last. Nach der Formel von Hertz ist dann die Annäherung  $\alpha$  der stoßenden Körper, infolge der lokalen Deformation gleich

$$(3) \quad \alpha = k P^{\frac{2}{3}}.$$

Hier ist  $k = \left(\frac{9}{16} \frac{1}{\mu r^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $\mu$  der Schubelastizitätsmodul,  $r$  der Radius der Oberfläche des stoßenden Körpers und  $P$  der Druck an der Stoßstelle. Die inneren Schwingungen, die beim Stoß in der fallenden Last entstehen, wollen wir vernachlässigen<sup>1)</sup>; die erzwungenen Schwingungen des Balkens hingegen, die er unter der Wirkung des variabeln Druckes  $P$  ausführt, können auf Grund der bekannten Lösungen für das Problem der erzwungenen Schwingungen prismatischer Stäbe betrachtet werden. Wenn wir zur Vereinfachung annehmen, daß der Stoß in der Mitte des Balkens erfolgt, so kann die Durchbiegung an der Stoßstelle durch folgende Formel dargestellt werden<sup>2)</sup>:

$$(4) \quad y = \sum_{i=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{i^2} \cdot \frac{l^2}{b \pi^2} \cdot \frac{2g}{ql} \int_0^i P \sin \frac{b \pi^2 i^2}{l^2} (t - t_1) dt_1.$$

Hier bedeutet  $l$  die Spannweite des Balkens,  $q$  sein Gewicht für die Längen-

1) Diese Schwingungen haben, wie die Rechnungen Rayleighs zeigten, keinen merklichen Einfluß auf die Stoßdauer und auf die Größe der beim Stoß entstehenden Spannungen.

2) St. Timoschenko, Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe, Zeitschr. für Mathem. u. Phys. Bd. 59, 1911, S. 163.

einheit,  $\frac{b\pi^2}{l^2}$  die Frequenz der Grundschwingung des Balkens,  $P$  den variablen Druck an der Stoßstelle, der eine Funktion der Zeit ist.

Zur Bestimmung des Druckes  $P$  und der Durchbiegung  $y$  des Balkens muß man die Schwingung des Balkens zusammen mit der Bewegung des stoßenden Körpers betrachten. Seine anfängliche Geschwindigkeit  $v$  wird dank der Gegenwirkung von  $P$  allmählich verkleinert und der seit dem Moment der ersten Berührung vom Körper zurückgelegte Weg kann dargestellt werden durch:

$$(5) \quad y_1 = vt - \frac{1}{m_0} \int_0^t dt \int_0^t P dt.$$

Andererseits ist dieser Weg auch gleich  $\alpha + y$ , und wir erhalten also folgende Gleichung zur Bestimmung von  $P$

$$(6) \quad vt - \frac{1}{m_0} \int_0^t dt \int_0^t P dt = k(P^3)_t + \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{b\pi^2} \frac{2g}{ql} \int_0^t P \sin \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-t_1) dt_1.$$

Zur näherungsweisen Lösung dieser Gleichung teilen wir das Zeitintervall  $0 - t$  in gleiche Intervalle von der Länge  $\tau = \frac{t}{n}$  und nehmen an, daß innerhalb eines solchen Intervalles der Druck  $P$  sich nicht ändert, sondern die jeweils konstanten Werte  $P_1, P_2, P_3, \dots$  besitzt. Dann ist:

$$\int_0^t P \sin \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-t_1) dt_1 \cong \frac{l^2}{b\pi^2 i^2} \left\{ P_1 \left[ \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} t \right] + P_2 \left[ \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-2\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) \right] + \dots \right\}.$$

Die Einsetzung in den Ausdruck für die Durchbiegung (4) ergibt:

$$(7) \quad y = \frac{l^4}{b^2 \pi^4} \cdot \frac{2g}{ql} \left\{ P_1 \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} t}{i^4} + P_2 \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{\cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-2\tau) - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} (t-\tau)}{i^4} + \dots + P_n \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{1 - \cos \frac{b\pi^2 i^2}{l^2} \tau}{i^4} \right\}$$

Um die Berechnung der Durchbiegung zu erleichtern, schicken wir eine Tabelle (A) voraus für die Werte von

$$\sum_{i=1,3,5,\dots} \cos \frac{\frac{b\pi^2 i^2}{l^2} m \tau}{i^4}$$

für verschiedene  $m$  sowie für ihre ersten Differenzen, berechnet unter der Voraussetzung, daß

$$\tau = \frac{T}{360} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{l^2}{b \pi^2},$$

d. h. daß das einzelne Intervall  $\frac{1}{360}$  der Periode  $T$  der Grundschwingung des Balkens bildet.

Tabelle A.

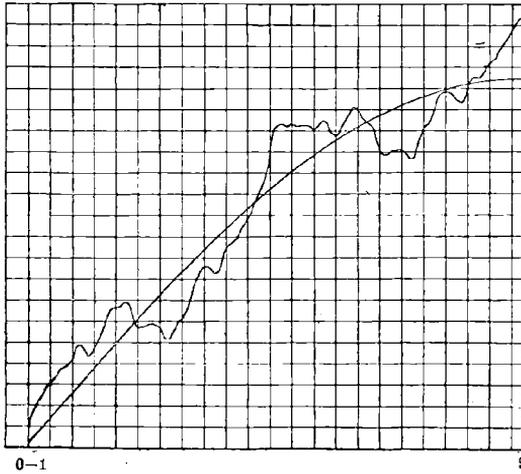
$m =$	$\Sigma$	$\Delta$	$m =$	$\Sigma$	$\Delta$	$m =$	$\Sigma$	$\Delta$
0	1,01465	$91 \cdot 10^{-5}$	31	0,86019	$826 \cdot 10^{-5}$	61	0,47254	$1556 \cdot 10^{-5}$
1	1,01374	182 "	32	0,85193	857 "	62	0,46698	1538 "
2	1,01192	223 "	33	0,84336	853 "	63	0,44160	1501 "
3	1,00969	274 "	34	0,83483	824 "	64	0,42659	1413 "
4	1,00695	305 "	35	0,82659	866 "	65	0,41246	1384 "
5	1,00390	337 "	36	0,81793	946 "	66	0,39862	1404 "
6	1,00053	376 "	37	0,80847	970 "	67	0,38458	1408 "
7	0,99677	382 "	38	0,79877	992 "	68	0,37050	1410 "
8	0,99295	417 "	39	0,78885	1048 "	69	0,35640	1383 "
9	0,98878	483 "	40	0,77837	1088 "	70	0,34257	1364 "
10	0,98395	470 "	41	0,76749	1140 "	71	0,32893	1430 "
11	0,97925	432 "	42	0,75609	1203 "	72	0,31463	1503 "
12	0,97493	471 "	43	0,74406	1267 "	73	0,29960	1534 "
13	0,97022	518 "	44	0,73139	1397 "	74	0,28426	1606 "
14	0,96504	594 "	45	0,71742	1514 "	75	0,26820	1675 "
15	0,95910	659 "	46	0,70228	1527 "	76	0,25145	1685 "
16	0,95251	664 "	47	0,68701	1518 "	77	0,23460	1680 "
17	0,94587	673 "	48	0,67183	1527 "	78	0,21780	1643 "
18	0,93914	691 "	49	0,65656	1519 "	79	0,20137	1635 "
19	0,93223	635 "	50	0,64137	1524 "	80	0,18502	1709 "
20	0,92588	573 "	51	0,62613	1526 "	81	0,16793	1756 "
21	0,92015	577 "	52	0,61087	1507 "	82	0,15037	1750 "
22	0,91438	585 "	53	0,59580	1538 "	83	0,13287	1780 "
23	0,90853	587 "	54	0,58042	1549 "	84	0,11507	1820 "
24	0,90266	573 "	55	0,56493	1489 "	85	0,09687	1841 "
25	0,89693	516 "	56	0,55004	1473 "	86	0,07846	1890 "
26	0,89177	522 "	57	0,53531	1514 "	87	0,05956	1922 "
27	0,88655	586 "	58	0,52017	1559 "	88	0,04034	1976 "
28	0,88069	616 "	59	0,50458	1604 "	89	0,02058	2058 "
29	0,87453	668 "	60	0,48854	1600 "	90	0	2058 "
30	0,86785	766 "	61	0,47254		91	-0,02058	
31	0,86019							

Wir merken noch an, daß die Werte der in der Tabelle angeführten Differenzen proportional sind den Balkendurchbiegungen in den entsprechenden Zeitmomenten, welche vom Druck  $P_1$  herrühren, der während des ersten Intervalls wirkte. Die Veränderung dieser Durch-

biegung während eines Viertels der Periode der Grundschwingung ist in Fig. 1 dargestellt.

Die Bestimmung der Werte von  $P$  geschieht auf folgende Weise. Unter Vernachlässigung der Änderungen, welche die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers während des ersten Intervalls erfährt, erhalten

Fig. 1.



wir für die Annäherung der stoßenden Körper den Wert  $\alpha = v\tau$  und berechnen mit Hilfe von Gl. (3) leicht den entsprechenden Wert  $P'$  von  $P$ . Zur Erzielung einer größeren Genauigkeit nehmen wir nun an, daß während des ersten Intervalls der Druck den konstanten Wert  $P_1 = \frac{P}{2}$  hat und finden mit Hilfe der Gl. (5) und (7) einen genaueren Wert für die Annäherung  $\alpha = y_1 - y$  und also auch für den Druck  $P'$

am Ende des ersten Intervalles. Zur Bestimmung des Druckes  $P''$  am Ende des zweiten Intervalles nehmen wir zunächst an, daß der Druck während des ersten und zweiten Intervalles konstant und gleich  $P'$  ist, dann finden wir leicht für die Verrückung der Last  $y_1$  und die Durchbiegung des Balkens  $y$  die entsprechenden Werte und bestimmen daraus leicht  $\alpha$  und  $P''$ . Einen genaueren Wert von  $P''$  erhalten wir, indem wir annehmen, daß während des ersten Intervalles ein Druck  $\frac{P'}{2}$  herrscht und im zweiten Intervall ein Druck  $\frac{P'}{2} + \frac{P''}{2}$ . Nachdem wir mit Hilfe von (5) und (7) die zweite Näherung für den Druck  $P''$  am Ende des zweiten Intervalles erhalten haben, gehen wir zum nächsten Intervall über und wiederholen die Rechnungen in derselben Ordnung.

### § 3. Beispiele.

Als Beispiel bringen wir die Berechnung für einen kleinen Balken, dessen Grundschwingung die Periode  $1 \cdot 10^{-3}$  Sekunden besitzt. Bei entsprechender Wahl des Querschnittes kann ein solcher Balken verschiedene Längen besitzen. Wenn wir einen Stahlbalken nehmen (etwa mit  $E = 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{kl}}{\text{cm}^2}$  und dem spezifischem Gewicht 7,96) vom Querschnitt

1 × 1 cm, so bestimmt sich die entsprechende Länge aus der Formel für die Periode der Grundschwingung.

$$(8) \quad T = \frac{2l^3}{\pi} \sqrt{\frac{g}{EIg}}$$

Wir erhalten so  $l = 15,35$  cm und dementsprechend für die Masse des Balkens

$$M = \frac{15,35 \cdot 0,00796}{981}$$

Diesen Balken soll nun in seiner Mitte eine Stahlkugel mit dem Radius  $r = 1$  cm und der Masse

$$m = \frac{4}{3} \pi \frac{0,00796}{981}$$

stoßen, die mit der Geschwindigkeit  $v = 1$  cm/sec auftrifft. Die erste Annäherung (1) gibt in diesem Falle für die dynamische Durchbiegung  $f_d^I$  den Wert  $1,18 \cdot 10^{-4}$  cm. Die zweite Annahme gibt  $f_d^{II} = 0,702 \cdot 10^{-4}$  cm.

Teilen wir die Stoßdauer in Intervalle von der Länge  $\tau = \frac{T}{180} = 0,05556 \cdot 10^{-4}$  sec., so schreibt sich die Gl. (7) folgendermaßen:

$$(a) \quad y = 0,405 \cdot 10^{-3} \left\{ P_1 \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{\cos \frac{(n-1)i^2\pi}{90} - \cos \frac{ni^2\pi}{90}}{i^4} + \right. \\ \left. + P_2 \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{\cos \frac{(n-2)i^2\pi}{90} - \cos \frac{(n-1)i^2\pi}{90}}{i^4} + \dots + P_n \sum_{i=1,3,5,\dots} \frac{1 - \cos \frac{i^2\pi}{90}}{i^4} \right\} \text{ cm.}$$

Nehmen wir ferner für Stahl an  $\mu = 9 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup> und geben (3) die Gestalt:

$$(b) \quad P = \frac{16}{9} \mu r^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{3}{2}} = 16 \cdot 10^5 \alpha^{\frac{3}{2}} \text{ kl.}$$

Die Geschwindigkeitsabnahme der Kugel während des  $n$ -ten Intervalles bestimmt sich aus der Formel:

$$(c) \quad (\dot{y}_1)_n - (\dot{y}_1)_{n-1} = -\frac{P_n \tau}{m} = -P_n \cdot 0,1634 \text{ cm/sec.}$$

Unter Benützung von (a) (b) (c) und allmählich von jedem Intervall zum folgenden übergehend, erhalten wir für die den Stoßverlauf kennzeichnenden Größen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte.

Tabelle B.

$t$	$\dot{y}_1$ cm/sec	$y_1$ cm	$y$ cm	$\alpha$ cm	$P$ kg
0	1 cm/sec	0	0	0	0
$\tau$	0,9983	0,0555 · 10 <sup>-4</sup> cm	0,00012 · 10 <sup>-4</sup> cm	0,0554 · 10 <sup>-4</sup> cm	0,0209 kg
2 $\tau$	0,9918	0,1107 "	0,00079 "	0,1099 "	0,0582 "
3 $\tau$	0,9784	0,1654 "	0,00197 "	0,1634 "	0,1055 "
4 $\tau$	0,9568	0,2192 "	0,00445 "	0,2147 "	0,1590 "
5 $\tau$	0,9262	0,2715 "	0,00844 "	0,2631 "	0,216 "
6 $\tau$	0,8867	0,3218 "	0,01765 "	0,3041 "	0,268 "
7 $\tau$	0,8380	0,3697 "	0,0219 "	0,3478 "	0,328 "
8 $\tau$	0,7803	0,4146 "	0,0318 "	0,3828 "	0,379 "
9 $\tau$	0,7149	0,4561 "	0,0442 "	0,4119 "	0,423 "
10 $\tau$	0,6430	0,4938 "	0,0591 "	0,4347 "	0,458 "
11 $\tau$	0,5660	0,5273 "	0,0763 "	0,4510 "	0,484 "
12 $\tau$	0,4856	0,5565 "	0,0956 "	0,4609 "	0,501 "
13 $\tau$	0,4032	0,5812 "	0,1166 "	0,4643 "	0,507 "
14 $\tau$	0,3207	0,6013 "	0,1385 "	0,4628 "	0,504 "
15 $\tau$	0,2393	0,6169 "	0,1613 "	0,4555 "	0,492 "
16 $\tau$	0,1607	0,6273 "	0,1847 "	0,4426 "	0,471 "
17 $\tau$	0,0860	0,6341 "	0,2087 "	0,4254 "	0,444 "
18 $\tau$	0,0161	0,6369 "	0,2327 "	0,4041 "	0,411 "
19 $\tau$	-0,0480	0,6360 "	0,2576 "	0,3784 "	0,372 "
20 $\tau$	-0,1055	0,6317 "	0,2822 "	0,3493 "	0,330 "
21 $\tau$	-0,1558	0,6244 "	0,3076 "	0,3168 "	0,285 "
22 $\tau$	-0,1986	0,6146 "	0,3332 "	0,2814 "	0,239 "
23 $\tau$	-0,2341	0,6026 "	0,3573 "	0,2453 "	0,195 "
24 $\tau$	-0,2619	0,5888 "	0,3872 "	0,2016 "	0,145 "
25 $\tau$	-0,2820	0,5737 "	0,4160 "	0,1577 "	0,100 "
26 $\tau$	-0,2951	0,5577 "	0,4461 "	0,1114 "	0,060 "
27 $\tau$	-0,3020	0,5411 "	0,4780 "	0,0631 "	0,025 "
28 $\tau$	-0,3043	0,5243 "	0,5107 "	0,0137 "	0,003 "

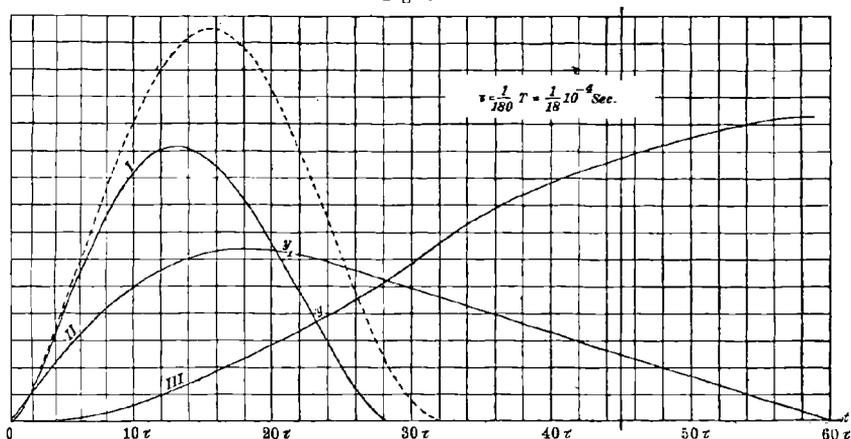
Während des 29. Intervalles hört die Berührung zwischen Kugel und Balken auf. Die Kugel springt mit der Geschwindigkeit von 0.305 cm/sec. ab, die Balkendurchbiegung fährt fort zu wachsen. Zur Bestimmung der maximalen Durchbiegung sind mit Hilfe der Formel (a) noch die folgenden Werte von  $y$  berechnet.

$t$	$y$	$t$	$y$
36 $\tau$	0,788 · 10 <sup>-4</sup> cm	56 $\tau$	1,115 · 10 <sup>-4</sup> cm
45 $\tau$	0,973 "	57 $\tau$	1,121 "
54 $\tau$	1,096 "	58 $\tau$	1,124 "
55 $\tau$	1,107 "	59 $\tau$	1,123 "

Die Ergebnisse der Rechnung sind in Fig. 2 dargestellt.

Die Kurve (1) gibt uns das Gesetz, nach dem der Druck  $P$  wächst. Zum Vergleich ist punktiert dieselbe Kurve für den Stoß der Kugel an einer festen Ebene dargestellt. Wir sehen, infolge der Durchbiegung des Balkens vermindert sich der Druck  $P$  und die Druckkurve wird unsymmetrisch bezüglich der mittleren Ordinate. Auch die Stoßdauer vermindert sich im vorliegenden Fall und ist annähernd gleich  $0,155 T$ . Die Kurve II gibt den Verlauf von  $y_1$ , III den Verlauf der Durchbiegung des Balkens. Ihr Maximum liegt bei  $t = 58\tau$  und beträgt  $1,124 \cdot 10^{-4}$  cm. Der Vergleich dieses Ergebnisses mit den früher angeführten Näherungswerten  $f_d^I$  und  $f_d^{II}$  zeigt, daß die Durchbiegung

Fig. 2.

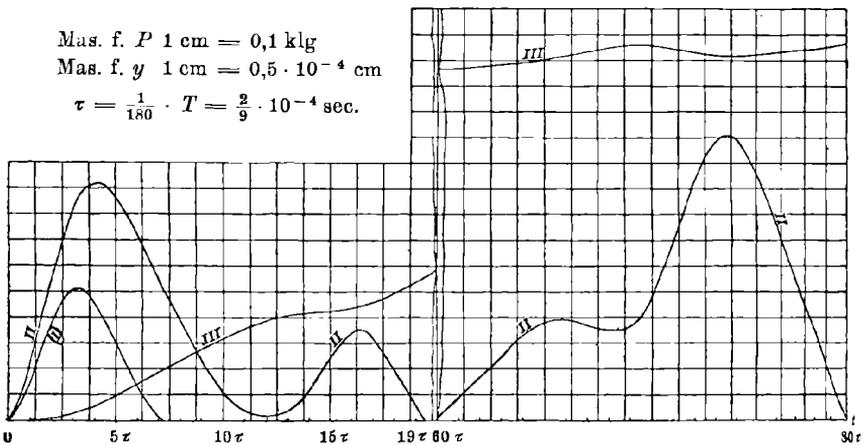


wirklich um 5% kleiner ist als diejenige, welche die erste Annäherung liefert. Die zweite ist im vorliegenden Falle weniger befriedigend. Wenn man bemerkt, daß die kinetische Energie der wegspringenden Kugel nur 9,2% ihres anfänglichen Wertes beträgt, so kann man schließen, daß fast die ganze übrige kinetische Energie sich in die Biegeenergie des Balkens umgesetzt hat. Auf die kinetische Energie der Schwingungen des Balkens kommt im Moment des Maximums der Durchbiegung nur ein verschwindend kleiner Betrag.

Als zweites Beispiel wurde ein leichter biegsames Stäbchen betrachtet mit der Grundschwingungsperiode  $T = 4 \cdot 10^{-3}$  Sekunden, nämlich ein Stahlstäbchen von demselben Querschnitt wie früher aber zweimal so lang. Hier wurden die Rechnungen für Kugeln mit dem Radius  $r_1 = 1$  cm bzw.  $r_2 = 2$  cm durchgeführt mit  $v = 1$  cm/sec. Es ergab sich, daß der Stoßverlauf wesentlich verschieden ist je nach dem Verhältnis zwischen der Masse der Kugel und der des Balkens. Im Falle der kleineren Kugel war  $m : M = 0,136$ . Das Anwachsen des Druckes ver-

läuft hier ganz so wie im früher betrachteten ersten Beispiel. In Fig. 3 ist die Art dieses Verlaufes durch die Kurve I dargestellt. Für die Kugel mit größerem Radius  $m:M = 1,091$  ist der Druckverlauf verwickelter; siehe Kurve II in Fig. 3. Es zeigt sich, daß bei diesem Verhältnis der Massen  $m$  und  $M$  der Vorgang in zwei wiederholte Stöße zerfällt: Die Berührung dauert von  $t = 0$  bis  $t = 19,5\tau$  ( $\tau = \frac{T}{180} = \frac{2}{9} \cdot 10^{-4}$  sec.) und ist wieder vorhanden von  $t = 60\tau$  bis  $t = 80\tau$ . Während des ersten Zusammenstoßes verliert die Kugel rund 0,8 ihrer lebendigen Kraft und setzt ihre Bewegung — nachdem der Balken sich

Fig. 3.



von ihr abgelöst hat — mit einer Geschwindigkeit von rund 0,45 cm/sec fort. Nachdem die Durchbiegung des Balkens durch ein Maximum von rund  $8 \cdot 10^{-4}$  cm hindurchgegangen ist und zurückläuft, beginnt der zweite Zusammenstoß, während dessen die Kugel und der mittlere Querschnitt des Balkens das Vorzeichen ihrer Geschwindigkeit ändern, die Kugel abspringt und die Durchbiegung des Balkens eine Zeit lang noch wächst. Die Änderung der Durchbiegung im Intervall der Berührung von Balken und Kugel ist in Fig. 3 durch Kurve III dargestellt.

Vorläufig beschränken wir uns auf die obigen Zahlenbeispiele. Sie genügen natürlich noch nicht, um auf ihnen irgendeine Formel zur Berechnung von Balkenfestigkeit gegen Stoß aufzubauen; immerhin erhellen sie einigermaßen die physikalische Seite der Erscheinung des Stoßes und gestatten einige allgemeine Schlüsse.

Durch Berücksichtigung der lokalen Deformationen bei der Berührung von stoßender Last und Balken kann man mit Hilfe des obigen

Näherungsverfahren: 1. in jedem einzelnen Fall den Verlauf der Balkendurchbiegung und des Druckes feststellen; 2. die Zeit berechnen, während welcher sich der Balken und die Last berühren. Sie hängt von der Gestalt der Oberflächen der stoßenden Körper an der Berührungsstelle ab und von ihrem Massenverhältnis. Falls die Masse des stoßenden Körpers gegen die des Balkens nicht klein ist, findet wiederholter Zusammenstoß statt. 3. Falls die lokalen Deformationen an der Stoßstelle nicht elastisch sind, können alle Größen, die den Stoßvorgang kennzeichnen, durch dieselbe Näherungsrechnung gefunden werden, nur muß vorweg durch statische Kompression die Abhängigkeit des  $\alpha$  von  $P$  jenseits der Elastizitätsgrenze festgestellt werden.

Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt von der Zahl der Intervalle ab, in welche man die Stoßzeit zerlegt, und von der Genauigkeit, mit der man die Zwischenrechnung vollzieht. Für das I. Beispiel liefert eine Wiederholung der Rechnung mit geringerer Intervallzahl ( $\tau = \frac{1}{12} 10^{-4}$ ) einen Druckverlauf, der von dem früher berechneten nicht stärker als um 1% abweicht. Überhaupt: sobald nicht wiederholte Zusammenstöße stattfinden, gibt schon eine kleine Zahl von Intervallen eine für die Praxis genügende Genauigkeit, und die Berechnung der maximalen Durchbiegung bietet keinerlei Schwierigkeiten. Bei wiederholten Zusammenstößen muß man eine größere Zahl von Intervallen nehmen, der Rechnungsaufwand wächst stark und die Genauigkeit ist geringer.

## Graphische Berechnung von Determinanten beliebiger Ordnung.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

Es kommt vor, daß man von einer Determinante, deren Glieder als Zahlen gegeben sind, den Wert mit keiner größeren Schärfe zu kennen braucht, als er durch Zeichnung sich finden läßt, daß also etwa die Genauigkeit, die den Konstruktionen der darstellenden Geometrie innewohnt, genügt. In einem solchen Fall kann man einen Weg einschlagen, der im folgenden für Determinanten 2ter, 3ter und 4ter Ordnung, und dann allgemein beschrieben werden soll.<sup>1)</sup> Wie gezeigt werden

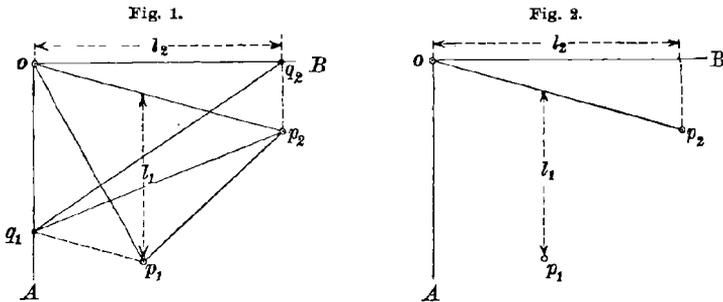
1) Ich bin durchaus nicht der Meinung, daß es zweckmäßig wäre, bei der graphischen Auflösung eines Systems linearer Gleichungen die analytische Lösung mittels Determinanten zugrunde zu legen, also die Determinanten, durch welche sich die Unbekannten ausdrücken lassen, graphisch zu berechnen. Über die nach meinem Dafürhalten zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen graphisch aufzulösen, denke ich mich demnächst in dieser Zeitschrift zu äußern.

wird, kann man eine beliebige Determinante  $n$ -ter Ordnung auf mannigfache Weise als Produkt von  $n$  Längen  $l_1, l_2, \dots, l_n$  darstellen, die sich durch einfache Konstruktionen ergeben. Auf Zeichenpapier, das mit einem quadratischen Liniennetz bedruckt ist, sogenanntem Millimeterpapier, macht sich die Ausführung besonders bequem. Das Produkt der gefundenen Längenzahlen kann man mit dem Rechenschieber ausrechnen<sup>1)</sup>; soll aber der Wert der Determinante als Länge dargestellt werden, so ist eine der bekannten Konstruktionen der elementaren Geometrie anzuwenden, die darauf hinauskommen, wiederholt ein Rechteck mit gegebenen Seiten in ein solches zu verwandeln, von dem eine Seite die Länge eins hat.

a) Determinante zweiter Ordnung

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Wir betrachten  $a_1, b_1$  und  $a_2, b_2$  als die Koordinaten zweier Punkte  $p_1$  und  $p_2$  in einem rechtwinkligen Cartesischen System in der Ebene mit den Achsen  $A$  und  $B$  und dem Ursprung  $o$ . Dann ist bekanntlich



$A$  gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks  $op_1p_2$ , und zwar mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem die Halbstrahlen  $op_1$  und  $op_2$  zu einander liegen, wie die positiven Hälften der Achsen  $A$  und  $B$ , oder nicht. (In Fig. 1 und 2 ist das Zeichen plus.) Ein Dreieck ändert weder Inhalt noch Sinn, wenn man irgend eine seiner Ecken parallel zur gegenüberliegenden Seite um einen beliebigen Betrag verschiebt. Wir verschieben zuerst  $p_1$  parallel zu  $op_2$  bis zur Achse  $A$  nach  $q_1$  und hierauf in dem neuen Dreieck  $oq_1p_2$  die Ecke  $p_2$  parallel zu  $oq_1$  bis zur Achse  $B$  nach  $q_2$ . Dadurch ist das ursprüngliche Dreieck in das bei  $o$

1) Man kann auch nach J. Schnöckels Verfahren die Längen mit einem antilogarithmischen Maßstab messen, wodurch die Multiplikation in Addition verwandelt wird, s. Zeitschrift f. Vermessungswesen Bd. 29 (1900), S. 413.

rechtwinklige Dreieck  $oq_1q_2$  verwandelt worden, dessen doppelter Flächeninhalt soviel Einheiten beträgt, wie das Produkt der Längen  $\overline{oq_1} = l_1$  und  $\overline{oq_2} = l_2$  angibt. Eine solche Länge ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie auf die positive oder negative Hälfte der betreffenden Achse fällt. Man bemerkt, daß  $\overline{oq_1}$  gleich dem parallel zu  $A$  gemessenen, im allgemeinen „schiefen“ Abstand des Punktes  $p_1$  von der Geraden  $op_2$  ist — mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem die Richtung von der Geraden  $op_2$  nach dem Punkt  $p_1$  hin mit der positiven Richtung von  $A$  übereinstimmt oder nicht — sowie  $l_2 = b_2$ , d. h. gleich der Projektion der Strecke  $\overline{op_2}$  auf die Achse  $B$ , positiv oder negativ genommen, je nachdem sie auf die positive oder negative Hälfte von  $B$  fällt. Wir können sagen:

*Die Determinante  $\Delta$  ist gleich dem Produkt aus dem parallel zur ersten Achse gemessenen Abstand des Punktes  $p_1$  von der Geraden  $op_2$  und der Projektion der Strecke  $\overline{op_2}$  auf die zweite Achse.*

Während Fig. 1 zur Erläuterung diente, sind in Fig. 2 alle bei der Ausführung entbehrlichen Linien fortgelassen worden.

Man dürfte auch die Achsen oder irgend zwei der Punkte  $o$ ,  $p_1$  und  $p_2$  vertauschen, oder beides zugleich, so daß  $\Delta$  sich im ganzen auf sechs Arten ausdrücken läßt; jedoch ist das Vorzeichen zu ändern, wenn nur die Achsen oder nur zwei Punkte vertauscht werden.

### b) Determinante dritter Ordnung

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

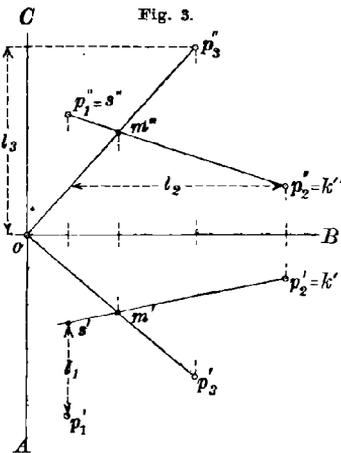
In bezug auf ein räumliches Koordinatensystem, dessen vom Ursprung  $o$  ausgehende Achsen  $A, B, C$  paarweise senkrecht sind, mögen  $a_1, b_1, c_1$  sowie  $a_2, b_2, c_2$  und  $a_3, b_3, c_3$  als die Koordinaten dreier Punkte  $p_1, p_2, p_3$  aufgefaßt werden. Wie man weiß, ist alsdann  $\Delta$  gleich dem 6fachen Rauminhalt des Tetraeders  $op_1p_2p_3$ , mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem die Halbstrahlen  $op_1, op_2, op_3$  zueinander liegen wie die positiven Hälften der Achsen  $A, B, C$  oder nicht. Der Inhalt und der Sinn eines Tetraeders bleiben unverändert, wenn eine beliebige seiner Ecken in der Ebene durch diese Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraeders irgendwie verschoben wird. Wir denken uns  $p_1$  in der Ebene durch diesen Punkt parallel zur Ebene  $op_2p_3$  bis zur ersten Achse nach  $q_1$  verschoben, hierauf in dem neuen Tetraeder  $oq_1p_2p_3$  die Ecke  $p_2$  parallel zur Kante  $oq_1$ , mithin auch parallel zur Seitenfläche  $oq_1p_3$ , bis zu der auf  $A$  senkrechten

Koordinatenebene  $BC$  nach  $q_2$ , und endlich in dem neuen Tetraeder  $oq_1q_2p_3$  die Ecke  $p_3$  parallel zur Kante  $oq_1$  gleichfalls bis zur Ebene  $BC$  nach  $q_3$ . Das zuletzt entstandene Tetraeder  $oq_1q_2q_3$  ist bei  $o$  drei-rechtwinklig, weshalb sein 6 facher Inhalt soviel Einheiten beträgt, wie das Produkt aus der Höhe  $\overline{op_1}$  und dem doppelten Inhalt der Grundfläche  $oq_2q_3$  angibt. Da offenbar  $\overline{op_1}$  gleich dem in der Richtung der Achse  $A$  gemessenen Abstand des Punktes  $p_1$  von der Ebene  $op_2p_3$  ist, so hat man den Satz:

*Die Determinante  $\Delta$  ist gleich dem Produkt aus dem parallel zur ersten Achse gemessenen Abstand des Punktes  $p_1$  von der Ebene  $op_2p_3$  und dem doppelten Inhalt der rechtwinkligen Projektion des Dreiecks  $op_2p_3$  auf die zur ersten Achse senkrechte Koordinatenebene.*

Es ist klar, daß man statt der ersten Koordinatenachse auch die zweite oder dritte nehmen und außerdem die Reihenfolge der Punkte  $o, p_1, p_2, p_3$  beliebig ändern darf; dadurch wird höchstens das Vorzeichen von  $\Delta$  geändert, und zwar bleibt, wie aus bekannten Sätzen der Lehre von den Determinanten hervorgeht, das Vorzeichen erhalten, wenn man die Achsen in der Reihenfolge  $BAC$  oder  $CAB$  statt  $ABC$  nimmt, während bei jeder Vertauschung zweier Achsen oder zweier Punkte ein Zeichenwechsel eintritt.

Durch den aufgestellten Satz ist der Fall b) teilweise auf den Fall a) zurückgeführt worden. Um die Strecken zu bestimmen, als



deren Produkt nach jenem Satz  $\Delta$  sich darstellen läßt, benützen wir Projektionen auf die beiden Koordinatenebenen  $AB$  und  $BC$ , die wir als Grundriß und Aufriß oder erste und zweite Projektion ansehen können. Die Parallele zu  $A$  durch  $p_1$  möge die Ebene  $op_2p_3$  in  $s$  schneiden. Dann fällt  $s$  im Aufriß mit  $p_1$  zusammen, während man den Grundriß von  $s$  in bekannter Weise dadurch findet, daß man durch den Aufriß von  $p_1$ , also durch  $p'_1$ , irgendeine Gerade zieht — in Fig. 3 ist die Gerade nach  $p_2$  genommen worden — sie als Aufriß einer Geraden in der Ebene  $op_2p_3$  betrachtet, den zugehörigen Grundriß bestimmt (was in Fig. 3 mit Hilfe des

Schnittpunkts  $m$  der Geraden mit  $op_3$  geschehen ist) und ihn mit dem Lot durch den Aufriß von  $s$  oder  $p_1$  schneidet. Der in der Richtung von  $A$  gemessene Abstand  $l_1$  des Punktes  $p_1$  von der Ebene  $op_2p_3$  ist jetzt gleich dem Grundriß der Strecke  $\overline{sp_1}$ :

$$l_1 = \overline{sp_1},$$

mit dem Vorzeichen plus oder minus, je nachdem diese Strecke die Richtung von  $A$  hat, oder die umgekehrte. (Man hätte auch von vornherein sagen können, daß  $l_1$  gleich dem in der Richtung von  $A$  gemessenen Abstand des Punktes  $p_1$  von der Schnittlinie  $km$  der Ebene  $op_2p_3$  mit irgendeiner durch  $p_1$  gelegten zweiten projizierenden Ebene ist. In Fig. 3 fällt  $k$  mit  $p_2$  zusammen.)

Der doppelte Inhalt der zweiten Projektion des Dreiecks  $op_2p_3$  ist nach a) gleich  $l_2l_3$ , wo  $l_2$  den in der Richtung von  $B$  gemessenen Abstand des Aufrisses von  $p_2$  vom Aufriß der Geraden  $op_3$ , und  $l_3 = c_3$  die Projektion der Strecke  $\overline{op_3}$  auf die Achse  $C$  bedeutet. Man hat schließlich:

$$A = l_1 l_2 l_3. ^1)$$

Wenn  $A$  gleich Null wäre, also die Punkte  $p_1, p_2, p_3$  mit  $o$  in einer Ebene lägen, so zeigte sich das schon daran, daß der Grundriß der benützten Hilfslinie den Grundriß von  $p_1$  enthielte, also  $s$  auch im Grundriß mit  $p_1$  zusammenfiel.

### c) Determinante vierter Ordnung

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet  $i$  einen beliebigen der Indizes 1, 2, 3 und 4, so betrachte man  $a_i, b_i, c_i, d_i$  als die Koordinaten eines Punktes  $p_i$  im Raum von vier Dimensionen in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem  $A, B, C, D$  mit dem Ursprung  $o$ . Eine Figur, die aus fünf beliebigen Punkten eines Raumes von vier Dimensionen, die jedoch in keinem Raum von drei Dimensionen liegen, zusammen mit ihren sämtlichen Verbindungsgeraden, Verbindungsebenen und dreidimensionalen Verbindungsräumen gebildet wird, allgemeiner aus  $(n + 1)$  Punkten eines Raumes von  $n$  Dimensionen, die sich in keinem Raume von  $(n - 1)$  Dimensionen befinden, zusammen mit allen ihren Verbindungsräumen von weniger als  $n$  Dimensionen, heißt ein Simplex.<sup>2)</sup> Man spricht von dem  $n$ -dimen-

1) Es liegt hier ein Weg vor, den Inhalt eines beliebigen durch Grundriß und Aufriß gegebenen Tetraeders zu bestimmen, denn daß eine Ecke des Tetraeders sich im Ursprung befindet, ist unwesentlich. Dieser Weg ist viel kürzer als der, den Herr C. Veithen im Archiv der Mathematik und Physik (3) 19 (1912), S. 286—287 mitgeteilt hat.

2) P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, 1. Teil, Leipzig 1902, S. 10.

sionalen Inhalt oder kurz Inhalt eines Simplex im Raum von  $n$  Dimensionen ähnlich wie von dem Rauminhalt eines Tetraeders oder dem Flächeninhalt eines Dreiecks.<sup>1)</sup> Es kommt jedem Simplex ein bestimmter Sinn oder seinem Inhalt ein bestimmtes Vorzeichen zu. Als bekannt werde vorausgesetzt, daß im Fall  $n = 4$  obige Determinante  $\Delta$ , auch dem Zeichen nach, gleich dem 24 fachen Inhalt des Simplex mit den Ecken  $o, p_1, p_2, p_3, p_4$  ist<sup>2)</sup>, ferner daß ein Simplex im Raume von vier Dimensionen in ein solches von gleichem Inhalt und Sinn übergeht, wenn man irgendeine seiner Ecken in einer beliebigen Parallelen zu dem dreidimensionalen Verbindungsraum seiner übrigen vier Ecken verschiebt.<sup>3)</sup> Auf ähnliche Weise wie das Entsprechende unter a) und b) läßt sich mit Hilfe des vorhergehenden zeigen:

*Die Determinante  $\Delta$  ist gleich dem Produkt aus dem parallel zur ersten Achse gemessenen Abstand  $l_1$  des Punktes  $p_1$  von dem dreidimensionalen Verbindungsraum  $[op_2p_3p_4]$  der Punkte  $o, p_2, p_3, p_4$  und dem sechs-fachen Inhalt  $\Delta_1$  des Tetraeders  $op_2q_3q_4$ , das die rechtwinklige Projektion des Tetraeders  $op_2p_3p_4$  auf den zur ersten Achse senkrechten dreidimensionalen Koordinatenraum (d. h. den Verbindungsraum der zweiten, dritten und vierten Achse) bildet.*

Auf die Durchführung des Beweises kann hier verzichtet werden.

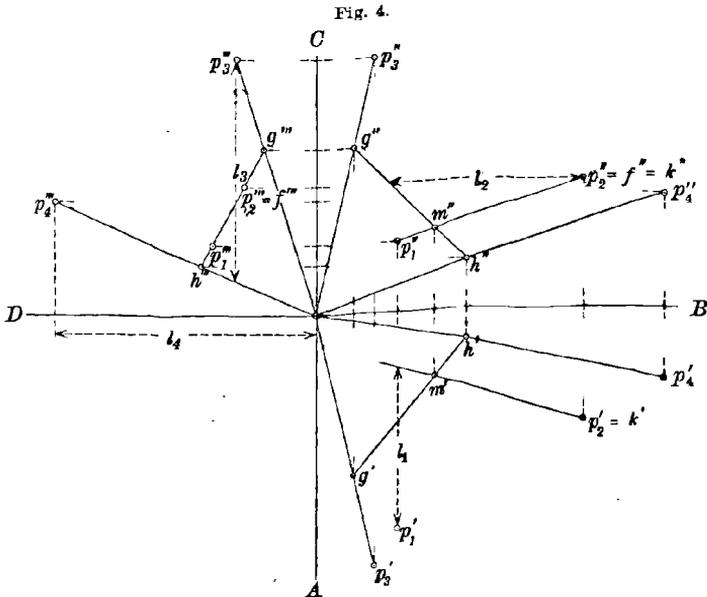
Bei der Anwendung des vorstehenden Satzes bestimmen wir jeden Punkt durch seine Projektionen auf die drei Koordinatenebenen  $AB, BC$  und  $CD$ , die wir als erste, zweite und dritte Projektion unterscheiden. Wie man leicht einsieht, ist der in der Richtung von  $A$  gemessene Abstand  $l_1$  des Punktes  $p_1$  von dem Raum  $[op_2p_3p_4]$  auch gleich dem in derselben Richtung gemessenen Abstand jenes Punktes von dem Schnitt des fraglichen Raumes mit irgendeinem durch  $p_1$  gelegten und zu  $A$  parallelen Raum, z. B. mit einem zweiten oder dritten projizierenden Raum durch  $p_1$  (d. h. einem Raum von drei Dimensionen durch  $p_1$ , der auf der zweiten oder dritten Projektionsebene senkrecht steht). Legen wir zuerst einen beliebigen dritten projizierenden Raum  $\Sigma_3$  durch  $p_1$ . Er hat als dritte Spur eine beliebige Gerade durch  $p_1'''$ , und seine Schnittebene mit  $[op_2p_3p_4]$  läßt sich z. B. durch

1) P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, 2. Teil, Leipzig 1905, S. 94, 113.

2) Es folgt dies aus der allgemeinen Formel für den Inhalt eines Simplex bei Schoute<sup>1)</sup>, S. 119, Formel (41), wenn man darin  $n = 4$  und die Koordinaten eines der Eckpunkte des Simplex alle gleich Null setzt.

3) Es folgt dies aus dem Satz über den Inhalt einer  $n$ -dimensionalen Pyramide bei Schoute<sup>1)</sup>, S. 112.

die Schnittpunkte  $f, g, h$  mit den Geraden  $op_2, op_3, op_4$  bestimmen, deren dritte Projektion sich unmittelbar ergibt, während man die zweite Projektion aus der dritten jedesmal durch ein Lot zur Achse  $C$ , und die erste Projektion aus der zweiten durch ein Lot zu  $B$  erhält. (In Fig. 4 ist jener projizierende Raum zugleich durch  $p_2$  gelegt worden, so daß  $f$  mit  $p_2$  zusammenfällt.) Jetzt ist  $l_1$  gleich dem in der Richtung von  $A$  gemessenen Abstand des Punktes  $p_1$  von der Ebene  $[fgh]$ , oder auch von der Schnittlinie dieser Ebene mit irgendeinem durch  $p_1$  gelegten zweiten



projizierenden Raum  $\Sigma_2$ . Ein solcher hat als zweite Spur eine beliebige Gerade durch  $p'_1$ ; seine Schnittgerade mit  $[fgh]$  kann etwa durch seine Schnittpunkte  $k$  und  $m$  mit den Geraden  $hf$  und  $hg$  bestimmt werden, die in der zweiten Projektion schon vorliegen und aus ihr auf bekannte Weise in die erste Projektion zu bringen sind. (In Fig. 4 hat man den zweiten projizierenden Raum  $\Sigma_2$  ebenfalls durch  $p_2$  gelegt, so daß auch  $k$  mit  $p_2$  zusammenfällt.) Nun kann man  $l_1$  der ersten Projektion entnehmen, als den in der Richtung von  $A$  gemessenen Abstand des Punktes  $p'_1$  von der Geraden  $k'm'$ .

Nach dem unter b) entwickelten Verfahren wird  $l_2$  aus der zweiten Projektion,  $l_3$  und  $l_4$  aus der dritten Projektion der Punkte  $p_2, p_3, p_4$  erhalten. (Weil in Fig. 4 der dritte projizierende Raum  $\Sigma_3$ , der durch  $p_1$  gelegt wurde, auch  $p_2$  enthält, so ist  $l_2$  gleich dem in der Richtung  $B$  gemessenen Abstand des Punktes  $p''_2$  von der Geraden  $g''h''$ .)

d) Determinante  $n$ -ter Ordnung

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Es ist nicht schwer, das unter c) angewandte Verfahren zu verallgemeinern. Wir betrachten die Glieder der  $i$ -ten senkrechten Reihe in  $\Delta$ , also die Größen  $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$  als die Koordinaten eines Punktes  $p_i$  in einem Raum von  $n$  Dimensionen in bezug auf ein System von  $n$  paarweise senkrechten Achsen  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , die durch einen gemeinsamen Ursprung  $o$  gehen. Dann ist  $\Delta$  gleich dem  $n!$ -fachen Inhalt des Simplex mit den Ecken  $o, p_1, p_2, \dots, p_n$ , welcher Inhalt sich nicht ändert, wenn man irgendeine Ecke des Simplex in dem durch diese Ecke gehenden Raum von  $(n-1)$  Dimensionen, der zum Verbindungsraum der übrigen Ecken parallel ist, beliebig verschiebt.<sup>1)</sup> Der für  $n=2, 3, 4$  bereits angegebene Satz lautet allgemein:

*Die Determinante  $\Delta$  ist gleich dem Produkt aus dem parallel zu irgendeiner Achse gemessenen Abstand einer Ecke des Simplex  $o p_1 p_2 \dots p_n$  von dem  $(n-1)$ -dimensionalen Verbindungsraum der übrigen Ecken und dem  $(n-1)!$ -fachen Inhalt der rechtwinkligen Projektion des von den letzteren Ecken gebildeten Simplex auf den zur fraglichen Achse senkrechten Koordinatenraum.*

Wir stellen die Punkte  $p_1, p_2, \dots, p_n$  durch ihre  $(n-1)$  Projektionen auf die Ebenen  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$  dar. Nimmt man als ersten Faktor von  $\Delta$  den in der Richtung von  $A_1$  gemessenen Abstand  $l_1$  der Ecke  $p_1$  von dem Raum  $o p_2 p_3 \dots p_n$ , dann stimmen die Projektionen  $q_2, q_3, \dots, q_n$  der Ecken  $p_2, p_3, \dots, p_n$  auf den zu  $A_1$  senkrechten Koordinatenraum in den  $(n-2)$  Projektionen auf die Ebenen  $A_2 A_3, A_3 A_4, \dots, A_{n-1} A_n$  mit jenen Ecken selbst überein. Man kann deshalb nach dem allgemeinen Satz den  $(n-1)!$ -fachen Inhalt des Simplex  $o q_2 q_3 \dots q_n$ , der mit  $\Delta_1$  bezeichnet sei, in  $\Delta_1 = l_2 \Delta_2$  zerlegen, wo  $l_2$  den in der Richtung der Achse  $A_2$  gemessenen Abstand des Punktes  $q_2$  von dem Raum  $o q_3 \dots q_n$ ,  $\Delta_2$  den  $(n-2)!$ -fachen Inhalt der rechtwinkligen Projektion des Simplex  $o q_3 \dots q_n$  auf den zu  $A_2$  senkrechten Koordinatenraum bedeutet. Aus den genannten  $(n-2)$

1) S. die vorige Anmerkung.

Projektionen der Punkte  $p_2, p_3, \dots, p_n$  läßt sich  $l_2$  ermitteln; überflüssig ist es dabei, den Buchstaben  $p$  in  $q$  zu ändern. Für  $\mathcal{A}_2$  gilt wieder das Entsprechende wie für  $\mathcal{A}_1$ , d. h. man kann  $\mathcal{A}_2$  auf die Form  $l_3 \mathcal{A}_3$  bringen, wo  $l_3$  sich aus den  $(n-3)$  Projektionen der Punkte  $p_3, p_4, \dots, p_n$  auf die Ebenen  $A_3 A_4, A_4 A_5, \dots, A_{n-1} A_n$  finden läßt, usw. Schließlich wird man erhalten:

$$\mathcal{A}_{n-1} = l_{n-1} l_n,$$

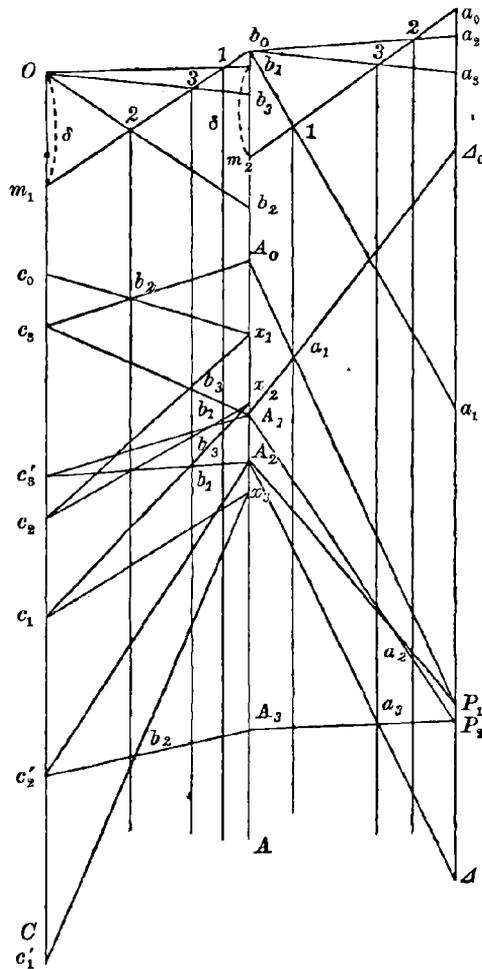
wo  $l_{n-1}$  den in der Richtung der Achse  $A_{n-1}$  gemessenen Abstand der letzten Projektion des Punktes  $p_{n-1}$  von der letzten Projektion der Geraden  $op_n$ , die man auch durch  $[op_n]$  bezeichnen könnte, und  $l_n (= a_{nn})$  die Projektion der Strecke  $\overline{op_n}$  auf die Achse  $A_n$  vorstellt. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{A} = l_1 l_2 \dots l_n.$$

Über die wirkliche Bestimmung der Strecken  $l_1, l_2, \dots, l_n$  werde Folgendes bemerkt. Der Raum  $[op_1 p_2 \dots p_n]$  liefert mit jedem zu  $A_1$  parallelen Raum von  $(n-1)$  Dimensionen, der  $p_1$  enthält, wie auch mit einer Schar von  $m$  solchen Räumen ein Schnittgebilde — es besteht in einem Raum von  $(n-m-1)$  Dimensionen  $R_{n-m-1}$  — von dem, in der Richtung der Achse  $A_1$  gemessen, die Ecke  $p_1$  wieder denselben Abstand  $l_1$  besitzt. Schneidet man deshalb den Raum  $[op_2 p_3 \dots p_n]$  zuerst mit einem durch  $p_1$  gelegten projizierenden Raum  $\Sigma_{n-1}$ , der auf der  $(n-1)$ -sten Projektionsebene senkrecht steht, also von selbst parallel zu  $A_1$  ist, hierauf den durch  $(n-2)$  Punkte zu bestimmenden Schnittraum  $R_{n-2}$  in derselben Weise mit einem projizierenden Raum  $\Sigma_{n-2}$  durch  $p_1$ , der senkrecht zur  $(n-2)$ -ten Projektionsebene ist, usw., dann wird man schließlich in der ersten Projektion eine Gerade erhalten, die  $l_1$  ergibt, wenn man den Abstand der ersten Projektion des Punktes  $p_1$  von ihr in der Richtung von  $A_1$  mißt. Auf ähnliche Weise lassen sich  $l_2, l_3, \dots$  ermitteln, nur daß man bei jeder folgenden Strecke eine Projektion und einen projizierenden Raum weniger nötig hat. Durch passende Wahl der Hilfsräume läßt sich die Arbeit noch abkürzen, wie wir es unter c) schon gesehen haben. Wer in den Geist der auf beliebig viele Dimensionen ausgedehnten darstellenden Geometrie ein wenig eingedrungen ist, dem wird die Durchführung keine Schwierigkeiten machen.

Anm. M. Farid Boulad, Ingenieur bei den ägyptischen Staatsbahnen, hat 1909 auf der Versammlung der „Association française pour l'avancement des sciences“ in Lille ein anderes Verfahren zur graphischen Berechnung von Determinanten angegeben. Das oben mitgeteilte Verfahren erfordert aber von  $n=3$  an bedeutend weniger Linien und

ist meines Erachtens übersichtlicher und weniger ermüdend. Zum Vergleich folgt hier aus den Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Lille, 1909, die Figur, an der M. Bouldud sein Verfahren im Falle  $n = 3$  erläutert hat, die also der obigen Figur 3, S. 212, gegenüber zu stellen ist.



Graphische Berechnung einer Determinante 3. Ordnung nach Farid Bouldud.

## Bücherschau.

---

**H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne. Rédigées par H. Vergue. XXV u. 294 S. 8. Paris 1911, A. Hermann et fils. 12 Francs.**

Unter den zahlreichen kosmogonischen Theorien hat der Verf. sich einige zur eingehenderen Darstellung ausgewählt, die ihn ihrer Eigenart halber oder wegen der Möglichkeit mathematischer Behandlung dazu besonders reizten. In den Vorlesungen folgt auf die Weltentstehung nach Kant die Hypothese von Laplace und deren ausführliche mathematische Diskussion, die sich über 61 Seiten erstreckt. Es ist augenscheinlich, daß Poincaré von Laplaces Hypothese, ihrer Durchbildung und Ausbesserung sich noch am ehesten eine befriedigende Vorstellung vom Werden der Welten verspricht. Das sagt er un-zweideutig hier und im Vorwort. Einen nicht viel geringeren Raum (59 Seiten) beansprucht die Theorie G. H. Darwins, der dem Einfluß der Gezeiten bei der Entstehung der Himmelskörper eine entscheidende Rolle zuweist. Darwins Resultate über Fragen der Rotation, über Tag und Monat, ihre Wechselwirkung und ihre Veränderungen, über Abplattung und Ablösung von Monden finden eine recht ausführliche und klare Analyse, die vielen willkommen sein, manche erst in das Verständnis der Untersuchungen Darwins einführen wird. Von den Grundgedanken in der Hypothese von Ligondès scheint der Verf. viel zu halten; denn er rechnet die mathematisch formulierbaren Annahmen durch und zeigt nebenher, daß Ligondès' Voraussetzung sich mit der kinetischen Gastheorie nicht ganz verträgt. Die Nachprüfung der Annahmen über den Ursprung der Sonnenwärme nimmt ein längeres Kapitel ein, in dem die chemische, meteorische und Kontraktionshypothese besprochen wird. Eine kritische Würdigung erfährt die Theorie von Arrhenius, mit dessen Schlußfolgerungen der Verf. durchaus nicht allerwegen übereinstimmt. Der Abschnitt „Milchstraße und Gastheorie“ führt Lord Kelvins Gedanken durch, daß das System der Fixsterne als ein Gas betrachtet werden könne, dessen Molekel die Sterne sind; es müssen dann auch die Gesetze der kinetischen Gastheorie gelten. Nur kurz referierend werden die kosmogonischen Ideen von See, Lockyer, Schuster wiedergegeben; den Schluß macht Belots neukartesische Wirbeltheorie, der der Verf. recht anerkennend gegenüber steht.

Gehen die eigentlichen Vorlesungen in der Hauptsache darauf aus, aus den Grundgedanken der behandelten Weltbildungstheorien ihren mechanisch-mathematischen Inhalt zu entwickeln, so hat Poincaré im Vorwort seine eigene Stellung zu kosmogonischen Fragen gekennzeichnet; im Fluge führt er die verschiedenen Kosmogonien am Leser vorüber. Und soweit der Verf. über-

haupt eine Entscheidung treffen kann und will, neigt er, wie gesagt, noch am ehesten der Laplaceschen Hypothese zu. Aber „plus on étudie cette question de l'origine des astres, moins on est pressé de conclure. Chacune des théories proposées est séduisante par certains côtés.“ „Nous ne pouvons donc terminer que par un point d'interrogation.“

Die von Poincaré getroffene Auswahl der kosmogonischen Hypothesen berücksichtigt vor allem und am ausführlichsten diejenigen französischen Ursprungs; z. B. kommt die Planetesimaltheorie nach Moulton und Chamberlin nicht vor. Ebenso wollte er die mechanische Seite der Weltbildungshypothesen in den Vordergrund gerückt wissen; durch Berücksichtigung physikalischer Vorgänge der Vorstellung vom Entstehen der Welt Lichter aufzusetzen, vermied der Verf. Damit wird es auch verständlich, daß er nicht näher auf die modernen Anschauungen von den Strömen im System der Fixsterne und der Verteilung nach Spektraltypus und Bewegungsgröße einging.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**C. Schilling. Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. 2. Band:** Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß, 2. Abteilung. Zum Druck gegeben von C. Schilling und J. Kramer. V u. 758 S. 8. Berlin 1909, J. Springer. *M* 16.—

Neun Jahre nach der Veröffentlichung des I. Teiles erscheint jetzt der II. und Schlußteil des Briefwechsels Gauß-Olbers. Er erstreckt sich über die Zeit vom 24. Januar 1820 bis 30. Mai 1839 und umfaßt 354 Briefe (Nr. 381 bis 734). Am Schlusse des letzten Briefes von Olbers an Gauß steht von Gauß Hand „† 2. März 1840.“ Nach dem Gefühl des Ref. bildet dieser Briefwechsel das Schönste und Sympathischste, was wir an Briefsammlungen von Astronomen besitzen. Alles was die astronomische Wissenschaft damals bewegte, spiegelt sich hier wieder. Olbers regt meistens durch eine Frage an, Gauß antwortet dem Freunde in der eingehendsten Weise und erzählt ihm von dem Fortgange seiner wissenschaftlichen Untersuchungen. Dazwischen tauchen Werturteile über Zeitgenossen auf; von Gauß' Seite immer vorsichtig, maßvoll, milde, und Olbers schließt sich Gauß' Meinung stets an. Viel Interessantes erfährt man von der Hannoverschen Gradmessung und den inneren und äußeren Schwierigkeiten, die sich ihrer Vollendung in den Weg stellen. Wie Gauß allmählich die systematischen Einstellungsfehler auf Heliotrop-signale, die ihn tief beunruhigen, erkennt und bekämpft, das liest sich nicht ohne Spannung. Auch für seine geometrischen und arithmetischen Forschungen findet Gauß bei dem älteren Freunde Interesse und Verständnis. Natürlich fehlen bei der engen und herzlichen Freundschaft der beiden Männer die persönlichen Mitteilungen nicht und der Briefwechsel läßt daher einen Blick tun in die privaten Schicksale der Familien Gauß und Olbers. Vatersorgen blieben Gauß nicht erspart.

Zwei Anhänge sind dem Buche beigegeben. Ein erster enthält 29 Briefe von v. Buch, Dirksen, Gauß, v. Humboldt, v. Lindenau, v. Müffling, Olbers und Schumacher aus den Jahren 1821 bis 1837; sie beziehen sich auf die merkwürdige Angelegenheit der Berufung Gauß' an die Akademie nach Berlin. Der zweite Anhang bringt drei nachträglich aufgefundenen Briefe von Bessel an Olbers aus dem Jahre 1812.

Im ganzen enthält der Band wichtiges und wertvolles Material für die wissenschaftliche Gaußbiographie. Um die Herausgabe und Redaktion machte sich insbesondere J. Kramer verdient, dem wir die große Anzahl orientierender Anmerkungen und Verweise und das Namen- und Sachregister verdanken.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

Dr. E. Müller, o. ö. Professor an der K. K. technischen Hochschule in Wien. **Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen.** Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich. Veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtscommission. 124 S. Wien 1911, K. K. Hof- und Staatsdruckerei. Preis: *M* 2.40.

Derselbe: **Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie.** 4 Hefte. Leipzig und Wien 1910, 1911, Franz Deuticke. Preis: Das Heft *M* 1.25.

Theodor Schmid, o. ö. Professor an der K. K. technischen Hochschule in Wien. **Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie.** Leipzig 1911, G. J. Göschen. Preis: Ganze Sammlung in Mappe *M* 4. — = 4 Kr. 80 H., einzelnes Blatt *M* —. 15 = 18 H. (bei 10 Stücken *M* —. 12 = 15 H.), Doppelblatt *M* —. 25 = 36 H. (bei 10 Stücken *M* —. 20 = 24 H.).

In dem erstgenannten Buche wird der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen Österreichs besprochen. Eine kurze geschichtliche Entwicklung geht voran, und es werden die Lehrkräfte an den Hochschulen Österreichs aufgezählt, welche seit Einführung dieses Faches tätig waren und noch tätig sind. Weiter wird der Unterrichtsbetrieb, Vorlesungen und Übungen, besprochen. Der Verfasser hat sich mittels Fragebogen an die andern Hochschulen gewendet, im wesentlichen wird aber der Betrieb, wie er in Wien eingeführt ist, geschildert. An den technischen Hochschulen in Wien, Prag und Lemberg existieren je zwei Lehrkanzeln für dieses Fach. In Wien ist die Teilung in der Weise durchgeführt, daß die Hörer der Bauingenieur-Architektur und allgemeinen Abteilung (Lehramtskandidaten und Geodäten) der 1. Lehrkanzel (Professor Müller), die Hörer der Maschinenbauabteilung der 2. Lehrkanzel (Professor Schmid) zugewiesen sind. Bemerkungen über Sondervorlesungen, über Seminare und die Heranbildung des Lehramtskandidaten bilden den Schluß.

Gleichzeitig haben die beiden in Wien tätigen Herren technische Aufgaben aus der darstellenden Geometrie erscheinen lassen. Wir nennen aus der ersten Sammlung folgende Themen: Kristallgestalten, Gerüstböcke, Stichkappen, Dachausmittlung, kotierte Projektion, Turmuhr, Bahnwärterhaus.

Aus der Sammlung für Maschineningenieure: Ankerplatte, Wandkasten, Kesselniete, Kugelventil, Exzenterstange, Flauschenformstücke, Gewindearten für Befestigungsschrauben. Schon an den Mittelschulen wird in Österreich die darstellende Geometrie in weiterem Umfange getrieben als in Deutschland. Dadurch wird es möglich, dem Studiierenden bereits im ersten Jahre Aufgaben vorzulegen, in denen das mathematische Element zu gunsten des technischen stark zurücktritt.

München, Juli 1912.

KARL DÖHLEMANN.

## Neue Bücher.

### Astronomie.

1. HAGEN, JOH. GEO., S. J., Die veränderlichen Sterne. 1. Bd. Geschichtlich-technischer Teil. 1. Lfg. Die Ausrüstung des Beobachters. Freiburg i. B. 1913, Herder. *M* 10.—.
2. Jahresbericht, Astronomischer, begründet von WALT. F. WISLICENS. Mit Unterstützung der astronom. Gesellschaft bearb. im kgl. astronom. Recheninstitut zu Berlin. 14. Bd. Die Literatur des J. 1912. Berlin 1913, Reimer. *M* 19.—.

### Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

3. FRANKE, H., Die Umrisse der Kristallflächen und die Anfertigung von Kristallmodellen. Stuttgart 1913, Enke. *M* 4.—.
4. LUDWIG, W., Sätze und Definitionen zu den Vorlesungen über darstellende Geometrie an der technischen Hochschule Dresden. Dresden 1913, Dressel. *M* —.60.
5. RUNGE, C., Graphical methods. A course of lectures delivered in Columbia University, New York, October, 1909, to January, 1910. (Ernest Kempton Adams fund for physical research, publication No. 4.) New York 1912, Columbia University Press.

S. auch 26.

### Mechanik.

6. FISCHER, MAX, Statik und Festigkeitslehre. Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium für Ingenieure, Techniker und Studierende. 2. Bd.: Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen. 3. verm. Aufl. Berlin 1913, Meußner, *M* 16.50; geb. *M* 18.—.
7. MARTIENSSEN, OSCAR, Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes und ihre Anwendung in der Flugtechnik. Berlin 1913, Springer. *M* 5.40; geb. *M* 6.—.
8. MÜLLER-BRESLAU, HEINE., Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 4., verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1913, Kröner. *M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 14.—.
9. SCHWENGLER, JOH., Eisenbahn-Balkenbrücken. Ihre Konstruktion und Berechnung, nebst 6 zahlenmäßig durchgeführten Beispielen. Berlin 1913, Springer. geb. *M* 4.—.

S. auch 13, 20.

### Physik.

10. BOYS, C. V., Seifenblasen, ihre Entstehung und ihre Farben. Vorlesungen über Kapillarität. Autoris. deutsche Ausg. v. G. Meyer. 2., verm. Aufl. Leipzig 1913. Barth. *M* 5.—; geb. *M* 6.—.

11. BREMER, FR., Leitfaden der Physik. Mit besond. Berücksichtigung von Aufgaben und Laboratoriumsübungen. 2. Tl. Für die oberen Klassen der Oberrealschulen und Realgymnasien. 2. verm. Aufl. Leipzig 1913, Teubner.  
Geb. in Leinw. *M* 3.20.
12. CAMPBELL, NORMAN ROBERT, Modern electrical theory. 2nd edition. Cambridge 1913, University Press. 9 s.
13. EIFFEL, G., The resistance of the air and aviation. 2nd edition, revised and enlarged. London 1913, Constable. 42 s.
14. FIGER, OTTO, Erdrotation und Lichtfortpflanzung. (Progr.) Berlin 1913, Weidmann. *M* 1.—.
15. Fortschritte, Die, der Physik im Jahre 1912. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 68. Jahrg. 2. Abtlg. Elektrizität und Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 40.—.
16. KLEIBER, JOH., u. KARSTEN, B., Lehrbuch der Physik. Zum besond. Gebrauch für technische Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit durchgerechneten Musterbeispielen und Übungsaufgaben samt Lösungen.
17. SCHUSTER, ARTH., Ergebnisse der Physik während 33 Jahren (1875—1908). 4 Vorlesungen, gehalten an der Universität Calcutta im März 1908. Autoris. deutsche Ausgabe von Guido Szivessy. Leipzig 1913, Barth. *M* 3.20; geb. *M* 4.—.
18. SIEVEKING, HERM., Einführung in das physikalische Praktikum. 2. verm. Aufl. Karlsruhe 1913, Gutsch. geb. in Leinw. *M* 3.60.
19. WAALS, J. D. VAN DER, Weiteres zur Zustandsgleichung. Leipzig 1913, Akadem. Verlagsgesellschaft. *M* 2.40.
20. WEINSTEIN, MAX B., Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie. Leipzig 1913, Barth. *M* 17.—; geb. *M* 19.—.
21. WOOD, R. W., Researches in physical Optics. With especial reference to the radiation of electrons. (Ernest Kempton Adams fund for physical research, publication No. 6.) New York 1913, Columbia University Press.

S. auch 7.

**Rechenhilfsmittel. Tafeln.**

22. RICHARDSON, G. W., The slide-rule simplified. Chicago 1813, Clougher. § 1.—.
23. SCHUBERT, HERMANN, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln f. logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. Neue Ausgabe von Robert Haußner. (Sammlung Göschen Nr. 81.) Berlin und Leipzig 1913, Göschen. Geb. *M* —.90.

**Verschiedenes.**

24. DINGELDEY, FRIEDRICH, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. II. Teil. Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. (Teubners Sammlung Bd. XXXII, 2.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 12.—; geb. in Leinw. *M* 13.—.
25. KÖNIGSBERGER, LEO, Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft? Festrede. (Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wiss., Stiftung Heinrich Lanz. Mathem.-naturw. Klasse, Abtlg. A. Jahrg. 1913, Nr. 8) Heidelberg 1913, Winter.
26. PYRSCH, Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe höherer Lehranstalten. Bielefeld und Leipzig 1913. Velhagen & Klasing.

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- BACKES, WILH., Ein Beweis des Fermatschen Satzes. Mainz 1913, Druckerei Lehrlingshaus. *M* 2.—.
- BÜTZBERGER, F., Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 1.20.
- DINGELDEY, FR., Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung, II, s. N. B. („Nene Bücher“) Nr. 24.
- DONAU, J., Die Arbeitsmethoden der Mikrochemie, unter besonderer Berücksichtigung der quantitativen Gewichtsanalyse. (Handbuch der mikroskopischen Technik, IX.) Stuttgart 1913, Franckh. *M* 2.—; geb. *M* 2.80.
- HENSEL, KURT, Zahlentheorie. Berlin und Leipzig 1913, Göschen. *M* 10.—.
- KNOBLAUCH, JOHANNES, Grundlagen der Differentialgeometrie. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 18.—; geb. in Leinw. *M* 20.—.
- LÖRCHER, O., und LÖFFLER, E., Methodisches Lehrbuch der Geometrie nebst den Grundzügen der Trigonometrie für höhere Knabenschulen. Stuttgart u. Berlin 1913, Grub. Geb. *M* 3.60.
- MAACK, FERDINAND, Elias Artista redivivus, oder das Buch vom Salz und Raum. („Geheime Wissenschaften“ IV.) Berlin 1913, Barsdorf. *M* 5.—.
- MANSION, PAUL, Abriß der Theorie der Hyperbelfunktionen, nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen. Nach der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig 1913, Teubner. *M* 1.25.
- MARTIENSSEN, O., Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes und ihre Anwendung in der Flugtechnik, s. N. B. 7.
- PYRKOSCH, Lehrbuch der Mathematik, s. N. B. 26.
- RUNGE, C., Graphical methods, s. N. B. 5.
- SCHIFFNER, FRANZ, und TRAVNÍČEK, JOSEF, Raumlehre. I. Teil, Unterstufe. (Für die I., II., u. III. Klasse.) 2., umgearb. Aufl. Wien 1913, Deuticke. *M* 2.20
- SCHUBERT, HERM., Vierstellige Tafeln und Gegentafeln . . ., s. N. B. 23.
- WOOD, R. W., Researches in physical Optics, I, s. N. B. 21.

## Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.

VON ALBERT EINSTEIN und MARCEL GROSSMANN in Zürich.

### I. Physikalischer Teil.

VON ALBERT EINSTEIN.

Die im folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundamente der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten<sup>1)</sup> suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, daß ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte; dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerfeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich läßt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfelde befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrecht erhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).

Daß das Gesetz der Proportionalität der trägen und der schweren Masse jedenfalls mit außerordentlicher Genauigkeit erfüllt ist, wissen wir aus einer fundamental wichtigen Untersuchung von Eötvös<sup>2)</sup>, die auf folgender Überlegung beruht. Auf einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper wirkt sowohl die Schwere als auch die von der Drehung der Erde herrührende Zentrifugalkraft. Die erste dieser Kräfte ist proportional der schweren, die zweite der trägen Masse. Die Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte, d. h. die Richtung der scheinbaren Schwerkraft (Lotrichtung) müßte also von der physikalischen Natur des ins Auge gefaßten Körpers abhängen, falls die Proportionalität der trägen und schweren Masse nicht erfüllt wäre. Es ließen sich dann die scheinbaren Schwerkräfte, welche auf Teile eines heterogenen starren

1) A. Einstein, Ann. d. Physik 4. 35. S. 898; 4. 38. S. 355; 4. 38. S. 443.

2) B. Eötvös, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII 1890. Wiedemann, Beiblätter XV. S. 688 (1891).

Systems wirken, im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; es bliebe vielmehr im allgemeinen ein Drehmoment der scheinbaren Schwerkkräfte übrig, das sich beim Aufhängen des Systems an einem torsionsfreien Faden hätte bemerkbar machen müssen. Indem Eötvös die Abwesenheit solcher Drehmomente mit großer Sorgfalt feststellte, bewies er, daß das Verhältnis beider Massen für die von ihm untersuchten Körper mit solcher Genauigkeit von der Natur des Körpers unabhängig war, daß die relativen Unterschiede die dies Verhältnis von Stoff zu Stoff noch besitzen könnte, kleiner als ein Zwanzigmilliontel sein müßte.

Beim Zerfall radioaktiver Stoffe werden so bedeutende Energiemengen abgegeben, daß die Änderung der trägen Masse des Systems, welche nach der Relativitätstheorie jener Energieabnahme entspricht, gegenüber der Gesamtmasse nicht sehr klein ist.<sup>1)</sup> Beim Zerfall von Radium beträgt z. B. jene Abnahme  $\frac{1}{10\,000}$  der Gesamtmasse. Würden jenen Änderungen der trägen Masse nicht Änderungen der schweren Masse entsprechen, so müßten Abweichungen der trägen von der schweren Masse bestehen, die weit größer sind, als es die Eötvösschen Versuche zulassen. Es muß also als sehr wahrscheinlich betrachtet werden, daß die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist. Aus diesen Gründen scheint mir auch die Äquivalenzhypothese, welche die physikalische Wesengleichheit der schweren mit der trägen Masse ausspricht, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu besitzen.<sup>2)</sup>

### § 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerefeld.

Gemäß der gewöhnlichen Relativitätstheorie<sup>3)</sup> bewegt sich ein kräftefrei bewegter Punkt nach der Gleichung

$$(1) \quad \delta \left\{ \int ds \right\} = \delta \left\{ \int \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2} \right\} = 0.$$

Denn es besagt diese Gleichung nichts anderes, als daß sich der materielle Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Es ist dies die Bewegungsgleichung in Form des Hamiltonschen Prinzipes; denn wir können auch setzen

$$(1a) \quad \delta \left\{ \int H dt \right\} = 0,$$

wobei

$$H = - \frac{ds}{dt} m$$

1) Die Abnahme der trägen Masse, die der abgegebenen Energie  $E$  entspricht, ist bekanntlich  $\frac{E}{c^2}$ , wenn mit  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet wird.

2) Vgl. auch § 7 dieser Arbeit.

3) Vgl. M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1906. S. 136.

gesetzt ist, falls  $m$  die Ruhemasse des materiellen Punktes bedeutet. Hieraus ergeben sich in bekannter Weise Impuls  $J_x, J_y, J_z$  und Energie  $E$  des bewegten Punktes:

$$(2) \quad \begin{cases} J_x = m \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m \frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}; \text{ etc.} \\ E = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \dot{z} - H = m \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - q^2}}. \end{cases}$$

Diese Darstellungsweise unterscheidet sich von der üblichen nur dadurch, daß in letzterer  $J_x, J_y, J_z$  und  $E$  noch einen Faktor  $c$  aufweisen. Da aber  $c$  in der gewöhnlichen Relativitätstheorie konstant ist, so ist das hier gegebene System dem gewöhnlich gegebenen äquivalent. Der einzige Unterschied ist der, daß  $J$  und  $E$  andere Dimensionen besitzen als in der üblichen Darstellungsweise.

In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, daß die Äquivalenzhypothese zu der Folgerung führt, daß in einem statischen Gravitationsfelde die Lichtgeschwindigkeit  $c$  vom Gravitationspotential abhängt. Ich gelangte so zu der Meinung, daß die gewöhnliche Relativitätstheorie nur eine Annäherung an die Wirklichkeit gebe; sie sollte in dem Grenzfalle gelten, daß in dem betrachteten Raum-Zeitgebiete keine zu große Verschiedenheiten des Gravitationspotentials auftreten. Außerdem fand ich als Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes in einem statischen Gravitationsfelde wieder die Gleichungen (1) bzw. (1a); es ist aber dabei  $c$  nicht als eine Konstante, sondern als eine Funktion der Raumkoordinaten aufzufassen, die ein Maß für das Gravitationspotential darstellt. Aus (1a) folgen in bekannter Weise die Bewegungsgleichungen

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m \dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \right\} = - \frac{m c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Man sieht, daß die Bewegungsgröße durch den nämlichen Ausdruck dargestellt wird wie oben. Überhaupt gelten für den im statischen Schwerefelde bewegten materiellen Punkt die Gleichungen (2). Die rechte Seite von (3) stellt die vom Gravitationsfelde auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft  $\mathfrak{R}_x$  dar. Für den Spezialfall der Ruhe ( $q=0$ ) ist

$$\mathfrak{R}_x = - m \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Hieraus erkennt man, daß  $c$  die Rolle des Gravitationspotentials spielt. Aus (2) folgt für einen langsam bewegten Punkt

$$(4) \quad \begin{aligned} J_x &= \frac{m \dot{x}}{c}, \\ E - mc &= \frac{1}{2} \frac{m q^2}{c}. \end{aligned}$$

Bei gegebener Geschwindigkeit sind also Impuls und kinetische Energie der Größe  $c$  umgekehrt proportional; anders ausgedrückt: Die träge Masse, so wie sie in Impuls und Energie eingeht, ist  $\frac{m}{c}$ , wobei  $m$  eine für den Massenpunkt charakteristische, vom Gravitationspotential unabhängige Konstante bedeutet. Es paßt dies zu Machs kühnem Gedanken, daß die Trägheit in einer Wechselwirkung des betrachteten Massenpunktes mit allen übrigen ihren Ursprung habe; denn häufen wir Massen in der Nähe des betrachteten Massenpunktes an, so verkleinern wir damit das Gravitationspotential  $c$ , erhöhen also die für die Trägheit maßgebende Größe  $\frac{m}{c}$ .

## § 2. Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerfeld. Charakterisierung des letzteren.

Mit der Einführung einer räumlichen Veränderlichkeit der Größe  $c$  haben wir den Rahmen der gegenwärtig als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie durchbrochen; denn es verhält sich nun der mit  $ds$  bezeichnete Ausdruck orthogonalen linearen Transformationen der Koordinaten gegenüber nicht mehr als Invariante. Soll also — woran nicht zu zweifeln ist — das Relativitätsprinzip aufrecht erhalten werden, so müssen wir die Relativitätstheorie derart verallgemeinern, daß sie die im vorigen in ihren Elementen angedeutete Theorie des statischen Schwerfeldes als Spezialfall enthält.

Führen wir ein neues Raum-Zeitsystem  $K'(x', y', z', t')$  ein durch irgend eine Substitution

$$\begin{aligned}x' &= x'(x, y, z, t) \\y' &= y'(x, y, z, t) \\z' &= z'(x, y, z, t) \\t' &= t'(x, y, z, t),\end{aligned}$$

und war das Schwerfeld im ursprünglichen System  $K$  ein statisches, so geht bei dieser Substitution die Gleichung (1) in eine Gleichung von der Form

$$\delta \left\{ \int ds' \right\} = 0$$

über, wobei

$$ds'^2 = g_{11} dx'^2 + g_{22} dy'^2 + \dots + 2g_{12} dx' dy' + \dots$$

gesetzt ist, und die Größen  $g_{\mu\nu}$  Funktionen von  $x', y', z', t'$  sind. Setzen wir  $x_1, x_2, x_3, x_4$  statt  $x', y', z', t'$  und schreiben wir wieder  $ds$  statt  $ds'$ , so erhalten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in bezug auf  $K'$  die Gestalt

$$(1'') \quad \begin{cases} \delta \left\{ \int ds \right\} = 0, & \text{wobei} \\ ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \end{cases}$$

Wir gelangen so zu der Auffassung, daß im allgemeinen Falle das Gravitationsfeld durch zehn Raum-Zeit-Funktionen

$$\begin{array}{cccc}
 g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\
 g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\
 g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\
 g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}
 \end{array}
 \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

charakterisiert ist, welche sich im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie auf

$$\begin{array}{cccc}
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & +c^2
 \end{array}$$

reduzieren, wobei  $c$  eine Konstante bedeutet. Dieselbe Art der Degeneration zeigt sich bei dem statischen Schwerfeld der vorhin betrachteten Art, nur daß bei diesem  $g_{44} = c^2$  eine Funktion von  $x_1, x_2, x_3$  ist.

Die Hamiltonsche Funktion  $H$  hat daher im allgemeinen Fall den Wert

$$(5) \quad H = -m \frac{ds}{dt} = -m \sqrt{g_{11} \dot{x}_1^2 + \dots + 2g_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots + 2g_{14} \dot{x}_1 + \dots + g_{44}}$$

Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

ergeben sofort den Ausdruck für den Impuls  $J$  des Punktes und für die vom Schwerfeld auf ihn ausgeübte Kraft  $\mathfrak{K}$ :

$$(7) \quad J_x = -m \frac{g_{11} \dot{x}_1 + g_{12} \dot{x}_2 + g_{13} \dot{x}_3 + g_{14}}{\frac{ds}{dt}} = -m \frac{g_{11} d_1 x + g_{12} dx_2 + g_{13} dx_3 + g_{14} dx_4}{ds}$$

$$(8) \quad \mathfrak{K}_x = -\frac{1}{2} m \frac{\sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} dx_\mu dx_\nu}{ds \cdot dt} = -\frac{1}{2} m \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{dt}$$

Ferner ergibt sich für die Energie  $E$  des Punktes

$$(9) \quad -E = -\left( \dot{x} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \dots \right) + H = -m \left( g_{41} \frac{dx_1}{ds} + g_{42} \frac{dx_2}{ds} + g_{43} \frac{dx_3}{ds} + g_{44} \frac{dx_4}{ds} \right).$$

Im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie sind nur lineare orthogonale Substitutionen zulässig. Es wird sich zeigen, daß wir für die Einwirkung des Schwerfeldes auf die materiellen Vorgänge Gleichungen aufzustellen vermögen, die beliebigen Substitutionen gegenüber sich kovariant verhalten.

Zunächst können wir aus der Bedeutung, welche  $ds$  im Bewegungsgesetz des materiellen Punktes spielt, den Schluß ziehen, daß  $ds$  eine absolute Invariante (Skalar) sein muß; hieraus ergibt sich, daß die Größen  $g_{\mu\nu}$  einen kovarianten Tensor zweiten Ranges bilden<sup>1)</sup>, den wir als den kovarianten Fundamentaltensor bezeichnen. Dieser bestimmt das Schwerfeld. Es ergibt sich ferner aus (7) und (9), daß Impuls und Energie des materiellen Punktes zusammen einen kovarianten Tensor ersten Ranges, d. h. einen kovarianten Vektor bilden.<sup>2)</sup>

### § 3. Bedeutung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit.

Aus dem Früheren kann man schon entnehmen, daß zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  und den mittelst Maßstäben und Uhren zu erhaltenden Meßergebnissen keine so einfachen Beziehungen bestehen können, wie in der alten Relativitätstheorie. Es ergab sich dies bezüglich der Zeit schon beim statischen Schwerfeld.<sup>3)</sup> Es erhebt sich deshalb die Frage nach der physikalischen Bedeutung (prinzipiellen Meßbarkeit) der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Hierzu bemerken wir, daß  $ds$  als invariantes Maß für den Abstand zweier unendlich benachbarter Raumzeitpunkte aufzufassen ist. Es muß daher  $ds$  auch eine vom gewählten Bezugssystem unabhängige physikalische Bedeutung zukommen. Wir nehmen an,  $ds$  sei der „natürlich gemessene“ Abstand beider Raumzeitpunkte und wollen darunter folgendes verstehen.

Die unmittelbare Nachbarschaft des Punktes  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  wird bezüglich des Koordinatensystems durch die infinitesimalen Variablen  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  bestimmt. Wir denken uns statt dieser durch eine lineare Transformation neue Variable  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4$  eingeführt, derart, daß

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

wird. Bei dieser Transformation sind die  $g_{\mu\nu}$  als Konstanten zu betrachten; der reelle Kegel  $ds^2 = 0$  erscheint auf seine Hauptachsen bezogen. In diesem elementaren  $d\xi$ -System gilt dann die gewöhnliche Relativitätstheorie, und es sei in diesem System die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten dieselbe wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h.  $ds^2$  ist das Quadrat des vierdimensionalen Abstandes beider unendlich benachbarter Raumzeitpunkte, gemessen mittelst eines im  $d\xi$ -System nicht beschleunigten starren Körpers und mittelst relativ zu diesem ruhend angeordneter Einheitsmaßstäbe und Uhren.

1) Vgl. II. Teil, § 1.

2) Vgl. II. Teil, § 1.

3) Vgl. z. B. A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. S. 903 ff.

Man sieht hieraus, daß bei gegebenen  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  der zu diesen Differentialen gehörige natürliche Abstand nur dann ermittelt werden kann, wenn die das Gravitationsfeld bestimmenden Größen  $g_{\mu\nu}$  bekannt sind. Man kann dies auch so ausdrücken: Das Gravitationsfeld beeinflußt die Meßkörper und Uhren in bestimmter Weise.

Aus der Fundamentalgleichung

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

sieht man, daß es zur Festlegung der physikalischen Dimension der Größen  $g_{\mu\nu}$  und  $x_\nu$  noch einer Festsetzung bedarf. Der Größe  $ds$  kommt die Dimension einer Länge zu. Wir wollen die  $x_\nu$  ebenfalls als Längen ansehen (auch  $x_4$ ), den Größen  $g_{\mu\nu}$  also keine physikalische Dimension zuschreiben.

#### § 4. Bewegung kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen im beliebigen Schwerfeld.

Zur Ableitung des Bewegungsgesetzes kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen berechnen wir Impuls und ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit und wenden hierauf den Impulssatz an.

Dazu haben wir zunächst das dreidimensionale Volumen  $V$  unseres Massenpunktes zu berechnen. Wir betrachten ein unendlich kleines (vierdimensionales) Stück des Raumzeitfadens unseres materiellen Punktes. Sein Volumen ist

$$\iiint dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = V dt.$$

Führen wir statt der  $dx$  die natürlichen Differentiale  $d\xi$  ein, wobei der Meßkörper als gegen den materiellen Punkt ruhend angenommen wird, so haben wir

$$\iiint d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = V_0$$

zu setzen, d. h. gleich dem „Ruhvolumen“ des materiellen Punktes. Ferner haben wir

$$\int d\xi_4 = ds,$$

wobei  $ds$  dieselbe Bedeutung hat wie oben.

Sind die  $dx$  mit den  $d\xi$  verbunden durch die Substitution

$$dx_\mu = \sum_{\sigma} \alpha_{\mu\sigma} d\xi_\sigma,$$

so hat man

$$\iiint dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \iiint \frac{\partial(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)}{\partial(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4)} \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

oder

$$V dt = V_0 ds \cdot |\alpha_{\sigma\sigma}|.$$

Da aber

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\nu} \alpha_{\mu\rho} \alpha_{\nu\sigma} d\xi_\rho d\xi_\sigma = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

ist, so besteht zwischen der Determinante

$$g = |g_{\mu\nu}|,$$

d. h. der Diskriminante der quadratischen Differentialform  $ds^2$  und der Substitutionsdeterminante  $|\alpha_{\rho\sigma}|$  die Beziehung

$$g \cdot (|\alpha_{\rho\sigma}|)^2 = -1,$$

$$|\alpha_{\rho\sigma}| = \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Man erhält also für  $V$  die Beziehung

$$V dt = V_0 ds \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (7), (8) und (9), wenn man  $\frac{m}{V_0}$  durch  $\varrho_0$  ersetzt,

$$\begin{aligned} \frac{J_x}{V} &= -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{1\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds}, \\ -\frac{H}{V} &= -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{4\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds}, \\ \frac{\mathfrak{E}_x}{V} &= -\frac{1}{2} \varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß

$$\Theta_{\mu\nu} = \varrho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}$$

ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges bezüglich beliebiger Substitutionen ist. Man vermutet aus dem Vorhergehenden, daß der Impuls-Energiesatz die Form haben wird:

$$(10) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu} = 0. \quad (\sigma=1,2,3,4)$$

Die ersten drei dieser Gleichungen ( $\sigma = 1, 2, 3$ ) drücken den Impulssatz, die letzte ( $\sigma = 4$ ) den Energiesatz aus. Es erweist sich in der Tat, daß diese Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind.<sup>1)</sup> Ferner lassen sich die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes, von denen wir ausgegangen sind, aus diesen Gleichungen durch Integration über den Stromfaden wieder ableiten.

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 1.

Den Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  nennen wir den (kontravarianten) Spannungs-Energiетensor der materiellen Strömung. Der Gleichung (10) schreiben wir einen Gültigkeitsbereich zu, der über den speziellen Fall der Strömung inkohärenter Massen weit hinausgeht. Die Gleichung stellt allgemein die Energiebilanz zwischen dem Gravitationsfelde und einem beliebigen materiellen Vorgang dar; nur ist für  $\Theta_{\mu\nu}$  der dem jeweiligen betrachteten materiellen System entsprechende Spannungs-Energiетensor einzusetzen. Die erste Summe in der Gleichung enthält die örtlichen Ableitungen der Spannungen bzw. Energiestromdichte und die zeitlichen Ableitungen der Impuls- bzw. Energiedichte; die zweite Summe ist ein Ausdruck für die Wirkungen, welche vom Schwerefelde auf den materiellen Vorgang übertragen werden.

### § 5. Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes.

Nachdem wir die Impuls-Energiegleichung für die materiellen Vorgänge (mechanische, elektrische und andere Vorgänge) mit bezug auf das Gravitationsfeld aufgestellt haben, bleibt uns noch folgende Aufgabe. Es sei der Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  für den materiellen Vorgang gegeben. Welches sind die Differentialgleichungen, welche die Größen  $g_{ik}$ , d. h. das Schwerefeld zu bestimmen gestatten? Wir suchen mit anderen Worten die Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir keine so vollkommen zwangsläufige Methode gefunden, wie für die Lösung des vorhin behandelten Problems. Es war nötig, einige Annahmen einzuführen, deren Richtigkeit zwar plausibel erscheint, aber doch nicht evident ist.

Die gesuchte Verallgemeinerung wird wohl von der Form sein

$$(11) \quad \kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu},$$

wo  $\kappa$  eine Konstante,  $\Gamma_{\mu\nu}$  ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges ist, der durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  hervorgeht. Dem Newton-Poissonschen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, daß diese Gleichungen (11) zweiter Ordnung sein sollen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck  $\Gamma_{\mu\nu}$  zu finden, der eine Verallgemeinerung von  $\Delta\varphi$  ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist.<sup>1)</sup> A priori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, daß die endgültigen, genauen Gleichungen der Gravitation von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. Es besteht daher immer noch die Möglichkeit, daß die

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 2.

vollkommen exakten Differentialgleichungen der Gravitation beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sein könnten. Der Versuch einer Diskussion derartiger Möglichkeiten wäre aber bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis der physikalischen Eigenschaften des Gravitationsfeldes verfrüht. Deshalb ist für uns die Beschränkung auf die zweite Ordnung geboten und wir müssen daher darauf verzichten, Gravitationsgleichungen aufzustellen, die sich beliebigen Transformationen gegenüber als kovariant erweisen. Es ist übrigens hervorzuheben, daß wir keinerlei Anhaltspunkte für eine allgemeine Kovarianz der Gravitationsgleichungen haben.<sup>1)</sup>

Der Laplacesche Skalar  $\Delta\varphi$  ergibt sich aus dem Skalar  $\varphi$ , indem man von diesem die Erweiterung (den Gradienten), und dann von diesem den inneren Operator (die Divergenz) bildet. Beide Operationen kann man derart verallgemeinern, daß sie an jedem Tensor von beliebig hohem Rang ausgeführt werden können, und zwar unter Zulassung beliebiger Substitutionen der Grundvariablen.<sup>2)</sup> Aber es degenerieren diese Operationen, wenn sie an dem Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  ausgeführt werden.<sup>3)</sup> Es scheint daraus hervorzugehen, daß die gesuchten Gleichungen nur bezüglich einer gewissen Gruppe von Transformationen kovariant sein werden, welche Gruppe uns aber vorläufig unbekannt ist.

Bei dieser Sachlage erscheint es mit Rücksicht auf die alte Relativitätstheorie natürlich, anzunehmen, daß in der gesuchten Transformationsgruppe die linearen Transformationen enthalten seien. Wir fordern also, daß  $\Gamma_{\mu\nu}$  ein Tensor bezüglich beliebiger linearer Transformationen sein soll.

Man beweist nun leicht (durch Ausführung der Transformation) die folgenden Sätze:

1. Ist  $\Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}$  ein kontravarianter Tensor vom Range  $n$  bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial x_{\mu}}$$

ein kontravarianter Tensor vom Range  $n + 1$  bezüglich linearer Transformationen (Erweiterung).<sup>4)</sup>

2. Ist  $\Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}$  ein kontravarianter Tensor vom Range  $n$  bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$$

1) Vgl. hierzu noch die am Anfange des § 6 gegebenen Überlegungen.

2) II. Teil, § 2.

3) Vgl. die Anm. auf S. 28 im II. Teil, § 2.

4)  $\gamma_{\mu\nu}$  ist der zu  $g_{\mu\nu}$  reziproke kontravariante Tensor (II. Teil, § 1).

ein kontravarianter Tensor vom Range  $n - 1$  bezüglich linearer Transformationen (Divergenz).

Führt man an einem Tensor der Reihe nach diese beiden Operationen aus, so erhält man einen Tensor, der wiederum vom gleichen Range ist, wie der ursprüngliche (Operation  $\mathcal{A}$ , an einem Tensor vorgenommen). Für den Fundamental-Tensor  $\gamma_{\mu\nu}$  erhält man

$$(a) \quad \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right).$$

Daß dieser Operator mit dem Laplaceschen Operator verwandt ist, erkennt man ferner durch folgende Betrachtung. In der Relativitätstheorie (Fehlen des Gravitationsfeldes), wäre zu setzen

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{für } \mu \neq \nu;$$

also

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1, \quad \gamma_{44} = \frac{1}{c^2}, \quad \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \text{für } \mu \neq \nu.$$

Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, welches genügend schwach ist, d. h. unterscheiden sich die  $g_{\mu\nu}$  und  $\gamma_{\mu\nu}$  von den soeben angegebenen Werten nur unendlich wenig, so erhält man an Stelle des Ausdruckes (a) unter Vernachlässigung der Glieder vom zweiten Grade

$$-\left( \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} \right).$$

Ist das Feld ein statisches und nur  $g_{44}$  variabel, so kommen wir also auf den Fall der Newtonschen Gravitationstheorie, falls wir den gebildeten Ausdruck bis auf eine Konstante für die Größe  $\Gamma_{\mu\nu}$  setzen.

Man könnte demnach denken, es müsse der Ausdruck (a) bis auf einen konstanten Faktor bereits die gesuchte Verallgemeinerung von  $\mathcal{A}\varphi$  sein. Dies wäre aber ein Irrtum; denn es könnten neben jenem Ausdruck noch solche Terme in einer derartigen Verallgemeinerung auftreten, die selbst Tensoren sind und bei Durchführung der eben angeführten Vernachlässigungen verschwinden. Es tritt dies immer dann ein, wenn zwei erste Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  bzw.  $\gamma_{\mu\nu}$  miteinander multipliziert erscheinen. So ist z. B.

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}$$

ein kovarianter Tensor zweiten Ranges (gegenüber linearen Transformationen); derselbe wird unendlich klein zweiter Ordnung, wenn die Größen  $g_{\alpha\beta}$  und  $\gamma_{\alpha\beta}$  von Konstanten nur um Unendlich-Kleine erster Ordnung abweichen. Wir müssen daher zulassen, daß in  $\Gamma_{\mu\nu}$  neben (a) noch andere Terme auftreten, die vorläufig nur die Bedingung erfüllen

müssen, daß sie zusammen linearen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen müssen.

Zur Auffindung dieser Terme dient uns der Impulsenergiesatz. Damit die benutzte Methode klar hervortrete, will ich sie zunächst an einem allgemein bekannten Beispiel anwenden.

In der Elektrostatik ist  $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\varrho$  die  $\nu^{\text{te}}$  Komponente des pro Volumeneinheit auf die Materie übertragenen Impulses, falls  $\varphi$  das elektrostatische Potential,  $\varrho$  die elektrische Dichte bedeutet. Es ist eine Differentialgleichung für  $\varphi$  gesucht, derart, daß der Impulssatz stets erfüllt ist. Es ist wohlbekannt, daß die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu^2} = \varrho \quad .$$

die Aufgabe löst. Daß der Impulssatz erfüllt ist, geht hervor aus der Identität

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{1}{2} \sum_\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} \left( = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \varrho \right).$$

Wenn also der Impulssatz erfüllt ist, muß für jedes  $\nu$  eine identische Gleichung von folgendem Bau existieren: Auf der rechten Seite steht  $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$  multipliziert mit der linken Seite der Differentialgleichung, auf der linken Seite der Identität steht eine Summe von Differentialquotienten.

Wäre die Differentialgleichung für  $\varphi$  noch nicht bekannt, so ließe sich das Problem von deren Auffindung auf dasjenige der Auffindung jener identischen Gleichung zurückführen. Es ist nun für uns die Erkenntnis wesentlich, daß jene Identität sich ableiten läßt, wenn einer der in ihr auftretenden Terme bekannt ist. Man hat nichts weiteres zu tun, als die Regel von der Differentiation eines Produktes in den Formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x_\nu} v + \frac{\partial v}{\partial x_\nu} u$$

und

$$u \frac{\partial v}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (uv) - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} v$$

wiederholt anzuwenden und schließlich die Glieder, welche Differentialquotienten sind, auf die linke Seite, die übrigen auf die rechte Seite zu stellen. Geht man z. B. von dem ersten Glied der obigen Identität aus, so erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) &= \sum_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \sum_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \cdot \sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

woraus durch Anordnen die obige Identität hervorgeht.

Wir wenden uns nun unserem Problem wieder zu. Aus Gleichung (10) geht hervor, daß

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu}, \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

der pro Volumeneinheit auf die Materie vom Gravitationsfeld übertragene Impuls (bzw. Energie) ist. Damit der Energie-Impulssatz erfüllt sei, müssen die Differentialausdrücke  $\Gamma_{\mu\nu}$  der Fundamentalgrößen  $\gamma_{\mu\nu}$ , welche in die Gravitationsgleichungen

$$\kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eingehen, so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{2\kappa} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Gamma_{\mu\nu}$$

sich derart umformen läßt, daß er als Summe von Differentialquotienten erscheint. Es ist andererseits bekannt, daß in dem für  $\Gamma_{\mu\nu}$  zu suchen den Ausdruck der Term (a) erscheint. Die gesuchte identische Gleichung ist also von folgender Gestalt:

Summe von Differentialquotienten

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) \right.$$

+ weitere Glieder, die bei Bildung der ersten Annäherung wegfallen. }

Hierdurch ist die gesuchte Identität eindeutig bestimmt; bildet man sie nach dem angedeuteten Verfahren<sup>1)</sup>, so erhält man:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma} \right) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right) \\ & = \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\varrho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der in der geschweiften Klammer der rechten Seite stehende Ausdruck  $\Gamma_{\mu\nu}$  ist demnach der von uns gesuchte Tensor, der in die Gravitationsgleichungen

$$\kappa \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eintritt. Um diese Gleichungen besser überblicken zu können, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$(13) \quad -2\kappa \cdot \vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left( \gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta\nu} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right).$$

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 3.

$\mathfrak{D}_{\mu\nu}$  sei als „kontravarianter Spannungs-Energiетensor des Gravitationsfeldes“ bezeichnet. Den zu ihm reziproken kovarianten Tensor bezeichnen wir mit  $t_{\mu\nu}$ ; es ist also

$$(14) \quad -2\kappa \cdot t_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left( \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right).$$

Ebenfalls zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein für Differentialoperationen, ausgeführt an den Fundamentaltensoren  $\gamma$  bzw.  $g$ :

$$(15) \quad \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\varrho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta},$$

bzw.

$$(16) \quad D_{\mu\nu}(g) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\tau\varrho} \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta}.$$

Jeder dieser Operatoren liefert wieder einen Tensor der gleichen Art (bezgl. linearer Transformationen).

Bei Verwendung dieser Abkürzungen nimmt die Identität (12) die Form an:

$$(12a) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \kappa \mathfrak{D}_{\mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ -\mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) + \kappa \mathfrak{D}_{\mu\nu} \right\},$$

oder auch

$$(12b) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} \cdot \kappa t_{\mu\sigma} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ -D_{\mu\nu}(g) - \kappa \cdot t_{\mu\nu} \right\}.$$

Schreiben wir die Erhaltungsgleichung (10) der Materie und die Erhaltungsgleichung (12a) für das Gravitationsfeld in der Form

$$(10) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0$$

$$(12c) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \mathfrak{D}_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \mathfrak{D}_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2\kappa} \cdot \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma),$$

so erkennt man, daß der Spannungs-Energie-Tensor  $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$  des Gravitationsfeldes in den Erhaltungssatz für das Gravitationsfeld genau ebenso eintritt, wie der Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  des materiellen Vorganges in den Erhaltungssatz für diesen Vorgang, ein bemerkenswerter Umstand bei der Verschiedenheit der Ableitungen beider Sätze.

Aus der Gleichung (12a) folgt als Ausdruck für den Differentialtensor, der in die Gravitationsgleichungen eingeht

$$(17) \quad \Gamma_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) - \kappa \cdot \mathfrak{D}_{\mu\nu}.$$

Die Gravitationsgleichungen (11) lauten also

$$(18) \quad \mathcal{A}_{\mu\nu}(\gamma) = \kappa(\Theta_{\mu\nu} + \mathfrak{D}_{\mu\nu}).$$

Diese Gleichungen erfüllen eine Forderung, die unseres Erachtens an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muß; sie zeigen nämlich, daß der Tensor  $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$  des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt, wie der Tensor  $\Theta_{\mu\nu}$  der materiellen Vorgänge. Eine Ausnahmestellung der Gravitationsenergie gegenüber allen anderen Energiearten würde ja zu unhaltbaren Konsequenzen führen.

Durch Addition der Gleichungen (10) und (12a) findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (18)

$$(19) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} (\Theta_{\mu\nu} + \mathfrak{D}_{\mu\nu}) \right\} = 0. \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

Hieraus ersieht man, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.

Bei der bisher gegebenen Darstellung haben wir die kontravarianten Tensoren bevorzugt, weil sich der kontravariante Spannungsenergie-tensor der Strömung inkohärenter Massen in besonders einfacher Weise ausdrücken läßt. Indessen können wir die gewonnenen Fundamentalbeziehungen ebenso einfach unter Benutzung kovarianter Tensoren ausdrücken. Statt  $\Theta_{\mu\nu}$  haben wir dann  $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Theta_{\alpha\beta}$  als Spannungsenergie-tensor des materiellen Vorganges zugrunde zu legen. Statt Gleichung (10) erhalten wir durch gliedweise Umformung

$$(20) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} T_{\mu\sigma}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot T_{\mu\nu} = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (16) folgt, daß die Gleichungen des Gravitationsfeldes auch in der Form

$$(21) \quad -D_{\mu\nu}(g) = \kappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})$$

geschrieben werden können, welche Gleichungen auch direkt aus (18) abgeleitet werden können. Analog (19) besteht die Beziehung

$$(22) \quad \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} (T_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu}) \right\} = 0.$$

## § 6. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge.

Weil bei jeglichem physikalischen Vorgang Impuls und Energie eine Rolle spielen, diese letzteren aber ihrerseits das Gravitationsfeld

bestimmen und von ihm beeinflußt werden, müssen die das Schwerfeld bestimmenden Größen  $g_{\mu\nu}$  in allen physikalischen Gleichungssystemen auftreten. So haben wir gesehen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die Gleichung

$$\delta \left\{ \int ds \right\} = 0$$

bestimmt ist, wobei

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

$ds$  ist eine Invariante beliebigen Substitutionen gegenüber. Die gesuchten Gleichungen, welche den Ablauf irgend eines physikalischen Vorganges bestimmen, müssen nun so gebaut sein, daß die Invarianz von  $ds$  die Kovarianz des betreffenden Gleichungssystems zur Folge hat.

Bei der Verfolgung dieser allgemeinen Aufgaben stoßen wir aber zunächst auf eine prinzipielle Schwierigkeit. Wir wissen nicht, bezüglich welcher Gruppe von Transformationen die gesuchten Gleichungen kovariant sein müssen. Am natürlichsten erscheint es zunächst, zu verlangen, daß die Gleichungssysteme beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sein sollen. Dem steht aber entgegen, daß die von uns aufgestellten Gleichungen des Gravitationsfeldes diese Eigenschaft nicht besitzen. Wir haben für die Gravitationsgleichungen nur beweisen können, daß sie beliebigen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind; wir wissen aber nicht, ob es eine allgemeine Transformationsgruppe gibt, der gegenüber die Gleichungen kovariant sind. Die Frage nach der Existenz einer derartigen Gruppe für das Gleichungssystem (18) bzw. (21) ist die wichtigste, welche sich an die hier gegebenen Ausführungen anknüpft. Jedenfalls sind wir bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie nicht berechtigt, die Kovarianz physikalischer Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern.

Andererseits aber haben wir gesehen, daß sich eine Energie-Impuls-Bilanzgleichung für materielle Vorgänge hat aufstellen lassen (§ 4, Gleichung 10), welche beliebige Transformationen gestattet. Es scheint deshalb doch natürlich, wenn wir voraussetzen, daß alle physikalischen Gleichungssysteme mit Ausschluß der Gravitationsgleichungen so zu formulieren sind, daß sie beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Die diesbezügliche Ausnahmestellung der Gravitationsgleichungen gegenüber allen anderen Systemen hängt nach meiner Meinung damit zusammen, daß nur erstere zweite Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors enthalten dürften.

Die Aufstellung derartiger Gleichungssysteme erfordert die Hilfsmittel der verallgemeinerten Vektoranalysis, wie sie im II. Teil dargestellt ist.

Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, wie man auf diesem Wege die elektromagnetischen Feldgleichungen für das Vakuum gewinnt.<sup>1)</sup> Wir gehen davon aus, daß die elektrische Ladung als etwas unveränderliches anzusehen ist. Ein unendlich kleiner, beliebig bewegter Körper habe die Ladung  $e$  und für einen mitbewegten Körper das Volumen  $dV_0$  (Ruhvolumen). Wir definieren  $\frac{e}{dV_0} = \varrho_0$  als die wahre Dichte der Elektrizität; diese ist ihrer Definition nach ein Skalar. Es ist daher

$$\varrho_0 \frac{dx_\nu}{ds} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

ein kontravarianter Vierervektor, den wir umformen, indem wir die Dichte  $\varrho$  der Elektrizität, aufs Koordinatensystem bezogen, durch die Gleichung

$$\varrho_0 dV_0 = \varrho dV$$

definieren. Unter Benutzung der Gleichung

$$dV_0 ds = \sqrt{-g} \cdot dV \cdot dt$$

des § 4 erhält man

$$\varrho_0 \frac{dx_\nu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varrho \frac{dx_\nu}{dt},$$

d. h. den kontravarianten Vektor der elektrischen Strömung.

Das elektromagnetische Feld führen wir zurück auf einen speziellen, kontravarianten Tensor zweiten Ranges  $\varphi_{\mu\nu}$  (einen Sechservektor) und bilden den „dualen“ kontravarianten Tensor zweiten Ranges  $\varphi_{\mu\nu}^*$  nach der Methode, die im II. Teil, § 3, auseinandergesetzt ist (Formel 42). Die Divergenz eines speziellen kontravarianten Tensors zweiten Ranges ist nach Formel 40 des II. Teiles, § 3

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}).$$

Als Verallgemeinerung der Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen setzen wir die Gleichungen an

$$(23) \quad \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}) = \varrho \frac{dx_\mu}{dt}, \quad (dt = dx_4)$$

$$(24) \quad \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}^*) = 0,$$

deren Kovarianz demnach evident ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \cdot \varphi_{23} &= \mathfrak{E}_x, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{31} = \mathfrak{E}_y, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{12} = \mathfrak{E}_z; \\ \sqrt{-g} \cdot \varphi_{14} &= -\mathfrak{E}_x, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{24} = -\mathfrak{E}_y, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{34} = -\mathfrak{E}_z, \end{aligned}$$

1) Vgl. hierzu auch die auf S. 23 zitierte Abhandlung von Kottler, § 3.

und

$$\rho \frac{dx_\mu}{dt} = u_\mu,$$

so nimmt das Gleichungssystem (23) in ausführlicher Schreibweise die Form an

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= u_x \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} &= \rho, \end{aligned}$$

welche Gleichungen bis auf die Wahl der Einheiten mit dem ersten Maxwell'schen System übereinstimmen. Für die Bildung des zweiten Systems ist zunächst zu beachten, daß zu den Komponenten

$$\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z, -\mathfrak{E}_x, -\mathfrak{E}_y, -\mathfrak{E}_z$$

von

$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}$$

die Komponenten

$$-\mathfrak{E}_x, -\mathfrak{E}_y, -\mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$$

der Ergänzung  $f_{\mu\nu}$  gehören (II. Teil, § 3, Formeln 41a). Für den Fall des Fehlens des Gravitationsfeldes ergibt sich hieraus das zweite System, d. h. Gleichung (24) in der Form

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist erwiesen, daß die aufgestellten Gleichungen wirklich eine Verallgemeinerung derjenigen der gewöhnlichen Relativitätstheorie bilden.

§ 7. Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?

Bei der unleugbaren Kompliziertheit der hier vertretenen Theorie der Gravitation müssen wir uns ernstlich fragen, ob nicht die bisher ausschließlich vertretene Auffassung, nach welcher das Gravitationsfeld auf einen Skalar  $\Phi$  zurückgeführt wird, die einzig naheliegende und berechtigte sei. Ich will kurz darlegen, warum wir diese Frage verneinen zu müssen glauben.

Es bietet sich bei Charakterisierung des Gravitationsfeldes durch einen Skalar ein Weg dar, welcher dem im Vorhergehenden eingeschlagenen ganz analog ist. Man setzt als Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in Hamiltonscher Form an

$$\delta \left\{ \int \Phi ds \right\} = 0,$$

wobei  $ds$  das vierdimensionale Linienelement der gewöhnlichen Relativitätstheorie und  $\Phi$  ein Skalar ist, und geht dann ganz analog vor wie im Vorhergehenden, ohne die gewöhnliche Relativitätstheorie verlassen zu müssen.

Auch hier ist der materielle Vorgang beliebiger Art durch einen Spannungs-Energie-Tensor  $T_{\mu\nu}$  charakterisiert. Aber es ist bei dieser Auffassung ein Skalar maßgebend für die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und materiellem Vorgang. Dieser Skalar kann, worauf mich Herr Laue aufmerksam machte, nur

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = P$$

sein, den ich als den „Laueschen Skalar“ bezeichnen will<sup>1)</sup>. Dann kann man dem Satz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse auch hier bis zu einem gewissen Grade gerecht werden. Herr Laue wies mich nämlich darauf hin, daß für ein abgeschlossenes System

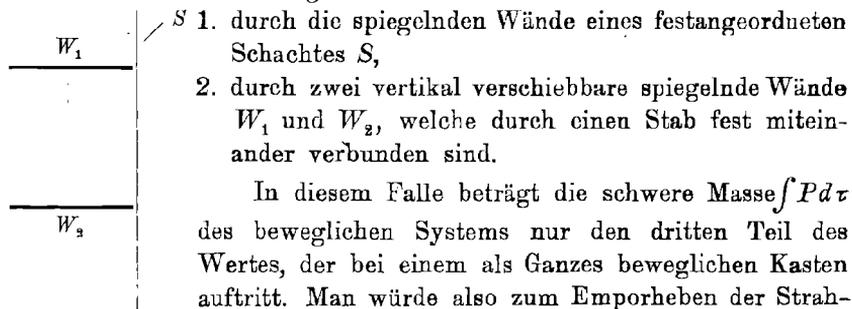
$$\int P dV = \int T_{44} d\tau$$

ist. Hieraus ersieht man, daß für die Schwere eines abgeschlossenen Systems auch nach dieser Auffassung seine Gesamtenergie maßgebend ist.

Die Schwere nicht abgeschlossener Systeme würde aber von den orthogonalen Spannungen  $T_{11}$  usw. abhängen, denen das System unterworfen ist. Daraus entstehen Konsequenzen, die mir unannehmbar erscheinen, wie an dem Beispiel der Hohlraumstrahlung gezeigt werden soll.

Für die Strahlung im Vakuum verschwindet bekanntlich der Skalar  $P$ . Ist die Strahlung in einem masselosen spiegelnden Kasten eingeschlossen, so erfahren deren Wände Zugspannungen, die bewirken, daß dem System, — als Ganzes genommen — eine schwere Masse  $\int P d\tau$  zukommt, die der Energie  $E$  der Strahlung entspricht.

Statt nun aber die Strahlung in einen Hohlkasten einzuschließen, denke ich mir dieselbe begrenzt



1) Vgl. II. Teil, § 1, letzte Formel.

lung entgegen einem Schwerefelde nur den dritten Teil der Arbeit aufwenden müssen als in dem vorhin betrachteten Falle, daß die Strahlung in einem Kasten eingeschlossen ist. Dies erscheint mir unannehmbar.

Ich muß freilich zugeben, daß für mich das wirksamste Argument dafür, daß eine derartige Theorie zu verwerfen sei, auf der Überzeugung beruht, daß die Relativität nicht nur orthogonalen linearen Substitutionen gegenüber besteht, sondern einer viel weiteren Substitutionsgruppe gegenüber. Aber wir sind schon deshalb nicht berechtigt, dieses Argument geltend zu machen, weil wir nicht imstande waren, die (allgemeinste) Substitutionsgruppe ausfindig zu machen, welche zu unseren Gravitationsgleichungen gehört.

## II. Mathematischer Teil.

VON MARCEL GROSSMANN.

Die mathematischen Hilfsmittel für die Entwicklung der Vektoranalysis eines Gravitationsfeldes, das durch die Invarianz des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{\mu \nu} g_{\mu \nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

charakterisiert ist, gehen zurück auf die fundamentale Abhandlung von Christoffel<sup>1)</sup> über die Transformation der quadratischen Differentialformen. Ricci und Levi-Civita<sup>2)</sup> haben, ausgehend von den Christoffelschen Resultaten, ihre Methoden der absoluten, d. h. vom Koordinatensystem unabhängigen Differentialrechnung entwickelt, die gestatten, den Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine invariante Form zu geben. Da aber die Vektoranalysis des auf beliebige krummlinige Koordinaten bezogenen euklidischen Raumes formal identisch ist mit der Vektoranalysis einer beliebigen, durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit, so bietet es keine Schwierigkeiten, die vektoranalytischen Begriffsbildungen, wie sie in den letzten Jahren von Minkowski, Sommerfeld, Laue u. a. für die Relativitätstheorie entwickelt worden sind, auszudehnen auf die vorstehende allgemeine Theorie von Einstein.

Die allgemeine Vektoranalysis, die man so erhält, erweist sich bei einiger Übung als ebenso einfach zu handhaben, wie die spezielle des drei- oder vierdimensionalen euklidischen Raumes; ja die größere Allgemeinheit ihrer Begriffsbildungen verleiht ihr eine Übersichtlichkeit, die dem Spezialfall häufig genug abgeht.

1) Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. f. Math. 70 (1869), S. 46.

2) Ricci et Levi-Civita, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. 54 (1901), S. 125.

Die Theorie der speziellen Tensoren (§ 3) ist in einer während des Entstehens dieser Arbeit erschienenen Abhandlung von Kottler<sup>1)</sup> vollständig behandelt worden und zwar, was im allgemeinen Falle nicht möglich ist, auf Grund der Theorie der Integralformen.

Da sich an die Gravitationstheorie von Einstein, insbesondere aber an das Problem der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes, eingehendere mathematische Untersuchungen werden knüpfen müssen, mag eine systematische Darstellung der allgemeinen Vektoranalysis am Platze sein. Dabei habe ich mit Absicht geometrische Hilfsmittel beiseite gelassen, da sie meines Erachtens wenig zur Veranschaulichung der Begriffsbildungen der Vektoranalysis beitragen.

§ 1. Allgemeine Tensoren.

Es sei

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

das Quadrat des Linienelementes, welches als invariantes Maß des Abstandes zweier unendlich-benachbarter Raum-Zeitpunkte betrachtet wird. Die folgenden Entwicklungen sind, so weit keine andere Bemerkung gemacht wird, von der Anzahl der Variablen unabhängig; diese möge mit  $n$  bezeichnet sein.

Bei einer Transformation

$$(2) \quad x_i = x_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

der Variablen, oder einer Transformation

$$(3) \quad \begin{cases} dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} dx'_k = \sum_k p_{ik} dx'_k \\ dx'_i = \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k \end{cases}$$

ihrer Differentiale, transformieren sich die Koeffizienten des Linienelementes gemäß der Formeln

$$(4) \quad g'_{rs} = \sum_{\mu\nu} p_{\mu r} p_{\nu s} g_{\mu\nu}.$$

Es sei  $g$  die Diskriminante der Differentialform (1), d. h. die Determinante

$$g = |g_{\mu\nu}|.$$

Ist  $\gamma_{\mu\nu}$  die durch die Diskriminante dividierte („normierte“), dem Element  $g_{\mu\nu}$  adjungierte Unterdeterminante von  $g$ , so transformieren sich diese Größen  $\gamma_{\mu\nu}$  nach den Formeln

$$(5) \quad \gamma'_{rs} = \sum_{\mu\nu} \pi_{\mu r} \pi_{\nu s} \gamma_{\mu\nu}.$$

1) Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt, Wien. Ber. 121 (1912).

Wir definieren nun:

I. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen  $T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}$  der Variablen  $x$  heie ein **kovarianter Tensor vom Range  $\lambda$** , wenn diese Groen sich transformieren gem den Formeln

$$(6) \quad T'_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_\lambda r_\lambda} \cdot T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}$$

II. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen  $\Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}$  der Variablen  $x$  heie ein **kontravarianter Tensor vom Range  $\lambda$** , wenn diese Groen sich transformieren gem den Formeln

$$(7) \quad \Theta'_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \pi_{i_1 r_1} \pi_{i_2 r_2} \dots \pi_{i_\lambda r_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \cdot^1$$

III. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen  $\mathfrak{X}_{i_1 i_2 \dots i_\mu / k_1 k_2 \dots k_\nu}$  der Variablen  $x$  heie ein **gemischter Tensor**, kovariant vom Range  $\mu$ , kontravariant vom Range  $\nu$ , wenn diese Groen sich transformieren nach den Formeln

$$(8) \quad \mathfrak{X}'_{r_1 r_2 \dots r_\mu / s_1 s_2 \dots s_\nu} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_\mu \\ k_1 k_2 \dots k_\nu}} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_\mu r_\mu} \cdot \pi_{k_1 s_1} \pi_{k_2 s_2} \dots \pi_{k_\nu s_\nu} \cdot \mathfrak{X}_{i_1 i_2 \dots i_\mu / k_1 k_2 \dots k_\nu}$$

Aus diesen Definitionen und den Gleichungen (4) und (5) folgt:

Die Groen  $g_{\mu\nu}$  bilden einen kovarianten, die Groen  $\gamma_{\mu\nu}$  einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges, die Fundamentaltensoren des Gravitationsfeldes im Falle  $n = 4$ .

Die Groen  $dx_i$  bilden nach Gleichung (3) einen kontravarianten Tensor ersten Ranges. Tensoren ersten Ranges nennt man auch Vektoren erster Art oder Vierervektoren bei  $n = 4$ .

Unmittelbar aus der Definition der Tensoren ergeben sich die folgenden algebraischen Tensoroperationen:

1. Die Summe zweier gleichartiger Tensoren vom Range  $\lambda$  ist wieder ein gleichartiger Tensor vom Range  $\lambda$ , dessen Komponenten durch Addition der entsprechenden Komponenten beider Tensoren entstehen.

1) Unsere kovarianten (kontravarianten) Tensoren vom Range  $\lambda$  sind also identisch mit den „kovarianten (kontravarianten) Systemen  $\lambda$ ter Ordnung“ von Ricci und Levi-Civita und werden von diesen Autoren bezeichnet mit  $X_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$  bzw.  $X^{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$ . So viele Vorteile diese letztere Bezeichnung auch bietet, so haben uns doch Komplikationen in zusammengesetzteren Gleichungen gezwungen, die obigen Bezeichnungen zu whlen, also kovariante Tensoren mit lateinischen, kontravariante mit griechischen, gemischte mit deutschen Buchstaben zu bezeichnen. Kovariante und kontravariante Tensoren sind besondere Flle der gemischten Tensoren.

2. Das äußere Produkt zweier kovarianter (kontravarianter) Tensoren vom Range  $\lambda$  bzw.  $\mu$  ist ein kovarianter (kontravarianter) Tensor vom Range  $\lambda + \mu$  mit den Komponenten

$$(9) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu} = A_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \cdot B_{k_1 k_2 \dots k_\mu},$$

bzw.

$$(9') \quad \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu} = \Phi_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \cdot \Psi_{k_1 k_2 \dots k_\mu}.$$

3. Als inneres Produkt zweier Tensoren bezeichnen wir a) den kovarianten Tensor

$$(10) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\mu} \Phi_{k_1 k_2 \dots k_\mu} \cdot A_{i_1 i_2 \dots i_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu},$$

b) den kontravarianten Tensor

$$(11) \quad \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\mu} A_{k_1 k_2 \dots k_\mu} \cdot \Phi_{i_1 i_2 \dots i_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu},$$

c) den gemischten Tensor

$$(12) \quad \mathfrak{F}_{r_1 r_2 \dots r_\mu / s_1 s_2 \dots s_\nu} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} A_{k_1 k_2 \dots k_\lambda r_1 r_2 \dots r_\mu} \cdot \Phi_{k_1 k_2 \dots k_\lambda s_1 s_2 \dots s_\nu},$$

oder ganz allgemein, die drei Fälle a) bis c) mit enthaltend

$$d) \quad \mathfrak{F}_{r_1 r_2 \dots r_\mu / s_1 s_2 \dots s_\nu} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} \mathfrak{A}_{r_1 r_2 \dots r_\mu / k_1 k_2 \dots k_\lambda} \cdot \mathfrak{B}_{k_1 k_2 \dots k_\lambda s_1 s_2 \dots s_\nu}.$$

Die der gewöhnlichen Vektoranalysis entnommenen Bezeichnungen „äußeres und inneres Produkt“ rechtfertigen sich, weil jene Operationen sich letzten Endes als besondere Fälle der hier betrachteten ergeben.

Ist in den Fällen a) oder b) der Rang  $\lambda$  gleich Null, so ist das innere Produkt ein Skalar.

4. Reziprozität eines kovarianten und eines kontravarianten Tensors. Aus einem kovarianten Tensor vom Range  $\lambda$  bildet man den reziproken kontravarianten Tensor vom Range  $\lambda$  durch  $\lambda$ -fache innere Multiplikation mit dem kontravarianten Fundamentaltensor:

$$(13) \quad \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} \gamma_{i_1 k_1} \gamma_{i_2 k_2} \dots \gamma_{i_\lambda k_\lambda} \cdot T_{k_1 k_2 \dots k_\lambda},$$

woraus durch Auflösung

$$(14) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_\lambda} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \dots g_{i_\lambda k_\lambda} \cdot \Theta_{k_1 k_2 \dots k_\lambda}.$$

Man findet daher aus einem Tensor einen Skalar, in dem man ihn mit seinem reziproken Tensor multipliziert nach der Formel

$$(15) \quad \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} T_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}.$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor ersten Ranges (Vierervektor bei  $n = 4$ ) hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_i T_k$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_i \Theta_k.$$

In der gewöhnlichen Relativitätstheorie ist die Kontravarianz identisch der Kovarianz und obige Invariante wird zum Quadrat des Betrages des Vierervektors

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + T_t^2.$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor zweiten Ranges hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_{ik}$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_{ik},$$

die im Falle der bisherigen Relativitätstheorie zu

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{tt}$$

wird.<sup>1)</sup>

## § 2. Differentialoperationen an Tensoren.

Wir führen folgende allgemeine Definitionen ein:

I. Als **Erweiterung** eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Range  $\lambda$  bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Range  $\lambda + 1$ , der durch „kovariante (kontravariante) Differentiation“ aus jenem hervorgeht.

Nach Christoffel (l. c.) ist

$$(16) \quad T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda s} = \frac{\partial T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}}{\partial x_s} - \sum_k \left( \left\{ \begin{matrix} r_1 s \\ k \end{matrix} \right\} T_{k r_2 \dots r_\lambda} + \left\{ \begin{matrix} r_2 s \\ k \end{matrix} \right\} T_{r_1 k \dots r_\lambda} + \dots + \left\{ \begin{matrix} r_\lambda s \\ k \end{matrix} \right\} T_{r_1 r_2 \dots k} \right)$$

1) Wir verzichten im folgenden darauf, jeweils die besondere Form anzugeben, welche unsere Formeln im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie annehmen, begnügen uns vielmehr damit, hinzuweisen auf die nachstehenden Darstellungen:

1. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachrichten 1908.

2. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I und II, Ann. d. Physik, vierte Folge, 32 (1910) und 33 (1910).

3. Laue, Das Relativitätsprinzip. Die Wissenschaft, Heft 38, 2. A. (1913).

ein kovarianter Tensor vom Range  $\lambda + 1$ , der aus dem kovarianten Tensor vom Range  $\lambda$  hervorgeht. Ricci und Levi-Civita nennen die Differentialoperation der rechten Seite dieser Gleichung die „kovariante Differentiation“ des Tensors  $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$ . Hierbei bedeutet

$$(17) \quad \left\{ \begin{matrix} r s \\ u \end{matrix} \right\} = \sum_t \gamma_{ut} \left[ \begin{matrix} r s \\ t \end{matrix} \right],$$

$$(18) \quad \left[ \begin{matrix} r s \\ t \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t} \right).$$

$\left[ \begin{matrix} r s \\ t \end{matrix} \right]$  und  $\left\{ \begin{matrix} r s \\ u \end{matrix} \right\}$  sind die Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole erster bzw. zweiter Art; durch Auflösung der Gleichungen (17) findet man

$$(19) \quad \left[ \begin{matrix} r s \\ u \end{matrix} \right] = \sum_t g_{ut} \left\{ \begin{matrix} r s \\ t \end{matrix} \right\}.^1)$$

Führt man in die Gleichung (16) an Stelle der kovarianten Tensoren die zu ihnen reziproken kontravarianten Tensoren ein, so erhält man als „kontravariante Erweiterung“

$$(20) \quad \Theta_{r_1 r_2 \dots r_\lambda s} = \sum_{ik} \gamma_{si} \left( -\frac{\partial \Theta_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}}{\partial x_i} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r_1 \end{matrix} \right\} \Theta_{k r_2 \dots r_\lambda} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r_2 \end{matrix} \right\} \Theta_{r_1 k \dots r_\lambda} + \dots + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r_\lambda \end{matrix} \right\} \Theta_{r_1 r_2 \dots k} \right).$$

II. Als Divergenz eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Range  $\lambda$  bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Range  $\lambda - 1$ , der durch innere Multiplikation der Erweiterung mit dem kontravarianten (kovarianten) Fundamentaltensor entsteht.

Somit ist die Divergenz des kovarianten Tensors  $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$  der Tensor

$$(21) \quad T_{r_2 r_3 \dots r_\lambda} = \sum_{s r_1} \gamma_{s r_1} T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda s},$$

und die Divergenz des kontravarianten Tensors  $\Theta_{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$  ist der Tensor

$$(22) \quad \Theta_{r_2 r_3 \dots r_\lambda} = \sum_{s r_1} g_{s r_1} \Theta_{r_1 r_2 \dots r_\lambda s}.$$

Die Divergenz eines Tensors geht nicht eindeutig aus diesem hervor; das Resultat ändert sich im allgemeinen, wenn man in den Gleichungen (21) und (22)  $r_1$  durch einen der Indizes  $r_2, r_3 \dots r_\lambda$  ersetzt.

III. Als verallgemeinerte Laplacesche Operation an einem Tensor bezeichnen wir die Aufeinanderfolge der Erweiterung und der Divergenz. Die verallgemeinerte Laplacesche Operation läßt daher aus einem Tensor einen gleichartigen gleichen Ranges hervorgehen.

Von besonderem Interesse sind die Fälle  $\lambda = 0, 1, 2$ .

1) Auf Grund dieser Formeln beweist man leicht, daß die Erweiterung des Fundamentaltensors identisch verschwindet.

a)  $\lambda = 0$ .

Der Ausgangstensor ist ein Skalar  $T$ , den wir als ko- oder kontravarianten Tensor vom Range 0 betrachten können.

$$(23) \quad T_r = \frac{\partial T}{\partial x_r}$$

ist die kovariante Erweiterung des Skalars  $T$ , d. i. ein kovarianter Tensor ersten Ranges (kovarianter Vierervektor für  $n = 4$ ), den man den Gradienten des Skalars nennt. Die Invariante

$$(24) \quad \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \frac{\partial T}{\partial x_s}$$

ist der erste Beltramische Differentialparameter des Skalars  $T$ .

Um die Divergenz des Gradienten zu bilden, hat man aus seiner Erweiterung

$$T_{rs} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_k \left\{ \begin{matrix} rs \\ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

den Skalar

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs}$$

zu bilden, dem man die Form

$$(25) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{g} \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r})$$

geben kann.<sup>1)</sup> Die Divergenz des Gradienten ist das Resultat der verallgemeinerten Laplaceschen Operation ausgeführt am Skalar  $T$  und ist identisch mit dem zweiten Beltramischen Differentialparameter des Skalars  $T$ .

b)  $\lambda = 1$ .

Der Ausgangstensor sei ein kovarianter Vierervektor, könnte aber ebensogut ein kontravarianter Vierervektor sein.

Die kovariante Erweiterung ist nach (16)

$$(26) \quad T_{rs} = \frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \sum_k \left\{ \begin{matrix} rs \\ k \end{matrix} \right\} T_k.$$

Die Divergenz ist

$$(27) \quad \sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rsk} \gamma_{rs} \left( \frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \left\{ \begin{matrix} rs \\ k \end{matrix} \right\} T_k \right),$$

der wir nach (17) die Form geben:

$$(28) \quad \sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rskl} \left( \frac{\partial}{\partial x_s} (\gamma_{rs} T_r) - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s} \cdot T_r - \frac{1}{2} \gamma_{rs} \gamma_{kl} \left( \frac{\partial g_{rl}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \right) T_k \right).$$

1) Siehe z. B. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, erste Auflage, S. 47; oder auch die Umrechnung der Divergenz eines Vierervektors im nachstehenden Falle b).

Eliminiert man  $\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s}$  vermöge der Formel<sup>1)</sup>

$$(29) \quad \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_i} = - \sum_{\rho\sigma} \gamma_{r\rho} \gamma_{s\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_i},$$

so heben sich in Gleichung (28) die drei mittleren Glieder unter dem Summenzeichen auf und es bleibt neben dem ersten Gliede

$$\sum_{rskl} \frac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \cdot \gamma_{kl} T_k = \sum_{kl} \gamma_{kl} T_k \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_i},$$

so daß man für die Divergenz des kovarianten Vierervektors<sup>2)</sup> findet

$$(30) \quad \sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{g} \gamma_{rs} T_r).$$

e)  $\lambda = 2.$

Der Ausgangstensor sei ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges  $\Theta_r$ , dessen Erweiterung nach Formel (20) lautet

$$(31) \quad \Theta_{rst} = \sum_{ik} \gamma_{ti} \left( \frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_i} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\} \Theta_{rk} \right).$$

Hieraus ergibt sich als Divergenz des kontravarianten Tensors  $\Theta_r$ , entweder die Zeilendivergenz

$$(32) \quad \Theta_r = \sum_{st} g_{st} \Theta_{rst} = \sum_{sk} \left( \frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_s} + \left\{ \begin{matrix} sk \\ r \end{matrix} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ \begin{matrix} sk \\ s \end{matrix} \right\} \Theta_{rk} \right),$$

oder die Kolonnendivergenz

$$(33) \quad \Theta_s = \sum_{rt} g_{rt} \Theta_{rst} = \sum_{rk} \left( \frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_r} + \left\{ \begin{matrix} rk \\ r \end{matrix} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ \begin{matrix} rk \\ s \end{matrix} \right\} \Theta_{rk} \right),$$

1) Diese Formel, die wir auch in § 4 bei der Aufstellung der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes verwenden, beweisen wir folgendermaßen:

Es ist

$$\sum_i g_{ii} \gamma_{ki} = \delta_{ik} \quad (0 \text{ oder } 1),$$

also

$$\sum_i g_{ii} \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_i} = - \sum_i \gamma_{ki} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i},$$

wo  $i$  irgend eine der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ist.

Für ein bestimmtes  $k$  erhält man so  $n$  Gleichungen ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mit den  $n$  Unbekannten  $\frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_i}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), deren Auflösung die Formel des Textes liefert.

2) Zu dem nämlichen Ergebnis gelangt Kottler (l. c. pag. 21) ausgehend von einem speziellen Tensor dritten Ranges (vgl. § 3 dieser Abhandlung) mit Hilfe der Theorie der Integralformen.

zwei Differentialoperationen, die für symmetrische Tensoren zusammenfallen. Weil

$$(34) \quad \sum_r \left\{ \begin{matrix} rk \\ r \end{matrix} \right\} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \left[ \begin{matrix} rk \\ s \end{matrix} \right] = \sum_{rs} \frac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_k}$$

ist, so läßt sich die Formel (33) auch zusammenfassen in

$$(35) \quad \Theta_s = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{rs}) + \sum_{rk} \left\{ \begin{matrix} rk \\ s \end{matrix} \right\} \Theta_{rk}$$

### § 3. Spezielle Tensoren (Vektoren).

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor heiße **speziell**, wenn seine Komponenten ein System von alternierenden Funktionen der Grundvariablen bilden.

Die Komponenten eines speziellen Tensors sind demnach den folgenden Bedingungen unterworfen:

1. Es ist  $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = 0$ , wenn zwei der Indizes  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$  einander gleich sind.

2. Unterscheiden sich  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$  und  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$  nur durch die Reihenfolge der Indizes, so ist  $T_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \pm T_{s_1 s_2 \dots s_\lambda}$ , je nachdem  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$  und  $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$  Permutationen derselben Klasse sind oder nicht. Zwei Permutationen gehören bekanntlich zu der gleichen Klasse, wenn beide durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl von bloßen Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation  $1, 2, \dots, n$  hervorgehen.

Die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten eines speziellen Tensors vom Range  $\lambda$  ist demnach  $\binom{n}{\lambda}$ .

Die Theorie der speziellen Tensoren gestaltet sich vermöge dieser Eigenschaften einfacher, aber auch reichhaltiger als die der allgemeinen Tensoren; sie ist von besonderer Bedeutung für die mathematische Physik, weil die Theorie der Vektoren  $\lambda^{\text{ter}}$  Art (Vierer-, Sechservektoren bei  $n = 4$ ) sich zurückführen läßt auf die speziellen Tensoren vom Range  $\lambda$ . Vom Standpunkte der allgemeinen Theorie aus ist es zweckmäßiger von den Tensoren auszugehen und die Vektoren lediglich als spezielle Tensoren zu behandeln.

Wichtig für die Vektoranalysis der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

ist ein spezieller Tensor  $n^{\text{ten}}$  Ranges, der mit der Diskriminante  $g$  des

Linienelementes verknüpft ist.<sup>1)</sup> Diese Diskriminante transformiert sich ja gemäß der Gleichung

$$(36) \quad g' = p^2 \cdot g,$$

wo

$$p = |p_{ik}| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right|$$

die Funktionaldeterminante der Substitution ist. Gibt man  $\sqrt{g}$  für das ursprüngliche Bezugssystem ein bestimmtes Vorzeichen, und setzt man fest, daß sich dieses Vorzeichen bei einer Transformation ändern soll oder nicht, je nachdem die Substitutionsdeterminante  $p$  negativ oder positiv ist, so hat die Gleichung

$$(37) \quad \sqrt{g'} = p \cdot \sqrt{g}$$

exakte Bedeutung mit Einschluß der Vorzeichen.

Es sei nun  $\delta_{r_1 r_2 \dots r_n}$  gleich Null, wenn zwei der Indizes einander gleich sind, dagegen  $\pm 1$ , wenn dies nicht der Fall ist und die Permutation  $r_1, r_2, \dots, r_n$  durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation  $1, 2, \dots, n$  hervorgeht.

Dann sind

$$(38) \quad e_{r_1 r_2 \dots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sqrt{g}$$

die Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors  $n$ ten Ranges, den wir den kovarianten Diskriminanztensor nennen wollen. Denn eine Transformation liefert zunächst

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sqrt{g'} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot p \sqrt{g};$$

da aber

$$p = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_n r_n} = \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_n r_n}$$

ist, so folgt

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_n r_n},$$

also wegen der Definition (38)

$$e'_{r_1 r_2 \dots r_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \dots p_{i_n r_n}.$$

Für den reziproken kontravarianten Tensor findet man nach (13)

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \dots \gamma_{i_n r_n} \cdot e_{r_1 r_2 \dots r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \dots \gamma_{i_n r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} \delta_{r_1 r_2 \dots r_n} \cdot \gamma_{1 r_1} \gamma_{2 r_2} \dots \gamma_{n r_n}.$$

1) Das „System  $\varepsilon$ “ von Ricci und Levi-Civita, l. c., pag. 135.

Da aber die Determinante der normierten Unterdeterminanten  $\gamma_{ik}$

$$|\gamma_{ik}| = \frac{1}{g}$$

ist, so folgt

$$(39) \quad \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\sqrt{g}}.$$

Die Bedeutung des kovarianten (kontravarianten) Diskriminantentensors liegt darin, daß seine innere Multiplikation mit einem kontravarianten (kovarianten) Tensor vom Range  $\lambda$  einen gleichartigen Tensor vom Range  $\lambda - n$  liefert, wobei der Tensor von entgegengesetzter Art wird, wenn  $\lambda - n$  negativ ist. (Ergänzung des Tensors.)

Wenn

$$n = 4$$

ist, so gibt es spezielle Tensoren bis zum vierten Rang, da alle speziellen Tensoren höheren Ranges identisch verschwinden.

Die nichtverschwindenden Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors vierten Ranges sind alle einander gleich oder entgegengesetzt gleich. Die Ergänzung (innere Multiplikation mit dem kontravarianten Diskriminantentensor) ergibt einen Skalar, so daß die Differentialoperationen, die an einem speziellen Tensor vierten Ranges ausgeführt werden können, damit zurückgeführt sind auf die Differentialoperationen an einem Skalar.

Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors dritten Ranges ist ein kontravarianter Vektor erster Art.

Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors zweiten Ranges ist ein kontravarianter, spezieller Tensor zweiten Ranges.

Endlich führt die Ergänzung eines speziellen kovarianten Vektors erster Art auf einen kontravarianten Tensor dritten Ranges.

Die Untersuchung des Einflusses des Gravitationsfeldes auf die physikalischen Vorgänge (I. Teil, § 6) erfordert die eingehendere Behandlung der speziellen Tensoren zweiten Ranges (Sechservektoren).

Ist  $\Theta_{\mu\nu}$  ein spezieller Tensor zweiten Ranges, so reduziert sich seine Divergenz (Formel 35)

$$\Theta_{\mu} = \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}) + \sum_{\nu\kappa} \left\{ \begin{matrix} \nu\kappa \\ \mu \end{matrix} \right\} \Theta_{\nu\kappa}$$

wegen

$$\Theta_{\nu\kappa} = -\Theta_{\kappa\nu}, \quad \Theta_{\nu\nu} = 0$$

auf

$$(40) \quad \Theta_{\mu} = \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{g} : \Theta_{\mu\nu}).$$

Wir leiten ferner aus einem kontravarianten Tensor zweiten Ranges  $\Theta_{\mu\nu}$  folgendermaßen den dualen kontravarianten Tensor zweiten Ranges  $\Theta^{*}_{rs}$  ab.

Wir bilden zuerst die Ergänzung<sup>1)</sup>

$$(41) \quad T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

oder also

$$(41a) \quad \begin{cases} T_{12} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{34}, & T_{13} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{42}, & T_{14} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{23}; \\ T_{23} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{14}, & T_{24} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{31}, & T_{34} = \sqrt{g} \cdot \Theta_{12}. \end{cases}$$

Der gesuchte duale Tensor ist nun reziprok zu dieser Ergänzung, lautet daher

$$(42) \quad \Theta^{*}_{rs} = \sum_{ik} \gamma_{ir} \gamma_{ks} \cdot T_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{ik\mu\nu} \gamma_{ir} \gamma_{ks} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}$$

Die Reihenfolge der beiden Operationen — Ergänzung und Bildung des reziproken Tensors — ist wegen der Reziprozität der beiden Diskriminantentensoren vertauschbar. —

#### § 4. Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Teil.

##### 1. Beweis der Kovarianz der Impuls-Energiegleichungen.

Es ist zu beweisen, daß sich die Gleichungen (10) des I. Teiles, S. 10, die vom Faktor  $\sqrt{-1}$  abgesehen lauten

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sqrt{g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0, \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

beliebigen Transformationen gegenüber kovariant verhalten.

Nach Formel (35) ist die Divergenz des kontravarianten Tensors  $\Theta_{\mu\nu}$

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}) + \sum_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} \nu k \\ \mu \end{matrix} \right\} \Theta_{\nu k}.$$

Der zu diesem kontravarianten Vektor  $\Theta_\mu$  reziproke kovariante Vektor  $T_\sigma$  ist also

$$T_\sigma = \sum_\mu g_{\sigma\mu} \Theta_\mu = \sum_{\mu\nu k} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu}) - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu} + g_{\sigma\mu} \left\{ \begin{matrix} \nu k \\ \mu \end{matrix} \right\} \cdot \Theta_{\nu k} \right).$$

Das letzte Glied dieser Summe ist aber gleich

$$\sum_{\nu k} \left[ \begin{matrix} \nu k \\ \sigma \end{matrix} \right] \Theta_{\nu k} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) \cdot \Theta_{\mu\nu}.$$

1) Der Faktor  $\frac{1}{2}$  dient zur Vereinfachung des Resultates, ohne invariantentheoretisch von Belang zu sein.

Also bleibt

$$T_{\sigma} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

d. h. bis auf den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{g}}$  die linke Seite der untersuchten Gleichung.

Dividiert man also jene Gleichung durch  $\sqrt{g}$ , so stellt ihre linke Seite die  $\sigma$ -Komponente eines kovarianten Vektors dar, ist also in der Tat kovariant. Man kann daher den Inhalt jener vier Gleichungen auch so aussprechen:

Die Divergenz des (kontravarianten) Spannungs-Energie-tensors der materiellen Strömung bzw. des physikalischen Vorganges verschwindet.

## 2. Differentialtensoren einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit.

Das Problem der Aufstellung der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes (I. Teil, § 5) lenkt die Aufmerksamkeit auf die Differentialinvarianten und Differentialkovarianten der quadratischen Differentialform

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}.$$

Die Theorie dieser Differentialkovarianten führt im Sinne unserer allgemeinen Vektoranalysis auf die Differentialtensoren, die mit einem Gravitationsfeld gegeben sind. Das vollständige System dieser Differentialtensoren (beliebigen Transformationen gegenüber) geht zurück auf eine von Riemann<sup>1)</sup> und unabhängig von diesem von Christoffel<sup>2)</sup> gefundene kovariante Differentialtensor vierten Ranges, den wir den Riemannschen Differentialtensor nennen wollen und der folgendermaßen lautet

$$(43) \quad R_{iklm} = (ik, lm) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_i \partial x_l} \right) + \sum_{\varrho\sigma} \gamma_{\varrho\sigma} \left( \begin{matrix} im \\ \varrho \end{matrix} \right) \begin{matrix} kl \\ \sigma \end{matrix} - \begin{matrix} il \\ \varrho \end{matrix} \begin{matrix} km \\ \sigma \end{matrix} \right).$$

Durch kovariante algebraische und differentielle Operationen erhält man aus dem Riemannschen Differentialtensor und dem Diskriminantentensor (§ 3, Formel 38) das vollständige System der Differentialtensoren (also auch der Differentialinvarianten) der Mannigfaltigkeit.

1) Riemann, Ges. Werke, S. 270.

2) Christoffel, l. c., S. 54.

$(ik, lm)$  heißen auch die Christoffelschen Vier-Indizes-Symbole erster Art. Von Bedeutung sind neben diesen die Vier-Indizes-Symbole zweiter Art

$$(44) \quad \{ik, lm\} = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} il \\ k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_m} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} im \\ k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x} + \sum_q \left( \left\{ \begin{smallmatrix} il \\ e \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} em \\ k \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} im \\ e \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} el \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right),$$

die mit jenen in der Beziehung stehen

$$(45) \quad \begin{cases} \{iq, lm\} = \sum_k \gamma_{qk}(ik, lm), \text{ oder aufgelöst} \\ (ik, lm) = \sum_q g_{kq} \{iq, lm\}. \end{cases}$$

Den Vier-Indizes-Symbolen zweiter Art kommt in der allgemeinen Vektoranalysis die Bedeutung der Komponenten eines gemischten Tensors, kovariant vom dritten, kontravariant vom ersten Range zu.<sup>1)</sup>

Die hervorragende Bedeutung dieser Begriffsbildungen für die Differentialgeometrie<sup>2)</sup> einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit macht es a priori wahrscheinlich, daß diese allgemeinen Differentialtensoren auch für das Problem der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes von Bedeutung sein dürften. Es gelingt in der Tat zunächst, einen kovarianten Differentialtensor zweiten Ranges und zweiter Ordnung  $G_{im}$  anzugeben, der in jene Gleichungen eintreten könnte, nämlich

$$(46) \quad G_{im} = \sum_{ki} \gamma_{ki}(ik, lm) = \sum_k \{ik, km\}.$$

Allein es zeigt sich, daß sich dieser Tensor im Spezialfall des unendlich schwachen statischen Schwerfeldes nicht auf den Ausdruck  $\Delta\varphi$  reduziert. Wir müssen daher die Frage offen lassen, inwiefern die allgemeine Theorie der mit einem Gravitationsfeld verknüpften Differentialtensoren mit dem Problem der Gravitationsgleichungen zusammenhängt. Ein solcher Zusammenhang müßte vorhanden sein, sofern die Gravitationsgleichungen beliebige Substitutionen zuzulassen hätten; allein in diesem Falle scheint es ausgeschlossen zu sein, Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzufinden. Würde dagegen feststehen, daß die Gravitationsgleichungen nur eine gewisse Gruppe von Transformationen gestatten, so wäre es verständlich, wenn man mit den von der allgemeinen Theorie gelieferten Differentialtensoren nicht auskommt. Wie im physikalischen Teile ausgeführt ist, sind wir nicht imstande, zu diesen Fragen Stellung zu nehmen. —

1) Es folgt dies aus der ersten der Gleichungen 45.

2) Das identische Verschwinden des Tensors  $R_{iklm}$ , stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Differentialform auf die Form  $\sum_i dx_i^2$  transformiert werden kann.

3. Zur Ableitung der Gravitationsgleichungen.

Die von Einstein beschriebene Herleitung der Gravitationsgleichungen (I. Teil, § 5), wird im Einzelnen folgendermaßen durchgeführt.

Wir gehen aus von dem in der Energiebilanz mit Gewißheit zu erwartenden Gliede

$$(47) \quad U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right)$$

und formen durch partielle Integration um.<sup>1)</sup> Es wird so

$$U = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\alpha}.$$

Die erste der auf der rechten Seite stehenden Summen hat die gewünschte Form einer Summe von Differentialquotienten und sei bezeichnet mit  $A$ , so daß

$$(48) \quad A = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right).$$

In der zweiten der rechtsstehenden Summen führen wir wieder partielle Integration aus. Dann lautet die Identität

$$U = A - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right).$$

Die erste der rechts entstandenen Summen kann als eine Summe von Differentialen geschrieben werden und möge mit

$$(49) \quad B = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right)$$

bezeichnet sein. In der zweiten Summe differenzieren wir aus. Dann wird

$$U = A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \left( \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \right),$$

oder wenn man im zweiten Summanden die Formel (29) des § 2 anwendet und im dritten Summanden partiell integriert

$$U = A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\sqrt{g}}{2} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} - \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \cdot \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \\ + \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) - \sum_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right).$$

1) Die Herleitung der gesuchten Identität vereinfacht sich, wenn wir den Faktor  $\sqrt{g}$  unter das Differentiationszeichen setzen, ohne daß das Resultat hiervon abhängig wäre.

Die beiden ersten Summen haben die Form von Gliedern, wie wir sie auf die linke Seite unserer Identität setzen. Wir bezeichnen sie mit

$$(50) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$$

$$(51) \quad W = \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$$

Die dritte der rechts stehenden Summen hat die Form einer Summe von Differentialquotienten; eliminiert man in ihr  $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$  vermöge jener Formel (29), so erweist sie sich als die schon eingeführte Größe  $A$ . In der letzten Summe endlich ersetzen wir nach der gleichen Formel  $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$ . Wir finden so

$$U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder

$$\begin{aligned} U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) \\ - \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k}). \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen wird wegen (29), d. h. wegen

$$\sum_{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha}$$

zu

$$- \sum_{\alpha\beta ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} \right) = -U.$$

Die zweite können wir, wegen der Vertauschbarkeit von  $i$  und  $k$ ,  $\mu$  und  $\nu$ , schreiben als

$$\begin{aligned} 2X &= 2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\nu k}}{\partial x_\beta} \\ &= -2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} \cdot \sqrt{g} \gamma_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{i\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{k\nu}}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Identität lautet also

$$2U - V + W + 2X = 2A - B,$$

ist also identisch der im I. Teil, § 5 gegebenen.

## Bemerkungen.

Zu § 5 und § 6. Beim Niederschreiben der Arbeit haben wir es als einen Mangel der Theorie empfunden, daß es nicht gelungen ist, Gleichungen für das Gravitationsfeld aufzustellen, welche allgemein, d. h. beliebigen Substitutionen gegenüber, kovariant sind. Nachträglich fand ich aber, daß Gleichungen, welche die  $\gamma_{\mu\nu}$  eindeutig aus den  $\Theta_{\mu\nu}$  bestimmen, und welche allgemein kovariant sind, überhaupt nicht existieren können; der Beweis hiefür ergibt sich wie folgt.

Es gebe in unserer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit einen Teil  $L$ , in welchem ein „materieller Vorgang“ nicht stattfindet, in welchem also die  $\Theta_{\mu\nu}$  verschwinden. Durch die außerhalb  $L$  gegebenen  $\Theta_{\mu\nu}$  sind gemäß unserer Annahme überall, also auch im Innern von  $L$  die  $\gamma_{\mu\nu}$  vollkommen bestimmt. Wir denken uns nun statt der ursprünglichen Koordinaten  $x_\nu$  neue Koordinaten  $x'_\nu$  eingeführt von folgender Art. Außerhalb  $L$  sei überall  $x_\nu = x'_\nu$ ; innerhalb  $L$  aber sei wenigstens für einen Teil von  $L$  und wenigstens für einen Index  $\nu$   $x_\nu \neq x'_\nu$ . Es ist klar, daß durch eine derartige Substitution erreicht werden kann, daß wenigstens für einen Teil von  $L$   $\gamma'_{\mu\nu} \neq \gamma_{\mu\nu}$  ist. Andererseits ist überall  $\Theta'_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$ , nämlich außerhalb  $L$ , weil für dieses Gebiet  $x'_\nu = x_\nu$  ist, innerhalb  $L$  aber, weil für dies Gebiet  $\Theta_{\mu\nu} = 0 = \Theta'_{\mu\nu}$  ist. Hieraus folgt, daß in dem betrachteten Falle, wenn alle Substitutionen als berechnete zugelassen werden, zu dem nämlichen System der  $\Theta_{\mu\nu}$  mehr als ein System der  $\gamma_{\mu\nu}$  gehört.

Wenn also — wie dies in der Arbeit geschehen ist — an der Forderung festgehalten wird, daß durch die  $\Theta_{\mu\nu}$  die  $\gamma_{\mu\nu}$  vollständig bestimmt sein sollen, so ist man genötigt, die Wahl des Bezugssystems einzuschränken. Diese Einschränkung wird in unserer Arbeit dadurch erzielt, daß für den materiellen Vorgang und das Gravitationsfeld zusammen die Gültigkeit der Erhaltungssätze, d. h. die Gültigkeit von vier Gleichungen von der Gestalt der Gleichungen (19) postuliert wird. Aus diesem Postulat sind ja in § 5 die Gleichungen (18) des Gravitationsfeldes abgeleitet.

Die Gleichungen (19) sind nur linearen Transformationen gegenüber kovariant, so daß also in der entwickelten Theorie nur lineare Transformationen als berechnete Transformationen anzusehen sind. Wir können also die Achsen solcher Systeme als „gerade Linien“, die Koordinatenflächen als „Ebenen“ bezeichnen. Es ist sehr bemerkenswert, daß die Erhaltungssätze uns in den Stand setzen, die gerade Linie physikalisch zu definieren, trotzdem es nach unserer Theorie keinen Gegenstand oder Vorgang gibt, der unmittelbar als Modell der geraden

Linie dienen könnte, wie etwa der Lichtstrahl in der gewöhnlichen Relativitätstheorie.

Zu § 4 und § 5. Die Grundgleichungen der Theorie nehmen eine besonders übersichtliche Gestalt an, wenn man gemischte Tensoren einführt. Setzt man

$$\mathfrak{X}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}, \quad \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} \sqrt{-g} g_{\sigma\mu} \vartheta_{\mu\nu},$$

so erhält man anstelle von (10)

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{X}_{\sigma\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \gamma_{\mu\tau} \mathfrak{X}_{\tau\nu}.$$

Anstelle von (19) hat man

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathfrak{X}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0,$$

anstelle der Gleichungen (18) für das Gravitationsfeld

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\sqrt{-g} \gamma_{\alpha\beta} g_{\sigma\mu} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}) = \kappa (\mathfrak{X}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}).$$

Zu § 7. Der in § 7 gegen die Skalartheorie der Gravitation (Nordströmsche Theorie) erhobene Einwand hat sich nicht als stichhaltig erwiesen. Man entgeht ihm, indem man die Ausdehnung der Körper in passender Weise vom Gravitationspotential abhängen läßt. Genauerer hierüber findet man in einem Vortrage des Verfassers über den Gegenstand (Naturforscherversammlung zu Wien), der in der Phys. Zeitschrift Ende 1913 erscheint. A. E.

## Über das Analogon der Savaryschen Formel und Konstruktion in der kinematischen Geometrie des Raumes.

VON MARTIN DISTELI in Karlsruhe.

In der kinematischen Geometrie der Ebene und der Kugel dienen die unter dem Namen der Savaryschen Gleichung bekannte Formel und die verschiedenen daraus abgeleiteten Konstruktionen dazu, den augenblicklichen Krümmungskreis der Bahnkurve irgend eines Punktes des bewegten Systems zu bestimmen, falls die augenblicklichen Krümmungskreise der beiden Polbahnen bekannt sind.

In der kinematischen Geometrie des Raumes existiert nun eine analoge Formel und Konstruktion, welche in den folgenden Ausführungen abgeleitet werden soll und welche die bereits bekannten der Ebene und Kugel als Spezialfälle umfaßt.

An Stelle der Krümmungskreise der Polbahnen treten jetzt gewisse Regelschraubenflächen der abschrotenden Axoide, welche, infolge der geometrischen Beziehung zu diesen, deren Striktionsschraubenflächen genannt werden können. Damit ist schon ausgesprochen, daß im Raume an Stelle der Punktbahn die von einer beliebigen Geraden beschriebene Regelfläche zu treten hat und daß die Aufgabe daher sein wird, die augenblickliche Striktionsschraubenfläche dieser Regelfläche zu bestimmen, falls die augenblicklichen Striktionsschraubenflächen der Axoide bekannt sind.

Die Frage wurde bei früherer Gelegenheit bereits gelöst für den Fall, daß die Axoide Rotationshyperboloide sind.<sup>1)</sup> Diese Beschränkung soll jetzt fallen gelassen und das Savarysche Analogon sowie die damit zusammenhängenden Sätze von Bobillier und Aronhold im Raume bei völliger Allgemeinheit der Voraussetzungen abgeleitet werden.

### § 1. Das begleitende Dreikant einer Regelfläche.

Es sei die Bewegung eines Systemes  $\sigma(xyz)$  in bezug das feste System  $\Sigma(XYZ)$  bestimmt durch die Bewegungsgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= a + a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ Y &= b + a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ Z &= c + a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned}$$

wobei sowohl die Koordinaten  $a, b, c$  des Anfangspunktes  $O$  als auch die 9 Richtungskosinus der Achsen bekannte Funktionen der Zeit sind. Bei dieser Bewegung beschreibt die Achse  $x$  von  $\sigma$  die Regelfläche  $A$  mit den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} X &= a + u a_1 \\ Y &= b + u a_2 \\ Z &= c + u a_3. \end{aligned}$$

Ist der Richtungskegel dieser Fläche gegeben, sind also  $a_1, a_2, a_3$  bestimmte Funktionen der Zeit, so sollen nun die  $a, b, c$  sowie die 6 übrigen Richtungskosinus derart bestimmt werden, daß das System  $\sigma$  beständig begleitendes Dreikant der Regelfläche bleibt, d. h. daß der Anfangspunkt  $O$  die Striktionslinie durchwandert, während etwa die Achse  $y$  beständig mit der Flächennormale im Zentralpunkt koinzidiert. Die Ebene  $xy$  ist dann wie in Fig. 1 die asymptotische Ebene, die Ebene  $xz$  die Zentralebene des windschiefen Flächenelementes längs  $x$ .

1) Vgl. M. Disteli, Über die Verzahnung der Hyperboloidräder mit gradlinigem Eingriff. Diese Zeitschrift, 59. Band (1911) Heft 3.

Konstruiert man also das sphärische Bild der Regelfläche auf der Einheitskugel, so müssen die Geschwindigkeitskomponenten des beweglichen Bildes  $(a_1, a_2, a_3)$  auf der Kugel die Richtungen  $b_1, b_2, b_3$  haben.

Nun ist durch eine Quadratur stets zu erreichen, daß die Gleichung

$$(3) \quad a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = 1$$

erfüllt ist, daß also  $dt$  das Bogenelement des sphärischen Bildes ist und daher die Gleichungen bestehen

$$(4) \quad a_1' = b_1, \quad a_2' = b_2, \quad a_3' = b_3$$

$$c_1 = a_2 a_3' - a_3 a_2',$$

$$c_2 = a_3 a_1' - a_1 a_3',$$

$$c_3 = a_1 a_2' - a_2 a_1',$$

wodurch also zunächst die Richtungskosinus bestimmt sind.

Die Bewegung von  $\sigma$  ist aber augenblicklich eine Schraubenbewegung um die instantane Achse. Es seien nun  $p, q, r$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit,  $u, v, w$  diejenigen der Schiebungs- geschwindigkeit bezüglich  $\sigma$ .

Für jede Bewegung bestehen nun die Gleichungen

$$(5) \quad a_i' = b_i r - c_i q, \quad b_i' = c_i p - a_i r, \quad c_i' = a_i q - b_i p$$

Die Gleichungen (4) lassen daher erkennen, daß

$$(6) \quad q = 0, \quad r = + 1$$

ist, so daß die Gleichungen (5) sich schreiben lassen

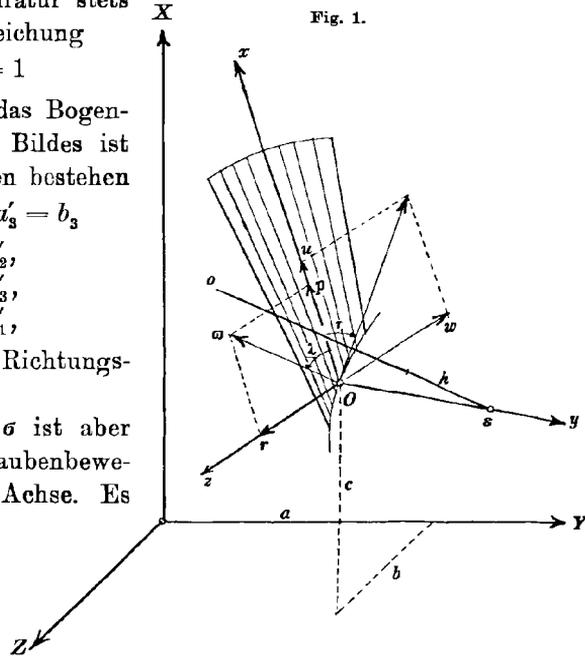
$$(7) \quad a_i' = b_i, \quad b_i' = c_i p - a_i, \quad c_i' = - b_i p,$$

durch welche Gleichungen nun auch die Komponente  $p$  nach Größe und Vorzeichen mitbestimmt ist. Ihre geometrische Bedeutung ist leicht zu erkennen. Da auf der Kugel der Punkt  $(c_1, c_2, c_3)$  der Pol der Tangente des sphärischen Bildes der Regelfläche ist, so ist

$$\sqrt{dc_1^2 + dc_2^2 + dc_3^2} = d\varepsilon$$

der geodätische Kontingenzwinkel desselben und daher

$$p = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$



die geodätische Krümmung des sphärischen Bildes. Bedeutet also  $\lambda$  den sphärischen Krümmungsradius, so ist

$$(8) \quad \cotg \lambda = p.$$

Geht nun die positive Richtung der sphärischen Normalen durch Drehung um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers aus der Richtung der Geschwindigkeit des Punktes  $(a_1, a_2, a_3)$  hervor, so ist  $\lambda$  nach der positiven Seite der Normalen aufzutragen, falls  $p$  positiv ist. Es erscheint dann von der negativen Seite der Achse  $y$  aus gesehen als positiver Winkel, und da andererseits  $\lambda$  auch der Winkel der instantanen Schraubenachse gegen  $x$  ist, so folgt:

*Die instantane Achse ist beständig nach dem Krümmungsmittelpunkt des unendlich fernen Querschnittes der Regelfläche  $A$  gerichtet.*

Um jetzt im weiteren die Komponenten  $u, v, w$  zu bestimmen, hat man zu beachten, daß diese nichts anderes sind, als die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes  $(a, b, c)$ . Sie haben daher in  $\sigma$  die Werte

$$(9) \quad \begin{aligned} u &= a_1 a' + a_2 b' + a_3 c' \\ v &= b_1 a' + b_2 b' + b_3 c' \\ w &= c_1 a' + c_2 b' + c_3 c'. \end{aligned}$$

Nun hat aber der Zentralpunkt von  $x$  vom Punkte  $(a, b, c)$  den Abstand

$$u_0 = - \frac{a'_1 a' + a'_2 b' + a'_3 c'}{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2} = - (b_1 a' + b_2 b' + b_3 c') = -v.$$

Soll also der Anfangspunkt von  $\sigma$  beständig auf der Striktionslinie von  $A$  bleiben, so muß  $v$  verschwinden. Die beiden andern Komponenten  $u$  und  $w$  wollen wir mit  $J$  und  $K$  bezeichnen. Alsdann ergibt die Auflösung der Gleichungen (9)

$$(10) \quad \begin{aligned} a' &= a_1 J + c_1 K \\ b' &= a_2 J + c_2 K \\ c' &= a_3 J + c_3 K, \end{aligned}$$

und daher werden die Gleichungen der Regelfläche  $A^1$ )

$$(11) \quad \begin{aligned} X &= \int (a_1 J + c_1 K) dt + u a_1 \\ Y &= \int (a_2 J + c_2 K) dt + u a_2 \\ Z &= \int (a_3 J + c_3 K) dt + u a_3. \end{aligned}$$

1) Vgl. X. Antomari: Application de la méthode cinématique à l'étude des propriétés des surfaces réglées. Thèse Paris 1894, und die dort angegebenen Literaturnachweise.

In diesen Gleichungen treten also zwei willkürliche Funktionen  $J$  und  $K$  von  $t$  auf, von welchen leicht nachzuweisen ist, daß sie zwei Biegungsinvarianten der Fläche  $A$  darstellen. Bezeichnet nämlich  $Q$  den Verteilungsparameter der Fläche, so ist

$$(12) \quad Q = \frac{-1}{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = -(c_1 a' + c_2 b' + c_3 c') = -K.$$

Da aber  $K$  die Geschwindigkeit des Zentralpunktes senkrecht zur Erzeugenden und  $dt$  den Kontingenzwinkel derselben darstellen, so ist der unendlich kleine Abstand zwischen  $x$  und der folgenden Erzeugenden

$$dn = K dt \text{ oder } K = \frac{dn}{dt}.$$

Bei einer Verbiegung der Fläche mit Erhaltung ihrer geraden Erzeugenden, ändern sich aber Zähler und Nenner des obigen Quotienten, also auch  $K$  selbst nicht.

Bezeichnet ferner  $\tau$  den ebenfalls von der negativen Seite der  $y$ -Achse aus gesehenen Winkel der Striktionslinie gegen die Erzeugende  $x$ , so ist

$$(13) \quad \cotg \tau = \frac{J}{K}$$

und da dieser Winkel bei einer Verbiegung sich ebenfalls nicht ändert, so ist auch  $J$  eine Biegungsinvariante.<sup>1)</sup>

Ändert man daher in den Gleichungen (11) nur die Richtungskosinus  $a_1, a_2, a_3$ , nicht aber  $J$  und  $K$ , so erhält man ein System von aufeinander abwickelbaren oder Biegungsregelflächen.

Mit Hilfe der Invarianten  $J$  und  $K$  läßt sich nun auch die Lage der instantanen Achse  $o$  gegen das System  $\sigma$  leicht bestimmen.

Da  $q$  und  $v$  gleichzeitig verschwinden, so schneidet  $o$  die Achse  $y$  rechtwinklig und zwar in einem nach der positiven Seite von  $y$  aufzutragenden Abstand

$$(14) \quad s = \frac{ru - pw}{r^2 + p^2} = \frac{J - pK}{1 + p^2}.$$

Andererseits ist der Windungsparameter der instantanen Schraube

$$(15) \quad h = \frac{pu + rw}{r^2 + p^2} = \frac{K + pJ}{1 + p^2}.$$

1) In Fig. 1 ist die Komponente  $w = K$  der Deutlichkeit halber als eine negative Strecke gewählt worden.

Die instantane Achse beschreibt daher im Laufe der Bewegung in  $\sigma$  das bewegliche Axoid  $B$  mit den Gleichungen

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= v \cos \lambda \\ y &= s = J \sin^2 \lambda - K \sin \lambda \cos \lambda \\ z &= v \sin \lambda \end{aligned}$$

und der sogenannten Parameterverteilung

$$(17) \quad h = J \sin \lambda \cos \lambda + K \sin^2 \lambda.$$

Im festen Raume  $\Sigma$  dagegen beschreibt die instantane Achse das ruhende Axoid  $F$ , dessen Gleichungen lauten

$$(18) \quad \begin{aligned} X &= \int (a_1 J + c_1 K) dt + s b_1 + v (a_1 \cos \lambda + c_1 \sin \lambda) \\ Y &= \int (a_2 J + c_2 K) dt + s b_2 + v (a_2 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda) \\ Z &= \int (a_3 J + c_3 K) dt + s b_3 + v (a_3 \cos \lambda + c_3 \sin \lambda). \end{aligned}$$

Die Bewegung des begleitenden Dreikants  $\sigma$  findet also durch Abschroten von  $B$  auf  $F$  statt. Um dies noch genauer zu begründen, beachten wir, daß nach (16) offenbar  $d\lambda$  das Bogenelement des sphärischen Bildes von  $B$  und

$$\mathfrak{S} = 0, \quad \mathfrak{R} = -\frac{ds}{d\lambda}$$

die beiden Invarianten von  $B$  sind.

Um auch die Invarianten der Fläche  $F$  zu finden, führen wir das begleitende Dreikant  $\mathfrak{S}$  dieser Fläche ein. Sind  $A_i, B_i, C_i$ , seine Richtungskosinus, so ist

$$A_1 = + a_1 \cos \lambda + c_1 \sin \lambda$$

und wegen der letzten der Gleichungen (7)

$$A'_1 = (- a_1 \sin \lambda + c_1 \cos \lambda) \lambda',$$

also

$$A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 = \lambda'^2.$$

Betrachten wir daher für den Augenblick  $\lambda$  als unabhängige Veränderliche, und bedeutet der Strich den nach  $\lambda$  genommenen Differentialquotienten, so bestehen nun die Gleichungen

$$A'_1 = B_1, \quad B'_1 = C_1 \mathfrak{p} - A_1, \quad C'_1 = - B_1 \mathfrak{p}$$

Aus

$$C_1 = A_2 B_3 - B_2 A_3 = \left\| \begin{array}{cc} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{array} \right\| = - b_1$$

folgt aber

$$C'_1 = -\frac{db_1}{d\lambda} = \left( \frac{a_1 \sin \lambda - c_1 \cos \lambda}{\sin \lambda} \right) \frac{d\lambda}{d\lambda} = -\frac{B_1}{\sin \lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda},$$

also

$$\mathfrak{p} = -\frac{C'_1}{B_1} = \frac{\frac{db_1}{d\lambda}}{\sin \lambda}.$$

Sind anderseits  $u, v, w$  die Komponenten der Geschwindigkeit des Koordinatenanfangspunktes  $(A, B, C)$  von  $\mathfrak{S}$  in bezug auf dieses System, so ist

$$A' = A_1 u + B_1 v + C_1 w = (a_1 J + c_1 K) \frac{dt}{d\lambda} + s B_1 p - \frac{ds}{d\lambda} C_1$$

$$B' = A_2 u + B_2 v + C_2 w = (a_2 J + c_2 K) \frac{dt}{d\lambda} + s B_2 p - \frac{ds}{d\lambda} C_2$$

$$C' = A_3 u + B_3 v + C_3 w = (a_3 J + c_3 K) \frac{dt}{d\lambda} + s B_3 p - \frac{ds}{d\lambda} C_3,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} u &= (J \cos \lambda + K \sin \lambda) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{h}{\sin \lambda} \frac{dt}{d\lambda} = \mathfrak{S}_1 \\ (19) \quad v &= (-J \sin \lambda + K \cos \lambda) \frac{dt}{d\lambda} + s p = 0 \\ w &= -\frac{ds}{d\lambda} = \mathfrak{R}_1. \end{aligned}$$

Da  $v$  verschwindet, so ist der Anfangspunkt  $(A, B, C)$  auch der Zentralpunkt von  $F$ , und die Ebene  $(o, y)$  die Zentralebene. Da überdies

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$$

ist, so berühren sich in der Tat  $B$  und  $F$  beständig. Mit  $h$  verschwindet die Gleitung längs der Achse  $o$ , es verschwindet dann aber auch  $\mathfrak{S}_1$ , d. h. es haben dann die Axoide  $B$  und  $F$  die nämlichen Invarianten; die eine ist also eine Biegungsfläche der andern. Da jetzt auch die Striktionslinien ohne Gleitung abrollen, so ist auch diejenige des Axoids  $F$  eine Orthogonaltrajektorie und geodätische Linie von  $F$ , also umgekehrt  $F$  der geometrische Ort ihrer Binormalen, d. h.

*Wenn bei der Bewegung des begleitenden Dreikants der Windungsparameter  $h$  verschwindet, so ist das Axoid  $F$  eine Biegungsfläche des Axoids  $B$  und zugleich Fläche der Binormalen seiner Striktionslinie.*

### § 2. Die Striktions-schraubenfläche.

Denkt man sich  $t$  augenblicklich als konstant, so nehmen  $J, K, p$  und damit auch  $s$  und  $h$  konstante Werte an. Erteilt man jetzt der Erzeugenden  $x$  eine Schraubenbewegung um die festliegende Achse  $o$  mit dem konstanten Windungsparameter  $h$ , so entsteht eine Schraubenregelfläche  $S$ , welche mit der Regelfläche  $A$  längs  $x$  in Berührung ist, wobei die unendlich fernen Querschnitte sich oskulieren und die Striktionslinien sich berühren. Durch diese beiden Eigenschaften ist die Schraubenfläche  $S$  umgekehrt eindeutig bestimmt und unter dem zweifach unendlich vielen berührenden Schraubenflächen diejenige, welche sich der Fläche  $A$  am innigsten anschmiegt; sie ist als das räumliche Analogon

zum Krümmungskreis der ebenen Bewegung zu betrachten, und da sie im allgemeinen mit  $\mathcal{A}$  nicht drei konsekutive Erzeugende gemeinsam haben kann, möge sie die *Striktionsschraubenfläche* von  $\mathcal{A}$  längs  $x$  genannt werden.

Um ihre Beziehungen zur Fläche genauer zu bestimmen, betrachten wir auf dieser die beliebige Kurve

$$(20) \quad u = u(t)$$

Alsdann ergeben sich wegen den Beziehungen

$$a'_1 = b_1, \quad b'_1 = c_1 p - a_1, \quad c'_1 = -b_1 p$$

für die Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $u$  die Werte

$$(21) \quad \begin{aligned} v_x &= J + u', & v_y &= u, & v_z &= K \\ p_x &= J' - u + u'', & p_y &= J - pK + 2u', & p_z &= K' + up. \end{aligned}$$

Da die Flächennormale  $n$  in  $u$  auf  $x$  und  $v$  zugleich senkrecht steht, sind ihre Richtungskosinus

$$(22) \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{K}{\sqrt{K^2 + u^2}}, \quad \gamma = \frac{-u}{\sqrt{K^2 + u^2}},$$

wobei der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist, damit die Normale im Anfangspunkt mit der Achse  $y$  zusammenfällt.

Legt man nun durch die Normale  $n$  und die Geschwindigkeit  $v$  eine Ebene, so hat der Krümmungsradius dieses Schnittes die Größe

$$R = \frac{v^2}{p_n}$$

wo  $p_n$  die in die Flächennormale fallende Komponente von  $p$  bedeutet.

Es ist aber

$$(23) \quad \begin{aligned} p_n &= \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z = \frac{(J - pK + 2u') K - u (K' + up)}{\sqrt{K^2 + u^2}} \\ v^2 &= (J + u')^2 + K^2 + u^2, & \text{daher} \\ R &= \frac{\{(J + u')^2 + K^2 + u^2\} \sqrt{K^2 + u^2}}{(J - pK + 2u') K - u (K' + up)}. \end{aligned}$$

Hierin sind  $u$  und  $u'$  zwei unabhängige Variable. Für konstantes  $u$  und veränderliches  $u'$  erhält man daher die Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte im Punkte  $u$ .

Ist jetzt eine zweite Regelfläche  $\bar{\mathcal{A}}$  gegeben, mit den Invarianten  $\bar{J}$ ,  $\bar{K}$  und der geodätischen Krümmung  $\bar{p}$ , so stimmen die Krümmungsradien aller Normalschnitte, und damit nach dem Meusnierschen Satz auch diejenigen aller schiefen Schnitte in allen Punkten der Erzeugenden  $x$  überein, sobald die Gleichungen

$$J = \bar{J}, \quad p = \bar{p}, \quad K = \bar{K}, \quad K' = \bar{K}'$$

erfüllt sind.

Es ist bemerkenswert, daß hierbei der Zentralpunkt  $u = 0$  die Ausnahme macht, daß schon Oskulation aller durch ihn gehenden Schnitte beider Flächen  $A$  und  $\bar{A}$  stattfindet, auch wenn die letzte obiger Gleichungen nicht erfüllt ist.

Führt man noch die sogenannten Parameterlinien  $u = \pm K$  der Flächen ein, so läßt sich demnach folgendes Resultat aussprechen:

*Zwei beliebige Regelflächen  $A$  und  $\bar{A}$  haben längs  $x$  drei konsekutive Erzeugende gemein, oder berühren sich in der zweiten Ordnung, wenn ihre unendlich fernen Querschnitte sich oskulieren und die Striktions- und Parameterlinien sich berühren.*

Ist jetzt die Regelfläche  $\bar{A}$  identisch mit der Striktions-schraubenfläche  $S$ , so ist für diese  $K$  konstant. Eine Oskulation beider Flächen ist also ausgeschlossen, falls nicht auch  $K$  selbst konstant ist, d. h.

*Die Striktions-schraubenfläche oskuliert die Regelfläche  $A$  nur dann, wenn diese eine Regelfläche konstanten Verteilungsparameters ist.*

Im allgemeinen werden sich die Striktionslinien beider Flächen nicht oskulieren. Es fragt sich nun, ob dies doch eintreten kann. Mit  $u = 0$  erhalten aber die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten des Zentralpunktes die Werte

$$(24) \quad \begin{array}{lll} u_x = J & u_y = 0 & u_z = K \\ p_x = J' & p_y = J - pK & p_z = K'. \end{array}$$

Die Richtungskosinus der Binormalen der Striktionslinie sind daher bestimmt durch die Proportion

$$(25) \quad \lambda : \mu : \nu = -K(J - pK) : KJ' - JK' : J(J - pK).$$

Setzt man hierin für den Augenblick  $J'$  und  $K'$  gleich Null, so erhält man für die Binormale der Schraubenlinie

$$\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0 = -K : 0 : J.$$

Da beide Schmiegungebenen durch die nämliche Tangente gehen, so ist der Winkel  $\varepsilon_0$  der beiden Binormalen auch zugleich Winkel der beiden Hauptnormalen. Ist daher  $\varrho_0$  der Krümmungsradius der Schraubenlinie,  $\varrho$  derjenige der Striktionslinie, so ist infolge der Oskulation aller Schnitte im Zentralpunkt

$$\varrho = \varrho_0 \cos \varepsilon_0.$$

Nun ergibt sich aber  $\varrho_0$  aus der Gleichung (23) für  $u = u' = 0$ , nämlich

$$\varrho_0 = \frac{J^2 + K^2}{J - pK} = \frac{1}{s} \frac{J^2 + K^2}{1 + p^2},$$

woraus folgt, daß  $\varrho_0$  und  $s$  nach derselben Seite der Achse  $y$  gerichtet sind. Ferner ist nach (25)

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{(J - pK) \sqrt{J^2 + K^2}}{\sqrt{(J^2 + K^2) (J - pK)^2 + (KJ' - JK')^2}},$$

wobei der Wurzel im Nenner das positive Zeichen zu geben ist. Daher wird nun

$$(26) \quad \varrho = \frac{(J^2 + K^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(J^2 + K^2)(J - pK)^2 + (KJ' - JK')^2}}.$$

Eine Oskulation beider Striktionslinien kann also nur dann eintreten, falls die Bedingung

$$KJ' - JK' = 0$$

erfüllt ist, d. h. wenn  $J$  und  $K$  in konstantem Verhältnis stehen. Auf der Regelfläche  $A$  ist in diesem Falle die Striktionslinie wegen (12) eine isogonale Trajektorie und weil wegen  $\varepsilon_0$  gleich Null die Schmiegungebene durch die Flächennormale geht, auch geodätische Linie. Wir erhalten daher das Resultat:

*Wenn die Invarianten  $J$  und  $K$  in konstantem Verhältnis stehen, wenn also die Striktionslinie von  $A$  isogonale Trajektorie und geodätische Linie ist, so oskuliert ihre Striktionslinie diejenige der Striktions-schraubenfläche. Eine Oskulation der Flächen selbst kann aber erst dann stattfinden, wenn beide Invarianten  $J$  und  $K$  konstante Werte haben.*

In diesem letzteren Falle ist also auch geometrisch die Striktions-schraubenfläche das vollkommene räumliche Analogon zum Krümmungskreis der ebenen Geometrie.

### § 3. Einige Anwendungen der Bewegung des begleitenden Dreikants.

Bevor wir in der allgemeinen Betrachtung weitergehen, möge das Vorstehende zunächst auf einige unmittelbar sich darbietende Fragen angewendet werden.

a) Die erste Frage sei diejenige nach den Bedingungen, unter welchen zwei allgemeine Regelflächen eine Berührung  $n$ -ter Ordnung eingehen, also  $(n + 1)$  konsekutive Erzeugende gemeinsam haben.

Geht man aus von den Gleichungen der Striktionslinie der Fläche  $A$ , nämlich

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = c,$$

so ergibt die fortgesetzte Differentiation unter Berücksichtigung der Gleichungen (7)

$$X' = a_1 J + c_1 K$$

$$X'' = a_1 J' + b_1 (J - pK) + c_1 K'$$

$$X''' = a_1 (J'' - J + pK) + b_1 (2J' - 2pK - p'K) + c_1 (K'' - pJ + p^2 K)$$

⋮

$$X^{(n)} = a_1 (J^{(n-1)} + \dots) + b_1 (-Kp^{(n-2)} + \dots) + c_1 (K^{(n-1)} + \dots),$$

so daß die erste Klammer die höchste Ableitung von  $J$ , die zweite die höchste Ableitung von  $p$ , die letzte die höchste Ableitung von  $K$  enthält.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $1, \Delta t, \frac{\Delta t^2}{2!} \dots \frac{\Delta t^n}{n!}$  und addiert man, indem man  $t$  einen bestimmten konstanten Wert beilegt denkt, die Gleichungen, so folgt:

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &= a + a_1 F + b_1 G + c_1 H \\ Y(t + \Delta t) &= b + a_2 F + b_2 G + c_2 H \\ Z(t + \Delta t) &= c + a_3 F + b_3 G + c_3 H. \end{aligned}$$

Aus den Transformationsgleichungen (1) geht aber hervor, daß  $F, G, H$  nichts anderes sind, als die Koordinaten  $x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)$  des Zentralpunktes  $X(t + \Delta t), Y(t + \Delta t), Z(t + \Delta t)$  bezüglich des augenblicklich ruhenden Systems  $\sigma$ , so daß man hat

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= J \Delta t + J' \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots + (J^{(n-1)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots \\ (27) \quad y(t + \Delta t) &= (J - pK) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots + (-Kp^{(n-2)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots \\ z(t + \Delta t) &= K \Delta t + K' \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots + (K^{(n-1)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Betrachtet man andererseits den Richtungskegel der Fläche  $A$  mit den Gleichungen

$$\mathfrak{X} = a_1, \quad \mathfrak{Y} = a_2, \quad \mathfrak{Z} = a_3,$$

so ergibt die fortgesetzte Differentiation in gleicher Weise

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}' &= b_1 \\ \mathfrak{X}'' &= -a_1 + c_1 p \\ \mathfrak{X}''' &= -b_1(1 + p^2) + c_1 p' \\ \mathfrak{X}'''' &= a_1(1 + p^2) + b_1 p p' + c_1(p'' - p(1 + p^2)) \\ &\vdots \\ \mathfrak{X}^{(n)} &= a_1(2pp^{(n-4)} + \dots) + b_1(pp^{(n-3)} + \dots) + c_1(p^{(n-2)} + \dots). \end{aligned}$$

Verfährt man daher wie oben, so erhält man nach Addition die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(t + \Delta t) &= a_1 f + b_1 g + c_1 h \\ \mathfrak{Y}(t + \Delta t) &= a_2 f + b_2 g + c_2 h \\ \mathfrak{Z}(t + \Delta t) &= a_3 f + b_3 g + c_3 h, \end{aligned}$$

also

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$

so daß  $f, g, h$  die Koordinaten  $\mathfrak{x}(t + \Delta t), \mathfrak{y}(t + \Delta t), \mathfrak{z}(t + \Delta t)$  von  $\mathfrak{X}(t + \Delta t), \mathfrak{Y}(t + \Delta t), \mathfrak{Z}(t + \Delta t)$  bezüglich  $\sigma$  sind.

Für diese Koordinaten bestehen daher die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 \xi(t + \Delta t) &= 1 - \frac{\Delta t^2}{2!} + (1 + p^2) \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots + (2pp^{(n-4)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots \\
 \eta(t + \Delta t) &= \Delta t - (1 + p^2) \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots + (pp^{(n-3)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots \\
 \zeta(t + \Delta t) &= p \frac{\Delta t^2}{2!} + p' \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots + (p^{(n-2)} + \dots) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Ist jetzt eine zweite Regelfläche  $\bar{A}$  mit den Invarianten  $\bar{J}$  und  $\bar{K}$  und der geodätischen Krümmung  $\bar{p}$  gegeben und bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 J &= \bar{J}, \quad J' = \bar{J}', \dots \quad J^{(n-2)} = \bar{J}^{(n-2)} \\
 p &= \bar{p}, \quad p' = \bar{p}', \dots \quad p^{(n-2)} = \bar{p}^{(n-2)} \\
 K &= \bar{K}, \quad K' = \bar{K}', \dots \quad K^{(n-2)} = \bar{K}^{(n-2)}, \quad K^{(n-1)} = \bar{K}^{(n-1)},
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

so gehen nach (28) ihre Richtungskegel eine Berührung  $n$ -ter Ordnung ein und ebenso nach (27) die orthogonalen Projektionen ihrer Striktionslinien auf die Ebene  $yz$ . Es haben die projizierenden Zylinder der Striktionslinien in der Richtung der Erzeugenden  $x$  also  $(n+1)$  auf einander folgende Geraden gemeinsam. Auf den Zylindern haben die Striktionslinien selbst  $n$  konsekutive Punkte gemein; die  $(n+1)$ -ten Punkte haben dagegen einen in der Richtung  $x$  verlaufenden Abstand von der Größe

$$\Delta x = (J^{(n-1)} - \bar{J}^{(n-1)}) \frac{\Delta t^n}{n!} + \dots$$

Durch diese beiden Punkte gehen nun die  $(n+1)$ -ten Erzeugenden beider Flächen, parallel der gemeinsamen  $(n+1)$ -ten Erzeugenden beider Richtungskegel. Beide Erzeugenden sind also einander selbst parallel und falls  $\vartheta$  ihren Winkel gegen  $x$  bedeutet, so ist ihr Abstand

$$\Delta n = \Delta x \sin \vartheta.$$

Nun ist aber

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\Delta t^2}{2!} + (1 + p^2) \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots,$$

also

$$\sin \vartheta = \Delta t - \frac{4 + p^2}{4} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots$$

Daher wird

$$\Delta n = (J^{(n-1)} - \bar{J}^{(n-1)}) \frac{\Delta t^{n+1}}{n!} + \dots$$

Da aber für Berührung  $n$ -ter Ordnung unendlich kleine Größen  $(n+1)$ -ter Ordnung nicht in Betracht kommen, so dürfen wir sagen, daß auch die  $(n+1)$ -ten Erzeugenden beider Flächen koinzidieren.

Es läßt sich daher das Resultat aussprechen:

Zwei Regelflächen berühren sich in der  $n$ -ten Ordnung, oder haben  $(n + 1)$  konsekutive Erzeugende gemeinsam, falls die Invarianten  $J$  und die geodätische Krümmung  $p$  nebst ihren  $(n - 2)$  ersten Ableitungen, ebenso die Invarianten  $K$  nebst ihren  $(n - 1)$  ersten Ableitungen übereinstimmen, oder geometrisch gesprochen: falls ihre unendlich fernen Querschnitte sich in der  $n$ -ten Ordnung, ihre Striktions- und Parameterlinien in der  $(n - 1)$ -ten Ordnung berühren.<sup>1)</sup>

Weitere Aufgaben lassen sich anknüpfen an den Ausdruck für den Krümmungsradius des Normalschnittes im Punkte  $u$  von  $x$ , nämlich

$$R = \frac{F}{G} - \frac{\{(J + u')^2 + K^2 + u^2\} \sqrt{K^2 + u^2}}{(J - pK + 2u')K - u(K' + up)}.$$

Hält man  $u$  fest, so kann man  $u'$  derart bestimmen, daß der Radius  $R$  ein Extremum wird, also mit einem der beiden Hauptkrümmungsradien  $r_1$  oder  $r_2$  zusammenfällt.

Offenbar muß dann neben obiger Gleichung noch die Bedingung

$$GF' - FG' = 0 \text{ also } \frac{F'}{G'} = R$$

bestehen. Daraus folgt

$$R = \frac{(J + u')\sqrt{K^2 + u^2}}{K}.$$

Es ist also

$$J + u' = \frac{KR}{\sqrt{K^2 + u^2}} \text{ und}$$

$$J - pK + 2u' = \frac{2KR}{\sqrt{K^2 + u^2}} - (J + pK).$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung für  $R$  ein und ordnet nach Potenzen von  $R$ , so erhält man die quadratische Gleichung

$$(30) \quad R^2 K^2 - R\{(J + pK)K + u(K' + up)\} \sqrt{K^2 + u^2} - (K^2 + u^2)^2 = 0,$$

deren Wurzeln die beiden Hauptkrümmungsradien sind.

Die Richtungen der Krümmungslinien selbst sind andererseits bestimmt durch die Gleichung

$$GF' - FG' = 0,$$

aus welcher durch Einsetzen des Wertes von  $R$  für  $u'$  die quadratische Gleichung entsteht

$$(31) \quad u'^2 K + u' \{(J - pK)K - u(K' + up)\} - (K^2 + u^2)(Jp + K) - K'Ju = 0,$$

deren Integrale die Gleichungen der Krümmungslinien der Regelfläche  $A$  ergeben.

1) Vgl. X. Antomari, a. a. O., wo dieses Resultat durch andere Betrachtungen abgeleitet wurde.

b) Zunächst erhebt sich etwa die Frage nach der Bedingung, unter der die Gleichung (30) zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln hat. Wenn aber die Gleichung

$$r_1 + r_2 = 0$$

bestehen soll, so muß die Gleichung

$$K(J + pK) + u(K' + up) = 0$$

für alle Werte von  $u$ , also identisch bestehen. Dies gibt

$$J + pK = 0, \quad K' = 0, \quad p = 0, \quad \text{also auch } J = 0.$$

Es ist daher

$$K = \text{const.}, \quad s = \frac{J - pK}{1 + p^2} = 0, \quad h = \frac{K + Jp}{1 + p^2} = K, \quad \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fläche  $A$  entsteht also durch Verschraubung einer die Schraubenchse rechtwinklig schneidenden Geraden  $x$  unter Voraussetzung eines konstanten Windungsparameters. Die gesuchte Fläche ist also die sog. Wendelfläche, und wir finden daher kinematisch das bekannte geometrische Resultat wieder:

*Die einzige reelle geradlinige Minimalfläche ist die Wendelfläche.*

c) Es mögen weiterhin diejenigen Regelflächen bestimmt werden, für welche die Linie  $u = \text{const.}$  mit den Haupttangentialkurven der Fläche zusammenfallen. Die Differentialgleichung der letztern lautet nun

$$G = (J - pK + 2u')K - u(K' + up) = 0.$$

Soll diese Gleichung für

$$u' = 0$$

befriedigt sein, so muß die Gleichung

$$(J - pK)K - u(K' + up) = 0$$

für alle Werte von  $u$  identisch bestehen. Es ist also

$$J - pK = 0, \quad p = 0, \quad K' = 0 \quad \text{also auch } J = 0.$$

Wir kommen also gerade auf die vorigen Bedingungen zurück und können sagen:

*Die einzige reelle Regelfläche, bei der die durch die Bewegung des begleitenden Dreikants erzeugten Bahnkurven der Fläche mit ihren Haupttangentialkurven zusammenfallen, ist die Wendelfläche.*

d) Es möge endlich noch nach denjenigen Regelflächen gefragt werden, für welche die Linien  $u = \text{const.}$  die eine Schar der Krümmungslinien der Fläche bilden.

In diesem Falle muß die quadratische Gleichung (31) die eine Wurzel  $u' = 0$  besitzen.

Dies erfordert, daß die Gleichung

$$(u^2 + K^2)(Jp + K) + uJK' = 0$$

für alle Werte von  $u$  identisch erfüllt ist. Es ist also

$$Jp + K = 0, \quad K' = 0$$

oder

$$K = \text{const.}, \quad h = \frac{K + Jp}{1 + p^2} = 0, \quad s = \frac{J - Kp}{1 + p^2} = -\frac{K}{p}$$

d. h. die Striktionsschraubenfläche oskuliert und ist zugleich ein Rotationshyperboloid.

*Wenn also bei der Bewegung des begleitenden Dreikants einer Regel­fläche die von den Punkten der Erzeugenden  $x$  beschriebenen Bahnkurven die eine Schar der Krümmungslinien der Fläche sein sollen, so muß das Schmiegunghyperboloid längs jeder Erzeugenden ein Rotationshyperboloid sein.*

Es lauten aber jetzt nach (16) die Gleichungen des beweglichen Axoids  $B$

$$\begin{aligned} x &= v \cos \lambda \\ y &= -K \operatorname{tg} \lambda \\ z &= v \sin \lambda. \end{aligned}$$

Es ist also  $B$  dasjenige gleichseitige hyperbolische Paraboloid, welches  $x$  und  $y$  zu geradlinigen Striktionlinien und längs diesen den Verteilungsparameter

$$\mathfrak{R} = \left(-\frac{ds}{d\lambda}\right)_0 = K$$

besitzt.

Anderseits hat man für die Koordinaten des Zentralpunktes der Fläche  $A$

$$a = \int (a_1 J + c_1 K) dt = \int (c_1 p - a_1) \frac{K}{p} dt = - \int s db_1,$$

d. h. die Fläche  $A$  hat die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= \int b_1 ds - sb_1 + ua_1 \\ (32) \quad Y &= \int b_2 ds - sb_2 + ua_2 \\ Z &= \int b_3 ds - sb_3 + ua_3, \end{aligned}$$

und daher ist das feste Axoid  $F$  durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= \int b_1 ds + v (a_1 \cos \lambda + c_1 \sin \lambda) \\ (33) \quad Y &= \int b_2 ds + v (a_2 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda) \\ Z &= \int b_3 ds + v (a_3 \cos \lambda + c_3 \sin \lambda) \end{aligned}$$

dargestellt. Da  $h$  verschwindet, so ergibt sich der Satz:

Soll eine Regelfläche längs jeder Erzeugenden von einem Rotationshyperboloid oskuliert werden, so muß sie erzeugbar sein durch die eine der beiden Striktionsgeraden eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, welches auf irgend einer seiner Biegungsflächen ohne Gleiten abrollt.

Setzt man im weitem in die Gleichung (30)

$$u' = 0, \quad J = -\frac{K}{p}$$

ein, so erhält man für den Hauptkrümmungsradius  $r_1$  des Punktes  $u$  den Wert

$$r_1 = -\frac{\sqrt{K^2 + u^2}}{p} = -\sqrt{K^2 + u^2} \operatorname{tg} \lambda.$$

Ist ferner  $\nu$  der Winkel der Flächennormalen  $n$  gegen die Achse  $y$ , so ist nach (22)

$$\cos \nu = \frac{K}{\sqrt{K^2 + u^2}}, \quad \sin \nu = -\frac{u}{\sqrt{K^2 + u^2}},$$

woraus folgt

$$u = -K \operatorname{tg} \nu.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, daß  $n$  auf dem Paraboloid  $B$  liegt, daß dieses also das Normalenparaboloid längs  $x$  ist, dessen zweite Regelschar von den Normalen  $n$  gebildet wird.

Im System  $\Sigma$  sind nun die Richtungskosinus der Normalen  $n$

$$v_i = b_i \cos \nu + c_i \sin \nu = \frac{b_i K - c_i u}{\sqrt{K^2 + u^2}}.$$

Trägt man also auf der Normalen den Krümmungsradius  $r_1$  auf, so erhält man für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$X = \int b_1 ds - s b_1 + u a_1 + r_1 \frac{b_1 K - c_1 u}{\sqrt{K^2 + u^2}},$$

also mit Einsetzung des Wertes von  $r_1$  und weil

$$s + K \operatorname{tg} \lambda = 0$$

ist, als Gleichungen der Evolutenfläche von  $A$

$$\begin{aligned} X &= \int b_1 ds + \frac{u}{\cos \lambda} (a_1 \cos \lambda + c_1 \sin \lambda) \\ (34) \quad Y &= \int b_2 ds + \frac{u}{\cos \lambda} (a_2 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda) \\ Z &= \int b_3 ds + \frac{u}{\cos \lambda} (a_3 \cos \lambda + c_3 \sin \lambda). \end{aligned}$$

Setzt man aber

$$\frac{u}{\cos \lambda} = v,$$

so ist der Punkt  $v$  auf der Erzeugenden  $o$  der Krümmungsmittelpunkt des Punktes  $u$  auf der Erzeugenden  $x$ , andererseits gehen die Gleichungen

der Evolutenfläche (34) in diejenigen der Fläche  $F$  über. Daraus folgt also das Resultat:

*Das Axoid  $F$  ist die Evolutenfläche der Schar von Krümmungslinien  $u = \text{const.}$  der Fläche  $A$ , welche umgekehrt ihre Evolventenfläche ist. Beim Abrollen des Paraboloids  $B$  auf  $F$  beschreiben daher die Erzeugenden der Regelschar  $n$  des Paraboloids die developpablen Normalenflächen der Linien  $u = \text{const.}$  und wickeln sich derart auf die Fläche  $F$  auf, daß sie auf dieser die Evoluten der Krümmungslinien und damit ein System geodätischer Linien der Evolutenfläche  $F$  bilden.*

Denkt man sich ferner auf der Evolutenfläche  $F$  eine orthogonale Trajektorie zum System der geodätischen Linien  $v = \text{const.}$  gezogen, so wickelt sie sich auch als orthogonale Trajektorie auf das Paraboloid auf. Eine solche wird aber aus diesem herausgeschnitten durch irgend einen Kreiszyylinder von der Achse  $x$ . Sie enthält also diejenigen Punkte des Paraboloids, für welche der Wert von  $r_1$  konstant bleibt. Es ergibt daher dieses Beispiel eine besonders anschauliche Illustration zu dem Satze von Ribaucour:

*Auf der Evolutenfläche bilden die Orthogonaltrajektorien der geodätischen Linien den Ort derjenigen Punkte  $v$ , welchen auf der Evolventenfläche Punkte  $u$  von konstantem Hauptkrümmungsradius entsprechen.*

§ 4. Die allgemeine räumliche Bewegung erzeugt durch Abschroten der Axoide.

Im festen System  $\Sigma$  ( $XYZ$ ) bewege sich ein System  $\sigma$  ( $xyz$ ) in der eben beschriebenen Weise, d. h. gemäß den Bewegungsgleichungen

$$(35) \quad \begin{aligned} X &= a + a_1x + b_1y + c_1z \\ Y &= b + a_2x + b_2y + c_2z \\ Z &= c + a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned}$$

und derart, daß es stets begleitendes Dreikant der Regelfläche  $A$  bleibt, deren Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} X &= \int(a_1J + c_1K) dt + ua_1 \\ Y &= \int(a_2J + c_2K) dt + ua_2 \\ Z &= \int(a_3J + c_3K) dt + ua_3. \end{aligned}$$

In analoger Weise bewege sich in einem System  $\bar{\Sigma}$  ( $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ) ein System  $\bar{\sigma}$  ( $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ) gemäß den Bewegungsgleichungen

$$(36) \quad \begin{aligned} \bar{X} &= \bar{a} + \bar{a}_1\bar{x} + \bar{b}_1\bar{y} + \bar{c}_1\bar{z} \\ \bar{Y} &= \bar{b} + \bar{a}_2\bar{x} + \bar{b}_2\bar{y} + \bar{c}_2\bar{z} \\ \bar{Z} &= \bar{c} + \bar{a}_3\bar{x} + \bar{b}_3\bar{y} + \bar{c}_3\bar{z} \end{aligned}$$

und derart, daß es stets begleitendes Dreikant einer Regelfläche  $\bar{A}$  bleibt, mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \int (\bar{a}_1 \bar{J} + \bar{c}_1 \bar{K}) dt + u \bar{a}_1 \\ \bar{Y} &= \int (\bar{a}_2 \bar{J} + \bar{c}_2 \bar{K}) dt + u \bar{a}_2 \\ \bar{Z} &= \int (\bar{a}_3 \bar{J} + \bar{c}_3 \bar{K}) dt + u \bar{a}_3,\end{aligned}$$

wobei  $t$  wieder die unabhängige Veränderliche ist, so daß die Erzeugenden beider Regelflächen denselben Werten von  $t$  entsprechend einander eindeutig zugeordnet sind.

Wir wollen nun die Bewegung von  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$  betrachten, die durch die Bedingung bestimmt sein möge, daß die begleitenden Dreikante, die denselben Werte von  $t$  entsprechen, im Laufe der Bewegung koinzidieren sollen.<sup>1)</sup>

Sind aber

$$(37) \quad \begin{aligned}X &= L + A_1 \bar{X} + B_1 \bar{Y} + C_1 \bar{Z} \\ Y &= M + A_2 \bar{X} + B_2 \bar{Y} + C_2 \bar{Z} \\ Z &= N + A_3 \bar{X} + B_3 \bar{Y} + C_3 \bar{Z}\end{aligned}$$

die Bewegungsgleichungen von  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$ , so folgen aus diesen Gleichungen die Auflösungen

$$\begin{aligned}\bar{X} &= (X - L) A_1 + (Y - M) A_2 + (Z - N) A_3 \\ \bar{Y} &= (X - L) B_1 + (Y - M) B_2 + (Z - N) B_3 \\ \bar{Z} &= (X - L) C_1 + (Y - M) C_2 + (Z - N) C_3.\end{aligned}$$

Setzt man hierin für  $X, Y, Z$  und  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  die aus (35) und (36) folgenden Werte ein unter der Voraussetzung, daß

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}A_1 &= a_1 \bar{a}_1 + b_1 \bar{b}_1 + c_1 \bar{c}_1, & B_1 &= a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2 + c_1 \bar{c}_2, & C_1 &= a_1 \bar{a}_3 + b_1 \bar{b}_3 + c_1 \bar{c}_3 \\ A_2 &= a_2 \bar{a}_1 + b_2 \bar{b}_1 + c_2 \bar{c}_1, & B_2 &= a_2 \bar{a}_2 + b_2 \bar{b}_2 + c_2 \bar{c}_2, & C_2 &= a_2 \bar{a}_3 + b_2 \bar{b}_3 + c_2 \bar{c}_3 \\ A_3 &= a_3 \bar{a}_1 + b_3 \bar{b}_1 + c_3 \bar{c}_1, & B_3 &= a_3 \bar{a}_2 + b_3 \bar{b}_2 + c_3 \bar{c}_2, & C_3 &= a_3 \bar{a}_3 + b_3 \bar{b}_3 + c_3 \bar{c}_3\end{aligned}$$

$$(38) \quad \begin{aligned}L - a &= - (A_1 \bar{a} + B_1 \bar{b} + C_1 \bar{c}) \\ M - b &= - (A_2 \bar{a} + B_2 \bar{b} + C_2 \bar{c}) \\ N - c &= - (A_3 \bar{a} + B_3 \bar{b} + C_3 \bar{c}).\end{aligned}$$

1) Vergl. F. Schur: Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschrotten. Diese Zeitschrift Bd. 55 (1907). S. 408 ff. Ferner: *Encyklopädie der Math. Wiss.* Bd. IV, 1. S. 232 ff.

Bedeuteten jetzt  $P, Q, R, U, V, W$  die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit des Systems  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$ , so bestehen zunächst die Gleichungen

$$(39) \quad A'_1 = A_3 Q - A_2 R, \quad B'_1 = B_3 Q - B_2 R, \quad C'_1 = C_3 Q - C_2 R$$

und 6 andere analoge, die durch cyklische Vertauschung der Indizes entstehen.

Indem man aber in die Gleichung

$$A'_1 = a_1 \bar{a}'_1 + b_1 \bar{b}'_1 + c_1 \bar{c}'_1 + a'_1 \bar{a}_1 + b'_1 \bar{b}_1 + c'_1 \bar{c}_1$$

die Werte

$$\begin{aligned} a'_1 &= b_1, & b'_1 &= c_1 p - a_1, & c'_1 &= -b_1 p \\ \bar{a}'_1 &= \bar{b}_1, & \bar{b}'_1 &= \bar{c}_1 \bar{p} - \bar{a}_1, & \bar{c}'_1 &= -\bar{b}_1 \bar{p} \end{aligned}$$

einsetzt, erhält man

$$(40) \quad \begin{aligned} A'_1 &= (c_1 \bar{b}_1 - b_1 \bar{c}_1) (p - \bar{p}) = (A_3 a_2 - A_2 a_3) (p - \bar{p}) \\ B'_1 &= (c_1 \bar{b}_2 - b_1 \bar{c}_2) (p - \bar{p}) = (B_3 a_2 - B_2 a_3) (p - \bar{p}) \\ C'_1 &= (c_1 \bar{b}_3 - b_1 \bar{c}_3) (p - \bar{p}) = (C_3 a_2 - C_2 a_3) (p - \bar{p}) \end{aligned}$$

und daraus durch zyklische Vertauschung und Vergleichung mit den obenstehenden Werten

$$(41) \quad \begin{aligned} P &= a_1 (p - \bar{p}) \\ Q &= a_2 (p - \bar{p}) \\ R &= a_3 (p - \bar{p}). \end{aligned}$$

Da ferner  $U, V, W$  nichts anderes sind, als die Komponenten der Geschwindigkeit, die der Anfangspunkt von  $\Sigma$  selbst erhält, so ist allgemein

$$U = L' + RM - QN.$$

Nun ist  $L' = a' - (A_1 \bar{a}' + B_1 \bar{b}' + C_1 \bar{c}') - A'_1 \bar{a} + B'_1 \bar{b} + C'_1 \bar{c}$ .

Aber durch Einsetzen der obigen Werte folgt

$$\begin{aligned} (A'_1 \bar{a} + B'_1 \bar{b} + C'_1 \bar{c}) &= a_3 (M - b) (p - \bar{p}) - a_2 (N - c) (p - \bar{p}) \\ &= (M - b) R - (N - c) Q. \end{aligned}$$

Da ferner

$$\begin{aligned} a' &= a_1 J + c_1 K \\ \bar{a}' &= \bar{a}_1 \bar{J} + \bar{c}_1 \bar{K} \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich

$$a' - (A_1 \bar{a}' + B_1 \bar{b}' + C_1 \bar{c}') = a_1 (J - \bar{J}) + c_1 (K - \bar{K}).$$

Machen wir also jetzt noch die Voraussetzung

$$(42) \quad K = \bar{K}$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$(43) \quad \frac{J - \bar{J}}{p - \bar{p}} = h_0,$$

so erhält man

$$(44) \quad \begin{aligned} U &= h_0 P + Rb - Qc \\ V &= h_0 Q + Pc - Ra \\ W &= h_0 R + Qa - Pb. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sagen aber aus, daß die instantane Achse von  $\Sigma$  beständig mit der Erzeugenden  $x$  zusammenfällt, daß  $(p - \bar{p})$  die instantane Winkelgeschwindigkeit und  $J - \bar{J}$  die instantane Gleitgeschwindigkeit längs  $x$  ist. Es beschreibt also im Laufe der Bewegung die instantane Achse in  $\Sigma$  die Regelfläche  $A$ , und da  $\sigma$  und  $\bar{\sigma}$  koinzidieren, in  $\bar{\Sigma}$  die Regelfläche  $\bar{A}$ . Da aber die begleitenden Dreikante zusammenfallen und wegen (42) die beiden Verteilungsparameter von  $A$  und  $\bar{A}$  gleich sind, so berühren sich  $A$  und  $\bar{A}$  beständig, sind also die der Bewegung von  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$  zugrunde liegenden Axoide. Man kann daher sagen:

*Das Abschroten zweier Axoide findet derart statt, daß die unendlich fernen Querschnitte ohne Gleiten aufeinander abrollen und daß die dadurch einander zugeordneten begleitenden Dreikante beider Axoide nacheinander zur Deckung gelangen.*

Dabei sind

$$\omega_0 = p - \bar{p} \quad \text{und} \quad h_0 \omega_0 = J - \bar{J}$$

die relative Winkel- und Gleitgeschwindigkeit, mit welchen  $\bar{A}$  auf  $A$  abschrotet.

Das Gleiten verschwindet, wenn

$$J - \bar{J} = 0$$

ist, d. h. wenn beide Invarianten gleich sind, also  $\bar{A}$  eine Biegungsfläche von  $A$  ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn

$$\frac{J}{K} = \frac{\bar{J}}{\bar{K}} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad J = \bar{J} = 0$$

ist, woraus folgt:

*Sind beide Axoide auf einander abwickelbar, oder sind ihre Striktionslinien isogonale Trajektorien von gleichem Schnittwinkel, oder bestehen beide Axoide aus den Binormalen ihrer Striktionslinien, so findet reines Rollen statt.*

Wenn insbesondere die Achsen  $\sigma$  und  $\bar{\sigma}$  zusammenfallen, so sind die Striktions-schraubenflächen  $\bar{S}$  und  $S$  identisch. Es bestehen dann die Gleichungen

$$p = \bar{p}, \quad J = \bar{J}, \quad K = \bar{K}, \quad K' = \bar{K}',$$

d. h. die Axoide oskulieren sich. Kinematisch leistet also die Striktions-schraubenfläche vollkommen, was der Krümmungskreis in der Ebene, indem der Satz besteht:

*Zwei Axoide oskulieren sich, wenn sie augenblicklich die nämliche Striktions-schraubenfläche besitzen.*

Die Striktionsschraubenfläche selbst wird aber von beiden Axoiden nur dann oskuliert, wenn diese Flächen konstanten Verteilungsparameters sind.

§ 5. Das Analogon der Savaryschen Formel im Raume.

Bei der Bewegung des Systems  $\Sigma$  in  $\Sigma$  beschreibt jede Gerade von  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$  eine Regelfläche  $R$ . Da  $\bar{\Sigma}$  gegen  $\Sigma$  eine völlig allgemeine Lage hat, so genügt es vollständig, die von der Achse  $\bar{X}$  beschriebene Regelfläche zu betrachten, deren Gleichungen in  $\Sigma$  lauten:

$$\begin{aligned} X &= L + u A_1 \\ Y &= M + u A_2 \\ Z &= N + u A_3. \end{aligned}$$

Wir führen nun (Figur 2) ein neues System  $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ) ein, welches beständig mit dem begleitenden Dreikant der Fläche  $R$  zusammenfallen soll und bestimmen jetzt die Lage seiner instantanen Achse  $\mathfrak{f}$  gegen das System  $\Sigma$ .

Sind

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{L} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{X} + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{Z} \\ (45) \quad Y &= \mathfrak{M} + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X} + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{Z} \\ Z &= \mathfrak{N} + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{X} + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{Y} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{Z} \end{aligned}$$

die Übergangsgleichungen beider Systeme, so sollen

$$(46) \quad \mathfrak{L} = L + u_0 A_1, \quad \mathfrak{M} = M + u_0 A_2, \quad \mathfrak{N} = N + u_0 A_3$$

die Koordinaten des Zentralpunktes der Erzeugenden  $\mathfrak{X}$  bedeuten.

Da die Systeme  $\bar{\Sigma}$  und  $\mathfrak{S}$  beständig die Achse  $\mathfrak{X}$  gemeinsam haben, besteht zunächst die Gleichung

$$\mathfrak{A}_1'^2 + \mathfrak{A}_2'^2 + \mathfrak{A}_3'^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 = (1 - \bar{a}_1^2)(p - \bar{p})^2.$$

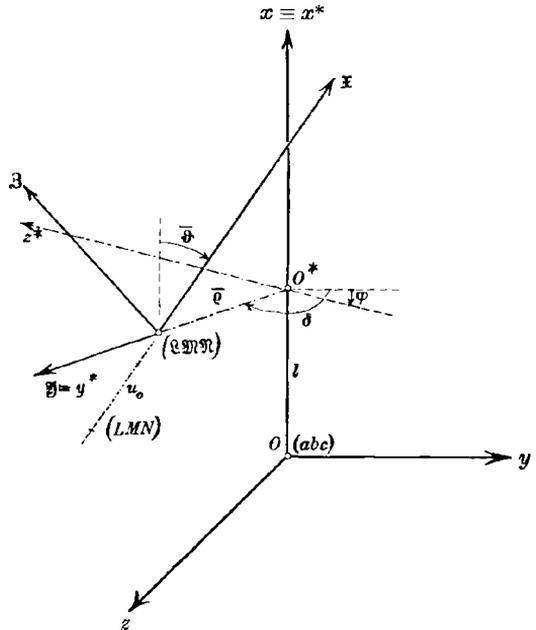
Setzt man also

$$(47) \quad \mathcal{A} = \sqrt{1 - \bar{a}_1^2}(p - \bar{p}),$$

die Wurzel positiv genommen, so bestehen für die Richtungskosinus von  $\mathfrak{S}$  die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= A_1, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{A'_1}{\mathcal{A}} = \frac{A_3 a_2 - A_2 a_3}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}, \quad \mathfrak{C}_1 = \frac{a_1 - A_1 \bar{a}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \\ (48) \quad \mathfrak{A}_2 &= A_2, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{A'_2}{\mathcal{A}} = \frac{A_1 a_3 - A_3 a_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}, \quad \mathfrak{C}_2 = \frac{a_2 - A_2 \bar{a}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \\ \mathfrak{A}_3 &= A_3, \quad \mathfrak{B}_3 = \frac{A'_3}{\mathcal{A}} = \frac{A_2 a_1 - A_1 a_2}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}, \quad \mathfrak{C}_3 = \frac{a_3 - A_3 \bar{a}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}. \end{aligned}$$

Fig. 2.



Sind nun  $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit an der instantanen Achse  $\mathfrak{f}$ , so ergibt die Differentiation der Gleichung

$$\mathfrak{B}_1 \sqrt{1 - \bar{a}_1^2} = A_3 a_2 - A_2 a_3$$

$$\mathfrak{B}'_1 \sqrt{1 - \bar{a}_1^2} = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \mathfrak{B}_1 + (a_2 \mathfrak{B}_3 - a_3 \mathfrak{B}_2) \mathcal{A} + A_3 b_2 - A_2 b_3.$$

Nun ergibt sich durch Einsetzen der Werte nach einfacher Reduktion:

$$\frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \mathfrak{B}_1 + A_3 b_2 - A_2 b_3 = \mathfrak{C}_1 \sqrt{1 - \bar{a}_1^2} \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2}$$

und daher

$$\mathfrak{B}'_1 = (a_2 \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2 a_3) (p - \bar{p}) + (\mathfrak{B}_3 A_2 - \mathfrak{B}_2 A_3) \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2},$$

also

$$\mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B}_3 \left( a_2 (p - \bar{p}) + A_2 \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2} \right) - \mathfrak{B}_2 \left( a_3 (p - \bar{p}) + A_3 \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2} \right),$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für  $\mathfrak{B}'_2$  und  $\mathfrak{B}'_3$ . Da aber nach (39) andererseits

$$\mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B}_3 \mathfrak{Q} - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{R}$$

ist, nebst den entsprechenden zwei andern Gleichungen, so ergibt die Vergleichung dieser drei Gleichungspaare für die gesuchten Komponenten

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= a_1 (p - \bar{p}) + A_1 \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2} \\ (49) \quad \mathfrak{Q} &= a_2 (p - \bar{p}) + A_2 \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2} \\ \mathfrak{R} &= a_3 (p - \bar{p}) + A_3 \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2}. \end{aligned}$$

Setzt man demnach

$$(50) \quad \frac{\bar{c}_1}{1 - \bar{a}_1^2} = \bar{\omega}, \quad \bar{\mathfrak{P}} = A_1 \bar{\omega}, \quad \bar{\mathfrak{Q}} = A_2 \bar{\omega}, \quad \bar{\mathfrak{R}} = A_3 \bar{\omega},$$

so ist

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P} &= P + \bar{\mathfrak{P}} \\ \mathfrak{Q} &= Q + \bar{\mathfrak{Q}} \\ \mathfrak{R} &= R + \bar{\mathfrak{R}}. \end{aligned}$$

Bedeutet nun im weitern  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$  die Komponenten der Schiebungs-  
geschwindigkeit von  $\mathfrak{C}$  in  $\Sigma$ , so ist ganz allgemein

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{L}' + \mathfrak{R}\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}\mathfrak{N}$$

oder da

$$\mathfrak{L}' = L' + u_0 A'_1 + u'_0 A_1$$

und

$$A'_1 + A_2 R - A_3 Q = 0$$

ist, so erhält man durch Einsetzen der Werte für  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{U} = L' + R\mathfrak{M} - Q\mathfrak{N} + u'_0 A_1 + \bar{\mathfrak{R}}\mathfrak{M} - \bar{\mathfrak{Q}}\mathfrak{N}.$$

Setzt man daher

$$(52) \quad \frac{u'_0}{\omega} = \bar{\mathfrak{S}}$$

$$\bar{U} = \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{P}} + \mathfrak{R}\mathfrak{M} - \bar{\Omega}\mathfrak{N}$$

$$(53) \quad \bar{\mathfrak{V}} = \bar{\mathfrak{S}}\bar{\Omega} + \mathfrak{P}\mathfrak{N} - \bar{\mathfrak{R}}\mathfrak{L}$$

$$\bar{\mathfrak{W}} = \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{N}} + \bar{\Omega}\mathfrak{L} - \mathfrak{P}\mathfrak{M},$$

so wird

$$(54) \quad \mathfrak{U} = U + \bar{U}$$

$$\mathfrak{V} = V + \bar{\mathfrak{V}}$$

$$\mathfrak{W} = W + \bar{\mathfrak{W}}.$$

Diese Gleichungen sagen aber aus:

Die absolute Schraubengeschwindigkeit des Systems  $\mathfrak{S}$  in  $\Sigma$  ist die Summe aus der Schraubenführungsgeschwindigkeit  $p - \bar{p}$  von  $\bar{\Sigma}$  in  $\Sigma$  an der Schraube  $(x, h_0)$  und der Relativschraubengeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  des Systems  $\mathfrak{S}$  in  $\bar{\Sigma}$  an der Schraube  $(\bar{x}, \bar{\mathfrak{S}})$ .

Es ergibt sich hieraus das Resultat:

Die Achse  $\mathfrak{Y}$  ist die gemeinsame Normale der drei Achsen  $\bar{x}$ ,  $x$  und  $f$ .

Ist jetzt — vergleiche Figur 2 —  $l$  der Abstand des Fußpunktes  $O^*$  der Achse  $\mathfrak{Y}$  in  $x$  vom Punkte  $O$ , so machen wir  $O^*$  zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems  $O^*(x^*, y^*, z^*)$  dessen Achse  $x^*$  mit  $x$  und dessen Achse  $y^*$  mit  $\mathfrak{Y}$  identisch ist. Die Richtungskosinus der dritten Achse  $z^*$  sind dann

$$(55) \quad \begin{aligned} c_1^* &= a_2 \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2 a_3 = \frac{a_1 \bar{a}_1 - A_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \\ c_2^* &= a_3 \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_3 a_1 = \frac{a_2 \bar{a}_1 - A_2}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \\ c_3^* &= a_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 a_2 = \frac{a_3 \bar{a}_1 - A_3}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}. \end{aligned}$$

Beziehen wir nun die absolute Schraubengeschwindigkeit von  $\mathfrak{S}$  auf dieses neue System  $\sigma^*$ , so wird

$$(56) \quad \begin{aligned} p^* &= a_1 \mathfrak{P} + a_2 \bar{\Omega} + a_3 \mathfrak{N} = p - \bar{p} + \bar{a}_1 \bar{\omega} \\ q^* &= \mathfrak{B}_1 \mathfrak{P} + \mathfrak{B}_2 \bar{\Omega} + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{N} = 0 \\ r^* &= c_1^* \mathfrak{P} + c_2^* \bar{\Omega} + c_3^* \mathfrak{N} = -\sqrt{1 - \bar{a}_1^2} \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Im Weiteren ist die Komponente der Geschwindigkeit des Punktes  $X, Y, Z$  nach der Achse  $X$  von  $\Sigma$

$$\begin{aligned} U_x &= U + \bar{U} - \mathfrak{R}Y + \bar{\Omega}Z \\ &= h_0 P + u'_0 A_1 - R(Y - b) + Q(Z - c) + \mathfrak{R}(\mathfrak{M} - Y) - \bar{\Omega}(\mathfrak{N} - Z). \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Koordinaten

$$X = a + la_1, \quad Y = b + la_2, \quad Z = c + la_3$$

des Punktes  $O^*$  ein, so erhält man speziell als Komponenten seiner Geschwindigkeit in  $\Sigma$

$$(57) \quad \begin{aligned} U_x &= h_0 P + u'_0 A_1 + \overline{\mathfrak{H}}(\mathfrak{M} - b) - \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N} - c) - \overline{\omega} l \mathfrak{B}_1 \sqrt{1 - \overline{a}_1^2} \\ U_y &= h_0 Q + u'_0 A_2 + \overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{N} - c) - \overline{\mathfrak{H}}(\mathfrak{Q} - a) - \overline{\omega} l \mathfrak{B}_2 \sqrt{1 - \overline{a}_1^2} \\ U_z &= h_0 R + u'_0 A_3 + \overline{\mathfrak{D}}(\mathfrak{Q} - a) - \overline{\mathfrak{P}}(\mathfrak{M} - b) - \overline{\omega} l \mathfrak{B}_3 \sqrt{1 - \overline{a}_1^2}. \end{aligned}$$

Transformiert man demnach diese Komponenten auf das System  $\sigma^*$ , so erhält man

$$\begin{aligned} u^* &= a_1 U_x + a_2 U_y + a_3 U_z = h_0(p - \bar{p}) + u'_0 \overline{a}_1 - \overline{\omega} \sqrt{1 - \overline{a}_1^2} \Sigma(\mathfrak{Q} - a) \mathfrak{B}_1 \\ v^* &= \mathfrak{B}_1 U_x + \mathfrak{B}_2 U_y + \mathfrak{B}_3 U_z = \overline{\omega} (\Sigma(\mathfrak{Q} - a) \mathfrak{C}_1 - l \sqrt{1 - \overline{a}_1^2}) \\ w^* &= c_1^* U_x + c_2^* U_y + c_3^* U_z = -\sqrt{1 - \overline{a}_1^2} u'_0 - \overline{\omega} \overline{a}_1 \Sigma(\mathfrak{Q} - a) \mathfrak{B}_1. \end{aligned}$$

Projiziert man aber die Strecke  $O\mathfrak{D}$  im Sinne des Pfeiles vom Anfangspunkt  $O(a, b, c)$  auf  $x$  nach dem Endpunkt  $\mathfrak{D}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  auf  $\mathfrak{Y}$  auf die Achsen von  $\sigma^*$ , so ist

$$(58) \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) a_1 = l, \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) \mathfrak{B}_1 = \bar{\varrho}, \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) c_1^* = 0,$$

wobei  $\bar{\varrho}$  den kürzesten Abstand der Achse  $\mathfrak{X}$  von  $x$  im Sinne der positiven Richtung der Achse  $\mathfrak{Y}$  bedeutet. Durch Projektion derselben Strecke auf die Achsen von  $\mathfrak{S}$  folgt weiter

$$(59) \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) A_1 = l \overline{a}_1, \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) \mathfrak{C}_1 = l \sqrt{1 - \overline{a}_1^2}.$$

Demnach nehmen nun die Schiebungskomponenten die Werte an

$$\begin{aligned} u^* &= h_0(p - \bar{p}) + \overline{a}_1 u'_0 - \overline{\omega} \sqrt{1 - \overline{a}_1^2} \bar{\varrho} \\ v^* &= 0 \\ w^* &= -\sqrt{1 - \overline{a}_1^2} u'_0 - \overline{\omega} \overline{a}_1 \bar{\varrho}. \end{aligned}$$

Um endlich noch den Wert von  $u'_0$  zu ermitteln, gehen wir aus von der letzten Bedingungsgleichung (58) für  $u_0$ , nämlich

$$\Sigma(\mathfrak{Q} - a) c_1^* = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung und beachtet, daß

$$\mathfrak{Q} - a = L - a + u_0 A_1$$

ist, so folgt

$$(60) \quad \Sigma(\mathfrak{Q} - a) c_1^{*'} + \Sigma(L' - a') \frac{a_1 \overline{a}_1 - A_1}{\sqrt{1 - \overline{a}_1^2}} - u'_0 \sqrt{1 - \overline{a}_1^2} = 0.$$

Nun ist aber nach (55)

$$\begin{aligned} c_1^{*'} &= -\mathfrak{B}_1(a_1 \mathfrak{P} + a_2 \mathfrak{D} + a_3 \mathfrak{H}) + b_2 \mathfrak{B}_2 - b_3 \mathfrak{B}_3 \\ &= -(p - \bar{p} + \overline{a}_1 \overline{\omega}) \mathfrak{B}_1 + \frac{\overline{b}_1 a_1}{\sqrt{1 - \overline{a}_1^2}}. \end{aligned}$$

Somit

$$(61) \quad \Sigma(\mathfrak{L} - a)c_1^{*'} = -(p - \bar{p} + \bar{a}_1\bar{\omega})\bar{\varrho} + \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}l.$$

Ferner ist nach (38)

$$\Sigma(L - a)A_1 = -\bar{a}, \quad \Sigma(L - a)B_1 = -\bar{b}, \quad \Sigma(L - a)C_1 = -\bar{c},$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma(L - a)A_1' + \Sigma(L' - a')A_1 &= -(\bar{a}_1\bar{J} + \bar{c}_1K) \\ \Sigma(L - a)B_1' + \Sigma(L' - a')B_1 &= -(\bar{a}_2\bar{J} + \bar{c}_2K) \\ \Sigma(L - a)C_1' + \Sigma(L' - a')C_1 &= -(\bar{a}_3\bar{J} + \bar{c}_3K). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Sigma(L' - a')a_1 = -\bar{J},$$

und daher ist nach der ersten obiger drei Gleichungen

$$\mathcal{A}\Sigma(\mathfrak{L} - a)\mathfrak{B}_1 + \Sigma(L' - a')A_1 = -a_1\bar{J} - \bar{c}_1K,$$

also

$$-\Sigma(L' - a')A_1 = \bar{a}_1\bar{J} + \bar{c}_1K + \mathcal{A}\bar{\varrho}$$

und daher

$$(62) \quad \Sigma(L' - a')c_1^* = \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}K + (p - \bar{p})\bar{\varrho}.$$

Setzt man daher die Werte aus (61) und (62) in (60) ein, so folgt

$$(63) \quad u_0^* = \bar{\omega} \left\{ K + \frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_1}l - \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}\bar{\varrho} \right\}$$

und daher schließlich

$$(64) \quad \begin{aligned} u^* &= h_0(p - \bar{p}) + \bar{a}_1\bar{\omega} \left( K + \frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_1}l \right) - \bar{\omega} \frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} \\ v^* &= 0 \\ w^* &= -\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}\bar{\omega} \left( K + \frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_1}l \right). \end{aligned}$$

Damit sind die Komponenten der absoluten Schraubengeschwindigkeit von  $\mathfrak{S}$  in  $\Sigma$  bezüglich  $\sigma^*$  bestimmt.

Um nun die Lage ihrer instantanen Achse  $\mathfrak{k}$  gegen  $\sigma^*$  zu ermitteln, führen wir in die Richtungskosinus der Achse  $\mathfrak{X}$  die Eulerschen Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  ein, indem wir setzen

$$(65) \quad \bar{a}_1 = \cos\bar{\vartheta}, \quad \bar{b}_1 = \sin\bar{\vartheta}\cos\varphi, \quad \bar{c}_1 = \sin\bar{\vartheta}\sin\varphi.$$

Alsdann ergibt sich für den Winkel  $\delta$  der positiven Achse  $\mathfrak{Y}$  gegen  $y$

$$\cos\delta = b_1\mathfrak{B}_1 + b_2\mathfrak{B}_2 + b_3\mathfrak{B}_3 = -\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} = -\sin\varphi$$

$$\sin\delta = c_1\mathfrak{B}_1 + c_2\mathfrak{B}_2 + c_3\mathfrak{B}_3 = +\frac{\bar{b}_1}{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}} = +\cos\varphi.$$

Die positive Richtung von  $\mathfrak{Y}$  schließt also gegen  $y$  den Winkel

$$(66) \quad \delta = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

ein. Bezeichnet daher  $\vartheta$  jetzt den Winkel der Achse  $\mathfrak{f}$  gegen  $x$ , d. h. den Winkel, um welchen von der positiven Achse  $\mathfrak{y}$  aus gesehen  $x$  im positiven Sinne zu drehen ist, bis  $x$  parallel  $\mathfrak{f}$  wird, so ist

$$(67) \quad \cotg \vartheta = -\frac{p^*}{r^*} = \frac{p - \bar{p} + \cotg \vartheta \sin \varphi}{\sin \varphi},$$

d. h.  $\vartheta$  ist bestimmt durch die Gleichung

$$(68) \quad (\cotg \vartheta - \cotg \vartheta) \sin \varphi = p - \bar{p}.$$

Bezeichnet nun im weitern  $\varrho$  den in der positiven Richtung der Achse  $\mathfrak{y}$  gemessenen Abstand der Achse  $\mathfrak{f}$  von  $x$ , so ist

$$(69) \quad \varrho = \frac{r^* u^* - p^* w^*}{p^{*2} + r^{*2}},$$

woraus durch Einsetzung der Werte folgt

$$\varrho \left(1 + \frac{p^{*2}}{r^{*2}}\right) = \frac{\sqrt{1 - \bar{a}_1^2}}{\bar{c}_1} \left\{ K - h_0 + l \frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_1} \right\} + \frac{\bar{e}}{1 - a_1^2}$$

d. h.

$$(70) \quad \left( \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\bar{e}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \right) \sin \varphi = (K - h_0 + l \cotg \varphi) (p - \bar{p}).$$

Diese Gleichung stellt in Verbindung mit (68) das Analogon der Savaryschen Formel für den Raum dar.

Man kann die Formel aber geometrisch übersichtlicher gestalten. Läßt man den Winkel  $\varphi$  bis  $\frac{\pi}{2}$  wachsen, so wird die positive Richtung von  $\mathfrak{y}$  parallel der negativen Achse  $y$ . Es bedeuteten aber  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  die Winkel der Achsen  $o$  und  $\bar{o}$  von der negativen Achse  $y$  aus gesehen. Wir setzen daher wie früher

$$(71) \quad p = \cotg \lambda, \quad \bar{p} = \cotg \bar{\lambda}.$$

Bedeutet daher  $\sigma$  und  $\bar{\sigma}$  die Abstände dieser Achsen von  $x$  gemessen im Sinne der positiven Richtung  $\mathfrak{y}$ , so ist zu setzen

$$(72) \quad \sigma = -s = \frac{pK - J}{1 + p^2}, \quad \bar{\sigma} = -\bar{s} = \frac{\bar{p}K - \bar{J}}{1 + \bar{p}^2}.$$

Demnach ist

$$(73) \quad \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} = (p - \bar{p})K - J + \bar{J} = (K - h_0)(p - \bar{p}),$$

und es nehmen daher die Savaryschen Formeln nunmehr die Form an

$$(74) \quad \begin{aligned} & (\cotg \vartheta - \cotg \bar{\vartheta}) \sin \varphi = \cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda} \text{ und} \\ & \left( \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\bar{\varrho}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \right) \sin \varphi = \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} + l \cotg \varphi (\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

In diesen beiden Formeln, von welchen die erste die Savarysche Formel für die Kugel ist, sind alle Winkel und Strecken einheitlich

bestimmt. Es ist  $\varphi$  der zwischen  $O$  und  $\pi$  liegende Winkel, den die Projektionen der Erzeugenden  $\mathfrak{X}$  und der Achse  $\mathfrak{f}$  auf die Ebene  $yz$  von  $\sigma$  gegen die positive Achse  $y$  einschließen;  $\delta = \varphi + \frac{\pi}{2}$  ist der Winkel ihrer gemeinsamen positiven Normalen  $\mathfrak{Y}$  gegen  $y$ . Von ihr aus gesehen sind die Neigungswinkel  $\bar{\vartheta}$  und  $\vartheta$  als positive zwischen  $O$  und  $\pi$  liegende Winkel von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{f}$  gegen  $x$ , ihre Abstände  $\bar{\rho}$  und  $\rho$  von  $x$  aber je nach dem Vorzeichen als positive oder negative Strecken auf  $\mathfrak{Y}$  aufzutragen.

Für die Achsen  $\bar{o}$  und  $o$  ist insbesondere der Winkel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; der Winkel ihrer gemeinsamen positiven Normalen gegen  $y$  ist daher  $\delta = \pi$ . Von dieser aus gesehen sind  $\bar{\lambda}$  und  $\lambda$  als positive zwischen  $O$  und  $\pi$  liegende Winkel von  $\bar{o}$  und  $o$  gegen  $x$ ,  $\bar{\sigma}$  und  $\sigma$  aber als deren Abstände von  $x$  je nach dem Vorzeichen als positive oder negative Strecken auf der Normalen aufzutragen. Die Formel (74) ist dadurch derart erklärt, daß sie für alle Lagen der Achsen  $\bar{o}$  und  $o$ , d. h. für Berührung der Axoide von innen und außen und für jede Lage des Erzeugenden  $\mathfrak{X}$  im Raume gültig bleibt.

§ 6. Die geometrische Konstruktion der Striktionsachse und das Analogon des Eulerschen Satzes im Raume.

Wir schicken zunächst eine Betrachtung aus der analytischen Geometrie des Raumes voraus. Es seien bezüglich des Systems  $\sigma(xyz)$  drei windschiefe Geraden  $g_i$  gegeben, von welchen keine der Achse  $x$  parallel sein soll. Sie seien bestimmt durch die Richtungskosinus

$$(75) \quad \alpha_i = \cos \vartheta_i, \quad \beta_i = \sin \vartheta_i \cos \varphi_i, \quad \gamma_i = \sin \vartheta_i \sin \varphi_i$$

und durch die Fußpunkte  $G_i$  ihrer gemeinsamen Normalen mit der  $x$ -Achse, mit den Koordinaten

$$(76) \quad x_i = l_i, \quad y_i = -\rho_i \sin \varphi_i, \quad z_i = +\rho_i \cos \varphi_i.$$

Liegt  $\vartheta_i$  zwischen  $0$  und  $\pi$ , so ist damit auch der positive Sinn jeder Geraden  $g_i$  festgelegt. Es mögen nun die Bedingungen aufgestellt werden, unter welchen die drei Geraden  $g_i$  eine gemeinschaftliche Normale  $\nu$  besitzen.

Sind  $(a, b, c)$  die Richtungskosinus von  $\nu$ , so sind diese bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 &= 0 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 &= 0 \\ a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

und es muß daher zunächst die Bedingung

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgeschrieben die Gleichung

$$(77) \quad \cotg \vartheta_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \cotg \vartheta_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \cotg \vartheta_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

erfüllt sein.

Aus dem Verschwinden der Determinante  $\Delta$  folgt, daß von den obigen drei Bestimmungsgleichungen die eine, z. B. die erste, weggelassen werden kann. Die Auflösung der beiden andern ergibt dann

$$(78) \quad a = \frac{\beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3}{\sin \Theta_{23}}, \quad b = \frac{\gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3}{\sin \Theta_{23}}, \quad c = \frac{\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3}{\sin \Theta_{23}},$$

wo  $\Theta_{23}$  den von der positiven Seite von  $\nu$  aus gesehenen Winkel von  $g_2$  gegen  $g_3$  bedeutet.

Durch zyklische Vertauschung der Indizes erhält man zwei weitere Darstellungen für  $a, b, c$ . Sind jetzt im weiteren  $(a_i, b_i, c_i)$  die Richtungskosinus der Normalen  $n_i$  der drei Ebenen, welche die Richtung  $\nu$  mit den Geraden  $g_i$  bestimmt, so genügen diese den Gleichungen

$$(79) \quad \begin{aligned} a a_1 + b b_1 + c c_1 &= 0 \\ a a_2 + b b_2 + c c_2 &= 0 \\ a a_3 + b b_3 + c c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es verschwindet daher auch die Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

und man hat daher für die  $a, b, c$  auch die Auflösungen

$$(80) \quad a = \frac{b_2 c_3 - c_2 b_3}{\sin \Theta_{23}}, \quad b = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{\sin \Theta_{23}}, \quad c = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{\sin \Theta_{23}}$$

nebst zwei weiteren Darstellungen, weil die Normalen  $n_i$  unter sich dieselben Winkel einschließen wie die Geraden  $g_i$ .

Sollen nun die Geraden  $g_i$  eine gemeinschaftliche Normale  $\nu$  haben, so müssen die drei Ebenen  $(\nu, g_i)$  einem Büschel angehören. Die Gleichungen dieser Ebenen lauten aber

$$a_i(x - x_i) + b_i(y - y_i) + c_i(z - z_i) = 0$$

oder in expliziter Form

$$(81) \quad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sie gehen dann durch dieselbe Gerade, falls neben der Determinante  $\mathcal{A}'$  noch irgend eine der drei Determinanten dritten Grades der Matrix der Koeffizienten verschwindet. Die gesuchte zweite Bedingung läßt sich daher in der Form schreiben

$$(82) \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In Rücksicht auf (80) nimmt aber diese Gleichung die Form an

$$d_1 \sin \vartheta_{23} + d_2 \sin \vartheta_{31} + d_3 \sin \vartheta_{12} = 0,$$

oder da

$$d_i = -(a_i x_i + b_i y_i + c_i z_i)$$

ist

$$(83) \quad \sum (a_i x_i + b_i y_i + c_i z_i) \sin \vartheta_{23} = 0.$$

Da nun die drei Geraden  $g_1, \nu, n_1$  selbst eine trirehtanguläre Ecke bilden, so enthält die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

die Elemente einer orthogonalen Substitution. Es ist daher

$$a_1 = b \gamma_1 - c \beta_1 \quad \text{und} \quad a = -b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt aber durch Einsetzen der Werte für  $b$  und  $c$  aus (78)

$$\begin{aligned} a_1 \sin \vartheta_{23} &= \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) - \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3) \\ &= \alpha_3 \cos \vartheta_{12} - \alpha_2 \cos \vartheta_{31}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$y_1 = - \frac{e_1}{\sin \vartheta_1} \gamma_1, \quad z_1 = + \frac{e_1}{\sin \vartheta_1} \beta_1.$$

Daraus folgt

$$b_1 y_1 + c_1 z_1 = (-b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1) \frac{e_1}{\sin \vartheta_1} = a \frac{e_1}{\sin \vartheta_1},$$

d. h.

$$(b_1 y_1 + c_1 z_1) \sin \vartheta_{23} = (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) \frac{e_1}{\sin \vartheta_1}.$$

Wir können daher die zweite Bedingung in der Form schreiben

$$\sum (\alpha_3 \cos \vartheta_{12} - \alpha_2 \cos \vartheta_{31}) l_1 + (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) \frac{e_1}{\sin \vartheta_1} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\alpha_3 \cos \vartheta_{12} - \alpha_2 \cos \vartheta_{31}}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3} = - \{ \cotg \vartheta_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \cotg \vartheta_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \}$$

$$\frac{\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3} = - \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin \vartheta_1}.$$

Ist also keine der Geraden  $g_i$  der Achse  $x$  parallel, so wird die zweite Bedingung für eine gemeinsame Normale aller drei Geraden  $g_i$  dargestellt durch die Gleichung:

$$(84) \quad \sum \left\{ (\cotg \vartheta_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \cotg \vartheta_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) l_1 + \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \right\} = 0.$$

Wenden wir jetzt die beiden Bedingungen (77) und (84) an auf den Fall der Savaryschen Formeln, so wollen wir  $g_1$  mit  $\mathfrak{X}$ ,  $g_2$  mit  $\bar{o}$  und  $g_3$  mit einer Geraden  $\mathfrak{p}$  identisch machen, deren gemeinsame Normale  $n'$  mit  $x$  durch Drehung um einen rechten Winkel aus der gemeinsamen Normalen  $n$  von  $\mathfrak{X}$  und  $x$  hervorgeht. Im übrigen sei  $\tau$  die Neigung und  $t$  der kürzeste Abstand von  $\mathfrak{p}$  gegen  $x$ .

Wir haben daher in obigen Gleichungen zu setzen

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \bar{\vartheta}, & \varphi_1 &= \varphi, & l_1 &= l, & e_1 &= \bar{e} \\ \vartheta_2 &= \bar{\lambda}, & \varphi_2 &= \frac{\pi}{2}, & l_2 &= 0, & e_2 &= \bar{\sigma} \\ \vartheta_3 &= \tau, & \varphi_3 &= \varphi + \frac{\pi}{2}, & l_3 &= l, & e_3 &= t. \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen nimmt nun die Gleichung (77) die Form an

$$(85) \quad \cotg \bar{\vartheta} \sin \varphi + \cotg \tau \cos \varphi = \cotg \bar{\lambda},$$

während (84) übergeht in die Gleichung

$$(86) \quad \frac{\bar{e}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \sin \varphi + \frac{t}{\sin^2 \tau} \cos \varphi = \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} + l \cotg \varphi \left( \cotg \bar{\lambda} - \frac{\cotg \tau}{\cos \varphi} \right).$$

Unter diesen Bedingungen haben also  $\mathfrak{X}$ ,  $\bar{o}$  und  $\mathfrak{p}$  eine gemeinsame Normale  $\bar{v}$ .

Ersetzen wir jetzt  $\mathfrak{X}$  durch die Achse  $\mathfrak{f}$ , d. h.  $\bar{\vartheta}$  und  $\bar{e}$  durch  $\vartheta$  und  $e$ ; ebenso die Achse  $\bar{o}$  durch  $o$ , d. h.  $\bar{\lambda}$  und  $\bar{\sigma}$  durch  $\lambda$  und  $\sigma$ , während die Achse  $\mathfrak{p}$  bleibt, so haben die Geraden  $\mathfrak{f}$ ,  $o$  und  $\mathfrak{p}$  eine gemeinschaftliche Normale  $v$ , falls die Gleichungen bestehen

$$(87) \quad \cotg \vartheta \sin \varphi + \cotg \tau \cos \varphi = \cotg \lambda$$

$$(88) \quad \frac{e}{\sin^2 \vartheta} \sin \varphi + \frac{t}{\sin^2 \tau} \cos \varphi = \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} + l \cotg \varphi \left( \cotg \lambda - \frac{\cotg \tau}{\cos \varphi} \right).$$

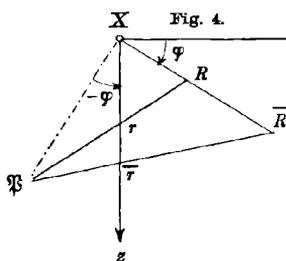
Subtrahiert man aber die Gleichungen (85) und (87) und ebenso (86) und (88) voneinander, so erhält man

$$(89) \quad \left( \frac{e}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\bar{e}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \right) \sin \varphi = \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} + l \cotg \varphi (\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda})$$



gefundene Formel zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Bahnkurve eines Punktes in der kinematischen Geometrie der Ebene ist.<sup>1)</sup>

Bezeichnen nun, wie in Fig. 4 die Buchstaben  $\bar{r}, r, \bar{R}, R, \mathfrak{P}$  gleichzeitig auch die Schnittpunkte der zugehörigen Achsen mit der Tangentenebene, so folgt aus den Gleichungen (85) und (87), daß die drei Punkte  $\bar{R}, \bar{r}, \mathfrak{P}$  und  $R, r, \mathfrak{P}$  je in einer geraden Linie liegen und daß  $X\mathfrak{P}$  auf  $\bar{R}R$  senkrecht steht.

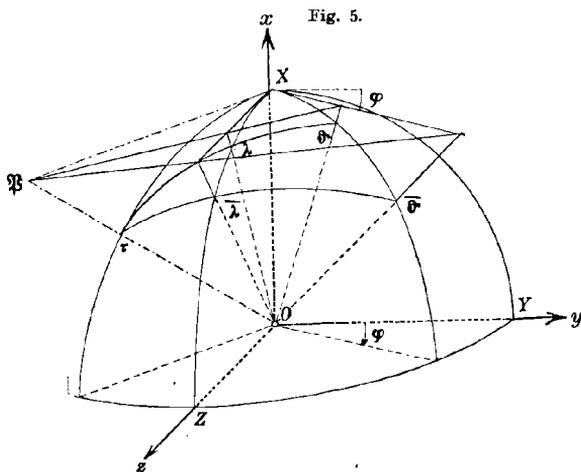


Dreht man nun die Achsen  $y$  und  $z$  um den Pol  $X$ , so schneidet die Achse  $z$ , welche gegen  $X\mathfrak{P}$  den Winkel  $(-\varphi)$  einschließt, aus den Schenkeln des festen Winkels  $(\bar{R}\mathfrak{P}R)$  jedesmal das Punktepaar  $\bar{r}, r$  derart heraus, daß die Gleichung

$$\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} \right) \frac{1}{\sin \varphi} = \text{const.}$$

besteht, mit Hilfe welcher Formel Euler umgekehrt die Gleichung (91) konstruiert hat.

Wird, wie in Fig. 5 die ganze Figur in der Tangentenebene aus dem Kugelmittelpunkt auf die Einheitskugel projiziert, so erhält man den



ganz analogen Satz für die Kugel, indem für jedes Punktepaar  $\bar{\lambda}, \lambda$  auf den Schenkeln des festen Winkels  $(\mathfrak{P}, \tau, \mathfrak{P})$  die Bedingung

$$(\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}) \frac{1}{\sin \varphi} = \text{const.}$$

erfüllt ist.

Im Raume bilden nun die Normalen  $\bar{\nu}$  und  $\nu$  zusammen mit ihren gemeinsamen Normalen  $\mathfrak{p}$  einen räumlichen Winkel. Halten wir diesen fest,

so bleiben auch die Normalen  $n'$  und  $n$  und damit die Achsen  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{t}$  fest, und es ist daher die Differenz

$$\frac{e}{\sin^2 \mathfrak{P}} - \frac{\bar{e}}{\sin^2 \bar{\mathfrak{P}}}$$

1) Vergl. L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik. S. 125 ff. Dazu: Enzyklopädie der Math. Wiss. a. a. O. S. 213 ff.

eine Konstante. Andererseits ist die Achse  $y$  beweglich; sie hat von  $n'$  den Abstand  $(-l)$ , schließt gegen  $n'$  den Winkel  $(-\varphi)$  ein und bestimmt mit  $\bar{\nu}$  und  $\nu$  in jeder Lage die Achsen  $\bar{o}$  und  $o$  derart, daß die Gleichungen (74) bestehen.

Wir erhalten daher das folgende Analogon des Eulerschen Satzes im Raume:

*Ist ein räumlicher Winkel, dessen Schenkel  $\bar{\nu}$  und  $\nu$  auf der Scheitelgeraden  $\mathfrak{p}$  senkrecht stehen, gegen die Achse  $x$  fixiert; ist  $n'$  die gemeinsame Normale von  $x$  und  $\mathfrak{p}$  und  $y$  irgend eine andere die Achse  $x$  rechtwinklig schneidende Gerade, die gegen  $n'$  durch den Abstand  $(-l)$  und den Winkel  $(-\varphi)$  bestimmt ist, so besteht für jedes Geradenpaar  $\bar{o}, o$ , welches auf den Schenkeln  $\bar{\nu}$  und  $\nu$  und der Geraden  $y$  zugleich senkrecht steht, allemal die Gleichung*

$$\left\{ \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} + l \cotg \varphi (\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}) \right\} \frac{1}{\sin \varphi} = \text{const.}$$

welche Achse  $y$  man auch wählen mag.

Geht man von diesem Satze aus, so ergibt sich umgekehrt die Bestimmung der Konstanten für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , und damit die Savarysche Formel und deren Konstruktion im Raume.

### § 7. Die kinematische Konstruktion der Striktionsachse und das Analogon des Aronholdschen Satzes im Raume.

Die eben besprochene geometrische Konstruktion der Striktionsachse kann leicht auch kinematisch gedeutet werden. Die absolute Schraubengeschwindigkeit  $\omega$  an der Achse  $\mathfrak{f}$  ist ja die Summe der Führungsschraubengeschwindigkeit  $\omega_0$  an der Achse  $x$  und der Relativschraubengeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  an der Achse  $\mathfrak{X}$ . Da aber die Schraubengeschwindigkeit  $\omega_0$  die Differenz der beiden Schraubengeschwindigkeiten an den Achsen  $o$  und  $\bar{o}$  ist, so kann man zunächst die Differenz der Schraubengeschwindigkeiten an den Achsen  $\mathfrak{X}$  und  $\bar{o}$  bilden, wodurch man die Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $\mathfrak{p}$  erhält; addiert man dann zu dieser die Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $o$ , so ergibt sich die absolute Schraubengeschwindigkeit an der Achse  $\mathfrak{f}$ .

In der Tat lassen sich die Komponenten der Differenz der Schraubengeschwindigkeiten an den Achsen  $\mathfrak{X}$  und  $\bar{o}$  bezüglich des Systems  $\sigma^*$  leicht in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^* &= -\bar{p} + \cotg \vartheta \sin \varphi \\ \mathfrak{q}^* &= -\cos \varphi \\ \mathfrak{r}^* &= 0 \\ (92) \quad \mathfrak{u}^* &= -\bar{J} + \cotg \vartheta (K + l \cotg \varphi) - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \vartheta} \sin \varphi \\ \mathfrak{v}^* &= l \sin \varphi - K \cos \varphi \\ \mathfrak{w}^* &= 0. \end{aligned}$$

Es geht daraus zunächst hervor, daß die Achse der gesuchten Differenz die Normale  $n'$  rechtwinklig schneidet. Bedeuten also  $\tau$  und  $t$  ihre Neigung und ihren kürzesten Abstand gegen  $x$  und beachtet man, daß

$$\bar{p} = \cotg \bar{\lambda}, \quad \bar{J} = K \cotg \bar{\lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}}$$

ist, so erhält man durch Einsetzen obiger Werte in die Gleichungen

$$(93) \quad \cotg \tau = \frac{p^*}{q^*}, \quad t = \frac{p^* v^* - q^* u^*}{p^{*2} + q^{*2}}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cotg \vartheta \sin \varphi + \cotg \tau \cos \varphi &= \cotg \bar{\lambda} \\ \frac{\bar{\rho}}{\sin^2 \vartheta} \sin \varphi + \frac{t}{\sin^2 \tau} \cos \varphi &= \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} + l \cotg \varphi \left( \cotg \bar{\lambda} - \frac{\cotg \tau}{\cos \varphi} \right). \end{aligned}$$

also gerade die beiden Gleichungen, durch welche die Achse  $p$  bestimmt wird. Es folgt daraus, daß die drei Achsen  $\bar{x}$ ,  $\bar{o}$  und  $p$  eine gemeinsame Normale  $\bar{v}$  besitzen; ebenso müssen  $p$ ,  $o$  und  $\bar{f}$  eine gemeinsame Normale  $v$  haben, sodaß die geometrische Konstruktion von  $\bar{f}$  auch kinematisch erklärt ist.

Zur Bestimmung der Striktionsschraubenfläche selbst ist nun noch der Windungsparameter an der Achse  $\bar{f}$  notwendig.

Gehören aber zu den 6 Achsen

$$x, \quad \bar{o}, \quad o, \quad \bar{x}, \quad \bar{f}, \quad p$$

die Windungsparameter

$$h_o, \quad \bar{h}, \quad h, \quad \bar{\mathfrak{S}}, \quad \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{h},$$

so ergibt die Gleichung (73) ohne weiteres

$$(94) \quad h_o = K - \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} \cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}.$$

Da ferner mit  $q = 0$  und  $v = 0$  zwischen Windungsparameter  $H$  und Achsenabstand  $R$  allgemein die Gleichung besteht

$$H = \frac{w}{r} + \frac{p}{r} R,$$

so folgt hieraus für die Achsen  $\bar{o}$  und  $o$ :

$$(95) \quad \begin{aligned} \bar{h} &= K - \bar{\sigma} \cotg \bar{\lambda} \\ h &= K - \sigma \cotg \lambda \end{aligned}$$

und für die Achsen  $\bar{x}$  und  $\bar{f}$

$$(96) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{S}} &= K + l \cotg \varphi - \bar{\rho} \cotg \vartheta \\ \mathfrak{S} &= K + l \cotg \varphi - \rho \cotg \vartheta. \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich für die Achse  $p$

$$(97) \quad \mathfrak{h} = \frac{v^*}{q^*} - \frac{p^*}{q^*} t = K - l \operatorname{tg} \varphi - t \operatorname{cotg} \tau.$$

Im ganzen treten also 6 Schrauben auf, und da die Achsen der Summe und Differenz zweier Schraubengeschwindigkeiten allemal dem durch die beiden Schrauben bestimmten Zylindroid angehören müssen, so liegen von den obigen 6 Schrauben 4 Mal je drei auf dem nämlichen Zylindroid.

Es sind dies, entsprechend den 4 gemeinsamen Normalen  $y, \bar{v}, v, n$  die 4 Zylindroide der je drei Schrauben

$$\begin{array}{lll} (o, h) & (x, h_o) & (\bar{o}, \bar{h}) \\ (\bar{o}, \bar{h}) & (\mathfrak{X}, \mathfrak{H}) & (p, \mathfrak{h}) \\ (p, \mathfrak{h}) & (o, h) & (\mathfrak{f}, \mathfrak{H}) \\ (\mathfrak{f}, \mathfrak{H}) & (x, h_o) & (\mathfrak{X}, \mathfrak{H}). \end{array}$$

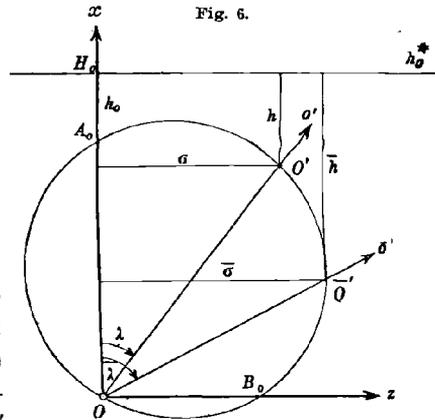
Da die 6 Windungsparameter nur von der Konstanten  $K$  und von der Lage der betreffenden Achse abhängen, so ist durch die Angabe eines einzigen Windungsparameters die Größe  $K$  und damit der Windungsparameter jeder Achse bestimmt. Zur Konstruktion der Achse  $f$  selbst sind die Windungsparameter nicht nötig.

Da nun die drei Schrauben

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{H}) \quad (x, h_o) \quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{H})$$

demselben Zylindroid angehören, so kann mit Hilfe desselben die Schraube  $(\mathfrak{f}, \mathfrak{H})$  kinematisch bestimmt werden.

Ist in Fig. 6  $O$  der Anfangspunkt des Systems  $\sigma$ , so denke man sich von der negativen Seite der Achse  $y$  aus die Achsen  $\bar{o}$  und  $o$  auf die Ebenen  $(xz)$  projiziert. Auf den Projektionen  $\bar{o}'$  und  $o'$  seien alsdann zwei Punkte  $\bar{O}'$  und  $O'$  derart angenommen, daß ihre Entfernungen von der Achse  $x$  nach Größe und Sinn übereinstimmen mit  $\bar{\sigma}$  und  $\sigma$ . Als dann lege man durch die drei Punkte  $O, \bar{O}', O'$  den sogenannten Bildkreis, so schneidet dieser auf der Achse  $x$  den Abschnitt



$$OA_o = \frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \lambda} = K - h_o$$

ab. Macht man also

$$OH_o = K = OA_o + h_o$$



Im weitem hat nun S. Aronhold<sup>1)</sup> zuerst darauf hingewiesen, daß in der Ebene in jeder durch den Pol  $X$  — vgl. Fig. 4 — gezogenen Geraden sämtliche Punktepaare  $\bar{R}, R$  wegen der Gleichung

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{R}}\right) \sin \varphi = \frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} = \text{const.}$$

zwei projektive Punktreihen bilden, für welche der Punkt  $X$  das vereinigte Paar der Doppelpunkte darstellt. Ebenso bilden die sämtlichen Paare  $\bar{r}, r$  eine derartige Projektivität. Jede derselben ist durch ein einziges Paar bestimmt, und da die Doppelpunkte in  $X$  koinzidieren, so sind die beiden Projektivitäten jedesmal für einen Punkt  $\mathfrak{P}$  perspektiv, der auf dem zu  $\bar{R}R$  senkrechten Strahl durch  $X$  liegt, von welchen Paaren  $\bar{R}R$  und  $\bar{r}r$  der Projektivitäten man auch ausgehen mag.

An Stelle der Punktepaare  $\bar{R}, R$  des Strahles durch  $X$  treten nun im Raume die zweifach unendlich vielen Geradenpaare  $\mathfrak{X}, \mathfrak{f}$ , welche die feste Gerade  $n$  rechtwinklig treffen.

Setzt man nun

$$(98) \quad A = K - h_0 + l \cotg \varphi,$$

so ordnet die Gleichung

$$(99) \quad \bar{\varrho} = A \sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\vartheta} + B \sin^2 \bar{\vartheta},$$

in welcher  $B$  eine variable Konstante bedeutet, alle Geraden  $\mathfrak{X}$  in ein Büschel  $(AB)$  von Zylindroiden  $C_n$ , welche sich alle längs  $x$  berühren, da  $A$  ihr gemeinsamer Verteilungsparameter ist.

Diesem Zylindroidbüschel aus Achsen  $\mathfrak{X}$  entspricht nun das Zylindroidbüschel

$$(100) \quad \varrho = A \sin \vartheta \cos \vartheta + B \sin^2 \vartheta$$

aus Achsen  $\mathfrak{f}$ ; denn beide Gleichungen genügen der Savaryschen Bedingung

$$\left(\frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\bar{\varrho}}{\sin^2 \bar{\vartheta}}\right) \sin \varphi = A(p - \bar{p}) = \text{const.}$$

Jedes Zylindroid  $C_n$  des Büschels entspricht sich also selbst, und es wird durch die Gleichung

$$(\cotg \vartheta - \cotg \bar{\vartheta}) \sin \varphi = \text{const.}$$

jeder Erzeugenden  $\mathfrak{X}$  eine Erzeugende  $\mathfrak{f}$  zugeordnet, wobei die durch die Normale  $n$  gehenden projizierenden Ebenen der Geraden einander derart projektiv entsprechen, daß die Ebene  $(x, n)$  die vereinigten Doppelpunkte der Projektivität darstellt. Die Projektivität der projizierenden Ebenen ist für alle Zylindroide des ganzen Büschels die nämliche.

1) S. Aronhold: Grundzüge der kinematischen Geometrie. Verh. d. Ver. zur Beförd. des Gewerbef. 51. Bd. 1871.

In analoger Weise lassen sich alle Achsen  $\bar{o}$  auf die Zylindroide  $C_y$  eines Büschels  $(A_0, B_0)$  bringen. Ist

$$(101) \quad K - h_0 = A_0,$$

so entspricht dem Zylindroid

$$(102) \quad \bar{\sigma} = A_0 \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} + B_0 \sin^2 \bar{\lambda}$$

aus Achsen  $\bar{o}$  das Zylindroid

$$(103) \quad \sigma = A_0 \sin \lambda \cos \lambda + B_0 \sin^2 \lambda$$

aus Achsen  $o$ , weil die Savarysche Gleichung

$$\frac{\sigma}{\sin^2 \lambda} - \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} = (K - h_0) (p - \bar{p}) = \text{const.}$$

erfüllt ist. Jedes Zylindroid entspricht sich selbst, und entsprechende Geraden bestimmen wieder an der Achse  $y$  eine Ebenenprojektivität mit der Gleichung

$$\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda} = \text{const.}$$

Ist jetzt  $(\bar{x}, \bar{f})$  ein Geradenpaar des bestimmten Zylindroids  $(A, B)$ ,  $(\bar{o}, o)$  ein Geradenpaar des Zylindroids  $(A_0, B_0)$ , so gehört zu beiden eine Achse  $p$ , welche  $n'$  normal schneidet und deren Neigung  $\tau$  und Abstand  $t$  gegen  $x$  durch (85) und (86) bestimmt werden.

Setzt man in dieser Gleichung (86)

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} = A \cotg \bar{\vartheta} + B, \quad \frac{\bar{\sigma}}{\sin^2 \bar{\lambda}} = A_0 \cotg \bar{\lambda} + B_0,$$

so folgt

$$\frac{t}{\sin^2 \tau} \cos \varphi = A (\cotg \bar{\lambda} - \cotg \bar{\vartheta} \sin \varphi) + B_0 - B \sin \varphi - l \frac{\cotg \tau}{\cos \varphi}$$

oder da

$$\cotg \bar{\lambda} - \cotg \bar{\vartheta} \sin \varphi = \cotg \tau \cos \varphi \quad \text{ist}$$

$$\frac{t}{\sin^2 \tau} = \left( A - \frac{l}{\sin \varphi \cos \varphi} \right) \cotg \tau + \frac{B_0 - B \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(104) \quad \begin{aligned} A - \frac{l}{\sin \varphi \cos \varphi} &= A_0 - l \operatorname{tg} \varphi = A_1 \\ B_0 - B \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &= B_1 \end{aligned}$$

so wird

$$(105) \quad t = A_1 \sin \tau \cos \tau + B_1 \sin^2 \tau.$$

Für konstante Werte von  $B_0$  und  $B$  ist dies die Gleichung eines dritten Zylindroids  $(A_1, B_1)$ , für variable Werte von  $B_0$  und  $B$  diejenige eines Zylindroidbüschels. Da  $A_1$  eine Konstante ist, so berühren sich wieder alle Zylindroide längs  $x$ . Daraus folgt also zunächst der geometrische Satz:

Die gemeinsamen Normalen aller Erzeugenden irgend zweier Zylindroide der drei Büschel sind jedesmal auch Normalen der Erzeugenden eines bestimmten Zylindroids des dritten Büschels. Die drei Parameter der zusammengehörigen Zylindroide sind allemal durch die Gleichung

$$B_1 \cos \varphi + B \sin \varphi - B_0 = 0$$

verbunden, welche aussagt, daß die drei zu  $x$  normalen Erzeugenden der Zylindroide selbst eine zu  $x$  parallele gemeinsame Normale besitzen.

Nennen wir nun alle Geradenpaare, deren gemeinsame Normalen sämtlich eine Achse  $p$  rechtwinklig treffen, *perspektiv* für diese Achse, so erscheint dieser Satz als Analogon des Aronholdschen Satzes im Raum in folgender Form:

Ist auf dem Zylindroid  $(A, B)$  die Projektivität der Achsenpaare  $(\bar{x}, \bar{f})$  und auf dem Zylindroid  $(A_0, B_0)$  die Projektivität der Achsenpaare  $(\bar{o}, o)$  bestimmt, so liegen sämtliche Paare der einen Projektivität unendlich oft mit den Paaren der andern für je eine Achse  $p$  *perspektiv*, deren Gesamtheit das dritte Zylindroid  $(A_1, B_1)$  erfüllt.

Durch diesen Satz gelangen wir nun zu einer allgemeineren Auffassung der Geradenpaare  $(\bar{x}, \bar{f})$ . Sind auf dem Zylindroid  $(A_0, B_0)$  die Achsen  $\bar{o}, o$ , auf dem Zylindroid  $(A_1, B_1)$  die Achse  $p$  gegeben, so bestimmen sie auf dem Zylindroid  $(A, B)$  ein Achsenpaar  $(\bar{x}, \bar{f})$ , welches wir fortan mit  $(\bar{f}, \bar{f})$  bezeichnen wollen. Jedes Zylindroid besitzt aber auch eine bestimmte Parameterverteilung, welche durch den Windungsparameter  $h_0$  der allen Zylindroiden gemeinsamen Erzeugenden  $x$  bestimmt ist.

Ist nun  $o'$  eine dritte Achse des Zylindroids  $(A_0, B_0)$ , so entspricht ihr auf dem Zylindroid  $(A, B)$  eine dritte Achse  $\bar{x}'$ . Es bestimmen aber die drei Schrauben  $(\bar{o}, \bar{h}), (o, h), (o', h')$  mit  $x$  drei Schraubenflächen  $\bar{S}, S, S'$ , die sich längs  $x$  berühren und es beschreibt daher  $\bar{x}'$  durch Abschroten mit  $S'$  auf  $S$  eine Regelfläche  $\bar{R}$  und durch Abschroten mit  $S'$  auf  $\bar{S}$  eine Regelfläche  $R$ , welche die beiden Schraubenflächen  $\bar{\mathcal{S}}$  und  $\mathcal{S}$ , welche die Schrauben  $(\bar{f}, \bar{\mathfrak{p}})$  und  $(f, \mathfrak{p})$  mit  $\bar{x}'$  bestimmen, zu Striktionschraubenflächen haben.

Fällt  $\bar{x}'$  mit  $\bar{f}$  zusammen, so koinzidiert  $S'$  mit  $\bar{S}$ , und es ist daher  $\bar{f}$  die Striktionsachse der von  $\bar{f}$  beschriebenen Fläche beim Abschroten von  $\bar{S}$  auf  $S$ . Fällt umgekehrt  $\bar{x}'$  mit  $f$  zusammen, so deckt sich  $S'$  mit  $S$  und es ist daher  $\bar{f}$  die Striktionsachse der von  $f$  beschriebenen Fläche beim Abschroten von  $S$  auf  $\bar{S}$ . Wird also im ersten Falle die Fläche  $\bar{\mathcal{S}}$ , im zweiten Falle die Fläche  $\mathcal{S}$  in die Bewegung einbezogen, so ist  $\mathcal{S}$  die augenblickliche geradlinige Hüllfläche von  $\bar{\mathcal{S}}$  und  $\bar{\mathcal{S}}$  die augenblickliche geradlinige Hüllfläche von  $\mathcal{S}$ . Da aber die Achsen



Setzen wir andererseits

$$K_1 = K + l \cotg \varphi,$$

so ist nach der Savaryschen Gleichung im Raume

$$\left( \frac{e}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\bar{e}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \right) \sin \varphi = (K_1 - h_0) \omega_0$$

Da aber

$$(107) \quad \bar{\omega} = \frac{\sin \varphi}{\sin \bar{\vartheta}}, \quad \omega = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}$$

die Winkelgeschwindigkeiten der Achsen  $\bar{\mathfrak{f}}$  und  $\mathfrak{f}$  sind, so folgt

$$\varrho \omega^2 - \bar{\varrho} \bar{\omega}^2 = \sin \varphi (K_1 - h_0) \omega_0.$$

Nach (64) hat aber der Punkt  $O^*$  infolge der Schraubengeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  eine in die Richtung der negativen Achse  $z^*$  fallende Geschwindigkeit

$$w_0 = -w^* = \sin \varphi K_1 = K \sin \varphi + l \cos \varphi = u_0 \sin(\nu - \varphi),$$

welche somit die Projektion der Wechselgeschwindigkeit  $u_0$  ist.

Dividiert man nun die obige Gleichung durch  $w_0^2$  und bezeichnet man mit  $\bar{R}_n$  und  $R_n$  die Krümmungsradien der Schnitte mit dem Flächenpaar  $\bar{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{S}$ , so erhält man nach (23)

$$\frac{1}{R_n} - \frac{1}{\bar{R}_n} - 2 \frac{h_0}{K_1} \frac{\omega_0}{w_0} = \left( 1 - \frac{h_0}{K_1} \right) \frac{\omega_0}{u_0 \sin(\nu - \varphi)}.$$

d. h.

$$\left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{\bar{R}_n} \right) \sin(\nu - \varphi) = \left( 1 + h_0 \frac{\sin \varphi}{w_0} \right) \frac{\omega_0}{u_0}.$$

Zwischen den beiden Paaren von Krümmungsradien besteht daher die Gleichung

$$(108) \quad \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{\bar{R}_n} \right) \sin(\nu - \varphi) = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{\bar{r}_n} + h_0 \left\{ \frac{\sin \varphi}{w_0} + \frac{\cos \nu}{u_0} \right\} \frac{\omega_0}{u_0}.$$

Nehmen wir jetzt an,  $h_0$  verschwinde, so rollen die Kreise  $\bar{r}_n$  und  $r_n$  ohne Gleiten aufeinander. Bezeichnet andererseits  $\Phi$  den Winkel des Strahles  $\bar{R}R$  mit  $y_0$ , so ist

$$\Phi = \pi - (\nu - \varphi),$$

und die Savarysche Gleichung im Raume nimmt daher die Form an

$$(109) \quad \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{\bar{R}_n} \right) \sin \Phi = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{\bar{r}_n} = \frac{\omega_0}{u_0}.$$

Dies ist aber die von Aronhold aufgestellte sog. vollständige Savarysche Formel der Ebene. Wir können daher sagen:

*Wenn die Axoide  $\bar{A}$  und  $A$  ohne Gleitung aufeinander abrollen, so drückt die Savarysche Formel im Raume aus, daß zwischen den Krümmungsmittelpunkten des Normalschnittes der beiden Flächenpaare  $\bar{S}$ ,  $S$*

und  $\bar{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$  im Zentralpunkt des letztern Paares die Savarysche Gleichung der Ebene besteht.

Läßt man endlich noch den Zentralpunkt  $O^*$  von  $\bar{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$  mit dem Zentralpunkt  $O$  von  $\bar{S}, S$  zusammenfallen, so wird

$$l = 0, \quad \nu = \pi, \quad \Phi = \varphi.$$

Da die Gleichung (109) die Winkel der auftretenden Achsen nicht mehr enthält, so gilt die Formel auch für den Fall, daß sämtliche Achsen der Erzeugenden  $x$  parallel sind, d. h. im Falle der ebenen Bewegung. Es fallen dann alle auftretenden Krümmungsmittelpunkte mit den Spurpunkten der Achsen zusammen und die Savarysche Formel des Raumes geht über in diejenige der Ebene, nämlich in die Gleichung

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \sin \varphi = \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma'} = \frac{\omega_0}{u_0},$$

wodurch der Grenzübergang vom Raume zur Ebene vollzogen ist.

#### § 8. Zusammenhang von zwei und drei Achsenpaaren und die Analogien der Sätze von Bobillier im Raume.

Denkt man sich mittels des Achsenpaares  $\bar{o}, o$  zu einer Achse  $\bar{f}_1$  die entsprechende  $f_1$  und ebenso zu einer Achse  $\bar{f}_2$  die entsprechende  $f_2$  konstruiert, so wird es nach dem von Bobillier<sup>1)</sup> in der Ebene befolgten Vorgang darauf ankommen, ohne Zuhilfenahme des Achsenpaares  $\bar{o}, o$  einen direkten Übergang von einem Achsenpaar zum andern zu finden.

Es seien  $\varphi_1$  und  $l_1$  Neigung und Abstand der gemeinsamen Normalen  $n_1$  oder des Normalstrahles des ersten Paares  $\bar{f}_1, f_1, \varphi_2$  und  $l_2$  ebenso Neigung und Abstand des Normalstrahles  $n_2$  des zweiten Paares  $\bar{f}_2, f_2$  gegen die Achse  $z$  von  $\sigma$ . Ist  $\bar{\nu}$  die gemeinsame Normale von  $\bar{f}_1$  und  $\bar{f}_2$ ,  $\nu$  die gemeinsame Normale von  $f_1$  und  $f_2$ ,  $p$  die gemeinsame Normale von  $\bar{\nu}$  und  $\nu$ , so werden jetzt Neigung  $\varphi$  und Abstand  $l$  der gemeinsamen Normalen von  $x$  und  $p$ , also des Normalstrahles  $n$  von  $p$  gegen  $z$  zu ermitteln sei.

Ist  $\tau$  die Neigung von  $p$  gegen  $x$ , so haben  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, p$  eine gemeinsame Normale, falls die erste der beiden Bedingungsgleichungen, nämlich (110)  $\cotg \bar{\vartheta}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi) + \cotg \bar{\vartheta}_2 \sin(\varphi - \varphi_1) + \cotg \tau \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  erfüllt ist.

1) Vergl. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 97 ff. Ebenso *Enzyklopädie der Math. Wiss.* a. a. O. S. 214 ff.

Desgleichen besteht für eine gemeinsame Normale der Achsen  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, p$  die Gleichung

$$(111) \quad \cotg \vartheta_1 \sin(\varphi_2 - \varphi) + \cotg \vartheta_2 \sin(\varphi - \varphi_1) + \cotg \tau \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Aus beiden Bedingungen folgt durch Subtraktion

$$(\cotg \vartheta_1 - \cotg \vartheta_1) \sin(\varphi_2 - \varphi) + (\cotg \vartheta_2 - \cotg \vartheta_2) \sin(\varphi - \varphi_1) = 0.$$

Da aber  $\bar{f}_1, \bar{f}_1$  der Bedingung

$$(112) \quad (\cotg \vartheta_1 - \cotg \bar{\vartheta}_1) \sin \varphi_1 = \cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}$$

und  $\bar{f}_2, \bar{f}_2$  der Bedingung

$$(113) \quad (\cotg \vartheta_2 - \cotg \bar{\vartheta}_2) \sin \varphi_2 = \cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}$$

genügen, so ergibt sich nach Weglassung des Faktors

$$\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi) \sin \varphi_2 + \sin(\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1 = 0,$$

woraus folgt

$$(114) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Gehen wir nun über zur zweiten Bedingung der Existenz der Normalen  $\bar{\nu}$ , so ist diese nach (84)

$$(115) \quad \begin{aligned} & l_1 \{ \cotg \bar{\vartheta}_2 \cos \varphi_2 - \cotg \tau \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \} \\ & + l_2 \{ \cotg \tau \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cotg \vartheta_1 \cos \varphi_1 \} \\ & + l \{ \cotg \bar{\vartheta}_1 \cos \varphi_1 - \cotg \vartheta_2 \cos \varphi_2 \} \\ & - \frac{\bar{e}_1}{\sin^2 \vartheta_1} \sin \varphi_1 + \frac{\bar{e}_2}{\sin^2 \vartheta_2} \sin \varphi_2 + \frac{t}{\sin^2 \tau} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die überstrichenen Größen durch die nicht überstrichenen, so erhält man die zweite Bedingung für die Existenz der Normalen  $\nu$ , und es folgt durch Subtraktion beider Gleichungen

$$(116) \quad \begin{aligned} & (l_1 - l) (\cotg \vartheta_2 - \cotg \bar{\vartheta}_2) \cos \varphi_2 - (l_2 - l) (\cotg \vartheta_1 - \cotg \bar{\vartheta}_1) \cos \varphi_1 \\ & = \left( \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} - \frac{\bar{e}_1}{\sin^2 \bar{\vartheta}_1} \right) \sin \varphi_1 - \left( \frac{e_2}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\bar{e}_2}{\sin^2 \bar{\vartheta}_2} \right) \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Nun genügen aber  $\bar{f}_1, \bar{f}_1$  der zweiten Savaryschen Bedingung

$$(117) \quad \left( \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} - \frac{\bar{e}_1}{\sin^2 \bar{\vartheta}_1} \right) \sin \varphi_1 = (K - h_0 + l_1 \cotg \varphi_1) (\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}).$$

Ebenso  $\bar{f}_2, \bar{f}_2$  der Gleichung

$$(118) \quad \left( \frac{e_2}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\bar{e}_2}{\sin^2 \bar{\vartheta}_2} \right) \sin \varphi_2 = (K - h_0 + l_2 \cotg \varphi_2) (\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda})$$

Nach Unterdrückung des Faktors

$$\cotg \lambda - \cotg \bar{\lambda}$$

reduziert sich daher die Gleichung (116) auf die folgende

$$(l_1 - l) \cotg \varphi_2 - (l_2 - l) \cotg \varphi_1 = l_1 \cotg \varphi_1 - l_2 \cotg \varphi_2,$$

d. h.

$$(l - l_1 - l_2) (\cotg \varphi_1 - \cotg \varphi_2) = 0.$$

Sehen wir also zunächst von dem speziellen Falle ab, daß die Normalstrahlen  $n_1$  und  $n_2$  parallel sind, so ergibt sich als die gesuchte zweite Bedingung für den Normalstrahl  $n$  von  $p$  die Gleichung

$$(119) \quad l = l_1 + l_2.$$

Durch den Normalstrahl  $n$  ist aber  $p$  und damit  $\bar{f}_2$  bestimmt, sobald  $\bar{f}_1$  gegeben ist.

Die Formel (114) enthält das von Bobillier zuerst ausgesprochene Theorem über den Zusammenhang zweier entsprechender Punktepaare in der Ebene und auf der Kugel; in Verbindung mit (119) enthält sie das Bobilliersche Analogon für den Raum, welches sich somit durch folgenden Satz aussprechen läßt:

*Sind  $(\bar{f}_1, f_1)$  und  $(\bar{f}_2, f_2)$  zwei entsprechende Achsenpaare, die zu den Normalstrahlen  $n_1$  und  $n_2$  mit den Amplituden  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und den Abständen  $l_1$  und  $l_2$  gegen die Achse  $z$  gehören, und sind  $\bar{v}$  und  $v$  die gemeinsamen Normalen von  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$  und  $f_1, f_2$ , so trifft ihre gemeinsame Normale  $p$  denjenigen dritten Normalstrahl  $n$  von  $x$  rechtwinklig, dessen Amplitude und Abstand gegen die Achse  $z$  durch die Gleichungen*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad l = l_1 + l_2$$

*bestimmt sind.*

Dieser Satz kann aber nun auch umgekehrt dazu benutzt werden, um aus irgend zwei entsprechenden Achsenpaaren  $(\bar{f}_1, f_1)$  und  $(\bar{f}_2, f_2)$  das System  $\sigma(x, y, z)$  d. h. die Berührungskante  $x$  der zwei Axoide  $\bar{A}$  und  $A$ , ihren Zentralpunkt  $O$  und ihre Zentralebene  $(xz)$  zu bestimmen.

Sind  $n_1$  und  $n_2$  die gemeinsamen Normalen von  $\bar{f}_1, f_1$  und  $\bar{f}_2, f_2$ , so ist ihre gemeinsame Normale die Achse  $x$ . Konstruiert man jetzt die Achse  $p$  und ihre gemeinsame Normale  $n$  mit  $x$  und sind  $N_1, N_2, N$  die Fußpunkte von  $n_1, n_2, n$  in  $x$ , so trage man von  $N_1$  aus die Strecke  $N_2 N$  in entgegengesetztem Sinne auf  $x$  auf, so ist der Endpunkt der gesuchte Anfangspunkt  $O$  von  $\sigma$ .

Projiziert man im weiteren die Normalstrahlen  $n_1, n_2, n$  auf die durch  $O$  gelegte Normalebene zu  $x$  nach  $n'_2, n'_1, n'$  und trägt man von  $n'_1$  aus den Winkel des Strahles  $n'_2$  gegen den Strahl  $n'$  im entgegengesetzten Sinne auf, so erhält man die Achse  $z$ , damit auch die Achse  $y$ . Durch  $\sigma$  und  $(\bar{f}_1, f_1)$  sind dann alle andern Paare bestimmt, d. h.:

*Zwei entsprechende Achsenpaare bestimmen alle weitem Paare.*

Dem direkten Übergang von  $\bar{\mathfrak{f}}_2$  zu  $\mathfrak{f}_2$  entspricht auf der Kugel die durch Subtraktion von (112) und (113) erhaltliche Bobilliersche Gleichung

$$(120) \quad (\cotg \vartheta_2 - \cotg \bar{\vartheta}_2) \sin \varphi_2 = (\cotg \vartheta_1 - \cotg \bar{\vartheta}_1) \sin \varphi_1.$$

Für den Raum tritt noch die durch Subtraktion von (117) und (118) entstehende neue Gleichung hinzu:

$$(121) \quad \left( \frac{e_2}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\bar{e}_2}{\sin^2 \bar{\vartheta}_2} \right) \sin \varphi_2 = \left( \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} - \frac{\bar{e}_1}{\sin^2 \bar{\vartheta}_1} \right) \sin \varphi_1 \\ + (l_2 \cotg \varphi_2 - l_1 \cotg \varphi_1) (\cotg \vartheta_1 - \cotg \bar{\vartheta}_1) \sin \varphi_1$$

welche das räumliche Analogon der Bobillierschen Gleichung ist. Sie geht für  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  in die Savarysche Formel über.

Da im Weiteren bei zwei gegebenen Achsenpaaren jedes dritte Paar bestimmt ist, so müssen zwischen *drei* entsprechenden Achsenpaaren Beziehungen bestehen, welche gestatten, das dritte Paar direkt zu bestimmen. Für die Ebene sind die entsprechenden Konstruktionen von Bobillier angegeben worden.

Um sie auch für den Raum aussprechen zu können, nehmen wir an, es seien  $(\bar{\mathfrak{f}}_1, \mathfrak{f}_1)$ ,  $(\bar{\mathfrak{f}}_2, \mathfrak{f}_2)$ ,  $(\bar{\mathfrak{f}}_3, \mathfrak{f}_3)$  drei entsprechende Achsenpaare, die zu den Normalstrahlen  $n_1, n_2, n_3$  gehören.

Die beiden ersten Paare ergeben jetzt eine Achse  $p_{12}$ , deren Normalstrahl  $n_{12}$  durch die Gleichungen

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2, \quad l_{12} = l_1 + l_2$$

bestimmt ist.

Ist ebenso  $p_{23}$  die Achse, die zum zweiten und dritten Paar gehört, so gelten für ihren Normalstrahl  $n_{23}$  die Gleichungen

$$\varphi_{23} = \varphi_2 + \varphi_3, \quad l_{23} = l_2 + l_3.$$

Es ist daher

$$\varphi_{23} - \varphi_{12} = \varphi_3 - \varphi_1, \quad l_{23} - l_{12} = l_3 - l_1,$$

d. h. man erhält  $n_{23}$  dadurch, daß man  $n_{12}$  um den Winkel von  $n_1$  gegen  $n_3$  dreht und um den Abstand von  $n_1$  gegen  $n_3$  längs  $x$  verschiebt. Ist aber  $n_{23}$  bekannt, so kennt man auch  $p_{23}$  und  $\mathfrak{f}_3$ . Die Bobilliersche Konstruktion läßt sich daher für den Raum durch folgenden Satz aussprechen:

*Sind  $(\bar{\mathfrak{f}}_1, \mathfrak{f}_1)$ ,  $(\bar{\mathfrak{f}}_2, \mathfrak{f}_2)$  zwei gegebene Achsenpaare und ist  $n_{12}$  der Normalstrahl der Achse  $p_{12}$ , so ziehe man den Normalstrahl  $n_{23}$  derart, daß er gegen  $n_{12}$  gerade so liegt, wie  $n_3$  gegen  $n_1$ . Ist jetzt  $\bar{v}_{23}$ , die gemeinsame Normale von  $\bar{\mathfrak{f}}_2, \bar{\mathfrak{f}}_3$ , ferner  $p_{23}$  die gemeinsame Normale von  $\bar{v}_{23}, n_{23}$ , endlich  $v_{35}$  die gemeinsame Normale von  $p_{23}, \mathfrak{f}_2$ , so ist die gemeinsame Normale von  $v_{35}$  und  $n_3$  die verlangte Achse  $\mathfrak{f}_3$ .*

Sind aber  $(\bar{x}_i, \bar{t}_i)$  drei entsprechende Achsenpaare, so bilden ihre sphärischen Bilder auf der Kugel zwei für den Pol  $X$  perspektive Dreiecke und es müssen sich daher entsprechende Seiten in drei Punkten einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene schneiden. Nach dem Bobillierschen Satze sind aber diese drei Schnittpunkte — vergl.

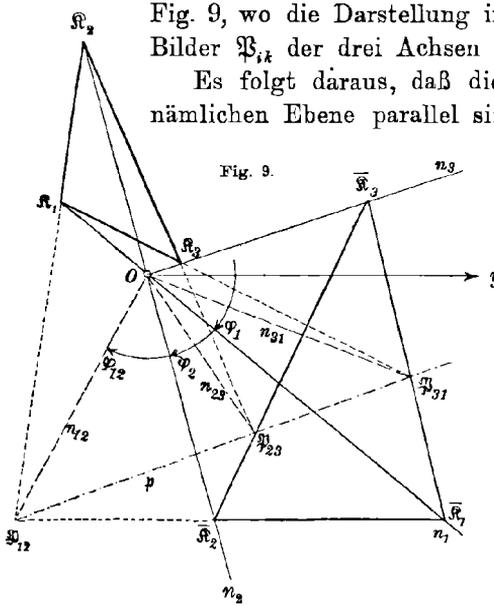


Fig. 9, wo die Darstellung in der Ebene gewählt ist — die Bilder  $\mathfrak{P}_{i,k}$  der drei Achsen  $p_{i,k}$ .

Es folgt daraus, daß die drei Achsen  $p_{i,k}$  zunächst der nämlichen Ebene parallel sind. Dies ergibt auch eine einfache Rechnung.

Bezeichnen

$$\varphi_{ik} = \varphi_i + \varphi_k$$

die Amplituden der Normalstrahlen  $n_{i,k}$  der Achsen  $p_{i,k}$  und bedeuten  $\tau_{i,k}$  die Neigungswinkel derselben gegen die Achse  $x$ , so ergibt die Gleichung (77) für die Achse  $p_{12}$  wegen

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2, \quad \vartheta_3 = \tau_{12} \\ -\cotg \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \cotg \vartheta_2 \sin \varphi_2 \\ &+ \cotg \tau_{12} \sin (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Vertauscht man in dieser

Gleichung die Indices zyklisch und beachtet, daß man hat

$$(122) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{31} - \varphi_{23}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_{12} - \varphi_{31}, \quad \varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_{23} - \varphi_{12},$$

so ergibt die Addition die Gleichung

$$(123) \quad \begin{aligned} \cotg \tau_{12} \sin (\varphi_{23} - \varphi_{31}) + \cotg \tau_{23} \sin (\varphi_{31} - \varphi_{12}) \\ + \cotg \tau_{31} \sin (\varphi_{12} - \varphi_{23}) = 0, \end{aligned}$$

welche die Existenz der sphärischen Perspektivachse beweist.

Bezeichnen im weitern

$$l_{ik} = l_i + l_k$$

die Abstände der Normalstrahlen  $n_{i,k}$  von  $O$ , ferner  $t_{i,k}$  die Abstände der Achsen  $p_{i,k}$  von  $x$ , so ergibt die Gleichung (84) mit

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad l_3 = l_1 + l_2, \quad \vartheta_3 = \tau_{12}, \quad \varrho_3 = t_{12}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} l_1 \cotg \vartheta_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cotg \vartheta_2 \cos \varphi_2 - (l_1 - l_2) \cotg \tau_{12} \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \\ - \frac{e_1}{\sin^2 \vartheta_1} \sin \varphi_1 + \frac{e_2}{\sin^2 \vartheta_2} \sin \varphi_2 + \frac{t_{1,2}}{\sin^2 \tau_{12}} \sin (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Vertauscht man aber in dieser Gleichung die Indices zyklisch und beachtet, daß

$$l_1 - l_2 = l_{31} - l_{23}, \quad l_2 - l_3 = l_{12} - l_{31}, \quad l_3 - l_1 = l_{23} - l_{12}$$

ist, so folgt durch Addition der drei Gleichungen

$$(124) \quad \sum \left\{ (\cotg \tau_{23} \cos(\varphi_{31} - \varphi_{12}) - \cotg \tau_{31} \cos(\varphi_{12} - \varphi_{23})) l_{12} + \frac{l_{12}}{\sin^2 \tau_{12}} \sin(\varphi_{23} - \varphi_{31}) \right\} = 0,$$

welche aber nach (84) aussagt, daß die drei Achsen  $p_{ik}$  eine gemeinsame Normale  $p$  besitzen.

Es herrscht also auch hinsichtlich dreier Achsenpaare  $(\bar{f}_i, \bar{f}_i)$  mit der Ebene und der Kugel vollständige Analogie, indem der Satz besteht:

*Die drei Achsen  $p_{ik}$  dreier Achsenpaare  $(\bar{f}_i, \bar{f}_i)$  haben selbst eine gemeinsame Normale  $p$ , d. h.: Zwei entsprechende Achsentrieder liegen perspektiv.*

Zur vollständigen Bedeutung dieses Satzes gelangen wir aber erst, wenn wir die Gesamtheit aller Achsenpaare  $(\bar{f}_i, \bar{f}_i)$  betrachten, die zu den drei Normalstrahlen  $n_1, n_2, n_3$  gehören.

Setzen wir

$$A_1 = K - h_o + l_1 \cotg \varphi_1 = A_o + l_1 \cotg \varphi_1,$$

so betrachten wir alle Achsen  $\bar{f}_1$  auf dem Zylindroid  $(A_1, B_1)$  mit der Gleichung

$$(125) \quad \bar{\rho}_1 = A_1 \sin \bar{\vartheta}_1 \cos \bar{\vartheta}_1 + B_1 \sin^2 \bar{\vartheta}_1.$$

Ebenso bedeuete

$$A_2 = K - h_o + l_2 \cotg \varphi_2 = A_o + l_2 \cotg \varphi_2,$$

und es mögen die Achsen  $\bar{f}_2$  auf dem Zylindroid  $(A_2, B_2)$  liegen, mit der Gleichung

$$(126) \quad \bar{\rho}_2 = A_2 \sin \bar{\vartheta}_2 \cos \bar{\vartheta}_2 + B_2 \sin^2 \bar{\vartheta}_2.$$

Die Achsenpaare  $(\bar{f}_1, \bar{f}_1)$  und  $(\bar{f}_2, \bar{f}_2)$  führen dann zu einer Achse  $p_{12}$ , deren Lage gegen  $x$  durch die Gleichung

$$\frac{l_{12}}{\sin^2 \tau_{12}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\bar{\rho}_1}{\sin^2 \bar{\vartheta}_1} \sin \varphi_1 - \frac{\bar{\rho}_2}{\sin^2 \bar{\vartheta}_2} \sin \varphi_2 - l_1 \cotg \bar{\vartheta}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cotg \bar{\vartheta}_2 \cos \varphi_2 + (l_1 - l_2) \cotg \tau_{12} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

bestimmt ist.

Setzt man aber die Werte von  $\bar{\rho}_1$  und  $\bar{\rho}_2$  aus obigen Gleichungen ein, so folgt

$$\frac{l_{12}}{\sin^2 \tau_{12}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = A_o (\cotg \bar{\vartheta}_1 \sin \varphi_1 - \cotg \bar{\vartheta}_2 \sin \varphi_2) + B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2 + (l_1 - l_2) \cotg \tau_{12} \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Da aber

$$(127) \quad \cotg \bar{\vartheta}_1 \sin \varphi_1 - \cotg \bar{\vartheta}_2 \sin \varphi_2 = \cotg \tau_{12} \sin (\varphi_1 - \varphi_2)$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{t_{12}}{\sin^2 \tau_{12}} \sin (\varphi_1 - \varphi_2) = \{ A_0 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) + (l_1 - l_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \} \cotg \tau_{12} \\ + B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2.$$

Setzt man demnach

$$(128) \quad \begin{aligned} A_0 + (l_1 - l_2) \cotg (\varphi_1 - \varphi_2) &= A_{12} \\ B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2 &= B_{12} \sin (\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

so wird

$$(129) \quad t_{12} = A_{12} \sin \tau_{12} \cos \tau_{12} + B_{12} \sin^2 \tau_{12}.$$

Die Achsen  $p_{12}$  erfüllen also selbst ein Zylindroid  $(A_{12}, B_{12})$ , dessen Parameter  $B_{12}$  durch die Gleichung (128) mit  $B_1$  und  $B_2$  verknüpft ist.

In analoger Weise erfüllen die Achsen  $p_{23}$  ein Zylindroid  $(A_{23}, B_{23})$  und die Achsen  $p_{31}$  ein drittes Zylindroid  $(A_{31}, B_{31})$ .

Die Parameter  $B_{23}$  und  $B_{31}$  dieser Zylindroide ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes der zweiten Gleichung (128). Addiert man aber die so erhaltenen drei Gleichungen und beachtet man die Beziehungen (122), so ergibt sich die Gleichung

$$(130) \quad B_{12} \sin (\varphi_{31} - \varphi_{23}) + B_{23} \sin (\varphi_{12} - \varphi_{31}) + B_{31} \sin (\varphi_{23} - \varphi_{12}) = 0,$$

welche die drei Zylindroide  $(A_{ik}, B_{ik})$  miteinander verbindet.

Diese drei Zylindroide haben also wieder die Eigenschaft, daß jede Gerade  $p$ , welche eine Erzeugende zweier der drei Zylindroide rechtwinklig schneidet, auch eine Erzeugende des dritten Zylindroids rechtwinklig trifft. Es ergibt sich daher das Resultat:

*Den drei Zylindroiden  $(A_i, B_i)$  der Achsenpaare  $(\bar{t}_i, t_i)$  entsprechen als Ort der Achsen  $p_{ik}$  drei neue Zylindroide  $(A_{ik}, B_{ik})$ , deren Parameter  $B_{ik}$  durch die Gleichung*

$$B_{12} \sin (\varphi_{31} - \varphi_{23}) + B_{23} \sin (\varphi_{12} - \varphi_{31}) + B_{31} \sin (\varphi_{23} - \varphi_{12}) = 0$$

*verbunden sind. Jede Gerade  $p$ , welche zwei der Achsen  $p_{ik}$  rechtwinklig trifft, schneidet allemal noch eine dritte solche Achse rechtwinklig, welche mit den beiden andern durch die Gleichung*

$$\cotg \tau_{12} \sin (\varphi_{31} - \varphi_{23}) + \cotg \tau_{23} \sin (\varphi_{12} - \varphi_{31}) + \cotg \tau_{31} \sin (\varphi_{23} - \varphi_{12}) = 0$$

*verknüpft ist.*

Nun werden aber durch die Gleichung (127) die auf den Zylindroiden  $(A_1, B_1)$  und  $(A_2, B_2)$  liegenden Achsenpaare einander derart zugeordnet,

daß sie sämtlich für je eine Achse  $p_{12}$  perspektiv liegen. Analoges gilt für die Achsen  $p_{23}$  und  $p_{31}$ , so daß wir sagen können:

*Die Projektivitäten der Achsenpaare je zweier der gegebenen drei Zylindroide ( $A_i, B_i$ ) liegen auf unendlich vielfache Weise zueinander perspektiv, für je eine von drei Achsen  $p_{ik}$  der Zylindroide ( $A_{ik}, B_{ik}$ ), die sich selbst wieder in perspektiver Lage befinden.*

Damit sind diejenigen Sätze zum Ausdruck gebracht, welche der geometrischen Verwandtschaft entsprechender Achsenpaare im Strahlenraume zugrunde liegen.

Karlsruhe, im September 1912.

## On Constrained Motion.

By PETER FIELD, Ann Arbor, Mich., U.S.A.

### Introduction.

M. M. A. de Saint-Germain and L. Lecornu have given in Vol. CXIV of the Comptes Rendus the following example to illustrate that a motion which may be possible geometrically may be impossible dynamically. Three equal beads are attached to a weightless rod, one at each end and the third at the mid point. The beads and rod are constrained to remain on the surface of a smooth right circular cone. The problem is to determine the motion for any given initial conditions when no external forces act on the particles.

Call  $r, \alpha, \varphi$  the polar coordinates of  $P_2$  (Fig. 1),  $P_1P_3 = 2a$ , and indicate derivatives with respect to  $t$  by dots.<sup>1)</sup> The kinetic energy of the three particles and also the angular momentum about  $OZ$  are constant, so we have

$$\begin{aligned} 3\dot{r}^2 + (3r^2 + 2a^2) \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 &= A, \\ (3r^2 + 2a^2) \dot{\varphi} &= B. \end{aligned}$$

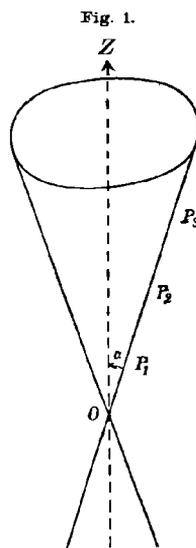
From the principle of the motion of the centroid

$$3\dot{r}^2 + 3r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 = C, \quad 3r^2 \dot{\varphi} = D.$$

Resolving along the radius vector

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

These equations can only be satisfied by  $\dot{\varphi} = 0, \dot{r} = a$  constant if  $r \neq 0$ . If then the centroid is not at the vertex of the cone, the rod moves

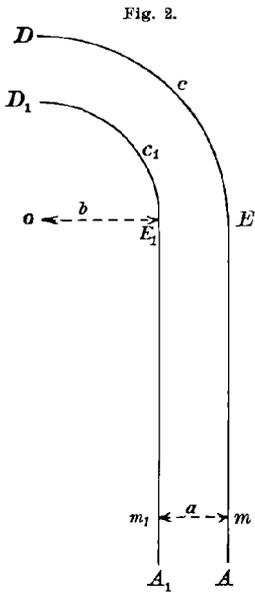


1) Routh, Advanced Rigid Dynamics, sixth edition, p. 206.

uniformly along the same generator no matter what the initial conditions even though there is no geometrical reason why it should not move from one generator to another. As stated by Routh *loc. cit.*, if the motion is not initially along a given generator an impulsive couple acts with the result that the rod moves along a generator.

This result can also be explained as follows. The projections of the velocities of  $P_1, P_2, P_3$  along the tangents to the circular sections of the cone at  $P_1, P_2, P_3$  are in the same ratio as the distances of  $P_1, P_2, P_3$  from the vertex of the cone. As the reaction of the cone is not normal to its axis, it follows that the ratios of these distances  $OP_1:OP_2:OP_3$  will change. But the projections of the velocities of  $P_1, P_2, P_3$  along the tangents to the circular sections at the given points cannot change as both the reaction of the cone and the stress in the rod are at right angles to this direction. This is where the difficulty comes; our geometrical conditions require an acceleration at right angles to the direction in which the forces act.

Simple illustrations of problems of the same nature as the preceding.



In Fig. 2 two particles of mass  $m$  and  $m_1$  are connected by a weightless rod of length  $a$  and also constrained to move along the parallel curves  $c$  and  $c_1$  which are at the distance  $a$ . The curves are composed of straight lines with arcs of circles at one extremity. If the curves are smooth, the stress in the rod is immaterial; if no external forces act on the system, the particles may be started at  $A$  and  $A_1$  with any common velocity but when they reach  $E$  and  $E_1$  a difficulty is encountered, as the moment the particles move along the circular arcs their velocities are no longer equal but must be in the ratio  $a + b : b$ . The reactions of the curves and the stress in the rod are at right angles to the direction of motion and there-

fore cannot produce the required change in the velocities. We could also start the particles at  $D$  and  $D_1$  with velocities in the ratio  $a + b : b$  and when they come to  $E$  and  $E_1$  there would be the same difficulty.

If the curves are rough and the coefficients of friction are  $\mu$  and  $\mu_1$ , the stress in the connecting rod while the particles are supposed to pass over the rectilinear part of the path is zero if  $\frac{\mu}{m} \neq \frac{\mu_1}{m_1}$  and may assume any value when  $\frac{\mu}{m} = \frac{\mu_1}{m_1}$ . This latter would be an illu-

stration of a friction problem which has, not one or two<sup>1)</sup>, but an infinite number of solutions. When the curvilinear part of the path is encountered there must be a sudden change in the ratio of the velocities due to impulsive frictional forces at  $E$  and  $E_1$ .

To determine the conditions under which this is possible we shall call  $T$  the tension in the connecting rod,  $V$  the common velocity before the impulse and  $V'$  and  $V_1'$  the velocities after the impulse. The following relations are then evident:

$$mV - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} \mu T dt = mV - \mu T = mV,$$

$$m_1V - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} \mu_1 T dt = m_1V - \mu_1 T = m_1V_1'.$$

But

$$\frac{V'}{V_1'} = \frac{a+b}{b},$$

$$\frac{mV - \mu T}{m_1V - \mu_1 T} = \frac{m(a+b)}{m_1b},$$

hence

$$T = \frac{\frac{a}{b} \cdot V}{\frac{\mu_1}{m_1} \left( \frac{a}{b} + 1 \right) - \frac{\mu}{m}}.$$

As  $T$  is essentially positive, it follows that the problem is impossible in case

$$\frac{\mu_1}{m_1} \left( \frac{a}{b} + 1 \right) - \frac{\mu}{m} < 0.$$

Our equations do not hold the moment either of the particles is brought to rest. Hence  $m_1V - \mu_1T$  and  $mV - \mu T$  are both positive

$$m_1V - \mu_1T = \frac{V}{m} \frac{m\mu_1 - \mu m_1}{\frac{\mu_1}{m_1} \left( \frac{a}{b} + 1 \right) - \frac{\mu}{m}},$$

$$\therefore m\mu_1 - \mu m_1 > 0,$$

and when this last condition is satisfied both

$$mV - \mu T \quad \text{and} \quad \frac{\mu_1}{m_1} \left( \frac{a}{b} + 1 \right) - \frac{\mu}{m}$$

are positive.

$m\mu_1 - \mu m_1 > 0$  is therefore the condition that an impulsive stress can be determined such that the ratio  $V:V_1'$  is changed from unity to  $a+b:b$  and this stress may be either a tension or a compression.

1) Appell, Mécanique Vol. II, p. 123.

For motion along the curvilinear part of the paths we have, calling  $s$  and  $s_1$  the length of the arcs measured from  $E$  and  $E_1$ , and  $\omega$  the angular velocity of the particles about  $O$ ,

$$s_1 = \frac{b}{a+b} s, \quad \ddot{s}_1 = \frac{b}{a+b} \ddot{s},$$

$$\ddot{s}_1 = - \left| \omega^2 b + \frac{T}{m_1} \right| \mu_1, \quad \ddot{s} = - \left| \omega^2 (b+a) + \frac{T}{m} \right| \mu.$$

The tension in the rod is consequently determined from the relation

$$\left| \omega^2 b + \frac{T}{m_1} \right| = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{b}{a+b} \left| -\omega^2 (b+a) + \frac{T}{m} \right|,$$

or

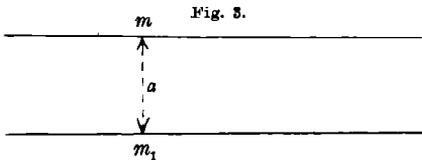
$$T = \frac{\omega^2 b (\mu \pm \mu_1)}{\frac{\mu}{m} \frac{b}{a+b} \mp \frac{\mu_1}{m_1}}.$$

The problem has two solutions as

$$\omega^2 b + \frac{T}{m_1} = \frac{\omega^2 b \mu \left[ \frac{b}{a+b} \frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} \right]}{\frac{\mu}{m} \frac{b}{a+b} \mp \frac{\mu_1}{m_1}}$$

and these values differ according as we take the upper or lower sign,  $\mu_1$  being by supposition different from zero. One of the values of  $T$  becomes infinite in case  $\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu}{m} \frac{b}{a+b}$ , but a possible solution in all such cases as the one above is of course to assume an impulsive stress in the connecting rod so as to bring both the particles instantaneously to rest. This solution will not be considered.

Another illustration along the same line<sup>1)</sup> which may be worth examining because of its simplicity is obtained by considering the motion of two unit masses  $m$  and



$m_1$  along parallel horizontal tubes (Fig. 3). The distance between the tubes and the length of the weightless connecting rod being  $a$ . If the coefficients of friction are  $\mu$  and  $\mu_1$

and the force of gravity is the only external force acting on the particles, we at once get for the tension in the rod, if motion is to take place

$$T = g \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 + \mu} \quad \text{or} \quad g \frac{\mu_1 + \mu}{\mu_1 - \mu}.$$

Suppose for definiteness  $\mu > \mu_1$ ; then both values of  $T$  are negative, one is numerically less than  $g$ , the other greater. In the former case

1) Painlevé, Leçons sur le Frottement, p. 36.

$m$  presses against the lower surface of the tube, in the latter against the upper.

As a third simple illustration consider the two parallel curves (Fig. 4)  $c$ , composed of a straight line and a tangent circle of radius  $a$ , and  $c_1$  a straight line parallel to the first and passing through the centre of the circle. The particles have masses  $m$  and  $m_1$  and the coefficients of friction are  $\mu$  and  $\mu_1$ . If the particles are connected by a weightless rod of length  $a$  and are started from  $E$  and  $E_1$  with a common velocity, it is easy to see that when no external forces act it is impossible for  $m$  to describe the path  $EADBAH$  while  $m_1$  describes the rectilinear segment  $E_1K_1H_1$ .

Statement of the problem.

The illustrations have brought out the fact that conditions which are incompatible when there is no friction may not necessarily be so when the surfaces are rough. This is an interesting thing as we ordinarily think of the force of friction as a force which prevents, or tends to prevent, motion. Here it plays the opposite roll. The illustrations also suggest the general question as to what conditions must be satisfied in order that motion may be possible when the velocity is normal

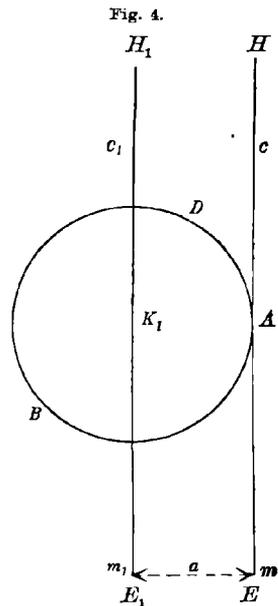
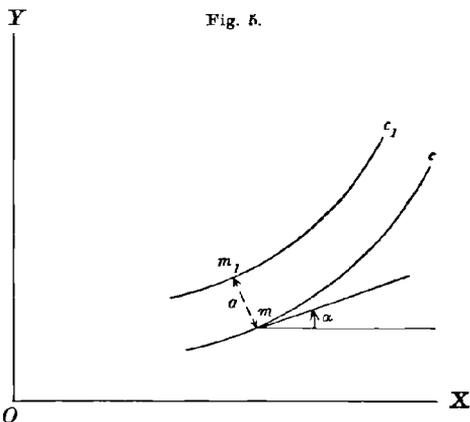


Fig. 4.

to the constraining force, or perhaps it would be better to say: under what circumstances does the supposition that motion takes place lead to conditions which are compatible? I propose to treat a fairly general type of problem of this kind, viz.: given two parallel plane curves  $c$  and  $c_1$ , the distance between the two being  $a$  (Fig. 5); two particles of mass  $m$  and  $m_1$ , connected by a weightless rod of length  $a$ , are constrained to move along  $c$  and  $c_1$ . No external forces act on the particles. Under what circumstances does the supposition that motion takes place lead to conditions which are compatible: (a) when  $c$  and  $c_1$  are smooth, (b) when  $c$  and  $c_1$  are rough?

Fig. 5.



Derivation of the relation between  $j$  and  $j_1$ , the tangential components of the acceleration of  $m$  and  $m_1$ .

Let  $(x, y)$  be the coordinates of  $m$  (Fig. 5) and  $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \alpha$ .

The coordinates of  $m_1$  at the given moment are then

$$x_1 = x - a \sin \alpha, \quad y_1 = y + a \cos \alpha.$$

We get by differentiation with respect to  $t$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - a \cos \alpha \dot{\alpha}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y} - a \sin \alpha \dot{\alpha},$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x} + a \sin \alpha \dot{\alpha}^2 - a \cos \alpha \ddot{\alpha}, \quad \ddot{y}_1 = \ddot{y} - a \cos \alpha \dot{\alpha}^2 - a \sin \alpha \ddot{\alpha}.$$

$$\therefore j_1 = \ddot{x}_1 \cos \alpha + \ddot{y}_1 \sin \alpha = \ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha - a \cos^2 \alpha \ddot{\alpha} - a \sin^2 \alpha \ddot{\alpha} = j - a \ddot{\alpha}.$$

Also  $\dot{\alpha} = \frac{V}{\rho}$ ,  $\rho$  being the radius of curvature of  $c$  at the given point,  $V$  the velocity of  $m$ . Hence

$$\ddot{\alpha} = \frac{\rho \dot{V} - V \dot{\rho}}{\rho^3} = \frac{j}{\rho} - \frac{V}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \dot{s} = \frac{j}{\rho} - \frac{V^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = \frac{j}{\rho} - \omega^2 \frac{d\rho}{ds},$$

where  $\omega = \frac{V}{\rho}$ , and  $s$  is the arc of the curve  $c$  measured in the direction of the motion of  $m$ . The relation  $j_1 = j - a \ddot{\alpha}$  can therefore be written in the form

$$j_1 - \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) j = \omega^2 a \frac{d\rho}{ds}.$$

Case (a):  $c$  and  $c_1$  are smooth.

In this case  $j_1 = j = 0$  and  $\therefore \frac{d\rho}{ds} = 0$ ,  $\rho = a$  constant. The curves  $c$  and  $c_1$  are concentric circles and the velocities  $V$  and  $V_1$  are in the ratio  $\rho : \rho - a$ .

Case (b):  $c$  and  $c_1$  are rough, the coefficients of friction being  $\mu$  and  $\mu_1$ .

As before, call  $T$  the tension in the rod,  $V$  and  $V_1$  the velocities of  $m$  and  $m_1$ ; the equations of motion of the two particles are then

$$mj = -\mu \left| \frac{mV^2}{\rho} - T \right|, \quad j = -\mu \left| \omega^2 \rho - \frac{T}{m} \right|,$$

$$m_1 j_1 = \mp \mu_1 \left| \frac{m_1 V_1^2}{\rho - a} + T \right|, \quad j_1 = \mp \mu_1 \left| \omega^2 (\rho - a) + \frac{T}{m_1} \right|,$$

the upper or lower sign being taken according as  $\rho \geq a$ ; i. e. according as the velocities of the two particles have the same or opposite sense. The relation

$$j_1 - \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) j = \omega^2 a \frac{d\rho}{ds}$$

becomes

$$\mp \mu_1 \left| \omega^2 (\rho - a) + \frac{T}{m_1} \right| + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \mu \left| \omega^2 \rho - \frac{T}{m} \right| = \omega^2 a \frac{d\rho}{ds}.$$

If our conditions are compatible it must be possible to determine  $T$  so as to satisfy this equation.

To study the meaning of this condition put

$$y_1 = \left| \frac{m_1}{\mu_1} T + \omega^2 \mu_1 (\rho - a) \right|, \quad y_2 = \left| - \left( 1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{\mu}{m} T + \omega^2 \rho \mu \left( 1 - \frac{a}{\rho} \right) \right|$$

and suppose first that  $\rho > a$ . The first equation is satisfied by the points on the broken line  $A_1 B_1 C_1$  and the second by the points on  $A_2 B_2 C_2$  (Fig. 6) and the equation which  $T$  must satisfy can be written

$$-y_1 + y_2 = \omega^2 a \frac{d\rho}{ds}.$$

Figs. 6, 7, 8 correspond to

$$\frac{\mu_1}{m_1} \geq \left( 1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{\mu}{m} \text{ respectively.}$$

In 6 we have two solutions, one, or none according as

$$a \omega^2 \frac{d\rho}{ds} \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} d' = \omega^2 (\rho - a) \mu \left[ \frac{\rho - a}{\rho} \frac{m_1}{m} + 1 \right].$$

In 7 there are one, an infinite number, or no solutions according as  $\left| \omega^2 a \frac{d\rho}{ds} \right| \begin{cases} \leq \\ = \\ > \end{cases} d'$ ; in 8 there are two, one, or none according as

$$\omega^2 a \frac{d\rho}{ds} \begin{cases} > \\ < \end{cases} -d$$

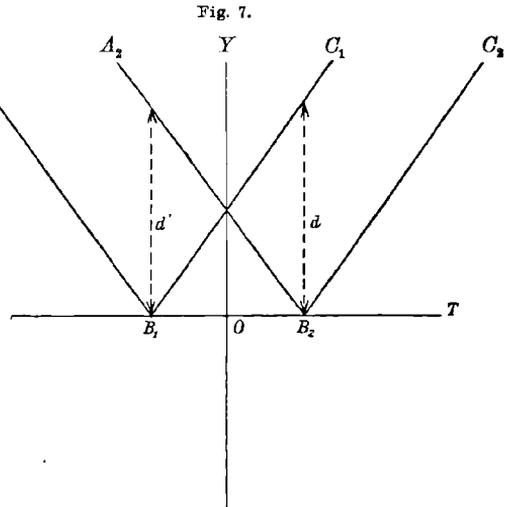
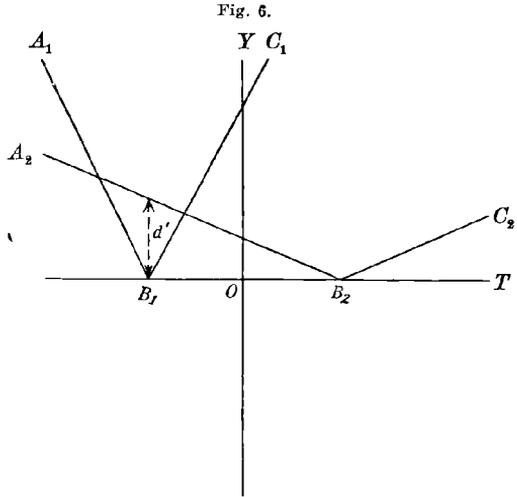
$$= -\omega^2 \mu_1 \left( \frac{m}{m_1} \rho + \rho - a \right).$$

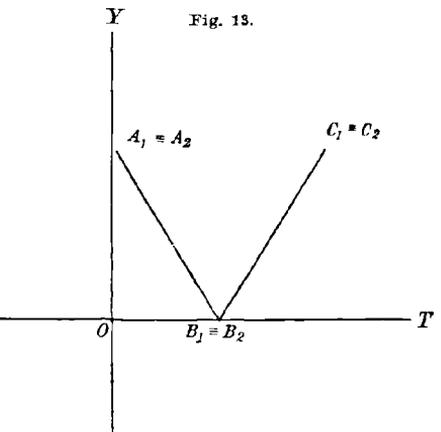
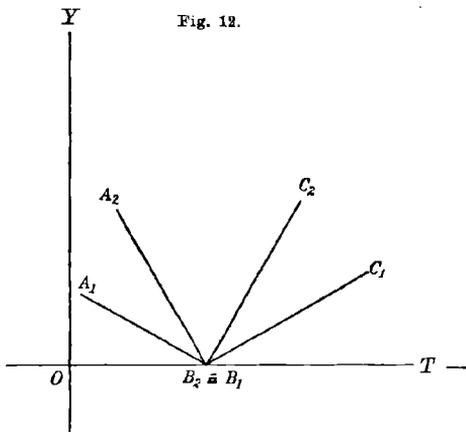
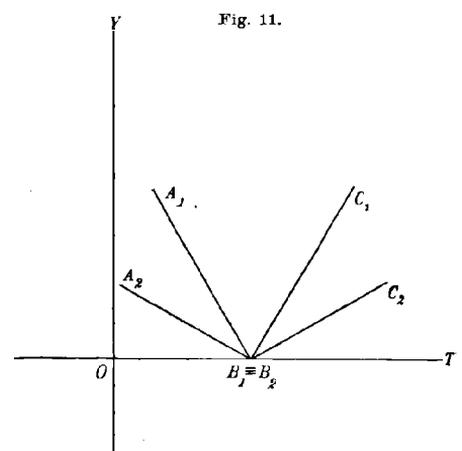
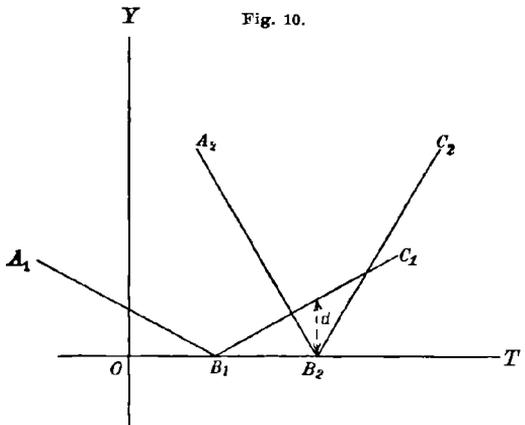
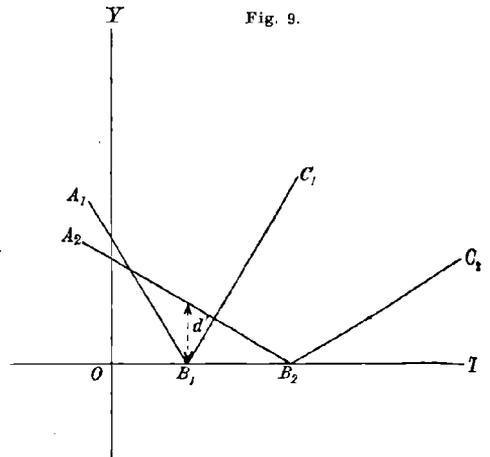
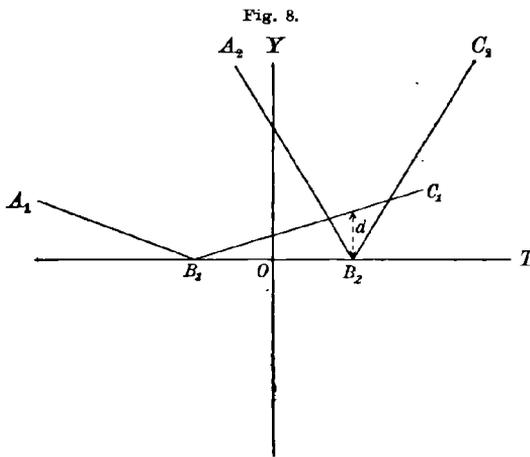
Suppose next that  $\rho < a$ : the equation in  $T$  becomes

$$y_1 - y_2 = \omega^2 a \frac{d\rho}{ds}.$$

The different possibilities are shown in Figs. 9, 10, 11, 12, 13.

The results are as follows: Fig. 9, two solutions, one, or none according as  $\omega^2 a \frac{d\rho}{ds} \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} -d'$ ; Fig. 10, two solutions, one, or none according as

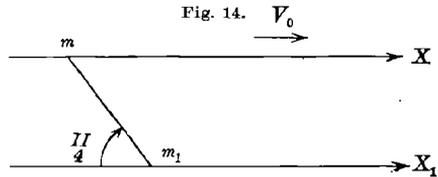




$\omega^2 a \frac{d\theta}{ds} \leq d$  (The case where the slope of the two broken lines is the same, gives the same result as for Fig. 7); Fig. 11 gives one solution if  $\omega^2 a \frac{d\theta}{ds} > 0$ , otherwise none; Fig. 12 gives one solution if  $\omega^2 a \frac{d\theta}{ds} < 0$  and none if  $\omega^2 a \frac{d\theta}{ds} > 0$ . The case shown in Fig. 13 is possible only when  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ , i. e. the curves must be circles and when this condition is satisfied there are an infinite number of solutions. In Figs. 9 and 10  $B_1$  may of course be either on the right or left of  $B_2$ .

An illustration where the rod connecting the particles is not normal to the direction of motion.

We have seen in the preceding pages illustrations of friction problems which have 0, 1, 2, or an infinite number of solutions. There is no difficulty in constructing a problem which permits of a finite number of solutions greater than two and this property is not restricted to problems in which the direction of motion is normal to the constraint. As an example of this we consider the following problem.



Given two unit masses, connected by a weightless rod as in Fig. 14, and constrained to move along horizontal tubes having coefficients of friction  $\mu$  and  $\mu_1$ : there are no external forces excepting gravity. Investigate the motion when the particles are given a common initial velocity  $V_0$ .

If we call  $T$  the tension in the rod the equations of motion of the two particles can be written

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu e \left( \frac{T}{\sqrt{2}} + g \right) + \frac{T}{\sqrt{2}}, \\ \ddot{x}_1 &= -\mu_1 e_1 \left( g - \frac{T}{\sqrt{2}} \right) - \frac{T}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

where  $e$  and  $e_1$  are  $\pm 1$ : the sign being determined by the fact that the product of  $e$  or  $e_1$  and the quantity in the parenthesis must be positive. As  $\ddot{x} = \ddot{x}_1$ ,

$$\begin{aligned} T &= g \frac{\sqrt{2}(\mu e - \mu_1 e_1)}{2 - (\mu e + \mu_1 e_1)}, \\ e \left( \frac{T}{\sqrt{2}} + g \right) &= \frac{2g(1 - \mu_1 e_1)}{2e - (\mu + \mu_1 e e_1)}, \\ e_1 \left( g - \frac{T}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{2g(1 - \mu e)}{2e_1 - (\mu_1 + \mu e e_1)}. \end{aligned}$$

The last two expressions must be positive. Let us write down their values for the different cases.

Case I:  $e = 1, e_1 = 1.$

$$e\left(\frac{T}{\sqrt{2}} + g\right) = \frac{2g(1 - \mu_1)}{2 - (\mu + \mu_1)}, \quad e_1\left(g - \frac{T}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2g(1 - \mu)}{2 - (\mu + \mu_1)}.$$

Case II:  $e = -1, e_1 = -1.$

$$e\left(\frac{T}{\sqrt{2}} + g\right) = \frac{2g(1 + \mu_1)}{-2 - (\mu + \mu_1)}, \quad e_1\left(g - \frac{T}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2g(1 + \mu)}{-2 - (\mu + \mu_1)}.$$

Case III:  $e = -1, e_1 = 1.$

$$e\left(\frac{T}{\sqrt{2}} + g\right) = \frac{2g(1 - \mu_1)}{-2 - (\mu - \mu_1)}, \quad e_1\left(g - \frac{T}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2g(1 + \mu)}{2 - (\mu_1 - \mu)}.$$

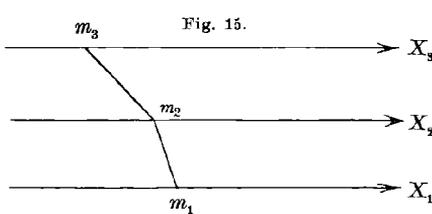
Case IV:  $e = 1, e_1 = -1.$

$$e\left(\frac{T}{\sqrt{2}} + g\right) = \frac{2g(1 + \mu)}{2 - (\mu - \mu_1)}, \quad e_1\left(g - \frac{T}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2g(1 - \mu)}{-2 - (\mu_1 - \mu)}.$$

An examination of these different cases shows that II is impossible but that it is possible to choose the coefficients of friction so as to admit the others: e. g.  $\mu = 3, \mu_1 = 4$  gives the following possibilities

- (1)  $T = \frac{\sqrt{2}}{5} g, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_1 = -\frac{17}{5} g,$
- (2)  $T = -7\sqrt{2} g, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_1 = -25 g,$
- (3)  $T = \frac{7}{3}\sqrt{2} g, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_1 = -\frac{23}{3} g.$

The conditions of the problem are also satisfied (being  $\mu$  and  $\mu_1$  are both greater than  $\frac{\pi}{4}$ ) by assuming that both the particles are instantaneously brought to rest by an impulsive stress in the rod. The impulse of this impulsive stress which is required in order to bring  $m$



to rest is in general different from that required to bring  $m_1$  to rest, but the point is that the moment one of the particles is brought to rest any additional impulsive stress in the rod has no effect on the particle which is already at rest.

The results of the illustration may be summarized briefly by saying that there are four solutions which satisfy the conditions of the problem, and there are three distinct motions which satisfy the conditions of the problem.

A problem with a still larger number of solutions may be obtained by considering the motion of three or more particles along rough horizontal tubes as in Fig. 15.

It may be worth while to call especial attention to the fact that throughout this discussion we have assumed that we were dealing with a rigid system and the problem has simply been to see what the equations of motion led us to in case the constraints were normal to the velocity. Should we take into account the elasticity of the material, we would have a different problem and we would no longer be dealing with a problem in the mechanics of a rigid system.<sup>1)</sup>

University of Michigan, June 1912.

## Über Flüssigkeitsstrahlen, deren Formen Drehungskörper sind.

Von R. FÖRSTER in Marienwerder (Wpr.).

§ 1. Wenn das Strömungspotential in bezug auf die  $x$ -Achse Rotationssymmetrie besitzt, genügen Potential  $U$  und Strömungsfunktion  $V$  den Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -y \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = +y \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Wir nehmen an, daß die  $x$ -Achse eine Strömungslinie ist. Weil in der  $xy$ -Ebene der ganze Vorgang zur  $x$ -Achse symmetrisch ist, können in den Entwicklungen nur gerade Potenzen von  $y$  auftreten. Wir gehen unter Benutzung einer unendlichen Reihe noch unbestimmter Funktionen in die Gleichungen (1) hinein mit dem Ansatz:

$$U = \sum_0^{\infty} f_{2n}(x) y^{2n}, \quad V = \sum_1^{\infty} f_{2n-1}(x) \cdot y^{2n}.$$

Es ergibt sich sofort das einfache Resultat, daß sämtliche  $f_i$  den sukzessiven Ableitungen einer einzigen Funktion proportional sind, und auch die Zahlenkoeffizienten bestimmen sich höchst einfach, so daß man hat:

$$(2) \quad U = \sum_0^{\infty} a_n f^{(2n)}(x) \cdot y^{2n}; \quad V = \sum_1^{\infty} b_n f^{(2n-1)}(x) \cdot y^{2n},$$

wozu aus den Rekursionsformeln

$$b_n = + \frac{a_{n-1}}{2n}, \quad a_n = - \frac{b_n}{2n}$$

1) Appell, Mécanique, 3<sup>d</sup> edition, Vol. II, p. 127.

unter der Annahme  $a_0 = 1$  folgt:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2^n \cdot n!)^2}; \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2n}{(2^n \cdot n!)^2},$$

z. B.  $a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = +\frac{1}{64}$  usw.

Dieses Ergebnis kann man auch aus dem allgemeinen Integral

$$U = \int_0^\pi f(x + iy \cos \varphi) d\varphi$$

herleiten, wenn man  $f$  nach dem Taylorschen Satz in eine Reihe nach  $y$  entwickelt.

Symbolisch kann man schreiben:

$$U = [J_0(yf)]x; \quad V = \left[ \frac{J_1(yf)}{yf} \right]x,$$

wo in dem allgemeinen Gliede der Potenzreihe für  $J_0$ , bzw.  $J_1$  statt  $f^h f^{(h)}$  zu setzen ist.

§ 2. Jetzt verlangen wir, daß die bewegte Flüssigkeit eine freie Grenze besitze. Es sind dann zwei unbekannte Funktionen zu bestimmen: 1. die Ordinate  $y(x)$  der freien Grenze, 2. die Funktion  $f(x)$ .

Das Potential der äußeren Kräfte sei  $\Phi$ , die Geschwindigkeit eines Teilchens  $v$ . Dann müssen längs der freien Grenze Gleichungen von der Form

$$V = V_0 \text{ und } \frac{1}{2}v^2 + \dot{\Phi} = \frac{1}{2}c^2$$

bestehen, wo  $c$  und  $V_0$  Konstante sind. Nun ist  $v$  gleich dem Gradienten von  $U$ , die Gleichungen lauten also:

$$V = V_0 \text{ und } (\nabla U)^2 = c^2 - 2\Phi.$$

Setzt man hier die Werte (2) ein, so werden die Gleichungen:

$$(I) \quad y^2 \cdot \left[ a_0 f' + \frac{a_1}{2} y^2 f''' + \frac{a_2}{3} y^4 f^{(5)} + \dots \right] = 2V_0,$$

$$(II) \quad \frac{1}{4} y^2 \cdot \left[ a_0 f'' + \frac{a_1}{2} y^2 f^{(4)} + \dots \right]^2 + \left[ a_0 f' + a_1 y^2 f''' + \dots \right]^2 = c^2 - 2\Phi.$$

Wir haben für unsere zwei Unbekannten eine gewöhnliche und eine Differentialgleichung, beide von unendlich hoher Ordnung. Man kann sich die Aufgabe stellen, die Integrale dieser Gleichungen an folgenden zwei Stellen näher zu betrachten:

1. in der Umgebung der Mündung des Rohres, aus dem der Strahl austritt. Hierüber können wir zurzeit nur so viel positiv aussagen, daß hier  $U$  und  $V$  einen einfachen Verzweigungspunkt haben, doch so, daß die Glieder  $\frac{1}{2}$  Ordnung verschwinden.

2. in der Umgebung des unendlich fernen Punktes der  $x$ -Achse. Hierüber handeln die §§ 3—9. Im § 10 wird dann der Einfluß der Oberflächenspannung in Betracht gezogen.

§ 3. Es wirke eine konstante Kraft in der Richtung der  $x$ -Achse. Dann ist  $\Phi = -gx$ . Gleichung (II) lautet:

$$\frac{1}{4}y^2 \cdot [a_0 f'' + \dots]^2 + [a_0 f' + \dots]^2 = c^2 + 2gx.$$

Durch Verschiebung des Anfangspunktes kann man erreichen, daß  $c^2$  verschwindet. Wir setzen also sofort  $c = 0$ . Betreffs der Entwicklung machen wir die einfachste Annahme, nämlich, daß sich  $y^2$  und  $f'$  in der Umgebung von  $x = \infty$  in Potenzreihen entwickeln lassen. Die noch unbekanntenen Exponenten der höchsten Glieder dieser Reihen bezeichnen wir mit  $\mu$  und  $\nu$ , was wir kurz so ausdrücken:

$$y^2 \sim x^\mu, \quad f' \sim x^\nu.$$

Dann ist  $f'' \sim x^{\nu-1}$ , und das höchste Glied der linken Seite in (I) ist  $\sim x^{\mu+\nu}$ . Rechts aber ist das höchste Glied  $\sim x^0$ , also  $\mu + \nu = 0$ . In Gleichung (II) kann man ungewiß sein, ob das Anfangsglied des ersten Teils, welches  $\sim x^{\mu+\nu(r-1)} = x^{\nu-2}$  ist, oder das des zweiten Teils, welches  $\sim x^{2\nu}$  ist, das höchste Glied ist. Jedenfalls muß das höhere beider Glieder  $\sim x^1$  sein. Wäre nun  $\nu - 2 \geq 2\nu$ , so wäre  $\nu - 2 = 1$ ,  $\nu = 3$ ,  $3 - 2$  ist aber  $< 2 \cdot 3$ , q. e. abs. Also  $\nu - 2 < 2\nu$ ,  $2\nu = 1$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = -\frac{1}{2}$ .

Nachdem so die Größenordnung der Anfangsglieder festgestellt ist, bestimmt sich ohne Mühe eine Entwicklung von der Form:

$$y^2 = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{P}_1\left(x^{-\frac{5}{2}}\right); \quad f' = x^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{P}_2\left(x^{-\frac{5}{2}}\right),$$

wo die  $\mathfrak{P}$  Potenzreihen sind, deren konstante Glieder nicht verschwinden.

§ 4. Die naheliegende Verallgemeinerung  $\Phi = -gx^\alpha (\alpha > 0)$  bietet nichts wesentlich Neues. Die Entwicklungsgröße ist

$$x^{-2-\frac{\alpha}{2}}; \quad \text{der vortretende Faktor } x^{\mp\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 5.  $\Phi$  sei gleich dem Newtonschen Potential von Massen, die irgendwo im Endlichen liegen, und deren Gesamtbetrag von 0 verschieden sei. Die Gleichungen lauten:

$$(I) \quad y^2 f' + \dots = 2V_0,$$

$$(II) \quad \frac{1}{4}y^2 [a_0 f'' + \dots]^2 + [a_0 f' + \dots]^2 = c^2 + \frac{2m}{x} + \text{kleinere Glieder.}$$

Wir setzen voraus, daß sich der Strahl im Unendlichen asymptotisch einem Strahl vom konstanten Radius  $R$  nähert, bei dem alle Teilchen mit der Geschwindigkeit  $c$  parallele Gerade beschreiben. Dann wird

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = c.$$

Gleichung I ergibt:

$$R^2 = \frac{2V_0}{c}.$$

Um nun die nächsten Glieder der Entwicklung zu bestimmen, setzen wir:

$$f' = c + \varepsilon, \quad y^2 = R^2 + \xi,$$

wo  $\varepsilon$  und  $\xi$  im Unendlichen verschwinden. Aus I sieht man sofort, daß  $\varepsilon \sim \xi$ . In Gleichung (II) sind nach Weglassung von  $c^2$  die höchsten Glieder der beiden Teile der linken Seite  $\frac{1}{4}R^2\varepsilon'^2$ , bzw.  $2c\varepsilon$  [wenn man zunächst voraussetzt, was sich sofort bestätigt, daß  $\varepsilon'' < \varepsilon$  ist]. Das höchste Glied rechts ist aber  $\sim x^{-1}$ . Wäre nun links  $\varepsilon'^2 > \varepsilon$ , so wäre  $\varepsilon'^2 \sim x^{-1}$ ,  $\varepsilon \sim x^{+\frac{1}{2}}$ ,  $\varepsilon > \varepsilon'^2$  q. e. abs., also  $\varepsilon'^2 < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim x^{-1}$ ,  $\xi \sim x^{-1}$ .

Setzt man nun Potenzreihen mit unbestimmten Koeffizienten an, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$y^2 = \frac{2V_0}{c} \cdot \left(1 - \frac{m}{c^2x} + \dots\right); \quad f' = c \cdot \left(1 + \frac{m}{c^2x} + \dots\right).$$

§ 6. Es seien keine äußeren Kräfte vorhanden,  $\Phi = 0$ . Dann ist ersichtlich, daß die Gleichungen die triviale Lösung

$$f = cx, \quad y = R$$

besitzen. Doch gibt es außerdem noch eine unendliche Reihe anderer Lösungen, die sich im Unendlichen dieser asymptotisch nähern, und dies sind gerade die interessanten Lösungen, weil sie der in der Wirklichkeit auftretenden Strahlform am meisten entsprechen.

Es zeigt sich jedoch bei der Aufstellung der Entwicklung eine eigentümliche Schwierigkeit, denn außer der trivialen Lösung gibt es keine, die sich bei  $x = \infty$  regulär verhält. Es ergibt sich nämlich nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten der Koeffizient des ersten wirklich auftretenden Gliedes gleich Null, q. e. abs.

Um über das Verhalten der Integrale Aufschluß zu erhalten, wenden wir die in der angewandten Mathematik beliebte Methode der Verstümmelung der Differentialgleichung an, indem wir *voraussetzen*, daß in den Gleichungen (I) und (II) die höheren Glieder vernachlässigt werden dürfen. Wir integrieren deshalb folgendes System:

$$(I') \quad y^2 f' = 2V,$$

$$(II') \quad \frac{1}{4}y^2 f''^2 + f'^2 + 2f' \cdot a_1 y^2 f''' = c^2.$$

Durch Elimination von  $y^2$  folgt hieraus:

$$V_0(f''^2 - 2f'f''') + 2f'^3 = 2f'c^2.$$

Diese Gleichung integrieren wir folgendermaßen:

$$\text{Setze } f' = g: \quad V_0(g'^2 - 2gg'') + 2g^4 - 2gc^2 = 0.$$

$$\text{Setze } g' = h: \quad V_0\left(h^2 - 2gh \frac{dh}{dg}\right) + 2g^3 - 2c^2g = 0.$$

$$\text{Setze } h^2 = k: \quad V_0\left(k - g \frac{dk}{dg}\right) + 2g^3 - 2c^2g = 0.$$

Diese Gleichung besitzt das allgemeine Integral:

$$V_0k = g \cdot \text{const} + g^3 - 2c^2g \log g.$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich folgendermaßen:

Im Unendlichen soll  $f \sim cx$  sein, also  $\lim g = c$ ;  $\lim g' = 0$ ,  $\lim h = \lim k = 0$ . Hieraus:

$$V_0k^2 = g(g^2 - c^2) - 2gc^2 \log \frac{g}{c}.$$

Setzt man in der Umgebung von  $x = \infty$ :  $g = c + \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  unendlich klein ist, und entwickelt nach  $\varepsilon$ , so hebt sich die nullte und die erste Potenz von  $\varepsilon$  heraus, und die Quadratwurzel läßt sich ziehen:

$$g' = h \sim \pm \sqrt{\frac{c}{V_0}} \cdot \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{c}{V_0}} \cdot (g - c),$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$g - c \sim \text{const} e^{\pm z \sqrt{\frac{c}{V_0}}}.$$

Nimmt man an, daß der Strahl nach rechts gehen soll, so ist der Quadratwurzel das negative Zeichen zu geben.

Durch Differentiation erhält man nun aber

$$g' \sim \text{const} \cdot e^{-z \sqrt{\frac{c}{V_0}}}; \quad g'' \sim \text{const} \cdot e^{-z \sqrt{\frac{c}{V_0}}}; \quad \text{usw.},$$

also

$$g - c \sim g' \sim g'' \sim g''' \sim \dots$$

Hiernach sind  $g''$  und alle höheren Ableitungen gegen  $g - c$  und  $g$  keineswegs zu vernachlässigen, denn der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder der Reihen in (I) und (II) ist selbst für  $x = \infty$  eine endliche Größe. Folglich trifft die der angewendeten Methode zugrunde liegende Voraussetzung nicht zu, vielmehr müssen wir schließen, daß die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihen von gleicher Größenordnung sind.

§ 7. Bevor wir zur Integration schreiten, wollen wir die individuellen Konstanten des einzelnen Strahls aus den Gleichungen möglichst herauschaffen. Wir setzen  $\lim_{x=\infty} y = R$  und führen neue Koordinaten ein

durch die Gleichungen  $x = R\xi$ ,  $y = R\eta$ , ferner setzen wir  $c = \frac{c_1}{R}$ , so

daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{df}{d\xi} = c_1$  wird, und bezeichnen die Ableitungen nach  $\xi$  sofort wieder mit Strichen. Endlich führen wir statt  $f'$  die Funktion  $g = \frac{1}{c_1} f'$  ein, so daß im Unendlichen  $\eta = 1$ ,  $g = 1$  ist. Dann haben wir als allgemeine Strahlgleichungen

$$(III) \quad 1 = a_0 \eta^2 g + \frac{a_1}{2} \eta^4 g'' + \dots$$

$$(IV) \quad 1 = \frac{1}{4} \eta^2 \left[ a_0 g' + \frac{a_1}{2} \eta^2 g''' + \dots \right]^2 + [a_0 g + a_1 \eta^2 g'' + \dots]^2.$$

Für die praktische Rechnung gibt man der letzteren noch die Form (IV')  $\frac{1}{4} \eta^2 [a_0 g' + \dots]^2 = [1 + a_0 g + a_1 \eta^2 g'' + \dots] \cdot [1 - a_0 g - a_1 \eta^2 g'' - \dots]$ . Nun wissen wir, daß im Unendlichen  $g' \sim g''$ . Hieraus ist die Form des größten Gliedes von  $g$  zu bestimmen. Setze zu diesem Zwecke  $g' = h$ :  $h'' \sim h$ . Setze  $h = e^{(5)}$ , so ergibt sich nach Division durch  $h$ :  $a'' + a'^2$  endlich,  $\neq 0$ . Dann ist entweder  $a'^2$  endlich, etwa  $\sim m^2$ , also  $a \sim m\xi$ , oder es ist  $a'^2$  unendlich; dann muß aber auch  $a''$  unendlich sein, und zwar  $a'' \sim -a'^2$ . Setzt man hier  $a' = b$ , so wird  $b' \sim -b^2$ ;  $\frac{b'}{b^2} \sim -1$ , wobei  $b$  unendlich ist. Durch Integration von  $\frac{1}{b^2} \frac{db}{d\xi} \sim -1$  ergibt sich aber  $-\frac{1}{b} \sim -\xi$ ,  $b \sim \frac{1}{\xi}$ , also unendlich klein, q. e. abs. Es bleibt also bloß  $a \sim \pm m\xi$ ,  $g' = h \sim e^{\pm m\xi}$ . Es ist wieder das untere Zeichen zu wählen, also  $g' \sim e^{-m\xi}$ ,  $g - 1 \sim -e^{-m\xi}$ . Der Wert von  $m$  wird sich sofort ergeben. Jedenfalls könnte man jetzt eine Reihe formal ansetzen:

$$g = 1 - a \cdot e^{-m\xi} + \text{kleinere Glieder.}$$

Man kann aber noch den Koeffizienten  $a$  als additive Konstante in den Exponenten werfen und durch eine Verschiebung des Anfangspunktes bewirken, daß diese wegfällt. In der Entwicklung von  $g$  liefert (III) eine analoge von  $\eta^2$ . Die Form der nächsten Glieder bestimmt sich von selbst. Wir setzen also an:

$$g = 1 + g_1 e^{-m\xi} + g_2 e^{-2m\xi} + g_3 e^{-3m\xi} + \dots; \quad \eta^2 = 1 + \eta_1 e^{-m\xi} + \eta_2 e^{-2m\xi} + \dots$$

mit  $g_1 = -1$ .

§ 8. Nun ist die Bestimmung der Koeffizienten prinzipiell einfach, wenn wir erst noch  $m$  kennen. Wir setzen die Reihen in (IV') ein. Dann bleibt links als höchstes Glied ein Glied mit  $e^{-2m\xi}$ , rechts aber:

$$[1 + a_0 + \text{Glieder mit } e^{-m\xi}] \cdot [1 - a_0(1 + g_1 e^{-m\xi} + \dots) - a_1 \cdot (1 + \eta_1 e^{-m\xi})(g_1 m^2 e^{-m\xi} + \dots) - \dots],$$

oder

$$[2 + \dots] \cdot [-(a_0 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \dots) g_1 e^{-m\xi} + \dots],$$

oder

$$-2g_1 e^{-m\xi} (a_0 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \dots) + \dots$$

Soll dies der linken Seite gleich sein, so muß das angeschriebene Glied verschwinden, weil  $g_1 = -1 \neq 0$  sein soll. Folglich bestimmt sich  $m$  aus der Gleichung:

$$a_0 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \dots = 0 \quad \text{oder} \quad J_0(m) = 0.$$

Für  $m$  kann irgendeine Nullstelle der nullten Besselschen Funktion genommen werden, z. B. die erste:  $m = 2,404825$ .

Bei der Berechnung der Koeffizienten treten einige interessante numerische Reihen auf, die die allgemeine Form haben:

$$P_\mu^{(k)} \equiv \sum_0^\infty \binom{l}{\mu} (-1)^l \left(\frac{km}{2}\right)^{2l} \cdot \frac{1}{(l!)^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 0, 1, 2, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

z. B.

$$P_0^{(k)} = a_0 + a_1 (km)^2 + \dots = J_0(km)$$

$$P_1^{(k)} = 1 \cdot a_1 (km)^2 + 2a_2 (km)^4 + \dots = \frac{km}{2} \cdot J_0'(km)$$

$$P_2^{(k)} = 1a_2 (km)^4 + 3a_3 (km)^6 + \dots = (km)^4 \cdot \frac{1}{4km} \left(\frac{1}{2km} J_0'(km)\right)'$$

$$P_3^{(k)} = (km)^6 \cdot \frac{1}{6km} \left(\frac{1}{4km} \left(\frac{1}{2km} J_0'(km)\right)'\right)' \text{ usw.,}$$

dazu noch

$$R^{(k)} = a_0 + \frac{a_1}{2} (km)^2 + \frac{a_2}{3} (km)^4 + \dots = -\frac{2}{km} J_0'(km).$$

Für  $m = 2,404825$  habe ich berechnet:

$$R^{(1)} = 0,431755, \quad P_0^{(1)} = 0,000000,$$

$$R^{(2)} = -0,12478, \quad P_0^{(2)} = -0,237536,$$

$$R^{(3)} = +0,01620, \quad P_0^{(3)} = +0,2942.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten führt zu folgenden Gleichungen:

(1)  $g = -1$ .

(2) Aus (IV):  $P_0^{(1)} = 0$ , hieraus  $m = 2,404825$ .

(3) Aus (III):  $\eta_1 + g_1 R^{(1)} = 0$ , hieraus  $\eta_1 = +0,431755$ .

(4) Aus (IV):  $8g_2 P_0^{(2)} + 8g_1 \eta_1 P_1^{(1)} + g_1^2 m^2 R^{(1)2} = 0$ , hieraus  $g_2 = +1,7019$ .

(5) Aus (III):  $\eta_2 + g_2 R^{(2)} = 0$ , hieraus  $\eta_2 = +0,21237$ .

(6) Aus (IV):  $8g_3 P_0^{(3)} + 8g_2 \eta_1 P_1^{(2)} + 8g_1 \eta_2 P_1^{(1)} + 8g_1 \eta_1^2 P_2^{(1)} + 4g_1 g_2 m^2 R^{(1)} R^{(2)} - g_1^2 \eta_1 m^2 R^{(1)2} = 0$ , hieraus  $g_3 = -2,76$ .

(7) Aus (III):  $2\eta_3 + 2g_2 \eta_1 P_0^{(3)} + g_1 \eta_1^2 P_1^{(1)} + 2g_3 R^{(3)} = 0$ ,

hieraus  $\eta_3 = +0,1610$  usw.

In den Gleichungen mit ungeraden Nummern sind die Koeffizienten der neu auftretenden Unbekannten  $\eta_i$  immer von 0 verschiedene Zahlen, in den Gleichungen mit geraden Nummern, die zur Bestimmung der  $g_i$  dienen, treten hier noch die  $P_0^{(i)}$  als Faktoren auf. Da aber die

Konvergenz der aufgestellten Reihen physikalisch evident ist, kann kein Koeffizient unendlich sein, es kann also nie  $P_0^{(j)} = 0$  sein. Es scheint mir folglich folgender Satz über Besselsche Funktionen physikalisch evident zu sein:

„Zwei verschiedene Nullstellen von  $J^{(0)}(x)$  stehen nie in einem kommensurablen Verhältnis“.

Diesen Satz habe ich in dem Handbuch von Nielsen nicht gefunden.

§ 9. Aus den gefundenen Reihen für  $g$  und  $\eta^2$  ergeben sich Reihen von der Form:

$$\bar{y} = R \left( 1 + 0,21 \cdot e^{-\frac{m x}{R}} + \dots \right); f(x) = c x + \frac{c R}{m} \left( e^{-\frac{m x}{R}} + 0,85 e^{-\frac{2 m x}{R}} + \dots \right).$$

$$U = a_0 c x + \frac{a_0 c R}{m} \sum_1^{\infty} n g_n e^{-\frac{n m x}{R}} + \frac{a_1 c m}{R} \sum_1^{\infty} n^2 g_n e^{-\frac{n m x}{R}} + \frac{a_2 c m^2}{R^2} \sum_1^{\infty} n^4 g_n e^{-\frac{n m x}{R}} + \dots$$

Um die „Contractio venae“ zu beurteilen, bilden wir  $\bar{y} - R$  und  $\varphi = -\arctg \frac{d\bar{y}}{dx}$ . Aus den Formeln ergibt sich sofort:

$$y - R = R \cdot 0,21 \cdot e^{-\frac{m x}{R}} + \dots; \varphi = m \cdot 0,21 \cdot e^{-\frac{m x}{R}} + \dots$$

Also ist für unendlich kleines  $\varphi$  die Kontraktion der ersten Potenz des Konvergenzwinkels proportional, und zwar ist angenähert:

$$\frac{y - R}{R} : \varphi = \frac{1}{2,404},$$

genauer:

$$\frac{\text{tg } \varphi}{m} \cdot \frac{R}{y - R} = 1 + 1,778 \cdot \frac{y - R}{R} + 6,12 \cdot \left( \frac{y - R}{R} \right)^2 + \dots$$

Aus der ersten Annäherung kann man sich leicht graphisch ein Bild des Strahles machen.

§ 10. Berücksichtigung der Oberflächenspannung. Ist die mittlere Krümmung  $H$ , so herrscht, während an der Außenseite der Oberfläche der Druck Null bleibt, an der Innenseite ein Druck  $\sigma H$ . Die Strahlgleichungen werden:

$$V = V_0, \quad (\nabla U)^2 = C - 2\Phi - \sigma H.$$

Ist die Gleichung der Grenzkurve  $y = y(x)$  und  $\Phi \equiv 0$ , so hat man:

$$(I) \quad y^2 [a_0 f'' + \frac{a_1}{2} y^2 f''' + \dots] = 2 V_0,$$

$$(II) \quad \frac{1}{4} y^2 [a_0 f''' + \dots]^2 + [a_0 f'' + \dots]^2 = C - \sigma \cdot \frac{1 + y'^2 - 2 y y''}{y \cdot (1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Frage 1. Ist ein Parallelstrahl möglich? Ja. Denn für  $y = R$ ,  $f = cx$  liefern die Gleichungen  $R^2c = 2V_0$ ,  $c^2 = C - \frac{\sigma}{R}$ .

Setzt man, um andere Integrale zu finden,  $x = R\xi$ ,  $y = R\eta$  und bezeichnet die Ableitungen nach  $\xi$  wieder mit Strichen, setzt ferner  $C = c^2 + \frac{\sigma}{R}$ ,  $\frac{df}{d\xi} = cR \cdot g$ ;  $\frac{\sigma}{c^2R} = k$ , [wobei betont werde, daß  $k$  wesentlich positiv ist], so werden die Gleichungen:

$$(III) \quad \eta^2 \left[ a_0 g + \frac{a_1}{2} \eta^2 g'' + \dots \right] = 1,$$

$$(IV) \quad \frac{1}{4} \eta^2 \left[ a_0 g' + \frac{a_1}{2} \eta^2 g''' + \dots \right]^2 + [a_0 g + a_1 \eta^2 g'' + \dots]^2 = 1 + k \cdot \left( 1 + \frac{1 + \eta'^2 - 2\eta\eta''}{\eta(1 + \eta'^2)^{\frac{5}{2}}} \right).$$

Frage 2. Ist eine Lösung möglich, bei der  $g'$ ,  $g''$  usw. gegen  $1 - g$  verschwinden? Nein. Denn wäre  $g = 1 + \alpha$ ,  $\eta^2 = 1 - \alpha$ ,  $\alpha'$  und  $\alpha''$  gegen  $\alpha$  unendlich klein, so lieferte (IV):  $\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \alpha'^2 + \dots = (1 + 1 + \alpha + \dots)(1 - 1 - \alpha + \dots) + k(-\frac{1}{2}\alpha + \dots)$ , hieraus  $k = -4$  q. e. abs.

Frage 3. Ist eine Lösung möglich in der Form

$$g = 1 + g_1 e^{-m\xi} + \dots; \quad \eta^2 = 1 + \eta_1 e^{-m\xi} + \dots?$$

Ja. Die Gleichungen (III), (IV) ergeben für  $g_1$ ,  $\eta_1$ ,  $m$  die Gleichungen

$$g_1 \left( a_0 + \frac{a_1}{2} m^2 + \frac{a_2}{3} m^4 + \dots \right) + \eta_1 = 0,$$

$$-2(a_0 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \dots) g_1 + k \eta_1 (m^2 + \frac{1}{2}) = 0.$$

Hieraus für  $m$ :

$$4 \cdot (a_0 + a_1 m^2 + a_2 m^4 + \dots) + k(2m^2 + 1) \left( a_0 + \frac{a_1}{2} m^2 + \frac{a_2}{3} m^4 + \dots \right) = 0.$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist größer als die erste Nullstelle von  $J_0(x)$ , aber kleiner als die erste Nullstelle von  $J_1(x)$ , liegt also zwischen 2,4 und 4. Die Kontraktion ist wegen des größeren  $m$  stärker als ohne die Einwirkung der Oberflächenspannung aber selbst für sehr große Oberflächenspannung ( $k = \infty$ ) ist der Unterschied nicht sehr groß, weil  $m$  nicht über 4 wachsen kann.

## Bücherschau.

---

Dr. **F. v. Dalwigk**, Privatdozent in Marburg. **Vorlesungen über darstellende Geometrie.** In zwei Bänden. Erster Band. Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Figuren im Text und auf 12 Tafeln. XVI und 363 S. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 8<sup>o</sup>. In Leinwand geb. M 13.—

Von dem auf zwei Bänden berechneten Werke liegt der erste Band vor, der im ersten Teil die Mongesche Grund- und Aufriß-Methode, im zweiten die schiefe Parallelperspektive und Axonometrie und außerdem in einem Anhang noch eine Reihe einzelner Probleme behandelt. Schicken wir gleich voraus, daß der maßgebende Eindruck der ist, daß der Verfasser den Stoff nach allen Richtungen sorgfältig und kritisch durchgearbeitet hat, daß er nach Möglichkeit überall die verschiedenen Methoden und Lösungswege angibt und überhaupt möglichste Vollständigkeit erstrebt, wie er er ja z. B. auch über die Größe des Reißbrettes und über die anzuwendenden Bleistifte Bemerkungen macht. Was die angewandte Methode betrifft, so vertritt der Verfasser den durchaus richtigen Grundsatz, möglichst bald an Körpern zu arbeiten, um an Anschaulichkeit zu gewinnen. Vielleicht tut er aber in dieser Hinsicht des Guten zu viel und trennt dadurch manches, was doch besser im Zusammenhange behandelt wurde. So erklären sich die vielen Verweisungen auf das Spätere und Frühere, welche den Leser ermüden, sowie die Anweisung (Einleitung S. VI), wie man das Buch lesen soll. Die neuere Geometrie wird nur in bescheidenem Maße herangezogen, ihre Grundprinzipien werden aber gelegentlich (S. 99) vorausgesetzt, ebenso einige Sätze aus der Krümmungstheorie der Flächen. Die gutgezeichneten Figuren sind zum Teil im Text, zum Teil auf 12 Tafeln angeordnet.

Im Einzelnen läßt sich der Inhalt des Buches kurz in folgender Weise zusammenfassen. Nachdem in den drei ersten Abschnitten die notwendigsten Beziehungen von Punkten, Ebenen und Geraden erledigt und im vierten Abschnitt das Hilfsmittel der perspektivischen Affinität, im fünften die zusammenfallende und symmetrische Lage der Risse besprochen wurde, behandeln die beiden nächsten Abschnitte ebenflächige und krummflächige Körper in einfacher und in allgemeiner Stellung, wobei auch Schattenkonstruktionen zur Sprache kommen. Der Ellipse und den andern Kegelschnitten ist dann der nächste achte Abschnitt gewidmet. Nun wird nochmals der Rotations-Kegel und der Rotations-Zylinder in allgemeiner Stellung nebst Schattenkonstruktionen erörtert. Der nächste Abschnitt greift wieder zurück auf die Fundamentalaufgaben, in dem er diese unter Vermeidung der Ebenenspurcn erledigt. Es folgen sodann ebene Schnitte der Körper, insbesondere der Polyeder, des Rotations-Kegels und der Kugel, sowie die Durchdringungen zweier ebenflächiger und krummflächiger

Körper. Vermischte stereometrische Aufgaben und solche über das Dreikant bringen nun zum Schluß noch der sechzehnte und siebzehnte Abschnitt. Betrachtungen über Rotationsflächen, die Flächen 2. Ordnung, die Schraubenlinie und die wichtigsten Schraubenflächen, sowie ein Abschnitt über zentralperspektivische Kartenprojektionen (stereographische, gnomonische Projektion) beschließen den ersten Teil.

Der zweite Teil behandelt die Parallelperspektive und die orthogonale Axonometrie. Die schiefwinklige Axonometrie und der Pohlkesche Satz werden erwähnt.

In einem letzten Teil, der als Anhang bezeichnet wird, finden wir zunächst praktische Vorschriften über die Technik des Zeichnens, dann einiges über die Kreisrektifikation, sodann eine astronomische Anwendung der Orthogonalprojektion. Die Beleuchtungslehre wird unter Erwähnung der verschiedenen Methoden besprochen und zum Schluß die kotierte Projektion.

Gerade dieser Anhang verleiht dem Buche eine gewisse Reichhaltigkeit. Ist es schon an und für sich gut, daß bei den Dreikantsaufgaben auch die wichtigsten Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden, wobei auch ein mechanischer Apparat, der Sonnenstandsmesser von Willich, besprochen wird, so gibt der Anhang drei weitere Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Stundenwinkel, Deklination, Höhe und Azimut bei gegebener Polhöhe, zum Teil in Tabellenform. Im vierten Anhang wird auch das in Lehrbüchern noch nicht behandelte Rodenbergsche Verfahren zur Konstruktion der Helligkeitsstufen erörtert. Über Kamm- und Tallinien fügt der Verfasser (S. 358) bei der kotierten Projektion gute Bemerkungen bei und endlich wäre noch der Beweis des Henricischen Satzes für das Rotationshyperboloid (S. 239) hervorzuheben.

Einiges scheint dem Referenten auch verbesserungsbedürftig. So wäre der Vorgang der Abwicklung einer abwickelbaren Fläche, auch wenn er in die Theorie der Flächen gehört, prinzipiell zu erörtern und dürfte nicht gewissermaßen ohne Sang und Klang eingeführt werden. Die schiefe Parallelperspektive (S. 265) scheint mir auch nicht allgemein und prinzipiell genug dargestellt zu sein. Sich von allem Anfang an schon auf die Verkürzung  $\frac{1}{2}$  und den Winkel von  $30^\circ$  zu beschränken, ist nicht empfehlenswert. Der Pohlkesche Satz endlich müßte in einem Lehrbuche der darstellenden Geometrie, das in erster Linie doch für Mathematiker bestimmt ist, unter allen Umständen bewiesen werden. Weiter sind noch folgende Irrtümer zu beseitigen. Der Ausdruck „Elliptischer“ Kegel (S. 161) ist als sinnlos durch „Allgemeiner Kegel 2. Ordnung“ zu ersetzen; ein Wendepunkt ist in der orthogonalen Projektion einer Raumkurve schon gegeben, wenn die Schmiegungebene des betreffenden Raumpunktes auf der Bildebene senkrecht steht. Es ist also nicht nötig, daß die Hauptnormale auf der Bildfläche senkrecht steht (S. 179). Die auf S. 318 gegebene Rektifikation des Kreises stammt nicht von Schlämilch, sondern von dem polnischen Jesuiten Kochansky (1685).

München, Juli 1912.

KARL DÖHLEMANN.

## Neue Bücher.

### Arithmetik, Analysis.

1. MAENNCHEN, PH., Geheimnisse der Rechenkünstler. (Mathem. Bibliothek, 13.) Berlin und Leipzig 1913, Teubner. Kart. *M* —.80.  
S. auch 42, 47.

### Astronomie, mathematische Geographie.

2. CAMPBELL, W. W., Stellar motions. London 1913, Milford. 17 s.
3. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. T. VII (1. vol.), astronomie sphérique. Fasc. 1. Paris, Leipzig 1913, Teubner. *M* 8.40.
4. LÁSKA, W., Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. II. Teil: Praktische und theoretische Astronomie nebst der mathematischen Geographie. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten. Bremerhaven u. Leipzig 1913, v. Vangerow. *M* 5.—; geb. *M* 6.—.  
S. auch 12.

### Darstellende Geometrie.

5. MITZSCHERLING, ARTHUR, Das Problem der Kreisteilung, ein Beitrag zu seiner Entwicklung. Mit einem Vorwort v. Heinrich Liebmann. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 7.—; geb. in Leinw. *M* 8.40.
6. NICOMEDI, R., Piani quotati. Napoli 1913, Pironti. L. 5.50.

### Geschichte.

7. BENSAUDR, JOAQUIM, L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes. Bern 1913, Drechsel. *M* 10.—.
8. BESSEL und STEINHEIL, Briefwechsel. Hrsg. im Auftrage der Königl. Akademien der Wissenschaften zu Berlin u. München. Leipzig 1913, Engelmann. *M* 8.—.
9. HEATH, SIR THOMAS L., Archimedes' Werke, mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen. Deutsch von Fritz Kliem. Berlin 1914, Häring. *M* 16.—.
10. LÖWENHEIM, LOUIS, Die Wissenschaft Demokrits und ihr Einfluß auf die moderne Naturwissenschaft. Hrsg. von Leopold Löwenheim. Berlin 1914, Simion. *M* 6.—.
11. MEYER, K., Die Entwicklung des Temperaturbegriffs im Laufe der Zeiten. („Die Wissenschaft“ Bd. 48.) Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 4.—; geb. in Leinw. *M* 4.80.
12. VERNERI, JOANNIS, De triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex, cum proemio Georgii Joachimi Rhetici. II, de meteoroscopiis, hrsg. v. Joseph Würschmidt, unter Benutzung der Vorarbeiten v. A. Björnabo. Mit einem Vorwort v. Eilhard Wiedemann. (Abhandlungen zur Geschichte der

- mathem. Wissensch. m. Einschluß ihrer Anwendungen, Heft XXIV, 2.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* 12.—.
13. WITTING, ALEXANDER, u. GEBHARDT, MARTIN, Beispiele zur Geschichte der Mathematik, ein mathematisch-historisches Lesebuch. II. Teil. Mit einem Titelbild. (Mathem. Bibliothek, 15.) Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *Kart. M* —.80.
- S. auch 1, 5.

### Mechanik.

14. DENIZOT, ALFRED, Das Foucault'sche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung. Leipzig und Berlin 1913, Teubner. *M* 3.—.
15. HARTMANN, FRDR., Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen- u. Eisenbetonbaues, berechnet aus der Formänderungsarbeit und aus den Formänderungen selbst. Berlin 1913, Ernst & Sohn. *M* 8.—; geb. *M* 8.80.
16. HENCKY, H., Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. München u. Berlin 1913, Oldenbourg. *M* 4.—.
17. HENKEL, OTTO, Graphische Statik, mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. II. Teil: Durchgehende Gelenkträger. Dreigelenkbogen. Formänderungen gerader Träger. Durchgehende (kontinuierliche) Träger. Formänderungen gebogener Träger. Zweigelenkbogen. Eingespannter Bogen. Erddruck und Wasserdruck. (Sammlung Göschen Nr. 695). Berlin u. Leipzig 1913, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.90.
18. HERMANN, ERNST, Über die einförmige Bewegung des ebenen kreisverwandtveränderlichen Systems. Diss. Dresden. Weida i. Th. 1913, Druck von Thomas & Hubert.
19. MOHR, OTTO, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 2., neu bearbeitete u. erweiterte Aufl. Berlin 1914, Ernst & Sohn. *M* 18.—; geb. *M* 19.50.
20. MÜLLER, RUD., Theorie der zeitlich veränderlichen Strömung des Wassers in Turbinenleitungen m. Berücksichtigung graphischer Verfahren. Borna 1913 (Dresden, Dressel). *M* 2.80.
21. SHERRERSTEIN, I., Vectorial Mechanics. London 1913, Macmillan & Co. 7 s. 6 d.
- S. auch 32, 44, 48.

### Physik, physikalische Chemie.

22. BLONDIOT, R., Einführung in die Thermodynamik. Mit Zusätzen und Verbesserungen des Autors versehene autoris. deutsche Ausg. der 2. franz. Aufl. besorgt von Carl Schorr und Frdr. Platschek. Dresden 1913, Steinkopff. *M* 4.—.
23. BRAGG, W. H., Durchgang der  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - und Röntgen-Strahlen durch Materie. Deutsch von Max Iklé. Leipzig 1913, Barth. *M* 6.80; geb. in Leinw. *M* 7.80.
24. COHN, EMIL, Physikalisches über Raum und Zeit. (Naturwissenschaftl. Vorträge u. Schriften, hrsg. von der Berliner Urania, Heft 6.) 2., verb. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* —.80.
25. Constitution de la matière, Les idées modernes sur la. Conférences faites en 1912 par E. Bauer, A. Blanc, E. Bloch, Mme P. Curie, A. Debierne, L. Dunoyer, P. Langevin, J. Perrin, H. Poincaré, P. Weiß. (Société française de Physique, collection de mémoires relatifs à la Physique, deuxième série.) Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 12.—.
26. EHRENFEST, PAUL, Zur Krise der Lichtäther-Hypothese. Rede, gehalten beim Antritt des Lehramts an der Reichsuniversität zu Leiden. Berlin 1913, Springer. *M* —.60.

27. HERZ, NORB., Lehrbuch d. Physik. Wien 1913, Deuticke. *M* 8.—
28. KALÁHNE, ALFRED, Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. II. Teil. (Sammlung mathem.-physikal. Schriften 11, 2.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 5.40; geb. in Leinw. *M* 6.—
29. KAUFFMANN, HUGO, Allgemeine u. physikalische Chemie. 2 Teile (Sammlung Göschen Nr. 71 u. Nr. 698.) Berlin und Leipzig 1913, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.90
30. LANG, ROBERT, Experimentalphysik. II. Wellenlehre und Akustik. (Sammlung Göschen Nr. 612.) Berlin und Leipzig 1913, Göschen. Geb. in Leinw. *M* —.90
31. LOMMEL, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 20.—22. neubearb. Aufl. hrsg. von Walt. König. Leipzig 1913, Barth. *M* 6.60; geb. in Leinw. *M* 7.50
32. LORENZ, HANS, Lehrbuch der technischen Physik. IV. Band: Technische Elastizitätslehre. München u. Berlin 1913, Oldenbourg. *M* 19.—; geb. *M* 20.—
33. MORITZ, F., Les moteurs thermiques dans leurs rapports avec la thermodynamique. Moteurs à explosion et à combustion. Machines alternatives à vapeur. Turbines à vapeur. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 13.—
34. NIMFUHR, RAIM., Grundlagen der Physik des Fluges. Wien 1913, v. Waldheim. *M* 4.—
35. OSTERTAG, P., Berechnung der Kältemaschinen auf Grund der Entropie-Diagramme. Berlin 1913, Springer. *M* 4.—
36. POYNING, J. H., and THOMPSON, SIR J. J., A textbook of Physics: Properties of matter. 6th edition, carefully revised. London 1913, Griffin. 10 s. 6 d.
37. ZART, A., Bausteine des Weltalls, Atome und Moleküle. Stuttgart 1913, Frankh. *M* 1.—; geb. *M* 1.80
38. ZEEMAN, P., Researches in Magneto-Optics. London 1913, Macmillan & Co. 6 s.

S. auch 11, 14, 42, 44, 48.

#### Rechenhilfsmittel. Tafeln.

39. CARY, E. R., The solution of railroad problems by the slide rule. New York 1913, Van Nostrand. \$ 1.—
40. NELL, A. M., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. Völlige Neubearbeitung von Ludwig Balsler. 14. Aufl. Gießen 1913, Roth. Geb. *M* 2.—

#### Verschiedenes.

41. BON, FRED, Ist es wahr, daß  $2 \times 2 = 4$  ist? Eine experimentelle Untersuchung. Leipzig 1913, Reinicke. *M* 12.—
42. BORTKIEWICZ, L. v., Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin 1913, Springer. *M* 4.—
43. BRANFORD, B., Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Deutsch von R. Schimmack u. H. Weinreich. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 6.—, geb. in Leinw. *M* 7.—
44. BURALI-FORRI, C., et MARCOLONGO, R., Analyse vectorielle générale. II. Applications à la mécanique et à la physique. Pavie 1913, Mattei & C. L. 5.—
45. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band 42, Jahrgang 1911, Heft 1. Berlin 1913, Reimer. *M* 19.—
46. KATZ, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, Band III Heft 8.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 8.20

47. LECAT, MAURICE, *Bibliographie du calcul des variations 1850—1913*. Gand 1913, Hoste. Fr. 4.—
48. LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A., MINKOWSKI, H., *Das Reaktivitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit Anmerkungen v. A. Sommerfeld u. Vorwort v. O. Blumenthal. (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften, Heft 2.)* Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 3.—; geb. *M* 3.60.
49. SCHREBER, K., *Hervorragende Leistungen der Technik. Erster Teil. Für reife Schüler. (Bastian Schmid naturwissenschaftl. Schülerbibliothek, 20.)* Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
50. THOMPSON, G., *Geometry of building construction*. London 1913, Routledge. 1 s. 6 d.
51. ZORETTI, L., *Leçons de mathématiques générales avec une préface de P. Appell*. Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 20.—.

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- Astronomical research, theoretical, A plan for an institute for*. Lund 1913, printed by Håkan Ohlsson.
- BERGMANN, HUGO, *Das Unendliche und die Zahl*. Halle a. S. 1913, Niemeyer. *M* 2.60.
- BOLYAI, WOLFGANG und JOHANN, *Geometrische Untersuchungen. Mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften hrsg. v. P. Stäckel*. 1. Teil: *Leben u. Schriften der beiden Bolyai*. 2. Teil: *Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. (Urkunden zur Geschichte der nichteuclidischen Geometrie, II 1 u. II 2.)* Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Zusammen *M* 28.—; geb. in Leinw. *M* 32.—.
- BORTKIEWICZ, L. V., *Die radioaktive Strahlung ...*, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 42.
- BRANFORD-SCHIMMACK-WEINREICH, *Betrachtungen über mathematische Erziehung*, s. N. B. 43.
- BURALI-FORTI, C., MARGOLONGO, R., *Analyse vectorielle générale, II*, s. N. B. 44.
- CHÂTELET, A., *Leçons sur la théorie des nombres. (Modules. Entiers algébriques. Réduction continue.)* Professeurs au Collège de France. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 5.50.
- COHN, E., *Physikalisches über Raum u. Zeit*, s. N. B. 24.
- Contributions from the Jefferson physical laboratory of Harvard University for the year 1912*. Vol. X. Cambridge, Mass., U. S. A.
- Constitution de la matière, Les idées modernes sur la*, s. N. B. 25.
- DARBOUX, GASTON, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Première partie. Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima. Deuxième édition, revue et augmentée*. Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 20.—.
- DENZOT, A., *Das Foucaultsche Pendel*, s. N. B. 14.
- EHRENFEST, P., *Zur Krise der Lichtäther-Hypothese*, s. N. B. 26.
- FILLINGER, PAUL, *Der Auftrieb in Talsperren (Sonderabdruck aus der „Österreichischen Wochenschrift f. den öffentlichen Baudienst“, Heft 31, 32, 33 u. 34, Jahrg. 1913.)* Wien 1913, Selbstverlag.
- HAAG, J., *Cours complet de Mathématiques spéciales. I. Algèbre et Analyse*. Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 9.—.

- HAAG, J., Exercices du cours de Mathématiques spéciales I. Algèbre et Analyse. Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 7.50.
- HEATH-KLIEM, Archimedes' Werke, s. N. B. 9.
- HENCKY, H., Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, s. N. B. 16.
- HENKEL, O., Graphische Statik, II, s. N. B. 17.
- HERMANN, E., Einförmige Bewegung des ebenen kreisverwandt-veränderlichen Systems, s. N. B. 18.
- KALÄHNE, A., Mathematisch-physikalische Akustik, s. N. B. 28.
- KAUFFMANN, H., Allgemeine u. physikalische Chemie, s. N. B. 29.
- KATZ, D., Psychologie und mathematischer Unterricht, s. N. B. 46.
- KOMMERELL, V., und KOMMERELL, K., Analytische Geometrie, für den Schulgebrauch bearbeitet. I. Teil. 2., verb. Aufl. Tübingen 1913, Laupp. *M* 2.40; geb. in Leinw. *M* 3.—.
- KRAUS, KONRAD, Grundriß der Arithmetik für Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalten. 6., umgearbeitete Aufl. Wien 1913, Pichlers Witwe & Sohn. K. 3.50.
- LANG, R., Experimentalphysik, II., s. N. B. 30.
- LÁSKA, W., Lehrbuch der Astronomie u. der mathematischen Geographie, II., s. N. B. 4.
- LECAT, M., Bibliographie du calcul des variations, s. N. B. 47.
- LORENTZ-EINSTEIN-MINKOWSKI, Das Relativitätsprinzip, s. N. B. 48.
- LORENZ, H., Lehrbuch der technischen Physik, s. N. B. 32.
- LÖWENSTEIN, L., Die Wissenschaft Demokrits, s. N. B. 10.
- LOTS, ALFRED,  $x^n + y^n = z^n$ ? Beweis des großen Fermatschen Satzes. Altenburg S. A. 1913, Selbstverlag.
- MÄRNNGHEN, P., Geheimnisse der Rechenkünstler, s. N. B. 1.
- MEYER, K., Entwicklung des Temperaturbegriffs, s. N. B. 11.
- MITZSCHERLING, A., Das Problem der Kreisteilung, s. N. B. 5.
- MOHR, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, s. N. B. 19.
- MOBITZ, F., Les moteurs thermiques, s. N. B. 33.
- NELL, A. M., Fünfstellige Logarithmen, s. N. B. 40.
- PRANDTL, L., Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung. Abdruck aus dem „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“, Bd. 4. Jena 1913, Fischer. *M* 1.60.
- RUDIO, FERDINAND, Die Elemente der analytischen Geometrie, zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. 2. Teil. Die analytische Geometrie des Raumes. 5. Aufl. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 3.—.
- Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1912. (Veröffentlichungen des königl. preußischen geodätischen Institutes, neue Folge, Nr. 58.) Berlin 1913.
- SCHIEFFERS, GEORG, Einführung in die Theorie der Flächen. Zweite, verbesserte u. vermehrte Auflage. Leipzig 1913, Veit & Comp. *M* 15.—, geb. *M* 16.—.
- SCHÖNFLIES, ARTUR, Entwicklung der Mengenlehre und ihre Anwendungen. Umarbeitung des im VIII. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts, gemeinsam mit Hans Hahn hrsg. I. Hälfte: Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 16.—; geb. in Leinw. *M* 18.—.
- SCHREBER, K., Hervorragende Leistungen der Technik, I, s. N. B. 49.
- SCHWETZER, JOS., Das Kristallzeichnen im Mineralogieunterricht der Oberrealschule. I. Teil. Die Formen des regulären Systems. Progr. Oberrealsch. Schwäb. Hall. 1913.
- SCHUSTER, F., Die moderne theoretische Physik und der Äther. Eine Verteidigung des materiellen Äthers. Karlsruhe 1913, Braun.

- SER, J., Essai de Linéométrie. I. partie. Paris 1913, Gauthier-Villars. Fr. 2.75.
- STAUBE, O., Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. (Teubners Sammlung Band XXXVIII.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.  
 $\mathcal{M}$  9.—; geb. in Leinw.  $\mathcal{M}$  10.—.
- SUPPANTSCHITSCH, RICH., Lehrbuch der Geometrie, Trigonometrie u. analytischen Geometrie für die VI. u. VII. Klasse der Realschulen. Wien 1913, Tempsky.  
 Geb. K. 4.—.
- THIEME, HERM., Leitfaden der Mathematik f. Gymnasien. 2. Teil: Die Oberstufe. 3. Aufl. Leipzig 1913, Freytag.  
 Geb.  $\mathcal{M}$  1.60.
- VERNERI, JOANNIS, de meteoroscopiis, s. N. B. 12.
- VOLTERRA, VITO, Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1912. Recueillies et rédigées par Joseph Pérès. Paris 1913, Gauthier-Villars.  
 Fr. 7.50.
- Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht, hrsg. vom Deutschen Ausschuß f. den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. (Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathem. u. naturw. Unterricht, Heft 17.) Leipzig u. Berlin 1913, Teubner.  
 $\mathcal{M}$  —.50.
- WITTING-GEBHARDT, Beispiele zur Geschichte der Mathematik, s. N. B. 13.
- БОЛОВУЕВЪ, С. К., ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Ферма'tа. Москва 1913.
- WOOD, P. W., The twisted cubic, with some account of the metrical properties of the cubical hyperbola. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, Nr. 14.) Cambridge 1913, University Press. 2 s. 6 d.
- ZART, A., Bausteine des Weltalls, s. N. B. 37.
- ZORETTI, L., Leçons de mathématiques générales, s. N. B. 51.

### Berichtigungen zu dem Aufsatz von Max Sergelius: Untersuchungen kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume.

(Diese Zeitschrift Band 61, Heft 4 (1913).)

- S. 367, Z. 8 v. u. lies: Untersuchung statt: Untersuchungen.
- „ 368, Z. 8 v. u. lies: Regelflächen statt: neue Typen von Flächen.
- „ 373, Z. 16 v. o. lies:  $\Sigma_b$  statt:  $S_b$ .
- „ 373, Z. 16 v. u. ist nach: Drehpunkt einzuschalten: z. B.
- „ 375, auf der Mitte der Seite, lies:  $\lambda_r = -\frac{d + b\sqrt{x^2 + y^2}}{a\sqrt{x^2 + y^2} + c}$ .
- „ 375, Gl. (8) lies im Nenner des Ausdrucks für  $x$ :  $\xi^2$  statt:  $\xi^3$ .
- „ 376, Gl. (9) und (10) müssen lauten:
- $$\begin{aligned} \xi &= x & \text{und} & & x &= \xi \\ \eta &= -y & & & y &= -\eta \end{aligned}$$
- „ 379, Z. 6 v. u. lies: unendlich fernen statt: fraglichen imaginären.
- „ 379, Z. 2 v. u. ist zu streichen: durch den Drehpunkt.
- „ 380, Gl. (13) lies:  $c$  statt:  $e$ .
- „ 382, Z. 1 v. u. ist nach gibt einzuschalten: wenn  $b$  und  $d$  negativ genommen werden.
- „ 383 ist Gl. (18) abzuändern in:

$$(\gamma^2 + \xi^2)[n^2 a^2 (\xi^2 + \eta^2) - (c\xi - nb)^2].$$

- S. 385, Z. 8 v. o. lies:  $\alpha$  statt:  $\varphi$ .  
 „ 385, Z. 11 v. u. lies:  $k_r$  statt:  $h_r$ .  
 „ 387, Z. 1 v. o. in der Tabelle zu Fig. 8 lies:  $c^2$  statt:  $b^2$ .  
 „ 389, Z. 13 v. u. lies:  $\Xi$  statt  $H$ .  
 „ 390 soll die Tabelle zu Fig. 9 lauten:  

$$s < 1 \quad \text{oder} \quad c^2 - n^2 a^2 < 0$$

$$q = 0 \quad \text{und} \quad p > q.$$
- „ 390, Z. 11 v. o. sind  $\xi$  und  $\eta$  zu vertauschen.  
 „ 391, Z. 12 v. o. lies:  $d\xi$  statt:  $d$ .  
 „ 391, Z. 7 v. u. lies:  $h_b$  statt:  $h_r$ .  
 „ 391, Z. 1 v. u. lies: (18) statt: (28), ferner: einen Doppelpunkt und einen Kegelschnitt statt: zwei Kreise, sowie: (19) statt: (29).  
 „ 392, Z. 19 v. o. lies: einen Doppelpunkt und einen Kegelschnitt statt: zwei Kreise.  
 „ 395, Z. 16 v. o. ist vor: affinen einzuschalten: kollinearen.  
 „ 401, Z. 8 v. u. lies:  $F_r$  statt:  $F_b$ .  
 „ 402, Z. 11 v. u. ist nach der zweiten Klammer der Exponent zu streichen.  
 „ 403, Z. 18 v. o. lies: Bei allen Zuordnungen ergeben sich Regelflächen.

Anm. Um Mißverständnisse zu vermeiden, will ich in bezug auf die §§ 6 und 13 folgendes hervorheben: Infolge der Entstehung der Korrespondenzen entsprechen im allgemeinen einem Kreis bzw. einer Kegelfläche des einen Systems zwei Kreise bzw. Kegelflächen des andern. Außer diesen Kurven bzw. Flächen kann es noch in beiden Systemen Bahn-Kurven bzw. -Flächen geben, welche den oben erwähnten Bedingungen (im ganzen oder teilweise) nicht genügen. Z. B. die Kurve  $f_r^\infty$  S. 380. Die Minimalgeraden dieser Kurve bilden sich auf die Kreispunkte ab. Dasselbe ist der Fall mit der Fläche  $F_r$  und  $F_r^\infty$  in § 13. Solche Kurven bzw. Flächen, die eine Ausnahme von der allgemeinen Zuordnung machen, nenne ich Übergangskurven bzw. -Flächen.



## Tangenten an Hellegleichen.

VON EMIL WAELSCH in Brünn.

Zur Darstellung der Helligkeitsverhältnisse einer parallel beleuchteten Fläche nimmt man in der darstellenden Geometrie unter gewissen Voraussetzungen an, daß die Helligkeit in einem Flächenpunkte gleich gesetzt werden kann dem Kosinus des Einfallswinkels des Lichtes. Mit dieser, wie bekannt, erheblich von der Wirklichkeit abweichenden Annahme erzielt man doch hinreichend plastische Bilder. Es ist dann von Interesse, für einen Schräg- oder Lotriß eine einfache Konstruktion der Tangente an die *Trennungslinie*<sup>1)</sup> oder eine andere *Isophote* zu kennen. Hierzu muß bekanntlich im Risse die Konjugierte zu einer Tangente der Fläche konstruiert werden, wenn im Risse die Krümmungsverhältnisse der Fläche im Berührungspunkt hinreichend bestimmt sind.

Nach Lösung dieser Aufgabe wird sie im folgenden spezialisiert für den Lotriß einer Drehfläche auf eine Projektionsebene, die senkrecht oder parallel zur Achse oder parallel zur Lichtmeridianebene<sup>2)</sup> ist.

Hierauf wird die analoge Aufgabe behandelt<sup>3)</sup> für Hellegleichen unter Zugrundelegung eines allgemeineren Helligkeitsgesetzes und dann spezialisiert für das Lambertsche Gesetz bei Parallelbeleuchtung (Isophengen) sowie für die Beleuchtung aus einem Zentrum<sup>4)</sup> und schließlich, um auch ein komplizierteres Beispiel zu geben, für das Lommel-Seeligersche Gesetz.<sup>5)</sup>

1) Vgl. die Konstruktionen der Tangente an die Trennungslinie für Drehflächen bei A. Mannheim, „Cours de géom. descr.“ S. 335 ff., und Rohn und Papperitz, Lehrb. d. darst. Geom. Bd. I, 3. Aufl., S. 338 u. S. 342 auch für Zentralbeleuchtung.

2) Vgl. A. Sucharda, „Über die Lichtgleichen der Rotationsflächen bei Parallelbeleuchtung“, Bull. intern. de l'Ac. des Sc. de Boh. 1903, S. 237, wo auf kinematisch-geometrischem Wege die Aufgabe für den Lotriß auf die Lichtmeridianebene in komplizierterer Weise gelöst wird.

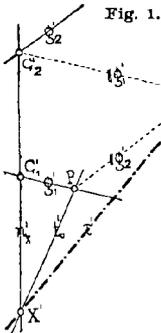
3) Hierbei wird zur Rechnung die kinematische Methode von G. Darboux: „Lecons sur la théor. gén. des surfaces“ verwendet.

4) Vgl. E. Waelsch: „Über die Isophoten einer Fläche bei Zentralbeleuchtung“, Sitzgber. d. k. Ak. z. Wien, Bd. 101, Abt. IIa (1892), S. 79.

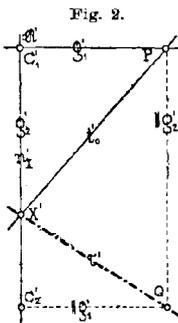
5) S. von geometrischer Seite: H. Burmester, Unters. d. wahren Hellegleichen auf d. Kugel nach d. Lommel-Seeligerschen Gesetz“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 58, S. 129, wo auch die zugehörige Literatur angegeben ist.

**1. Konstruktion des Risses der konjugierten Tangente.** Für den Punkt  $X$  der Fläche  $F$  bezeichnen:  $T_x$  die Tangentialebene,  $n_x$  die Normale,  $t_x$  ( $x = 1, 2$ ) die Hauptkrümmungstangenten,  $C_x$  den Hauptkrümmungsmittelpunkt für den durch  $t_x$  gehenden Normalschnitt,  $R_x$  den Hauptkrümmungsradius =  $\overline{XC_x}$ ,  $g_x$  die durch  $C_x$  zu  $t_x$  parallele Gerade.

Ist der Punkt  $X'$  zu  $X$  unendlichnahe auf der Tangente  $t$  von  $F$ , so bestimmen die Normalen  $n_x, n_{x'}$  ein windschiefes Element, dessen Normalenparaboloid  $P_t$  bekanntlich die zu  $t$  senkrechte Tangente  $t_0$  und die Geraden  $n_x, g_1, g_2$  enthält. Die konjugierte Tangente  $\tau$  von  $t$  ist die Schnittlinie von  $T_x$  und  $T_{x'}$ , und daher parallel zur kürzesten Transversalen  $h$  von  $n_x$  und  $n_{x'}$ . Da nun  $h$  die Achse von  $P_t$  ist, folgt: „ $\tau$  ist parallel zur Achse von  $P_t$ “, geht somit nach dem Berührungspunkt von  $P_t$  mit der unendlichfernen Ebene“.



Der Umriß von  $P_t$  bei Parallelprojektion auf eine Ebene  $\Pi$  ist eine Parabel  $P'_t$ , deren Achse parallel ist zur Projektion  $h'$  der Achse  $h$  von  $P_t$ . Diese Parabel besitzt die Tangenten  $n'_x, t'_0, g'_1, g'_2$ , so daß folgt: „ $\tau'$  ist parallel zur Achse der Parabel  $P'_t$ , welche die Geraden  $n'_x, t'_0, g'_1, g'_2$  berührt“. Mit Hilfe des Brianchonschen Satzes erhält man dann aus dem Fünfseit dieser und der unendlichfernen Geraden die Gerade  $\tau'$  als Verbindungslinie von  $X'$  mit dem unendlichfernen Punkt der Parabel  $P'_t$ ; es ergibt sich nach Fig. 1:  $\tau' = X'Q$ , wobei  $C'_2Q \parallel g'_1, PQ \parallel g'_2$  ist.



**2. Anwendung auf Drehflächen.** Die Fläche  $F$  sei jetzt eine Drehfläche mit der Achse  $\mathcal{U}$ ;  $p, m$  seien der durch  $X$  gehende Parallelkreis bzw. Meridian derselben. Dann sei  $C_1$  der Schnittpunkt von  $n_x$  mit  $\mathcal{U}$ ,  $C_2$  der Mittelpunkt des Krümmungskreises  $k$  von  $m$  für  $X$ , so daß  $g_1, g_2$  bzw. parallel sind zu den Tangenten von  $p$  bzw.  $m$ .

Wird auf eine zu  $\mathcal{U}$  senkrechte Ebene  $\Pi$  orthogonal projiziert, so fallen  $n'_x$  und  $g'_2$  zusammen, und die Parabel  $P'_t$  berührt  $n'_x$  in  $C'_2$ . Daher ergibt sich nach Obigem für  $\tau'$  die Konstruktion Fig. 2, in welcher  $g'_1$  und  $C'_2Q$  senkrecht  $n'_x$  und  $PQ$  parallel  $n'_x$  sind.  $t'_0$  kann gefunden werden als konjugierte Polare von  $t'$  bezüglich des Kreises mit dem Zentrum  $C'_2$  und dem Radius  $R_x$ .

1) Vgl. hierzu A. Mannheim, a. a. O. S. 300, wo dieser Satz die Form hat: „Die Tangente in einem Punkte  $a$  an die Direktrix einer Normalie der Fläche  $F$  und die Spur der Zentralebene für  $a$  dieser Normalie auf der Tangentialebene der Fläche in  $a$  sind konjugierte Tangenten“.

Bei Orthogonalprojektion auf eine Ebene, die  $\mathfrak{A}$  enthält, ergibt sich die Konstruktion der Fig. 3, wobei  $(X)$  ein Punkt von  $p$  in  $\Pi$  ist.  $t''_0$  ist die konjugierte Polare von  $t''$  bezüglich des Kreises mit dem Zentrum  $C_1$ , der durch  $(X)$  geht.

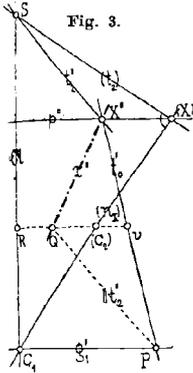


Fig. 3.

**3. Konstruktion des Risses der Tangente an die Trennungslinie und an Isophoten.** Bei Parallelbeleuchtung ist bekanntlich die Tangente  $\tau$  für einen Punkt  $X$  der Trennungslinie  $T$  auf der Fläche  $F$  konjugiert zum Lichtstrahl  $t$ , der  $F$  in  $X$  berührt, und allgemeiner ist die Tangente  $\tau_i$  des Punktes  $X$  an die durch diesen Punkt gehende Isophote konjugiert zur Orthogonalprojektion  $t$  des durch  $X$  gehenden Lichtstrahls  $l$  auf die Tangentialebene  $T_x$  (Dupin). Demnach gelten die bisherigen Konstruktionen auch für die Tangente der Trennungslinie bzw. einer Isophote.

Liegt speziell eine Drehfläche vor, und ist insbesondere  $\Pi$  identisch mit der Lichtmeridianebene, demnach parallel  $l$ , so ist  $t''_0$  für alle Punkte  $X$  des Parallelkreises  $p$  senkrecht zu  $l$ . Aus den ähnlichen Dreiecken mit parallelen Seiten  $PQX''$ ,  $SX''J_p$  (Fig. 3)

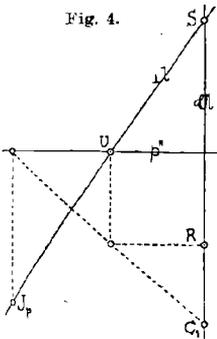


Fig. 4.

ergeben sich die ähnlichen Tripel  $SUJ_p$ ,  $PVX''$ , wo  $U$  der Schnittpunkt der Geraden  $SJ_p$  mit  $p''$  ist, so daß folgt<sup>1)</sup>: „Die Risse  $\tau''$  der Isophotentangenten der Punkte des Parallelkreises  $p$  gehen alle durch denselben Punkt  $J_p$  auf der durch  $S$  zu  $l$  senkrechten Geraden, für welchen die Tripel  $J_pUS$ ,  $(X)(C_2)C_1$  ähnlich sind“.

Der Punkt  $J_p$  kann daher etwa nach Fig. 4 konstruiert werden.<sup>2)</sup>

**4. Bestimmung der Hellegleichentangente  $\tau_H$  bei  $H(\varrho, \varrho', \gamma, \gamma')$ .** Es sei  $L$  der leuchtende Punkt und  $L'$  das Auge;  $\gamma, \gamma'$  seien der Einfallswinkel bzw. der Ausfallswinkel für den Punkt  $X$  der

1) Vgl. A. Sucharda, a. a. O. S. 240.

2) Wäre die Drehfläche vom zweiten Grade, mit dem Kegelschnitt  $K$  als Lichtmeridian, so ist der Lotriß  $T''$  der Trennungslinie der zum Lichtstrahl konjugierte Durchmesser von  $K$ . Die obige Konstruktion (Fig. 3) des Lotrisses  $\tau''$  (=  $T''$ ) der Tangente eines Punktes  $X$  der Trennungslinie ergibt dann eine Beziehung, die benützt werden kann, um den Krümmungsmittelpunkt  $(C_1)$  des Punktes  $(X)$  des Kegelschnittes  $K$  zu konstruieren. Verlegt man dann den Punkt  $(X)$  in den Schnittpunkt  $A$  von  $T''$  mit  $K$ , so ergibt sich die bekannte einfache Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $C_A$  von  $K$  für  $A$ : Ist  $P$  der Schnittpunkt der Normale  $n_A$  mit  $\mathfrak{A}$ , liegt ferner  $Q$  auf  $MA$ , wo  $M$  der Mittelpunkt von  $K$  ist, und ist  $PQ \perp n_A$ , so ist  $QC_A \perp \mathfrak{A}$ .

Fläche  $F$ ;  $\varrho, \varrho'$  seien die Entfernungen des Punktes  $X$  von  $L, L'$ , und es möge das Gesetz gelten: „Die Helligkeit  $H$  im Punkte  $X$  ist die Funktion:  $H(\varrho, \varrho', \gamma, \gamma')$ .“ Man kann dann, wenn  $n = \cos \gamma, n' = \cos \gamma'$  ist, setzen:

$$H = H(\varrho^2, \varrho'^2, n, n').$$

Für die Hellegleiche  $H = \text{const}$  auf  $F$ , welche durch  $X$  geht, soll die Tangente  $\tau_H$  in  $X$  bestimmt werden.

Hierzu seien<sup>1)</sup> die Koordinaten der Verschiebung eines Punktes  $L$  mit den Koordinaten  $x, y, z$  bezüglich des Trieders der Hauptkrümmungstangenten und der Normale  $n_x$ :

$$(1) \quad \begin{cases} dx + Adu + qzdu - (rdu + r_1dv)y, \\ dy + Cdv + (rdu + r_1dv)x - p_1zdv, \\ dz + p_1ydv - qxdv. \end{cases}$$

Diese Verschiebung muß verschwinden, falls  $L$  fest im Raume ist; es müssen also die Gleichungen gelten:

$$(2) \quad \begin{cases} dx = -Adu - qzdv + (rdu + r_1dv)y \\ dy = -Cdv - (rdu + r_1dv)x + p_1zdv \\ dz = -p_1ydv + qxdv. \end{cases}$$

Soll  $X$  unendlich wenig auf der Hellegleiche fortschreiten, so muß  $dH = 0$  sein, also muß, wenn:

$$\frac{\partial H}{\partial \varrho^2} = H_1, \quad \frac{\partial H}{\partial n} = H_2, \quad \frac{\partial H}{\partial \varrho'^2} = H'_1, \quad \frac{\partial H}{\partial n'} = H'_2$$

gesetzt wird, die Gleichung gelten:

$$(3) \quad H_1 d\varrho^2 + H_2 dn + H'_1 d\varrho'^2 + H'_2 dn' = 0.$$

Nun ist:

$$(4) \quad \begin{cases} d\varrho^2 = 2(xdx + ydy + zdz) = \text{nach (2)} = -2(Axdv + Cydv), \\ n = \frac{z}{\varrho}, \quad dn = \frac{dz}{\varrho} - \frac{1}{2} \frac{z}{\varrho^2} d\varrho^2. \end{cases}$$

Ebenso hat man für den festbleibenden Punkt  $L'$  mit den Koordinaten  $x', y', z'$ :

$$(4') \quad d\varrho'^2 = -2(Ax'dv + Cy'dv), \quad dn' = \frac{dz'}{\varrho'} - \frac{1}{2} \frac{z'}{\varrho'^2} d\varrho'^2.$$

Demnach ergibt sich aus (3):

$$(5) \quad 2H_1(Axdv + Cydv) - H_2 dn + 2H'_1(Ax'dv + Cy'dv) - H'_2 dn' = 0.$$

Da nun, wenn  $\omega$  der Winkel ist, den die Tangente  $\tau_H$  mit der  $x$ -Achse einschließt, gilt<sup>2)</sup>:

$$t = \text{tg } \omega = \frac{Cdv}{Adu}, \quad p_1 = \frac{C}{R_2}, \quad q = -\frac{A}{R_1},$$

1) S. Darboux, a. a. O. t. II, p. 373, Formel (B''').

2) S. Darboux, a. a. O. p. 386.

so ist:

$$(6) \quad P(x + yt) - Q\left(\frac{x}{R_1} + \frac{y}{R_2}t\right) + P'(x' + y't) - Q'\left(\frac{x'}{R_1} + \frac{y'}{R_2}t\right) = 0,$$

$$P = -2H_1 + H_2 \frac{z}{\rho^3}, \quad Q = H_2 \frac{1}{\rho}, \quad P' = -2H_1' + H_2' \frac{z'}{\rho'^3}, \quad Q' = H_2' \frac{1}{\rho'}.$$

Die Tangente  $\tau_H$  ist daher konjugiert zur Tangente mit der Steigung

$$(7) \quad \frac{(PR_2 - Q)y + (P'R_2 - Q')y'}{(PR_1 - Q)x + (P'R_1 - Q')x'}.$$

5. Hellegleichen bei dem Lambert'schen Gesetz:  $H = \frac{n}{\rho^2}$ . Hier ist  $H_1 = -\frac{n}{\rho^4}$ ,  $H_2 = \frac{1}{\rho^2}$ . Wird  $\frac{z}{\rho^2} = \frac{n}{\rho} = \frac{1}{h}$  gesetzt, wo  $h$  die dritte Koordinate des Schnittpunktes  $Q$  der Normalen  $n_x$  mit der in  $L$  auf  $LX$  senkrechten Ebene  $E$  ist, und wenn ferner  $\frac{y}{x} = t$  die Steigung der Tangente  $t$  der Fläche in  $X$  gegen die  $x$ -Achse ist, welche Tangente den Punkt  $X$  mit der Orthogonalprojektion des Punktes  $L$  auf  $T_x$  verbindet, so ergibt sich aus (6):

$$(8) \quad \left(\frac{h}{3R_2} - 1\right)tt + \frac{h}{3R_1} - 1 = 0.$$

Verändert sich nun der leuchtende Punkt auf der Geraden  $XL$ , so bleibt hiernach die Tangente  $t$  erhalten, es ändert sich  $h$ , also auch der Punkt  $P$  auf  $n_x$  mit  $z = \frac{h}{3}$ , und zwar nach (8) projektiv zum Strahlenbüschel, welches die Tangente  $\tau_H$  der Hellegleiche beschreibt. Nun entsprechen den Punkten mit den Werten:  $\frac{h}{3} = R_1, R_2, 0$  in dieser Projektivität die  $x$ -,  $y$ -Achse und die zu  $t$  senkrechte Tangente  $s$ , so daß sich ergibt: „Um hier die Tangente  $\tau_H$  an die Hellegleiche zu konstruieren, bestimme man den Schnittpunkt  $Q$  der in  $L$  auf  $LX$  senkrechten Ebene  $E$  mit der Normalen  $n_x$  und den Punkt  $P$  so, daß  $XP = \frac{XQ}{3}$  ist; dann entspricht  $\tau_H$  dieser Punkt  $P$  in der Projektivität, in welcher den Hauptkrümmungstangenten der Fläche die Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte, und der auf  $LX$  senkrechten Tangente  $s$  des Punktes  $X$  der Punkt  $X$  entsprechen“.<sup>1)</sup>

Die Tangente  $\tau_H$  ist bestimmt, wenn  $h$  und  $t$  gegeben sind, ändert sich also nicht, wenn  $L$  auf dem Kreise mit dem Durchmesser  $XQ$  variiert.

Der Schrägriß der Geraden, welche den Punkt  $P$  von  $n_x$  enthält, und die parallel ist zu der diesem Punkt  $P$  entsprechenden Tangente  $\tau_H$ , um-

1) Vgl. E. Waelsch, a. a. O.

hüllt die Parabel, welche die Schrägrisse  $n'_x, g'_1, g'_2, s'$  berührt. Dies ist aber die Parabel  $P'_t$  für den Punkt  $X$  bei einer Beleuchtung parallel zu  $t$ .  $\tau'_H$  ist dann parallel zu der Tangente dieser Parabel, welche durch den Punkt  $P'$  geht, für den  $X'P' = \frac{X'Q'}{3}$ , wenn  $Q$  der Schnittpunkt der in  $L$  auf  $LX$  senkrechten Ebene mit  $n_x$  ist.

Fällt  $L$  auf der Geraden  $LX$  ins Unendliche, so hat man Parallelbeleuchtung; es fällt dann auch  $P$  ins Unendliche, und es ergibt sich die schon in Art. 3 angegebene Konstruktion des Schrägrisses der Tangente an die Isophote.

**6. Parallelbeleuchtung.** Das Zentrum  $L$  falle ins Unendliche in der Richtung mit den Richtungskosinus:  $l, m, n$  und ebenso das Zentrum  $L'$  mit den Richtungskosinus  $l', m', n'$ . In dem Ausdruck für  $H$  kommt jetzt  $\varrho^2, \varrho'^2$  nicht vor, so daß sich hier aus  $dH = 0$  die Gleichung ergibt, die man erhält, indem man in (3)  $H_1 = 0, H'_1 = 0$  setzt, und als Gleichung für  $t$  diejenige, die man aus (6) für  $\varrho = \infty, \varrho' = \infty$  erhält, nämlich

$$(9) \quad R_2(H_2l + H'_2l') + R_1(H_2m + H'_2m')t = 0,$$

so daß die Tangente  $\tau_H$  konjugiert ist zur Tangente mit der Steigung:

$$(10) \quad \frac{H_2m + H'_2m'}{H_2l + H'_2l'}.$$

**7. Spezielle Fälle. I. Isophoten.** Das Helligkeitsgesetz kann angenommen werden als:  $H = n$ . Dann ist nach (10) die Tangente  $\tau_i$  der Isophote konjugiert zur Tangente mit der Steigung  $\frac{n}{l}$ , also konjugiert zur Orthogonalprojektion des Lichtstrahls auf  $T'_x$ .

**II. Isophengen:**  $H = nn'$ , das Auge unendlich fern in  $L'$ . Nach (10) ist die Tangente  $\tau_j$  an die Isophenge konjugiert zur Tangente  $t_j$  mit der Steigung:

$$\frac{mn' + nm'}{ln' + nl'}.$$

Diese Tangente  $t_j$  liegt aber in der Ebene, welche den Lichtstrahl  $l$  mit dem bezüglich  $T'_x$  zu  $l'$  symmetrischen Strahl verbindet; sie ist daher harmonisch zur Spur der Ebene durch  $l, l'$  auf  $T'_x$  bezüglich der Orthogonalprojektionen  $t, t'$  von  $l, l'$  auf  $T'_x$ , so daß folgt: „Nennt man Mittelstrahl  $l_m$  von  $l, l'$  die Verbindungslinie von  $X$  mit dem Mittelpunkte einer Strecke, deren Endpunkte auf  $l, l'$  liegen, und die parallel ist zu  $T'_x$  (vierter harmonischer Strahl von  $T'_x$  bezüglich  $l, l'$ ), so ist die Tangente an die Isophenge in  $X$  identisch mit der Tangente an die Isophote bei einer Beleuchtung parallel zu diesem Mittelstrahl  $l_m$ .“

III. *Hellegleichen für das Lommel-Seeligersche Gesetz*:  $H = \frac{nn'}{kn+n'}$ .

Nach (10) ist die Tangente  $\tau_L$  an diese Hellegleiche konjugiert zur Tangente  $t_L$  mit der Steigung:

$$\frac{n'^2 m + kn^2 m'}{n'^2 l + kn^2 l'}$$

Wäre in (10):  $\frac{H_2}{H_1} = \infty, 0, \frac{n'}{n}, \frac{n'^2}{kn^2}$ , so ergäbe sich  $\tau_H$  als konjugiert bzw. zur Tangente  $t, t', t_j, t_L$ . Die Tangente  $t_L$  kann daher in folgender Weise gefunden werden: Man beziehe das Tangentenbüschel eineindeutig auf die Zahlenreihe so, daß den Tangenten  $t, t', t_j$  die Zahlen  $\infty, 0, \frac{n'}{n}$  entsprechen und bestimme die Tangente  $t_k$ , welche hierauf der Zahl  $k$  entspricht; die Tangente  $t_L$  gibt dann (da das Produkt ihrer Zahl mit  $k$  gleich  $\frac{n'^2}{n^2}$  ist) mit  $t_k$  ein Paar der Strahleninvolution, in der  $t_j$  ein Doppelstrahl und  $t, t'$  ein Strahlenpaar ist.

Brünn, Oktober 1912.

## Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen.<sup>1)</sup>

Von OTTO BLUMENTHAL in Aachen.

Das mechanische Problem, das ich behandeln will, ist die Bestimmung des elastischen Spannungszustandes einer Kugelschale unter der Navierschen Annahme, daß bei der elastischen Verzerrung Normalen zur Kugelfläche wieder in Normalen der verzerrten Fläche übergehen. Der Nachweis der Zulässigkeit dieser Annahme bei kleinen Wandstärken und der Ansatz des Problems ist in den allgemeinen Formeln enthalten, die Love für die elastischen Deformationen dünner Schalen gegeben hat.<sup>2)</sup> Reißner hat kürzlich gezeigt<sup>3)</sup>, daß die vollständige Lösung

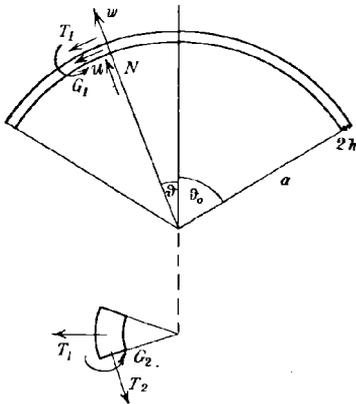
1) Erweiterte Fassung eines auf dem 5. Mathematiker-Kongreß in Cambridge gehaltenen Vortrags.

2) Love, *Treatise on Elasticity*, (2. Aufl.), S. 488—510; Übersetzung von Timpe, S. 586—613.

3) Festschrift Müller-Breslau (Leipzig, Kröner, 1912), S. 181—193. Reißner hat unter anderem gezeigt, daß der Einfluß der Belastung einer Kugelschale durch *Oberflächenkräfte* sich am einfachsten und raschesten durch ein Verfahren sukzessiver Approximationen, ausgehend von dem Fall der „Kugelmembran“, berechnen läßt. Es handelt sich alsdann zur vollständigen Lösung des Problems der belasteten

dieses Problems des Gleichgewichtes dünner Kugelschalen im Falle rotationssymmetrischer Belastung auf die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung führt. Ich werde mich hier mit der Diskussion dieser Gleichung beschäftigen, denn sie ist nach den gewöhnlichen Integrationsmethoden durch Reihenentwicklung praktisch nicht durchführbar; man muß vielmehr andere Methoden heranziehen, die man als *asymptotische Integration* bezeichnen kann.

1. Es handelt sich um folgende Aufgabe und folgende zu berechnende Größen: Eine Kugelkalotte von dem Radius  $a$  und der Dicke  $2h$



mit dem Öffnungswinkel  $\vartheta_0$  erfahre keine äußeren Kräfte, nur an dem freien Rande  $\vartheta_0$  mögen über den ganzen Rand gleichmäßig verteilte Spannungen und Biegemomente angreifen, unter deren Einfluß die Schale im Gleichgewicht ist. Es soll der Spannungs- und Dehnungszustand in der ganzen Kalotte berechnet werden. Die in Betracht kommenden Komponenten der Spannungen und Momente sind folgende:

Normalspannungen  $T_1, T_2$ , eine Schubspannung  $N$ , Biegemomente  $G_1, G_2$ ; außerdem Verschiebungen  $u, w$ .

Die Lösung des Problems wird zurückgeführt auf die Integration einer Differentialgleichung für  $N^1$ ):

$$(A) \quad \begin{aligned} & \sin^4 \vartheta N'''' + 2 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta N''' - \sin^2 \vartheta (3 - \sin^2 \vartheta) N'' \\ & + \sin \vartheta \cos \vartheta (3 + 2 \sin^2 \vartheta) N' + (b^4 \sin^4 \vartheta - 3) N = 0, \\ & b^4 = (1 - \sigma^2) \left( 1 + \frac{3a^2}{h^2} \right), \quad \sigma = \text{Poissonsches Verhältnis.} \end{aligned}$$

Kugelschale nur noch um die Ermittlung des Spannungszustandes in einer nur am Rande durch Kräfte und Momente beanspruchten Schale. Hierdurch erklärt sich die von mir gewählte Problemstellung. In einer Dissertation, die zurzeit unter meiner Leitung verfaßt wird, wird gezeigt, daß im Falle der Belastung der Kugelschale durch Eigengewicht das Reißnersche Verfahren der Trennung der Oberflächenkräfte und Randspannungen besonders einfach zum Ziele führt. Für eine bestimmte Beanspruchung des Randes lassen sich nämlich die Spannungen in geschlossener Form angeben. — Ein anderes, sehr sinnreiches Verfahren zur Lösung des Spannungsproblems in Kugelschalen hat kürzlich E. Meißner (Phys. Zeitschr. 14 (1913), S. 343—350) entwickelt. Er führt die Differentialgleichung 4. Ordnung auf hypergeometrische zurück.

1) Die Gleichung folgt aus den bei Reißner abgeleiteten Gleichungen (12a) und (13a) (S. 192) durch Elimination der mit den Krümmungsänderungen zusammenhängenden Größe  $K$ .

Aus  $N$  berechnen sich dann die übrigen Größen wie folgt:

$$T_1 = N \cot \vartheta, \quad T_2 = N',$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{3a(1-\sigma)} \left[ \frac{N''''}{1+\sigma} + \cot \vartheta N'' - \left( \frac{2-\sigma}{1+\sigma} \cot^2 \vartheta + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \right) N' \right. \\ \left. + \left( \sigma + \frac{2-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) \cot \vartheta N \right],$$

$$1) \quad G_2 = -\frac{h^2}{3a(1-\sigma)} \left[ \sigma \frac{N''''}{1+\sigma} + \cot \vartheta N'' + \left( \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \cot^2 \vartheta - \sigma \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \right) N' \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{1-2\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) \cot \vartheta N \right],$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{a}{h} \frac{1+\sigma}{E} \sin \vartheta (B+J),$$

$$\left. \begin{array}{l} B = \text{willkürliche Konstante,} \\ E = \text{Elastizitätsmodul,} \end{array} \right\} J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin \vartheta} (N \cot \vartheta - N') d\vartheta.$$

Die Abzählung der Integrationskonstanten ergibt in einfacher Weise die geometrischen und dynamischen Randbedingungen, unter denen Gleichgewicht möglich ist. Durch die Festsetzung, daß Spannungen und Biegemomente im Punkte  $\vartheta = 0$  der Kugel endlich bleiben sollen, die „Endlichkeitsbedingungen“, werden zwei Integrationskonstanten absorbiert, wie die Reihenentwicklung der Integrale der Gleichung (A) in der Umgebung von  $\vartheta = 0$  zeigt. Es sind dann noch drei Konstanten übrig, von denen eine nur in die Verschiebungen, nicht in die Kräfte eingeht. Dies entspricht der Tatsache, daß der ganzen Schale noch eine willkürliche Translation erteilt werden kann. Abgesehen von dieser Willkürlichkeit sind noch zwei Bedingungen am Rande vorgebar, die sich entweder auf die angreifenden Kräfte und Momente, oder auf die geometrische Gestalt des Randes beziehen können. Der Reißnersche Gedankengang (S. 343, Fußnote <sup>3)</sup>) verlangt z. B. die Vorgabe von  $N$  und  $G_1$  am Rande. Ein anderes einfaches Bedingungssystem wäre, daß der Rand etwas auseinander gedehnt ist, und kein Moment an ihm herrschen soll. Es soll aber hier auf spezielle Probleme nicht eingegangen werden.

2. Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß die Gleichung (A) für  $N$  einen nach Voraussetzung sehr großen Parameter  $b^4$  enthält. Da nämlich bei der ganzen Theorie die Kugelschale als sehr dünn vorausgesetzt werden muß, ist  $\frac{a}{h}$  notwendig eine große Zahl und demgemäß  $b$  groß. Dies hat zur Folge, daß die üblichen Reihenentwicklungen nach Potenzen von  $\vartheta$  (oder  $\sin \vartheta$ ) nur in der nächsten Umgebung des Nullpunktes mit praktisch brauchbarer Schnelligkeit konvergieren werden, während in einigermaßen größerer Entfernung (z. B.  $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ) in-

folge des großen Koeffizienten  $b^4$  die Glieder der Reihe zunächst sogar stark anwachsen werden, um erst nach einer mit wachsendem  $b$  gegen Unendlich gehenden Zahl von Gliedern abzunehmen. Diese Reihen sind also zur Übersicht über den Verlauf der Erscheinung gänzlich ungeeignet. *Hier greift die asymptotische Integration ein.*

Die asymptotische Integration setzt sich zur Aufgabe, gerade diese großen Werte des Parameters zu berücksichtigen, indem sie die Integrale nach absteigenden Potenzen des Parameters entwickelt. Das Verfahren wird wohl am übersichtlichsten und für die Rechnung am bequemsten so dargestellt.<sup>1)</sup>

Durch die Substitution  $N = \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} M$  wird zuerst das Glied mit dem 3. Differentialquotienten weggeschafft und für  $M$  folgende Gleichung erhalten:

$$(B) \quad M'''' + a_2 M'' + a_1 M' + (b^4 + a_0) M = 0,$$

$$a_2 = -\frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + \frac{5}{2}, \quad a_1 = 3 \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta}, \quad a_0 = -\frac{63}{16} \frac{1}{\sin^4 \vartheta} + \frac{9}{8} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} + \frac{9}{16}.$$

Ist nun  $\vartheta$  von Null verschieden, so werden  $a_0, a_1, a_2$  mit wachsendem  $b$  gegen  $b^4$  verschwinden. Man kann daraus schließen, daß die Integrale  $M$  bei genügend großem  $b$  näherungsweise übereinstimmen mit den Lösungen der vereinfachten Gleichung

$$(B') \quad M'''' + b^4 M = 0.$$

Die Theorie der asymptotischen Integration hat die Aufgabe, diesen Schluß genau zu begründen und den Fehler der Näherung abzuschätzen.

3. Ich will die Fehlerabschätzung ausführlich geben, weil ich sie in hohem Maße werde benutzen müssen.<sup>2)</sup> Seien

$$\lambda_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \lambda_2 = \frac{b}{\sqrt{2}}(1-i), \quad \lambda_3 = \frac{b}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad \lambda_4 = \frac{b}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

die vier Wurzeln der Gleichung  $\lambda^4 + b^4 = 0$ , und  $M$  ein Integral von (B). Wir betrachten den Ausdruck

$$(1') \quad y(M) = M - \frac{1}{4b^4} \left[ \sum_1^4 \lambda_i e^{\lambda_i \vartheta} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} e^{-\lambda_i \vartheta} (a_2 M'' + a_1 M' + a_0 M) d\vartheta \right],$$

1) Siehe auch meine Darstellung des Verfahrens im Arch. Math. Phys. (3) 19 (1912), S. 137f.

2) Ich habe diese Methode der Restabschätzung im Arch. Math. Phys. (3) 19 (1912), S. 141 ff. veröffentlicht und damals für neu gehalten. Seitdem bin ich durch Herrn Böcher in freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht worden, daß dieselbe Methode bereits 1908 von Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc. 9, angegeben worden ist.

wo mit  $\vartheta_1 > 0$  die untere Grenze des Integrationsintervalls bezeichnet sei, das sich von dort nach  $\vartheta_0$  erstreckt. Er genügt der Gleichung

$$y'''' + b^4 y = 0,$$

und also läßt sich  $M = M_1$  so bestimmen, daß

$$(1'') \quad y(M_1) = e^{\lambda_1 \vartheta}.$$

Wir setzen

$$(1) \quad \eta_1 = M_1 - e^{\lambda_1 \vartheta}$$

und schätzen  $\eta_1$  ab. Es ist

$$(2) \quad a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1 = (\lambda_1^2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_0) e^{\lambda_1 \vartheta} \\ + \frac{1}{4b^4} \sum_1^4 (\lambda_i^3 a_2 + \lambda_i^2 a_1 + \lambda_i a_0) e^{\lambda_i \vartheta} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} e^{-\lambda_i \vartheta} (a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1) d\vartheta.$$

Aus dieser Gleichung finden wir nach einem auf Liouville zurückgehenden Verfahren zunächst eine obere Grenze für  $|a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1|$ . Dazu gebrauchen wir eine Abschätzung der Integrale der rechten Seite, die ich sofort in einer für die praktischen Zwecke besonders geeigneten allgemeinen Form geben will. Sei  $\varphi(\vartheta)$  eine im Intervall  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  nirgends verschwindende, positive, stetige Funktion. Dann ist

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} e^{-\lambda_i \vartheta} (a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1) d\vartheta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} e^{(\lambda_1 - \lambda_i) \vartheta} \left( \frac{a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1}{\varphi(\vartheta)} e^{-\lambda_1 \vartheta} \right) \varphi(\vartheta) d\vartheta,$$

und daher, da  $e^{(\lambda_1 - \lambda_i) \vartheta}$  nirgends in dem Intervall größeren absoluten Betrag hat als am Punkte  $\vartheta$ ,

$$\left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} e^{-\lambda_i \vartheta} (a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1) d\vartheta \right| \\ < |e^{(\lambda_1 - \lambda_i) \vartheta}| \cdot \max_{(\vartheta_1, \vartheta)} \left| \frac{a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1}{\varphi(\vartheta)} e^{-\lambda_1 \vartheta} \right| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \varphi(\vartheta) d\vartheta.$$

Daraus folgt aber, bei Einsatz in (2),

$$\max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \left| \frac{a_2 M_1'' + a_1 M_1' + a_0 M_1}{\varphi(\vartheta)} e^{-\lambda_1 \vartheta} \right| < \frac{\max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \left| \frac{\lambda_1^2 a_2 + \lambda_1 a_1 + a_0}{\varphi(\vartheta)} \right|}{1 - \frac{1}{4b^4} \max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \sum_1^4 \left| \frac{\lambda_i (\lambda_i^2 a_2 + \lambda_i a_1 + a_0)}{\varphi(\vartheta)} \right| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \varphi(\vartheta) d\vartheta} \\ < \frac{\max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \frac{b^2 |a_2| + |b| |a_1| + |a_0|}{\varphi(\vartheta)}}{1 - \frac{1}{b^8} \max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \frac{b^2 |a_2| + |b| |a_1| + |a_0|}{\varphi(\vartheta)} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_0} \varphi(\vartheta) d\vartheta} \quad 1)$$

1) In dem Abdruck meines Vortrags in Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Bd. II, S. 319—327) findet sich in dieser Formel und den aus ihr folgenden ein belangloser Rechenfehler.

und dieselbe Ungleichung gilt auch für die den Funktionen  $e^{\lambda \vartheta}$  usw. zugeordneten Integrale  $M_2, M_3, M_4$ . Setzen wir die gefundene obere Grenze nochmals in (1), (1'), (1'') ein, so erhalten wir für die Reste  $\eta$  folgende Abschätzung:

$$(3) \quad \eta = e^{\lambda \vartheta} \frac{\Theta}{b^3}, \quad |\Theta| < \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_0} \varphi(\vartheta) d\vartheta \frac{\max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \frac{b^2 |a_2| + b |a_1| + |a_0|}{\varphi(\vartheta)}}{1 - \frac{1}{b^3} \max_{(\vartheta_1, \vartheta_0)} \frac{b^2 |a_2| + b |a_1| + |a_0|}{\varphi(\vartheta)} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_0} \varphi(\vartheta) d\vartheta}.$$

Im Falle der Gleichung (B) erhält man eine günstige Abschätzung von  $\eta$ , indem man  $\varphi = \frac{1}{\sin^2 \vartheta}$  setzt. Es ergibt sich so mit unwesentlichen Vernachlässigungen

$$(3') \quad |\Theta| < \cot \vartheta_1 \frac{\frac{3b^2}{2} + 3b \cot \vartheta_1 + \frac{63}{16} \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1}}{1 - \frac{1}{b^3} \cot \vartheta_1 \left( \frac{3b^2}{2} + 3b \cot \vartheta_1 + \frac{63}{16} \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \right)}.$$

Die Ungleichung (3) besagt, daß  $\eta$  von der Ordnung  $\left| \frac{e^{\lambda \vartheta}}{b} \right|$  ist. Aus der Ungleichung (3') schließt man spezieller, daß der Rest mit wachsendem  $b$  gegen das Hauptglied verschwindet, wenn man innerhalb solcher Intervalle  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  bleibt, für die mit  $b$  auch  $b \sin \vartheta_1$  unendlich wird. Dasselbe gilt für die Differentialquotienten aller Ordnungen. Daneben betone ich auch das negative Ergebnis: *am Punkte  $\vartheta = 0$  gilt die asymptotische Darstellung nicht.*

4. Es lassen sich also in den gekennzeichneten Intervallen  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  mit relativ verschwindendem Fehler vier Integrale der Gleichung (A) in folgender reeller Form ansetzen:

$$(4) \quad \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} e^{\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta, & N_2 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} e^{\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta, \\ N_3 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} e^{-\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta, & N_4 &= \frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}} e^{-\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta. \end{aligned}$$

Jetzt aber kommt der schwierigste Punkt. Es handelt sich darum, wie sich das den Endlichkeitsbedingungen für  $\vartheta = 0$  und Randbedingungen für  $\vartheta = \vartheta_0$  genügende Integral von (A) aus diesen partikulären Integralen zusammensetzt. Die Randbedingungen machen keine Schwierigkeit, da ja für  $\vartheta = \vartheta_0$  die asymptotische Darstellung gültig ist. Ich komme darauf zurück (Nr. 7). Dagegen ist es unmöglich, auf direktem Wege zu entscheiden, welche der Integrale (4) die *Endlichkeitsbedingungen* am Punkte  $\vartheta = 0$  befriedigen: denn an diesem Punkte versagt

ja die asymptotische Darstellung. Man kann aber die Entscheidung zunächst auf unstrengem Wege aus der physikalischen Anschauung ableiten, indem man als Tatsache annimmt, daß die Spannungen  $N$  von dem Rande nach dem Pole  $\vartheta = 0$  stark abklingen. Die einzigen Funktionen (4), die diese Eigenschaft haben, sind die Funktionen  $N_1$  und  $N_2$ <sup>1)</sup>, während  $N_3$  und  $N_4$  mit wachsender Entfernung von dem freien Rande größer werden. Unser Integral der Gleichung (A) wird also asymptotisch als

$$(5) \quad N = A_1 N_1 + A_2 N_2$$

anzusetzen sein, und die Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  werden dann zur Erfüllung zweier Bedingungen am freien Rande gerade ausreichen.

Die Kräfte, und ebenso, nach den Gleichungen (A'), die Biegemomente und Verrückungen, stellen sich daher als Schwingungen dar, die von dem freien Rande nach dem Pol exponentiell sehr rasch abklingen. Das logarithmische Dekrement auf die Bogeneinheit ist nämlich  $\frac{b}{\sqrt{2}}$ . Dieses übersichtliche Resultat hätte mit Hilfe der gewöhnlichen Integrationsmethoden durch Potenzreihen nicht gewonnen werden können.

5. Es bleibt übrig, streng nachzuweisen, daß der Ansatz (5) richtig ist, d. h. daß die beiden asymptotischen Integrale  $N_3$  und  $N_4$  in die am Punkte  $\vartheta = 0$  die Endlichkeitsbedingungen befriedigenden Integrale nicht eingehen. Eine Aufgabe dieser Art findet sich wohl in den meisten praktisch wichtigen Problemen asymptotischer Integration. Sie läßt sich allgemein so formulieren: ein exaktes Integral einer Differentialgleichung ist festgelegt durch Bedingungen an einem Punkte, an dem die asymptotische Darstellung versagt: trotzdem sollen auf einem Umweg die Integrationskonstanten der asymptotischen Darstellung bestimmt werden. Ein in manchen Fällen anwendbares spezielles Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe habe ich an dem Beispiel der Legendreschen Polynome in meiner zitierten Arbeit durchgeführt.<sup>2)</sup> Dieses Verfahren ist aber bei unserem jetzigen Beispiele nicht anwendbar. Wohl aber kann ich die Frage auch hier exakt entscheiden, wenn auch auf einem nicht eleganten Wege. Dafür hat die hier befolgte Methode den Vorteil großer Allgemeinheit und dürfte wohl bei den meisten Randwertaufgaben, wo die asymptotische Darstellung am Rande versagt, im Innern

1) Wir sprechen dabei nur von solchen Intervallen ( $\vartheta_1, \vartheta_0$ ), die in genügender Entfernung von  $\vartheta = 0$  bleiben, sodaß die langsame Abnahme des Nenners  $\sqrt{\sin \vartheta}$  nicht in Betracht kommt.

2) Siehe S. 150—163.

des Intervalls aber überall gültig ist, die Bestimmung der asymptotischen Integrationskonstanten ermöglichen.<sup>1)</sup>

Ich gehe aus von der Darstellung (3') des Restes. Man sieht leicht, daß, bei genügend großem  $b$ , für  $\vartheta_1 \geq \frac{9}{\sqrt{2}b}$  der Rest kleiner als  $\frac{1}{2}$  des Hauptgliedes ist. Andererseits lassen sich die den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale für Werte  $\vartheta$ , die etwa kleiner sind als  $\frac{15}{b}$  ohne erhebliche Schwierigkeiten numerisch berechnen. *Ich werde zeigen, daß man durch Berechnung eines den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrals für die vier festen Werte*

$$(6') \quad \vartheta_1' = \frac{3\pi\sqrt{2}}{2b}, \quad \vartheta_1'' = 2\pi\frac{\sqrt{2}}{b}; \quad \vartheta_2' = \frac{5\pi\sqrt{2}}{2b}, \quad \vartheta_2'' = 3\pi\frac{\sqrt{2}}{b},$$

die sämtlich den Ungleichungen

$$\frac{9}{\sqrt{2}b} < \vartheta < \frac{14}{b}$$

genügen, den vollständigen Nachweis liefern kann, daß das Integral sich in der Form (5) darstellt.

Ich bemerke zunächst, daß man diesen Nachweis nur für genügend große Werte von  $b$  zu liefern hat. Aus den Entwicklungen des § 3 meiner (S. 346, Fußn. 1) zitierten Arbeit folgt nämlich, daß die Koeffizienten der Darstellung eines Integrals durch die asymptotischen Fundamentalintegrale immer dann *analytische Funktionen des Parameters*  $b$  sind, wenn dies für das Integral selbst der Fall ist. Sind also die Koeffizienten von  $N_3$  und  $N_4$  in dieser Darstellung für alle genügend großen Werte von  $b$  Null, so sind sie es auch für alle Werte überhaupt. Es ist aber unmittelbar ersichtlich, daß diejenigen den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale, die wir im folgenden benutzen werden, analytische Funktionen von  $b$  sind.

Ich will zuerst über die Auswahl dieser Integrale und ihre Berechnung für die vier Werte (6') sprechen.

Die einfachsten Entwicklungen der den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale  $N$  schreiten nach ungeraden Potenzen von  $\sin \vartheta$  fort.<sup>2)</sup> Schreiben wir  $N = c_{2n+1} \sin^{2n+1} \vartheta$ , so sind die beiden einfachsten Fundamentalintegrale definiert durch  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 0$  und  $c_1 = 0$ ,

1) Noch schwierigere Probleme ergeben sich, wenn die asymptotische Darstellung in einem Punkte des Intervallinneren versagt. Siehe meine demnächst in den Sitzber. Ak. München erscheinende Arbeit „Zum Turbulenzproblem“.

2) Man erhält sie, indem man in die Differentialgleichung (A)  $s = \sin \vartheta$  als unabhängige Variable einführt und um den Punkt  $s = 0$  herum entwickelt.

$c_3 = 1$ . Die Rekursion für die Koeffizienten setzen wir am zweckmäßigsten so an, daß wir  $c_n \sin^2 \vartheta = d_n$  und  $\sin \vartheta = \frac{a}{b}$  einführen. Dann wird  $N = \sum d_{2n+1}$ , und die Rekursion lautet:

$$d_{2n+3} = 2 \frac{(2n+1)2n}{(2n+4)(2n+2)} \frac{a^2}{b^2} d_{2n+1} - \left[ \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-2)}{(2n+4)(2n+2)^2} \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4}{(2n+4)(2n+2)^2 2n} \right] d_{2n-1}$$

Aus dieser Formel schließt man, daß bei genügend großem  $b$  für alle  $a < 14$  von  $n = 12$  ab die Reihe für  $N$  rascher als eine geometrische Reihe vom Quotienten  $\frac{1}{10}$  konvergiert, weil jedes Glied kleiner als  $\frac{1}{10}$  des größeren der beiden vorausgehenden wird. Wir denken uns  $b$  so groß gewählt, daß diese Bedingung erfüllt ist, und daß ferner bei Einhaltung fünfstelliger Genauigkeit in der Berechnung der 15 ersten Glieder für dasselbe Intervall  $a < 14$  der  $\sin \frac{a}{b}$  durch  $\frac{a}{b}$  und die Rekursionsformel durch

$$d_{2n+3} = - \frac{a^4}{(2n+4)(2n+2)^2 2n} d_{2n-1}$$

ersetzt werden kann. Dann zeigt die Ausführung der Rechnung, daß man für die vier Punkte (6') die Werte der beiden oben erwähnten einfachsten Fundamentalintegrale durch Summierung von höchstens 10 Gliedern mit der für unsere Zwecke genügenden (dreistelligen) Genauigkeit erhält. Es ergeben sich z. B. für das durch  $c_1 = 1, c_3 = 0$  charakterisierte Integral bzw. für die daraus hervorgehende Funktion  $M$  für alle genügend großen  $b$  die Werte

$$(6'') \quad \begin{aligned} M(\vartheta'_1) &= - \frac{1}{b^2} 77,4, & M(\vartheta''_1) &= \frac{1}{b^2} 172, \\ M(\vartheta'_2) &= \frac{1}{b^2} 1840, & M(\vartheta''_2) &= - \frac{1}{b^2} 3900, \end{aligned}$$

(wobei die dritte Stelle auf wenige Einheiten unsicher ist).<sup>1)</sup>

Nach dieser Vorbereitung komme ich zu dem angekündigten Nachweis, daß die den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale die asymptotische Darstellung (5) besitzen. Ich zerlege diesen Beweis in drei Schritte.

1) Für das durch  $c_1 = 0, c_3 = 1$  bestimmte Integral ergibt sich

$$\begin{aligned} M(\vartheta'_1) &= - \frac{1}{b^2} 289,2, & M(\vartheta''_1) &= - \frac{1}{b^2} 3023, \\ M(\vartheta'_2) &= \frac{1}{b^2} 6523, & M(\vartheta''_2) &= \frac{1}{b^2} 70940. \end{aligned}$$

Für die Ausführung der Zahlenrechnung sage ich Herrn Karl Töpfer in Neuwied besten Dank.

A. Ich betrachte zuerst die asymptotische Darstellung eines (reellen) solchen Integrals in dem Intervall  $\left(\frac{9}{\sqrt{2}b}, \vartheta_0\right)$ . Sie sei, allgemein angesetzt,

$$(5a) \quad N = R_1(a_1 N_1 + b_1 N_2) + R_2(a_2 N_3 + b_2 N_4), \\ R_1 > 0, R_2 > 0, a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1.$$

Ich werde auf Grund der erhaltenen numerischen Resultate beweisen, daß der Quotient  $\frac{R_2}{R_1}$  für alle genügend großen  $b$  unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Zu diesem Zwecke setze ich zunächst an Stelle der asymptotischen Darstellung (5a) durch Beifügung der Reste eine exakte, wobei ich gleichzeitig der Einfachheit halber zu den Funktionen  $M$  zurückkehre. Die exakte Darstellung hätte folgende Form:

$$(5b) \quad M = \begin{cases} R_1 e^{\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \left[ (a_1 + \varrho_1(\vartheta) \alpha_1(\vartheta)) \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta + (b_1 + \varrho_1(\vartheta) \beta_1(\vartheta)) \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta \right] \\ + R_2 e^{-\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \left[ (a_2 + \varrho_2(\vartheta) \alpha_2(\vartheta)) \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta + (b_2 + \varrho_2(\vartheta) \beta_2(\vartheta)) \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta \right], \\ \alpha_1^2(\vartheta) + \beta_1^2(\vartheta) = \alpha_2^2(\vartheta) + \beta_2^2(\vartheta) = 1. \end{cases}$$

Die Tatsache, daß in dem betrachteten Intervall die Reste kleiner als  $\frac{1}{2}$  des Hauptgliedes sind, drückt sich darin aus, daß für alle Werte  $\vartheta$  dieses Intervalles

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1(\vartheta) \\ \varrho_2(\vartheta) \end{matrix} \right\} < \frac{1}{2}.$$

Nunmehr bilden wir die folgende Größe:

$$(6) \quad Q(\vartheta'_1) = \frac{M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta''_1)}{M^2(\vartheta'_2) + e^\pi M^2(\vartheta''_2)}.$$

Setzt man in den Zähler den Wert (5b) von  $M$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta''_1) \\ &= R_1^2 e^{-3\pi} \left[ \{(a_2 + \varrho_2(\vartheta'_1) \alpha_2(\vartheta'_1))^2 + (b_2 + \varrho_2(\vartheta''_1) \beta_2(\vartheta''_1))^2\} + \frac{R_1}{R_2} \Phi_1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \Phi_2 \right], \end{aligned}$$

wo  $\Phi_1, \Phi_2$  von  $R_1$  und  $R_2$  unabhängige Ausdrücke bedeuten, die für alle Werte von  $b$  unterhalb einer endlichen Schranke bleiben. Die beiden letzten Glieder gehen also mit wachsendem  $\frac{R_2}{R_1}$  gegen Null.

Das erste Glied wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned} & (a_2 + \varrho_2(\vartheta'_1) \alpha_2(\vartheta'_1))^2 + (b_2 + \varrho_2(\vartheta''_1) \beta_2(\vartheta''_1))^2 \\ &= 1 + \varrho_2^2(\vartheta'_1) \alpha_2^2(\vartheta'_1) + \varrho_2^2(\vartheta''_1) \beta_2^2(\vartheta''_1) + 2(a_2 \varrho_2(\vartheta'_1) \alpha_2(\vartheta'_1) + b_2 \varrho_2(\vartheta''_1) \beta_2(\vartheta''_1)). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß die letzte Klammer dem absoluten Betrag nach kleiner als

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2 \sqrt{\varrho_2^2(\vartheta'_1) \alpha_2^2(\vartheta'_1) + \varrho_2^2(\vartheta''_1) \beta_2^2(\vartheta''_1)}} = \sqrt{\varrho_2^2(\vartheta'_1) \alpha_2^2(\vartheta'_1) + \varrho_2^2(\vartheta''_1) \beta_2^2(\vartheta''_1)}$$

ist, so können wir schreiben:

$$(a_2 + \varrho_2(\vartheta'_1) \alpha_2(\vartheta'_1))^2 + (b_2 + \varrho_2(\vartheta''_1) \beta_2(\vartheta''_1))^2 = (1 + \sigma_1 \sqrt{2} \tau_1)^2 \\ [-1 < \sigma_1 < +1],$$

wo  $\tau_1$  den größeren der beiden Werte  $\varrho_2(\vartheta'_1)$ ,  $\varrho_2(\vartheta''_1)$  bezeichnet. Es folgt also:

$$M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta''_1) = R_2^2 e^{-3\pi} \left[ (1 + \sigma_1 \sqrt{2} \tau_1)^2 + \frac{R_1}{R_2} \Phi_1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \Phi_2 \right].$$

Machen wir die gleiche Rechnung für den Nenner  $M^2(\vartheta'_2) + e^\pi M^2(\vartheta''_2)$  und bilden den Quotienten  $Q$ , so kommt

$$(6'') \quad Q(\vartheta'_1) = e^{2\pi} \frac{(1 + \sigma_1 \sqrt{2} \tau_1)^2 + \frac{R_1}{R_2} \Phi_1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \Phi_2}{(1 + \sigma_2 \sqrt{2} \tau_2)^2 + \frac{R_1}{R_2} \Phi_3 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \Phi_4}.$$

Da  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , wie erwähnt,  $< \frac{1}{2}$  sind, gibt es eine Zahl  $C$  derart, daß für  $\frac{R_2}{R_1} > C$  der Zähler  $> \frac{1}{12}$ , der Nenner  $< \frac{35}{12}$  ist. Für  $\frac{R_1}{R_2} > C$  wäre daher

$$Q(\vartheta'_1) > \frac{e^{2\pi}}{35}.$$

Nun aber zeigt unsere numerische Rechnung, daß diese Ungleichung nicht erfüllt ist. Setzt man nämlich die errechneten Werte von  $M(\vartheta'_1)$ ,  $M(\vartheta''_1)$ ,  $M(\vartheta'_2)$ ,  $M(\vartheta''_2)$  in (6) ein, so ergeben sich für beide den Endlichkeitsbedingungen genügenden Fundamentalintegrale Werte, die sehr nahe bei  $e^{-2\pi}$  liegen, nämlich  $\left(\frac{1}{22,7}\right)^2$  und  $\left(\frac{1}{23,3}\right)^2$ .

Daraus folgt, daß  $\frac{R_2}{R_1}$  für alle Werte  $b$  kleiner als die endliche Zahl  $C$  bleiben muß, was zu beweisen war.<sup>1)</sup>

1) Man kann weitergehen und aus dem berechneten Werte von  $Q$  genauere obere und untere Grenzen für  $\frac{R_2}{R_1}$  folgern. Es ergibt sich die untere Grenze Null. — Die numerische Rechnung läßt sich erheblich abkürzen, indem man nur mit den 3 Punkten  $\vartheta'_1$ ,  $\vartheta''_1$ ,  $\vartheta'_2$  operiert und den Quotienten

$$\frac{M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta''_1)}{M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta'_2)}$$

betrachtet. Dieser müßte für genügend großes  $\frac{R_2}{R_1}$  Werte  $> \frac{e^\pi}{35}$  annehmen, ist aber in Wahrheit  $< 1$ . Ich habe den symmetrischen Quotienten  $Q$  in Hinblick auf die Anwendung unter C. bevorzugt.

B. Wir suchen jetzt die asymptotische Darstellung der den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale in einem Teilintervall des in A. betrachteten, nämlich in dem Intervall  $\left(\frac{\log^2 b}{b}, \vartheta_0\right)$ . Hier sind die Quotienten  $\frac{N_3}{N_1}$  und  $\frac{N_4}{N_2} = e^{-\sqrt{2}b\vartheta} > e^{-\sqrt{2}\log^2 b}$  von geringerer Größenordnung als jede Potenz  $\frac{1}{b^n}$ , und da nach dem eben Bewiesenen  $\frac{R_2}{R_1}$  für alle  $b$  unter einer endlichen Grenze bleibt, können wir in der Darstellung (5a) die beiden letzten Glieder asymptotisch gegen die beiden ersten weglassen.<sup>1)</sup> Der hierdurch begangene Fehler ist sogar so klein, daß wir ihn in der Restabschätzung nicht besonders zum Ausdruck zu bringen haben. Demnach gilt in dem Intervall  $\left(\frac{\log^2 b}{b}, \vartheta_0\right)$  die zu beweisende Darstellung (5), mit einem Fehler, der  $\frac{1}{2}$  des Näherungswertes nicht übersteigt.<sup>2)</sup>

C. Hiermit ist der gewünschte Nachweis in der Hauptsache geliefert. Es fehlt aber doch noch ein wichtiger Punkt. Wenn wir behaupten, daß die den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale in jedem Intervall  $(\vartheta, \vartheta_0)$  ( $\vartheta > 0$ ) die asymptotische Darstellung (5) gestatten, so wollen wir damit sagen, daß der Fehler in diesem Intervall mit wachsendem  $b$  prozentual unter jede Grenze sinkt. Dies haben wir aber bis jetzt noch nicht bewiesen; wir wissen vielmehr nur, daß der Fehler in diesem Intervall, als einem Teilintervall des unter B. betrachteten, kleiner als 50% ist.

Die angezeigte Lücke läßt sich auf Grund unserer bisherigen Ergebnisse durch eine sinngemäße Wiederholung des unter A. angewandten Verfahrens ausfüllen. Es sei  $\vartheta_1$  ein fester oder auch von  $b$  abhängiger Wert des Intervalles  $\left(\frac{\log^2 b}{b}, \vartheta_0\right)$ . Wir betrachten die asymptotische Darstellung der den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale in dem Intervall  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  und nehmen sie wieder in der allgemeinen Form (5a), oder mit Beifügung der Reste in der Form (5b), an. Die in dieser Form auftretenden Größen  $\varrho_1(\vartheta)$ ,  $\varrho_2(\vartheta)$  sind dann kleiner als der in  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  bestehende, durch (3') gegebene Maximalrest,

1) An Stelle von  $\frac{\log^2 b}{b}$  hätte man auch einfacher  $\frac{\log b}{b}$  wählen können. Unsere Wahl erfolgte im Hinblick auf die entsprechende Bedingung unter C. und die Vervollständigung der asymptotischen Darstellung in Nr. 6.

2) Dies soll heißen, daß die Größe  $\varrho_1(\vartheta)$  (Gleichung (5b)) kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist.

gehen also mit  $\frac{1}{b}$  gegen Null. Andererseits aber ist, nach B., in dem ganzen Intervall  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$

$$(5') \quad M = Re^{\frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta} \left[ (a + \varrho(\vartheta)\alpha(\vartheta)) \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta + (b + \varrho(\vartheta)\beta(\vartheta)) \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta \right],$$

$$a^2 + b^2 = \alpha^2(\vartheta) + \beta^2(\vartheta) = 1, \quad \varrho(\vartheta) < \frac{1}{2}.$$

Wir wenden nun *erstens* die unter A. gebrauchte Schlußweise an. Wir bezeichnen mit  $\vartheta'_1$  den kleinsten Wert  $\geq \vartheta_1$ , für den

$$\cos \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta'_1 = b, \quad \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \vartheta'_1 = -a,$$

setzen weiter, wie früher,

$$\vartheta''_1 = \vartheta'_1 + \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta'_2 = \vartheta'_1 + \frac{\sqrt{2}}{b} \pi, \quad \vartheta''_2 = \vartheta'_1 + \frac{\sqrt{2}}{b} \frac{3\pi}{2}$$

und bilden den Quotienten  $Q(\vartheta'_1)$ . Die aus der Darstellung (5a) folgenden Ergebnisse über diesen Quotienten sind die nämlichen wie unter A. Es wäre also für genügend großes  $\frac{R_2}{R_1}$

$$Q(\vartheta'_1) > \frac{e^{2\pi}}{35}.$$

*Zweitens* berechnen wir  $Q(\vartheta'_1)$  mit Hilfe der Darstellung (5'). Der Zähler wird

$$\begin{aligned} & M^2(\vartheta'_1) + e^\pi M^2(\vartheta''_1) \\ &= R^2 e^{\sqrt{2} b \vartheta'_1} \left[ \varrho^2(\vartheta'_1) (b\alpha(\vartheta'_1) - a\beta(\vartheta'_1))^2 + e^{2\pi} (1 + \varrho(\vartheta'_1) (a\alpha(\vartheta''_1) + b\beta(\vartheta''_1)))^2 \right] \\ &= R^2 e^{\sqrt{2} b \vartheta'_1} e^{2\pi} (1 + \sigma)^2, \quad |\sigma| < \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung gilt für den Nenner, und es ergibt sich daher:

$$Q(\vartheta'_1) < 16 e^{-2\pi}.$$

Aus dem Widerspruch dieser Ungleichung mit der oben aus dem Ansatz (5a) hergeleiteten folgt wieder, daß  $\frac{R_2}{R_1}$  *unterhalb einer von b unabhängigen Grenze bleibt.*

Von dem Intervall  $(\vartheta_1, \vartheta_0)$  gehen wir schließlich, so wie in B. geschehen, zu einem Intervall  $(\vartheta, \vartheta_0)$  ( $\vartheta = \vartheta_1 + \frac{\log^2 b}{b}$ ) über und finden, daß in ihm die Darstellung (5a) sich auf die Form (5) reduziert. Das genaue Ergebnis formuliere ich folgendermaßen:

*In jedem Intervall  $(\vartheta, \vartheta_0)$  ( $\vartheta > \frac{\log^2 b}{b}$ ) werden die den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale asymptotisch in der Form*

$$N = A_1 N_1 + A_2 N_2$$

dargestellt, die Reste der Darstellung genügen der Ungleichung (3'), in der  $\vartheta_1 = \vartheta + \frac{\log^2 b}{b}$  zu setzen ist.

Bleibt  $\vartheta$  oberhalb einer von  $b$  unabhängigen Grenze, so fällt übrigens  $\vartheta_1$  praktisch mit  $\vartheta$  zusammen.<sup>1)</sup>

6. Die asymptotische Darstellung ist nicht, wie wir bisher getan haben, auf das erste Glied beschränkt, sondern läßt sich zu beliebiger Gliederzahl ausdehnen. Wir kommen allgemein für die Integrale  $M$  der Gleichung (B) zu folgender asymptotischen Näherung:

$$(7) \quad M_i = e^{\lambda_i \vartheta} \left( 1 + \frac{1}{b} f_{i,1}(\vartheta) + \frac{1}{b^2} f_{i,2}(\vartheta) + \dots + \frac{1}{b^n} f_{i,n}(\vartheta) \right).$$

Die Funktionen  $f$  werden gefunden, indem man den Ausdruck (7) in (B) einsetzt und die Koeffizienten aller Potenzen bis einschließlich  $\frac{1}{b^{n-3}}$  Null setzt. Dies ergibt die folgenden  $n$  Gleichungen, wobei zur Abkürzung  $\varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{b}$  eingeführt ist:

$$4\varepsilon_i^3 f'_{i,k+3} + \varepsilon_i^3 (6f''_{i,k+2} + a_2 f_{i,k+2}) + \varepsilon_i (4f'''_{i,k+1} + 2a_2 f'_{i,k+1} + a_1 f_{i,k+1}) + (f''''_{i,k} + a_2 f''_{i,k} + a_1 f'_{i,k} + a_0 f_{i,k}) = 0 \quad (k = -2, -1, \dots, n-3).$$

Aus diesen berechnen sich die Funktionen  $f$  der Reihe nach durch Quadraturen. Für unsere Gleichung ergibt sich z. B.:

$$f_{i,1} = -\frac{1}{4\varepsilon_i} \left( \frac{3}{2} \cot \vartheta + \frac{5}{2} \vartheta \right),$$

und auch alle weiteren Funktionen  $f_{i,n}$  lassen sich in geschlossener Form auswerten.

Die Reste  $\eta_{i,n}$  der Ausdrücke (7) befriedigen die inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \eta''''_{i,n} + a_2 \eta''_{i,n} + a_1 \eta'_{i,n} + (b^4 + a_0) \eta_{i,n} &= -\frac{e^{\lambda_i \vartheta}}{b^{n-2}} F_{i,n}, \\ F_{i,n} &= (f''''_{i,n-2} + a_2 f''_{i,n-2} + a_1 f'_{i,n-2} + a_0 f_{i,n-2}) \\ &\quad + \varepsilon_i (4f'''_{i,n-1} + 2a_2 f'_{i,n-1} + a_1 f_{i,n-1}) + \varepsilon_i^3 (6f''_{i,n} + a_2 f_{i,n}) \\ &+ \frac{1}{b} \left\{ (f''''_{i,n-1} + a_2 f''_{i,n-1} + a_1 f'_{i,n-1} + a_0 f_{i,n-1}) + \varepsilon_i (4f'''_{i,n} + 2a_2 f'_{i,n} + a_1 f_{i,n}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{b^2} \left\{ f''''_{i,n} + a_2 f''_{i,n} + a_1 f'_{i,n} + a_0 f_{i,n} \right\}. \end{aligned}$$

1) Geht aber  $\vartheta$  mit wachsendem  $b$  gegen Null, so läßt sich an Stelle von  $\frac{\log^2 b}{b}$  eine kleinere Funktion setzen, so daß unter allen Umständen die Reste für  $\vartheta_1$  und  $\vartheta$  sich bei der von uns verwandten Genauigkeit der Abschätzung nicht von einander unterscheiden.

Nach der Methode der Variation der Konstanten folgt hieraus z. B. für  $\eta_{1n}$  die Darstellung

$$(9) \quad \eta_{1n} = -\frac{1}{b^{n-2}} \sum_1^4 M_i \int_{s_1}^{\vartheta} \mu_i e^{\lambda_i \vartheta} F_{1n} d\vartheta,$$

wo  $\mu_i$  bekannte Determinantenquotienten sind, in die die  $M_i$  nebst ihren drei ersten Ableitungen eingehen. Die Gleichung (3) oder die äquivalente

$$(3a) \quad M_i = e^{\lambda_i \vartheta} \left( 1 + \frac{\Theta_i}{b^3} \right)$$

zeigt, daß die  $\mu_i$  von der Form  $-\frac{\lambda_i}{4b^4} e^{-\lambda_i \vartheta} \left( 1 + \frac{\sigma_i}{b} \right)$  sein müssen. Zu ihrer wirklichen Berechnung — mit genauer Abschätzung der Fehlerglieder  $\sigma_i$  — aber sind die Determinantenausdrücke wenig geeignet. Man geht dazu vielmehr besser direkt von den Bestimmungsgleichungen

$$M_1^{(r)} \mu_1 + M_2^{(r)} \mu_2 + M_3^{(r)} \mu_3 + M_4^{(r)} \mu_4 = p_r \quad \left( \begin{array}{l} r = 0, 1, 2, 3; \\ p_0 = p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1 \end{array} \right)$$

aus und behandelt sie nach dem in der nachstehenden Note „Über die Genauigkeit der Wurzeln linearer Gleichungen“ angegebenen Verfahren.<sup>1)</sup> Man beachte dazu, daß bei dem (3a) entsprechenden Ansatz

$$(3b) \quad M_i^{(r)} = \lambda_i^r e^{\lambda_i \vartheta} \left( 1 + \frac{\Theta_i^{(r)}}{b^3} \right) \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

die sämtlichen Größen  $\Theta_i^{(r)}$  die gleiche obere Grenze  $\Theta$  (Gl. (3')) haben. So ergibt sich

$$(10') \quad \mu_i = -\frac{\lambda_i}{4b^4} e^{-\lambda_i \vartheta} \left( 1 + \frac{\tau_i}{b^3} \right), \quad |\tau_i| < \frac{\frac{4}{b^3} \Theta}{1 - \frac{4}{b^3} \Theta} = \tau.$$

Damit aber wird augenscheinlich, nach den in Nr. 3. gebrachten Methoden der Integralabschätzung

$$(10) \quad |\eta_{1n}| < \frac{|e^{\lambda_i \vartheta}|}{b^{n+1}} \left( 1 + \frac{\Theta}{b^3} \right) \left( 1 + \frac{\tau}{b^3} \right) \int_{s_1}^{\vartheta_0} |F_{1n}| d\vartheta.$$

Um guter asymptotischer Näherung sicher zu sein, kann man für jeden Wert von  $b$  dasjenige  $n$  bestimmen, das die kleinsten oberen Grenzen für die Reste  $\eta_{1n}$  liefert.

Bezüglich der Darstellung der den Endlichkeitsbedingungen genügenden Integrale und ihrer Reste gilt der Schlußsatz von Nr. 5.

1) Diese Zeitschr. Math. Phys. Bd. 62, S. 359—362. — Ein Verfahren, das ich zur Abschätzung der  $\mu_i$  in Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians vorgeschlagen habe, führt, wie ich unterdessen bemerkte, nicht zum Ziel.

7. Ich schließe mit einigen Andeutungen über den Gang der Rechnung zur vollständigen Bestimmung des Spannungs-Dehnungs-Zustandes in einer Kugelschale.<sup>1)</sup> Ich nehme dabei an, daß wir mit *n*-gliedrigen asymptotischen Ausdrücken der Integrale arbeiten. Dann wird, wie bewiesen, die Schubspannung in der Form angesetzt:

$$N = A_1 N_1 + A_2 N_2.$$

Es ist zu bemerken, daß die Integrationskonstanten  $A_1, A_2$  im allgemeinen noch von  $b$  abhängig sein werden. Zu ihrer Bestimmung ist folgendermaßen zu verfahren. Zunächst berechnen sich die Normalspannungen, Biegemomente und Verrückungen aus der Schubspannung nach den Gleichungen (A') und stellen sich, da ja gliedweise Integration und Differentiation asymptotischer Ausdrücke gestattet ist, als *n*-gliedrige asymptotische Ausdrücke derselben Form dar. Die Beibehaltung von mehr als *n* Gliedern — wenn sich solche im Laufe der Rechnung einstellen sollten — ist natürlich als überschüssige Genauigkeit unstatthaft.

Die am Rande  $\vartheta = \vartheta_0$  gegebenen Größen werden im allgemeinen noch Funktionen von  $b$  sein, z. B. werden bei der Reißnerschen Methode der Vorwegnahme der Oberflächenkräfte (S. 343, Fußnote <sup>3)</sup>) die sich ergebenden Randspannungen und Momente von der Dicke der Schale, d. h. von  $b$ , abhängig sein. Diese Funktionen von  $b$  denken wir uns ebenfalls in der Gestalt *n*-gliedriger asymptotischer Ausdrücke der Gestalt

$$e^{\xi b} \left( \xi_0 + \frac{\xi_1}{b} + \frac{\xi_2}{b^2} + \dots + \frac{\xi_n}{b^n} \right).$$

Um dann die Randbedingungen zu befriedigen, haben wir auch für die Integrationskonstanten  $A$  einen Ansatz dieser Form zu machen:

$$A = e^{\alpha b} \left( \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{b^n} \right).$$

Die Konstanten  $\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_n$  bestimmen sich eindeutig aus den beiden Randbedingungsgleichungen, indem man in ihnen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von  $b$  einander gleichsetzt.

Das Problem der Kugelschale mit 2 freien Rändern, der Kugelzone, ist theoretisch einfacher als das hier behandelte, weil die bei den Endlichkeitsbedingungen vom Pole  $\vartheta = 0$  herrührenden Schwierigkeiten wegfallen, praktisch wird es etwas größere Rechenarbeit machen, weil alle 4 asymptotischen Integrale in die Lösung eingehen und daher 4 Integrationskonstanten zu berechnen sind, für die 2 Bedingungen am oberen, 2 am unteren Rand zur Verfügung stehen.

1) In der am Eingang der Arbeit (S. 343, Fußnote <sup>3)</sup>) erwähnten Dissertation wird die Rechnung an verschiedenen praktischen Beispielen durchgeführt.

## Über die Genauigkeit der Wurzeln linearer Gleichungen.

Von OTTO BLUMENTHAL in Aachen.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: *In den  $n$  linearen Gleichungen*

$$(1) \quad b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

*seien die Koeffizienten  $b$  und  $p$  nicht genau bekannt, sondern mit möglichen Fehlern behaftet, von denen nur obere Grenzen feststehen. Gefragt wird nach einer oberen Grenze der hierdurch bedingten Ungenauigkeit der Wurzeln.*

Von der Ungenauigkeit der Koeffizienten wird dabei angenommen, daß sie klein sei. Eine hinreichende Bedingung für die zulässige Größe werden wir im Lauf der Betrachtung aufstellen. Die Koeffizienten können beliebige komplexe Zahlen sein. Dagegen bedürfen wir einer Annahme über die Größe der Wurzeln unseres Gleichungssystems. Diese wird folgendermaßen formuliert: Es werde gesetzt

$$(2) \quad b_{ik} = a_{ik} + \alpha_{ik}, \quad p_i = l_i + \lambda_i,$$

wo  $a_{ik}$ ,  $l_i$  die Näherungswerte,  $\alpha_{ik}$ ,  $\lambda_i$  die möglichen Abweichungen der  $b_{ik}$ ,  $p_i$  bezeichnen. Wir betrachten dann das genäherte Gleichungssystem

$$(3) \quad a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = l_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

und setzen voraus, daß dessen Determinante  $A$  von Null verschieden ist, und daß auch keine der Wurzeln  $y_k$  verschwindet. Dann sei die positive Zahl  $q$  so bestimmt, daß die sämtlichen Quotienten zweier Wurzeln  $\frac{y_j}{y_k}$  dem Betrag nach höchstens gleich  $q$  sind:

$$(3') \quad \left| \frac{y_j}{y_k} \right| \leq q.$$

Die gestellte Aufgabe wird dadurch gelöst, daß man das System (1) durch ein äquivalentes von einfacher Form ersetzt. Wir schreiben

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = l_i - (\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n - \lambda_i)$$

und finden daraus

$$x_k = y_k - (\beta_{k1}x_1 + \beta_{k2}x_2 + \dots + \beta_{kn}x_n - \mu_k),$$

$$(4) \quad \beta_{kj} = \frac{1}{A} \sum A_{ik} \alpha_{ij}, \quad \mu_k = \frac{1}{A} \sum A_{ik} \lambda_i,$$

wo die  $A_{ik}$  die Unterdeterminanten bedeuten. Schließlich werde noch

$$(5) \quad x_k = y_k z_k$$

gesetzt, dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem, aus dem sich die gesuchte Genauigkeitsgrenze ohne Schwierigkeit ablesen läßt:

$$(5) \quad \frac{y_1}{y_k} \beta_{k1} z_1 + \cdots + \frac{y_{k-1}}{y_k} \beta_{k, k-1} z_{k-1} + (1 + \beta_{kk}) z_k \\ + \frac{y_{k+1}}{y_k} \beta_{k, k+1} z_{k+1} + \cdots + \frac{y_n}{y_k} \beta_{kn} z_n = 1 + \frac{\mu_k}{y_k}.$$

Es sei jetzt  $B$  eine obere Grenze der  $\beta_{kj}$ ,  $N$  eine obere Grenze der Größen  $\frac{\mu_k}{y_k}$ , sodaß

$$(6) \quad |\beta_{kj}| \leq B, \quad \left| \frac{y_j}{y_k} \beta_{kj} \right| \leq Bq, \quad \left| \frac{\mu_k}{y_k} \right| \leq N.$$

Wir erhalten dann aus (5) zunächst eine obere Grenze für die  $z_k$ . Ist nämlich  $z_m$  die größte von ihnen, so ergibt (5) für  $k = m$  jedenfalls  $1 + N \geq (1 - B) |z_m| - qB(|z_1| + \cdots + |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \cdots + |z_n|) \geq (1 - B[1 + (n-1)q]) |z_m|$ ,

und also, wenn

$$(K) \quad B[1 + (n-1)q] < 1$$

vorausgesetzt wird,

$$(7) \quad |z_k| \leq |z_m| \leq \frac{1 + N}{1 - B[1 + (n-1)q]}.$$

Die Ungleichung (K) ist eine Aussage über die Kleinheit der Ungenauigkeiten  $\alpha_{ik}$ . Weitere Voraussetzungen werden wir darüber nicht zu machen haben. Unsere Abschätzungen für die Wurzeln werden um so genauer, je kleiner die linke Seite von (K) gegen 1 ist.

Es ist jetzt leicht, die Entwicklung zu Ende zu führen. Man schreibe nämlich die Gleichungen (5) in der Gestalt

$$z_k - 1 = \frac{\mu_k}{y_k} - \beta_{kk} z_k - \sum_{j \neq k} \frac{y_j}{y_k} \beta_{kj} z_j$$

(die Summe über alle Indices  $j$  mit Ausnahme von  $j = k$  zu erstrecken), und erhält durch Einsetzen der Ungleichung (7) die Endformel:

$$(8) \quad |z_k - 1| < \frac{N + B[1 + (n-1)q]}{1 - B[1 + (n-1)q]}.$$

Es ist also unter der einzigen Kleinheitsbedingung (K)

$$(8') \quad x_k = y_k(1 + \sigma_k),$$

wo alle  $\sigma_k$  der Ungleichung (8) genügen. Dies ist unser Resultat.

Bemerkungen. 1. Bei der Ableitung hat die unbequeme Voraussetzung gemacht werden müssen, daß keines der  $y_k$  verschwindet. Die Formel wird sogar schon dann praktisch unbrauchbar, wenn die  $y_k$  in der Größenordnung stark verschieden sind, da dann nur für sehr kleines

$B$  die Ungleichung (K) erfüllt ist. Man kann diesem Mangel unserer Abschätzung in folgender Weise abhelfen. Man setze

$$l_i = l'_i + l''_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und bestimme die beiden Summanden so, daß die Gleichungen

$$\sum a_{ik} y_k = l'_i \quad \text{und} \quad \sum a_{ik} y_k = l''_i$$

lauter von Null verschiedene Wurzeln haben, womöglich solche, die in der Größe ihrer Beträge nicht stark voneinander abweichen. Dies läßt sich leicht erreichen. Man führe dann die entsprechende Zerlegung für die Gleichungen (1) durch, indem man etwa

$$p'_i = l'_i + \lambda_i, \quad p''_i = l''_i$$

setzt. Man erhält dann

$$x_k = x'_k + x''_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

worin die beiden Summanden  $x'$  und  $x''$  nach der Formel (8') abgeschätzt werden können.

2. In der Voraussetzung, daß  $B$  klein ist, ist nicht enthalten, daß die  $\alpha_{ik}$  absolut klein sein müssen. Es genügt, wenn sie prozentual zu den entsprechenden  $a_{ik}$  klein sind. Dies geht aus der Form (4) der  $\beta_{kj}$  hervor.

Ich will die Methode schließlich an einem Beispiel erläutern, in dem noch ein anderer einfacher Kunstgriff benutzt wird. Das Beispiel ist meiner voranstehenden Arbeit „Über asymptotische Integration usw.“ entnommen.

Es seien:  $\vartheta$  ein Parameter,  $b$  eine (große) positive Zahl,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  in irgendwelcher Reihenfolge die Wurzeln der Gleichung  $\lambda^4 + b^4 = 0$ . Es seien die Unbekannten  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  zu bestimmen aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1 + \delta_1) e^{\lambda_1 \vartheta} \mu_1 + (1 + \delta_2) e^{\lambda_2 \vartheta} \mu_2 + (1 + \delta_3) e^{\lambda_3 \vartheta} \mu_3 + (1 + \delta_4) e^{\lambda_4 \vartheta} \mu_4 &= 0, \\ \lambda_1 (1 + \varepsilon_1) e^{\lambda_1 \vartheta} \mu_1 + \lambda_2 (1 + \varepsilon_2) e^{\lambda_2 \vartheta} \mu_2 + \lambda_3 (1 + \varepsilon_3) e^{\lambda_3 \vartheta} \mu_3 + \lambda_4 (1 + \varepsilon_4) e^{\lambda_4 \vartheta} \mu_4 &= 0, \\ \lambda_1^2 (1 + \xi_1) e^{\lambda_1 \vartheta} \mu_1 + \lambda_2^2 (1 + \xi_2) e^{\lambda_2 \vartheta} \mu_2 + \lambda_3^2 (1 + \xi_3) e^{\lambda_3 \vartheta} \mu_3 + \lambda_4^2 (1 + \xi_4) e^{\lambda_4 \vartheta} \mu_4 &= 0, \\ \lambda_1^3 (1 + \eta_1) e^{\lambda_1 \vartheta} \mu_1 + \lambda_2^3 (1 + \eta_2) e^{\lambda_2 \vartheta} \mu_2 + \lambda_3^3 (1 + \eta_3) e^{\lambda_3 \vartheta} \mu_3 + \lambda_4^3 (1 + \eta_4) e^{\lambda_4 \vartheta} \mu_4 &= 1, \end{aligned}$$

wo  $\delta_k, \varepsilon_k, \xi_k, \eta_k$  ungenau bekannte Zahlen sind; bekannt ist nur, daß

$$|\delta_k| \leq \delta, \quad |\varepsilon_k| \leq \varepsilon, \quad |\xi_k| \leq \xi, \quad |\eta_k| \leq \eta.$$

Wir setzen<sup>1)</sup>

$$e^{\lambda_k \vartheta} \mu_k = x_k.$$

1) Ohne diese Einführung könnte sich ein sehr großes  $q$  ergeben, das Schwierigkeiten macht.

Das zu den Gleichungen in  $x_k$  zugehörige genäherte System lautet dann

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 &= 0, \\ \lambda_1^2 y_1 + \lambda_2^2 y_2 + \lambda_3^2 y_3 + \lambda_4^2 y_4 &= 0, \\ \lambda_1^3 y_1 + \lambda_2^3 y_2 + \lambda_3^3 y_3 + \lambda_4^3 y_4 &= 1. \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind

$$y_k = -\frac{\lambda_k}{4b^4};$$

sie haben alle gleichen Betrag  $\frac{1}{4b^3}$ , es ist also  $q = 1$ .

Außerdem ist

$$\begin{aligned} |A| &= 16b^6, & |A_{1k}| &= 4b^6, & |A_{2k}| &= 4b^5, & |A_{3k}| &= 4b^4, & |A_{4k}| &= 4b^3, \\ |\alpha_{1k}| &\leq \delta, & |\alpha_{2k}| &\leq b\varepsilon, & |\alpha_{3k}| &\leq b^2\xi, & |\alpha_{4k}| &\leq b^3\eta. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$|\beta_{jk}| \leq \frac{1}{4}(\delta + \varepsilon + \xi + \eta) = B.$$

Da schließlich die rechten Seiten exakt gegeben sind, also  $N = 0$  ist, so ergibt sich

$$x_k = -\frac{\lambda_k}{4b^4}(1 + \sigma_k), \quad |\sigma_k| \leq 1 - \frac{\delta + \varepsilon + \xi + \eta}{(\delta + \varepsilon + \xi + \eta)}$$

und entsprechend

$$\mu_k = -\frac{\lambda_k e^{-\lambda_k \vartheta}}{4b^3}(1 + \sigma_k).$$

## Über die Einführung der Gaußischen Funktion in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von H. E. TIMERDING in Braunschweig.

Bei der üblichen Art, wie die Gaußische Funktion in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt wird, bleibt gewöhnlich die Bestimmung der Genauigkeit, die man durch diese Annäherung an die wirklichen Werte der Wahrscheinlichkeit erreicht, unberücksichtigt. Dies scheint mir aber ein wichtiger Punkt. Es ist deshalb vielleicht nicht unangebracht, so oft der Gegenstand auch bereits behandelt ist, im folgenden eine möglichst einfache und einheitliche Darstellung zu versuchen, die auch die Frage der Genauigkeitsbestimmung erledigt und die außerdem nicht bereits die Kenntnis besonderer Formeln (wie insbesondere der Stirlingschen Formel) voraussetzt, sondern mit ein paar elementaren Regeln der Integralrechnung auskommt.

Zunächst ist bekannt, wie die Formel

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} = 1$$

in der von Poisson angegebenen Weise durch Verwandlung des einfachen Integrals in ein Doppelintegral bewiesen wird. Ferner ergibt sich durch einfache partielle Integration mit Rücksicht auf diese Formel (1)

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} t^2 \frac{dt}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} t^4 \frac{dt}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} t^6 \frac{dt}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}.$$

Ebenso folgt durch wiederholte partielle Integration

$$(3) \quad \int_0^1 u^p (1-u)^q du = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Diese Formeln reichen, abgesehen von allbekannten Regeln, für das Folgende aus.

Zum Ausgangspunkt haben wir den Ausdruck zu nehmen:

$$(4) \quad P_u^p = \frac{n!}{p!q!} u^p (1-u)^q, \quad p+q=n,$$

der die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Ereignis, dessen mathematische Wahrscheinlichkeit  $u$  ist, bei  $n$  Versuchen  $p$ mal eintritt und  $q$ mal ausbleibt. Nach dem Bayesschen Theorem folgt aus diesem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, mit der wir dem Ereignis, nachdem es bei  $n$  Versuchen  $p$ mal eingetreten und  $q$ mal ausgeblieben ist, eine zwischen den Werten  $\alpha$  und  $\beta$  liegende Wahrscheinlichkeit zuschreiben können, der Wert

$$\int_{\alpha}^{\beta} P_u^p du : \int_0^1 P_u^p du$$

oder nach (3)

$$\frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} P_u^p du.$$

Nun wird insbesondere angenommen,  $n$  sei eine sehr große Zahl, und in dem vorstehenden Integral ein angenäherter Wert der Funktion  $P_u^p$  von  $u$  gesucht. Zu dem Zweck gehen wir von dem Maximalwert  $P_{\frac{p}{n}}^p$  der Funktion aus, den wir kurz mit  $M$  bezeichnen wollen, und schreiben, indem wir noch

$$\frac{p}{n} = a, \quad \frac{q}{n} = b, \quad u = a + r, \quad 1 - u = b - r$$

setzen, die Funktion  $P_r^p$  in der Form

$$(5) \quad P_r^p = M \left(1 + \frac{r}{a}\right)^p \left(1 - \frac{r}{b}\right)^q.$$

Um dann hierfür einen Näherungswert zu finden, bilden wir

$$\log P_r^p = \log M + na \log \left(1 + \frac{r}{a}\right) + nb \log \left(1 - \frac{r}{b}\right),$$

wo  $\log$  den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll. Entwickeln wir die beiden letzten Logarithmen in eine Potenzreihe, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \log P_r^p &= \log M + na \left( \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^4}{4a^4} \dots \right) \\ &\quad - nb \left( \frac{r}{b} + \frac{r^2}{2b^2} + \frac{r^3}{3b^3} + \frac{r^4}{4b^4} \dots \right) \end{aligned}$$

oder ausgerechnet

$$\log P_r^p = \log M - \frac{nr^2}{2ab} - \frac{n(a-b)r^3}{3a^2b^2} - \frac{n(1-3ab)r^4}{4a^3b^3} \dots$$

Soll nun die Funktion  $P_r^p$  überhaupt einen der Rechnung zugänglichen Wert haben, so gilt das Gleiche von  $\log P_r^p$  und damit auch von dem ersten Glied der Reihenentwicklung auf der rechten Seite. Wir werden daher die Größe

$$(6) \quad t^2 = \frac{nr^2}{2ab}$$

als im allgemeinen weder besonders klein noch besonders groß anzusehen haben;  $r$  muß also, wenn  $n$  sehr groß ist, derart klein sein, daß  $nr^2$  einen der Rechnung zugänglichen Wert behält, vorausgesetzt, daß weder  $a$  noch  $b$  sehr klein wird. Mit Hilfe der neuen Größe  $t$  läßt sich die obenstehende Gleichung aber schreiben

$$(7) \quad \log P_r^p = \log M - t^2 - \frac{4}{3} \frac{(a-b)t^3}{\sqrt{2abn}} - \frac{(1-3ab)t^4}{abn} \dots$$

Man sieht so, daß schon das zweite Glied gegen das erste sehr klein ist, denn  $\sqrt{n}$  ist sehr groß. Es ist deshalb angebracht, nicht unmittelbar, um den Logarithmus zu entfernen, zu potenzieren, sondern, indem wir uns mit einer Annäherung bis auf Glieder mit  $\frac{1}{n}$  begnügen und deshalb auch alle auf die angeschriebenen Glieder folgenden Terme fortlassen, zunächst

$$\log \left(1 - \frac{(1-3ab)t^4}{abn}\right) \quad \text{für} \quad - \frac{(1-3ab)t^4}{abn}$$

zu setzen. Bei dem vorhergehenden Glied haben wir, um den gleichen Grad der Annäherung zu erhalten,

$$\log \left(1 - \frac{4}{3} \frac{(a-b)t^3}{\sqrt{2abn}} + \frac{4}{3} \frac{(a-b)^2 t^6}{abn}\right) \quad \text{für} \quad - \frac{4}{3} \frac{(a-b)t^3}{\sqrt{2abn}}$$

zu setzen (entsprechend der Näherungsformel  $1 + z + \frac{1}{2}z^2 = e^z$ ) und erhalten so, immer mit dem gleichen Grad der Annäherung,

$$\log P_r^p = \log M - t^2 + \log(1 - \delta)$$

und daraus

$$(8) \quad P_r^p = M e^{-t^2} (1 - \delta)$$

für

$$(9) \quad \delta = \frac{4}{3} \frac{(a-b)t^2}{\sqrt{2abn}} + \frac{(1-3ab)t^4}{abn} - \frac{4}{9} \frac{(1-4ab)t^6}{abn}.$$

Dieser Wert  $\delta$  muß also genügend klein sein, damit wir ohne merkbaren Fehler

$$P_r^p = M e^{-t^2}$$

setzen und so die Gaußsche Funktion einführen können. Wir haben nun noch einen Näherungswert für das Maximalglied  $M$  zu suchen, das bei großen Werten von  $p$  und  $q$  direkt nicht zu berechnen ist. Wir müssen zu dem Zweck beachten, daß zufolge (3)

$$\int_{-a}^{+b} P_r^p dr = \frac{1}{n+1}$$

wird. Führen wir in dem Integral statt  $r$  die Veränderliche  $t$  ein, so werden die Grenzen  $-\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$  und  $+\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ , und diese Grenzen können wir ohne weiteres durch  $-\infty$  und  $+\infty$  ersetzen. So gelangen wir zu der Gleichung

$$\frac{1}{n+1} = M \sqrt{\frac{2ab\pi}{n}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} - \frac{1-3ab}{abn} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 \frac{dt}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{9} \frac{1-4ab}{abn} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^4 \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \right\},$$

denn es wird sofort  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 dt = 0$ . Die Formeln (2) ergeben also

$$\frac{1}{n+1} = M \sqrt{\frac{2ab\pi}{n}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{1-3ab}{abn} + \frac{5}{6} \frac{1-4ab}{abn} \right\}$$

oder

$$\frac{1}{n+1} = M \sqrt{\frac{2ab\pi}{n}} \left\{ 1 - \frac{13}{12} \frac{1}{n} + \frac{1}{12} \frac{1}{abn} \right\}$$

oder, immer mit dem gleichen Grad der Annäherung,

$$\frac{1}{n+1} = M \sqrt{\frac{2ab\pi}{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left\{1 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{abn} - \frac{1}{n}\right)\right\}}$$

Daraus folgt aber, wieder mit demselben Grade der Annäherung,

$$(10) \quad M = \frac{1}{\sqrt{2abn\pi}} \left\{ 1 - \frac{1}{12n} \left( \frac{1}{ab} - 1 \right) \right\}$$

oder auch, wenn wir  $p = na$ ,  $q = nb$  einführen,

$$(10a) \quad M = \sqrt{\frac{n}{2pq\pi}} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) \right\}$$

(was auch aus der Stirlingschen Formel, wenn man ihr die Gestalt gibt

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \left( 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} \right),$$

hätte gefolgert werden können). Was mir an der hier gegebenen Ableitung, abgesehen von der engen Verknüpfung mit dem eigentlichen Gegenstande der Untersuchung, bemerkenswert erscheint, ist, daß sie die Einführung der Größe  $\pi$  auf die Formel (1), für welche die Poissonsche Überlegung eine einfache und anschauliche Begründung liefert, zurückführt.

Man kann fragen, ob man sich nicht auch auf das erste Glied in dem Ausdruck (9) für  $\delta$  beschränken kann. Man erkennt aber sofort, daß für  $a = b$  dieses erste Glied verschwindet, so daß es zweckmäßig ist, gleich die Glieder mit  $\frac{1}{n}$  hinzuzunehmen.

Die zweite Art, wie die Gaußische Funktion eingeführt wird, besteht darin, daß der Ausdruck (4) als Funktion des ganzzahligen Argumentes  $p$  betrachtet und  $n$  wieder als sehr groß angenommen wird. Dann ist der Ausdruck wieder sehr schwer direkt zu berechnen, und man muß eine brauchbare Näherungsformel suchen. Dies geschieht am besten, indem wir die bereits gewonnenen Resultate verwerten. Es ist nämlich das Maximalglied  $M$  seiner ursprünglichen Bedeutung nach

$$M = \frac{n!}{p!q!} \frac{p^p q^q}{n^{p+q}}$$

und damit wird nach (4), wenn wir noch  $v = 1 - u$  setzen,

$$(11) \quad P_u^p = M \left( \frac{nu}{p} \right)^p \left( \frac{nv}{q} \right)^q$$

oder

$$P_u^p = M \cdot N,$$

wenn wir  $N = \left( \frac{nu}{p} \right)^p \left( \frac{nv}{q} \right)^q$  einführen.

Wir wollen jetzt die Näherungswerte von  $M$  und  $N$  einzeln berechnen. In dem Ausdruck (10a) für  $M$ , den wir kürzer schreiben wollen

$$M = \sqrt{\frac{n}{2pq\pi}} (1 - \varepsilon),$$

setzen wir

$$(12) \quad p = nu + z, \quad \text{mithin} \quad q = nv - z$$

und erhalten

$$M = \frac{1}{\sqrt{2nuz\pi}} (1 - \varepsilon) \left[ \left( 1 + \frac{z}{nu} \right) \left( 1 - \frac{z}{nv} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Ausdrücke  $\frac{z}{nu}$  und  $\frac{z}{nv}$  sollen nun echte und zwar sehr kleine Brüche sein. Wir können die Potenz mit dem Exponenten  $-\frac{1}{2}$  also nach dem binomischen (oder dem Taylorschen) Lehrsatz entwickeln und finden, indem wir nur die Glieder bis zur zweiten Potenz berücksichtigen, nach einer leichten Reduktion

$$M = \frac{1}{\sqrt{2n uv \pi}} (1 - \varepsilon) \left[ 1 + \frac{u - v}{2n uv} z + \frac{3 - 8uv}{8n^2 u^2 v^2} z^2 \right].$$

Wir führen nunmehr die Größe

$$(13) \quad \frac{z}{\sqrt{2n uv}} = x$$

ein, von der wir voraussetzen, daß sie der Rechnung zugänglich bleibt, ferner können wir bis auf Glieder mit  $\frac{1}{n}$  genau

$$\varepsilon = \frac{1}{12} \left( \frac{n}{pq} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n uv} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{12} \frac{1 - uv}{n uv}$$

setzen und finden

$$M = \frac{1}{\sqrt{2n uv \pi}} \left[ 1 - \frac{1}{12} \frac{1 - uv}{n uv} \right] \left[ 1 + \frac{u - v}{\sqrt{2n uv}} x + \frac{3 - 8uv}{4n uv} x^2 \right]$$

oder, immer mit demselben Grad der Annäherung,

$$(14) \quad M = \frac{1}{\sqrt{2n uv \pi}} \left[ 1 - \frac{1}{12} \frac{1 - uv}{n uv} + \frac{u - v}{\sqrt{2n uv}} x + \frac{3 - 8uv}{4n uv} x^2 \right].$$

Um nun auch den zweiten Faktor  $N$  näherungsweise zu berechnen, bilden wir

$$\log N = -p \log \frac{p}{nu} - q \log \frac{q}{nv}$$

oder mit Rücksicht auf (12)

$$\log N = -(nu + z) \log \left( 1 + \frac{z}{nu} \right) - (nv - z) \log \left( 1 - \frac{z}{nv} \right).$$

Hierin entwickeln wir die Logarithmen nach Potenzen von  $z$  und erhalten weiter

$$\begin{aligned} \log N = & -(nu + z) \left( \frac{z}{nu} - \frac{z^2}{2n^2 u^2} + \frac{z^3}{3n^3 u^3} - \frac{z^4}{4n^4 u^4} \dots \right) \\ & + (nv - z) \left( \frac{z}{nv} + \frac{z^2}{2n^2 v^2} + \frac{z^3}{3n^3 v^3} + \frac{z^4}{4n^4 v^4} \dots \right) \end{aligned}$$

oder ausgerechnet, wenn wir immer die Beziehung  $u + v = 1$  im Auge behalten,

$$\log N = -\frac{z^2}{2n uv} - \frac{(u - v)z^3}{6n^2 u^2 v^2} - \frac{(1 - 3uv)z^4}{12n^3 u^3 v^3} \dots$$

Wir können uns auf die angeschriebenen Glieder beschränken, wenn wir nur eine Annäherung bis auf Glieder mit  $\frac{1}{n}$  beabsichtigen, denn durch Einführung der Größe  $x$  aus (13) folgt

$$\log N = -x^2 - \frac{2}{3} \frac{u - v}{\sqrt{2n uv}} x^3 - \frac{1}{3} \frac{1 - 3uv}{n uv} x^4.$$

Hierfür dürfen wir, immer mit dem gleichen Grad der Annäherung, schreiben

$$\log N = -x^2 + \log \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{u-v}{\sqrt{2n uv}} x^3 + \frac{2}{9} \frac{1-4uv}{2n uv} x^6 \right) \\ + \log \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{1-3uv}{n uv} x^4 \right)$$

und erhalten daraus, wieder mit demselben Grad der Annäherung,

$$(15) \quad N = e^{-x^2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{u-v}{\sqrt{2n uv}} x^3 - \frac{1}{3} \frac{1-3uv}{n uv} x^4 + \frac{1}{9} \frac{1-4uv}{n uv} x^6 \right].$$

Multiplizieren wir endlich die Ausdrücke (14) und (15), indem wir aufs neue nur bis zu Gliedern mit  $\frac{1}{n}$  gehen, so erhalten wir das Endresultat, in dem wir jetzt die Wahrscheinlichkeit als Funktion von  $x$  oder  $z$  anzusehen haben und deshalb  $P_u(z)$  schreiben:

$$(16) \quad P_u(z) = \frac{1}{\sqrt{2n uv \pi}} e^{-x^2} \left[ 1 - \frac{1}{12} \frac{1-uv}{n uv} + \frac{u-v}{\sqrt{2n uv}} \left( x - \frac{2}{3} x^3 \right) \right. \\ \left. + \frac{3-8uv}{4n uv} x^2 - \frac{1}{3} \frac{2-7uv}{n uv} x^4 + \frac{1}{9} \frac{1-4uv}{n uv} x^6 \right].$$

Daß dieser Ausdruck ziemlich lang wird, hat nichts zu sagen; er soll nicht als Grundlage der weiteren Rechnung, sondern nur zur Kontrolle dienen und ist der Bauart nach durchaus übersichtlich. Die Glieder, die  $1:\sqrt{n}$  enthalten, sind die Glieder mit ungeraden Potenzen von  $x$  und geraten in Wegfall, wenn  $u=v$  ist. Für den Fall einer von vornherein symmetrischen Wahrscheinlichkeit ist die Annäherung durch die Gaußische Funktion  $\frac{1}{\sqrt{2n uv \pi}} e^{-\frac{z^2}{2n uv}}$  also bedeutend besser als für den unsymmetrischen Fall.

Integrieren wir den Ausdruck zwischen den Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$ , so folgt aus den Formeln (1) und (2) mit Leichtigkeit

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_u(z) dz = 1,$$

es ist also genau

$$(18) \quad \sum_0^n P_u^p = \int_{-\infty}^{+\infty} P_u(z) dz,$$

wenn wir an die Stelle des ganzzahligen Argumentes  $p$  die kontinuierliche Veränderliche  $z$  treten lassen.

## Über den Rechenschieber, insbesondere den von Pozzi.<sup>1)</sup>

Von Dr. CHRISTIAN BEYEL in Zürich.

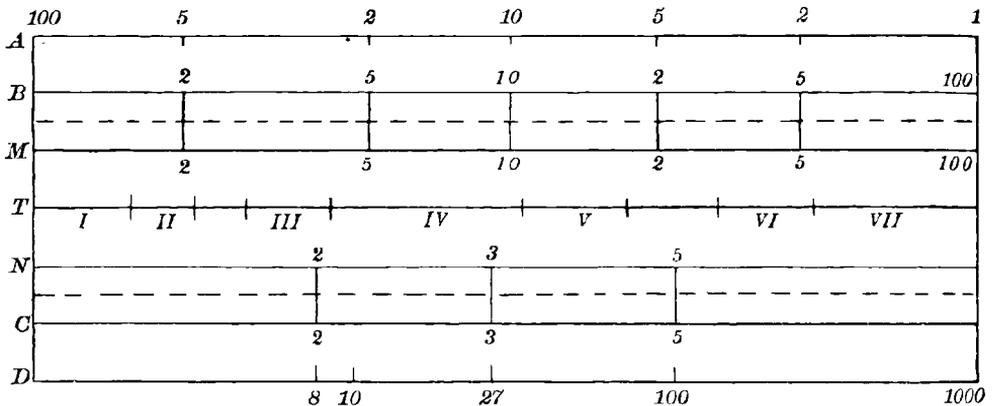
Der Gedanke, welcher dem Rechenschieber zugrunde liegt, ist bekanntlich englischen Ursprungs. Edmund Gunter, Professor der Astronomie am College von Gresham in London konstruierte zuerst (1620) Maßstäbe, bei welchen die Logarithmen der Zahlen graphisch aufgetragen wurden. Solche Maßstäbe wurden in der englischen Marine gebraucht, und die Erfindung erlebte im Laufe der Zeit vielfache Veränderungen und Verbesserungen. Aber der Gebrauch des Instrumentes blieb bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts auf kleine Kreise beschränkt, und erst mit dem Emporblühen der modernen Technik wurde der Rechenschieber ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden in der Praxis arbeitenden Ingenieur. Seitdem wurde nicht nur die Fabrikation des logarithmischen Maßstabes auf eine höhere Stufe gebracht, sondern es versuchten auch zahlreiche Erfinder, das kleine Instrument immer mehr zu vervollkommen und den Bedürfnissen der Technik anzupassen. Jedes Jahr bringt neue „Systeme“. Oft kehren dabei uralte Gedanken — wie z. B. der des kreisförmigen Rechenschiebers — wieder und suchen sich durchzusetzen. Nicht immer gelingt dies, denn manche „Idee“, welche theoretisch sehr schön aussieht, entspricht entweder keinem praktischen Bedürfnis, oder sie ist zu kompliziert für den allgemeinen Gebrauch und bedingt eine Überladung des Stabes mit Zahlen und Zeichen. Das Bild des Schiebers muß klar und ruhig sein, und wer zu viel will, wird wenig erreichen. Wir sind daher gegen manche dieser Neuerungen skeptisch geworden, und langjährige Erfahrung hat uns oft Recht gegeben. Wir freuten uns zuweilen über einen schönen Gedanken, welcher in einem neuen Schieber zutage trat und mußten dann bemerken, daß die Praxis die Verbesserungen ablehnte. Wir glauben daher, daß der gewöhnliche Rechenschieber mit Läufer oder der Schieber „Ritz“, welcher noch die Kubikzahlen enthält, vollkommen dem genügen, was der Praktiker verlangt. Wir pflegen daher diese Schieber unseren Vorlesungen zugrunde zu legen. Für besondere Zwecke mag sich der Spezialist den Schieber konstruieren lassen, welcher die besonderen Aufgaben löst.

Wenn wir nun heute einen neuen Schieber in empfehlendem Sinne beurteilen, so möchten wir auch hier das entscheidende Wort dem in

1) C. Pozzi: Il regolo calcolatore. Torino, Tipografia Olivero & Co., 1911.  
Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 62. Band. 1914. Heft 4. 24

der Praxis arbeitenden Ingenieur lassen. Immerhin scheint uns, daß der Schieber des italienischen Professors C. Pozzi in seiner Anordnung eine Reihe von Vorzügen hat, an welche sich der Praktiker schnell und mit Vorteil gewöhnen wird. Wir wollen die wesentlichen Grundlagen des Schiebers kurz erklären und dann auf die große Anzahl der Kombinationen hinweisen, welche sich mit dem Schieber ausführen lassen. Wir nennen bei dieser Erklärung den beweglichen Maßstab, welcher zwischen dem festen Stabe gleitet, die „Zunge“ des Rechenschiebers. Über den festen Stab geht der „Läufer“, in welchen eine oder mehrere „Marken“ eingeritzt sind.

Fig. 1.



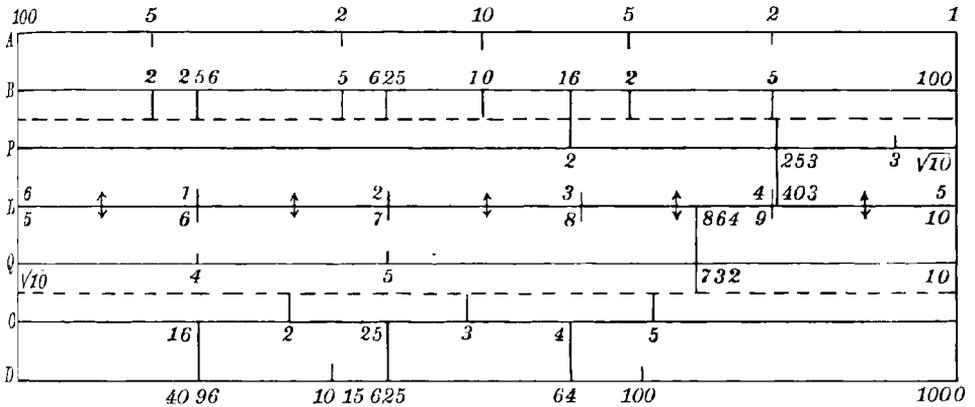
Der Rechenschieber Pozzi enthält, wie der gewöhnliche Schieber, die vier je 25 cm langen logarithmischen Maßstäbe, von denen je zwei einander gleich sind. Auf dem oberen festen, mit *B* bezeichneten Maßstabe (Fig. 1) sind von links nach rechts zweimal die Logarithmen von 1—10 aufgetragen. Der untere feste mit *C* bezeichnete Maßstab trägt einmal die Logarithmen von 1 bis 10. Mit *M* und *N* sind resp. der obere und der untere Maßstab der Zunge bezeichnet, welche mit dem anschließenden Maßstabe des festen Stabes übereinstimmen. Es ist also  $B = M$  und  $N = C$ .

Zu diesen vier Maßstäben kommt noch ein am oberen Rande des festen Maßstabes angebrachter Maßstab *A*. Auf demselben sind, wie bei *B*, zweimal die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 aufgetragen, aber in umgekehrter Reihenfolge, d. h. von rechts nach links. Es stehen also von der Mitte aus die Zahlen 2, 3, 4 nach links und 9, 8, 7 nach rechts. Aus dieser Anordnung erkennt man sofort, daß bei geschlossenem Schieber den Zahlen von *B* im Maßstabe *A* die reziproken Werte gegenüber stehen, z. B. der 2 in *B* der Wert 0,5; der 4 der

Wert 0,25 usw. Der untere Rand des festen Stabes trägt in einem mit *D* bezeichneten Maßstabe dreimal die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10. Daher steht der Maßstab *C*, welcher nur einmal die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 trägt, zum Maßstabe *D* im Verhältnis von 1 : 3. Folglich stehen den Zahlen des Maßstabes *C* im Maßstabe *D* die dritten Potenzen gegenüber, z. B. der 2 die 8. Umgekehrt finden wir im Maßstabe *C* die Kubikwurzeln aus den Zahlen 1—1000 des untersten Maßstabes *D*.

Der Maßstab *B* trägt die Logarithmen von 1 bis 10 zweimal. Er steht also zu dem Maßstabe *D* im Verhältnis von 2 : 3. Daher muß

Fig. 2.



dem Quadrate einer Zahl von *B* im Maßstabe *D* die dritte Potenz gegenüberstehen. Wir finden z. B. unter  $2^2$  oder 4 von *B* im Maßstabe *D* die dritte Potenz 8 von 2. Soll daher die dritte Wurzel aus dem Quadrate einer Zahl, also  $\sqrt[3]{x^2}$  gefunden werden, so suchen wir  $x$  in *D*. Dann steht dem  $x$  im Maßstabe *B* das Resultat  $\sqrt[3]{x^2}$  gegenüber. Es ist z. B.  $\sqrt[3]{8^2} = 4$  oder  $\sqrt[3]{27^2} = 9$ . Kombinieren wir diese Ablesung mit dem Maßstabe *A*, so können wir direkt den reziproken Wert, d. h.  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ , ablesen, z. B.  $\frac{\sqrt[3]{8}}{8} = 0,25$ .

Diese Resultate ergeben sich bei geschlossenem Schieber. Bewegen wir noch Zunge und Läufer, so finden wir für alle in *B* gemachten Ablesungen die reziproken Werte auf *A*. Lesen wir in *C* ab, so gibt der Maßstab *D* direkt die dritten Potenzen. Es würde uns zu weit führen, hier auf alle möglichen Kombinationen einzugehen.

Wir wenden uns der Rückseite der Zunge zu und betrachten die mit *P* und *Q* bezeichneten Maßstäbe (Fig. 2). Dieselben sind so eingerichtet, daß auf 50 cm die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10

aufgetragen sind. Wir lesen von links nach rechts auf dem oberen Maßstabe genau die Zahlen 1; 1,005... ab bis 3,01, 3,02...  $\sqrt{10}$ ... und 3,3 ab. Daran schließen sich auf dem unteren Maßstabe  $Q$  von links nach rechts die Zahlen von 2,9..3,  $\sqrt{10}$ ... bis 10. Setzen wir diesen Maßstab  $P - Q$  mit den anschließenden Maßstäben  $B$  und  $C$  in Verbindung, so folgt: Auf dem Maßstabe  $B$  sind auf je 12,5 cm die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 aufgetragen. Die Maßstäbe  $P - Q$  tragen auf 50 cm die Logarithmen derselben Zahlen. Also verhalten sich die Maßstäbe wie 1:4 und den Zahlen von  $P - Q$  stehen in  $B$  die vierten Potenzen gegenüber, z. B. 2 der Zahl 16 und 5 der Zahl 625. Umgekehrt stehen den Zahlen von  $B$  in  $P - Q$  die vierten Wurzeln gegenüber.

Auf dem Maßstabe  $C$  sind die Logarithmen der Zahlen von 1—10 auf 25 cm aufgetragen. Er verhält sich also zum Maßstabe  $P - Q$  wie 1:2. Daher müssen den Zahlen von  $P - Q$  in  $C$  die Quadrate gegenüberstehen. Den Zahlen von  $C$  stehen in  $P - Q$  die Wurzeln gegenüber.

Wir haben also hier dasselbe Verhältnis zwischen den Maßstäben  $P - Q$  und  $C$ , welches zwischen  $C$  und  $B$  besteht. Weil aber die Teilung von  $P - Q$  viel genauer ist, als diejenige von  $C$  und  $B$ , so werden wir mit Vorteil bei Quadrierungen und beim Ausziehen der zweiten Wurzel die Maßstäbe  $P - Q$  und  $C$  benutzen, wenn wir eine größere Genauigkeit als bei  $C$  und  $B$  erreichen wollen.

Vergleichen wir die Skala  $P - Q$  mit der Skala  $D$ , so sind auf  $D$  die Logarithmen der Zahlen von 1—10 dreimal aufgetragen. Daher ist die Strecke, welche diese Logarithmen einmal trägt,  $\frac{25}{3}$  cm lang. Auf dem Maßstabe  $P - Q$  verteilen sich die Logarithmen der Zahlen von 1—10 auf 50 cm. Daher verhält sich die Skala  $D$  zu der Skala  $P - Q$  wie 1:6. Folglich stehen den Zahlen von  $P - Q$  in  $D$  die sechsten Potenzen gegenüber, z. B. der Zahl 2 die Zahl 64. Umgekehrt entsprechen den Zahlen von  $D$  die sechsten Wurzeln in  $P - Q$ .

Nehmen wir nun die Zunge und den Schieber zu Hilfe, so können wir den Anfang der Zunge oder das Ende unter eine beliebige Zahl  $x$  von  $B$  stellen, z. B. unter 3. Wir schieben die Marke auf eine Zahl  $y$ , z. B. 2, von  $P - Q$ . Dann lesen wir in  $B$  unter der Marke  $x \cdot y^4$  ( $3 \cdot 2^4 = 48$ ) ab. In  $C$  finden wir unter der Marke  $y^2 \sqrt{x}$  ( $4 \cdot \sqrt{3} = 6,928$ ). In  $D$  steht unter der Marke  $y^6 \cdot \sqrt{x^3}$  ( $64 \cdot \sqrt{27} = 332,5$ ).

Setzen wir  $x = y$ , so finden wir in  $B$  die Zahl  $x^5$ , z. B. für  $x = 2$  die Zahl 32. In  $C$  steht unter der Marke  $x^2 \sqrt{x}$  ( $4 \cdot \sqrt{2} = 5,65$ ) und in  $D$ :  $x^7 \cdot \sqrt{x}$  ( $2^7 \sqrt{2} = 180,9$ ).

Stellen wir den Anfang oder das Ende der Zunge über  $x$  von  $C$ , z. B. über 2 und schieben wir die Marke des Läufers auf  $y$  von  $P - Q$ , z. B. auf 3, so lesen wir unter der Marke in  $B$  die Größe  $x^2 \cdot y^4$  ( $4 \cdot 81 = 324$ ) und in  $C$ :  $xy^2$  ( $2 \cdot 9 = 18$ ) und in  $D$  die Größe  $x^3y^6$  ( $8 \cdot 729 = 5832$ ) ab.

Setzen wir hier  $x = y$ , z. B.  $= 2$ , so finden wir  $x^6$  ( $64$ )  $x^3$  ( $8$ ) und  $x^9$  ( $512$ ). Stellen wir endlich den Anfang oder das Ende der Zunge über eine Zahl  $x$ , z. B. 2, von  $D$  und schieben wir die Marke auf  $y$ , z. B. 3, von  $P - Q$ , so lesen wir unter der Marke in  $B$  die Größe  $\sqrt[3]{x^2} \cdot y^4$  ( $\sqrt[3]{4} \cdot 81 = 128,5$ ) und in  $C$  die Größe  $\sqrt[3]{x} \cdot y^2$  ( $\sqrt[3]{2} \cdot 9 = 11,33$ ) ab. Gleichzeitig finden wir unter der Marke in  $D$  die Größe  $x \cdot y^6$  ( $2 \cdot 729 = 1458$ ). Setzen wir  $x = y$ , z. B.  $= 2$ , so finden wir  $x^4 \sqrt[3]{x^2}$  ( $25,39$ )  $x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$  ( $5,04$ ) und  $x^7$  ( $128$ ). Diese wenigen Beispiele mögen genügen, um die Vorzüge des Maßstabes  $P - Q$  zu zeigen.

Die meisten Rechenschieber tragen eine Skala, auf welcher die Länge von 25 cm in eine Anzahl, gewöhnlich 500, gleiche Teile geteilt ist. Wird diese Skala mit dem logarithmischen Maßstab  $C$  verglichen, welcher die Zahlen 1—10 trägt, so können wir die Logarithmen von zwei- bis dreistelligen Zahlen näherungsweise auf drei Stellen ablesen. Diese Einrichtung gestaltet sich beim Schieber Pozzi besonders vorteilhaft. Zwischen den Maßstäben  $P - Q$  finden wir einen Maßstab  $L$  (Fig. 2), welcher in 1000 gleiche Teile geteilt ist. Von diesen 1000 Teilen korrespondieren 500 mit dem über  $L$  liegenden Maßstabe  $P$  und 500 mit dem unter  $L$  liegenden Maßstabe  $Q$ . Stellen wir nun die Marke auf eine Zahl des Maßstabes  $P$ , z. B. auf 253, so können wir in  $L$  die Mantisse, 403, des Logarithmus der dreistelligen Zahl genau ablesen. Suchen wir auf  $Q$  eine Zahl, z. B. 732, so finden wir auf der unteren Skala von  $L$  die Mantisse 864. Die Genauigkeit, mit welcher also die Logarithmen von dreistelligen Zahlen bestimmt werden können, ist beim Schieber Pozzi bei weitem größer als bei den gewöhnlichen Rechenschiebern. Sie ist für viele Fälle der Praxis genügend, so daß wir z. B. Exponentialgleichungen wenigstens ebenso genau und schnell rechnen können, wie bei einigen Schiebern (z. B. System „Peter“), welche für diese Berechnungen besondere Skalen haben.

Mit den Rechenschiebern, welche numerische Aufgaben lösen, wird meistens auf demselben Stabe ein trigonometrischer Schieber verbunden. Wir haben den Eindruck, daß im allgemeinen diese trigonometrischen Schieber wenig gebraucht werden. Theoretisch lassen sich damit freilich viele Aufgaben lösen, und die ganze Dreiecksrechnung kann näherungsweise eingestellt werden. In Wirklichkeit liegt aber die Sache so, daß die ganze Dreiecksrechnung in den Mittelschulen

einen breiten, oft allzu breiten, Raum einnimmt und dort viel Gelegenheit zu schönen Aufgaben bietet. Der praktische Ingenieur dagegen hat es gewöhnlich nur mit den einfachsten Fällen der Trigonometrie zu tun. Mehr Wert hat diese für den Geometer und Geodäten. Aber diese Techniker verlangen für ihre Resultate eine Genauigkeit, welche der Rechenschieber in den wenigsten Fällen bieten kann. Für diese Zwecke müssen daher besondere Schieber gebraucht werden. Dieses mögen die Gründe sein, warum der trigonometrische Schieber nur selten benutzt wird.

Zahlreich sind die Anordnungen auf den Rechenschiebern, welche zur Bestimmung der Funktionswerte von sinus und tangens dienen. Meistens erhält man sofort die Logarithmen dieser Werte und kann sie mit den Logarithmen der Zahlen kombinieren. Die Art, in welcher Pozzi den trigonometrischen Schieber anordnet, ist eine originelle und geistreiche. Wir finden auf der Vorderseite der Zunge zwischen den Maßstäben  $M$  und  $N$  eine mit  $T$  bezeichnete Skala (Fig. 1). Sie zerfällt in sieben verschiedene Teile. Die ersten drei gestatten für hundertteilige Winkel auf dem Maßstabe von  $B$  die Werte von  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  (I)  $\frac{\text{tg } \alpha}{\alpha}$  (II) und  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha}$  (V) abzulesen. Setzen wir diese Werte unter  $\alpha$  von  $A$ , so können wir in  $A$  über dem Nullpunkte der Zunge diese Werte von  $\sin \alpha$ ,  $\text{tg } \alpha$  und  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  finden. In  $B$  stehen über dem Nullpunkte die reziproken Werte von  $\text{cosec } \alpha$ ,  $\text{ctg } \alpha$  und  $\sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha$ . Der Maßstab  $T$  trägt noch die Werte von  $\frac{\alpha}{\text{tg } \alpha}$  (III) von  $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$  (IV). Am Ende des Maßstabes stehen nochmals diese Werte. Sie sind auf eine Länge von 25 cm aufgetragen, so daß sie mit dem Maßstabe  $C$  in Beziehung gesetzt werden können. Sie gestatten dann, die Werte von  $\sin^2 \alpha$  und  $\text{tg}^2 \alpha$  zu bestimmen. Diese kurze Übersicht über den trigonometrischen Schieber Pozzi zeigt uns, daß wir eine große Anzahl von Einstellungen machen können. Aber wir glauben, daß auch für diese Anordnungen das gilt, was wir oben sagten. So lange es sich nur um die theoretische Zusammenstellung von Aufgaben handelt, welche man für einen allgemeinen Winkel  $\alpha$  mit Hilfe des Schiebers lösen kann, ist man überrascht über die Vieltätigkeit der möglichen Probleme. Für die praktischen Bedürfnisse möchte aber vor allem die Strecke von 25 cm doch zu kurz bemessen sein, um sieben Skalen in brauchbarer Form zu tragen. Wenn doch ein trigonometrischer Schieber angebracht werden soll, so würden wir eine Skala von  $\sin \alpha$  und  $\text{tg } \alpha$  für 90teilige Winkel in Verbindung mit dem Maßstabe  $C$  vorziehen.

Der Läufer, welchen Pozzi benutzt, trägt drei Marken. Die Ent-

fernung zwischen der ersten und zweiten gibt den  $\log \frac{4}{\pi}$ . Der Abstand zwischen der zweiten und der dritten ist gleich  $\log \sqrt{3}$ . Die erste Entfernung läßt sich bequem gebrauchen, wenn der Kreisinhalt  $J$  aus dem Durchmesser  $d$  berechnet werden soll. Es ist

$$J = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \frac{d^2}{\left(\frac{4}{\pi}\right)} = \frac{d^2}{1,273}$$

Stellen wir also die mittlere Marke über  $d$  im Maßstabe  $C$ , so lesen wir über der ersten Marke in  $B$  den Kreisinhalt ab.  $\sqrt{3}$  kommt bei vielen Berechnungen vor. Das Anbringen solcher Konstanten auf dem Läufer scheint also seine Vorteile zu haben. Aber es hat auch seine Nachteile, auf welche wir aufmerksam machen möchten. Es bedingt eine größere Ausdehnung der Glasfläche, dies wieder, abgesehen von den Kosten der größeren Umrahmung, eine vermehrte Gefährdung des Glases. Dazu kommt die Möglichkeit der Verwechslung der Marken, welche um so leichter vorkommen kann, als die Aufmerksamkeit beim Rechnen sich in erster Linie auf das zu lösende Problem konzentriert. Ferner ist zu bemerken, daß die eine oder andere Marke über den Schieber hinausfallen kann, und daß dann die Ablesung unter der Marke unmöglich ist. Überdies trägt jeder Schieber die Größe  $\pi$ , und wer  $\sqrt{3}$  nicht auswendig weiß, kann diesen Wert bei geschlossenem Schieber sofort auffinden. Wir ziehen daher einen mäßig breiten Läufer mit der Marke in der Mitte vor und möchten wünschen, daß die Umrahmung links und rechts so schmal wie möglich gehalten werde, damit sie nur wenig Flächenraum des Schiebers verdeckt.

Auf der Rückseite des Rechenschiebers befindet sich gewöhnlich eine kleine Zusammenstellung von Konstanten und Formeln. Dieselbe ist mehr oder weniger individuell, denn der eine braucht dies und der andere jenes besonders häufig. Wir könnten uns daher auch denken, daß vielen Praktikern mit einem unbeschriebenen Streifen ebensogut gedient wäre, auf welchen er sich selbst die Größen notieren kann, welche er für seine Zwecke besonders häufig braucht.

Ing. Giovanni Pozzi, Professor an der Gewerbeschule Omar in Novara, hat außer der oben erwähnten kurzen Instruktion für seinen Rechenschieber noch eine Theorie<sup>1)</sup> und ein Handbuch<sup>2)</sup> verfaßt. Der Rechenschieber selbst liegt in vorzüglicher Ausstattung vor, welche Albert Nestler in Lahr hergestellt hat (D. R.-Patent Nr. 173660). In dieser Form darf er dem Praktiker angelegentlich empfohlen werden.

1) Il regolo calcolatore Pozzi. Torino, F. Bardelli u. Co. 1911.

2) Il regolo calcolatore e le sue applicazioni. Manuale Hoepli. 2 ed. 1910. Applicazioni del Regolo calcolatore Pozzi. Torino 1913.

## The Design and Theory of a Mechanism for Illustrating Certain Systems of Lines of Force and Stream Lines.<sup>1)</sup>

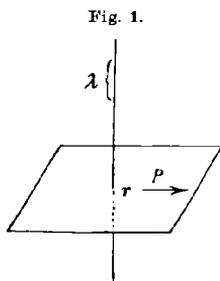
By W<sup>m</sup> H. ROEVER, St. Louis, U. S. A.

With 2 tables and 4 figures in the text.

§ 1. **Description of Mechanism.** The mechanism, which is shown in photographs 1 and 2, consists essentially of two wheels, about eight inches in diameter, which are capable of rotating around parallel axes in planes, which are not more than one half inch apart. These wheels are provided either with spokes as shown in photograph 1, or with slotted webs as shown in photograph 2. The rest of the mechanism consists of a hand motor and a series of belt-driven cone pulleys by means of which the wheels just described may be given various angular velocity ratios.

When the motor is put into operation, the observer will see a system of curves, the nature of which depends on the velocity ratio and the forms of the spokes, or slots, of the wheels.

These curves are the loci of the points of intersection of the spokes, or slots, of one wheel with those of the other. It is the object of this paper to show that, when the spokes, or slots, are radiating straight lines (as shown in photograph 1) or co-polar congruent logarithmic spirals of any form (as for instance those shown in photograph 2), the system of curves observed represents the lines of force or the stream lines, which correspond to a problem in each of several branches of mathematical physics. The accompanying photographs show a few of the systems which the machine can produce.



§ 2. **Two Special Fields of Force.** In order to have a starting point let us consider the following two fields of force.

*Field I.* The electrostatic force at a point  $P$  (Fig. 1.), at distance  $r$  from an infinite straight line which carries a uniform charge  $\lambda$  per unit length, is represented in magnitude by the expression  $\frac{2\lambda}{r}$  (c. g. s. units). The vector representing this force has its origin at  $P$  and lies along the

1) Presented to the *American Mathematical Society*, April and November 1912. See *Bulletin* of this society, Vol. XVIII, No. 9, p. 435 and Vol. XIX, No. 5, p. 220.

perpendicular from  $P$  to the electrified line. Since the particle at  $P$  is supposed to be positive, the vector is directed away from or towards the line according as  $\lambda$  is positive or negative.

*Field II.* The electro-magnetic force at a point  $P$  (Fig. 2.), at distance  $r$  from an infinite straight wire which carries a constant current of electricity  $j$ , is represented in intensity by the expression  $\frac{2j}{r}$  (c. g. s. units). The vector representing this force has its origin at  $P$  and lies along the straight line which passes through  $P$  and is perpendicular both to the wire and the perpendicular from  $P$  to the wire. The direction of this vector is such that the arrow head is towards the left hand of a person facing  $P$  and swimming in the current which flows from his feet to his head.

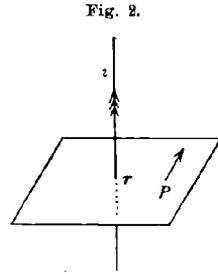


Fig. 2.

§ 3. **Fields I and II in terms of complex variable.** The fields I and II, just described, can be very simply represented in terms of the complex variable.

*Field I in terms of the complex variable.* Let the plane  $\pi$  which passes through  $P$  and is perpendicular to the electrified line be that of the complex variable, the zero of which is at the point in which the electrified line pierces  $\pi$ . The point  $P$  is then a general point  $z = x + iy$  of this plane. If we now think of the point  $z = 0$  as the abode of a particle of mass  $m = 2\lambda$ , the law of the intensity of the force being that of the inverse distance, then the vector represented in Fig. 1 and described in § 2, is completely represented by the complex quantity

$$(1) \quad m \cdot K\left(\frac{1}{z}\right),$$

in which the symbol  $K\left(\frac{1}{z}\right)$  stands for the conjugate of  $\frac{1}{z}$  (see Fig. 3).

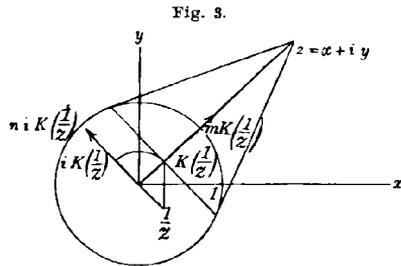


Fig. 3.

*Field II in terms of the complex variable.* Now let the plane  $\pi$  which passes through  $P$  (Fig. 2.) and is perpendicular to the wire carrying the current be regarded as that of the complex variable, the zero of which is at the point in which the wire pierces  $\pi$ . If now we put  $n = 2j$ , it is easy to see that the vector represented in Fig. 2 and described in § 2 is completely represented by the complex quantity

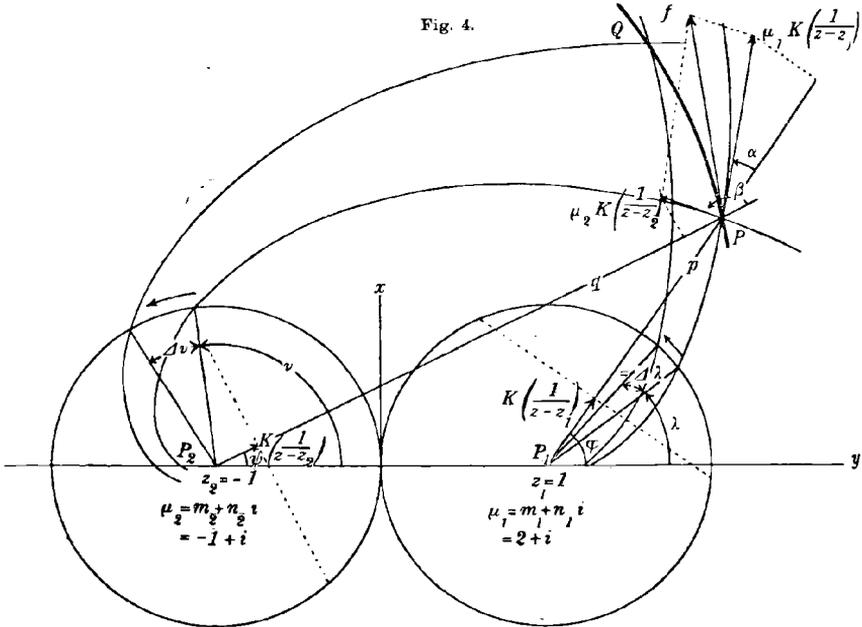
$$(2) \quad ni K\left(\frac{1}{z}\right).$$

§ 4. **Imaginary and Complex Masses.** It appears from this method of representation that we may regard the force of Field I as due to a real mass  $m$ , and that of Field II as due to a pure imaginary mass  $ni$ .

*Field III.* Let us now imagine — for the moment disregarding the possibility of physical interpretation — that the point  $z = 0$  is the abode of a complex mass

$$\mu = m + ni,$$

Fig. 4.



where  $m$  and  $n$  are real numbers, and that the force at a general point  $z$  is the resultant of the two forces just formulated in § 3, namely

$$(3) \quad \mu K\left(\frac{1}{z}\right).$$

*Field IV.* Furthermore, let us assume that the force at a general point  $z$  of the complex plane which is due to the two complex masses

$$\mu_1 = m_1 + n_1 i, \quad \mu_2 = m_2 + n_2 i,$$

situated respectively at the points  $z_1$  and  $z_2$ , is represented by the complex expression

$$(4) \quad f = \mu_1 K\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + \mu_2 K\left(\frac{1}{z-z_2}\right).$$

§ 5. **Equations of Lines of Force of Field III.** Let us now obtain the lines of force of the field III due to the complex mass  $\mu = m + ni$  at the origin. In order to do this let us put

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

where

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}.$$

Then

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

$$K\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

and since

$$\mu = m + ni,$$

$$\mu K\left(\frac{1}{z}\right) = X + Yi,$$

where

$$X = \frac{1}{r} (m \cos \varphi - n \sin \varphi), \quad Y = \frac{1}{r} (m \sin \varphi + n \cos \varphi).$$

Now

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{and} \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},$$

where

$$U = m \log r + n \varphi.$$

Hence the function  $U$  may be regarded as the potential function of Field III.

But  $U$  is the real part of the analytic function

$$(m - ni) \log z = U + Vi.$$

Therefore the pure imaginary part,

$$V = -n \log r + m \varphi,$$

may be regarded as the stream function.

Hence the equation

$$(3_0) \quad V = \text{const.}$$

is that of the lines of force of Field III.

The curves (3<sub>0</sub>) are the co-polar logarithmic spirals which cut the straight lines through the origin at the constant angle  $\alpha = \text{arc cot } \frac{m}{n}$ .

When  $\mu = m$  is real, equation (3<sub>0</sub>) takes the form

$$(3_1) \quad \varphi = \text{const.},$$

and when  $\mu = ni$  is a pure imaginary, equation (3<sub>0</sub>) becomes

$$(3_2) \quad \log r = \text{const.}$$

These are the lines of force of fields I and II respectively.

**§ 6. Equations of Lines of Force of Field IV.** Let us now obtain the lines of force of field IV due to the complex masses  $\mu_1 = m_1 + n_1 i$  and  $\mu_2 = m_2 + n_2 i$  which are situated at the points  $z_1$  and  $z_2$  respectively. For the problem in hand no generality will be lost in assuming (see Fig. 4)  $z_1 = 1$  and  $z_2 = -1$ . Then let us put  $z - z_1 = z - 1 = p(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $z - z_2 = z + 1 = q(\cos \psi + i \sin \psi)$ ,

where

$$p = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad q = \sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{p}, \quad \cos \varphi = \frac{x-1}{p}, \quad \sin \psi = \frac{y}{q}, \quad \cos \psi = \frac{x+1}{q}.$$

Then

$$K\left(\frac{1}{z-z_1}\right) = \frac{1}{p} (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad K\left(\frac{1}{z-z_2}\right) = \frac{1}{q} (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Since  $\mu_1 = m_1 + n_1 i$  and  $\mu_2 = m_2 + n_2 i$ ,

$$\mu_1 K\left(\frac{1}{z-z_1}\right) = X_1 + Y_1 i \quad \text{and} \quad \mu_2 K\left(\frac{1}{z-z_2}\right) = X_2 + Y_2 i,$$

where

$$X_1 = \frac{1}{p} (m_1 \cos \varphi - n_1 \sin \varphi), \quad X_2 = \frac{1}{q} (m_2 \cos \psi - n_2 \sin \psi),$$

and

$$Y_1 = \frac{1}{p} (m_1 \sin \varphi + n_1 \cos \varphi), \quad Y_2 = \frac{1}{q} (m_2 \sin \psi + n_2 \cos \psi).$$

Now

$$X_1 + X_2 = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{and} \quad Y_1 + Y_2 = \frac{\partial U}{\partial y},$$

where

$$U = m_1 \log p + m_2 \log q + n_1 \varphi + n_2 \psi.$$

This is the potential function of the Field IV, and is the real part of the analytic function

$$(m_1 - n_1 i) \log(z - z_1) + (m_2 - n_2 i) \log(z - z_2) = U + Vi.$$

Therefore, the pure imaginary part

$$V = -n_1 \log p - n_2 \log q + m_1 \varphi + m_2 \psi$$

is the stream function.

Therefore the equation

$$(4_0) \quad -n_1 \log p - n_2 \log q + m_1 \varphi + m_2 \psi = \text{const.}$$

is that of the lines of force of Field IV.

When  $\mu_1 = m_1$  and  $\mu_2 = m_2$  are real, equation (4<sub>0</sub>) becomes

$$(4_1) \quad m_1 \varphi + m_2 \psi = \text{const.},$$

and when  $\mu_1 = n_1 i$  and  $\mu_2 = n_2 i$  are pure imaginaries equation (4<sub>0</sub>) assumes the form

$$(4_2) \quad n_1 \log p + n_2 \log q = \text{const.}$$

**§ 7. The Theory of the Mechanism.** We are now in a position to prove that the systems of curves which are produced by the mechanism described in § 1 are represented by equations (4<sub>0</sub>) § 6.

The lines of force due to the mass  $\mu_1 = m_1 + n_1 i = m_1(1 + i \tan \alpha)$  situated at the point  $P_1, (z_1)$  are the logarithmic spirals

$$(5) \quad -\tan \alpha \cdot \log p + \varphi = \lambda,$$

and those due to  $\mu_2 = m_2 + n_2 i = m_2(1 + i \tan \beta)$  at  $P_2, (z_2)$  are

$$(6) \quad -\tan \beta \cdot \log q + \psi = \nu.$$

Let us now put

$$(7) \quad \lambda = at + b \quad \text{and} \quad \nu = ct + d,$$

where  $a, b, c, d$  are real constants and  $t$  is a parameter which we will take to represent the time.

By this assumption the spirals (5) and (6) (which are represented by the curves  $P_1P$  and  $P_2P$  respectively in Fig. 4.) are made to rotate around their poles with constant angular velocities.

In order to eliminate  $t$  between equations (5) and (6), in which  $\lambda$  and  $\nu$  have the values given by equations (7), it is only necessary to multiply (5) by  $c$ , (6) by  $-a$  and add. The eliminant thus obtained is

$$(8) \quad -c \tan \alpha \cdot \log p + a \tan \beta \cdot \log q + c\varphi - a\psi = bc - ad.$$

A comparison of this equation with the equation

$$-m_1 \tan \alpha \cdot \log p - m_2 \tan \beta \cdot \log q + m_1 \varphi + m_2 \psi = \text{const.},$$

which is identical with equation (4<sub>0</sub>), enables us to state the

**Theorem I.** *The lines of force due to the two complex masses  $\mu_1 = m_1(1 + i \tan \alpha)$  and  $\mu_2 = m_2(1 + i \tan \beta)$ , which are situated at the points  $P_1$  and  $P_2$  respectively, are the loci of the points of intersection of the logarithmic spirals which are the lines of force due to  $\mu_1$  alone with those which are the lines of force due to  $\mu_2$  alone, provided that these two rigid systems of spirals rotate around their respective poles with angular velocities, the ratio of which is the negative reciprocal of the ratio of the real parts of  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , that is, provided  $\frac{a}{c} = -\frac{m_2}{m_1}$ .*

If, for instance,  $\mu_1 = 2 + i$  and  $\mu_2 = -1 + i$  as shown in Fig. 4, the spirals of pole  $P_2$  must rotate twice as fast as those of  $P_1$ , and the rotations must be in the same sense.

We have before us also the proof of

**Theorem II.** *If two systems of co-polar logarithmic spirals of angles  $\alpha$  and  $\beta$  rotate around their respective poles  $P_1$  and  $P_2$  with angular velocities which are proportional to  $a$  and  $c$ , then the loci of the points*

of intersection of the curves of one system with those of the other are the lines of force due to the two complex masses  $\mu_1 = m_1(1 + i \tan \alpha)$ ,  $\mu_2 = m_2(1 + i \tan \beta)$ , which are situated at  $P_1$  and  $P_2$  respectively, the ratio of the real parts of which is the negative reciprocal of the ratio of the angular velocities, i. e.  $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{c}{a}$ .

Theorem I fails when both of the masses  $\mu_1, \mu_2$  are pure imaginaries, and also when only one of these is a pure imaginary. For, the lines of force corresponding to a pure imaginary mass are concentric circles [see eq. (3<sub>2</sub>)], and such circles on rotation around the common centre would merely move along themselves. In these cases the mechanism also fails.

In all other cases, the Theorem (and also the mechanism) does not fail. A special case of interest is that in which both masses are real. In this case the systems of spirals become systems of radiating right lines of radiants  $P_1$  and  $P_2$ , and the corresponding loci are represented by the equations (4<sub>1</sub>).<sup>1)</sup>

§ 8. Applications. In § 4 we introduced the notion of complex masses without regard to the possibility of physical interpretation. Since then we have seen that the functions  $U$  and  $V$  of §§ 5, 6 are the real and pure imaginary parts of analytic functions and hence satisfy Laplace's equation  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ .

For this reason the systems of curves (4<sub>0</sub>), which the mechanism described in § 1 is capable of representing<sup>2)</sup>, may be given the following physical interpretations.<sup>3)</sup>

1. Stream lines in the steady flow of heat,
2. " " " " " " " " electricity,
3. " " " " " " " " motion of an incompressible fluid,
4. Lines of force in gravitational or electrostatic fields,
5. Sections of equipotential cylinders in electromagnetic fields.

1) For this special case Theorems I and II were proved by the author in 1896. See *Transactions of the Academy of Science of St. Louis, Vol. VII, No. 9*. These curves (4<sub>1</sub>) are called by Johnson (who derived their Cartesian equations but did not point out their connection with mathematical physics) *Generalized Strophoids*. See *American Journal of Mathematics, Vol. III, p. 320*. For other references concerning curves (4<sub>1</sub>), see abstract of the author's paper on this subject in the *Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. XVIII, No. 9, p. 435*.

2) See the exception noted in § 7.

3) See W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (1907) p. 534.

For example

in photograph 3	for which	$\mu_1 = m_1 = 1$	and	$\mu_2 = m_2 = -1$ ,	and
" " 4	" "	$= 1$	"	1,	"
" " 5, 6 <sup>1</sup> )	" "	$= -1$	"	2,	"
" " 7	" "	$= 1$	"	2	

the curves shown may be regarded as the stream lines of heat, electricity or an incompressible fluid from a source at one hub to a source (a sink is a negative source) at the other, the intensities of these sources being as  $m_1$  is to  $m_2$ . These curves may also be regarded as the lines of force due to a pair of infinite electrified lines of constant charges per unit length, the lines being perpendicular to the plans of the photographs at the hubs, and the charges being as  $m_1$  is to  $m_2$ . Finally, these curves may also be regarded as the right sections of the equipotential cylinders corresponding to a pair of infinitely long wires which carry constant currents proportional to  $m_1$  and  $m_2$ , the wires being perpendicular to the plans of the photograph at the pictures of the hubs.

The photographs 8, 9, 10 for which  $\mu_2 = -\mu_1$ ,  $\mu_2 = \mu_1$ ,  $2\mu_2 = -\mu_1$  respectively, where  $\mu_1 = 2 + i$ , also represent problems in these various branches of mathematical physics in which, however, the boundary conditions are more complex than in the cases illustrated by photographs 3 to 7.

It should be noted that the slots in the wheels shown in photograph 2 do not roughly represent logarithmic spirals, but that the two boundaries of each slot are accurately constructed co-polar logarithmic spirals, and therefore the broad white bands in photographs 8, 9 and 10 are not merely rough approximations to the curves represented by eq. (4<sub>0</sub>), but the two boundaries of each band are very accurate representations of these curves.

The following applications are also of interest.

If  $\mu_1 = -\mu_2 = m(1 + i \tan \alpha)$ , equation (4<sub>0</sub>) may be written

$$\frac{p}{q} = Ce^{(\rho - \nu) \cot \alpha},$$

where  $C$  is a constant. These curves are called Bicircular Spirals.<sup>2</sup>) They are shown in photograph 8 for  $\cot \alpha = 2$ , and are the *stereographic projections of the spherical loxodromes* when neither pole is projected to infinity.

1) The mechanism is so built that the distance between centers is adjustable.

2) See Holzmüller, *Stereometrie*, Vol. III, p. 300.

It is also interesting to note that just as the radiating straight lines  $\varphi = \text{const.}$ , the concentric circles  $\log r = \text{constant}$ , and the logarithmic spirals  $r = Ce^{\varphi \cot \alpha}$  [equation (3<sub>0</sub>) where  $\cot \alpha = \frac{m}{n}$  and  $C$  is a constant] are the lines of flow of the continuous hyperbolic, elliptic and loxodromic linear transformations of the complex plane for which the invariant points are 0 and  $\infty$ , so the system of circles  $\varphi - \psi = \text{const.}$ , the orthogonal system of circles  $\log \frac{p}{q} = \text{const.}$ , and the Bicircular Spirals  $\frac{p}{q} = Ce^{(\varphi - \psi) \cot \alpha}$  are the lines of flow of the continuous hyperbolic, elliptic and loxodromic linear transformations for which the invariant points are  $z_1$  and  $z_2$ .<sup>1)</sup>

## Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie.

Von G. KOLOSSOFF in Dorpat-Juriew.

### § 1. Die Differentialgleichungen des ebenen Problems

lauten folgendermaßen<sup>2)</sup>:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 \\ \nabla_1^2 (X_x + Y_y) = 0 \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

wo  $X_x, Y_y, X_y$  die drei Spannungskomponenten sind und

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ ist.}$$

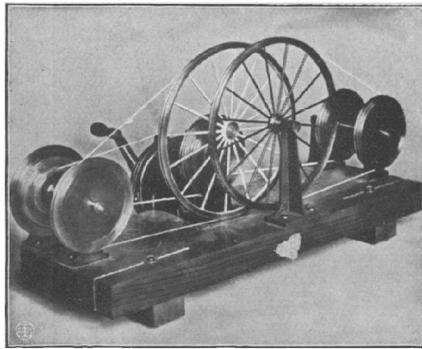
Die Beziehungen zwischen Spannung und Formänderung lauten<sup>3)</sup>:

$$(2) \quad \begin{aligned} X_x &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ Y_y &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ X_y &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

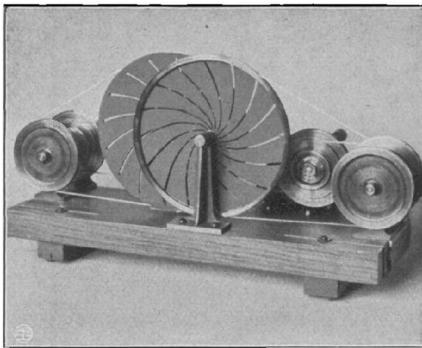
1) See Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* (1907) pp. 223—7.

2) Unter Ausschluß von Massenkräften. In der Bezeichnungsweise schließe ich mich dem „Lehrbuch der Elastizität“ von A. E. H. Love 1907 S. 242 an. Vgl. auch „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen“ von A. Timpe im 52. Bande der Zeitschrift f. Math. u. Physik S. 348—383 und Enzyklop. d. math. Wissensch. IV 23, Nr. 36; IV 25 Nr. 11a.

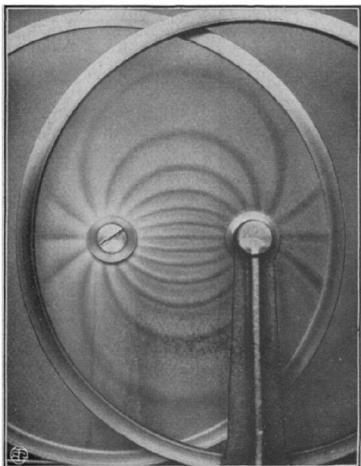
3) Love S. 148.



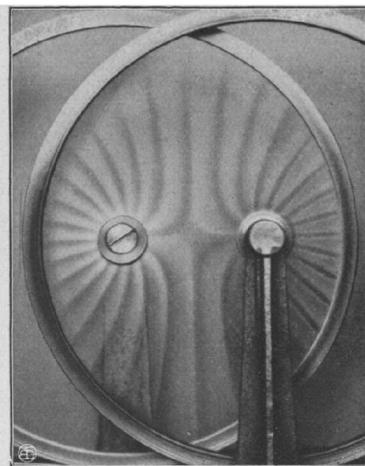
1



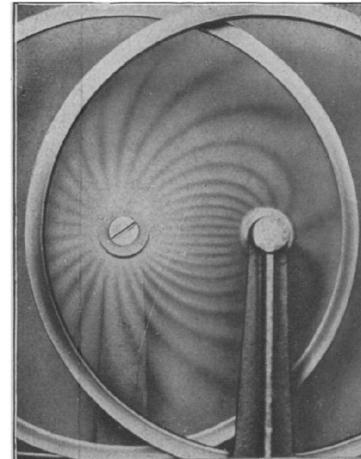
2



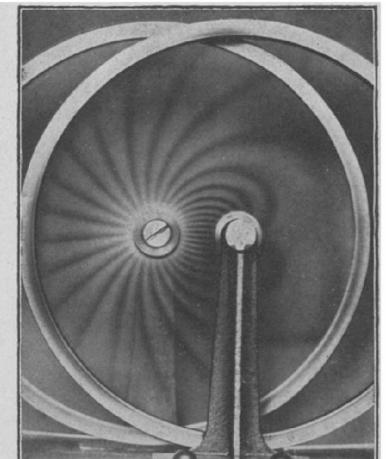
3



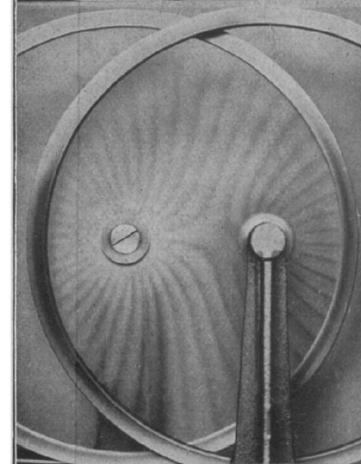
4



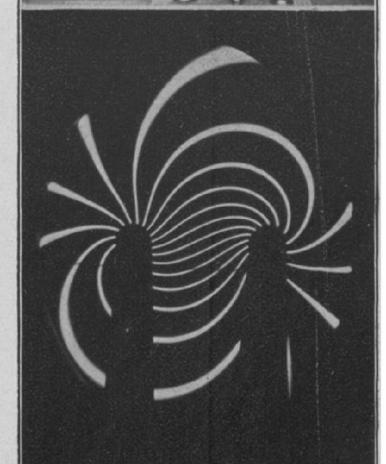
5



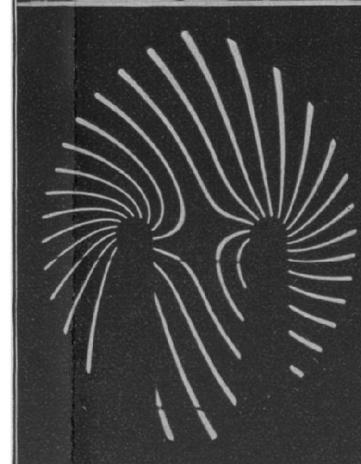
6



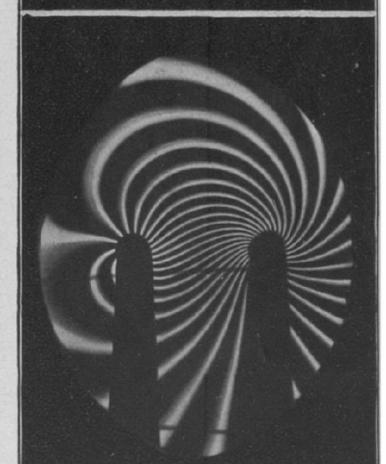
7



8



9



10



Führt man nunmehr die Abkürzungen ein:

$$(3) \quad \begin{aligned} D_{xy} F &= \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \\ \overline{D}_{xy} F &= \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

so ergeben sich folgende Eigenschaften der Operationen  $D_{xy}$  und  $\overline{D}_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \text{I. } D_{xy} \Sigma F &= \Sigma D_{xy} F & \text{II. } D_{xy}(kF) &= k D_{xy} F \\ \overline{D}_{xy} \Sigma F &= \Sigma \overline{D}_{xy} F & D_{xy}(kF) &= k \overline{D}_{xy} F \end{aligned}$$

( $k = \text{const.}$ )

$$\begin{aligned} \text{III. } D_{xy}(F_1 F_2) &= F_1 D_{xy} F_2 + F_2 D_{xy} F_1 \\ \overline{D}_{xy}(F_1 F_2) &= F_1 \overline{D}_{xy} F_2 + F_2 \overline{D}_{xy} F_1 \end{aligned}$$

$$\text{IV. Ist } F = P + Qi = F(z), \quad (z = x + iy)$$

und

$$\overline{F} = P - Qi = F(z_1), \quad (z_1 = x - iy),$$

dann ist

$$D_{xy} F = 0, \quad \overline{D}_{xy} \overline{F} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$D_{xy} \overline{F} = 2 D_{xy} P - 2 F'(z_1)$$

$$\overline{D}_{xy} F = 2 \overline{D}_{xy} P = 2 F'(z),$$

da

$$\overline{D}_{xy} P = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = F''(z)$$

und

$$D_{xy} P = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} = F''(z_1) \text{ ist.}$$

V. Aus

$$D_{xy}(P + iQ) = (\alpha + i\beta) F(z)$$

und

$$D_{xy}(\gamma + i\delta) = \alpha + i\beta$$

ergibt sich:

$$P + iQ = (\gamma + i\delta) F(z) + \psi(z),$$

wo  $\psi(z)$  eine beliebige Funktion der komplexen Veränderlichen  $z$  ist.

Bei

$$\alpha - i\beta = f(z) \quad \text{und} \quad \alpha + i\beta = f(z_1)$$

ist

$$\gamma + i\delta = \frac{1}{2} \int f(z_1) dz_1.$$

VI. Aus

$$\overline{D}_{xy}(P + iQ) = (\alpha + i\beta) F(z_1)$$

und

$$\overline{D}_{xy}(\gamma + i\delta) = \alpha + i\beta$$

ergibt sich:

$$P + iQ = (\gamma + i\delta) F(z_1) + \psi(z_1),$$

wo  $\psi(z_1)$  eine beliebige Funktion von  $z_1 = x - iy$  ist.

Bei

$$\alpha + i\beta = f(z)$$

ist

$$\gamma + i\delta = \frac{1}{2} \int f(z) dz.$$

Die Differentialgleichungen (1) lassen sich in der Form schreiben:

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \frac{\partial(X_x - Y_y)}{\partial x} &= - \frac{\partial(X_x + Y_y)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} - \frac{\partial(X_x - Y_y)}{\partial y} &= - \frac{\partial(X_x + Y_y)}{\partial y} \\ \nabla_1^2(X_x + Y_y) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(4) \quad D_{xy}[2X_y + i(X_x - Y_y)] = -i\Phi'(z),$$

wo  $X_x + Y_y$  der reelle Teil von  $\Phi(z)$  ist.

Folglich (V) ist

$$(5) \quad 2X_y + i(X_x - Y_y) = (\gamma + i\delta)\Phi'(z) + F(z)$$

wo

$$(5^*) \quad D_{xy}(\gamma + i\delta) = -i.$$

Wir setzen:

$$\gamma + i\delta = -\frac{i}{2} \int dz_1 = -\frac{i}{2} z_1,$$

$$(6) \quad 2X_y + i(X_x - Y_y) = -i \frac{x-iy}{2} \Phi'(z) + F(z).$$

Nehmen wir für  $F(z)$  und  $\Phi(z)$  zwei ganze Funktionen von der Form

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

so erhalten wir die Lösung von A. Mesnager.<sup>1)</sup>

Aus (2) und (6) folgt:

$$(7) \quad \overline{D_{xy}}(v + iu) = \frac{1}{2} \mu (2X_y + i(X_x - Y_y)) = \frac{1}{2\mu} \left[ -i \frac{x-iy}{2} \Phi'(z) + F(z) \right].$$

Aus (1) und (2):

$$(8) \quad (\lambda + \mu) D_{xy}(v + iu) - (\lambda + 3\mu) \overline{D_{xy}}(v - iu) = i \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Phi(z).$$

Setzen wir in (8)  $-i$  statt  $i$ , so erhalten wir:

$$(9) \quad D_{xy}(u + iv) = -\frac{i}{4\mu} \Phi(z) + \frac{i(\lambda + 3\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)} \Phi(z_1).$$

Aus (7) und (9) folgt<sup>2)</sup>:

$$(10) \quad v + iu = \frac{1}{4\mu} \left( -i \frac{z_1}{2} \Phi(z) + \int F(z) dz + i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)} \int \Phi(z_1) dz_1 \right).$$

$\Phi(z)$  ist bis auf eine Konstante  $Ci$  vollständig bestimmt (sein reeller Teil ist  $X_x + Y_y$ ), und die entsprechende Verschiebung ist bestimmt bis auf eine willkürliche in einem starren Körper mögliche Verrückung.

1) Sur l'application de la théorie de l'élasticité C. R. 137, Nr. 24, p. 1475; Enzyklop. d. math. Wissensch. IV 25, Nr. 12a.

2) Vgl. Love § 144, S. 244 (9).

§ 2. Fall einer geradlinigen Begrenzung.

In dem Falle, wo die  $x$ -Achse die Begrenzung bildet, erhält man leicht die Auflösung des Problems durch Quadraturen.

Es sei an der Grenze, d. h. bei  $y = 0$

$$(1) \quad X_y = f_1(x), \quad Y_y = f_2(x).$$

Wir setzen in (5) § 1:

$$(2) \quad \begin{aligned} \gamma + i\delta &= -y^1) \\ 2X_y + i(X_x - Y_y) &= -y \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) \\ [2X_y + i(X_x - Y_y)]_{y=0} &= [F(z)]_{y=0} = [\varphi + i\psi]_{y=0}. \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$[2(X_y - iY_y)]_{y=0} = [\varphi + i(\psi - \Omega)]_{y=0},$$

wo

$$\Omega = X_x + Y_y;$$

oder

$$(3) \quad [2X_y]_{y=0} = [\varphi]_{y=0}, \quad [2Y_y]_{y=0} = [\Omega - \varphi]_{y=0}.$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$[\varphi]_{y=0} = 2f_1(x), \quad [\Omega - \psi]_{y=0} = 2f_2(x).$$

Die Funktionen  $\varphi$  und  $\Omega - \psi$  genügen den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\Omega - \psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Omega - \psi)}{\partial y^2} = 0,$$

und man kann

$$(4) \quad \varphi = \frac{2}{\pi_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s)y ds}{(s-x)^2 + y^2}$$

und

$$\Omega - \psi = \frac{2}{\pi_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s)y ds}{(s-x)^2 + y^2}$$

setzen. (4) ist der reelle Teil der Funktion von  $z$ :

$$-\frac{2i}{\pi_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s) ds}{s-z},$$

deren imaginärer Teil (welcher von  $\psi$  nur um eine Konstante verschieden ist) sich durch das Integral

$$\frac{2}{\pi_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s)f_1(s) ds}{(s-x)^2 + y^2}$$

1) Die Bedingung 5\* ist befriedigt.

ergibt. Folglich ist

$$(5) \quad \psi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s)f_1(s)ds}{(s-x)^2 + y^2} + C$$

$$(6) \quad F'(z) = \varphi + \psi i = -\frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s)ds}{s-z} + Ci$$

und

$$(7) \quad \Omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf_2(s) + (x-s)f_1(s)ds}{(s-x)^2 + y^2} + C.$$

Die Größe der Konstanten  $C$  hängt von der Größe der Spannungskomponenten in den unendlich entfernten Punkten ab.

Somit erhält man aus (2):

$$\begin{aligned} 2X_y &= -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi \\ X_x - Y_y &= y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \psi \\ 2X_y &= -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi \\ 2X_x &= y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \Omega + \psi \\ 2Y_y &= \Omega - y \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \psi. \end{aligned}$$

Setzen wir z. B.

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = \text{const.} = p \text{ (von } x = -a \text{ bis } x = +a),$$

d. h. hat man die Wirkung einer Drucklast, die über eine endliche Strecke  $2a$  einer geradlinigen Begrenzung gleichmäßig verteilt ist, so ist:

$$f_1(s) = 0, f_2(s) = 0 \text{ (für } x < -a \text{ und für } x > a)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \psi = C, \quad \Omega &= \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{y ds}{(s-x)^2 + y^2} + C = \frac{2p}{\pi} \left[ \text{arctg} \frac{s-x}{y} \right]_{-a}^{+a} + C \\ &\quad - \frac{2p}{\pi} \left( \text{arctg} \frac{a-x}{y} + \text{arctg} \frac{a+x}{y} \right) + C \end{aligned}$$

$$2X_y = -y \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$X_x - Y_y = y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + C$$

$$X_x + Y_y = \Omega = \frac{2p}{\pi} \left[ \text{arctg} \frac{a-x}{y} + \text{arctg} \frac{a+x}{y} \right] + C$$

$$2X_y = \frac{8a^2 y^2 x p}{\pi [(y^2 - x^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2]}$$

$$X_x - Y_y = \frac{4y(x^2 - y^2 - a^2)ap}{\pi [(y^2 + x^2 - a^2)^2 + 4y^2 a^2]} + C.$$

Daraus folgt:

$$X_y = \frac{4pa^2y^2x}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}$$

$$X_x = \frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] + \frac{2ya(x^2-y^2-a^2)p}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]} + C$$

$$Y_y = \frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] - \frac{2ya(x^2-y^2-a^2)p}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}.$$

Verschwanden die Spannungen in den unendlich entfernten Punkten, so ist  $C = 0$  und

$$X_x = \frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] + \frac{2pya(x^2-y^2-a^2)}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}$$

$$Y_y = \frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right] - \frac{2pya(x^2-y^2-a^2)}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}$$

$$X_y = \frac{4a^2y^2xp}{\pi[(y^2+x^2-a^2)^2+4a^2y^2]}.$$

Die Richtung der Hauptspannungen ergibt sich aus der Gleichung:

$$(8) \quad \operatorname{tg} 2 \Psi = \frac{2X_y}{X_x - Y_y} = \frac{2axy}{x^2 - y^2 - a^2}$$

(wo  $\Psi$  der Winkel einer der Hauptspannungen mit  $ox$  ist).

Wir setzen weiter:

$$f_1(s) = k \text{ (für } x > -a \text{ und für } x < a)$$

$$f_1(s) = 0 \text{ (für } x < -a \text{ und für } x > a)$$

$$f_2(s) = 0$$

$$\varphi = \frac{2k}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{y ds}{(s-x)^2 + y^2} = \frac{2k}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{s-x}{y} \right]_{-a}^{+a} = \frac{2k}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right)$$

$$\psi = \frac{2k}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{(x-s) ds}{(s-x)^2 + y^2} + C = -\frac{p}{\pi} \left[ \operatorname{lg} [(s-x)^2 + y^2] \right]_{-a}^{+a} + C = \frac{k}{\pi} \operatorname{lg} \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} + C.$$

Verschwanden die Spannungen im Unendlichen, so hat man  $C = 0$  und

$$2X_y = -y \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \varphi = -\frac{ky}{\pi} \left[ \frac{2(a+x)}{(a+x)^2 + y^2} + \frac{2(a-x)}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{2k}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) \right]$$

$$X_x - Y_y = y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \psi = \frac{ky}{\pi} \left( \frac{2y}{(a+x)^2 + y^2} - \frac{2y}{(a-x)^2 + y^2} \right) + \frac{k}{\pi} \operatorname{lg} \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2}$$

1) Dieses Resultat rührt von Michell [London Math. Soc. Proc. vol. 34 (1902, p. 134)] her, ist aber auf ganz anderem Wege mit Hilfe der Spannungsfunktion  $\frac{1}{2} \pi^{-1} p - [(r_2^2 \theta_2 - r_1^2 \theta_1)]$  gefunden worden, wo  $r_1, \theta_1$  und  $r_2, \theta_2$  Polarkoordinaten sind, die auf die X-Achse als Achse und die Endpunkte der den Druck erleidenden Strecke als Pole bezogen sind. Love S. 250.

oder

$$\begin{aligned}
 X_y &= -\frac{4ky a}{\pi} \frac{a^2 - x^2 + y^2}{(a^2 + y^2 + x^2)^2 - 4a^2 x^2} + \frac{k}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) \\
 X_x - Y_y &= -\frac{8ky^2 ax}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2 x^2]} + \frac{k}{\pi} \operatorname{lg} \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \\
 X_x + Y_y &= \Omega - \psi = \frac{k}{\pi} \operatorname{lg} \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} \\
 X_y &= \frac{k}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) - \frac{4kay}{\pi} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{(a^2 + y^2 + x^2)^2 - 4a^2 x^2} \\
 X_x &= \frac{k}{\pi} \operatorname{lg} \frac{(a+x)^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} - \frac{4kaxy^2}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2 x^2]} \\
 Y_y &= \frac{4kaxy^2}{\pi[(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4a^2 x^2]}.
 \end{aligned}$$

Die Richtungen der Hauptspannungen erhalten wir durch die Gleichung (8).

### § 3. Das Reziprozitätstheorem und die Transformation ebener Verzerrungszustände. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen.

I. Wir haben die Gleichung

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi(z_1)];$$

aus ihr und (6) § 1 ergibt sich:

$$X_y + iX_x = -\frac{i}{4} z_1 \Phi'(z) + \frac{1}{2} F(z) + \frac{1}{4} i [\Phi(z) + \Phi(z_1)] \dots$$

Somit erhalten wir

$$X_y + i \left[ X_x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (X_x + Y_y) \right] = -\frac{i}{4} z_1 \Phi'(z) + \frac{1}{2} F(z) + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} i [\Phi(z) + \Phi(z_1)].$$

Setzen wir statt

$$\begin{aligned}
 &\Phi(z) \text{ und } \frac{1}{2} F(z) + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} i \Phi(z) \\
 &\frac{1}{2\mu} \int \Phi(z) dz \text{ und } \frac{1}{2\mu} \int F(z) dz
 \end{aligned}$$

und vergleichen wir diese Ausdrücke mit (10) § 1, so gelangen wir zu folgendem Reziprozitätstheorem.

Jedem ebenen Spannungszustande ( $X_y, X_x, Y_y$ ) entspricht ein anderer; dessen Verschiebungen  $u, v$  erhalten wir mittels der Formeln:

$$u = X_x + \omega, \quad v = X_y,$$

wo

$$\omega = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (X_x + Y_y).$$

II. Mit Hilfe der Gleichung (6) § 1 gelangen wir auch zur Transformation ebener Verzerrungszustände.

Führen wir neue Veränderliche  $Z = X + iY$  ein, und setzen wir zwischen den Variablen  $z$  und  $Z$  die funktionale Beziehung

$$(3) \quad -i \frac{z_1}{2} \Phi'(z) + F(z) = M \left[ -i \frac{Z_1}{2} \Phi_1'(Z) + F_1(Z) \right]$$

fest, wo

$$Z_1 = X - iY$$

ist, so gelangen wir zu einem neuen ebenen Verzerrungszustand

$$\begin{aligned} & X_x' Y_y' X_y' \\ & 2X_y' + i(X_x' - Y_y') = -i \frac{Z_1}{2} \Phi_1'(Z) + F_1(Z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_x - Y_y &= M(X_x' - Y_y') \\ X_y &= M X_y'. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß ein spannungsfreier Rand im  $x, y$  System sich in einen durch normale Spannung beanspruchten Rand im  $X, Y$  System transformiert.

Diese Spannung hat in allen Punkten des transformierten Randes den gleichen Wert.

Die Spannungstrajektorien gehen in Spannungstrajektorien über.

Der einfachste Fall ist die Inversion von Spannungsverteilungen.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} zZ &= 1 \\ -i \frac{z_1}{2} \Phi'(z) + F(z) &= \frac{1}{ZZ_1} \left\{ -i \frac{Z}{2} \Phi' \left( \frac{1}{Z} \right) + ZZ_1 F \left( \frac{1}{Z} \right) \right\} \\ F_1(Z) &= -i \frac{Z}{2} \Phi' \left( \frac{1}{Z} \right) \\ \Phi_1(Z) &= -\frac{2}{i} \int Z F \left( \frac{1}{Z} \right) dZ \\ M &= \frac{1}{ZZ_1} = zz_1 = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

III. Führen wir ein neues Achsensystem  $x', y'$  ein.

Die auf die  $(x'y')$ -Achsen bezogenen Spannungskomponenten seien mit  $X_x' Y_x' X_y'$  bezeichnet. Die Formeln für die Transformation von Spannungskomponenten lauten:

$$(4) \quad \begin{cases} 2X_y' + i(X_x' - Y_y') = [2X_y + i(X_x - Y_y)] e^{2\theta} \\ X_x' + Y_y' = X_x + Y_y; \end{cases}$$

$\theta$  ist der Winkel zwischen den  $x$ - und  $x'$ -Achsen.

Es seien die Komponenten der am Rande angreifenden Kräfte  $U$  (Schubspannung),  $P$  (Normalspannung) gegeben und bilde die Richtung der Normale in einem Punkte des Randes mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\theta$ .

Dann haben wir am Rande gemäß (4):

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[ -\frac{iz_1}{2} \Phi'(z) + F(z) \right] e^{2\theta i} + \frac{i}{2} [\Phi(z) + \Phi(z_1)] &= 2(U + iP) = \\ &= \text{gegebene Funktion der Bogenlänge } S \text{ des Randes.} \end{aligned} \right.$$

Das ebene Problem der Elastizitätstheorie reduziert sich auf folgende Fragestellung:

Innerhalb einer geschlossenen Randkurve  $\sigma$  2 reguläre analytische Funktionen  $\Phi(z)$  und  $F(z)$  der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  zu finden, deren Werte auf  $\sigma$  der Relation (5) genügen.

Die Theorie der Integralgleichungen gibt die Mittel zur Lösung dieser Fragestellung, z. B. ist die Methode von D. Hilbert anwendbar.<sup>1)</sup> Freilich ist die Aufgabe wegen ihrer besonderen Einfachheit auch ohne dieses Hilfsmittel lösbar und zwar in den meisten Fällen, indem man zweimal die gewöhnliche Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials anwendet.

#### § 4. Krummlinige Koordinaten.

Bei vielen Problemen ist es angezeigt, Systeme krummliniger Koordinaten statt gewöhnlicher Cartesischer zu gebrauchen.

Wir setzen

$$\xi = \xi + i\eta = F(x + iy), \quad x + iy = f(\xi + i\eta) = f(\xi)$$

und führen statt Cartesischer Koordinaten  $x, y$  die krummlinigen Koordinaten  $\xi, \eta$  ein ( $\xi = \xi + i\eta$ ).

Es seien  $P, Q, U$  die drei Spannungskomponenten in krummlinigen Koordinaten. Wir haben die Transformationsformeln

$$(1) \quad 2U + i(P - Q) = e^{2\theta i} [2X_y + i(X_x - Y_y)]$$

$$(2) \quad P + Q = X_x + Y_y,$$

wo  $\theta$  der Winkel ist, welchen die neue Achse  $\xi$  mit der Achse  $x$  bildet.

---

1) Vgl. seine berühmte Abhandlung Gött. Nachr. 1905. Die Ergebnisse von D. Hilbert habe ich in meiner russischen Arbeit 1910: Über einige Anwendungen usw. zu diesem Zweck angewandt, und das ebene Problem in eine Integralgleichung  $\gamma(s) = \varphi(s) - \int_0^{2i} K(\sigma, s) \varphi(\sigma) d\sigma$  zusammengefaßt.

Nach Formel (6) § 1 erhält man:

$$(3) \quad e^{-2\theta i} [2U + i(P - Q)] = -\frac{1}{2}(x - iy) \frac{d\Phi}{dz} + F(z)$$

$$z_1 = x - iy = f(\xi_1)$$

$$f'(\xi) = \frac{d}{d\xi}(x + iy) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{h} [\cos \theta + i \sin \theta] = \frac{1}{h} e^{i\theta}$$

$$(4) \quad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}} = \frac{1}{h}$$

$$\frac{1}{h^2} = f'(\xi) f'(\xi_1).$$

Multipliziert man beide Teile von (3) mit

$$[f'(\xi)]^2 = \frac{1}{h^2} e^{2\theta i},$$

bemerkt man ferner, daß

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} f'(\xi) = \frac{d\Phi dz}{dz d\xi} = \frac{d\Phi}{d\xi}$$

ist, und setzt man:

$$F'(z) [f'(\xi)]^2 = F'(\xi),$$

so ergibt sich

$$(5) \quad \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\xi_1) f'(\xi) \frac{d\Phi}{d\xi} + F(\xi).$$

Es seien  $u_\xi$  und  $v_\eta$  die Projektionen der Verschiebung irgend eines Teilchens auf die Normalen zu den Kurven  $\xi$ ,  $\eta$ , die durch den Ort desselben im verzerrten Zustand hindurchgehen, dann ist

$$(6) \quad v + iu = e^{-i\theta}(v_\eta + iu_\xi)$$

$$(7) \quad \overline{D_{\xi\eta}} \left( \frac{1}{h} e^{-i\theta} \right) = \overline{D} [f'(\xi_1)] = 0$$

$$D_{\xi\eta} F = D_{xy} F \cdot D_{\xi\eta} x$$

$$\overline{D_{\xi\eta}} F = \overline{D_{xy}} F \cdot \overline{D_{\xi\eta}} x$$

$$D_{\xi\eta} x = f'(\xi_1), \quad \overline{D_{\xi\eta}} x = \overline{f'(\xi)}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2\mu} (2U + i[P - Q]) = \frac{1}{2\mu} e^{2\theta i} (X_x - Y_y + 2iX_y) = e^{2\theta i} \overline{D_{xy}} (v + iu)$$

$$= \frac{1}{h} e^{2\theta i} \overline{D_{xy}} h (v_\eta + iu_\xi)$$

$$= f'(\xi) \overline{D_{xy}} h (v_\eta + iu_\xi) = \overline{D_{\xi\eta}} h (v_\eta + iu_\xi).$$

Andererseits haben wir aus (5) und (4):

$$2U + i(P - Q) = -\frac{i}{2} \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \Phi'(\xi) + \frac{F(\xi)}{f'(\xi) f'(\xi_1)}.$$

Folglich:

$$\overline{D_{\xi\eta} h(v_\eta + iu_\xi)} = \frac{i}{2\mu} \left[ -\frac{i}{2} \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \Phi'(\xi) + \frac{F(\xi)}{f'(\xi)f'(\xi_1)} \right]$$

und

$$(8) \quad 2h(v_\eta + iu_\xi) = -\frac{i}{4\mu} \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \Phi(\xi) + \frac{1}{2\mu} \frac{1}{f'(\xi_1)} \int \frac{F'(\xi) d\xi}{f'(\xi)} + \frac{\psi(\xi_1)}{f'(\xi_1)},$$

wo  $\psi(\xi_1)$  eine Funktion von  $\xi_1 = x - iy$  ist. Ferner

$$(9) \quad \frac{1}{h} (v_\eta + iu_\xi) = -\frac{i}{8\mu} \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)} f'(\xi) \Phi(\xi) + \frac{1}{4\mu} f'(\xi) \int \frac{F'(\xi) dz}{f'(\xi)} + f'(\xi) \psi(\xi_1)$$

$$D_{xy}(v + iu) = h^2 D_{\xi\eta} \frac{v_\eta + iu_\xi}{h}.$$

Somit ergibt sich aus (9) § 1:

$$h^2 D_{\xi\eta} \frac{v_\eta + iu_\xi}{h} = -\frac{i}{4\mu} \Phi(\xi) + \frac{i}{4\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \Phi(\xi_1).$$

(7) liefert nun

$$h^2 D_{\xi\eta} \frac{v_\eta + iu_\xi}{h} = -\frac{i}{4\mu} \Phi(\xi) + \psi'(\xi_1) \frac{1}{f'(\xi_1)}.$$

Folglich

$$\psi(\xi) = \frac{i}{4\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int f'(\xi) \Phi(\xi) d\xi$$

und

$$(10) \quad \frac{1}{h} (v_\eta + iu_\xi) = -\frac{i}{8\mu} f(\xi_1) f'(\xi) \Phi(\xi) + \frac{1}{4\mu} f'(\xi) \int \frac{F'(\xi) d\xi}{f'(\xi)} + \frac{i}{8\mu} f'(\xi) \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int f'(\xi_1) \Phi(\xi_1) d\xi.$$

### § 5. Spannungssystem in Polarkoordinaten.

Beispielweise setzen wir

$$(1) \quad \xi = \xi + i\eta = \lg(x + iy) = \lg r + i\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$f(\xi) = e^{\xi}, \quad \frac{1}{h^2} = r^2$$

$$f(\xi_1) f'(\xi) = e^{2\xi} = r^2.$$

Aus (5) § 4 haben wir

$$(2) \quad r^2 [2U + i(P - Q)] = -\frac{i}{2} r^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi).$$

Daraus folgt<sup>1)</sup>

$$(3) \quad 2Ur^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi$$

$$(4) \quad (P - Q)r^2 = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi$$

wo  $\Omega = P + Q$ ,  $\varphi + i\psi = F(\xi)$  ist.

1) Vgl. G. Kolossoff, Sur les problèmes de l'élasticité à deux dimensions. 1908. C. R. CXLVI. No. 10.

Setzt man

$$(5) \quad P + Q = \sum (A_m r^m + A_{-m} r^{-m}) \cos m \theta$$

$$(6) \quad \varphi = \sum (B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \sin m \theta$$

$$(7) \quad \psi = \sum (-B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \cos m \theta,$$

so ergibt sich die Lösung von Ribière<sup>1)</sup>; führt man in (5) noch ein Glied  $C$ ,  $\lg r + C_2$  ein, so erhält man die Lösung von Belzecki<sup>2)</sup> und A. Timpe.<sup>3)</sup>

Der Fall  $m = 1$  war schon im Jahre 1881 von H. Golowin gefunden worden. Seine Lösungen lauten:

$$(1) \quad P = \frac{A}{r^2} + A_1 + A_2 \lg r, \quad U = 0$$

$$(2) \quad P = \left( \frac{B}{r^4} + \frac{B_1}{r^2} + B_2 \right) y$$

$$U = \left( \frac{B}{r^4} + \frac{B}{r^2} + B_2 \right) x$$

$$(3) \quad P = \left( \frac{C}{r^2} + C_1 + C_2 r^2 \right) \frac{x}{r^2}$$

$$U = \left( \frac{C}{r^2} + C_1 + C_2 r^2 \right) \frac{y}{r^2}.$$

Durch Kombination dieser Lösungen erhält Golowin die Lösung:

$$P = A \left[ \lg \frac{r}{r_1} - \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \lg \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$+ (B \cos \theta + C \sin \theta) \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{r} + \frac{r}{r_1^2 r_2^2} \right]$$

$$U = (B \sin \theta - C \cos \theta) \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{r} + \frac{r}{r_1^2 r_2^2} \right]$$

und er macht eine Anwendung dieser Formeln auf die Untersuchung des Spannungsproblems in einem kreisförmigen Gewölbe.<sup>4)</sup>

1) Ribière, Sur l'équilibre de l'élasticité des voûtes en arc de cercle C. R. CVIII. No. 11. 1889. p. 561—563. Ribière, Sur les voûtes en arc de cercle encostérées aux naissances C. R. CXXII. No. 6. 1901. p. 315—317.

2) Belzecki, Sur l'équilibre de l'élasticité des voûtes en arc de cercle C. R. 1905. CXI. No. 15.

3) A. Timpe, l. c. p. 1.

4) Golowin, Ein Problem aus der Statik des elastischen Körpers. Nachrichten des Praktischen Technologischen Instituts in Petersburg 1882 (russisch).

Es seien am Rande eines Kreises  $P$  und  $U$  gegeben, und es sei der Kreis im Gleichgewicht unter der Wirkung dieser Spannungen. Die letzteren sollen den Gleichungen des Gleichgewichts starrer Körper genügen:

$$(11) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} (P \cos \theta - U \sin \theta) d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} (P \sin \theta + U \cos \theta) d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} U d\theta = 0. \end{cases}$$

Es sei am Rande des Kreises

$$(12) \quad U = f_1(\theta), \quad P = f_2(\theta).$$

Wir erhalten wegen (3)

$$2f_1(\theta)R^2 = -\frac{1}{2}R^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega \right]_{r=R} + [\varphi]_{r=R} = \left[ -\frac{1}{2}R \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Omega + \varphi \right]_{r=R}.$$

Die Funktion

$$F(r, \theta) = -\frac{1}{2}R^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi$$

genügt der Differentialgleichung

$$(14) \quad \nabla_1^2 F = 0,$$

und wir können setzen:

$$(15) \quad -\frac{1}{2}R^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi)(R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2}.$$

Die Funktion  $-\frac{1}{2}R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi$  wird konjugiert mit (15), und wir können setzen:

$$(16) \quad -\frac{1}{2}R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi) 2rR \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + C.$$

Aus der Gleichung (4) erhalten wir:

$$[(P - Q)]_{r=R} R^2 = \frac{1}{2}R^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega \right]_{r=R} + [\psi]_{r=R}.$$

Folglich aus (12):

$$2f_2(\theta)R^2 = -\frac{1}{2}R^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega \right]_{r=R} + R^2 [\Omega]_{r=R} + [\psi]_{r=R}$$

und

$$(17) \quad \left[ -\frac{1}{2}R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega R^2 + \psi \right]_{r=R} = 2f_2(\theta)R^2.$$

Die Funktion

$$-\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega R^2 + \psi$$

genügt der Differentialgleichung (13), und wir können setzen:

$$-\frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \Omega R^2 + \psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2f_2(\psi) R^2 (R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2}$$

Daraus folgt wegen (16):

$$\Omega R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2f_2(\psi) R^2 (R^2 - r^2) - 2R^2 f_1(\psi) 2Rr \sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + C$$

und wir erhalten

$$(18) \quad \Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2) - 2Rr \sin(\theta - \psi) f_1(\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \frac{C}{R^2}$$

und aus (15):

$$(19) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R^2 f_1(\psi) (R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega$$

Nimmt man an, daß die auf den Umfang wirkende Spannung sich zusammensetzt aus:

1. einer Drucklast  $p$  für die Längeneinheit, die am Rande von  $\theta = 0$  bis  $\theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$  gleichmäßig verteilt ist;
2. einer Drucklast  $p$  für die Längeneinheit von

$$\theta = \pi \text{ bis } \theta = \pi + \alpha,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi) (R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} \\ &= p(R^2 - r^2) \left[ \int_0^\alpha \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} + \int_\pi^{\pi+\alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} \right] \\ &= 2p \left[ \arctg \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) \right]_0^\alpha + 2p \left[ \arctg \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) \right]_\pi^{\pi+\alpha} \\ &= 2p \left[ \arctg \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) + \arctg \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \arctg \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) + \arctg \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aus (18) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Omega &= P + Q = \frac{2p}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ 2Ur^2 &= \frac{R^2-r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega \\ 2Pr^2 &= \frac{R^2-r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \Omega r^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$f_2(\theta) = 0$  am Rande des Kreises und  $f_1(\theta) = k$  für  $\theta > 0$  und  $< \alpha$ , und  $f_1(\theta) = -k$  für  $\theta > \pi$  und  $< \pi + \alpha$ , und  $f_1(\theta) = 0$  für alle anderen Werte von  $\theta$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi) 2rR \sin(\theta-\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta-\psi) + r^2} d\psi \\ &= k \left( \int_0^\alpha \frac{2rR \sin(\theta-\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta-\psi) + r^2} d\psi - \int_\pi^{\pi+\alpha} \frac{2rR \sin(\theta-\psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta-\psi) + r^2} d\psi \right) \\ &= -k \int_0^\alpha \lg [R^2 - 2Rr \cos(\theta-\psi) + r^2] \\ &\quad + k \int_0^\alpha \lg [R^2 + 2Rr \cos(\theta-\psi) + r^2] \\ &= k \lg \frac{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) + 4RrP_0 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) - 4RrP_0 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

wo

$$P_0 = R^2 + r^2$$

ist;

$$\begin{aligned} \Omega = P + Q &= -\frac{k}{\pi} \lg \frac{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) - 4RrP_0 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) + 4RrP_0 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)} \\ 2Ur^2 &= \frac{R^2-r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \frac{2kR^2}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ 2Pr^2 &= \frac{R^2-r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega \\ &+ \frac{R^2-r^2}{\pi} k \lg \frac{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) + 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{P^2 - 4R^2r^2 \cos \theta \cos(\theta-\alpha) - 4RrP \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, daß der Druck =  $p$  für  $0 < \theta < \alpha$ ,  
 $\pi < \theta < \pi + \alpha$ ,

und für

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} + \alpha \text{ ist,}$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi)(R^2 - r^2) d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} = p(R^2 - r^2) \left[ \int_0^\alpha \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} \right. \\
+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} + \int_{\pi}^{\pi + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} \\
\left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \alpha} \frac{d\psi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} \right] = p(R^2 - r^2) \left[ \int_0^\alpha \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) \right. \\
+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) + \int_0^\alpha \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) \\
+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\psi - \theta}{2} \right) = 2p \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right. \\
+ \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right) \\
- \operatorname{arctg} \left( \frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \\
+ \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right) \\
\left. - \operatorname{arctg} \left( \frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \\
\text{usw.}$$

### § 6. Weitere Resultate.

I. Werden die Ränder von Kurven der Schar  $\xi = \text{const.}$  gebildet, und ist  $\xi$  der reelle Teil einer Funktion der komplexen Variablen  $z = x + iy$ , so führen wir krummlinige Koordinaten  $\xi, \eta$  ein:

$$\xi + i\eta = F(x + iy), \\
\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\xi_1) f'(\xi) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi).$$

Wir bemerken, daß für  $\xi = \alpha$ :

$$-\frac{1}{2}f(\xi_1)f'(\xi) = \left[-\frac{1}{2}f(2\alpha - \xi)f'(\xi)\right]_{\xi=\alpha}.$$

Wenn  $f(2\alpha - \xi)f'(\xi)$  innerhalb der Kurve

$$(1) \quad \xi = \alpha$$

eine endliche, stetige und eindeutige Funktion von  $\xi$  ist, so können wir in ähnlicher Weise für (1) eine Lösung des Problems erhalten<sup>1)</sup>, indem wir zweimal die gewöhnliche Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials anwenden.

II. Als Anwendung krummliniger Koordinaten betrachten wir die Spannungsverteilung in durchlochten Zugstäben.

Setzen wir in (5) § 1

$$F(z) = ip, \quad \Phi(z) = p,$$

so erhalten wir die Lösung:

$$X_x = p, \quad Y_y = X_y = 0. \quad (A)$$

In diesem Falle haben wir einen einfachen Zug;  $p$  ist der Betrag des Zugs, die  $x$ -Achse seine Richtung.

Es ergibt sich aus den Formeln (1), (2) § 4:

$$\begin{aligned} 2U + i(P - Q) &= ip e^{2\theta i} \\ P + Q &= X_x + Y_y = p. \end{aligned}$$

Folglich aus (3\*) und (5) § 4:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} &= ip [f'(\xi)]^2; \quad F(\xi) = ip (f'(\xi))^2 \\ \frac{2(U + iP)}{h^2} &= ip \left( \frac{1}{h^2} + [f'(\xi)]^2 \right). \end{aligned}$$

Das Problem der Spannungsverteilung in einem durchlochten Zugstabe formulieren wir folgendermaßen: eine Spannungsverteilung zu finden, so daß am Rande des Loches die Normal- und Schubspannungen verschwinden und in unendlicher Entfernung diese Spannungsverteilung mit (A) übereinstimmt.<sup>2)</sup>

Es sei  $\xi = \alpha$  die Gleichung des Loches; die Lösung des Problems ist gleichbedeutend mit der Lösung des folgenden Problems: eine

1) G. Kolossoff. Sur les problèmes de l'élasticité à deux dimensions. C. R. 1909 CXLVIII. Nr. 17.

2) Der Spannungszustand ist, wie sich leicht zeigen läßt, durch diese Bedingungen nicht eindeutig bestimmt und hängt von dem Charakter des Übergangs in den Zustand (A) ab.

Spannungsverteilung (B) zu finden, so daß die Spannungen in der Unendlichkeit verschwinden und

$$\left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} = -ip \left( \frac{1}{h^2} + [f'(\xi)]^2 \right)_{\xi=\alpha}$$

Setzen wir jetzt die Spannungsverteilungen (A) und (B) zusammen, so erhalten wir die Lösung des Problems des durchlochten Zugstabes.

Beispiele:

a) Kreisförmiges Loch<sup>1)</sup>

$$f(\xi) = e^{\xi}, \quad \xi = \xi + i\eta = \lg r + i\theta, \quad f'(\xi) = e^{\xi}, \quad h = \frac{1}{r}, \quad \xi = \alpha = \lg r$$

oder

$$r = e^{\alpha} = R.$$

Wir beginnen mit dem Fall der Spannungsverteilung (B).

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} &= -ip(r^2 + e^{2\xi}) - ipR^2(1 + e^{2\theta}) = pR^2 \sin 2\theta \\ (4) \qquad \qquad \qquad &+ ipR^2(1 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

Wegen (2) § 5 ist:

$$\left[ \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} \right]_{r=R} = \left[ -\frac{1}{2} iR^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi) \right]_{r=R} = (\text{Funktion von } z)_{\xi=\alpha}.$$

Sein reeller Teil ist für  $\xi = \alpha$  derselbe, wie bei (4), d. h. =  $pR^2 \sin 2\theta$ , und wir können setzen:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = ipR^4 e^{-2\xi} + iC = ipR^4 \frac{e^{-2\theta i}}{r^2} + iC$$

$$(P + Q)_{\xi=\alpha} = \frac{1}{i}(2(U + iP) - [2U + i(P - Q)])_{\xi=\alpha} = -2p \cos 2\theta - C - pR^2.$$

Wir setzen  $C = pR^2$

$$\Phi(\xi) = -2pR^2 e^{-2\xi}$$

und

$$F(\xi) = \frac{i}{2} R^2 \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = ip(3R^4 e^{-2\xi} - R^2).$$

Die Spannungsverteilung im durchlochten Zugstabe erhalten wir durch Zusammensetzung mit dem Spannungszustand (A). Wir haben dann mit (1), (2)

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= p - 2pR^2 e^{-2\xi} \\ F(\xi) &= ip(3R^4 e^{-2\xi} + e^{2\xi} + R^2) \end{aligned}$$

1) Dieses Ergebnis wurde zuerst von Prof. Kirsch abgeleitet. Siehe Zeitschrift des V. D. J. 1898, S. 797—805. S. auch Föppl, Technische Mechanik.

und

$$\begin{aligned}
 2Ur^2 &= p \sin 2\theta \left( \frac{3R^4}{r^2} - r^2 - 2R^2 \right) \\
 (P-Q)r^2 &= p \left[ -2R^2 \cos 2\theta + r^2 \cos 2\theta + \frac{3R^4}{r^2} \cos 2\theta - R^2 \right] \\
 2Pr^2 &= (P-Q)r^2 + (P+Q)r^2 \\
 &= p(r^2 - R^2) \left( 1 + \frac{r^2 - 3R^2}{r^2} \cos 2\theta \right)
 \end{aligned}$$

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = e^{-2\theta i} (2U + i[P - Q]) = e^{-2\theta i} \left[ -\frac{id\Phi(\xi)}{2d\xi} + \frac{F(z)}{r^2} \right].$$

Folglich

$$\begin{aligned}
 2X_y &= p \left[ \frac{3R^2 - 2r^2}{r^4} R^2 \sin 4\theta - \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \right] \\
 X_x - Y_y &= p \left[ \frac{3R^2 - 2r^2 R^2}{r^4} \cos 4\theta - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + 1 \right] \\
 2X_x &= 2p \left[ 1 - \frac{3R^2 \cos 2\theta}{2r^2} + \frac{(3R^2 - 2r^2)R^2}{2r^4} \cos 4\theta \right] \\
 2Y_y &= 2p \left[ -\frac{R^2 \cos 2\theta}{2r^2} - \frac{(3R^2 - 2r^2)R^2}{2r^4} \cos 4\theta \right] \\
 2X_y &= 2p \left[ \frac{3R^2 - 2r^2}{2r^4} R^2 \sin 4\theta - \frac{R^2}{2r^2} \sin 2\theta \right].
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die von Kirsch gegebenen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 X_x &= p - \frac{3R^2 p(x^2 - y^2)}{2r^4} - \frac{R^2 p(2r^2 - 3R^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8} \\
 Y_y &= -\frac{R^2 p(x^2 - y^2)}{2r^4} + \frac{R^2 p(2r^2 - 3R^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8} \\
 X_y &= -\frac{R^2 pxy}{r^4} - \frac{2R^2 p(2r^2 - 3R^2)(x^2 - y^2)xy}{r^8}.
 \end{aligned}$$

b) Elliptisches Loch.

Wir setzen:

$$z = x + iy = \frac{c}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) = f(\xi),$$

so daß die Kurven  $\xi = \text{const.}$  konfokale Ellipsen sind und  $2c$  der Abstand beider Brennpunkte ist;

$$h = \frac{2}{C\sqrt{e^{2\xi} + e^{-2\xi} - 2\cos 2\eta}},$$

$$\frac{1}{h^2} [2U + i(P - Q)] = -\frac{ic^2}{4} \left( \frac{e^{2\xi} - e^{-2\xi}}{2} + i \sin 2\eta \right) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi)$$

$$F(\xi) = \varphi + i\psi.$$

Für die Spannungsverteilung (B) haben wir:

$$\left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} = -ip \left( \frac{1}{h^2} \right)_{\xi=\alpha} - ip \frac{c^2}{4} (e^\alpha - e^{-\alpha})_{\xi=\alpha}^2.$$

Wir können setzen:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = p \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) i e^{-2\zeta + 2\alpha} + iC,$$

wo  $C$  eine willkürliche Konstante ist. Also kommt

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} &= \frac{pc^2}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) (\sin 2\eta + i \cos 2\eta) + iC \\ \left[ \frac{P + Q}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} &= \frac{1}{i} \left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} - \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} \\ &= -p \left( \frac{1}{h^2} \right)_{\xi=\alpha} + p \frac{c^2}{2} - p \frac{c^2}{2} e^{2\alpha} \cos 2\eta - C \\ &= \frac{pc^2}{2} (1 - e^{2\alpha}) \cos 2\eta + \frac{pc^2}{2} - C - \frac{pc^2}{4} (e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}). \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$C = \frac{pc^2}{4} (e^{-2\alpha} - e^{2\alpha}),$$

alsdann wird

$$\left\{ \frac{P + Q}{h^2} \right\}_{\xi=\alpha} = \frac{pc^2}{2} (e^{2\alpha} - 1) (e^{-2\alpha} - \cos 2\eta)$$

und

$$\{P + Q\}_{\xi=\alpha} = p \frac{(e^{2\alpha} - 1)(e^{-2\alpha} - \cos 2\eta)}{\frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2} - \cos 2\eta}.$$

Somit können wir setzen:

$$\Phi(\xi) = -2 \frac{p(e^{2\alpha} - 1)}{e^{2\xi} - 1}.$$

Für  $\xi = \alpha$  hat man:

$$[F(\xi)]_{\xi=\alpha} = \left\{ \frac{1}{h^2} [2U + i(P - Q)] + \frac{ic^2}{4} \left( \frac{e^{2\xi} + e^{-2\xi}}{2} + i \sin 2\eta \right) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right\}_{\xi=\alpha}$$

Bemerkt man nun, daß

$$\frac{ic^2}{4} \left( \frac{e^{2\xi} + e^{-2\xi}}{2} + i \sin 2\eta \right) = \frac{i}{2} f(\xi_1) f(\xi)$$

für  $\xi = \alpha$  gleich ist

$$\frac{i}{2} [f(2\alpha - \xi) f'(\xi)]_{\xi=\alpha} = \frac{ie^2}{8} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha + 2\xi} - e^{2\alpha - 2\xi})_{\xi=\alpha},$$

so können wir setzen:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= ip \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) (e^{2\alpha - 2\xi} - 1) \\ &\quad + \frac{ic^2}{8} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha + 2\xi} - e^{2\alpha - 2\xi}) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}. \end{aligned}$$

Die Spannungen  $X_x, Y_y, X_y$  finden wir durch die Formeln (1), (2) § 4:

$$X_x + Y_y = P + Q$$

$$2 X_y + i(X_x - Y_y) = e^{-2\theta i}(2U + i(P - Q)) = h^2 [f'(\xi_1)]^2 (2U + i(P - Q)).$$

Für die Spannungsverteilung im durchlochtem Zugstabe haben wir<sup>1)</sup>:

$$\Phi(\xi) = p - 2 \frac{p(e^{2\alpha} - 1)}{e^{2\xi} - 1}$$

$$F(\xi) = \frac{ipc^2}{4} (e^\xi - e^{-\xi})^2 + ip \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) (e^{2\alpha - 2\xi} - 1)$$

$$+ \frac{ic^2}{8} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha + 2\xi} - e^{2\alpha - 2\xi}) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}$$

$$= \frac{ipc^2}{4} \left[ e^{2\xi} + e^{4\alpha - 2\xi} - 2 + e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} + 2(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha + 2\xi} - e^{2\alpha - 2\xi}) \frac{e^{2\alpha} - 1}{(e^\xi - e^{-\xi})^2} \right].$$

Am Rande des Loches ist

$$\xi = \alpha, \quad P = 0$$

und

$$[Q]_{\xi=\alpha} = [P + Q]_{\xi=\alpha} = p + 2p \frac{(e^{2\alpha} - 1)(e^{-2\alpha} - \cos 2\eta)}{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2 \cos 2\eta}$$

$$= p e^{2\alpha} + p \frac{(1 - e^{2\alpha})(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})}{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2 \cos 2\eta}.$$

Die Minimalwerte ( $-p$ ) sind bei  $\eta = 0, \pi$ , die Maximalwerte  $\left(\frac{3e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} p\right)$  bei  $\eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

c) Lemniskatisches Loch.

Wir setzen:

$$\xi = \xi + i\eta = \text{Ig} \frac{(z - c)(z + c)}{e^2}$$

$$z = x + iy = f(\xi) = c\sqrt{1 + e^\xi} f'(\xi) = \frac{c e^\xi}{2\sqrt{1 + e^\xi}}$$

$$f(\xi_1) = c\sqrt{1 + e^{\xi_1}} \frac{1}{h^2} = f'(\xi) f'(\xi_1) = \frac{c^2 e^{2\xi}}{4\sqrt{1 + e^{2\xi}} + 2e^\xi \cos \eta}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\xi_1) f'(\xi) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi) \\ = -\frac{c^2}{4} i \frac{e^{2\xi} + e^\xi \cos \eta + i e^\xi \sin \eta}{\sqrt{1 + e^{2\xi}} + 2e^\xi \cos \eta} \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + F(\xi). \end{cases}$$

1) Die vollständigere Untersuchung siehe in meiner russischen Arbeit: „Über eine Anwendung der Theorie der komplexen Veränderlichen auf das ebene Problem der Elastizitätstheorie 1910.“

Die Kurven  $\xi = \text{const.}$  sind Lemniskaten, die Kurven  $\eta = \text{const.}$  sind Hyperbeln.

Am Rande des Loches  $\xi = \alpha$  haben wir (Problem B):

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} &= -ip \left\{ \frac{1}{h^2} + \frac{c^2 e^{2\xi}}{4(1 + e^\xi)} \right\}_{\xi=\alpha} \\ &= -ip \left\{ f'(\xi) f'(2\alpha - \xi) + \frac{c^2}{4} \frac{e^{2\xi}}{1 + e^\xi} \right\}_{\xi=\alpha} \end{aligned}$$

Wir können setzen (Problem B):

$$\begin{aligned} \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} &= -ip \left[ f'(\xi) f'(2\alpha - \xi) + \frac{c^2}{4} \frac{e^{2\xi}}{1 + e^\xi} - \frac{c^2}{4} \frac{e^{2\xi}}{1 + e^\xi} - \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha - \xi} + e^\xi) \right] \\ \left[ \frac{P + Q}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} &= \frac{1}{i} \left[ \frac{2(U + iP)}{h^2} - \frac{2U + i(P - Q)}{h^2} \right]_{\xi=\alpha} = -\frac{c^2}{2} e^\alpha \cos \eta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (P + Q)_{\xi=\alpha} &= -2pe^{-\alpha} \cos \eta \sqrt{1 + 2e^\alpha \cos \eta + e^{2\alpha}} \\ &= -2p \cos \eta \sqrt{1 + 2e^{-\alpha} \cos \eta + e^{-2\alpha}}. \end{aligned}$$

Somit können wir schreiben:

$$\Phi(\xi) = -2pe^{-\xi} \sqrt{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi + 2\alpha})}$$

Für  $\xi = \alpha$  haben wir

$$[F(\xi)]_{\xi=\alpha} = \left\{ \frac{1}{h^2} [2U + i(P - Q)] + \frac{i}{2} f(\xi_1) f'(\xi) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \right\}_{\xi=\alpha},$$

und wir können setzen:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -ip \left[ f'(\xi) f'(2\alpha - \xi) + \frac{c^2}{4} \frac{e^{2\xi}}{1 + e^\xi} - \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha - \xi} + e^\xi) \right] \\ &\quad + \frac{i}{2} f(2\alpha - \xi) f'(\xi) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}. \end{aligned}$$

Für die Spannungsverteilung im durchlochten Zugstabe haben wir:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= p - 2pe^{-\xi} \sqrt{(1 + e^\xi)(1 + e^{-\xi + 2\alpha})} \\ F(\xi) &= -ip \left\{ f(\xi) f'(2\alpha - \xi) - \frac{c^2}{4} (e^{2\alpha - \xi} + e^\xi) \right\} + \frac{i}{2} f(2\alpha - \xi) f'(\xi) \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}. \end{aligned}$$

Am Rande des Loches ist:

$$[Q]_{\xi=\alpha} = [P + Q]_{\xi=\alpha} = p - 2p \cos \eta \sqrt{1 + 2e^{-\alpha} \cos \eta + e^{-2\alpha}}.$$

Die Minimalwerte  $(-p - 2pe^{-\alpha})$  sind bei  $\eta = 0, 2\pi$ , die Maximalwerte  $(3p - 2pe^{-\alpha})$  bei  $\eta = \pi, 3\pi$ .

§ 7. Beziehung zwischen dem behandelten Problem und der Integration der biharmonischen Differentialgleichung.

Alle möglichen reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 V - D_{xy} \overline{D_{xy}} \overline{D_{xy}} \overline{D_{xy}} V = 0$$

erhalten wir in der Form<sup>1)</sup>:

$$(2) \quad V = \chi(z) + \chi(z_1) + z\varphi(z_1) + z_1\varphi(z)$$

$$(3) \quad \overline{D_{xy}} V = 2[z_1\varphi'(z) + \chi'(z) + \varphi(z_1)]$$

$$(4) \quad D_{xy} \overline{D_{xy}} V = \nabla_1^2 V = 4[\varphi'(z) + \varphi'(z_1)]$$

$$(5) \quad \overline{D_{xy}} \overline{D_{xy}} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 4(z_1\varphi''(z) + \chi''(z))$$

$$(6) \quad \underbrace{\overline{D_{xy}} \overline{D_{xy}} V}_k = \frac{\partial^k V}{\partial x^k} - \dots = 2^k [z\varphi^{(k)}(z) + \chi^{(k)}(z)].$$

Durch Vergleich mit (6) § 1 gelangen wir zu folgenden Resultaten:

I. Es sei eine ebene Verzerrung gegeben und

$$\Phi(z) = 8\varphi(z)$$

$$F(z) = 4i(\varphi[z] - \chi'[z])$$

$$2(X_y - iY_y) = -\frac{iz_1}{2}\varphi'(z) + F(z) - \frac{i}{2}(\Phi[z] + \Phi[z_1]) = 4(-iz_1\varphi'[z] - i\chi'[z]) - 4\varphi(z')$$

$$Y_y + iX_x = 2[z_1\varphi'(z) + \chi'(z) + \varphi(z_1)] = \overline{D} V,$$

d. h.

$$(7) \quad Y_y = \frac{\partial V}{\partial x} \quad X_x = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\Phi'(z) = \frac{\partial(X_x + Y_y)}{\partial x} - i \frac{\partial(X_x + Y_y)}{\partial y}$$

und es folgt aus (4):

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad X_x = \int \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx.$$

II. Setzen wir jetzt:

$$\varphi(z) = 8\varphi'(z)$$

$$F(z) = -4i\chi'(z).$$

Wir erhalten durch (5)

$$2X_y - i(X_x - Y_y) = -4iz\varphi''(z) - 4i\chi''(z) = -2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + i \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$$

und durch (4)

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2} \Phi([z] + \Phi[z_1]) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

1) Vgl. E. Goursat, Sur l'équation  $\Delta \Delta U = 0$ . S. M. F. Bull. 26. 1898. p. 206-207.

Folglich

$$(8) \quad X_y = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad X_x = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad Y_y = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

und  $V$  ist die Spannungsfunktion von C. A. Airy.<sup>1)</sup> Eine analytische Verallgemeinerung dieser Beziehung erhalten wir durch (6).

III. Die Werte von  $V$  und  $\frac{\partial V}{\partial n}$  (der Normalableitung) sind gewöhnlich am Rande einer geschlossenen Kurve  $C$  vorgeschrieben, und das Problem der Integration der Gleichung (1) besteht darin, zwei innerhalb der Kurve  $C$  reguläre Funktionen zu finden, mit der Randbedingung:

$$(9) \quad \begin{cases} z_1 \varphi'(z) + \chi'(z) + \varphi(z) = \frac{1}{2} \overline{D_{xy}} V = \frac{1}{2} e^{-\sigma i} \left( \frac{\partial V}{\partial s} - i \frac{\partial V}{\partial n} \right) \\ \text{= gegebene Funktion der Bogenlänge } s \text{ des Randes.} \end{cases}$$

Das Problem ist dann von derselben Art wie das Problem ebener Verzerrung, und die Lösung ergibt sich nach dem beim ebenen Elastizitätsproblem benutzten Verfahren.

IV. Im Falle einer geradlinigen Begrenzung nehmen wir sie als  $x$ -Achse, und die beiden Probleme sind nach I identisch, d. h. die Normal- und Schubspannungen längs des Randes drücken sich als  $\frac{\partial V}{\partial s}$  und  $-\frac{\partial V}{\partial n}$  aus. Im Fall der krummlinigen Begrenzung  $\xi = \alpha$  haben wir aus (9) nach dem Verfahren vom § 4:

$$(10) \quad \frac{1}{h} \left( \frac{\partial V}{\partial s} - i \frac{\partial V}{\partial n} \right) = 2 \left[ f(\xi_1) \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} + \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} + \varphi(\xi) f'(\xi) \right],$$

wo  $\varphi(\xi) = \varphi(f[\xi])$ ,  $\chi(\xi) = \chi(f[\xi])$  ist.

Vergleichen wir jetzt (10) mit der Gleichung (5) § 4, welche sich in folgender Form ausdrücken läßt:

$$(11) \quad -\frac{1}{h^2}(P-iU) = 2 \left[ f(\xi_1) f'(\xi) \frac{1}{8} \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + \frac{iF(\xi)}{4} - \frac{1}{8} (\Phi[\xi] + \Phi[\xi_1]) f(\xi) f'(\xi_1) \right]$$

und setzen wir

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{8} \Phi(\xi) f'(\xi)$$

$$\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} = \frac{iF(\xi)}{4} - \frac{1}{8} \Phi(\xi) f''(\xi) f(2\alpha - \xi) - \left( \frac{1}{8} \Phi(\xi) + \frac{1}{4} \Phi(2\alpha - \xi) \right) f(\xi) f'(2\alpha - \xi),$$

so finden wir am Rande  $\xi = \alpha$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{P}{h} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{U}{h}.$$

Diese Funktion  $V$  können wir Airys Funktion zweiter Art nennen.

1) Vgl. A. Timpe a. a. O.

§ 8. Lösungen in drei Dimensionen.

Um Lösungen in drei Dimensionen der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen festen Körpers, der von der Wirkung von Massenkräften frei ist, abzuleiten, kombinieren wir die drei Grundgleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ usw.}$$

und die sechs Beltramischen Kompatibilitätsbedingungen<sup>1)</sup>:

$$(2) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 X_x + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2(X_x + Y_y + Z_z)}{\partial x^2} &= 0 \\ \nabla_1^2 Y_y + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2(X_x + Y_y + Z_z)}{\partial y^2} &= 0 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Wir erhalten für einen von  $z$  unabhängigen Spannungszustand

$$(3) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial X_x}{\partial y} - \frac{\partial Y_y}{\partial x} = 0$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 X_x &= -\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2(X_x + Y_y + Z_z)}{\partial x^2} \\ \nabla_1^2 Y_y &= -\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2(X_x + Y_y + Z_z)}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$(6) \quad \nabla_1^2 X_x - \nabla_1^2 Y_y = 0; \quad \nabla_1^2 X_y = -\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2(X_x + Y_y + Z_z)}{\partial x \partial y}$$

$$(7) \quad \nabla_1^2 Z_z = 0.$$

Folglich:

$$(8) \quad \nabla_1^2(X_x + Y_y) = 0.$$

$X_x, Y_y, X_y$  entsprechen dem ebenen Spannungszustand und

$$\nabla_1^2 X_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_x + Y_y), \quad \nabla_1^2 Y_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(X_x + Y_y).$$

Somit erhalten wir aus (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2(X_x + Y_y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2(X_x + Y_y)}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2(X_x + Y_y)}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

und folglich:

$$(10) \quad Z_z = ax + by + cz + \sigma(X_x + Y_y),$$

1) Encyklop. d. math. Wissensch. IV 24, Nr. 7 a. .

wo  $\sigma = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  die Poissonsche Konstante und  $a, b, c$  willkürliche Konstanten bedeuten,

$$\bar{D}_{xy} D_{zy} (X_z + i Y_z) = \nabla_1^2 (X_z + i Y_z) = 0$$

und

$$(11) \quad D_{xy} (X_z + i Y_z) = \text{Funktion von } z_1 = \tau(z_1).$$

Der imaginäre Teil von  $\tau(z_1)$  verschwindet nach (4) und  $\tau(z_1) = \text{const} = k$ .

Dann folgt aus (11)

$$X_z + i Y_z = \text{Funktion von } z + \frac{k z_1}{2} = \varphi + i \psi + \frac{k z_1}{2}.$$

Beispielsweise nehmen wir in (3), (4) § 5:

$$\Omega = P + Q = \frac{1}{r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + r^\alpha (C \sin \alpha \theta + D \cos \alpha \theta);$$

$$\varphi = -\frac{(\alpha + 1)r}{2} (A \cos \theta - B \sin \theta), \quad \psi = -\frac{(\alpha + 1)r}{2} (A \sin \theta + B \cos \theta).$$

Wir finden

$$2 U r^2 = \frac{\alpha}{2} r^{\alpha+2} (C \cos 2\theta - D \sin 2\theta) - \frac{\alpha+1}{2} r (A \cos \theta - B \sin \theta)$$

$$(P - Q) r^2 = -\frac{\alpha}{2} r^2 \Omega = -\frac{\alpha}{2} r^2 (P + Q).$$

Folglich:

$$P(\alpha + 2) = Q(2 - \alpha)$$

$$P = \frac{2-\alpha}{4} (P + Q) = \frac{2-\alpha}{4r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{2-\alpha}{4} r^\alpha (C \sin \alpha \theta + D \cos \alpha \theta)$$

$$Q = \frac{2+\alpha}{4} (P + Q) = \frac{2+\alpha}{4r} (A \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{2+\alpha}{4} r^\alpha (C \sin \alpha \theta + D \cos \alpha \theta)$$

$$U = -\frac{\alpha}{4} r^\alpha (C \cos 2\theta - D \sin 2\theta) - \frac{\alpha+1}{4} \frac{1}{r} (A \cos \theta - B \sin \theta).$$

$Z_x$  ist gegeben durch (10), wo  $X_x + Y_y = P + Q$  ist.

Die Theorie können wir verallgemeinern für den Fall, daß die Spannungen sich durch Polynome von der Form  $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i z^i$  ausdrücken lassen.<sup>1)</sup>

1) S. meine russische Arbeit. Als besondere Fälle erhalten wir hier den von  $z$  linear und quadratisch abhängigen Spannungszustand und die Lösungen von Saint-Venant, Clebsch, Maurice Lévy, Stekloff, Almansi usw.

## Die Gesetze des Stoßes in der Lorentz-Einsteinschen Relativtheorie.<sup>1)</sup>

Von FERENCZ JÜTTNER in Breslau.

In der Geschichte der Galilei-Newtonschen Mechanik war die Aufstellung der Stoßgesetze, die 1668 und 1669 durch Wallis, Wren und Huyghens erfolgte, eine wichtige Stufe der Entwicklung. Die Bedeutung dieser Gesetze wuchs aber später noch über den Bereich der Mechanik im engeren Sinne hinaus, als die kinetische Gastheorie auf ihnen ihren großen Bau errichtete. So dürfte es denn wohl von Interesse sein, die neuen Gesetze des Stoßes zu entwickeln, die gelten müssen, falls die ganze Physik der Relativitätstheorie, wie sie von H. A. Lorentz<sup>2)</sup> und A. Einstein<sup>3)</sup> begründet wurde, eingeordnet wird.

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe regte mich Herr Geheimrat Planck an. Ich erlaube mir, ihm hierfür, sowie für das fördernde Interesse, das er mir während meines Berliner Studienaufenthaltes im Wintersemester 1910/1911 zuteil werden ließ, meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Im folgenden soll nun der *elastische* Stoß behandelt werden, d. h. ein solcher, bei dem keine lebendige Kraft verloren geht. Im übrigen werden die elastischen Formänderungen der sich stoßenden Körper wie in der gewöhnlichen „elementaren“ Theorie unberücksichtigt bleiben, ebenso dementsprechend auch der Umstand, daß die Lorentz-Kontraktion der Körper infolge der Änderung ihrer Geschwindigkeit bei dem Zusammenstoße auch eine Änderung erfährt. Als sich stoßende Körper werden zwei frei bewegliche *homogene Kugeln*<sup>4)</sup> angenommen. Da bei solchen exzentrische Stöße nicht vorkommen können, sondern allein zentrale, so bleibt nur noch zwischen dem *geraden Stoß*, der im ersten Abschnitt besprochen werden soll, und dem *schiefen Stoß*, dem der zweite Abschnitt gewidmet ist, zu unterscheiden. Bemerkt sei noch, daß die Kugeln eine Drehbewegung vor dem Stoße nicht besitzen sollen, sowie endlich, daß das Auftreten von Reibung ausgeschlossen wird.

1) Der erste Teil dieses Aufsatzes wurde im Auszuge bereits am 20. Dezember 1911 in der Naturwissenschaftlichen Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau vorgetragen.

2) H. A. Lorentz, Verslag. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 12, S. 986 bis 1009. 1904. (Sitzung vom 23. April 1904).

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 17, S. 891 bis 921. 1905.

4) Die Kugelgestalt möge diesen Körpern in ihrem gleichförmigen Laufe vor dem Zusammenstoße zukommen, demgemäß also nicht im Ruhezustande.

Erster Abschnitt.

Der gerade (elastische) Stoß.

§ 1. Analytische Behandlung.

Die Mittelpunkte beider homogenen Kugeln mögen sich auf der  $x$ -Achse eines als ruhend angesehenen dynamisch berechtigten Koordinatensystems bewegen. Die (Ruh-)Masse einer solchen Kugel werde  $m$ , ihre Geschwindigkeit  $u$ , ihr Impuls  $m\bar{x}$  und ihre lebendige Kraft  $L$  genannt. Dann ist auf Grund der neuen Mechanik<sup>1)</sup>:

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.<sup>2)</sup>

Die Massen der beiden einander stoßenden Kugeln seien nunmehr durch die Bezeichnungen  $m_1$  und  $m_2$  unterschieden; bei den übrigen mechanischen Funktionen  $u$ ,  $\bar{x}$ ,  $L$  sei ebenso durch eine Indexziffer angegeben, welchem Körper sie zukommen, aber außerdem noch in dem Falle, daß sie sich auf den Zustand nach dem Stoße beziehen, ein Strich oben zugefügt (z. B.  $u'_1$ ,  $u'_2$ ), während demgemäß die ungestrichenen Größen für den Zustand vor dem Stoße gelten (z. B.  $u_1$ ,  $u_2$ ).

Die Werte von  $u'_1$  und  $u'_2$  sind hier wie in der gewöhnlichen Mechanik bereits durch die Prinzipie von der Erhaltung der Bewegungsgröße sowie der lebendigen Kraft völlig bestimmt:

$$(2) \quad \begin{cases} m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 = m_1 \bar{x}'_1 + m_2 \bar{x}'_2, \\ L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2. \end{cases}$$

Zur Ableitung der beiden Gleichungen (2) genügt nun in der relativtheoretischen wie in der gewöhnlichen Mechanik die Annahme, daß  $m_1$  und  $m_2$  die Massen zweier materiellen Punkte sind, die durchaus nicht die Grenzfälle von homogenen Kugeln darzustellen brauchen. Das in Rede stehende Problem des geraden Stoßes zweier homogenen Kugeln ist also mit demjenigen des geraden Stoßes zweier beliebigen Massenpunkte mathematisch gleichwertig. Da die letztere Auffassung aber die allgemeinere ist, insofern sie von der Voraussetzung einer be-

1) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8, S. 136 bis 141. 1906. (Sitzung vom 23. März 1906.)

2) Für  $u = 0$  folgt aus dem oben für die lebendige Kraft gegebenen Ausdruck der Wert  $mc^2$ ; diese Konstante ist hier absichtlich nicht von  $L$  abgezogen worden, zumal sie in der Mechanik bedeutungslos ist. Vgl. M. Planck, Berliner Ber. 1907, S. 542 bis 570 (Sitzung vom 13. Juni 1907), insbesondere § 18 (auch abgedruckt in Ann. d. Phys. (4) 26, S. 1 bis 34, 1908).

stimmten Gestalt und Massenverteilung der Körper frei ist, so soll sie im weiteren Verlaufe dieses Abschnittes vorgezogen werden.

Um jetzt die Gleichungen (2) aufzulösen, sollen an Stelle der Geschwindigkeiten  $u$  zweckmäßiger gewählte Größen eingeführt werden. Man beachte, daß stets

$$0 \leq \left| \frac{u}{c} \right| \leq 1$$

ist, da in der Relativtheorie materielle Punkte niemals Überlichtgeschwindigkeit annehmen können. Daher darf man setzen:

$$(3a) \quad \frac{u}{c} = \mathfrak{I}g \eta.$$

Durch diese Substitution nehmen die Funktionen (1) die folgende Gestalt an:

$$(3b) \quad \mathfrak{I}g = c \cdot \text{Sin } \eta, \quad L = mc^2 \cdot \text{Cos } \eta.$$

Falls die Geschwindigkeit  $u$  von  $-c$  bis  $+c$  wächst, wächst der zugehörige hyperbolische „Geschwindigkeitswinkel“  $\eta$  (d. h. doppelte Hyperbelsektor) von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ; ebenso wächst auch, wie notwendig, der auf die Masseneinheit reduzierte Impuls  $\mathfrak{I}g$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , während die lebendige Kraft  $L$  von  $mc^2$  bis  $+\infty$  variiert.

Berücksichtigt man die für kleine  $\eta$  gültigen Beziehungen

$$\mathfrak{I}g \eta = \eta, \quad \text{Sin } \eta = \eta, \quad \text{Cos } \eta = 1 + \frac{\eta^2}{1 \cdot 2},$$

so erhält man sofort die ausgearteten Ausdrücke der gewöhnlichen Mechanik, welche für gegen  $c$  kleine Geschwindigkeiten  $u$  gelten:

$$(3^*) \quad \eta^{(0)} = \frac{u}{c}, \quad \mathfrak{I}g^{(0)} = u, \quad L^{(0)} = mc^2 + \frac{m}{2} u^2.$$

Wenn man in der angegebenen Weise sämtliche vier Geschwindigkeiten  $u_1, u_2, u'_1, u'_2$  durch die zugehörigen Geschwindigkeitswinkel  $\eta_1, \eta_2, \eta'_1, \eta'_2$  ersetzt, verwandelt sich (2) in folgendes symmetrische Gleichungssystem:

$$(4) \quad \begin{cases} m_1 \text{Sin } \eta_1 + m_2 \text{Sin } \eta_2 = m_1 \text{Sin } \eta'_1 + m_2 \text{Sin } \eta'_2, \\ m_1 \text{Cos } \eta_1 + m_2 \text{Cos } \eta_2 = m_1 \text{Cos } \eta'_1 + m_2 \text{Cos } \eta'_2. \end{cases}$$

Bringt man in beiden Gleichungen die  $m_1$  enthaltenden Glieder nach links und die  $m_2$  enthaltenden nach rechts und dividiert sodann die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man:

$$\frac{\text{Cos } \eta_1 - \text{Cos } \eta'_1}{\text{Sin } \eta_1 - \text{Sin } \eta'_1} = \frac{\text{Cos } \eta_2 - \text{Cos } \eta'_2}{\text{Sin } \eta_2 - \text{Sin } \eta'_2}.$$

Verwandelt man nun die hier auftretenden Differenzen in Produkte, so bekommt man durch Heben

$$\mathfrak{I}g \frac{\eta_1 + \eta'_1}{2} = \mathfrak{I}g \frac{\eta_2 + \eta'_2}{2}$$

und hieraus:

$$(5) \quad \eta_1 + \eta'_1 = \eta_2 + \eta'_2.$$

Für kleine Geschwindigkeiten artet diese Gleichung gemäß (3\*) in folgende aus der gewöhnlichen Theorie des Stoßes bekannte Beziehung aus:

$$(5^*) \quad u_1 + u'_1 = u_2 + u'_2.$$

In dieser Gleichung wird links auf den ersten Massenpunkt und rechts auf den zweiten das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten angewandt. Das Entsprechende findet auch in Gleichung (5) statt; jedoch ist eben die einfache Addition in der Relativtheorie nur für die Geschwindigkeitswinkel selbst zulässig, nicht mehr für ihre hyperbolischen Tangenten, die Geschwindigkeiten<sup>1)</sup>; für die letzteren gilt vielmehr ein anderes Additionsgesetz. In der Tat geht (5) durch Anwendung der Operation  $\mathfrak{A}g$ , wenn man das Additionstheorem dieser Funktion berücksichtigt, in die Beziehung über:

$$\frac{\mathfrak{A}g \eta_1 + \mathfrak{A}g \eta'_1}{1 + \mathfrak{A}g \eta_1 \cdot \mathfrak{A}g \eta'_1} = \frac{\mathfrak{A}g \eta_2 + \mathfrak{A}g \eta'_2}{1 + \mathfrak{A}g \eta_2 \cdot \mathfrak{A}g \eta'_2}$$

oder:

$$(5a) \quad \frac{u_1 + u'_1}{1 + \frac{u_1 u'_1}{c^2}} = \frac{u_2 + u'_2}{1 + \frac{u_2 u'_2}{c^2}}.$$

Hier erkennt man auf beiden Seiten der Gleichung nun wirklich das relativtheoretische Additionsgesetz der Geschwindigkeiten, wie es von Einstein<sup>2)</sup> und H. Poincaré<sup>3)</sup> fast gleichzeitig aufgestellt wurde.

Um jetzt die Lösung des Systems (4) zu beenden, dividiere man die erste Gleichung desselben

$$m_1 (\text{Sin } \eta_1 - \text{Sin } \eta'_1) = -m_2 \cdot (\text{Sin } \eta_2 - \text{Sin } \eta'_2)$$

durch die aus (5) hervorgehende:

$$2 \mathfrak{C}0j \frac{\eta_1 + \eta'_1}{2} = 2 \mathfrak{C}0j \frac{\eta_2 + \eta'_2}{2};$$

man erhält so:

$$(6) \quad m_1 \text{Sin } \frac{\eta_1 - \eta'_1}{2} + m_2 \text{Sin } \frac{\eta_2 - \eta'_2}{2} = 0.$$

Nun bezeichne man in (5) den vorläufig unbekanntten gemeinsamen Wert von  $\eta_1 + \eta'_1$  und  $\eta_2 + \eta'_2$  mit  $2\xi$  und setze die sich so ergebenden Werte

$$(7a) \quad \eta'_1 = 2\xi - \eta_1, \quad \eta'_2 = 2\xi - \eta_2$$

1) Vgl. A. Sommerfeld, Phys. Ztschr. 10, S. 826 bis 829. 1909.

2) A. Einstein, a. a. O., § 5, S. 905f.

3) H. Poincaré, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 21, S. 129 bis 176, 1906 (Sitzung vom 23. Juli 1905); vgl. § 1, S. 133f. u. § 4, S. 144f.

in (6) ein; es folgt dann:

$$m_1 \text{Sin} (\xi - \eta_1) + m_2 \text{Sin} (\xi - \eta_2) = 0.$$

Durch diese Gleichung ist der Wert von  $\xi$  bestimmt; man erhält aus ihr:

$$(7b) \quad \mathfrak{Tg} \xi = \frac{m_1 \text{Sin} \eta_1 + m_2 \text{Sin} \eta_2}{m_1 \text{Cos} \eta_1 + m_2 \text{Cos} \eta_2}.$$

Die gesuchte Lösung von (4) wird also durch (7a) und (7b) gebildet; durch (3a) sind dann auch die  $\eta'_1$  und  $\eta'_2$  entsprechenden Geschwindigkeiten  $u'_1$  und  $u'_2$  selbst bestimmt.

Jetzt sollen die gesuchten Größen  $u'_1$  sowie  $u'_2$  durch die beiden gegebenen  $u_1$  und  $u_2$  in entwickelter Form dargestellt werden, und zwar zuerst  $u'_1$ . Aus (7a) folgt

$$\mathfrak{Tg} \eta'_1 = \mathfrak{Tg} (2\xi - \eta_1)$$

oder durch zweimalige Benützung des Additionstheorems der Funktion  $\mathfrak{Tg}$  und Berücksichtigung von (3a):

$$(8) \quad \frac{u'_1}{c} = \frac{2 \mathfrak{Tg} \xi - \frac{u_1}{c} \cdot (1 + \mathfrak{Tg}^2 \xi)}{1 + \mathfrak{Tg}^2 \xi - 2 \frac{u_1}{c} \cdot \mathfrak{Tg} \xi}.$$

Die Gleichung (7b) nimmt durch Anwendung von (3b) die Gestalt an:

$$(7b^1) \quad \mathfrak{Tg} \xi = \frac{m_1 \frac{\xi_1}{c} + m_2 \frac{\xi_2}{c}}{\frac{L_1}{c^2} + \frac{L_2}{c^2}}$$

oder in Rücksicht auf (1):

$$(9) \quad \mathfrak{Tg} \xi = \frac{m_1 \frac{u_1}{c} \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}} + m_2 \frac{u_2}{c} \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{m_1 \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}} + m_2 \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}.$$

Setzt man den durch (9) gegebenen Wert von  $\mathfrak{Tg} \xi$  in (8) ein, so erhält man den gewünschten Ausdruck für  $u'_1$ , den man nur noch zu vereinfachen hat. Aus ihm erhält man dann durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 sofort denjenigen für  $u'_2$ .

In entwickelter Gestalt lautet somit die Lösung der Aufgabe des geraden Stoßes:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} u'_1 &= \frac{m_1^2 u_1 \cdot \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(2u_2 - u_1 - u_1 \cdot \frac{u_2^2}{c^2}\right) + 2m_1 m_2 u_2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)}}{m_1^2 \cdot \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(1 - 2 \frac{u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_1^2}{c^2}\right) + 2m_1 m_2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)}} \\ u'_2 &= \frac{m_1^2 \cdot \left(2u_1 - u_2 - u_2 \cdot \frac{u_1^2}{c^2}\right) + m_2^2 u_2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) + 2m_1 m_2 u_1 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)}}{m_1^2 \cdot \left(1 - 2 \frac{u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_1^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) + 2m_1 m_2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)}} \end{aligned} \right.$$

Hierzu tritt noch als verbindende Beziehung die Gleichung (5a), die z. B. gestattet,  $u'_2$  aus  $u'_1$  linear gebrochen zu berechnen:

$$(5b) \quad u'_2 = \frac{u_2 - u_1 - u'_1 \cdot \left(1 - \frac{u_1 u_2}{c^2}\right)}{\frac{u_1 u_2}{c^2} + \frac{u'_1 \cdot (u_2 - u_1)}{c_2} - 1}.$$

Sind  $u_1$  und  $u_2$  klein gegen  $c$ , so lassen sich die rechten Seiten von (10) durch  $m_1 + m_2$  heben, und die Zähler und Nenner gehen aus quadratischen Funktionen der Massen in lineare über. Die so *ausgeartete Lösung* lautet:

$$(10^*) \quad \begin{cases} u'_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\ u'_2 = \frac{2m_1 u_1 + (m_2 - m_1)u_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

diese Gleichungen sind, wie notwendig, die in der gewöhnlichen Mechanik geltenden Gesetze des geraden Stoßes.

Auf völlig durchsichtige Weise gewinnt man die Stoßgesetze (10\*) aus den Gleichungen (7b) und (7a); die dort auftretenden transzendenten Funktionen arten nämlich im Grenzfalle in lineare aus, so daß man einfach erhält:

$$(7b^*) \quad \xi = \frac{m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2}{m_1 + m_2},$$

$$(7a^*) \quad \begin{cases} \eta'_1 = 2\xi - \eta_1 = \frac{(m_1 - m_2)\eta_1 + 2m_2 \eta_2}{m_1 + m_2}, \\ \eta'_2 = 2\xi - \eta_2 = \frac{(m_2 - m_1)\eta_2 + 2m_1 \eta_1}{m_1 + m_2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (7a\*) führen nun offenbar sofort auf das gesuchte System (10\*).

Von *besonderen Fällen* der allgemeinen Gesetze (10) seien folgende hervorgehoben:

a) Für  $m_1 = m_2$  folgt aus (10) oder leichter unmittelbar aus (4) oder auch (2):

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_1;$$

beim geraden Stoß von materiellen Punkten gleicher Masse vertauschen sich also einfach die Geschwindigkeiten, wie in der gewöhnlichen Mechanik.

α<sub>1</sub>) Ist  $m_1 = m_2$  und außerdem  $u_1 = 0$ , so erhält man

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = 0;$$

in diesem Falle gibt also der bewegte Massenpunkt seine ganze Geschwindigkeit an den ruhenden ab.

$\beta)$  Für  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  ergeben sich aus (10) sofort die Formeln:

$$u'_1 = -\frac{2u_2 - u_1 \cdot \left(1 + \frac{u_2^2}{c^2}\right)}{1 - 2\frac{u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_2^2}{c^2}}, \quad u'_2 = u_2,$$

die für kleine Geschwindigkeiten in die aus der gewöhnlichen Mechanik bekannten

$$u'_1 = 2u_2 - u_1, \quad u'_2 = u_2$$

ausarten.

$\beta_1)$  Ist  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  und  $u_2 = 0$ , so erhält man

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = 0.$$

Dieses Ergebnis läßt sich am einfachsten für Kugeln aussprechen, z. B. folgendermaßen: stößt eine homogene Kugel senkrecht auf eine ebene Wand, die einen ruhenden Körper von unendlicher Masse begrenzt, so wird die Kugel in entgegengesetzter Richtung reflektiert, wobei sich der Betrag ihrer Geschwindigkeit nicht ändert. Wie man sieht, ist diese Folgerung der neuen und der alten Stoßtheorie gemeinsam.

$$\gamma) \text{ Für } \frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2 \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{u_1 \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}, \quad \text{oder } m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

gewinnt man aus (10) oder erheblich einfacher aus (7b<sup>1</sup>) und (7a) die Beziehungen

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = -u_2;$$

die Geschwindigkeiten beider Massenpunkte behalten also ihre Größe, nehmen aber die entgegengesetzte Richtung an. Im Falle kleiner Geschwindigkeiten geht jene Bedingung ersichtlich in die einfachere

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2}{u_1} \quad \text{oder} \quad m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$$

über (Ruhe des Schwerpunkts des Systems beider Massenpunkte), die in der gewöhnlichen Mechanik gilt.

Übrigens läßt sich  $\beta_1)$  auch als besonderer Fall von  $\gamma)$  ansehen, da die Bedingungen von  $\beta_1)$  der Voraussetzung von  $\gamma)$  genügen.

$\gamma_1)$  Ist  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -u$  und  $m_1 = m_2$ , so ist die relativtheoretische Bedingung für den Fall  $\gamma)$  ebenfalls erfüllt, also

$$u'_1 = -u, \quad u'_2 = u,$$

eine Lösung, die auch in der gewöhnlichen Theorie gilt. Diese Tatsache ist mit dem Umstande im Einklang, daß sich der Fall  $\gamma_1)$  auch als besonderer Fall von  $\alpha)$  ansehen läßt.

§ 2. Geometrische Behandlung.

Nunmehr möge die Aufgabe des geraden Stoßes auf eine geometrische Weise behandelt werden, die die Richtigkeit der Lösung (7a, b) und ihrer besonderen Fälle anschaulich fast ohne Rechnung erkennen läßt. Hierbei wird die von Poincaré<sup>1)</sup> herrührende Deutung der relativtheoretischen Physik als einer Invariantentheorie eines gewissen vierdimensionalen Raumes zugrunde gelegt werden. Die Koordinaten dieses Raumes sind die vier reellen Größen  $x, y, z$  und  $l = ct$ . Sein Charakter ist hyperbolisch; insbesondere ist sein stets reelles Linienelement  $d\sigma$  durch die Beziehung bestimmt:

$$(11) \quad d\sigma^2 = dl^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

In diesem Paragraphen wird nur die hyperbolische  $xl$ -Ebene verwendet, für deren Linienelement  $d\lambda$  aus (11) diese Gleichung folgt:

$$(11a) \quad d\lambda^2 = dl^2 - dx^2.$$

Bemerkt sei noch, daß die Ausdrucksweise und zugleich die Ausführung der Figuren der Einfachheit wegen nicht reell hyperbolisch, sondern reell euklidisch gestaltet werden soll.

Der Bewegungszustand eines mit der konstanten Geschwindigkeit  $u$  auf der  $x$ -Achse fortschreitenden Punktes von der Masse  $m$  kann nun durch einen Vektor  $\mathbb{U}$  in der  $xl$ -Ebene dargestellt werden, der mit der  $l$ -Achse den  $u$  entsprechenden Winkel  $\eta$  bildet (gemäß (3a)) und dessen Länge gleich  $m$  ist. Die Komponenten des „Bewegungsvektors“  $\mathbb{U}$  nach den Koordinatenachsen sind dann

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbb{U}_x = m \operatorname{Sin} \eta = \frac{1}{c} m u \\ \mathbb{U}_l = m \operatorname{Cos} \eta = \frac{1}{c^2} L, \end{cases}$$

d. h. bis auf universelle Konstanten gleich dem Impuls und der lebendigen Kraft des Punktes.<sup>2)</sup>

Der Betrag  $m$  von  $\mathbb{U}$  setzt sich aus den Komponenten unter Berücksichtigung der Identität

$$\operatorname{Cos}^2 \eta - \operatorname{Sin}^2 \eta = 1$$

hyperbolisch gemäß (11a) zusammen:

$$(13) \quad |\mathbb{U}| = \sqrt{\mathbb{U}_l^2 - \mathbb{U}_x^2} = m.$$

Führt man in der angegebenen Weise die Bewegungsvektoren  $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}'_1, \mathbb{U}'_2$  der zwei sich stoßenden Massenpunkte ein, so lassen sich die beiden zu lösenden Gleichungen (4), welche die Erhaltung von Im-

1) H. Poincaré, a. a. O., § 9, S. 168f.

2) Vgl. H. Poincaré, a. a. O., S. 169.

puls und Energie ausdrücken, in die zweidimensionale Vektorgleichung zusammenziehen:

$$(14) \quad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2,$$

zu der die beiden Bedingungen für die Massen

$$(14a) \quad |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}'_1|, \quad |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}'_2|$$

hinzutreten.

Das Problem des geraden Stoßes bekommt dann, wie man durch unmittelbare Anschauung erkennt, folgende Lösung:

*Die Bewegungsvektoren  $\mathbf{u}'_1$  und  $\mathbf{u}'_2$  werden aus  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  durch Spiegelung an der geometrischen Summe  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  erhalten.*

In der Tat sind sodann die Gleichungen (14) und (14a) erfüllt und auch nur dann, falls man die identische Lösung, wie nötig, ausschließt. Zur Erläuterung diene Figur 1; in ihr ist  $OA = \mathbf{u}_1$ ,  $AB = \mathbf{u}_2$ ,  $OB = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ,  $OA' = \mathbf{u}'_1$ ,  $A'B = \mathbf{u}'_2$ .

Setzt man  $\sphericalangle BOC = \xi$ , so ergibt sich aus der Figur sofort:

$$\xi = \frac{\eta_1 + \eta'_1}{2} = \frac{\eta_2 + \eta'_2}{2},$$

$$\text{Tg } \xi = \frac{BC}{OC} = \frac{m_1 \sin \eta_1 + m_2 \sin \eta_2}{m_1 \cos \eta_1 + m_2 \cos \eta_2},$$

d. i. die vorhin auf rein rechnerischem Wege gefundene Lösung (7a, b).

Sehr leicht lassen sich nun auch die oben besprochenen besonderen Fälle  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ) durch die betreffenden geometrischen Konstruktionen lösen.

$\alpha$ ) Für  $m_1 = m_2 = m$  wird gemäß Figur 2 das Deltoid  $OABA'$  ein Rhombus und somit

$$\eta'_1 = \eta_2, \quad \eta'_2 = \eta_1,$$

d. h.

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_1, \quad \text{wie früher.}$$

$\alpha_1$ ) In bezug auf diesen Sonderfall (s. o.) von  $\alpha$  sei nur bemerkt, daß bei ihm die Seite  $OA$  des Rhombus auf die  $l$ -Achse zu liegen kommt.

$\beta$ ) Für  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  fällt entsprechend Figur 3 die Ecke  $B$  des Deltoids in unendliche Ferne, und daher wird

$$\eta'_1 = 2\eta_2 - \eta_1, \quad \eta'_2 = \eta_2,$$

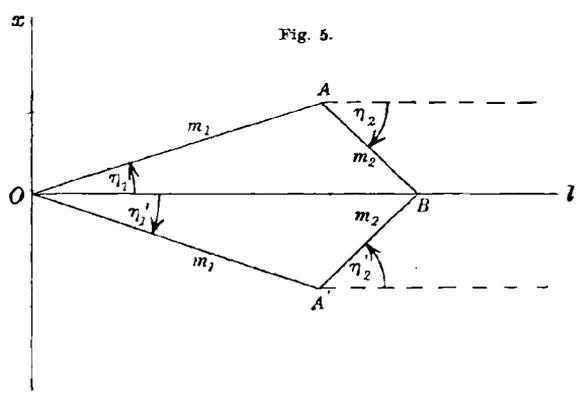
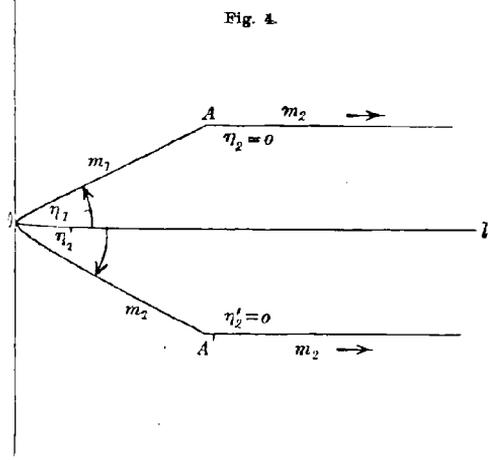
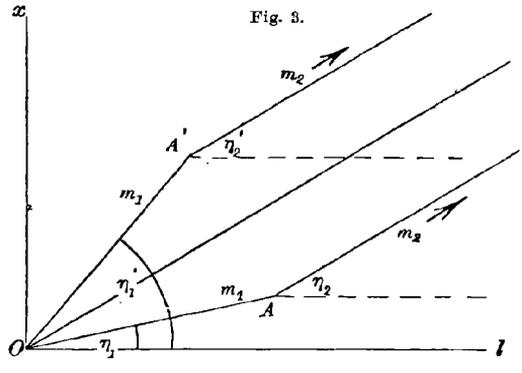
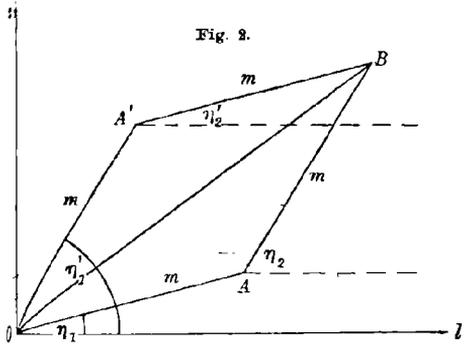
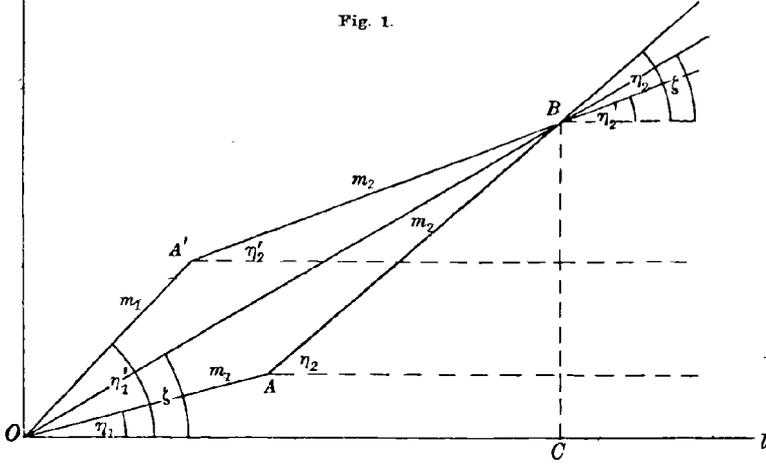
was wegen (3a) auf die oben gegebene Lösung führt.

$\beta_1$ ) Ist insbesondere außer  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  noch  $u_2 = 0$ , so liest man aus Figur 4 unmittelbar die Beziehungen ab:

$$\eta'_1 = -\eta_1, \quad \eta'_2 = \eta_2 = 0,$$

d. h.

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = 0, \quad \text{wie oben.}$$



$\gamma)$  Für  $m_1 \text{Sin } \eta_1 + m_2 \text{Sin } \eta_2 = 0$  erhält das Deltoid eine zur  $l$ -Achse symmetrische Lage — siehe Figur 5 — und daher ist

d. h.

$$\eta'_1 = -\eta_1, \quad \eta'_2 = -\eta_2,$$

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = -u_2, \quad \text{wie früher.}$$

Daß  $\beta_1)$  auch als ein besonderer Fall von  $\gamma)$  angesehen werden kann, erhellt aus den zugehörigen Figuren sofort.

$\gamma_1)$  Es genüge die Bemerkung, daß unter den hier geltenden Bedingungen (s. o.) das Deltoid in Figur 5 in einen Rhombus ausartet, der natürlich wieder zur  $l$ -Achse symmetrisch liegt, so daß zugleich ein Sonderfall von  $\gamma$  und  $\alpha$  vorliegt.

Überhaupt entspricht jeder Besonderheit der Gestalt oder Lage des Deltoids auch immer ein physikalisch bedeutsamer Spezialfall der Stoßgesetze.

### Zweiter Abschnitt.

#### Der schiefe (elastische) Stoß zweier homogener Kugeln.

##### § 3. Analytische Behandlung.

In diesem allgemeinen Falle werde wiederum, wie am Beginn von § 1, auf den Stoß von homogenen Kugeln, also nicht mehr von Massenpunkten, zurückgegangen. Die Mittelpunkte beider Kugeln bewegen sich hier auf getrennten Geraden im Raume, die vor und nach dem Zusammenstoß verschiedene Lage haben und im übrigen windschief, parallel oder konvergent sein können. Die Geschwindigkeit einer Kugel, deren Masse  $m$  sei, heiße  $q$ ; die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Achsen eines als ruhend angesehenen dynamisch berechtigten rechtwinkligen Koordinatensystems seien  $u, v, w$  genannt, die Komponenten des zugehörigen Impulses  $m\xi, m\eta, m\zeta$ , die lebendige Kraft von  $m$  ferner  $L$ . Dann gelten an Stelle von (1) in § 1 folgende allgemeineren Beziehungen, in denen wieder  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet:

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \eta = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \zeta = \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}; & q^2 = u^2 + v^2 + w^2. \end{cases}$$

Die Indezsiffren und Striche sollen in derselben Bedeutung wie im ersten Abschnitt angewandt werden.

Gesucht werden nun bei der in Rede stehenden Aufgabe die 6 Werte  $u'_1, v'_1, w'_1, u'_2, v'_2, w'_2$ . Die Prinzipie von der Erhaltung der Bewegungsgröße sowie der lebendigen Kraft liefern für sie sogleich folgende Beziehungen:

$$(16_1) \quad m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 = m_1 \xi'_1 + m_2 \xi'_2,$$

$$(16_2) \quad m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 = m_1 \eta'_1 + m_2 \eta'_2,$$

$$(16_3) \quad m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 = m_1 \zeta'_1 + m_2 \zeta'_2,$$

$$(16_4) \quad L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2.$$

Diese 4 Gleichungen gelten offenbar auch für zwei Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  von beliebiger Gestalt; jedoch genügen sie nicht zur Berechnung der gesuchten 6 Unbekannten. Da sich nun für den Fall von Massenpunkten weitere Beziehungen nicht aufstellen lassen, indem z. B. die Angabe des zwischen den Punkten bei der Berührung wirkenden Kraftgesetzes die Bewegung ihres eigentlichen Charakters als eines Stoßes beraubt, so bleibt das Problem des schiefen Stoßes zweier beliebigen Massenpunkte unbestimmt, im Unterschiede von dem im ersten Abschnitt behandelten geraden Stoße derselben. Bei dem schiefen Stoß zweier homogenen Kugeln ist es dagegen leicht, eine zweite Gruppe von dem Wesen dieser Bewegung eigentümlichen Beziehungen anzugeben, sodaß die Aufgabe eindeutig lösbar wird.

Betrachtet man nämlich die beiden homogenen Kugeln im Augenblicke ihres Zusammenstoßes, so werden Kraftwirkungen in Rücksicht auf die Symmetrie und Homogenität der Körper nur in Richtung der Zentralen stattfinden und nicht senkrecht zu ihr, da Reibung ausdrücklich ausgeschlossen wurde. Weil aber das Wesen einer Kraftwirkung dem verallgemeinerten zweiten Bewegungsgesetze der Mechanik entsprechend in einer Änderung des Impulses besteht, so werden die Komponenten des Impulses in der Richtung der Zentralen (der „Stoßrichtung“) geändert werden; die transversalen Komponenten werden aber für jede Kugel einzeln konstant bleiben und ebenso folglich die betreffenden auf die Masseneinheit reduzierten Komponenten. Da in der gewöhnlichen Mechanik der reduzierte Impuls mit der Geschwindigkeit zusammenfällt, bleiben dort bekanntlich weit einfacher die transversalen Geschwindigkeitskomponenten beim Stoß ungeändert.

Wie man erkennt, läßt sich dieser soeben gegebene Ansatz in der Tat nicht auf Massenpunkte unbestimmter Gestalt übertragen, im Einklange mit den früheren Ausführungen.

Denkt man sich jetzt das Koordinatensystem so gelegt, daß seine *x*-Achse im Augenblicke des Stoßes mit der Zentralen beider Kugeln zu-

sammenfällt, so führt die oben durchgeführte Überlegung zu folgenden weiteren 4 Gleichungen:

$$(17) \quad \eta_1 = \eta'_1, \quad \delta_1 = \delta'_1, \quad \eta_2 = \eta'_2, \quad \delta_2 = \delta'_2.$$

Nunmehr werden die beiden Gleichungen (16<sub>2</sub>) und (16<sub>3</sub>) durch (17) identisch erfüllt und können daher fernerhin unbeachtet bleiben. Also hat man jetzt genau 6 Gleichungen, nämlich (16<sub>1</sub>), (16<sub>4</sub>) und (17), für die 6 zu bestimmenden Größen.

In Rücksicht auf (15) ist das System (17) den folgenden beiden Doppelgleichungen gleichwertig:

$$(17a) \quad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{q_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{q_1'^2}{c^2}}} = \frac{w_1}{w'_1}, \quad \frac{v_2}{v'_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{q_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{q_2'^2}{c^2}}} = \frac{w_2}{w'_2}.$$

Denkt man sich nun für jede Kugel  $v$  und  $w$  zu einer transversalen Gesamtkomponente zusammengesetzt, so erkennt man aus (17a) folgende wichtige Eigentümlichkeit des schiefen Stoßes in der Relativtheorie:

*Die Richtung der transversalen Gesamtkomponente der Geschwindigkeit bleibt für jede der beiden homogenen Kugeln beim Stoße erhalten, aber ihre Größe ändert sich.* (Vgl. hierzu unten Gl. (29) und (30)).

In der gewöhnlichen Mechanik bleibt dagegen bekanntlich auch die Größe derselben erhalten.

Jetzt möge die Lösung der 6 Gleichungen unseres Problems auf analytischem Wege erbracht werden. Indem man beachtet, daß die absoluten Beträge der Quotienten  $\frac{u}{c}$ ,  $\frac{v}{c}$ ,  $\frac{w}{c}$  und  $\frac{q}{c}$  nur von 0 bis 1 variieren können, führe man die (hyperbolischen) Winkel  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $\varrho$  durch folgende Gleichungen ein:

$$(18a) \quad \begin{cases} \sin \varphi = \frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \sin \chi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & \sin \psi = \frac{\frac{w}{c}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ \cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}; & . & . \end{cases}$$

die letzte derselben kann auch durch die gleichwertige einfachere

$$(18b) \quad \tanh \varrho = \frac{q}{c}$$

ersetzt werden, die zu (3a) im ersten Abschnitt analog ist. Zwischen den in (18a) auftretenden Winkelfunktionen besteht ersichtlich diese Identität:

$$(18c) \quad \cos^2 \varrho - \sin^2 \varphi - \sin^2 \chi - \sin^2 \psi = 1.$$

Die mechanischen Grundfunktionen nehmen jetzt folgende Gestalt an:

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = c \cdot \sin \varphi, & \eta = c \cdot \sin \chi, & \zeta = c \cdot \sin \psi, \\ L = mc^2 \cdot \cos \varrho. \end{cases}$$

In der angegebenen Weise führe man die 16 Winkel

$$\begin{aligned} &\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \varrho_1, \\ &\varphi_2, \chi_2, \psi_2, \varrho_2, \\ &\varphi'_1, \chi'_1, \psi'_1, \varrho'_1, \\ &\varphi'_2, \chi'_2, \psi'_2, \varrho'_2 \end{aligned}$$

an Stelle der 12 Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} &u_1, v_1, w_1, \\ &u_2, v_2, w_2, \\ &u'_1, v'_1, w'_1, \\ &u'_2, v'_2, w'_2 \end{aligned}$$

ein, wobei die Gleichwertigkeit beider Variabelnsysteme wegen der (18c) entsprechenden 4 Identitäten einleuchtend ist. Dann gehen die zu lösenden 6 Gleichungen (16<sub>1</sub>), (16<sub>4</sub>) und (17) in die folgenden über:

$$(20_1) \quad \begin{cases} m_1 \sin \varphi_1 + m_2 \sin \varphi_2 = m_1 \sin \varphi'_1 + m_2 \sin \varphi'_2, \\ m_1 \cos \varrho_1 + m_2 \cos \varrho_2 = m_1 \cos \varrho'_1 + m_2 \cos \varrho'_2, \end{cases}$$

$$(20_2) \quad \begin{cases} \sin \chi_1 = \sin \chi'_1, & \sin \psi_1 = \sin \psi'_1, \\ \sin \chi_2 = \sin \chi'_2, & \sin \psi_2 = \sin \psi'_2. \end{cases}$$

Es ist nun möglich, die Gleichungen (20<sub>1</sub>) bei Berücksichtigung von (20<sub>2</sub>) auf eine Form zu bringen, die derjenigen der im ersten Abschnitt bereits gelösten Gleichungen (4) ganz analog ist, indem nur die Massen durch verwickeltere Ausdrücke zu ersetzen sind. Diese letzteren sollen nun zuerst aufgestellt werden.

Man gewinnt aus (18c) und (20<sub>2</sub>) folgende Gleichungen:

$$(21) \quad \begin{cases} \cos^2 \varrho_1 - \sin^2 \varphi_1 = \cos^2 \varrho'_1 - \sin^2 \varphi'_1, \\ \cos^2 \varrho_2 - \sin^2 \varphi_2 = \cos^2 \varrho'_2 - \sin^2 \varphi'_2, \end{cases}$$

die in den ursprünglichen Variablen so lauten:

$$(21a) \quad \begin{cases} \frac{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}{1 - \frac{q_1^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}}{1 - \frac{q_1'^2}{c^2}}, \\ \frac{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}{1 - \frac{q_2^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{u_2'^2}{c^2}}{1 - \frac{q_2'^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Jetzt definiere man eine Funktion  $M$  folgendermaßen:

$$(22) \quad M = m \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}$$

oder

$$(22a) \quad M = m \sqrt{\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Führt man so die 4 Größen  $M_1, M_2, M_1', M_2'$  ein, so gilt wegen (21):

$$(23) \quad M_1 = M_1', \quad M_2 = M_2';$$

die Funktionen  $M_1$  und  $M_2$  verhalten sich also ähnlich wie die Massen  $m_1$  und  $m_2$  selbst, indem sie beim Stoße ihren Zahlenwert nicht ändern. Ferner verwende man wieder den im ersten Abschnitt (vgl. (3a)) benutzten Winkel  $\eta$ . Man setze also:

$$(24) \quad \tanh \eta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

oder

$$(24a) \quad \tanh \eta = \frac{u}{c},$$

und bestimme in dieser Weise die Winkel  $\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$ . Die Gleichungen (21) und (22) gehen dann in folgende über:

$$(21b) \quad \begin{aligned} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \eta_1} &= \frac{\cos \varphi_1'}{\cos \eta_1'}, & \frac{\cos \varphi_2}{\cos \eta_2} &= \frac{\cos \varphi_2'}{\cos \eta_2'}, \end{aligned}$$

$$(22b) \quad M = m \frac{\cos \varphi}{\cos \eta}.$$

Auf Grund von (24), (22b) und (21b) (oder (23)) erkennt man nun sofort die Richtigkeit der folgenden auf  $m_1$  bezüglichen Identitäten:

$$(25) \quad \begin{cases} m_1 \sin \varphi_1 = M_1 \sin \eta_1, & m_1 \sin \varphi_1' = M_1 \sin \eta_1', \\ m_1 \cos \varphi_1 = M_1 \cos \eta_1, & m_1 \cos \varphi_1' = M_1 \cos \eta_1'. \end{cases}$$

Da für  $m_2$  die entsprechenden Beziehungen bestehen, so nehmen die Gleichungen (20<sub>1</sub>) die gewünschte Gestalt an, die zu (4) analog ist:

$$(26) \quad \begin{cases} M_1 \sin \eta_1 + M_2 \sin \eta_2 = M_1 \sin \eta_1' + M_2 \sin \eta_2', \\ M_1 \cos \eta_1 + M_2 \cos \eta_2 = M_1 \cos \eta_1' + M_2 \cos \eta_2'. \end{cases}$$

Die Lösung dieses Systems ist gemäß (7 a, b) diese:

$$(27) \quad \begin{cases} \eta'_1 = 2\vartheta - \eta_1, & \eta'_2 = 2\vartheta - \eta_2, \\ \mathfrak{Lg} \vartheta = \frac{M_1 \mathfrak{S} \eta_1 + M_2 \mathfrak{S} \eta_2}{M_1 \mathfrak{C} \eta_1 + M_2 \mathfrak{C} \eta_2}. \end{cases}$$

Die gesuchten *zentralen Geschwindigkeitskomponenten*  $u'_1$  und  $u'_2$  selbst erhält man dann aus  $\eta'_1$  und  $\eta'_2$  mittels (24 a); sie hängen also *in der Relativtheorie*, wegen (22 a) auch von den *Werten der transversalen Komponenten*  $v_1, w_1, v_2, w_2$  ab.

Mit Rücksicht auf (25) kann man die erhaltene Lösung auch folgendermaßen schreiben:

$$(27a) \quad \begin{cases} \eta'_1 = 2\vartheta - \eta_1, & \eta'_2 = 2\vartheta - \eta_2, \\ \mathfrak{Lg} \vartheta = \frac{m_1 \mathfrak{S} \varphi_1 + m_2 \mathfrak{S} \varphi_2}{m_1 \mathfrak{C} \varphi_1 + m_2 \mathfrak{C} \varphi_2}. \end{cases}$$

Um die Lösung der Aufgabe zu beenden, sind noch gewisse Umgestaltungen einiger früherer Gleichungen zweckmäßig. Wegen (18 a) kann man (17 a) in die Form bringen:

$$(17b) \quad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\mathfrak{C} \varphi_1 e'_1}{\mathfrak{C} \varphi_1 e_1} = \frac{w_1}{w'_1}, \quad \frac{v_2}{v'_2} = \frac{\mathfrak{C} \varphi_2 e'_2}{\mathfrak{C} \varphi_2 e_2} = \frac{w_2}{w'_2}.$$

Hieraus ergibt sich wegen (21 b)

$$(28) \quad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\mathfrak{C} \eta'_1}{\mathfrak{C} \eta_1} = \frac{w_1}{w'_1}, \quad \frac{v_2}{v'_2} = \frac{\mathfrak{C} \eta'_2}{\mathfrak{C} \eta_2} = \frac{w_2}{w'_2},$$

oder in den ursprünglichen Größen:

$$(28a) \quad \frac{v_1}{v'_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}}} = \frac{w_1}{w'_1}, \quad \frac{v_2}{v'_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_2'^2}{c^2}}} = \frac{w_2}{w'_2},$$

welch letztere Form man auch unmittelbar aus (17 a) und (21 a) erhalten kann.

Die gesuchten *transversalen Komponenten*  $v'_1, w'_1, v'_2, w'_2$  werden nun durch (28 a) bestimmt oder auch in trigonometrischer Form durch (28); auf ihre *Abhängigkeit von den zentralen Komponenten*  $u_1$  und  $u_2$  sei noch besonders hingewiesen. Damit sind alle 6 Unbekannten ermittelt und unser Problem gelöst. Doch mögen noch einige weitere Größen berechnet werden.

Die *Gesamtgeschwindigkeiten*  $q'_1$  und  $q'_2$  sind durch (21 a) unmittelbar zu erhalten, oder auch auf trigonometrischem Wege, indem man aus (21 b)  $\varphi'_1$  und  $\varphi'_2$  findet und hieraus mittels (18 b)  $q'_1$  und  $q'_2$ .

Für die Änderung der transversalen Gesamtkomponenten der Geschwindigkeit  $\sqrt{v^2 + w^2}$  durch den Stoß gewinnt man aus (28) die Gleichung:

$$(29) \quad \frac{\sqrt{v_1^2 + w_1^2}}{\sqrt{v_1'^2 + w_1'^2}} = \frac{\cos \eta_1'}{\cos \eta_1}, \quad \frac{\sqrt{v_2^2 + w_2^2}}{\sqrt{v_2'^2 + w_2'^2}} = \frac{\cos \eta_2'}{\cos \eta_2}.$$

Die Richtung dieser transversalen Gesamtkomponenten bleibt dagegen, wie schon bemerkt, beim Stoß auch in der Relativtheorie un geändert; maßgebend ist hierfür die schon in (17a) enthaltene Beziehung:

$$(30) \quad \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_1'}{w_1'}, \quad \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_2'}{w_2'}.$$

Versteht man ferner unter  $\alpha$  den Winkel der Bewegungsrichtung einer Kugel mit der in der „Stoßrichtung“ gelegenen  $x$ -Achse, so ist offenbar

$$(31) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{u}.$$

Die Gleichungen für die Änderung dieser Winkel durch den Stoß bekommt man aus (29) und (24a), nämlich:

$$(32) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1'} = \frac{\sin \eta_1'}{\sin \eta_1}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2'} = \frac{\sin \eta_2'}{\sin \eta_2}.$$

Besitzen die sich stoßenden Kugeln ursprünglich *keine transversale Geschwindigkeit*, ist also

$$v_1 = w_1 = v_2 = w_2 = 0,$$

somit  $q_1 = u_1$  und  $q_2 = u_2$ , bewegen ihre Mittelpunkte sich also anfangs auf der bereits in der Berührungszentralen liegenden  $x$ -Achse, so ist gemäß (22a)

$$M_1 = m_1 \quad \text{und} \quad M_2 = m_2.$$

Es wird also (26) mit (4) identisch, und aus (28) folgt außerdem

$$v_1' = w_1' = v_2' = w_2' = 0,$$

d. h. die Kugelmittelpunkte bewegen sich auch nach dem Zusammenstoße auf der  $x$ -Achse weiter. So ergibt sich hier das im ersten Abschnitt behandelte Problem als besonderer Fall des im zweiten gelösten.

Um die Ausdrücke für  $u_1'$  und  $u_2'$  in *völlig entwickelter* Form zu erhalten, hat man nur in (10) entsprechend (22a)  $m_1$  und  $m_2$  durch die mit

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}{1 - \frac{q_1^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}{1 - \frac{q_2^2}{c^2}}}$$

multiplizierten Werte zu ersetzen:

$$\left. \begin{aligned}
 & u'_1 = \\
 & \left\{ m_1^2 \cdot u_1 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(2u_2 - u_1 - u_1 \cdot \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \right. \\
 & \quad \left. + 2m_1 m_2 \cdot u_2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right)} \right\} \\
 & : \left\{ m_1^2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \right. \\
 & \quad \left. + 2m_1 m_2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right)} \right\} \\
 & u'_2 = \\
 & \left\{ m_1^2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(2u_1 - u_2 - u_2 \cdot \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot u_2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \right. \\
 & \quad \left. + 2m_1 m_2 \cdot u_1 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right)} \right\} \\
 & : \left\{ m_1^2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{2u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right) + m_2^2 \cdot \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \right. \\
 & \quad \left. + 2m_1 m_2 \cdot \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) \sqrt{\left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right)} \right\}.
 \end{aligned} \right.$$

Die analogen Formeln für  $v'_1, w'_1, v'_2, w'_2$  ließen sich nun durch Verbindung von (28a) mit (33) leicht erhalten; sie würden freilich ein recht verwickeltes Aussehen zeigen.

Jetzt möge die *Ausartung* unserer Lösung des schiefen Stoßes für *kleine Geschwindigkeiten* ermittelt werden. Sind im Vergleich mit  $c$  die Werte  $q_1$  und  $q_2$  klein und dementsprechend auch ihre Komponenten, so folgt aus (22a)

$$M_1 = m_1, \quad M_2 = m_2;$$

da (26) hierdurch in (4) übergeht, so ist die schon gefundene Ausartung der Lösung von (4), d. h. (10\*), mit der gesuchten Ausartung von (33) identisch; hierzu hat man dann die Ausartung von (17), die man z. B. auch aus (28a) erhalten kann, hinzuzufügen. So gewinnt man in der Tat die aus der gewöhnlichen Mechanik bekannte Lösung für den schiefen Stoß:

$$(33^*) \quad \begin{cases} u'_1 = \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \\ u'_2 = \frac{2 m_1 u_1 + (m_2 - m_1) u_2}{m_1 + m_2}, \end{cases}$$

$$(17^*) \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1, \quad v'_2 = v_2, \quad w'_2 = w_2.$$

Die räumliche Lösung entsteht also hier durch einfache *Superposition der linearen Lösung* (33\*) (gleich (10\*)) und der *Transversal-*

bedingung (17\*), während in der Relativtheorie eine solche Superposition nicht zulässig ist. Hinzugefügt seien noch folgende ausgeartete Formeln, die in der gewöhnlichen Mechanik gelten:

$$(29^*) \quad \sqrt{v_1^2 + w_1^2} = \sqrt{v_1'^2 + w_1'^2}, \quad \sqrt{v_2^2 + w_2^2} = \sqrt{v_2'^2 + w_2'^2};$$

$$(32^*) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1'} = \frac{u_1'}{u_1}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2'} = \frac{u_2'}{u_2}.$$

Am Schlusse dieses Paragraphen sollen noch einige besondere Fälle der allgemeinen Lösung untersucht werden, die den im ersten Abschnitte bei dem linearen Fall behandelten entsprechen. Die betreffenden Formeln für die zentralen Komponenten der Geschwindigkeit lassen sich aus den in § 1 gewonnenen sofort entnehmen; man hat wieder nur zu berücksichtigen, daß die Massen  $m_1$  und  $m_2$  hier durch die Funktionen  $M_1$  und  $M_2$  vertreten werden. In entsprechender Weise können auch die in § 2 gegebenen geometrischen Lösungen hier ohne weiteres angewandt werden, um eine Veranschaulichung der Aufgabe zu bieten und die Rechnungen zu einem großen Teil entbehrlich zu machen. Die Beziehungen für die transversalen Komponenten liefert jedesmal Gleichung (28a), diejenigen für die Winkel  $\alpha$  Gleichung (32).

Die Bezeichnung der besonderen Fälle ist, soweit möglich, dieselbe wie im ersten Abschnitt.

$$\alpha) \text{ Für } M_1 = M_2, \text{ d. h. } \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{q_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{q_2^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)}}, \text{ ist}$$

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = u_1; \quad \frac{v_1'}{v_1} = \frac{w_1'}{w_1} = \frac{v_2'}{v_2} = \frac{w_2'}{w_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}.$$

Sind dagegen die wirklichen Massen gleich, d. h.  $m_1 = m_2$ , so tritt beim räumlichen Stoß im Unterschiede von dem linearen die Vertauschung der zentralen Geschwindigkeitskomponenten im allgemeinen nicht ein, im Gegensatz zur gewöhnlichen Mechanik. (Doch vgl. unten  $\gamma_2$ !).

$\alpha_1$ ) Ist  $M_1 = M_2$  und außerdem  $q_1 = 0$ , also  $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ , so ergibt sich aus den Formeln von  $\alpha$ ) sofort:

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = 0; \quad v_1' = w_1' = 0, \quad \frac{v_2'}{v_2} = \frac{w_2'}{w_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}};$$

somit

$$\alpha_1' = 0^\circ, \quad \alpha_2' = 90^\circ.$$

Die gestoßene (erste) Kugel geht hier also in der Stoßrichtung weiter und die stoßende (zweite) in der Berührungsebene, somit senk-

recht zur Stoßrichtung, da sie ihre Zentralgeschwindigkeit ganz abgeben hat.

In der gewöhnlichen Mechanik tritt diese Bewegungsweise, indem freilich  $v'_2 = v_2$  und  $w'_2 = w_2$  ist, unter den folgenden ausgearteten Bedingungen ein:

$$m_1 = m_2, \quad q_1 = 0,$$

d. h. unter den Voraussetzungen, die im Falle  $\alpha_1$ ) beim relativtheoretischen linearen Stoß gelten.

$\beta$ ) Für  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  ist auch  $\frac{M_2}{M_1} = \infty$ , also:

$$u'_1 = -\frac{2u_2 - u_1 \cdot \left(1 + \frac{u_2^2}{c^2}\right)}{1 - 2\frac{u_1 u_2}{c^2} + \frac{u_2^2}{c^2}}, \quad u'_2 = u_2;$$

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{w'_1}{w_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}}}, \quad v'_2 = v_2, \quad w'_2 = w_2;$$

somit auch  $q'_2 = q_2$ ,  $\alpha'_2 = \alpha_2$ .

In der gewöhnlichen Mechanik arten unter der Bedingung  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  folgende Teile dieser Lösung aus:

$$u'_1 = 2u_2 - u_1, \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1.$$

$\beta_1$ ) Ist  $\frac{m_2}{m_1} = \infty$  und  $q_2 = 0$ , so ist auch  $\frac{M_2}{M_1} = \infty$  und  $u_2 = v_2 = w_2 = 0$ , also

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = 0; \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1, \quad v'_2 = 0, \quad w'_2 = 0;$$

somit  $q'_1 = q_1$ ,  $q'_2 = 0$ ,  $\alpha'_1 = -\alpha_1$ .

Für die *Reflexion* einer schief auf eine ruhende *ebene Wand* aufprallenden homogenen Kugel gelten also in der neuen Theorie völlig dieselben Gesetze wie in der alten:

Der Reflexionswinkel der Kugel ist gleich ihrem Einfallswinkel, und der absolute Betrag ihrer Geschwindigkeit bleibt ungeändert.

$\gamma$ ) Für  $M_1 \sin \eta_1 + M_2 \sin \eta_2 \equiv m_1 \sin \varphi_1 + m_2 \sin \varphi_2 = 0$ , d. h.

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2 \sqrt{1 - \frac{q_1^2}{c^2}}}{u_1 \sqrt{1 - \frac{q_2^2}{c^2}}}$$

ergibt sich

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = -u_2; \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1, \quad v'_2 = v_2, \quad w'_2 = w_2;$$

somit  $q'_1 = q_1$ ,  $q'_2 = q_2$ ,  $\alpha'_1 = -\alpha_1$ ,  $\alpha'_2 = -\alpha_2$ .

Hier findet also nach zwei Seiten hin dieselbe Reflexion statt, die soeben beschrieben wurde; in der Tat läßt sich  $\beta_1)$  auch als besonderer Fall von  $\gamma)$  auffassen. Bemerkenswert ist, daß die Voraussetzung für das Eintreten dieser Reflexion beim schiefen Stoß wiederum verwickelter ist als beim geraden. In der gewöhnlichen Mechanik dagegen artet die Bedingung beim räumlichen Stoß in die schon vom linearen Stoß bekannte aus, daß der Schwerpunkt des Systems beider homogenen Kugeln ruhen muß:

$$\frac{m_1}{m_2} = - \frac{u_2}{u_1}.$$

$\gamma_1)$  Ist  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -u$  und

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{q_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{q_2^2}{c^2}}},$$

so ist die Voraussetzung von  $\gamma)$  erfüllt; also tritt doppelte Reflexion ein gemäß den Gleichungen:

$$u'_1 = -u, \quad u'_2 = u; \quad v'_1 = v_1, \quad w'_1 = w_1, \quad v'_2 = v_2, \quad w'_2 = w_2;$$

$$q'_1 = q_1, \quad q'_2 = q_2, \quad \alpha'_1 = -\alpha_1, \quad \alpha'_2 = -\alpha_2.$$

In der gewöhnlichen Mechanik artet die zugehörige Bedingung so aus:

$$u_1 = u, \quad u_2 = -u, \quad m_1 = m_2,$$

also entsprechend dem linearen Fall von  $\gamma_1)$  in der Relativtheorie.

Da aus den allgemeinen Voraussetzungen von  $\gamma_1)$  die Gleichung  $M_1 = M_2$  folgt, so kann man  $\gamma_1)$  auch unter die besonderen Fälle von  $\alpha)$  rechnen.

$\gamma_2)$  Ist  $u_1 = u$ ,  $u_2 = -u$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $w_1 = w_2$  und  $m_1 = m_2$ , so ist auch  $q_1 = q_2$  und  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ , und man erkennt, daß die Voraussetzungen von  $\gamma_1)$  erfüllt sind. Daher ist:

$$u'_1 = -u, \quad u'_2 = u, \quad v'_1 = v'_2 = v_1 = v_2, \quad w'_1 = w'_2 = w_1 = w_2;$$

$$q'_1 = q'_2 = q_1 = q_2, \quad \alpha'_1 = -\alpha'_2 = -\alpha.$$

Natürlich läßt sich  $\gamma_2)$ , da es einen besonderen Fall von  $\gamma_1)$  bildet und somit  $M_1 = M_2$  ist, auch unter  $\alpha)$  unterordnen. Es werden jedoch hier durch den Stoß nicht nur die zentralen Komponenten der Geschwindigkeit vertauscht, sondern die ganzen Geschwindigkeitsvektoren beider Kugeln, und zwar gilt dies in der gewöhnlichen Mechanik in gleicher Weise.

§ 4. Geometrische Behandlung.

Wie gegen Ende des vorigen Paragraphen bemerkt, läßt sich die geometrische Lösung des § 2 sofort verwenden, sobald man die Gleichungen (26) gewonnen hat. Diese wurden aber in § 3 rechnerisch abgeleitet. Es soll nun jetzt gezeigt werden, daß man unser Problem des schiefen Stoßes auch allein durch geometrische Überlegungen vollständig lösen kann.

Zu diesem Zwecke werde wieder der vierdimensionale hyperbolische Raum mit den Koordinaten  $x, y, z$  und  $l = ct$  eingeführt, dessen reelles Linienelement  $d\sigma$  durch die Beziehung

$$(11) \quad d\sigma^2 = dl^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

bestimmt ist. Auch hier soll übrigens die Ausdrucksweise reell euklidisch gehalten werden.

Der dynamische Zustand einer homogenen Kugel von der Masse  $m$ , deren Mittelpunkt mit der konstanten Geschwindigkeit  $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  geradlinig fortschreitet, kann jetzt durch einen vierdimensionalen Vektor  $\mathbf{U}$  von der Länge  $m$  dargestellt werden, dessen Richtung durch die vier Winkel  $\varphi, \chi, \psi, \varrho$  gemäß (18 a, b) bestimmt wird. Die Komponenten dieses „Bewegungsvektors“  $\mathbf{U}$  nach den Koordinatenachsen sind dann folgende Ausdrücke (vgl. (19)):

$$(34) \quad \begin{cases} U_x = m \sin \varphi = \frac{1}{c} m \xi, \\ U_y = m \sin \chi = \frac{1}{c} m \eta, \\ U_z = m \sin \psi = \frac{1}{c} m \zeta, \\ U_l = m \cos \varrho = \frac{1}{c^2} L; \end{cases}$$

sie sind also wieder bis auf universelle Koeffizienten mit den Impuls-komponenten und der lebendigen Kraft von  $m$  gleichbedeutend. Den Betrag  $m$  von  $\mathbf{U}$  gewinnt man aus den Komponenten (34) entsprechend der Gleichung (11), wobei noch die Identität (18 c) zu berücksichtigen ist:

$$(35) \quad |\mathbf{U}| = \sqrt{U_l^2 - U_x^2 - U_y^2 - U_z^2} = m.$$

In dieser Weise hat man nun für die beiden Kugeln die Bewegungsvektoren  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}'_1, \mathbf{U}'_2$  einzuführen.

Dann lassen sich die vier Gleichungen (16) für Impuls und Energie in die vierdimensionale Vektorgleichung zusammenziehen:

$$(36) \quad \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}'_1 + \mathbf{U}'_2,$$

zu der noch die Transversalbedingungen (17) in der Gestalt

$$(37) \quad \begin{cases} (\mathbf{u}_1)_y = (\mathbf{u}'_1)_y, & (\mathbf{u}_1)_z = (\mathbf{u}'_1)_z, \\ (\mathbf{u}_2)_y = (\mathbf{u}'_2)_y, & (\mathbf{u}_2)_z = (\mathbf{u}'_2)_z, \end{cases}$$

und die Bedingungen für die Massen

$$(38) \quad |\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}'_1|, \quad |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}'_2|$$

hinzuzufügen sind.

Um nun das System (36), (37) und (38) rein geometrisch zu lösen, projiziere man  $\mathbf{u}$  im vierdimensionalen Raume zuerst auf die  $xl$ -Ebene und nenne den so gewonnenen Vektor  $\mathfrak{M}$ ; sodann projiziere man  $\mathbf{u}$  auf die  $yz$ -Ebene und bezeichne den so erhaltenen Vektor mit  $\mathfrak{N}$ . In euklidischer Ausdrucksweise kann man dann  $\mathbf{u}$  als geometrische Summe von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  betrachten. Für die absoluten Beträge  $M$  und  $N$  von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  gelten dabei entsprechend (11) die folgenden (nichteuklidischen) Beziehungen:

$$(39) \quad \begin{cases} |\mathfrak{M}| = \sqrt{u_y^2 - u_x^2} = M, & |\mathfrak{N}| = \sqrt{u_y^2 + u_z^2} = N, \\ |\mathbf{u}| = \sqrt{M^2 - N^2} = m; \end{cases}$$

hier ist, wie man erkennt,  $M$  dieselbe Größe, die schon oben in § 3 durch (22) eingeführt wurde.

Die vier Transversalbedingungen (37) lassen sich nun in folgende zwei Vektorgleichungen vereinigen:

$$(40) \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}'_1, \quad \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}'_2.$$

Zieht man jetzt die beiden Gleichungen (40) von (36) geometrisch ab, so erhält man in anschaulicher Weise folgende Vektorgleichung:

$$(41) \quad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{M}'_2.$$

In ganz entsprechender Weise ergeben sich, wenn man die dritte Gleichung von (39) beachtet, aus den Bedingungen (38) auf Grund von (40) die neuen Bedingungen:

$$(41a) \quad |\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}'_1|, \quad |\mathfrak{M}_2| = |\mathfrak{M}'_2|.$$

Die Rechnungen des § 3 von (21) bis (23) über die merkwürdige Unveränderlichkeit der Funktionen  $M_1$  und  $M_2$  beim Stoße, die sie den Massen  $m_1$  und  $m_2$  analog erscheinen läßt, bekommen somit hier ihre geometrische Aufklärung.

Die soeben erlangten Gleichungen (41) und (41a) haben genau dieselbe Form wie (14) und (14a) in § 2 und beziehen sich ebenso wie diese Gleichungen auf Vektoren in der  $xl$ -Ebene. In geometrischer Form läßt sich daher die Lösung für das Problem des schiefen Stoßes zweier homogener Kugeln folgendermaßen aussprechen, wobei noch einmal daran

erinnert sei, daß die  $x$ -Achse des Koordinatensystems mit der Zentralen im Augenblicke der Berührung zusammenfallen soll:

Man projiziere die Bewegungsvektoren  $U_1$  und  $U_2$  auf die  $xl$ -Ebene und spiegele die beiden so erhaltenen Vektoren  $M_1$  und  $M_2$  in dieser Ebene an der geometrischen Summe  $M_1 + M_2$ . Die hierdurch gewonnenen Vektoren  $M'_1$  und  $M'_2$  addiere man geometrisch je zu dem entsprechenden der beim Stoße unveränderlichen Vektoren  $M_1$  und  $M_2$ , die durch Projektion von  $U_1$  und  $U_2$  auf die  $yz$ -Ebene gebildet werden. Die so hergestellten Vektoren sind  $U'_1$  und  $U'_2$ .

Auch die Gleichungen (26), die den Gleichungen (4) entsprechen, lassen sich jetzt leicht gewinnen. Man verstehe in der  $xl$ -Ebene unter  $\eta$  den Winkel zwischen  $M$  und der  $l$ -Achse. Dann tritt die Darstellung

$$(42) \quad U_x = M \sin \eta = M_x, \quad U_l = M \cos \eta = M_l$$

an Stelle der früheren durch (34) gegebenen:

$$U_x = m \cdot \sin \varphi, \quad U_l = m \cdot \cos \varphi,$$

und zugleich ist jetzt die Richtigkeit der Identitäten (25) anschaulich klar. Dabei ist  $\eta$  wegen der aus (42) folgenden Gleichung:

$$(43) \quad \tan \eta = \frac{U_x}{U_l} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

offenbar derselbe Winkel wie der oben durch (24) bestimmte.

Wegen (42) erhält man nun aus (41) und (41a) sofort die gesuchten Gleichungen (26):

$$(26) \quad \begin{cases} M_1 \sin \eta_1 + M_2 \sin \eta_2 = M_1 \sin \eta'_1 + M_2 \sin \eta'_2, \\ M_1 \cos \eta_1 + M_2 \cos \eta_2 = M_1 \cos \eta'_1 + M_2 \cos \eta'_2. \end{cases}$$

Aus ihnen kann man nun weiter auf geometrischem Wege entsprechend der Figur 1 die rechnerische Lösung (27) leicht bekommen und sodann die Lösung durch (28) vollenden.

Hiermit möge die Behandlung der Stoßgesetze der Relativtheorie abgeschlossen werden.

Breslau, den 1. Januar 1913.

## Bücherschau.

---

**Dr. Guido Hauck**, weiland Geheimer Regierungsrat, Professor der darstellenden Geometrie und der graphischen Statik an der Kgl. technischen Hochschule zu Berlin, **Vorlesungen über darstellende Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik**, herausgegeben von Alfred Hauck, Direktor der Kgl. Realschule in Schönlanke. In zwei Bänden. Erster Band mit 650 Textfiguren. XII und 339 S. Leipzig und Berlin 1912, B. G. Teubner. Geh. *M* 10.—, geb. *M* 12.—.

Das Buch behandelt zunächst die Grund- und Aufriß-Methode und ihre Anwendung auf ebenflächige Gebilde und sodann in 2 kurzen Kapiteln die axonometrische Methode. Nach einigen Bemerkungen über geometrische Verwandtschaften (Affinität, Kollineation) wird zur Betrachtung der ebenen Kurven übergegangen. Die Kurven 2. Ordnung werden als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel abgeleitet. Daran schließen sich dann die Raumkurven, speziell die Schraubenlinie. Nun wendet sich der Verfasser den Flächen zu und zwar zunächst den entwickelbaren Flächen. Die darauf folgende Flächenfamilie sind die Rückungsflächen. Als solche werden die Rotationsflächen, die Flächen 2. Ordnung und die topographischen Flächen behandelt. Die windschiefen Regelflächen 2. und höherer Ordnung und die windschiefen Schraubenflächen bilden Schluß.

Die Darstellung benutzt die rein geometrische Form und zeichnet sich durch Klarheit und Eigenart aus. Beispiele aus der Technik verraten die Vielseitigkeit des Autors. Die Figuren sind ausgezeichnet schön und übersichtlich. Allerdings hat der Herausgeber auf die Buchstaben im Text und in den Figuren fast vollständig verzichtet. Als Grund dafür gibt der Herausgeber in der Vorrede an, daß der Anfänger, besonders der Techniker, der nicht Fachmathematiker ist, erfahrungsgemäß von dem Studium eines Buches abgeschreckt wird, wenn er sich an der Hand des Textes durch eine mit Buchstaben durchsetzte Figur hindurcharbeiten soll; abgesehen davon gehen auch die Schönheit und Eleganz der deskriptiven Methoden in solchen Figuren leicht verloren. Außerdem ergibt sich noch der große Vorteil für den Studierenden, daß er durch die Unmöglichkeit, sich mit Hilfe der Buchstaben mechanisch an der Figur zurecht zu tasten, zum räumlichen Denken in hervorragender Weise gezwungen wird. Das ist sicher alles ganz richtig. Will man aber irgend eine Konstruktion präzise darstellen, so ist das ohne Buchstaben eben nicht möglich. Sonst entstehen Schwerfälligkeiten und Unklarheiten, wie etwa auf S. 7, wo viele Zeilen nötig sind, um eine Konstruktion zu beschreiben, die durch Hinzunahme von ein paar Buchstaben in wenig Worten zu geben wäre. Man wird also nicht das Kind mit dem Bade ausschütten und überhaupt keine Buchstaben benutzen. Deswegen brauchen die Figuren noch nicht an Klarheit einzubüßen.

Ein störender Irrtum ist auf S. 247 zu beseitigen. Dort heißt es, daß eine Fläche von der Tangentialebene im allgemeinsten Falle in einer Kurve geschnitten wird, welche im Berührungspunkt einen Doppelpunkt hat und daß weiter dieser Doppelpunkt für beide Äste der Kurve ein Wendepunkt ist. Das ist natürlich nicht richtig. Im allgemeinen ist der Doppelpunkt kein Wendepunkt. Trotzdem sind aber die Doppelpunktstangenten Haupttangente der Fläche. Der auf S. 271 gegebene Beweis für die Existenz der 3 Hauptachsen einer Fläche 2. Ordnung krankt an der Voraussetzung, daß einer der Durchmesser der kleinste ist. Das muß wenigstens erwähnt werden. Auch der Schluß auf S. 275, aus dem sich die 3 Gattungen der Flächen 2. Ordnung ergeben, ist etwas unsicher. Zum Schluß mag noch erwähnt werden, daß es dem deutschen Sprachgefühl zuwiderläuft, „zentralprojizieren“ (S. 158) oder „parallelprojizieren“ (S. 209) als ein Wort zu bilden nach Analogie der entsprechenden Substantive.

München, 15. Dez. 1912.

KARL DOEHLEMANN.

**J. Schlotke**, weiland Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg, **Lehrbuch der darstellenden Geometrie**. I. Teil: Spezielle darstellende Geometrie. Mit 260 Figuren. 7. durchgesehene und ergänzte Auflage, herausgegeben von Dr. Carl Rodenberg, Geh. Reg. Rat, Professor der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule zu Hannover. 169 S. Leipzig, H. A. Ludwig Degener. Geh. *M* 3.60, geb. *M* 3.80.

Die neue Auflage dieses guten und weitverbreiteten Schulbuches hat nach dem Tode des Verfassers Rodenberg besorgt; wesentliche Änderungen waren nicht nötig. Neu hinzugekommen ist die Aufgabe, den in einer Archimedischen Wasserschraube gehobenen Wasserkörper darzustellen.

München, 15. Dez. 1912.

KARL DOEHLEMANN.

**P. Harzer**. **Über die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen**. 95 S. 4. Publik. d. Sternw. Kiel. XII. Leipzig 1910.

Die direkten Methoden der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen setzen voraus, einmal daß deren Bewegung nach den Keplerschen Gesetzen erfolge und dann daß die zu grunde gelegten Beobachtungen eine hinreichend kleine Zwischenzeit überdecken, um für gewisse Ausdrücke, die bei den verschiedenen Methoden verschieden sind, rasch konvergierende Formeln ableiten zu können. Beide Einschränkungen will der Verf. dadurch vermeiden, daß er die mechanischen Beziehungen des Problems ganz ausschaltet, d. h. auf die Benutzung der Zeiten überhaupt verzichtet. Er kommt so auf eine rein geometrische Methode, die den Beobachtungen eines Himmelskörpers zweierlei Bedingungen vorschreibt: 1) je drei Örter des Himmelskörpers liegen in einer durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Ebene, der Bahnebene 2) je vier Örter befinden sich auf demselben in der Bahnebene liegenden Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt die Sonne steht. Für die geometrische Methode sind demnach fünf Beobachtungen erforderlich. Und das Problem der Bahnbestimmung besteht jetzt in der Hauptsache darin, aus fünf algebraischen Gleichungen die fünf Unbekannten, i. e. die fünf geozentrischen Abstände des Himmelskörpers

zu den fünf Beobachtungszeiten zu ermitteln. In der Entwicklung seiner Methode, die der Verf. in aller Ausführlichkeit wiedergibt, bevorzugt er die algebraische Formulierung gegenüber der sonst bei Bahnbestimmungen üblichen trigonometrischen.

Der „theoretische Teil“ diskutiert der Reihe nach die geometrischen Beziehungen zwischen zwei, drei, vier und fünf Punkten in der Ellipse und behandelt dann in sehr eingehender Weise die wichtigen Verbesserungsgleichungen, die unter Benutzung der Zwischenzeiten die Hypothesen- und Näherungsrechnungen abzukürzen bestimmt sind. Der „praktische Teil“ wendet die dargelegte geometrische Methode auf zwei dem Planeten Eros entlehnte schwierige Beispiele an, die zur rechnerischen Erläuterung der zum Teil recht komplizierten Formeln dienen. Die kritische Vergleichung mit der mechanischen Methode der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen fällt nach Harzers Ansicht jedenfalls nicht zu Ungunsten der geometrischen Methode aus. Das zweite Beispiel mit 116 Tagen Zwischenzeit und  $63^{\circ}$  heliozentrischem Bogen aber läßt sich schon nicht befriedigend nach der geometrischen Methode lösen und muß nach der mechanischen zu Ende gerechnet werden. Hier zeigt sich die untere Grenze der Anwendbarkeit der Methode, die bei kleinen Zwischenzeiten versagt und ihre Leistungsfähigkeit erst von einem sechstel bis zu einem halben Umlauf des Himmelskörpers bewährt. Für parabolische Bahnen, Kometenbahnen, führt die geometrische Methode überhaupt nicht zum Ziel.

Der in der Entdeckungspraxis der kleinen Planeten gewöhnliche Fall ist der, daß drei, vielleicht auch mehr Beobachtungen eines kleinen Planeten vorliegen, die auf einige Wochen zusammengedrängt sind, im allgemeinen also nicht die untere Grenze der Anwendbarkeit der geometrischen Methode erreichen. Und auch die Meinung des Verf. über Durchsichtigkeit und Einfachheit seiner rein geometrischen Methode bei großen Zwischenzeiten werden erfahrene Rechner nicht unbedingt teilen. Das Studium der schönen und originalen theoretischen Betrachtungen und mathematischen Entwicklungen in dieser Arbeit wird durch das Neuartige der Bezeichnungswiese etwas erschwert.

Nach der Veröffentlichung seiner Schrift wurde der Verf. darauf aufmerksam (Astr. Nachr. 185 (1910), 9), daß eine geometrische Methode der Bahnbestimmung schon vor 70 Jahren (1842) von J. A. Grunert versucht worden ist, allerdings ohne praktischen Erfolg. Ferner hat H. Seeliger bei der Behandlung des wesentlich einfacheren Problems der Bestimmung von Doppelsternbahnen, gleichfalls bei Benutzung von fünf Örtern, eine rein geometrische Methode angewendet (H. Seeliger, Zur Theorie der Doppelsternbewegungen. Leipzig 1872).

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**Annuaire pour l'an 1913** publié par le bureau des longitudes. Avec des notices scientifiques. VI u. 707 u. 28 u. 52 u. 16 u. 25 u. 55 S. 9 × 14 cm. Paris, Gauthier-Villars. M 1.20.

Seit 1904 erscheint das Annuaire in der Art, daß es erst in zwei aufeinanderfolgenden Jahren den reichen Stoff bringt, den es in sein Programm aufgenommen hat. In Übereinstimmung mit diesen Dispositionen enthält der vorliegende Jahrgang die genauen Tafeln und Angaben aus Geographie, Statistik, Metrologie, Münzwesen und Meteorologie, aber nicht die physikalischen und

chemischen Daten. Im astronomischen Teil fallen diesmal die Kapitel über Physik der Sonne, kleine Planeten, Sonnenuhren und Seismologie fort; sie erscheinen wieder im Jahrgang 1914. Die astronomischen Werte wurden von Andoyer von Grund aus revidiert; ferner findet man Text und Tabellen über die Zeitrechnungen der verschiedenen Kulturvölker von Rocques Desvallées und ausgedehnte und bequeme Tafeln zur barometrischen Höhenberechnung von Angot. Alle Zeitangaben werden in Greenwicher Zeit ausgedrückt oder, im Wortlaut des Gesetzes vom 9. Mai 1911, in gesetzlicher Zeit, „d. h. in mittlerer Zeit von Paris vermindert um  $9^m 21^s$ .“ Unter den kleinen wissenschaftlichen Aufsätzen sei der Artikel von Ferrié über „die Anwendung der drahtlosen Telegraphie für Zeitsignale“ hervorgehoben.

Das Annuaire und seine Unentbehrlichkeit für den Astronomen und Geographen ist zu bekannt, als daß hier noch ein Wort über den reichen und wohl-disponierten Inhalt zu sagen wäre. Man kann nur bedauern, daß die Redaktion noch immer an dem kleinen und für den Gebrauch unbequemen Format festhält, über das die Fülle des hineingezwängten Materials längst hinausgewachsen ist. Ginge man zu einem handlichen Oktav über, so würde der jetzt 900 Seiten starke Band sich auf etwa 300 Seiten reduzieren und damit unvergleichlich angenehmer zu handhaben sein. Im Deutschen Sprachgebiet haben wir leider ein dem Annuaire vergleichbares Jahrbuch nicht.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**J. Franz, Der Mond.** 2. Aufl. Mit 34 Abbild. im Text und auf 2 Doppeltafeln. IV u. 120 S. kl. 8°. (ANuG. 90). Leipzig 1912, B. G. Teubner. Geb. *M* 1.25.

In diesem Büchlein gibt der Verf., der selbst in der ersten Reihe der Mondforscher steht, eine knappe Übersicht alles dessen, was wir vom Monde wissen. Er beginnt mit den Kräften, die die Mondbahn beherrschen und bedingen, und setzt ihre Wirkungsweise soweit auseinander, als es die Schwierigkeit des Stoffes in gemeinverständlicher Schreibart zuläßt. Der Vorgang der Rotation und die Frage der Libration werden besonders liebevoll behandelt; es ist dies auch das engere Arbeitsgebiet des Verf., dessen Tätigkeit wir den heutigen Stand unserer Kenntnis von Mondrotation und -Libration verdanken. Die allgemeinen physikalischen Verhältnisse der Mondoberfläche (Temperatur, Atmosphäre) schließen sich an und dann folgt eine nach der Art der Gebilde angeordnete ausgezeichnete Beschreibung der charakteristischen Mondformationen. Ein Katalog der Örter von 96 Mondkratern nach Ausmessungen photographischer Platten durch den Verf. bildet einen wertvollen Anhang.

Vergleicht man diese 2. Aufl. mit der 1906 erschienenen ersten, so fällt zunächst eine Kürzung um 12 Seiten auf. Die rührt daher, daß einmal im ersten Teil alle mathematischen Formeln fortfielen, die die mechanischen Vorgänge der Mondbewegung dem Kundigen kurz erläuterten, und dann wurde das Verzeichnis von Mondkratern, das in der ersten Auflage 150 in Breslau gemessene Objekte umfaßt, jetzt auf 96 Krater zusammengestrichen. Der wissenschaftlich arbeitende Liebhaber der Astronomie, deren es auch in Deutschland heute immer mehr gibt, wird mit diesen Kürzungen wohl nicht ganz einverstanden sein.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**A. Marcuse, Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.**

Mit 26 Abbild. im Text. II u. 99 S. kl. 8<sup>o</sup>. (ANuG. 378). Leipzig 1912, B. G. Teubner. Geb. *M* 1.25.

Der Verf. behandelt in diesem Büchlein die Beziehungen der astronomischen Wissenschaft zum täglichen Leben. Er versteht darunter den Nutzen und die Unterstützung, die die der Himmelskunde entlehnten Methoden den Anforderungen des praktischen Lebens gewähren. Natürlich wäre es aber grundfalsch, nun zu glauben, daß auf diese Weise eine Daseinsbegründung oder Rechtfertigung der Astronomie gegeben werden könne; denn jede Wissenschaft ist, gleich der Kunst, zwecklos.

In den sechs Aufsätzen nimmt den breitesten Raum die wichtige Frage der geographischen Ortsbestimmung ein, sei es zu Lande, auf See oder in der Luft. Mit manchen Bemerkungen und Urteilen des in diesen Dingen sehr erfahrenen Verf. möchte sich Ref. indes doch nicht einverstanden erklären. Zeitdienst und Kalenderwesen, Beziehungen der Astronomie zur Meteorologie, zur Medizin sind weitere Kapitel des an Material überreichen Schriftchens. Eben deshalb ist aber auch eine gründliche Behandlung einer der angeschnittenen Fragen gar nicht möglich und der Verf. hebt das auch selbst hervor, wenn er im Vorwort bemerkt, daß die „Darlegungen daher in erster Linie nur Anregungen für ein eingehenderes Studium aller einschlägigen Gebiete“ sind. Manche der eingestreuten Abbildungen haben mit dem Text wenig zu tun, und ein paar mathematische Figuren lassen an Exaktheit zu wünschen übrig.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

**S. Oppenheim, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. 2. Aufl.**

Mit 19 Abbild. im Text. IV u. 134 S. kl. 8<sup>o</sup>. (ANuG. 110.) Leipzig 1912, B. G. Teubner. Geb. *M* 1.25.

Die sechs schönen Vorträge des Verf. bilden einen Abriß der Geschichte astronomischer Erkenntnis. Mit besonderer Liebe wird die Blütezeit der griechischen Astronomie behandelt. Die Theorien von Hipparch und Ptolemäus erfahren durch einfache mathematische Formeln und durch exakt gezeichnete geometrische Figuren eine eingehende Darstellung, in der die numerischen Resultate der alten Autoren nicht fehlen. In das astronomische Mittelalter zieht der Verf. noch Kopernicus hinein, um dann die Neuzeit mit dem Auftreten Tycho Brahes beginnen zu lassen, der für Keplers Wirken die Fundamente der Beobachtungen schuf. Dann gelangen Keplers Methoden und Ergebnisse zur Darstellung, bis durch Newton die Einheit der Keplerschen Gesetze im Gravitationsgesetz erkannt wird. Nur kurz berührt das letzte Kapitel („die neueste Zeit“) die Probleme, die nach Newton die astronomischen Forschungen beherrschen. In erster Linie wendet sich der Verf. den Resultaten zu, die aus der Betrachtung der Bewegungen und der Verteilung der Sterne fließen; die astrophysikalischen Ergebnisse und ihre Bedeutung für unser Bild vom Kosmos mußte er aus dem engen Rahmen des Büchleins ausschließen. Nur so ist es ihm aber auch möglich geworden, allen behandelten Fragen eine angemessene Gründlichkeit zuzuwenden.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

- **P. Meth, Theorie der Planetenbewegung.** Mit 17 Fig. im Text und einer Tafel. IV u. 60 S. kl. 8<sup>o</sup>. (Math. Bibl. VIII). Leipzig 1912, B. G. Teubner. Kart. *M* 0.80.

In dem engen Rahmen dieses Heftchens behandelt der Verf. einige Fragen aus der Theorie der Planetenbewegung in elementarer Form. Er lehnt sich hierbei an die „Elemente der Mechanik des Himmels“ von A. F. Möbius (Leipzig 1843) an, hat aber den Kern von Möbius' schöner Darstellung nicht benutzt. Die einleitenden Sätze aus der Mechanik werden gut entwickelt. Der zweite Abschnitt bringt die Beschreibung der Bahnen im Sonnensystem auf Grund der Keplerschen Gesetze. Nachdem aus ihnen das Newtonsche Gravitationsgesetz abgeleitet ist, beschäftigt sich der dritte Abschnitt mit dessen Anwendungen. Natürlich nur in einigen lose zusammenhängenden Kapiteln, die für den reifen Schüler und angehenden Studierenden recht zweckmäßig ausgewählt sind (z. B. Anziehung einer Kugel, Berechnung der Planetenmassen, Doppelsterne, Erhaltung der Energie bei der Planetenbewegung). In den zweiten Abschnitt hat sich ein Kapitel über Zeitrechnung, Definition der Zeiteinheiten, Zeitgleichung verirrt, das nicht schlecht ist, aber doch in einer so eng gespannten „Theorie der Planetenbewegung“ durch einen dem weit-schichtigen Thema näherliegenden Gegenstand hätte ersetzt werden sollen.

Straßburg i. E.

WIRTZ.

- F. Ebner, Technische Infinitesimalrechnung** (Differential- und Integralrechnung) mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. VII u. 172 S. 8<sup>o</sup>. Mit 45 Textfiguren. Berlin 1912, O. Salle. Geh. *M* 2.40.

Der Verfasser, der schon durch seinen *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven* (Leipzig, Teubner, 1906) sich bekannt gemacht hat, legt hier einen sehr brauchbaren Abriß der Infinitesimalrechnung vor, der, was Umfang und Ziel anlangt, etwa mit den Büchern von K. Düsing und H. Grünbaum in Parallele gestellt werden kann. Der Standpunkt, den Ebner einnimmt, dürfte jedem, der auf die Bedürfnisse des Technikers billige Rücksicht nimmt, unanfechtbar erscheinen. Die Ableitung der Grundbegriffe ist, solange sich eben die Darstellung nur auf die elementaren Funktionen beschränkt, selbst für den Mathematiker hinreichend streng und es ist dem Verfasser durch geeignete Anordnung gelungen, alles unter den geringst möglichen Voraussetzungen abzuleiten. So wird die Logarithmusfunktion, wie bei F. Klein und J. Tannery aus der Fläche der gleichseitigen Hyperbel entwickelt, nachdem der Integralbegriff bekannt ist. Die Differentiale werden, wie dies in neuester Zeit insbesondere A. Schülke konsequent durchgeführt hat, als „hinreichend kleine Größen“ eingeführt, wobei das „hinreichend“ eben durch die Forderungen der Praxis bedingt ist. Der § 7, der diese Einführung erläutern soll, ist aber doch zu kurz und es sei in dieser Hinsicht auf die neuen Werke von H. v. Mangoldt und L. Schrutka verwiesen, die das Differential in aller Strenge behandeln. Einen Hauptteil des Ebnerschen Buches machen die ganz vorzüglich ausgewählten und durchgeführten technischen Anwendungen aus.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

**Italo Ghersi, Matematica dilettevole e curiosa. Problemi bizzarri —**

Paradossi algebrici, geometrici e meccanici — Moto perpetuo — Grandi numeri — Curve e loro tracciamento meccanico — Sistemi articolati — Quadratura del circolo — Trisezione dell' angolo — Duplicazione del cubo — Geometria della riga, e del compasso — Rompicapo geometrici — Iperspazio — Probabilità — Giochi — Quadrati, poligoni e poliedri magici. VIII u. 730 S. kl. 8°. Con 693 figure originali dell' Autore. Milano 1913, U. Hoepli. Geb. L 9,50.

Das vorliegende Buch gehört der Sammlung der schmucken „Manuali Hoepli“ an, die etwa „Webers Illustrierten Handbüchern“ (früher „Katechismen“) entsprechen. Die Reichhaltigkeit, besser gesagt Buntheit, desselben ist durch den abgedruckten Untertitel noch lange nicht genügend zum Ausdruck gebracht. Von geistreichen Fragen an, wie dieser: „Eine Schnur ist 28 m lang; jeden Tag werden 2 m abgeschnitten; in wieviel Tagen ist man mit dem Abschneiden fertig?“ bis zu einem „Beweise“ für  $2 = 1$  mittels der Reihe für  $\log 2$  (unter Benutzung von deren bedingter Konvergenz) und bis zur Schwarzschen Fläche, die nicht als Grenze der Oberfläche eines eingeschriebenen Polyeders betrachtet werden darf, ist in diesem Buche eine Fülle der heterogensten Dinge zusammengestaut, die mehr oder weniger zur Mathematik Beziehung haben. Da die italienische Literatur bisher ein ähnliches Werk, wie es scheint, nicht besaß, so wird dort Ghersis Zusammenstellung eine Lücke füllen und in ihrer gefälligen Form vielen, insbesondere jugendlichen Mathematikern oder Mathematikliebhabern, große Freude machen.

In Deutschland besitzen wir — um nur die größeren Werke zu nennen — H. Schuberts *Mathematische Mußestunden* (Große Ausgabe, 3. Aufl., Leipzig 1907/09)<sup>1)</sup> und W. Ahrens' *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig 1901; 2. Aufl. I. Bd., Leipzig 1910), die nicht so vielerlei bringen, dafür aber die Probleme wesentlich eingehender behandeln. Wer wird auch die Konstruktion von Kurven zur „unterhaltenden Mathematik“ rechnen? Ahrens gibt außerdem eine mit der größten Sorgfalt gearbeitete Geschichte jedes Spiels oder Scherzes, während Ghersi nur ganz gelegentlich historische Notizen bringt, deren Zuverlässigkeit nicht verbürgt ist. Gibt er doch in der sehr problematischen „Bibliographie“, die dem Buche vorgesetzt ist, als einzige historische Quelle die französische Ausgabe (während es doch auch eine italienische gibt) von W. W. R. Balls *A short account of the history of mathematics* an. Auch viele Druckfehler, besonders in Eigennamen, bemerkt man bei Ghersi. Beispielsweise stehen auf S. 175 in einer Zeile drei: Dirichiet (statt Dirichlet) und Lanée (statt Lamé). — Für die internationale mathematische Literatur dürfte das Buch des fruchtbaren Ingenieurs demnach keinen besonderen Gewinn darstellen.

Pirmasens.

H. WIELEITNER.

1) Diese Auflage, herausgegeben, da der Verfasser schon nicht mehr arbeitsfähig war, stimmt freilich mit der 2. Aufl. von 1900 völlig überein und steht daher nicht ganz auf der Höhe der Zeit.

## Neue Bücher.

### Astronomie, Geodäsie, Nautik.

1. Himmel u. Erde, Unser Wissen v. der Sternenwelt u. dem Erdball. Volksausg. in 40 Lfgn. München 1913, Allgemeine Verlags-Ges. *M* —.60.
2. Mc KREADY, KELVIN, Sternbuch f. Anfänger. Eine Anleitg. zum Auffinden der Sterne u. zum astronom. Gebrauch des Opernglases, des Feldstechers und des Teleskops. Übers. v. Max Iklé. Leipzig 1913, Barth. Geb. in Leinw. *M* 12.—
3. NEWCOMB u. ENGELMANN'S populäre Astronomie. 5. Aufl. In Gemeinschaft mit Eberhard, Ludendorff, Schwarzschild hrsg. v. P. Kempf. Leipzig 1914, Engelmann. *M* 14.—; geb. in Leinw. *M* 15.60.
4. SCHWEYDAR, WILHELM, Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne u. Mond. (Veröffentlichungen des königl. preußischen geodätischen Institutes, neue Folge Nr. 59.) Potsdam 1914. Leipzig, Teubner. *M* 5.—.
5. THOMPSON, P., Navigation; a method of finding a ship's position at sea by one observation only. New York 1913, Longmans. Cloth \$ 1.20.  
S. auch 27.

### Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

6. MEISSNER, ERNST, Über graphische Integration v. totalen Differentialgleichungen. Zürich 1913, Rascher & Co. *M* —.80.
7. ROTHE, R., Darstellende Geometrie des Geländes. (Mathem. Bibliothek, 14. Bändchen.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. Kart. *M* —.80.

### Mechanik.

8. BRYAN, G. H., Die Stabilität der Flugzeuge. Einführung in die dynam. Stabilität der Flugzeuge. Aus dem Engl. übertr. v. H. G. Bader. Berlin 1914, Springer. *M* 6.—; geb. in Leinw. *M* 7.—.
9. Encyclopédie des sciences pures et appliquées. Tome IV, 6. vol. Balistique. Hydraulique. Fasc. 1. Paris, Leipzig 1913, Teubner. *M* 9.20.
10. FÖPPL, AUGUST, Vorlesung über technische Mechanik. In 6 Bänden. Vierter Band: Dynamik. 4. Aufl. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 12.—.
11. FORCHHEIMER, PHILIPP, Hydraulik. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 18.—; *M* 19.—.
12. LECORNU, LÉON, Cours de mécanique, professé à l'École Polytechnique. Tome I. Paris 1914, Gauthier-Villars. Fr. 18.—.
13. MISES, RICH. v., Elemente der techn. Hydromechanik. (Sammlung mathem.-physikal. Schriften Bd. 17.) 1. Tl. Leipzig 1914, Teubner. *M* 5.40; geb. in Leinw. *M* 6.—.
14. PRESCOTT, J., Mechanics of particles and rigid bodies. London 1913, Longmans. 12 s. 6 d.  
S. auch 28, 29, 31, 34, 36, 39, 41.

## Physik.

15. Fortschritte, Die, der Physik im J. 1912. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 68. Jahrg. 3. Abig. Kosmische Physik. Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 38.—
16. HAAS-LORENTZ, G. L. de, Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. („Die Wissenschaft“, Bd. 52.) Braunschweig 1913, Vieweg & Sohn. *M* 3.50; geb. in Leinw. *M* 4.20.
17. HANN, JUL., Lehrbuch der Meteorologie. 3., unter Mitwirkg. v. R. Süring umgearb. Aufl. (In etwa 10 Lfg.) 1. Lfg. Leipzig 1913, Tauchnitz. *M* 3.60.
18. PERRIN, JEAN, Die Atome. Mit Autorisation des Verfassers deutsch hrsg. v. A. Lottemoser. Dresden 1914, Steinkopff. *M* 5.—; geb. in Leinw. *M* 6.—.
19. SIEVERING, H., Moderne Probleme der Physik. Vorträge. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 4.50; geb. in Leinw. *M* 5.50.
20. Strahlung, Die Theorie der, und der Quanten. Verhandlungen auf e. v. E. Solvay einberufenen Zusammenkunft (30. 10.—3. 11. 1911). Mit e. Anhang üb. die Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913. In deutscher Sprache hrsg. v. A. Eucken. (Abhandlgn. der deutschen Bunsen-Gesellschaft, Nr. 7.) Halle 1914, Knapp. *M* 15.60.
21. WIEN, W., Vorlesungen über neuere Probleme der theoretischen Physik, gehalten an der Columbia-Universität in New York im April 1913. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 2.40.
- S. auch 9, 11, 13, 14, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 38, 39, 41.

## Tafeln.

22. BREUSING, Logarithmen des Semiversus. Sonderabdruck der Taf. 7 in Breusings nautischen Tafeln. Im Verein m. O. Fulst u. H. Meldau neu zusammengestellt u. hrsg. v. C. Schilling. Leipzig 1913, Heinsius Nachf. *M* 1.50.
23. DIETERICH, GUST., Tabellen zur Ermittlung der stündlichen Wärmeverluste. München 1913, Oldenbourg. Geb. in Leinw. *M* 20.—.
24. Logarithmentafel, 7- u. 11-stellige. (Nach Ferrol.) Für die Westentasche. 2. Aufl. Bonn 1913, Huthmacher. *M* —.25.
25. MOORE, C. J., Logarithmic reduction tables. For students of analytical chemistry. Boston 1913, Ginn. Cloth \$ 1.—.
26. WESTRICK, F. A., Fünfstellige Logarithmen, für den Schulgebrauch zusammengestellt. 4. Aufl. Münster i. W. 1913, Aschendorff. Geb. *M* 1.—.

## Verschiedenes.

27. Annuaire pour l'an 1914, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
28. BERNAYS, PAUL, Über die Bedenklichkeiten der neueren Relativitätstheorie. (Umarbeitg. e. innerhalb der Friesschen Schule im Juni 1911 geh. Vortrags.) [Aus: „Abhandlgn. der Friesschen Schule.“] Göttingen 1913, Vandenhoeck & Ruprecht. *M* —.80.
29. BOREL, ÉMILE, Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 5.—.
30. BUCH, A., Die Theorie moderner Hochspannungsanlagen. München 1913, Oldenbourg. Geb. in Leinw. *M* 14.—.
31. BUDDE, E., Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. Ein Lehrbuch. Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. *M* 6.—; geb. in Leinw. *M* 6.80.
32. FURTWÄNGLER, PH. und RUHM, G., Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser. (Abhandlungen üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, Bd. IV Heft 8.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 1.60.

33. GÜLDNER, HUGO, Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungskraftmaschinen u. Kraftgasanlagen. 3., neubearb. u. bedeutent erweitert. Aufl. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 32.—
34. HALMOVICI, EMAN., Querschnitts-Dimensionierung u. Spannungsvermittlung für Eisenbetonkonstruktionen. 2. verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1913, Degener. Geb. in Halbleinw. *M* 3.—
35. KÖNIG, JULIUS, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Mit dem Bildnis des Verfassers. Leipzig 1914, Veit & Co. *M* 8.—; geb. *M* 9.—
36. KRIEGBAUM, AUG., Turbinen mit Dampfentnahme. Ein Beitrag zur Berechnung der Anzapfturbine. München 1913, Oldenbourg. *M* 4.50.
37. Rechnungsverfahren, Das Ferrol'sche neue. 5. verm. u. verb. Aufl. Bonn 1913, Huthmacher. Geb. in Leinw. *M* 12.50.
38. SCHEFFER, W., Das Mikroskop. („Aus Natur u. Geisteswelt“, 35. Bändchen.) Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 1.—; geb. in Leinw. *M* 1.25.
39. STUDY, E., Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. („Die Wissenschaft“, Bd. 54). Braunschweig 1914, Vieweg & Sohn. Geb. in Leinw. *M* 5.20.
40. TROST, W., Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland. Mit einem Vorwort von H. E. Timerding. (Abhandlungen üb. den mathem. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathem. Unterrichtskommission, Bd. IV Heft 5). Leipzig u. Berlin, 1914, Teubner. *M* 4.—
41. WAGNER, PAUL, Strömungsenergie u. mechanische Arbeit. Beiträge zur abstrakten Dynamik u. ihrer Anwendung auf Schiffspropeller, schnelllauf. Pumpen u. Turbinen, Schiffswiderstand usw. Berlin 1914, Springer. Geb. in Leinw. *M* 10.—

---

### Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

- Annuaire pour l'an 1914, s. N. B. („Neue Bücher“) Nr. 27.
- BARDEY, E., Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra u. Analysis. Reformausgabe B., für Realanstalten. I. Teil: Unterstufe, hrsg. v. W. Lietzmann. 2., durchgesehene Aufl. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. Geb. in Leinw. *M* 2.—
- Dasselbe, Reformausgabe A: für Gymnasien. II. Teil: Oberstufe, hrsg. v. W. Lietzmann u. Paul Zühlke. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 2.20.
- Dasselbe, Reformausgabe B: für Realanstalten. II. Teil: Oberstufe, hrsg. v. W. Lietzmann u. Paul Zühlke. Ebenda. Geb. in Leinw. *M* 2.40.
- BENDT, FRANZ, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 5. Aufl., durchgesehen u. verbessert v. G. Ehrig. Leipzig 1914, Weber. Geb. *M* 3.—
- Berechnung, Die, der Zahl  $\pi$  auf Grundlage zyklischer und parabolischer Gesetze. Aussig 1913, Selbstverlag.
- BOREL, É., Introduction géométrique à quelques théories physiques, s. N. B. 29.
- BUDDE, E., Tensoren und Dyaden, s. N. B. 31.
- CRANTZ, PAUL, Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. (Aus Natur u. Geisteswelt, 431. Bändchen.) Leipzig u. Berlin. *M* 1.—; Geb. in Leinw. *M* 1.25.
- DÄHNE, AUGUST, Bausteine zur Flugbahn- und Kreisel-Theorie. Berlin 1914, Eisen-schmidt. *M* 1.50.
- FÖPPL, A., Vorlesungen über technische Mechanik, s. N. B. 10.
- FORCHHEIMER, PH., Hydraulik, s. N. B. 11.

- FORT und SCHLÖMILCH, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Teil. Analytische Geometrie des Raumes. 7. Aufl., bearb. v. R. Heger. Leipzig u. Berlin 1913, Teubner. *M* 6.—; geb. in Leinw. *M* 6.80.
- FURTWÄNGLER, PH. u. RUHM, G., Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser, s. N. B. 32.
- HAAS-LORENTZ, G. L. de, Die Brownsche Bewegung, s. N. B. 16.
- KERSCHENSTEINER, G., Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichtes. (Die Schule der Naturwissenschaften in der Erziehung, hrsg. v. K. T. Fischer). Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 3.—; geb. in Leinw. *M* 3.60.
- KÖNIG, BERTHOLD u. MATUSCHEK, JOHANN, Organische Chemie f. die Oberstufe der Realgymnasien. Wien 1914, Pichlers Witwe & Sohn. Geb. *K* 2.20.
- KLEIN, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II: Geometrie. Vorlesung, gehalten im Sommersemester 1908. Ausgearbeitet v. E. Hellinger. 2. Aufl. Leipzig 1913, Teubner. *M* 7.50.
- KÖNIG, J., Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, s. N. B. 35.
- KNOFF, KONRAD, Funktionentheorie. II. Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. (Sammlung Göschen Nr. 703). Berlin u. Leipzig 1913, Göschen. Geb. *M* —.90.
- KRŽIWANEK, KARL, Analytische Darstellung der Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes. Wien, Teschen, Leipzig 1913, Prochaska. *K* 1.20.
- LECERNU, L., Cours de mécanique, s. N. B. 12.
- Mitteilungen des deutsch-südamerikanischen Instituts. 1913 Heft 1, 1914 Heft 1. Stuttgart u. Berlin, Deutsche Verlagsanstalt.
- PASCH, MORITZ, Veränderliche und Funktion. Leipzig u. Berlin 1914, Teubner. *M* 6.—; geb. in Leinw. *M* 7.—.
- ROTHE, R., Darstellende Geometrie des Geländes, s. N. B. 7.
- SCHAEFFER, W., Das Mikroskop, s. N. B. 38.
- SIEVEKING, H., Moderne Probleme der Physik, s. N. B. 19.
- STUDY, E., Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume, s. N. B. 39.
- TROST, W., Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten, s. N. B. 40.
- WESTRICK, F. A., Fünfstellige Logarithmen, s. N. B. 26.
- WIEN, W., Vorlesungen über neuere Probleme der theoretischen Physik, s. N. B. 21.
- WROBEL, E., Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auf Lösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine große Anzahl von Fragen und Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und andern höheren Lehranstalten. 1. Teil: Pensum der Tertia und Untersekunda. 22. Aufl. (1. Aufl. der neuen Ausgabe). Rostock 1913, Koch. Geb. *M* 3.75.
- ZIEGLER, J. H., Die Umwälzung in den Grundanschauungen der Naturwissenschaft. Acht kritische Betrachtungen. Bern 1914, Semminger. Fr. 3.