

ANNALI  
DI  
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

**Luigi Bianchi** in Pisa

**Ulisse Dini** in Pisa

**Giuseppe Jung** in Milano

**Corrado Segre** in Torino

---

SERIE III. \* TOMO XXIV.

---

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—  
1915.

# INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXIV.<sup>o</sup> (SERIE III.<sup>a</sup>)

---

	PAG.
Sulla rappresentazione delle coppie di forme ternarie mediante somme di potenze di forme lineari. — <i>Alessandro Terracini</i> . . . . .	1
Sulle trasformazioni delle superficie isoterme. — <i>Pasquale Calapso</i> . . . . .	11
Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali. — <i>Gino Fano</i> . . . . .	49
Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare. — <i>Francesco Severi</i> . . . . .	89
Le corrispondenze [2, 2] fra curve algebriche. — <i>Oscar Chisini</i> . . . . .	121
Opere matematiche di Luigi Cremona pubblicate sotto gli auspicii della R. Accademia dei Lincei ( <i>Recensione</i> ). — <i>Federigo Enriques</i> . . . . .	157
Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica. — <i>Giacomo Albanese</i> . . . . .	159
Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali derivati per trasformazione di Combesure dai sistemi a curvatura costante. — <i>Luigi Bianchi</i> . . . . .	235
Giovanni Ceva ed il suo carteggio inedito con Vincenzo Viviani. — <i>Alberto Pascal</i> . . . . .	287

---

# Sulla rappresentazione delle coppie di forme ternarie mediante somme di potenze di forme lineari.

(Di ALESSANDRO TERRACINI, a Torino.)

---

1. **P**remettiamo, per maggior chiarezza, alcune considerazioni sulla determinazione del minimo numero  $h + 1$  tale, che la forma algebrica generale di grado  $n$  in  $r + 1$  variabili omogenee si possa ridurre a una combinazione lineare di  $h + 1$  potenze  $n^{\text{esime}}$  di forme lineari nelle stesse variabili.

Dopo che l'esempio ormai classico addotto dal CLEBSCH — non potersi ogni forma ternaria del quarto ordine esprimere come somma di 5 quarte potenze di forme lineari — ebbe mostrato con quanta cautela si debba adoperare, anche in questa questione, il computo delle costanti, si riuscì, introducendo in tal metodo il necessario rigore, o ricorrendo, caso per caso, ad altre considerazioni, a risolvere quel problema in alcuni casi particolari. Il PALATINI <sup>(1)</sup> poi pose il problema sotto una nuova forma che gli permise di ritrovare i risultati noti insieme ad altri nuovi, tra cui quello, particolarmente notevole, che per le forme ternarie, salvo le quadratiche e le biquadratiche, è esatto il valore di  $h + 1$  fornito dal computo delle costanti. Ma un'ulteriore trasformazione del problema, come ora mostrerò, ne agevola ancora notevolmente la trattazione.

Rappresentiamo linearmente, col PALATINI, la totalità delle  $V_{r-1}^n$  di uno  $S_r$  nei punti di uno  $S_m$ , dove  $m = \binom{r+n}{r} - 1$ . In quello  $S_m$  le  $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  costituite da uno  $S_{r-1}$  contato  $n$  volte vengono a corrispondere ai punti di

---

<sup>(1)</sup> *Sulla rappresentazione delle forme e in particolare della cubica quinquaria con la somma di potenze di forme lineari.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. 38 (1902); *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari.* Rend. Lincei (V), t. 12 (1903).

una varietà  $U_r$  di dimensione  $r$  e di ordine  $n^r$ . Allora, se l'equazione di una  $V_{r-1}^n$  generica dello  $S_r$  si può ottenere annullando una somma di  $h+1$  potenze  $n^{\text{esime}}$  di forme lineari, gli  $S_h$  ( $h+1$ )-seganti della  $U_r$  riempiono lo  $S_m$ , e viceversa:  $h+1$  dovrà dunque intanto, come del resto si ha anche subito direttamente dal computo dellè costanti, soddisfare alla:

$$(h+1)r+h \cong \binom{n+r}{r} - 1;$$

da cui:

$$h+1 \cong \frac{1}{r+1} \binom{n+r}{r}. \quad (1)$$

Ora, se nello  $S_r$  si assumono coordinate proiettive non omogenee di iperpiano  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , le coordinate (proiettive omogenee) di un punto della  $U_r$  si ottengono, in un opportuno sistema di riferimento, facendo in tutti i modi possibili i prodotti delle  $x$ , combinate tra loro con ripetizione a  $n$  a  $n$ , a  $n-1$  a  $n-1$ , ecc.; e, d'altra parte, se gli  $S_h$  ( $h+1$ )-seganti della  $U_r$  non riempiono lo spazio ambiente, questo significa che, se si scelgono  $h+1$  qualsiasi sistemi di valori delle  $x$ , sempre è nulla (\*) la matrice, nelle cui ( $h+1$ ) ( $r+1$ ) colonne compaiono successivamente le coordinate degli  $h+1$  punti della  $U_r$  corrispondenti a quegli  $h+1$  sistemi di valori delle  $x$ , e le loro derivate rispetto alle singole  $x$  dei varii sistemi. E questa condizione, che è pure sufficiente, si può allora interpretare, dicendo che in uno  $S_r$  esiste una  $V_{r-1}^n$  (irriducibile o no) avente  $h+1$  punti doppi in altrettanti punti generici dello  $S_r$  (†). Ma in tal caso (‡)  $h+1$   $S_r$  tangenti generici della  $U_r$  stanno in uno spazio la cui dimensione, minore dell'ordinario, uguaglia la dimensione della varietà ricoperta dagli  $S_h$  ( $h+1$ )-seganti della  $U_r$  stessa, il quale spazio contiene gli  $S_r$  tangenti alla  $U_r$  nei singoli punti di una sua varietà, almeno  $\infty^1$  (contenente i punti di contatto di quegli  $h+1$   $S_r$  tangenti); e perciò se, per  $h$  soddisfacente alla (1), esiste in  $S_r$  una  $V_{r-1}^n$  avente  $h+1$  punti doppi in posizione generica, questa  $V_{r-1}^n$  ha necessariamente una varietà doppia almeno  $\infty^1$  (contenente quegli  $h+1$  punti). Concludendo:

(\*) Cfr. la mia Nota: *Sulle  $V_k$  per cui la varietà degli  $S_h$  ( $h+1$ )-seganti ha dimensione minore dell'ordinario*. Rend. del Circ. di Palermo, t. XXXI (1911).

(†) Il prof. SEGRE mi comunica che nel 1908-9 il dott. C. H. SISAM occupandosi di questo argomento, in ricerche tuttora inedite, gli aveva esposto verbalmente questo stesso concetto.

(‡) Op. cit. (†). Colgo quest'occasione per notare che nella formola (2) di quella Nota si deve leggere = anzichè  $\cong$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione della  $V_{r-1}^n$  generale di  $S_r$  si possa esprimere annullando una combinazione lineare di  $h+1$  potenze  $n^{\text{esime}}$  di forme lineari, è che  $h+1$  soddisfaccia alla (1), e che in  $S_r$  non esista nessuna  $V_{r-1}^n$  avente  $h+1$  punti doppi in altrettanti punti generici dello  $S_r$ . Qualora esistesse una  $V_{r-1}^n$  soddisfacente a queste condizioni, si può affermare a priori che essa avrà una varietà almeno  $\infty^1$  di punti doppi (contenente gli  $h+1$  punti imposti come tali).

Come applicazione di questo risultato si ha subito, p. es., che, per le forme biquadratiche di  $S_2, S_3, S_4$ ,  $h+1$  vale rispettivamente 6, 10 e 15, anzichè 5, 9 e 14, come risulterebbe da un computo di costanti (poichè le forme di second'ordine passanti per 5, 9, o 14 punti assegnati, contate due volte, forniscono delle forme biquadratiche quali sono richieste dal precedente enunciato; mentre tali forme vengono a mancare quando si accresca di un'unità il numero dei punti imposti come doppi; com'è chiaro in  $S_2$ , e come risulta in  $S_3$  e in  $S_4$ , p. es., assegnando 6, o 10 dei punti dati entro uno  $S_2$ , o entro uno  $S_3$ ). Così pure per le  $V_3^3$  di  $S_4$ , il fatto che non si può prendere per  $h+1$  il valore 7, che è il minimo soddisfacente alla (1), risulta dalla considerazione che, assegnati 7 punti generici in  $S_4$ , la  $C^4$  razionale normale da essi definita è doppia per la  $V_3^3$  delle sue corde.

Anche il risultato del PALATINI sulle forme ternarie di grado qualunque si ottiene ora senza difficoltà. Se infatti  $n=2l$ , si verifica subito che il minimo valore  $v$  di  $h+1$  soddisfacente alla (1) è, eccetto che per  $n=2$ , o 4, maggiore del numero  $\frac{l(l+3)}{2}$  di punti che servono a determinare una  $C'$ , cosicchè non esiste nessuna curva contenente  $v$  punti dati ad arbitrio, che, contata due volte, costituisca o contribuisca a costituire una  $C^n$  nelle condizioni del precedente enunciato; e analogamente, se  $n=2l+1$ , si verifica che, per ogni valore di  $l$ , il minimo valore  $v$  di  $h+1$  soddisfacente alla (1) è sempre maggiore di  $\frac{l(l+3)}{2}$ .

2. Venendo ora al problema indicato nel titolo di questa Nota, applicheremo un metodo analogo a quello del n.º 1 alla ricerca del minimo numero  $h+1$ , tale che, in generale, due forme ternarie di grado  $n$  si possano entrambe esprimere come combinazioni lineari delle potenze  $n^{\text{esime}}$  di  $h+1$  forme lineari. È noto (<sup>5</sup>) che per le forme di grado 3 il risultato dato dal

(<sup>5</sup>) LONDON, Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven dritter Ordnung. Math. Ann., t. 36 (1890), v. la pag. 550.

computo delle costanti ( $h + 1 = 5$ ) è errato; orbene io dimostrerò che per tutti gli altri valori di  $n$  il computo delle costanti conduce invece ad un risultato esatto.

Trattiamo per semplicità il caso elementare di  $n = 2$ ; il ragionamento ha però valore generale. Consideriamo anzitutto in uno  $S_5$ , dove si sia assunto un sistema di coordinate proiettive omogenee  $y$ , un sistema  $\infty^6$  di piani definito, mediante i parametri variabili  $x$ , dalle formule:

$$y_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_6) + \mu b_i(x_1, x_2, \dots, x_6) + \nu c_i(x_1, x_2, \dots, x_6) \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Se, ciò che in generale non avviene, per due punti generici dello  $S_5$  non passa nessuno  $S_2$  della  $\infty^6$ , il sistema delle 12 equazioni nelle 12 incognite  $\lambda, \mu, \nu, A, M, N, x_1, x_2, \dots, x_6$ :

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda a_i(x) + \mu b_i(x) + \nu c_i(x) & (i = 1, 2, \dots, 6) \\ z_i &= A a_i(x) + M b_i(x) + N c_i(x) & (i = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned}$$

non ammette, per valori generici delle  $y$  e delle  $z$ , nessuna soluzione, e viceversa; e affinché ciò si verifichi è necessario e sufficiente che (posto

$a_i^{(i)}(x) = \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}$ , ecc.) il determinante:

$a_1$	$b_1$	$c_1$	0	0	0	$\lambda a_1^{(1)}(x) + \mu b_1^{(1)}(x) + \nu c_1^{(1)}(x) \dots \lambda a_1^{(6)}(x) + \mu b_1^{(6)}(x) + \nu c_1^{(6)}(x)$
$a_2$	$b_2$	$c_2$	0	0	0	$\lambda a_2^{(1)}(x) + \mu b_2^{(1)}(x) + \nu c_2^{(1)}(x) \dots \lambda a_2^{(6)}(x) + \mu b_2^{(6)}(x) + \nu c_2^{(6)}(x)$
$a_3$	$b_3$	$c_3$	0	0	0	...
$a_4$	$b_4$	$c_4$	0	0	0	...
$a_5$	$b_5$	$c_5$	0	0	0	...
$a_6$	$b_6$	$c_6$	0	0	0	$\lambda a_6^{(1)}(x) + \mu b_6^{(1)}(x) + \nu c_6^{(1)}(x) \dots \lambda a_6^{(6)}(x) + \mu b_6^{(6)}(x) + \nu c_6^{(6)}(x)$
0	0	0	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$A a_1^{(1)}(x) + M b_1^{(1)}(x) + N c_1^{(1)}(x) \dots A a_1^{(6)}(x) + M b_1^{(6)}(x) + N c_1^{(6)}(x)$
0	0	0	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$A a_2^{(1)}(x) + M b_2^{(1)}(x) + N c_2^{(1)}(x) \dots A a_2^{(6)}(x) + M b_2^{(6)}(x) + N c_2^{(6)}(x)$
0	0	0	$a_3$	$b_3$	$c_3$	...
0	0	0	$a_4$	$b_4$	$c_4$	...
0	0	0	$a_5$	$b_5$	$c_5$	...
0	0	0	$a_6$	$b_6$	$c_6$	$A a_6^{(1)}(x) + M b_6^{(1)}(x) + N c_6^{(1)}(x) \dots A a_6^{(6)}(x) + M b_6^{(6)}(x) + N c_6^{(6)}(x)$

sia identicamente nullo. Supponiamo ora che il sistema di piani considerato sia il sistema dei piani trisecanti la varietà  $U$  introdotta nel n.º 1, per  $r = 2$ ,  $n = 2$  (attualmente dunque la superficie di VERONESE); cosicchè potremo assumere le funzioni  $a_1, a_2, \dots, a_6$  uguali rispettivamente a  $x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1, x_2, 1$ ; e le  $b$  e le  $c$  ordinatamente eguali alle stesse funzioni di due altre coppie di variabili, siano rispettivamente  $x'_1, x'_2; x''_1, x''_2$ . La questione se per una coppia di forme quadratiche ternarie sia  $h + 1 = 3$  si traduce allora nell'altra, se non sia identicamente nullo il determinante:

$a_1(x)$	$a_1(x')$	$a_1(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_2}$	$\mu \frac{\partial a_1(x')}{\partial x'_1}$	$\mu \frac{\partial a_1(x')}{\partial x'_2}$	$\nu \frac{\partial a_1(x'')}{\partial x''_1}$	$\nu \frac{\partial a_1(x'')}{\partial x''_2}$
$a_2(x)$	$a_2(x')$	$a_2(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_2(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_2(x)}{\partial x_2}$	...	...	...	...
$a_3(x)$	$a_3(x')$	$a_3(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_3(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
$a_4(x)$	$a_4(x')$	$a_4(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_4(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
$a_5(x)$	$a_5(x')$	$a_5(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_5(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
$a_6(x)$	$a_6(x')$	$a_6(x'')$	0	0	0	$\lambda \frac{\partial a_6(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_6(x)}{\partial x_2}$	$\mu \frac{\partial a_6(x')}{\partial x'_1}$	$\mu \frac{\partial a_6(x')}{\partial x'_2}$	$\nu \frac{\partial a_6(x'')}{\partial x''_1}$	$\nu \frac{\partial a_6(x'')}{\partial x''_2}$
0	0	0	$a_1(x)$	$a_1(x')$	$a_1(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_2}$	$M \frac{\partial a_1(x')}{\partial x'_1}$	$M \frac{\partial a_1(x')}{\partial x'_2}$	$N \frac{\partial a_1(x'')}{\partial x''_1}$	$N \frac{\partial a_1(x'')}{\partial x''_2}$
0	0	0	$a_2(x)$	$a_2(x')$	$a_2(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_2(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_2(x)}{\partial x_2}$	...	...	...	...
0	0	0	$a_3(x)$	$a_3(x')$	$a_3(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_3(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
0	0	0	$a_4(x)$	$a_4(x')$	$a_4(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_4(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
0	0	0	$a_5(x)$	$a_5(x')$	$a_5(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_5(x)}{\partial x_1}$	...	...	...	...	...
0	0	0	$a_6(x)$	$a_6(x')$	$a_6(x'')$	$\lambda \frac{\partial a_6(x)}{\partial x_1}$	$\lambda \frac{\partial a_6(x)}{\partial x_2}$	$M \frac{\partial a_6(x')}{\partial x'_1}$	$M \frac{\partial a_6(x')}{\partial x'_2}$	$N \frac{\partial a_6(x'')}{\partial x''_1}$	$N \frac{\partial a_6(x'')}{\partial x''_2}$

(2)

Ora il supporre identicamente nullo questo determinante equivale al supporre che, date ad arbitrio le  $\lambda, \mu, \nu, \mathcal{A}, M, N$ , e le  $x, x', x''$ , esistano 12 quantità  $p_1, p_2, \dots, p_6, q_1, q_2, \dots, q_6$ , non tutte nulle, tali che coesistano le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma p_i a_i(x) &= \Sigma p_i a_i(x') = \Sigma p_i a_i(x'') = \Sigma q_i a_i(x) = \\ &= \Sigma q_i a_i(x') = \Sigma q_i a_i(x'') = 0; \\ \Sigma (\lambda p_i + \mathcal{A} q_i) \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_1} &= \Sigma (\lambda p_i + \mathcal{A} q_i) \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_2} = 0; \\ \Sigma (\mu p_i + M q_i) \frac{\partial a_i(x')}{\partial x'_1} &= \Sigma (\mu p_i + M q_i) \frac{\partial a_i(x')}{\partial x'_2} = 0; \\ \Sigma (\nu p_i + N q_i) \frac{\partial a_i(x'')}{\partial x''_1} &= \Sigma (\nu p_i + N q_i) \frac{\partial a_i(x'')}{\partial x''_2} = 0; \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, 6)$$

e perciò ancora (ove si tenga presente il significato delle funzioni  $a$ ) equivale al supporre che, dati ad arbitrio tre punti di un piano  $A, B, C$ , esistano due coniche passanti per essi, siano  $\varphi$  e  $\psi$ , tali che nel sistema lineare da esse determinato vi siano tre coniche,  $\alpha, \beta, \gamma$ , aventi rispettivamente un punto doppio in  $A$ , in  $B$ , in  $C$ , e che i coefficienti delle combinazioni lineari di  $\varphi$  e  $\psi$  che, uguagliate a zero, rappresentano  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  siano numeri dati a priori (quest'ultima condizione sarebbe attualmente una conseguenza delle precedenti, le quali d'altra parte non possono, come è evidente, essere verificate).

Considerazioni del tutto analoghe a quelle sviluppate si possono ripetere non solo per una coppia di forme ternarie di grado qualunque, ma anche, più in generale, per un sistema di  $p + 1$  forme di grado  $n$  in  $r + 1$  variabili omogenee, cosicchè si può intanto concludere:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè in generale le equazioni di  $p + 1$   $V_{r-1}^n$  di  $S_r$  si possano rappresentare annullando altrettante combinazioni lineari delle  $n^{\text{esime}}$  potenze delle stesse  $h + 1$  forme lineari, è che sia:*

$$h + 1 \cong \frac{p + 1}{r + p + 1} \binom{n + r}{r}, \quad (3)$$

*e che, presi  $h + 1$  punti generici delle  $S_r, A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$ , non esistano  $p + 1$   $V_{r-1}^n$  passanti per quegli  $h + 1$  punti, e tali che  $h + 1$  loro combinazioni lineari, con coefficienti assegnati, rappresentino ordinatamente delle  $V_{r-1}^n$ ,*



siano  $F_1, F_2, \dots, F_{h+1}$ , tali a lor volta che la  $F_i$  abbia un punto doppio in  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h+1$ ) <sup>(6)</sup>.

Ritornando ora a una coppia di forme ternarie, continuiamo a ragionare sul caso particolare di  $n = 2$ . Consideriamo allora in uno  $S_{11}$  la  $V_3$  definita (al variare di  $x_1, x_2$  e di  $\frac{\lambda}{\mathcal{A}}$ ) ponendo le prime 6 coordinate omogenee di un suo punto variabile uguali ordinatamente alle funzioni  $\lambda a_i(x)$ , e le altre 6 a  $\mathcal{A} a_i(x)$ ; si verifica subito che la condizione affinchè gli  $S_2$  trisecanti questa  $V_3$  non riempiano lo spazio ambiente coincide coll'annullarsi identico del determinante (2); cosicchè anche ora la stessa proprietà delle varietà i cui  $S_n$  ( $h+1$ )-seganti non riempiono lo spazio ambiente, di cui già ci siamo serviti nel n.º 1 (immediatamente prima di giungere all'enunciato di quel numero), ci permette di asserire che, qualora il determinante (2) fosse identicamente nullo, esisterebbero, fissati in modo arbitrario i valori di  $\lambda, \mu, \nu, \mathcal{A}, M, N$  e delle  $x, x', x''$ , almeno  $\infty^1$  sistemi di valori delle variabili  $\frac{\pi}{\Pi}, x'''_1, x'''_2$ , tali da annullare la matrice ottenuta dalla (2) coll'aggiunta delle quattro nuove colonne:

---

(6) Da questo risultato segue facilmente, p. es., che per tre quadriche di  $S_3$  non si può prendere  $h+1=5$ , come mostrò per primo il DARBOUX (*Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre*, Bull. des Sciences Math., t. 1 (1870)). Infatti siano dati 5 punti generici di  $S_3$ ,  $A_1, A_2, A_3, A_4$  e  $A_5$ ; e 5 elementi di una forma di 2.<sup>a</sup> specie, p. es. 5 punti di un piano, in posizione generica,  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ . Si costruisca allora il cono di vertice  $A_1$  e passante per  $A_2, A_3, A_4, A_5$ , tale che su di esso la quaterna di generatrici  $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 A_5$  sia proiettiva alla quaterna di rette  $B_1 B_2, B_1 B_3, B_1 B_4, B_1 B_5$ , cono che taglia il cono di vertice  $A_2$  costruito in modo analogo, oltre che nella retta  $A_1 A_2$ , in una cubica sghemba passante pei 5 punti  $A$ : orbene entro la rete delle quadriche che contengono questa cubica i 5 coni aventi i vertici nei punti  $A$  formano una quintupla proiettiva a quelle dei punti  $B$ . E poichè questi erano punti arbitrarii di un piano, segue la proprietà enunciata. Nella stessa Nota citata il DARBOUX aveva anche affermato che, per quattro quadriche, non si può prendere  $h+1=6$ : ma sarebbe facile dedurre dal teorema del testo che il valore  $h+1=6$  è invece esatto. Questa affermazione del resto è suffragata dalle ricerche geometriche del REYE (*Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades*, Journ. für Math., t. 82, 1877), che affermano l'esistenza di un esaedro polare comune a quattro quadriche.

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_1(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_1(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_1(x''')}{\partial x''_2} \\
 \alpha_2(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_2(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_2(x''')}{\partial x''_2} \\
 \alpha_3(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_3(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_3(x''')}{\partial x''_2} \\
 \alpha_4(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_4(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_4(x''')}{\partial x''_2} \\
 \alpha_5(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_5(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_5(x''')}{\partial x''_2} \\
 \alpha_6(x''') & 0 & \pi \frac{\partial \alpha_6(x''')}{\partial x''_1} & \pi \frac{\partial \alpha_6(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_1(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_1(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_1(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_2(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_2(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_2(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_3(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_3(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_3(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_4(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_4(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_4(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_5(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_5(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_5(x''')}{\partial x''_2} \\
 0 & \alpha_6(x''') & \Pi \frac{\partial \alpha_6(x''')}{\partial x''_1} & \Pi \frac{\partial \alpha_6(x''')}{\partial x''_2} .
 \end{array}$$

E interpretando l'annullarsi di questa matrice come già abbiamo interpretato l'annullarsi del determinante (2), otterremo che nel fascio di coniche definito dalle  $\varphi, \psi$  sopra considerate, non solo le  $\alpha, \beta, \gamma$  sarebbero dotate di un punto doppio, ma anche una conica generica del fascio avrebbe (almeno) un punto doppio variabile; oppure le  $\alpha, \beta, \gamma$  avrebbero ciascuna una componente doppia passante rispettivamente per  $A, B, C$  (\*).

(\*) La prima alternativa non si verificherebbe quando, in generale, nei sistemi almeno  $\infty^1 \left( \frac{\pi}{\Pi}, x''_1, x''_2 \right)$  sopra considerati  $\frac{\pi}{\Pi}$  non assumesse che un gruppo discreto di valori. Ma

Pertanto, estendendo le precedenti considerazioni al caso di  $n$  qualunque, e tenendo conto dell'ultimo enunciato, siamo condotti alla seguente questione: detto  $h + 1$  il minimo intero non minore di  $\frac{(n+1)(n+2)}{4}$ , cioè posto

$$h + 1 = \frac{(n+1)(n+2) + 2\varepsilon}{4}, \text{ dove } \varepsilon = 0, \text{ oppure } 1 \text{ secondochè } (n+1)(n+2)$$

è, o non è divisibile per 4, fissiamo in un piano  $h + 1$  punti generici  $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$ : per quali valori di  $n$  avviene che esistano  $h + 1$  curve d'ordine  $n$ ,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h+1}$ , aventi ordinatamente un punto doppio in ciascuno dei punti  $A$  e passanti per gli altri, in modo da appartenere a un fascio e da formare entro questo fascio una  $(h + 1)^{p/a}$  proiettiva a una arbitrariamente data? Se questo è possibile, dovrà avvenire in uno dei modi seguenti:

a) La curva generica del fascio ha un punto doppio variabile: il fascio ha una curva base passante pei punti  $A$ . Se  $m$  è l'ordine di questa curva, sarà  $\frac{m(m+3)}{2} \geq \frac{(n+1)(n+2) + 2\varepsilon}{4}$ : i resti delle curve del fascio saranno

delle  $C^{n-m}$  appartenenti ad un fascio, e le curve di questo fascio passanti pei singoli punti  $A$  dovranno formare una  $(h + 1)^{p/a}$  proiettiva a una arbitrariamente data. Ora, poichè i fasci di  $C^{n-m}$  formano una totalità di dimensione  $(n - m)(n - m + 3) - 2$ , affinchè ciò sia possibile dovrà essere:

$$(n - m)(n - m + 3) - 2 \geq \frac{(n + 1)(n + 2) + 2\varepsilon}{4} - 3 \quad (4)$$

allora, poichè sulla  $V_s$  considerata nel testo la varietà almeno  $\infty^1 \left( \frac{\pi}{H}, x''_1, x''_2 \right)$  contiene p. es. il punto  $\left( \frac{\lambda}{A}, x_1, x_2 \right)$ , su quella varietà sarebbe, in un conveniente intorno di quest'ultimo punto  $\frac{\pi}{H} = \frac{\lambda}{A}$ ; donde si conclude che la curva del fascio  $(\varphi \psi)$  corrispondente al valore  $\frac{\lambda}{A}$  del parametro conterrebbe effettivamente, come abbiamo affermato nella seconda alternativa, una parte doppia passante pel punto  $A(x_1, x_2)$ . Quanto alla variabilità del punto doppio che abbiamo affermata nella prima alternativa, essa risulta dalla considerazione che, se così non fosse, si dovrebbe concludere l'esistenza di una conica avente tre punti doppi in posizione arbitraria. Avvertiamo poi che in seguito ci limitiamo all'ipotesi che la varietà  $\left( \frac{\pi}{H}, x''_1, x''_2 \right)$  sia  $\infty^1$  e non più ampia; questa seconda ipotesi, come si vede facilmente, condurrebbe sempre a un assurdo.

relazione che, sommata a membro e membro colla :

$$3 \frac{m(m+3)}{2} \cong \frac{3}{4} \left[ (n+1)(n+2) + 2\varepsilon \right],$$

porge successivamente :

$$\frac{5}{2} m^2 - 2mn + \frac{3}{2} m \cong 1 + 2\varepsilon > 0,$$

$$n - m < \frac{n+3}{5}.$$

Quindi il primo membro della (4) è più piccolo di  $\frac{(n+3)(n+18)}{25} - 2$ , mentre il secondo è non minore di  $\frac{(n+1)(n+2)}{4} - 3$ ; cosicchè la (4) è impossibile per  $n > 3$ . Siamo così ricondotti alla coppia di cubiche ternarie, per cui già sappiamo che  $h+1$  vale 6 anzichè 5.

b) La curva  $\varphi_i$  ha una parte doppia contenente il punto  $A_i$ . Ma allora seguirebbe<sup>(8)</sup> che vi dovrebbe essere una componente doppia, passante per tutti i punti  $A$ , comune alle curve del fascio, il che è da escludersi.

Abbiamo così dimostrato :

*Salvo che per  $n = 3$ , due forme ternarie di grado  $n$  si possono in generale esprimere come combinazioni lineari delle potenze  $n^{\text{esime}}$  delle stesse*

$$\frac{(n+1)(n+2) + 2\varepsilon}{4}$$

*forme lineari, dove  $\varepsilon$  vale 1 per  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$  e vale zero negli altri casi.*

---

(8) Poichè in un fascio di curve d'ordine  $n$ , senza componente doppia comune, è impossibile che  $h+1$  curve abbiano una parte doppia (dove  $h$  ha il valore indicato nel testo): si segghi infatti il fascio con una retta, su cui si avrà una certa involuzione, ecc.

---

# Sulle trasformazioni delle superficie isoterme.

(Di PASQUALE CALAPSO, a Palermo.)

## PREFAZIONE.

**F**in da quando studiai per la prima volta il problema delle superficie isoterme (\*), osservai una nuova trasformazione per queste superficie che mi si presentò nel seguente modo :

Siano  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate di un punto mobile sopra una superficie isoterma  $I$ , riferita alle sue linee di curvatura  $(u, v)$ ; e siano rispettivamente :

- $X_1, Y_1, Z_1$  i coseni direttori della tangente alla linea  $v$ ,
- $X_2, Y_2, Z_2$  i coseni direttori della tangente alla linea  $u$ ,
- $X_3, Y_3, Z_3$  i coseni direttori della normale alla superficie.

Indicando con

$$ds^2 = e^{2\varphi} (du^2 + dv^2) \tag{A}$$

l'elemento lineare della superficie  $I$  e con  $r_1, r_2$  i raggi principali di curvatura, si hanno le formole note

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial x_1}{\partial u} = e^\varphi X_1 & \frac{\partial x_1}{\partial v} = e^\varphi X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} X_2 - \frac{e^\varphi}{r_2} X_3 & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} X_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} X_1 & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} X_1 - \frac{e^\varphi}{r_1} X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{e^\varphi}{r_2} X_1 & \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{e^\varphi}{r_1} X_2 \end{array} \right\} \tag{B}$$

(\*) CALAPSO, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275].

in cui le funzioni  $\varphi$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  soddisfano all'equazione di GAUSS e di CODAZZI, cioè :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{e^{2\varphi}}{r_1 r_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{e^\varphi}{r_2} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{e^\varphi}{r_1} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Io ho attaccato direttamente l'integrazione di questo sistema introducendo due funzioni ausiliarie  $\omega$ ,  $\Omega$  con la posizione

$$\frac{e^\varphi}{r_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega), \quad \frac{e^\varphi}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\omega - \Omega). \quad (D)$$

La funzione  $\Omega$  è invariante della superficie  $I$  rispetto alle inversioni di potenza  $= -1$ ; ho trovato allora per la funzione  $\Omega$  l'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Omega^2) = 0. \quad (E)$$

Ho introdotto altresì un secondo invariante della superficie  $I$  rispetto alle inversioni, cioè

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega = -J. \quad (E)$$

Ho allora osservato l'esistenza di una nuova superficie isoterma  $I_2$ , per la quale gl'invarianti sono

$$\Omega, \quad J + 2m,$$

con  $m$  costante arbitraria.

La determinazione della superficie  $I_2$  si compie mediante l'integrazione del sistema completo

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} &= \left( \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2\Omega \Omega_1) - (J + 2m) \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} &= \left( \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2\Omega \Omega_1) + (J + 2m) \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (\text{G})$$

nelle funzioni incognite  $\tau$  e  $\Omega_1$ ; l'elemento lineare della  $I_2$  è

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2), \quad (\text{H})$$

e i raggi principali di curvatura sono

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 + \Omega), \quad \frac{e^\tau}{r''_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \Omega). \quad (\text{K})$$

Nelle formole relative alla superficie  $I_2$  si hanno quattro costanti arbitrarie: una è la costante  $m$  che esplicitamente compare nelle equazioni (F) e (G), e le altre tre vengono introdotte dall'integrazione.

Precisamente nel passaggio dalla superficie isoterma  $I$  alla superficie isoterma  $I_2$  consiste la trasformazione da me osservata e indicata con  $C_m$ ; essa non è riducibile ad una inversione perchè, fino a tanto che  $m$  è diverso da zero, altera l'invariante  $I$ ; non è riducibile ad una trasformazione di CHRISTOFFEL perchè quest'ultima cambia la funzione  $\Omega$ ; non è nemmeno riducibile ad una  $D_m$  perchè quest'ultima trasforma appunto la funzione  $\Omega$  nella funzione  $\Omega_1$  proveniente dall'integrazione del sistema (F) (G) con  $m \neq 0$ .

La medesima trasformazione fu da me osservata una seconda volta in una Memoria posteriore (\*) studiando una notevole classe di superficie, che per un teorema di GUICHARD si connette con la teoria delle superficie isoterme.

La superficie generica ( $N$ ) della classe in discorso è definita dalla seguente proprietà caratteristica:

« Il existe une surface ( $N'$ ) ayant même image sphérique de ses lignes de courbure que la surface ( $N$ ), et telle que si  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons de courbure principaux de ( $N$ ),  $r'_1$  et  $r'_2$  les rayons correspondantes de ( $N'$ ), on ait

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.},$$

la constante n'étant pas nulle ».

---

(\*) CALAPSO, *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni* [Annali di Matematica, t. XI della serie III, pag. 201 e seguenti].

Il teorema di GUICHARD che connette la teoria di queste superficie con la teoria delle superficie isoterme, può enunciarsi nel modo seguente:

*Data una superficie (N) si possono determinare  $\infty^2$  congruenze armoniche alle linee di curvatura di (N) tali che le tangenti isotrope alla superficie nel punto N incontrino il raggio della congruenza in punti  $A_1, A_2$  che descrivono due superficie isoterme  $I, I_1$  corrispondentisi per involuppo di sfere. Inversamente partendo dalle superficie  $I$  ed  $I_1$  e considerando la congruenza descritta dalla congiungente i punti  $A_1, A_2$  che si corrispondono in  $I$  e  $I_2$ , si ha una congruenza ciclica; il centro del circolo è il punto medio di  $A_1 A_2$  ed il raggio è  $\frac{i}{2} \overline{A_1 A_2}$ ; le superficie ortogonali ai circoli sono tutte superficie (N) le cui tangenti isotrope passano per i punti  $A_1$  e  $A_2$ .*

Nel presente lavoro allo scopo di studiare a fondo la trasformazione  $C_m$  è fatto un breve ritorno al citato teorema di GUICHARD, in guisa da ottenere il passaggio dalla superficie isoterma  $I$  alla superficie isoterma  $I_1$  nella forma data da DARBOUX (\*).

Le formole generali della trasformazione  $D_m$  si deducono pure dalle equazioni (F), (G); cioè: partiamo da una superficie isoterma  $I$  ed integriamo il sistema completo (F) (G); ponendo

$$\begin{aligned} \psi &= e^{\rho - \tau}; & \lambda &= e^{-\tau} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \\ \mu &= e^{-\tau} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \tau}{\partial v} \right); & w &= e^{-\tau} \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \omega) \\ \sigma &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{2m\psi} \end{aligned}$$

otteniamo un sistema di funzioni trasformatrici. Inversamente determinato un sistema di funzioni trasformatrici se ne deduce una soluzione del sistema (F), (G) ponendo

$$e^{\tau} = \frac{e^{\rho}}{\psi}, \quad \Omega_1 = \omega + \sqrt{2} e^{\rho} \frac{w}{\psi}.$$

Dopo questo teorema si vede intimamente la natura della trasformazione  $C_m$ ; invero partendo da una superficie  $I$  e da un sistema di funzioni trasfor-

---

(\*) *Sur les surfaces isothermiques.* Annales scientifiques de l'école normale supérieure, t. XVI, troisième série, pag. 491 e seguenti. — Vedasi anche BIANCHI, *Annali di Matematica*, t. XI della serie III, pag. 93 e seguenti.



matrici ad essa relative, la superficie isoterma  $I_2$  rimane determinata dall'elemento lineare

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2), \quad \left( e^\tau = \frac{e^\varphi}{\psi} \right)$$

e dalle espressioni dei raggi di curvatura

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = \frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{\psi} w$$

$$\frac{e^\tau}{r''_1} = \frac{e^\varphi}{r_1} - \frac{e^\varphi}{\psi} w.$$

Si vede cioè che la  $C_m$  è quella stessa ritrovata dal BIANCHI nel 1905 (\*), e indicata dall'autore con  $T_m$ .

Inoltre occorre fare una osservazione.

Denotando con  $\varphi_1, r'_1, r'_2$  gli elementi relativi alla superficie isoterma  $I_1$ , le espressioni precedenti di  $\frac{e^\tau}{r''_2}$  e  $\frac{e^\tau}{r''_1}$  si possono scrivere

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{e^\tau}{r''_2} &= \left( \frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{r_1} \right) - \left( \frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right) \\ 2 \frac{e^\tau}{r''_1} &= - \left( \frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{r_1} \right) - \left( \frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (L)$$

segue che *nota una superficie  $I_1$  legata alla  $I$  per trasformazione  $D_m$ , la superficie  $I_2$  è perfettamente individuata di forma. Di più scambiando tra loro  $I$  ed  $I_1$ , la superficie  $I_2$  si cambia nella sua trasformata di Christoffel (\*\*).*

Stabilite così le proprietà fondamentali della trasformazione  $C_m$ , viene ripreso il teorema di GUICHARD con la considerazione seguente.

Indichiamo con

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

l'elemento lineare di una superficie ( $N$ ), e consideriamo due superficie isoterme  $I, I_1$  che si deducono dalla prima col teorema di GUICHARD; consideriamo inoltre la superficie  $I_2$  che si deduce dalla coppia  $I$  ed  $I_1$  mediante le (L); si presenta allora il problema di passare dalla superficie  $I_2$  alla superficie ( $N$ ).

(\*) *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme.* Annali di Matematica, t. XII della serie III, pag. 19 e seguenti.

(\*\*) Questo teorema trovasi enunciato nella Memoria del BIANCHI ora citata a pag. 25.

Posto allora

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

si ha per la funzione  $\theta$  il sistema simultaneo illimitatamente integrabile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= - \operatorname{cosh} \theta \frac{e^\tau}{r''_2} \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \operatorname{senh} \theta \frac{e^\tau}{r''_1}. \end{aligned}$$

Queste formole rappresentano per sè sole una trasformazione che fa passare da una nota superficie isoterma  $I_2$  ad infinite superficie  $N$ , tali che

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} = \operatorname{tgh} \theta.$$

Questa trasformazione, da non confondersi con la trasformazione data dal teorema di GUICHARD, è qui detta trasformazione di BIANCHI generalizzata; perchè se si assume come superficie  $I_2$  una superficie a curvatura media costante essa si riduce ad una trasformazione di BIANCHI.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata si connette con la trasformazione singolare  $D_0$ , di cui è la componente elementare; sussiste cioè il teorema:

*Se due superficie isoterme sono legate tra loro dalla trasformazione  $D_0$ , esiste una superficie ( $N$ ) legata rispettivamente alle prime per trasformazioni di Bianchi immaginarie coniugate.*

Questo teorema conduce all'espressione in termini finiti dell'integrale generale del sistema precedente nella funzione  $\theta$ ; cioè se della superficie isoterma  $I_2$  si conoscono i coseni direttori

$$\begin{aligned} X''_1 \quad Y''_1 \quad Z''_1 \\ X''_2 \quad Y''_2 \quad Z''_2 \\ X''_3 \quad Y''_3 \quad Z''_3 \end{aligned}$$

degli spigoli del triedro principale, l'espressione più generale di  $\theta$  è data dalle formole

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \theta &= \frac{a X''_1 + b Y''_1 + c Z''_1}{a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3} \\ i \operatorname{cosh} \theta &= \frac{a X''_2 + b Y''_2 + c Z''_2}{a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3}, \end{aligned}$$

in cui  $a, b, c$  sono costanti arbitrarie soggette alla condizione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Stabilite così le proprietà generali delle suddette trasformazioni, vengono sviluppate alcune applicazioni alle superficie minime.

Si perviene allora ai seguenti teoremi:

*Una trasformata di Darboux di una superficie minima, quando non è superficie minima, è associata al paraboloide*

$$2m(y^2 + z^2) + xy + iz - 4x = 0.$$

Inversamente, fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma associata a questo paraboloide vi è sempre una ed una sola superficie minima.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata nel caso delle superficie minime ha la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= e^{-\varphi} \cosh \theta \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= e^{-\varphi} \sinh \theta, \end{aligned}$$

Si deduce allora per  $\theta$  l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0,$$

la quale caratterizza il primo invariante della superficie  $N$  che si deduce da una superficie minima per trasformazione di BIANCHI. Il secondo invariante di una siffatta superficie  $N$ , rispetto alle inversioni di potenza  $= -1$ , ha l'espressione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \\ &= - \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Esaminando poi il caso di due superficie minime  $I$  ed  $I_1$  legate dalla trasformazione  $D_m$ , vengono considerate le superficie minime  $S$  ed  $S_1$  rispettivamente coniugate alle prime (\*). Esse sono le falde focali di una congruenza  $W$ .

(\*) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 351.

Sulle superficie  $S$  ed  $S_1$  si corrispondono oltre ai sistemi coniugati anche i sistemi ortogonali ed in particolare si corrispondono pure le linee di curvatura.

Siffatte congruenze, dette di THYBAUT, sono le sole congruenze  $W$  le cui falde focali sono superficie minime.

Vengono qui stabiliti due teoremi sulle congruenze di THYBAUT; cioè:

*Se  $P$  e  $P'$  è una coppia qualunque di punti corrispondenti nelle due falde focali di una congruenza di Thybaut, l'angolo della retta  $PP'$  con la linea di curvatura  $\alpha$  nel punto  $P$  eguaglia l'angolo della medesima con la linea di curvatura  $\beta$  nel punto  $P'$ .*

*La distanza focale  $t$  e l'angolo  $\eta$  dei piani focali relativi ad una congruenza di Thybaut sono legati dalla relazione*

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}. \quad (m = \text{cost.}).$$

Se si escludono le congruenze le cui sviluppabili tagliano le superficie focali lungo le linee di curvatura, si può affermare che i teoremi enunciati unitamente alla condizione che sulle superficie focali le linee di curvatura si corrispondono, contengono proprietà caratteristiche delle congruenze di THYBAUT; cioè:

*Una congruenza sulle cui falde focali  $S$  ed  $S'$  si corrispondono le linee di curvatura  $\alpha$ ,  $\beta$ , tale che l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea  $\alpha$  in un punto qualunque di  $S$  eguaglia l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea  $\beta$  nel punto corrispondente di  $S'$ , è una congruenza di Thybaut.*

*Una congruenza sulle cui falde focali si corrispondono le linee di curvatura ed in cui la distanza focale e l'angolo dei piani focali sono legati dalla relazione*

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}, \quad (m \text{ costante arbitraria})$$

*è una congruenza di Thybaut.*

Nella presente Memoria sono soltanto dimostrati i due primi teoremi; la dimostrazione dei due ultimi verrà da me fatta in una nota a parte destinata alle congruenze di THYBAUT.

Infine vengono sviluppate alcune applicazioni alle superficie a curvatura media costante, in cui si perviene ai teoremi seguenti:

*Una trasformata di Darboux di una superficie a curvatura media co-*

stante, quando non è a curvatura media costante, è isoterma speciale della classe

$$\left(2m + \frac{1}{2}, m, -m, \frac{1}{4} - 2m\right).$$

Inversamente, fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma speciale di questa classe, vi è sempre una ed una sola superficie a curvatura media costante.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata assume nel caso attuale due differenti aspetti secondo che si prende

$$\frac{e^\varphi}{r_1} = \cosh \varphi, \quad \frac{e^\varphi}{r_2} = \sinh \varphi$$

oppure

$$\frac{e^\varphi}{r_1} = \sinh \varphi, \quad \frac{e^\varphi}{r_2} = \cosh \varphi.$$

Nel primo caso è una trasformazione di BIANCHI propriamente detta e la superficie  $N$  che si deduce è a curvatura totale costante.

Nel secondo caso la superficie  $N$  è caratterizzata dall'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \sinh \theta \cosh \theta = 0 \quad (\text{M})$$

a cui deve soddisfare la funzione  $\theta$ ; il secondo invariante della superficie ha l'espressione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

È utile osservare che quando la funzione  $\theta$  è reale, le superficie  $N$  sono pure reali; questo fatto ci dà una nuova interpretazione dell'equazione (M) dal punto di vista reale.

Un'altra interpretazione della medesima è nota dalle ricerche del BIANCHI intorno alla regione ideale del paraboloido ellittico (\*).

(\*) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, pag. 267.

Venendo poi alla trasformazione  $C_m$  abbiamo i seguenti teoremi:

*La trasformazione  $C_m$  cangia una superficie a curvatura media costante (uguale +1) in una superficie isoterma speciale della classe*

$$\left( \frac{1}{2} - 2m, 0, mc, \frac{1}{4} \right),$$

con  $c$  costante arbitraria.

Inversamente, *una superficie isoterma speciale di questa classe si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante (=1) per trasformazione  $C_m$  ed in una sola maniera.*

Un caso particolare notevole si ha considerando due superficie  $I$  ed  $I_1$  a curvatura media costante, legate dalla trasformazione  $D_m$ ; la corrispondente superficie  $I_2$  è in questo caso della classe

$$\left( \frac{1}{2} - 2m, 0, 0, \frac{1}{4} \right),$$

che rientra nel tipo precedente per  $c=0$ . La superficie  $I_2$  è associata ad una quadrica di rotazione; vi corrisponde per un teorema di GUICHARD una terza superficie a curvatura media costante, legata alle superficie  $I$  ed  $I_1$  per trasformazioni di BIANCHI immaginarie coniugate.

Adunque in questo caso particolare la considerazione della trasformazione  $C_m$  conduce alla decomposizione di una trasformazione di GUICHARD (\*) nelle componenti elementari di BIANCHI.

## § 1.

### IL TEOREMA DI GUICHARD.

Ricordiamo che se  $x, y, z$  sono le coordinate di un punto di una superficie  $(N)$  ed  $X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}, Z_1^{(0)}$  i coseni direttori dei tre spigoli del triedro principale, hanno luogo le relazioni

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\xi} \sinh \theta \cdot X_1^{(0)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\xi} \cosh \theta \cdot X_2^{(0)} \quad (I)$$

(\*) *Sur la déformation des quadriques de révolution*; Comptes Rendus, anno 1899, t. 128, pag. 232.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} &= - \left( \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) X_2^{(0)} + (\cosh \theta + H \operatorname{senh} \theta) X_3^{(0)} \\
 \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} &= \left( \operatorname{coth} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) X_2^{(0)} \\
 \frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u} &= \left( \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) X_1^{(0)} \\
 \frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v} &= - \left( \operatorname{coth} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) X_1^{(0)} + (\operatorname{senh} \theta + H \cosh \theta) X_3^{(0)} \\
 \frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} &= - (\cosh \theta + H \operatorname{senh} \theta) X_1^{(0)} \\
 \frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} &= - (\operatorname{senh} \theta + H \cosh \theta) X_2^{(0)},
 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

in cui  $\xi, \theta, H$  sono una soluzione qualunque delle equazioni

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \operatorname{coth} \theta) \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = (H + \operatorname{tgh} \theta) \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{coth} \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \\
 &+ \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + (\cosh \theta + H \operatorname{senh} \theta) (\operatorname{senh} \theta + H \cosh \theta) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ricordiamo inoltre che la funzione  $\theta$  è invariante della superficie ( $N$ ) rispetto alle inversioni di potenza eguale a  $-1$ ; il secondo invariante  $W$  della superficie ( $N$ ) è legato alla funzione  $\theta$  mediante le relazioni

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{\operatorname{senh} \theta \cosh \theta} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v^2} - 2 \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} W \\
 \frac{\partial W}{\partial v} &= - \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{\operatorname{senh} \theta \cosh \theta} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u^2 \partial v} - 2 \operatorname{coth} \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} W.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Viceversa se queste equazioni nella funzione incognita  $W$  ammettono una soluzione comune, la funzione  $\theta$  si può assumere come invariante fondamentale di una superficie ( $N$ ).

Se  $\varphi$  è una soluzione qualunque del sistema (illimitatamente integrabile)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\operatorname{senh} \theta \cosh (\varphi - \xi) - i \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \operatorname{senh} \theta + 2 H \cosh \theta) \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \cosh \theta \operatorname{senh} (\varphi - \xi) - \operatorname{coth} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \operatorname{senh} \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

le equazioni

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + e^{\varphi} (X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}) \\ y_1 &= y + e^{\varphi} (Y_1^{(0)} + i Y_2^{(0)}) \\ z_1 &= z + e^{\varphi} (Z_1^{(0)} + i Z_2^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

danno una superficie isoterma  $I$ , riferita alle linee di curvatura, derivata dalla superficie  $N$  per trasformazione  $G$  (\*).

Denotando come precedentemente con

$$(X_1, Y_1, Z_1); (X_2, Y_2, Z_2); (X_3, Y_3, Z_3)$$

i coseni direttori degli spigoli del triedro principale relativo alla superficie  $I$ , le relazioni che legano  $X_i, Y_i, Z_i$  con  $X_i^{(0)}, Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$  si possono scrivere nel seguente modo:

$$\left. \begin{aligned} X_1^{(0)} &= - \left[ \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \operatorname{senh} \theta + 2 H \cosh \theta) \right] X_1 - \\ &\quad - i \left[ \cosh \theta \operatorname{senh} (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \operatorname{senh} \theta) \right] X_2 - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \cosh (\varphi - \xi) \right] X_3 \\ X_2^{(0)} &= - i \left[ \operatorname{senh} \theta \cosh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \operatorname{senh} \theta + 2 H \cosh \theta) \right] X_1 + \\ &\quad + \left[ \cosh \theta \cosh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \operatorname{senh} \theta) \right] X_2 - \\ &\quad - i \left[ \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \operatorname{senh} (\varphi - \xi) \right] X_3. \\ X_3^{(0)} &= (\cosh \theta + H \operatorname{senh} \theta) X_1 + i (\operatorname{senh} \theta + H \cosh \theta) X_2 + H X_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(\*) Vedasi la mia citata Memoria, pag. 224.



ed i raggi di curvatura della superficie  $I$  hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^\varphi}{r_2} &= \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh (\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2 \\ \frac{e^\varphi}{r_1} &= -i \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \sinh (\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La superficie  $I$  è ottenuta come luogo di un punto  $A_1$  situato su una tangente isotropa della superficie ( $N$ ); una seconda superficie isoterma  $I_1$  si può ottenere come luogo di un punto  $A_2$  situato sull'altra tangente isotropa della superficie ( $N$ ).

Basta assumere una soluzione del sistema (*pure illimitatamente integrabile*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \sinh \theta \cosh (\varphi_1 - \xi) + i \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) \\ -i \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\cosh \theta \sinh (\varphi_1 - \xi) - \operatorname{coth} \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

e porre

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x - e^{\varphi_1} (X_1^{(0)} - i X_2^{(0)}) \\ y_2 &= y - e^{\varphi_1} (Y_1^{(0)} - i Y_2^{(0)}) \\ z_2 &= z - e^{\varphi_1} (Z_1^{(0)} - i Z_2^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La superficie  $I_1$  è derivata dalla ( $N$ ) per trasformazione  $\bar{G}$ ; considerando inoltre la congruenza descritta dalla retta  $A_1 A_2$ , si vede facilmente che essa è armonica alle linee di curvatura di ( $N$ ).

Verifichiamo direttamente che le superficie  $I$  ed  $I_1$  si corrispondono per inviluppo di sfere.

Infatti in forza delle equazioni (3) e (7) per le funzioni  $\varphi$  e  $\varphi_1$  e delle equazioni fondamentali (1) a cui soddisfano  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $H$ , esiste una funzione  $\sigma$  soddisfacente alle condizioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} &= -\frac{e^{\varphi_1 - \xi}}{2} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta + \sinh \theta) + \frac{e^{\xi - \varphi}}{2} \sinh \theta \\ \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} &= i \frac{e^{\varphi_1 - \xi}}{2} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta + \cosh \theta) - i \frac{e^{\xi - \varphi}}{2} \cosh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Introducendo allora altre quattro funzioni  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $w$ ,  $\psi$  colle formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\sigma} &= -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta + \sinh \theta) + \frac{e^\xi}{2} \sinh \theta \\ \frac{\mu}{\sigma} &= -i \frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta + \cosh \theta) + i \frac{e^\xi}{2} \cosh \theta \\ \frac{w}{\sigma} &= -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 - 1) + \frac{e^\xi}{2} \\ \frac{\psi}{\sigma} &= e^{\varphi+\varphi_1} \end{aligned} \right\} (10)$$

e tenendo sempre conto delle equazioni a cui soddisfano le funzioni  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $H$  si ottiene il sistema simultaneo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\varphi} \mu \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\varphi} \mu \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{r_2} \lambda \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} \mu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{2} \sigma + \frac{e^{-\varphi}}{2} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_2} w - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{2} \sigma - \frac{e^{-\varphi}}{2} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_1} w - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda \end{aligned} \right\} (11)$$

e si ha pure la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = \psi \sigma. \quad (12)$$

Inoltre dalle (4) ed (8) si ha

$$x_2 = x_1 - (e^{\rho} + e^{\rho_1}) X_1^{(1)} - i (e^{\rho} - e^{\rho_1}) X_2^{(0)} \quad (13)$$

colle analoghe in  $y$  e  $z$ ; donde sostituendo per  $X_1^{(0)}$ ,  $X_2^{(0)}$  le espressioni (5) ed osservando le (10) otteniamo

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) \\ y_2 &= y_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda Y_1 + \mu Y_2 + w Y_3) \\ z_2 &= z_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda Z_1 + \mu Z_2 + w Z_3). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ed allora confrontando con le formole (I), (II), (7) della citata Memoria di BIANCHI, rimane verificata la proposizione.

Inversamente consideriamo una superficie isoterma  $I$ , di cui assumiamo come sopra l'elemento lineare sotto la forma

$$d s^2 = e^{2\rho} (d u^2 + d v^2);$$

denotiamo con  $X_i, Y_i, Z_i$  i coseni direttori degli spigoli del triedro principale e con  $r_1, r_2$  i raggi principali di curvatura; indi determiniamo una soluzione  $\lambda, \mu, w, \psi, \sigma$  del sistema completo (11), (12) e consideriamo la superficie  $I$ , data dalle equazioni (14).

In tali condizioni poniamo il seguente sistema di equazioni differenziali nella funzione incognita  $\theta$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\cosh \theta \cdot \frac{e^{\rho}}{r_2} + e^{\rho} \left( i \frac{\mu}{\psi} + \cosh \theta \frac{w}{\psi} \right) \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \sinh \theta \cdot \frac{e^{\rho}}{r_1} + e^{\rho} \left( \frac{\lambda}{\psi} - \sinh \theta \frac{w}{\psi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Tenendo conto delle equazioni di GAUSS e di CODAZZI relative alla superficie  $I$  e delle equazioni (11) e (12) per  $\lambda, \mu, w, \psi, \sigma$  si riconosce con calcolo facile che questo sistema è illimitatamente integrabile; sicchè avremo dall'integrazione una funzione  $\theta$  contenente una costante arbitraria.

Determinata la  $\theta$  introduciamo le funzioni  $\xi$  ed  $H$  ponendo

$$\left. \begin{aligned} e^{\xi} &= \frac{\psi}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w} \\ H &= - \frac{\lambda \cosh \theta + i \mu \sinh \theta}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Le funzioni  $\theta, \xi, H$  così determinate soddisfano, in forza delle (11) e (12), alle equazioni (48), (49) e (50) della mia precedente Memoria sopra citata; sicchè ponendo

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - e^\xi (X_1 \sinh \theta + i X_2 \cosh \theta + X_3) \\ y &= y_1 - e^\xi (Y_1 \sinh \theta + i Y_2 \cosh \theta + Y_3) \\ z &= z_1 - e^\xi (Z_1 \sinh \theta + i Z_2 \cosh \theta + Z_3) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

avremo una superficie ( $N$ ), da cui la superficie isoterma  $I$  si può considerare come derivata per trasformazione  $G$ ; avranno allora luogo le (6), ed i coseni direttori degli spigoli del triedro principale relativo alla superficie  $N$  ora determinata saranno espressi dalle (5). Inoltre poniamo

$$e^{\varphi_1} = e^{-\varphi} \frac{\psi}{\sigma} \quad (18)$$

e scriviamo le (16) risolte rispetto a  $\frac{\lambda}{\psi}$  e  $i \frac{\mu}{\psi}$ , cioè

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\psi} &= \sinh \theta \frac{w}{\psi} - e^{-\xi} (\sinh \theta + H \cosh \theta) \\ i \frac{\mu}{\psi} &= -\cosh \theta \frac{w}{\psi} + e^{-\xi} (\cosh \theta + H \sinh \theta). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Quadrando ed osservando la (12) otteniamo

$$\frac{\sigma}{\psi} = 2 e^{-\xi} \frac{w}{\psi} + e^{-2\xi} (H^2 - 1)$$

che per la (18) possiamo scrivere

$$\frac{w}{\sigma} = -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 - 1) + \frac{e^\xi}{2}.$$

Da questa, dalle (19) e dalla (18) si deducono le (10), donde segue facilmente che la funzione  $\varphi_1$  soddisfa alle (7); infine dalle (14) e (17) si ricava

$$\begin{aligned} x_2 = x &+ \left( e^\xi \sinh \theta - \frac{2\lambda}{\sigma} \right) X_1 + \left( i e^\xi \cosh \theta - \frac{2\mu}{\sigma} \right) X_2 + \\ &+ \left( e^\xi - \frac{2w}{\sigma} \right) X_3 \end{aligned}$$

ossia per le (10)

$$\begin{aligned} x_2 = & x + e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta + \sinh \theta) X_1 + \\ & + i e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta + \cosh \theta) X_2 + \\ & + e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 - 1) X_3 \end{aligned}$$

donde in forza delle (5) seguono le equazioni

$$\begin{aligned} x_2 = & x - e^{\varphi_1} (X_1 - i X_2) \\ y_2 = & y - e^{\varphi_1} (Y_1 - i Y_2) \\ z_2 = & z - e^{\varphi_1} (Z_1 - i Z_2), \end{aligned}$$

le quali esprimono che la superficie  $I_1$  si può considerare come derivata dalla superficie  $(N)$  per trasformazione  $\bar{G}$ . Esistono dunque infinite superficie  $(N)$ , in corrispondenza delle superficie  $I$  ed  $I_1$ , dipendenti da una costante arbitraria che viene introdotta dall'integrazione del sistema (15).

Considerando i punti  $A_1$  e  $A_2$  che descrivono le superficie isoterme  $I$  ed  $I_1$ , abbiamo

$$\overline{A_1 A_2} = 2 \sqrt{\frac{\psi}{\sigma}};$$

inoltre scrivendo le coordinate del punto  $N$  sotto la forma

$$x = x_1 - \psi \frac{X_1 \sinh \theta + i X_2 \cosh \theta + X_3}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w}, \quad (20)$$

riconosciamo subito che la distanza del punto  $N$  dalla retta  $A_1 A_2$  è:

$$i \sqrt{\frac{\psi}{\sigma}}; \quad (21)$$

onde se consideriamo in (20)  $x, y, z$  come funzioni di  $u$  e  $v$  e della costante introdotta dall'integrazione, l'espressione (21), indipendente da  $\theta$ , mostra che fissato  $u, v$  e variando la costante il punto  $N$  descrive un circolo, che incontra ortogonalmente la superficie  $(N)$  nel punto  $N$ .

## § 2.

LE FORMOLE DI DARBOUX PER LA TRASFORMAZIONE  $D_m$ .

Le formole di DARBOUX relative alla trasformazione  $D_m$  si deducono pure da quelle da me ottenute nella precedente Memoria sopra citata nel seguente modo.

Mantenendo le superiori notazioni per la superficie isoterma  $I$ , consideriamo le equazioni di GAUSS e di CODAZZI sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{e^{2\varphi}}{r_1 r_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{e^\varphi}{r_2} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{e^\varphi}{r_1} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ossia, ponendo

$$\frac{e^\varphi}{r_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega), \quad \frac{e^\varphi}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) \quad (23)$$

consideriamo le medesime sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\omega - \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\omega + \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Introducendo la funzione ausiliaria  $J$  mediante la posizione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \omega \Omega = -J \quad (25)$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2\varphi}}{r_2^2} - \frac{e^{2\varphi}}{r_1^2} \right) = -J \quad (26)$$

dalle mie ricerche precedenti abbiamo il sistema

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \omega^2 - 2 \omega \Omega) - J \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \omega^2 + 2 \omega \Omega) + J, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

e la funzione  $\Omega$  soddisfa all'equazione differenziale di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Omega^2) = 0. \quad (28)$$

Ciò posto ricordiamo il teorema da me stabilito nella citata Memoria, cioè:

*Se  $\Omega$  è una soluzione della (28) corrispondente ad una superficie isoterma I (per la quale si mantengono le notazioni superiori), il sistema di equazioni differenziali*

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} &= \left( \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2 \Omega \Omega_1) - (J + 2m) \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} &= \left( \frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2 \Omega \Omega_1) + (J + 2m) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

( $m$  costante arbitraria)

è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione  $\Omega_1$ , con quattro costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione della (28).

Assumiamo una soluzione  $\tau, \Omega_1$  di questo sistema ed introduciamo le nuove funzioni

$$\left. \begin{aligned} \psi &= e^{\varphi - \tau}; & \lambda &= e^{-\tau} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \\ \mu &= e^{-\tau} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \tau}{\partial v} \right); & w &= e^{-\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \omega) \\ \sigma &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{2m\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Da queste tenendo presenti le (27), (29), (30) e le espressioni (23) dei raggi di curvatura della superficie  $I$ , si ricavano le equazioni

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= m e^{\varphi} \sigma + m e^{-\varphi} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_2} w - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mu \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mu \\
 \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \lambda \\
 \frac{\partial \mu}{\partial v} &= m e^{\varphi} \sigma - m e^{-\varphi} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_1} w - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\varphi} \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\varphi} \mu \\
 \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{r_2} \lambda \\
 \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} \mu \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\varphi} \lambda \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\varphi} \mu.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Per la nuova soluzione  $\varphi_1$ ,  $\frac{1}{r'_1}$ ,  $\frac{1}{r'_2}$  del sistema (22) potremo assumere

$$\begin{aligned}
 e^{\varphi_1} &= e^{-\varphi} \frac{\psi}{\sigma} \\
 \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} - w \left( \frac{e^{\varphi}}{\psi} - \frac{e^{-\varphi}}{\sigma} \right) \\
 \frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} &= -\frac{e^{\varphi}}{r_2} + w \left( \frac{e^{\varphi}}{\psi} + \frac{e^{-\varphi}}{\sigma} \right)
 \end{aligned} \tag{33}$$

a cui corrisponde una superficie isoterma  $I_1$  derivata da  $I$  con la trasformazione indicata, e le coordinate di un punto di  $I_1$  saranno

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{m\sigma} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3). \tag{34}$$



Abbiamo così ottenuto la trasformazione  $D_m$ .

Inversamente partiamo da una superficie isoterma  $I$  e determiniamo una soluzione del sistema completo (32) tale che

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2m\psi\sigma; \tag{35}$$

le (34) daranno una nuova superficie isoterma  $I_1$ ; e ponendo

$$\left. \begin{aligned} e^\tau &= \frac{e^\varphi}{\psi} \\ \Omega_1 &= \omega + \sqrt{2} e^\varphi \frac{\nu}{\psi}, \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

si avrà una soluzione del sistema (29), (30).

Risulta così ben precisato in che modo il passaggio dalla soluzione  $\Omega$  alla soluzione  $\Omega_1$  dell'equazione (28), eseguito mediante l'integrazione del sistema completo (29), (30), è l'espressione analitica della trasformazione  $D_m$ .

### § 3.

#### LA TRASFORMAZIONE $C_m$ , E LA TRASFORMAZIONE DI BIANCHI GENERALIZZATA.

Veniamo alle formole della trasformazione  $C_m$  con una semplice osservazione.

Dalle equazioni (29) e (30) si ha

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} + \frac{1}{2} (\Omega_1^2 - \Omega^2) &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

le quali esprimono che le funzioni  $\tau$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega$  sono anch'esse una nuova soluzione del sistema (24); esiste dunque una superficie isoterma  $I_2$  coll'elemento lineare

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2) \quad e^\tau = \frac{e^\varphi}{\psi} \tag{38}$$

e di cui i raggi principali di curvatura hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} r''_2 &= \frac{e^{\rho}}{r_2} - \frac{e^{\rho}}{\psi} w \\ r''_1 &= \frac{e^{\rho}}{r_1} - \frac{e^{\rho}}{\psi} w. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Vediamo così che partendo da una superficie isoterma  $I$  ed assumendo una soluzione del sistema completo (32) alla condizione iniziale (35), deduciamo due diverse superficie isoterme  $I_1$  e  $I_2$ ; la prima, definita dalle (33), è legata alla superficie  $I$  dalla trasformazione  $D_m$ ; l'altra, definita dalle (38) e (39), è legata alla superficie  $I$  dalla trasformazione  $C_m$ .

Nota una coppia  $I$  ed  $I_1$  di superficie isoterme legate dalla trasformazione di DARBOUX, la superficie  $I_2$  è individuata di forma; le formole che danno le quantità  $\frac{e^{\tau}}{r''_2}$ ,  $\frac{e^{\tau}}{r''_1}$  direttamente mediante le quantità analoghe relative ad  $I$  ed  $I_1$  si deducono subito dalle (39) e (33) sotto la forma

$$\begin{aligned} 2 \frac{e^{\tau}}{r''_2} &= \left( \frac{e^{\rho}}{r_2} - \frac{e^{\rho}}{r_1} \right) - \left( \frac{e^{\rho_1}}{r'_2} - \frac{e^{\rho_1}}{r'_1} \right) \\ 2 \frac{e^{\tau}}{r''_1} &= - \left( \frac{e^{\rho}}{r_2} - \frac{e^{\rho}}{r_1} \right) - \left( \frac{e^{\rho_1}}{r'_2} - \frac{e^{\rho_1}}{r'_1} \right). \end{aligned}$$

È utile osservare che scambiando tra loro  $I$  ed  $I_1$ , la superficie  $I_2$  si cambia nella sua trasformata di CHRISTOFFEL.

Vogliamo ora stabilire una nuova trasformazione, che per ragioni che rileveremo tosto diremo trasformazione di BIANCHI generalizzata.

Se esprimiamo il sistema (15) mediante  $\tau$ ,  $r''_1$ ,  $r''_2$ , abbiamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= - \cosh \theta \frac{e^{\tau}}{r''_2} \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \sinh \theta \frac{e^{\tau}}{r''_1}; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

queste equazioni nella funzione incognita  $\theta$  formano un sistema illimitatamente integrabile. Introduciamo inoltre le funzioni  $\tau$ ,  $r''_1$ ,  $r''_2$  nel sistema

(11) (12), otteniamo

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \left( \lambda^2 - \frac{\psi \sigma}{2} \right) e^\tau + \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{e^\tau}{r''_2} w - \frac{\partial \tau}{\partial v} \mu \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \tau}{\partial u} \mu + e^\tau \lambda \mu \\
 \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \tau}{\partial v} \lambda + e^\tau \lambda \mu \\
 \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \left( \mu^2 - \frac{\psi \sigma}{2} \right) e^\tau - \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{e^\tau}{r''_1} w - \frac{\partial \tau}{\partial u} \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^\tau \psi \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^\tau \psi \mu \\
 \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \lambda + e^\tau \lambda w \\
 \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \mu + e^\tau \mu w \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\tau} \frac{\lambda}{\psi} \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\tau} \frac{\mu}{\psi} \\
 \lambda^2 + \mu^2 + w^2 &= \psi \sigma,
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

che formano pure un sistema illimitatamente integrabile nelle funzioni  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $w$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ .

Qui importa fare la seguente osservazione.

Consideriamo la superficie isoterma  $I_2$  ed assumiamo sei funzioni  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\psi$ ,  $w$ ,  $\sigma$  soddisfacenti alle (40) e (41); si verifica con facile calcolo che ponendo

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\xi} &= \frac{\psi}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w} \\
 H &= - \frac{\lambda \cosh \theta + i \mu \sinh \theta}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w}
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

sono soddisfatte le (1).

Dunque, partendo da una superficie isoterma  $I_2$ , integrando il sistema completo (40) ed il sistema completo (41) ed osservando le (42), otteniamo tre funzioni  $\theta$ ,  $\xi$ ,  $H$ , tali che le forme quadratiche

$$\left. \begin{aligned} e^{2\xi} (\sinh^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2) \\ (\cosh \theta + H \sinh \theta)^2 \, du^2 + (\sinh \theta + H \cosh \theta)^2 \, dv^2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

si possono considerare come prima e terza forma fondamentale di una superficie  $N$  riferita alle linee di curvatura.

È questa la trasformazione che volevamo stabilire; essa sarà da noi detta trasformazione di BIANCHI generalizzata, e sarà talora indicata brevemente con B per la ragione seguente.

Assumiamo come superficie isoterma  $I_2$  una superficie a curvatura media costante coll'elemento lineare

$$ds^2 = e^{2\tau} (du^2 + dv^2). \quad (44)$$

Per i raggi principali di curvatura possiamo assumere

$$\frac{e^\tau}{r''_1} = \cosh \tau \quad (45)$$

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = \sinh \tau. \quad (46)$$

Applichiamo ad essa la trasformazione (40) per dedurre una superficie  $N$ ; avremo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -\cosh \theta \sinh \tau \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \sinh \theta \cosh \tau \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ed assumiamo la soluzione particolare del sistema (41)

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = -1, \quad \psi = -1, \quad \sigma = -1. \quad (48)$$

Allora le (42) danno

$$e^\xi = 1, \quad H = 0 \quad (49)$$

e le (43) diventano

$$\sinh^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2 \quad (50)$$

$$\cosh^2 \theta \, du^2 + \sinh^2 \theta \, dv^2 \quad (51)$$

Queste esprimono che la superficie  $N$  è una superficie a curvatura totale costante derivata da  $I_2$  per trasformazione di BIANCHI.

§ 4.

LA TRASFORMAZIONE  $B$  IN RELAZIONE COLLA TRASFORMAZIONE SINGOLARE  $D_0$ .

Consideriamo la superficie isoterma  $I_2$ , ed applicando il teorema del paragrafo precedente deduciamo una superficie  $N$  legata alla  $I_2$  per trasformazione  $B$ ; esistono allora tre funzioni  $w_1, \psi_1, \sigma_1$  tali che

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log w_1}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \sinh \theta \\ \frac{\partial \log w_1}{\partial v} &= i \frac{e^\tau}{r''_1} \cosh \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u} &= e^\tau w_1 \sinh \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v} &= i e^\tau w_1 \cosh \theta \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} &= e^{-\tau} w_1 \sinh \theta \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= -i e^{-\tau} w_1 \cosh \theta; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

introduciamo inoltre le funzioni

$$\lambda_1 = w_1 \sinh \theta \quad \mu_1 = i w_1 \cosh \theta. \quad (53)$$

Le cinque funzioni così introdotte verificano il sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} w_1 - \frac{\partial \tau}{\partial v} \mu_1 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} &= \frac{\partial \tau}{\partial u} \mu_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u} &= \frac{\partial \tau}{\partial v} \lambda_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial v} &= -\frac{e^\tau}{r''_1} w_1 - \frac{\partial \tau}{\partial u} \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} &= e^\tau \lambda_1 \\
 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} &= e^\tau \mu_1 \\
 \frac{\partial w_1}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \lambda_1 \\
 \frac{\partial w_1}{\partial v} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \mu_1 \\
 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} &= e^{-\tau} \lambda_1 \\
 \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= -e^{-\tau} \mu_1 \\
 \lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

quindi ponendo

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\tau_1} &= e^{-\tau} \frac{\psi_1}{\sigma_1} \\
 \frac{e^{\tau_1}}{r'''_1} &= \frac{e^\tau}{r''_1} - w_1 \left( \frac{e^\tau}{\psi_1} - \frac{e^{-\tau}}{\sigma_1} \right) \\
 \frac{e^{\tau_1}}{r'''_2} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} + w_1 \left( \frac{e^\tau}{\psi_1} + \frac{e^{-\tau}}{\sigma_1} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

rimane definita una nuova superficie isoterma  $I_3$  legata alla  $I_2$  dalla trasformazione  $D_0$  avente per elemento lineare

$$e^{2\tau_1} (du^2 + dv^2),$$

e per raggi di curvatura  $r'''_1$  ed  $r'''_2$ .

Inversamente prendiamo due superficie isoterme  $I_2$ ,  $I_3$  legate tra loro dalla trasformazione  $D_0$ ; esiste allora una funzione  $\theta$  tale che

$$\sinh \theta = \frac{\lambda_1}{w_1} \quad i \cosh \theta = \frac{\mu_1}{w_1}. \quad (56)$$

Si deduce allora con calcolo facile che questa funzione  $\theta$  soddisfa alle equazioni

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} \cosh \theta \\
 i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \sinh \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} - i \frac{\partial \tau_1}{\partial v} &= \frac{e^{\tau_1}}{r''_2} \cosh \theta \\ -i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau_1}{\partial u} &= -\frac{e^{\tau_1}}{r'''_1} \sinh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Abbiamo dunque il seguente teorema:

*Se due superficie isoterme sono legate tra loro dalla trasformazione  $D_0$ , esiste una superficie  $N$  legata rispettivamente alle prime per trasformazioni  $B$  immaginarie coniugate.*

Qui utilizzeremo una importante osservazione dovuta a BIANCHI. Il sistema di equazioni (54) trascurando per un momento la condizione

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 0 \quad (59)$$

è quello stesso che occorre integrare per passare dalle equazioni intrinseche della superficie  $I_2$  alle equazioni della medesima in termini finiti. Dunque se della superficie  $I_2$  si conoscono le equazioni in termini finiti e si indicano i coseni direttori del triedro principale con

$$\begin{aligned} X''_1 \quad Y''_1 \quad Z''_1 \\ X''_2 \quad Y''_2 \quad Z''_2 \\ X''_3 \quad Y''_3 \quad Z''_3, \end{aligned}$$

l'integrale generale avrà la forma

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= a X''_1 + b Y''_1 + c Z''_1 \\ \mu_1 &= a X''_2 + b Y''_2 + c Z''_2 \\ w_1 &= a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

con  $a, b, c$  costanti arbitrarie; sarà inoltre soddisfatta la (59) se

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Ed allora per un conveniente movimento della superficie  $I_2$  si potrà prendere

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= X''_1 + i Y''_1 \\ \mu_1 &= X''_2 + i Y''_2 \\ w_1 &= X''_3 + i Y''_3, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

e le (56) daranno per la funzione  $\theta$  le espressioni

$$\operatorname{senh} \theta = \frac{X''_1 + i Y''_1}{X''_3 + i Y''_3}, \quad i \operatorname{cosh} \theta = \frac{X''_2 + i Y''_2}{X''_3 + i Y''_3}. \quad (62)$$

Dunque: *Se di una superficie isoterma  $I_2$  si conoscono le equazioni in termini finiti, si conoscerà pure dalle (62) in termini finiti l'invariante fondamentale  $\theta$  della superficie  $N$  legata alla  $I_2$  per trasformazione  $B$ .*

### § 5.

#### SUPERFICIE MINIME.

Applichiamo i risultati precedenti alle superficie minime.  
Poniamo nelle (22)

$$\frac{e^\varphi}{r_1} = e^{-\varphi} \quad \frac{e^\varphi}{r_2} = -e^{-\varphi}; \quad (63)$$

la seconda e terza saranno verificate e la funzione  $\varphi$  dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - e^{-2\varphi} = 0. \quad (64)$$

L'elemento lineare

$$e^{2\varphi} (du^2 + dv^2)$$

e le (63) definiscono nel modo più generale una superficie minima.

Vogliamo caratterizzare la superficie trasformata mediante la  $D_m$ .

Poniamo

$$H' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}, \quad L' = e^{2\varphi_1} \left( \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right), \quad M' = \frac{1}{2} L' H'; \quad (65)$$

allora le (33) daranno

$$H' = \frac{2}{\psi} (\sigma + w), \quad L' = -2 \frac{w}{\sigma}, \quad M' = -\frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} w, \quad (66)$$

dove per le (32) dovrà essere  $\sigma + w = \text{cost.}$



Prendendo nulla questa costante la trasformata sarà pure superficie minima; ma noi vogliamo studiare quel che avviene prendendo la detta costante diversa da zero.

A tale scopo osserviamo che dalla prima delle (66) derivando si ottiene

$$e^{\rho_1} \frac{\partial H'}{\partial u} = - \frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} \lambda; \quad e^{\rho_1} \frac{\partial H'}{\partial v} = - \frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} \mu;$$

ne segue

$$e^{2\rho_1} \left[ \left( \frac{\partial H'}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H'}{\partial v} \right)^2 \right] + M'^2 + 2 A M' - 2 A H' = 0, \quad \left( \begin{array}{l} A = 2m \\ = 0 \end{array} \right) \quad (67)$$

donde risulta il teorema:

*Una trasformata di Darboux di una superficie minima, quando non è superficie minima, è associata al paraboloido*

$$2m(y^2 + z^2) + xy + iz - 4x = 0. \quad (68)$$

Inversamente partiamo da una superficie isoterma associata al paraboloido (68); cioè ponendo

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad L = e^{2\rho} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad M = \frac{1}{2} L H \quad (69)$$

si abbia

$$e^{2\rho} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 + 2 A M - 2 A H = 0, \quad \left( \begin{array}{l} A = 2m \\ = 0 \end{array} \right) \quad (70)$$

e cerchiamo se fra le trasformate di DARBOUX vi sono superficie minime.

Nell'ipotesi affermativa si dovrà avere

$$\sigma L + 2w = 0;$$

donde derivando ed osservando le (32), (69) e (70) si ottengono i valori

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = e^{\rho} \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mu = - e^{\rho} \frac{\partial H}{\partial v}, \quad w = - M \\ \sigma = H, \quad \psi = 2 - L. \end{array} \right\} \quad (71)$$

Ora si verifica col calcolo diretto che queste costituiscono veramente una soluzione particolare del sistema (32) con la relazione (35); dunque

*Fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma associata al paraboloido (68) vi è sempre una ed una sola superficie minima.*

Una seconda questione che si presenta è di caratterizzare la funzione

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

relativa alla superficie  $N$  che si deduce da una superficie minima  $I$  colla trasformazione  $B$ .

Per questa funzione si dovrà avere

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= e^{-\varphi} \cosh \theta \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= e^{-\varphi} \sinh \theta; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

si deduce allora per  $\theta$  l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0 \quad (73)$$

la quale caratterizza il primo invariante della superficie  $N$ . Il secondo invariante ha l'espressione:

$$W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}$$

oppure

$$W = - \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}.$$

Viceversa se la (73) è soddisfatta il sistema (72) è illimitatamente integrabile e la funzione  $\varphi$  che si ricava soddisfa la (64).

Riprendiamo infine a considerare una superficie minima  $I$  ed una sua trasformata  $I_1$  che sia pure superficie minima. È noto che le superficie  $S$  ed  $S_1$  definite rispettivamente dalle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u} &= \frac{\partial x_1}{\partial v}, & \frac{\partial x_3}{\partial v} &= - \frac{\partial x_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_4}{\partial u} &= \frac{\partial x_2}{\partial v}, & \frac{\partial x_4}{\partial v} &= - \frac{\partial x_2}{\partial u}, \end{aligned}$$

sono pure superficie minime e sono le falde focali di una congruenza  $W$ .

È noto altresì che sopra  $S$  ed  $S_1$  si corrispondono oltre ai sistemi con-

giugati anche i sistemi ortogonali, ed in particolare si corrispondono pure le linee di curvatura.

Siffatte congruenze sono dette di THYBAUT e sono le sole congruenze  $W$  le cui falde focali sono superficie minime.

Noi aggiungeremo qui due teoremi che permettono di caratterizzare le congruenze di THYBAUT.

Indicando con  $\omega$  l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza sulla linea di curvatura  $\alpha$  della superficie  $S$  in un suo punto, e con  $t$  la distanza focale, si avrà

$$t \cos \omega = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right); \quad t \sin \omega = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left( \frac{\mu}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} \right);$$

similmente indicando con  $\omega_1$  l'angolo che il raggio fa con la linea corrispondente di  $S_1$  nel punto corrispondente si avrà

$$t \cos \omega_1 = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left( \frac{\mu}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} \right); \quad t \sin \omega_1 = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left( \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right);$$

dunque: se  $P$  e  $P'$  è una coppia qualunque di punti corrispondenti delle due falde di una congruenza di Thybaut, l'angolo che la retta  $PP'$  fa con la linea di curvatura  $\alpha$  nel punto  $P$  eguaglia l'angolo che la medesima fa con la linea  $\beta$  nel punto  $P'$ .

Inoltre indicando con  $\eta$  l'angolo dei piani focali si ha

$$\cos \eta = \frac{w^2}{m\psi\sigma} - 1;$$

si deduce la relazione

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}. \quad (74)$$

Inversamente, se si escludono le congruenze le cui sviluppabili tagliano le superficie focali lungo le linee di curvatura, si hanno i seguenti teoremi.

I. Una congruenza sulle cui falde focali  $S$  ed  $S'$  si corrispondono le linee di curvatura  $\alpha$ ,  $\beta$ , tale che l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea  $\alpha$  in un punto qualunque di  $S$  eguaglia l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea  $\beta$  nel punto corrispondente di  $S'$ , è una congruenza di Thybaut.

II. Una congruenza sulle cui falde focali si corrispondono le linee di cur-

vatura ed in cui la distanza focale e l'angolo dei piani focali siano legati dalla relazione (74) è una congruenza di THYBAUT.

Questi due teoremi saranno da me dimostrati in una Nota a parte destinata alle congruenze di THYBAUT.

## § 6.

### SUPERFICIE A CURVATURA MEDIA COSTANTE.

Poniamo nelle (22)

$$\frac{e^\varphi}{r_1} = \sinh \varphi, \quad \frac{e^\varphi}{r_2} = \cosh \varphi; \quad (75)$$

la seconda e terza saranno verificate e la funzione  $\varphi$  dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \sinh \varphi \cosh \varphi = 0. \quad (76)$$

L'elemento lineare

$$e^{2\varphi} (du^2 + dv^2)$$

e le (75) definiscono nel modo più generale una superficie a curvatura media costante ed uguale ad 1.

Vogliamo caratterizzare la superficie trasformata mediante la  $D_m$ .

Ponendo al solito

$$H' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}, \quad L' = e^{2\varphi} \left( \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right), \quad M' = \frac{1}{2} L' H' \quad (77)$$

avremo dalle (33)

$$H' = 2 \frac{w}{\psi} - \frac{\sigma}{\psi}, \quad L' = \frac{\psi}{\sigma} - \frac{2w}{\sigma} \quad (78)$$

e si dovrà avere

$$\psi = 2w - \sigma + c \quad (c = \text{cost.}). \quad (79)$$

Prendendo  $c=0$  la trasformata sarà pure una superficie a curvatura media costante; noi vogliamo considerare il caso  $c \neq 0$ .

Sarà allora

$$H' = 1 - \frac{c}{\psi}, \quad L' = -1 + \frac{c}{\sigma}, \quad 2M' = -1 + \frac{c}{\sigma} + \frac{c}{\psi} - \frac{c^2}{\psi\sigma}, \quad (80)$$

donde

$$e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial u} = c \frac{\lambda}{\psi\sigma}, \quad e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial v} = c \frac{\mu}{\psi\sigma},$$

sicchè tenendo conto della (35) e della (79) risulta la relazione

$$e^{2\varphi_1} \left[ \left( \frac{\partial H'}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H'}{\partial v} \right)^2 \right] + M'^2 + 2A M' + 2B H' + 2C L' + D = 0,$$

in cui

$$\left. \begin{aligned} A &= 2m + \frac{1}{2}, & B &= m \\ C &= -m, & D &= \frac{1}{4} - 2m; \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

dunque:

*Una trasformata di Darboux di una superficie a curvatura media costante (non nulla), quando non è a curvatura media costante, è isoterma speciale della classe  $\left( 2m + \frac{1}{2}, m, -m, \frac{1}{4} - 2m \right)$ .*

Inversamente partiamo da una superficie isoterma speciale di questa classe; cioè ponendo

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \quad L = e^{2\varphi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad M = \frac{1}{2} L H \quad (82)$$

si abbia

$$e^{2\varphi} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 + 2A M + 2B H + 2C L + D = 0 \quad (83)$$

in cui  $A, B, C, D$  hanno i valori (81), e cerchiamo se fra le trasformate di DARBOUX vi sono superficie a curvatura media costante ( $= 1$ ).

Nell'ipotesi affermativa si dovrà avere

$$L\sigma + 2w = \psi$$

donde derivando ed osservando le (32), (82) e (83) si ottengono i valori

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial u}, & \mu &= -e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial v}, & \psi &= -L - 1 \\ \sigma &= H - 1, & w &= -M - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ora si verifica col calcolo diretto che queste costituiscono effettivamente una soluzione particolare del sistema (32) ed ha luogo la (35), dunque:

*Fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma speciale della classe (81) vi è sempre una ed una sola superficie a curvatura media costante.*

Vogliamo in secondo luogo caratterizzare la superficie  $N$  che si deduce dalla superficie a curvatura media costante  $I$  mediante la trasformazione  $B$ .

Osserviamo che le (40) nel caso in esame prendono la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\cosh \theta \cosh \varphi \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \sinh \theta \sinh \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

donde eliminando  $\varphi$  otteniamo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sinh \theta \cosh \theta. \quad (85)$$

La superficie  $N$  in discorso è dunque caratterizzata dal fatto che la relativa funzione

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

soddisfa all'equazione differenziale (85).

Inversamente partiamo da una soluzione della (85) e poniamo

$$W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{2},$$

o ciò che è lo stesso

$$-W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}.$$

Sono allora soddisfatte le equazioni (2), sicchè si hanno in corrispondenza  $\infty^3$  superficie  $N$ . Per una qualunque funzione  $\theta$  soddisfacente la (85) il sistema (84) è illimitatamente integrabile e la funzione  $\varphi$  soddisferà la (76).

È utile osservare che l'esistenza delle superficie  $N$  corrispondenti alle soluzioni della (85), ci dà un'interpretazione di questa equazione dal punto di vista reale; un'altra interpretazione della medesima è stata data precedentemente dal BIANCHI, trattando della regione ideale del paraboloido ellittico.

Infine vogliamo caratterizzare la superficie  $I_2$ .

Poniamo

$$H'' = \frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2}, \quad L'' = e^{2\tau} \left( \frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r''_2} \right), \quad M'' = \frac{1}{2} L'' H''. \quad (86)$$

Per le (39) si ha:

$$H'' = c - \sigma; \quad L'' = -\frac{1}{\psi}, \quad M'' = -\frac{1}{2\psi} (c - \sigma). \quad (87)$$

Sarà allora

$$e^\tau \frac{\partial H''}{\partial u} = -\frac{\lambda}{\psi}, \quad e^\tau \frac{\partial H''}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi},$$

donde tenendo conto della (35) e della (79) risulta la relazione

$$e^{2\tau} \left[ \left( \frac{\partial H''}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H''}{\partial v} \right)^2 \right] + M''^2 + 2A M'' + 2B H'' + 2C L'' + D = 0, \quad (88)$$

in cui

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} - 2m, & B &= 0 \\ C &= mc, & D &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Abbiamo dunque il teorema:

*La trasformazione  $C_m$  cangia una superficie a curvatura media costante (uguale +1) in una superficie isoterma speciale della classe (89).*

Inversamente una superficie isoterma speciale di questa classe si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante per trasformazione  $C_m$  ed in una sola maniera.

Infatti nota la superficie  $I_2$  sono intanto noti  $r''_1$  ed  $r''_2$  ed anche  $H''$ ,  $L''$ ,  $M''$ ; si deducono allora  $\sigma$ ,  $\psi$ ,  $w$  dalle (87) e (79) e si ha

$$\sigma = c - H'', \quad \psi = -\frac{1}{L''}, \quad w = \frac{1}{2} (1 + H'' L''). \quad (90)$$

Ponendo inoltre

$$\frac{\lambda}{\psi} = -e^\tau \frac{\partial H''}{\partial u}, \quad \frac{\mu}{\psi} = e^\tau \frac{\partial H''}{\partial v} \quad (91)$$

a causa della (88), soddisfatta per ipotesi, sarà

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma; \quad (92)$$

anche le (39) e (38) danno

$$e^\varphi = -\frac{e^\tau}{L''} \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{e^\tau}{r''_2} + \frac{1}{2} e^\varphi (1 + H'' L'') = \cosh \varphi \\ r_1 &= \frac{e^\tau}{r''_1} + \frac{1}{2} e^\varphi (1 + H'' L'') = \sinh \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Ora si verifica col calcolo diretto che hanno luogo le seguenti proprietà;

1) Se una superficie isoterma  $I_2$  è speciale della classe (89) e si pone

$$e^\varphi = -\frac{e^\tau}{L''} \quad (95)$$

si avrà

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \sinh \varphi \cosh \varphi = 0.$$

2) Assumendo come superficie di partenza  $I$  la superficie a curvatura media costante, corrispondente alla funzione  $\varphi$  data dalla (95), ed ai raggi

$$\frac{e^\varphi}{r_2} = \cosh \varphi, \quad \frac{e^\varphi}{r_1} = \sinh \varphi$$

le funzioni  $\tau, \psi, w, \lambda, \mu$  date dalle (90) e (91) soddisfano le (32) ed ha luogo la (35).

Allora la superficie derivata per trasformazione  $C_m$  corrispondente ai suddetti valori di  $\tau, \psi, w, \lambda, \mu$  coincide colla  $I_2$  e il teorema è dimostrato; dunque:

*Una superficie isoterma speciale della classe (89) si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante per trasformazione  $C_m$  ed in una sola maniera.*

Qui occorre fare altresì la seguente osservazione.

Assumiamo una superficie isoterma  $I_1$  della classe

$$A = 2m + \frac{1}{2}, \quad B = m, \quad C = -m, \quad D = \frac{1}{4} - 2m$$

che, per quanto abbiamo visto, possiamo considerare come dedotta da una superficie a curvatura media costante, ed uguale ad 1, per trasformazione  $D_m$ . Consideriamo inoltre la superficie  $I_2$  che si deduce dalla medesima superficie a curvatura media costante per trasformazione  $C_m$ .



La trasformata  $I_2$  di CHRISTOFFEL è della classe

$$A_0 = \frac{1}{2} - 2m, \quad B_0 = mc, \quad C_0 = 0, \quad D_0 = \frac{1}{4}.$$

Vediamo allora che questi valori si deducono dai precedenti mediante le formole

$$A_0 = A - 4m, \quad B_0 = mc$$

$$C_0 = 4m^2 - 2Am - \frac{BC}{m}, \quad D_0 = D - 4m(2m - A).$$

Quest'ultimo risultato rientra nel teorema stabilito dal BIANCHI a pag. 30 della citata Memoria.

Consideriamo ora un caso particolare notevole.

Poniamo nelle formole precedenti  $c = 0$ ; la (88) diventa

$$e^{2r} \left[ \left( \frac{\partial H''}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial H''}{\partial v} \right)^2 \right] + M''^2 + (1 - 4m)M'' + \frac{1}{4} = 0,$$

e per conseguenza la superficie isoterma  $I_2$  si può considerare come associata ad una quadrica di rotazione.

Avendosi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\frac{1}{4}(\psi^2 + \sigma^2) - \frac{1}{2}(1 - 4m)\psi\sigma \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

vediamo precisamente che la quadrica ha le equazioni

$$x = \frac{1 - \psi\sigma}{\psi - \sigma}, \quad y = i \frac{1 + \psi\sigma}{\psi - \sigma}, \quad z = \sqrt{2m} \frac{\psi + \sigma}{\psi - \sigma}. \quad (97)$$

Vi corrisponde, per un teorema di GUICHARD, una nuova superficie a curvatura media costante, e la corrispondente soluzione  $\omega$  della (76) si ha ponendo

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda^2 + \mu^2) \sinh \omega &= \sqrt{2m} \lambda (\psi - \sigma) - i \sqrt{2m - 1} \mu (\psi + \sigma) \\ 2(\lambda^2 + \mu^2) \cosh \omega &= i \sqrt{2m} \mu (\psi - \sigma) - \sqrt{2m - 1} \lambda (\psi + \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

ossia

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda - i\mu) e^{\omega} &= \sqrt{2m}(\psi - \sigma) - \sqrt{2m-1}(\psi + \sigma) \\ 2(\lambda + i\mu) e^{-\omega} &= -\sqrt{2m}(\psi - \sigma) - \sqrt{2m-1}(\psi + \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Se ne deducono le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + i \frac{\partial \omega}{\partial u} &= i\sqrt{2m} \cdot \cosh \omega \sinh \varphi + i\sqrt{2m-1} \cdot \sinh \omega \cosh \varphi \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -i\sqrt{2m} \cdot \sinh \omega \cosh \varphi - i\sqrt{2m-1} \cosh \omega \sinh \varphi \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - i \frac{\partial \omega}{\partial u} &= i\sqrt{2m} \cosh \omega \sinh \varphi_1 + i\sqrt{2m-1} \sinh \omega \cosh \varphi_1 \\ -i \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -i\sqrt{2m} \sinh \omega \cosh \varphi_1 - i\sqrt{2m-1} \cosh \omega \sinh \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

donde risulta che nel caso in esame la considerazione della trasformazione  $C_m$  conduce alla decomposizione di una trasformazione di GUICHARD in due trasformazioni di BIANCHI immaginarie coniugate.

# Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali.

(Di GINO FANO, a Torino.)

---

È noto da tempo che le superficie a sezioni razionali sono tutte razionali (\*), e quelle a sezioni ellittiche od iperellittiche sono anche razionali, oppure rigate (\*\*).

Queste proprietà furono poi estese alle varietà algebriche a tre o più dimensioni, sempre a curve-sezioni dei tipi suinducati. Una varietà a curve-sezioni razionali è sempre rappresentabile biunivocamente sopra uno spazio di un egual numero di dimensioni (\*\*\*) . E così dicasi delle varietà a curve-sezioni ellittiche od iperellittiche, fatta eccezione soltanto per quelle composte di una serie  $\infty^1$  di spazi e, forse, per le varietà del 3.<sup>o</sup> ordine (\*\*\*\*).

Il presente lavoro porta un primo contributo allo studio delle varietà a tre dimensioni, in base alla natura delle loro *superficie-sezioni*. Vi si dimostra che *sono razionali* (rappresentabili cioè sullo spazio  $S_3$ ) *tutte le varietà*

---

(\*) PICARD, Bull. Soc. Phil. de Paris (7), t. 2 (1878), p. 127; Journ. de Crelle, t. 100 (1887), p. 71; GUCCIA, Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 1 (1884-87), p. 165.

(\*\*) Per le superficie a sezioni ellittiche, v. DEL PEZZO, Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 1 (1884-87), p. 241; CASTELNUOVO, Rend. Acc. dei Lincei (5), vol. 3<sub>1</sub> (1894), p. 59. Per il caso delle sezioni iperellittiche di genere  $> 1$ , v. CASTELNUOVO, Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 4 (1890), p. 73; ENRIQUES, Rend. Acc. dei Lincei (5), vol. 2<sub>2</sub> (1893), p. 281.

(\*\*\*) Per le varietà a tre dimensioni, v. ENRIQUES, Math. Ann., Bd. 46 (1895), p. 179. L'estensione alle varietà superiori è immediata. Queste varietà sono soltanto quadriche, serie razionali  $\infty^1$  di spazi, e coni proiettanti la superficie  $F^4$  di VERONESE o una sua proiezione. Nel lavoro cit. del sig. ENRIQUES sono pure riassunte le ricerche sulle superficie già dianzi accennate.

(\*\*\*\*) ENRIQUES, l. c. L'estensione alle varietà superiori è immediata per il caso delle curve-sezioni iperellittiche di genere  $> 1$ . Per il caso delle curve ellittiche, v. SCORZA, Rend. Acc. dei Lincei (5), vol. 17<sub>1</sub> (1908), p. 10; Annali di Mat. (3), t. 15 (1908), p. 217.

a superficie-sezioni razionali, ad eccezione (eventualmente) della varietà cubica di  $S_4$  priva di punti doppi. Dal punto di vista invariante, le varietà oggetto di studio sono quelle che contengono un sistema lineare semplice (perciò almeno  $\infty^3$ ; e, se non omaloidico, almeno  $\infty^4$ ) di superficie razionali. È già noto che l'esistenza in una varietà a tre dimensioni di un sistema lineare almeno  $\infty^3$  di superficie razionali ad intersezioni variabili irriducibili, o anche di una sola rete a intersezioni non razionali od ellittiche, è sufficiente per rappresentare la varietà sopra una involuzione dello spazio  $S_3$  (\*); ma è pur noto che queste involuzioni non sono tutte razionali (\*\*).

1. Si abbia nello spazio  $S_r$  ( $r \geq 4$ ) una varietà a tre dimensioni  $M_r^3$ , normale, di ordine  $n \geq 4$ , a superficie-sezioni  $F$  razionali. Per questa varietà è certamente nulla la irregolarità superficiale (o bidimensionale) (\*\*); e sono per conseguenza normali anche le superficie-sezioni  $F$  (\*\*\*\*). Sarà inoltre nullo il genere geometrico della varietà, perchè ogni eventuale superficie canonica (di ordine  $\geq 0$ ) segnerebbe sopra una  $F$  generica una curva che, sommata alle sezioni iperpiane della  $F$  medesima, ne darebbe delle curve canoniche, contrariamente all'ipotesi della razionalità delle  $F$ . Il genere aritmetico della  $M_r^3$  (non superiore al genere geometrico, quando sia nulla l'irregolarità superficiale (\*)) sarà perciò non negativo; e si può facilmente convincersi che anch'esso sarà nullo. Infatti l'esistenza sulla  $M_r^3$  anche di una sola rete di superficie razionali permette in ogni caso di rappresentare questa varietà sopra uno spazio  $S_3$  doppio con superficie di diramazione di ordine pari  $2m$  ( $\Phi^{2m}$ ) dotata di una delle singolarità seguenti (\*):

(\*) ENRIQUES, Math. Ann., Bd. 49 (1897), p. 1; cfr. in particolare § 17.

(\*\*) ENRIQUES, Rend. Acc. dei Lincei (5), vol. 21<sub>1</sub> (1912), pag. 81; FANO, Atti della R. Acc. di Torino, vol. 43 (1907-08), p. 973.

(\*\*\*) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*; Annales de l'École Norm. Sup. (3), t. 22 (1896), p. 339.

(\*\*\*\*) SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*; Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 28 (1909), p. 33. V. in particolare n.º 17, teor. VIII. I risultati principali di questo lavoro si trovano già enunciati nei Rend. della R. Accad. dei Lincei (5), vol. 16<sub>2</sub> (1907), p. 337. Essi sono vincolati alla possibilità di risolvere in singolarità ordinarie, mediante trasformazioni birazionali, le singolarità di una varietà qualunque; questa riserva si estende perciò anche al presente lavoro.

(\*<sub>\*</sub>) SEVERI, *Fondamenti ecc.*, n.º 19.

(\*<sub>\*</sub>) ENRIQUES, Mem. cit. dei Math. Ann., Bd. 49; § 18.

- 1) Un punto  $O$  multiplo di ordine  $2m - 2$ ;
- 2) Una retta  $r$  multipla di ordine  $2m - 4$ ;
- 3) Due punti infinitamente vicini ( $O, O'$ ) multipli di ordine  $2m - 3$ , congiunti da una retta  $r$  multipla di ordine  $2m - 6$ .

Più particolarmente, a un fascio arbitrario di superficie razionali contenuto nella rete suindicata si possono far corrispondere nel primo caso i piani doppi di un fascio contenuto nella stella  $O$ , negli altri casi quelli passanti per la retta  $r$ .

Questi tre spazi doppi si verifica immediatamente che hanno, in generale, il genere aritmetico nullo. Basta considerarvi un sistema lineare di superficie (p. es. il sistema dei piani doppi, nel terzo caso anche il sistema dei piani passanti per  $O$ ) col suo aggiunto, e applicare la nota relazione fra i caratteri di questi due sistemi e il genere aritmetico della varietà  $P_a$  (\*):

$$v' - \pi' + p'_a = p_a + 2P_a - 3$$

nella quale  $p_a$  e  $p'_a$  sono i generi aritmetici delle superficie dei due sistemi, e  $v'$  e  $\pi'$  sono il grado e il genere curvilineo (virtuali) del sistema aggiunto.

Rimane soltanto a vedere se qualche ulteriore singolarità della superficie  $\Phi^{2m}$  possa rendere negativo il genere aritmetico dello spazio doppio considerato. Ora, in primo luogo, questo genere sarebbe egualmente nullo se il punto  $O$  o la retta  $r$  avessero per la superficie  $\Phi^{2m}$  molteplicità superiore a quella indicata; nè farebbe eccezione il caso in cui la  $\Phi^{2m}$  fosse un cono, perchè l'esistenza, esplicitamente presupposta, di un fascio di piani doppi razionali obbligherebbe il cono stesso ad avere una generatrice  $(2m - 2)^{p'_a}$ , oppure sezioni le quali siano curve di diramazione di piani doppi razionali (caso che comprende il precedente). E quanto ad eventuali altre singolarità della superficie  $\Phi^{2m}$ , queste (prescindendo da singolarità notoriamente inefficaci rispetto al genere dello spazio doppio) potrebbero essere soltanto:

1) nel primo caso, rette multiple passanti per il punto  $O$ , e su queste eventuali punti di molteplicità superiore (es.: una retta  $(2k)^{p'_a}$ , e sopra questa un punto  $(2k + 2)^{p'_o}$ , oppure due punti  $(2k + 1)^{p'_i}$  infinitamente vicini);

2) nel secondo caso, rette quadruple o coppie di rette triple infinitamente vicine, incidenti alla  $r$ ;

---

(\*) SEVERI, *Fondamenti ecc.*, formola (22), che riceve la presente forma definitiva solo più avanti, al n.º 21.

3) nel terzo caso, rette di molteplicità  $\leq 6$  passanti per  $O$ ; più, in qualche caso, elementi multipli infinitamente vicini ai precedenti.

E in tutti questi casi si verifica facilmente, in base alla stessa formola, che il genere  $P_a$  è ancora zero. In una parola, le singolarità fondamentali della superficie  $\Phi^{2m}$  che abbasserebbero il genere aritmetico  $P_a$  (un punto sestuplo, una retta quadrupla, o loro equivalenti) non possono più presentarsi in posizione indipendente rispetto alle singolarità già esistenti, e risultano perciò inefficaci.

La varietà  $M_3^*$  è dunque una varietà completamente regolare, a generi nulli. E, per conseguenza, sopra ogni superficie di genere  $> 0$  in essa contenuta il sistema aggiunto a questa stessa superficie segnerà il sistema canonico completo (\*).

2. Se le curve-sezioni della varietà  $M_3^*$  sono razionali, ellittiche (l'ordine  $n$  essendo  $\geq 4$ ), od iperellittiche, la varietà stessa, come abbiamo già detto, è certo razionale. In caso diverso, vale a dire se le curve-sezioni di  $M_3^*$  sono di genere  $p \geq 3$  e non iperellittiche, si consideri il sistema lineare  $|F + F'|$ , aggiunto a  $|2F|$ , cioè al sistema doppio delle sezioni iperpiane, e depurato delle sue eventuali componenti fisse. Questo sistema, dovendo segare sulle superficie  $(2F)$ , regolari e di genere  $p$ , il sistema canonico completo, avrà dimensione  $p - 1$ ; e sulle  $F$  esso segnerà l'intero sistema aggiunto al sistema caratteristico di  $|F|$ , cioè alle curve-sezioni delle  $F$  stesse. Questo sistema si compone certo anch'esso di superficie razionali o riferibili a rigate; perchè ogni superficie aggiunta al sistema  $|F + F'|$  sarebbe biaggiunta alle  $F$ , contrariamente all'ipotesi che le  $F$  siano razionali (sicchè le  $F + F'$  avranno genere geometrico nullo), e, del pari, se esistessero superficie  $i$ -aggiunte alle  $(F + F')$  — e di queste per qualche valore di  $i$  (in ogni modo per  $i = 12$ ) dovrebbero certo esservene, se le  $(F + F')$  non sono riferibili a rigate (\*\*) — esse segnerebbero sulle  $F$  curve  $2i$ -canoniche, contrariamente ancora all'ipotesi della razionalità delle  $F$  (\*\*\*) . Inoltre :

(\*) SEVERI, l. c., n.° 20, teor. X.

(\*\*) ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*; Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. 20 (1905), p. 1.

(\*\*\*) Sulle superficie  $(F + F')$ , le  $(F + 2F')$  (certo esistenti, e in numero di almeno  $\infty^2$ , se le prime non sono riferibili a rigate) segnano curve aggiunte a quelle segate dalle  $F$ ; perciò le curve  $i$ -canoniche, supposte esistenti, sono ivi differenze, a meno di curve eccezionali,

a) Il sistema  $|F + F'|$  non è certo un fascio, perchè le sezioni iper-piane delle  $F$  si sono supposte di genere  $p \geq 3$ , e perciò la dimensione  $p - 1$  del sistema stesso  $|F + F'|$  è  $\geq 2$ ; e non è nemmeno composto mediante un fascio, perchè le aggiunte delle curve-sezioni delle  $F$ , da esso segate, sarebbero composte in egual modo, e ciò avviene soltanto quando le sezioni di  $|F|$  sono iperellittiche. Il sistema  $|F + F'|$  è dunque almeno  $\infty^2$  e irriducibile.

b) Il sistema  $|F + F'|$  può tuttavia appartenere a una congruenza di linee, razionale e del 1.° ordine (può avvenire cioè che ogni superficie del sistema sia luogo di  $\infty^1$  linee di una tale congruenza). Questo caso si presenterà certo ogni qual volta le superficie  $(F + F')$  siano riferibili a rigate non razionali e abbiano perciò le intersezioni variabili riducibili, come pure quando sia  $p = 3$ , e per conseguenza  $|F + F'|$  di dimensione 2; esso verrà esaminato ai n.° 3 e seg.

c) Il sistema  $|F + F'|$ , se di dimensione  $\geq 3$  e non del tipo b), non può appartenere a una involuzione di punti (di grado  $> 1$ ); ciò verrà dimostrato ai n.° 14 e seg.

Pertanto, all'infuori del caso b), il sistema  $|F + F'|$  sarà di nuovo un sistema lineare semplice di superficie razionali; e potremo perciò rappresentare la varietà proposta sopra una nuova varietà  $V$ , le cui sezioni iper-piane siano anch'esse razionali e immagini delle superficie  $(F + F')$ .

d) La varietà  $V$  testè nominata non può essere in nessun caso una varietà cubica dello spazio  $S_4$ , priva di punti doppi; ciò verrà dimostrato al n.° 17.

Pertanto, sempre all'infuori del caso b):

o la varietà  $V$  ha le curve-sezioni iperellittiche, in particolare razionali od ellittiche, risultando però esclusa in quest'ultima ipotesi la possibilità che essa sia una varietà cubica di  $S_4$  priva di punti doppi;

oppure le curve-sezioni di  $V$  saranno ancora di genere  $\geq 3$  e non iperellittiche. In questo secondo caso potremo operare sulla varietà  $V$  come già abbiamo operato sulla  $M_3^3$ , vale a dire sul sistema  $|F + F'|$  come già sul sistema  $|F|$ . Sopra una superficie generica del sistema  $|F + F'|$  il sistema

---

fra quelle segnate dai sistemi  $|i(F + 2F')|$  e  $|iF|$ . Segue da ciò che, sulle  $F$ , le curve segnate dalle eventuali  $i$ -aggiunte delle  $(F + F')$  saranno differenze, a meno ancora di curve eccezionali, fra quelle segnate dai medesimi sistemi suindicati, e per conseguenza anche fra quelle segnate dai sistemi  $|2i(F + F')|$  e  $|2iF|$ .

delle curve caratteristiche avrà a sua volta il proprio aggiunto, di dimensione  $\geq 2$ , il quale verrà ivi segnato dal nuovo sistema:

$$|F + F'| + |(F + F')'| = |F + F'| + |2F'| = |F + 3F'|$$

composto anch'esso di superficie razionali o riferibili a rigate; e così, occorrendo, di seguito. Il procedimento avrà certo termine, perchè il sistema  $|F + 3F'|$  sega sulle  $F$  curve del sistema lineare terzo aggiunto a quello delle sezioni iperpiane; e, del pari, gli eventuali sistemi successivi segheranno sopra  $F$  curve degli ulteriori aggiunti di questo stesso sistema; la serie dei quali aggiunti sopra una superficie razionale è finita.

Colla riserva dunque di dare le dimostrazioni di cui alle lettere  $c)$  e  $d)$ , potremo in ogni caso rappresentare la varietà proposta:

1) o sopra una varietà regolare a curve-sezioni iperellittiche, in particolare ellittiche o razionali, e diversa inoltre da una  $V^3$  di  $S_4$  priva di punti doppi: varietà dunque certamente razionale;

2) oppure sopra una varietà le cui sezioni iperpiane  $F$  presentano il caso  $b)$ ; sono cioè tali che il sistema  $|F + F'|$  risulta composto mediante una congruenza razionale di linee. Se queste linee fossero rette, la varietà  $V$  conterrebbe un sistema razionale  $\infty^2$  di rette, del 1.<sup>o</sup> ordine, e sarebbe perciò certo razionale (e così dicasi della  $M_3^n$ ); essa potrebbe rappresentarsi sullo spazio  $S_3$  facendo corrispondere a queste rette le rette di una stella, e alle superficie  $(F + F')$  coni collo stesso vertice (\*). Basterà dunque esaminare il caso in cui le superficie  $(F + F')$  appartengano a una congruenza di linee non rette; e in tutti questi casi (n.<sup>o</sup> 8-13) riconosceremo pure che la varietà  $V$  è razionale.

Con questo, e colle dimostrazioni preannunciate dei n.<sup>o</sup> 14-17, il nostro compito sarà assolto. Risulterà inoltre dimostrato che: *Se la varietà cubica dello spazio  $S_4$  priva di punti doppi non è rappresentabile sullo spazio  $S_3$ , essa non può contenere altri sistemi lineari semplici di superficie razionali all'infuori di quelli di dimensione 4 e di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche* (forse tutti trasformabili birazionalmente nel sistema delle sezioni iperpiane). Infatti da qualunque altro sistema discenderebbe, in forza del procedimento indicato, la rappresentazione della varietà sullo spazio  $S_3$ .

---

(\*) Si presenterà certo questo caso ogni qual volta la varietà  $M_3^n$  possa rappresentarsi sullo spazio  $S_3$  in modo che alle sue superficie-sezioni  $F$  corrispondano superficie di un ordine qualsiasi  $m$  ( $\geq 3$ ) con un punto base  $(m - 1)^{plo}$ .



3. Se il sistema lineare  $|F + F'|$  appartiene a una congruenza di linee aventi ordine  $k > 1$ , questa congruenza determinerà sopra ogni superficie  $F$  un'involuzione  $\mathbf{I}_k$ , alla quale apparterrà il sistema lineare aggiunto a quello delle sezioni iperpiane. Possiamo supporre quelle linee irriducibili; in tal caso l'involuzione  $\mathbf{I}_k$  non sarà composta mediante un'involuzione di ordine inferiore  $k'$ , se no i coniugati di un punto generico in quest'ultima involuzione e sulle varie  $F$  passanti per il primo punto formerebbero una linea di ordine  $k' < k$ , parte di una delle precedenti di ordine  $k$ . Consideriamo ora, nello spazio  $S_{r-1}$  di una  $F$  generica, il sistema  $\infty^2$  di rette  $\Gamma$  formato dalle congiungenti di tutte le coppie di punti di uno stesso gruppo dell'involuzione  $\mathbf{I}_k$  (\*). Sopra una sezione iperpiana generica  $\mathbf{C}$  di  $F$ , una tale coppia di punti, supposta contenutavi, imporrebbe una sola condizione a un gruppo canonico obbligato a sua volta a contenerla; e ciò, sopra una curva non iperellittica, non è possibile. Il sistema di rette  $\Gamma$ , nello spazio  $S_{r-1}$ , è dunque tale che un iperpiano generico (di questo  $S_{r-1}$ ) non ne contiene alcuna retta, ossia è di classe zero. Segue da ciò che ogni iperpiano passante per una retta  $s$  del sistema  $\Gamma$  deve contenere  $\infty^1$  di queste rette, le quali passeranno per i singoli punti della curva intersezione di quell'iperpiano colla superficie  $F$ ; e se  $P$  è un punto qualunque della superficie  $F$ , ogni iperpiano passante per il piano  $sP$  conterrà una retta del sistema  $\Gamma$  passante per  $P$ , la quale non potrà variare con quell'iperpiano, e starà perciò nel piano  $sP$ , vale a dire sarà incidente a  $s$ . Il sistema  $\Gamma$ , che nelle ipotesi fatte è certo irriducibile, si compone dunque di rette a due a due incidenti, e perciò tutte passanti per uno stesso punto  $O$ .

*I gruppi dell'involuzione  $\mathbf{I}_k$  stanno dunque sopra rette uscenti da uno stesso punto  $O$ .* Il sistema lineare  $|\mathbf{C}|$  delle sezioni iperpiane di  $F$ , di dimensione  $r - 1$  e genere  $p$ , conterrà un sistema lineare  $|\mathbf{C}_0|$ , di dimensione  $r - 2$  e genere eventualmente inferiore, segato dagli iperpiani passanti per  $O$  e appartenente all'involuzione  $\mathbf{I}_k$ ; e a questa involuzione apparterranno pure il sistema  $|\mathbf{C}'|$  aggiunto a  $|\mathbf{C}|$ , come già sappiamo, e il sistema  $|\mathbf{C}_0'|$  aggiunto a  $|\mathbf{C}_0|$ ; quest'ultimo esistente se  $|\mathbf{C}_0|$  ha ancora ge-

(\*) Cfr.: CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*; Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) (3), t. 10 (1896); n.º 4. Il nostro ragionamento non differisce sostanzialmente da quello del sig. CASTELNUOVO: questi suppone bensì che la superficie  $F$  non abbia punti multipli propri, e che perciò il sistema lineare da noi indicato con  $|\mathbf{C}_0|$  abbia lo stesso genere del sistema complessivo  $|\mathbf{C}|$ ; ma l'ipotesi stessa, per questo punto speciale della trattazione, non è necessaria. Cfr. anche quanto è detto al principio del n.º 4 del presente lavoro.

nera  $\cong 2$ , e in tal caso contenuto in  $|C|$ . Si osservi, a questo proposito, che se il sistema  $|C_0|$  ha genere inferiore a  $p$ , il punto  $O$  appartiene certo alla superficie  $F$ , della quale è anzi punto multiplo proprio; in questo caso il sistema  $|C_0|$  è anch'esso completo, e, appartenendo a una involuzione, non può comporsi di curve razionali; potrebbe essere però una rete di curve ellittiche, completa e perciò di grado 2, e in questo solo caso le  $C_0$  avranno genere  $< 2$ .

Da quanto precede, emerge altresì che sarà in ogni caso  $k=2$ , e che le curve  $C_0$  saranno iperellittiche. È infatti questo il solo caso in cui la serie canonica di una curva algebrica è composta mediante un'involuzione  $\infty^1$  (necessariamente razionale, e costituita da sole coppie di punti); mentre se le  $C_0$  sono ellittiche fu già osservato che sarà pure  $k=2$ .

Ritornando pertanto alla varietà  $M_3^*$ , della quale la superficie considerata  $F$  era sezione iperpiana generica, vediamo che *il sistema lineare  $|F + F'|$  sarà composto mediante una congruenza di coniche* (essendosi riconosciuto  $k=2$ ) *contenute in piani passanti per una retta* (perchè segati da un iperpiano generico secondo rette per un punto). Tali coniche, come già si è detto, possono suppersi irriducibili.

Inoltre, sopra una  $F$  generica, le sezioni determinate da iperpiani passanti per il punto  $O$  sono iperellittiche e contengono una  $\infty^1$  razionale di coppie di punti dell'involuzione  $I_2$ ; perciò le  $\infty^2$  rette uscenti da  $O$  e contenenti le coppie dell'involuzione suddetta (ossia le rette del sistema  $\Gamma$ ) formeranno un cono a tre dimensioni, proiettante da  $O$  una superficie a curve-sezioni razionali, certamente normale (perchè, se non fosse tale, non lo sarebbe nemmeno il cono che la proietta da  $O$ , e nemmeno la superficie  $F$ , contrariamente alle ipotesi fatte). Questa superficie a sezioni razionali sarà proiezione doppia della  $F$  dal punto  $O$ . Pertanto: *La varietà  $M_3^*$  sarà luogo di  $\infty^2$  coniche, contenute nei piani che da una retta fissa (di  $S_r$ ) proiettano i punti di una superficie normale a curve-sezioni razionali (di uno spazio  $S_{r-2}$ , perciò di ordine  $r-3$ ); e il sistema  $|F + F'|$  su di essa si comporrà di superficie luoghi di  $\infty^1$  tra queste coniche.*

4. Ci proponiamo ora di determinare tutte le superficie  $F$  del tipo incontrato nel n.º prec.; vale a dire le superficie razionali le cui sezioni iperpiane hanno il sistema aggiunto appartenente a un'involuzione ( $I_2$ ), necessariamente di 2.º ordine e segata da rette uscenti da un punto fisso  $O$ , dal quale punto sappiamo anche che la superficie è proiettata in una superficie doppia, normale, a curve-sezioni razionali. Queste superficie costituiranno tutte le possibili sezioni delle  $M_3^*$  corrispondenti al caso b) del n.º 2.

Ricerche del sig. CASTELNUOVO (\*) hanno da tempo assegnate tutte queste superficie, limitatamente alle due ipotesi restrittive ch'esse siano prive di punti multipli propri, e abbiano le curve-sezioni non speciali (ossia che i sistemi lineari di curve piane che le rappresentano siano prive di curve fondamentali proprie, e abbiano serie caratteristica non speciale). E bastano poche considerazioni complementari per riuscire a comprendere anche ogni caso ulteriore; alle superficie già trovate dal sig. CASTELNUOVO e alle loro proiezioni (qualcuna delle quali già non più soddisfacente alle ipotesi suaccennate) *una sola* se ne aggiungerà: la superficie razionale del 4.<sup>o</sup> ordine indicata da M. NOETHER (\*\*) con  $F_4^{(2)}$ , avente un punto doppio e un tacnodo ad esso infinitamente vicino, e rappresentata sul piano dal sistema delle curve di 7.<sup>o</sup> ordine, aventi a comune un punto triplo e 9 punti doppi, tutti appartenenti a una cubica.

Nelle ipotesi fatte dal sig. CASTELNUOVO, la superficie  $F$  si proiettava in  $S_3$ , da un numero conveniente di suoi punti semplici scelti in modo generale, secondo una superficie  $F^*$  di un certo ordine  $m$ , priva sempre di punti multipli propri, le cui sole singolarità erano il punto  $O^*$ , proiezione di  $O$ , multiplo di ordine  $m - 2$ , e rette multiple uscenti da questo punto, in numero e di ordini tali da rendere impropria la molteplicità in  $O^*$  stesso. Nel caso presente vi potranno essere anche altre singolarità, ma è facile precisarle; inoltre le superficie di ordine  $m - 3$  aggiunte ad  $F^*$ , dovendo incontrare  $F^*$  secondo le curve aggiunte alle sezioni piane, le quali appartengono all'involuzione segata dalle rette della stella  $O^*$ , saranno pur sempre coni di vertice  $O^*$ ; e si può dimostrare egualmente che questi coni saranno razionali (vale a dire che, sopra  $F$ , le curve  $C'$  aggiunte alle sezioni iperpiane saranno anch'esse iperellittiche, al pari delle  $C_0$ , segate dagli iperpiani passanti per  $O$ ).

Osserviamo, in primo luogo, che la superficie normale  $F^n$  non può avere già essa linee multiple, all'infuori di rette passanti per  $O$ . Invero, si consideri su di essa una sezione iperpiana  $C$  non passante per  $O$  e avente lo stesso genere  $p$  della sezione generica. Due punti assolutamente qualunque

---

(\*) V. la Mem. cit.: *Sulle superficie di genere zero*, nonché la « Aggiunta » alla Memoria ENRIQUES: *Sui piani doppi di genere uno*, Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) (3), t. 10 (1896).

(\*\*) *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*; Math. Annalen, vol. 33 (1889), p. 546. Le altre superficie razionali del 4.<sup>o</sup> ordine con un solo punto doppio, sempre di natura speciale, si incontrano qui pure, ma sono proiezioni di superficie del tipo stesso di cui ora trattasi e già considerate dal sig. CASTELNUOVO.

di questa curva devono imporre a un'aggiunta  $\mathbf{C}'$ , obbligata a contenerli, condizioni distinte. D'altra parte le  $\mathbf{C}'$ , appartenendo all'involuzione  $\mathbf{I}_2$ , sono segate sopra  $F$  da conici di vertice  $O$ . Pertanto, se  $P$  è un punto comune alla  $\mathbf{C}$  e all'eventuale linea multipla di  $F$ , tale (come possiamo certo supporre) che  $OP$  non sia generatrice comune ai conici anzidetti proiettanti da  $O$  le  $\mathbf{C}'$ , evidentemente i punti di  $\mathbf{C}$  sovrapposti in  $P$  imporrebbero alle  $\mathbf{C}'$ , tutti insieme, una condizione unica: il passaggio del cono che da  $O$  proietta questa  $\mathbf{C}'$  per la generatrice  $OP$ . E questo non è possibile.

*La curva (iperellittica)  $\mathbf{C}_0$ , intersezione di  $F$  con un iperpiano generico passante per  $O$  non potrà avere dunque punti multipli, all'infuori di  $O$  stesso e di punti doppi infinitamente vicini ad  $O$ .*

Queste curve  $\mathbf{C}_0$ , di ordine  $n$  e genere  $p_1 \leq p$ , sono proiettate doppiamente da  $O$  secondo conici razionali normali di ordine  $r - 3$  (essendo sempre  $r$  la dimensione dello spazio cui appartiene la varietà  $M_3^n$ , e perciò  $r - 2$  la dimensione dello spazio della curva  $\mathbf{C}_0$  e del cono che la proietta da  $O$ ). Le  $\mathbf{C}_0$  avranno pertanto il punto  $O$  come multiplo di ordine  $n - 2(r - 3)$ ; e, ritenuto inoltre che sarà certo  $r - 3 \leq n - p_1 - 1$  (\*), avranno altresì, infinitamente vicini ad  $O$ , ancora  $(n - p_1 - 1) - (r - 3)$  punti doppi (nell'intorno di 1.º ordine di  $O$ , oppure anche, tutti o in parte, fra loro consecutivi).

Queste stesse curve, da  $r - 4$  loro punti generici, sono proiettate secondo curve piane di ordine  $m = n - r + 4$ , aventi un punto (proiezione di  $O$ ) di molteplicità  $m - 2 = n - r + 2$ , e eventualmente (come la  $\mathbf{C}_0$ ) punti doppi infinitamente vicini a questo. Perciò la superficie  $F$ , anche da  $r - 4$  suoi punti generici, verrà proiettata sopra  $S_3$  secondo una superficie  $F^*$  di ordine  $m$ , avente un punto  $O^*$  di molteplicità  $m - 2$ , e le cui ulteriori singolarità potranno essere soltanto:

a) rette multiple passanti per  $O^*$  (proiezioni di rette già multiple per  $F$  e passanti per  $O$ );

b) punti doppi e linee doppie infinitesime infinitamente vicini ad  $O$  (con certe restrizioni, anche fra loro susseguenti);

---

(\*) Poichè la curva  $\mathbf{C}_0$ , di ordine  $n$  e genere  $p_1$ , contiene una serie lineare (o involuzione razionale)  $g_2^1$ , le congiungenti delle coppie di punti di questa involuzione formano una rigata di ordine  $\leq n - p_1 - 1$ ; e se quest'ordine è inferiore a  $n - p_1 - 1$ , la sua differenza da questo massimo dà il numero dei punti doppi della curva che assorbono i due elementi di uno stesso gruppo della  $g_2^1$ . Nel caso presente, questi punti doppi sono tutti infinitamente vicini ad  $O$ .

c) punti multipli propri a distanza finita da  $O^*$ , eventualmente con altri punti o linee multiple infinitesime ad essi infinitamente vicini. Ma queste ultime singolarità (provenienti anch'esse da altre consimili esistenti sopra  $F$ ) riconosceremo facilmente che sono tutte inessenziali, perchè devono cadere sopra rette multiple uscenti da  $O^*$ , e la loro influenza sui generi della superficie  $F^*$  è identica a quella che spetta a queste medesime rette.

E infatti:

1) Sia  $A$  un punto multiplo proprio della superficie  $F^*$ , distinto da  $O^*$ , di molteplicità  $k \geq 3$ ; sicchè la retta  $O^*A$  apparterrà per intero alla superficie  $F^*$ . Le superficie di ordine  $m - 3$  aggiunte ad  $F^*$  avranno in  $A$  la molteplicità  $k - 2$  (almeno); e perciò, essendo coni di vertice  $O^*$ , avranno questa stessa molteplicità (che è  $\geq 1$ ) lungo l'intera generatrice  $O^*A$ . D'altra parte questi coni devono segare sopra un piano generico tutte e soltanto le  $\infty^{p-1}$  curve aggiunte alla sezione determinata da questo medesimo piano in  $F^*$ ; queste aggiunte avranno dunque anch'esse la molteplicità  $k - 2$  (almeno) nel punto intersezione di tale piano colla retta  $O^*A$ , e perciò ancora questo punto avrà per la sezione piana considerata di  $F^*$ , e, per conseguenza, anche per  $F$ , la molteplicità  $k - 1$  (\*). In altri termini, l'intera retta  $O^*A$  sarà per la superficie  $F^*$  multipla di ordine  $k - 1$ .

2) Gli eventuali punti doppi isolati di  $F^*$ , distinti da  $O^*$ , se non hanno nel loro intorno di un certo ordine ( $\geq 1$ ) una retta doppia infinitesima, sono singolarità inessenziali (come non esistenti). Sia invece  $A$  un punto doppio, al quale, nell'intorno di un certo ordine, sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima (tacnodo, ecc.); le aggiunte di  $F^*$  dovranno allora passare semplicemente per questo punto, e, di conseguenza, per la retta  $O^*A$ ; e di qui, con considerazioni analoghe alle precedenti (\*\*), si trae che l'intera retta

---

(\*) È noto infatti che le aggiunte di una curva piana irriducibile hanno le intersezioni con questa curva *tutte* variabili, all'infuori di quelle assorbite dai punti multipli della curva primitiva. Questo implica che in nessun punto della curva primitiva le aggiunte possano avere tutte quante una molteplicità superiore a quella che è ivi per esse strettamente richiesta.

(\*\*) Anche in questo caso la superficie  $F^*$  deve contenere la retta  $O^*A$ . Invero, se così non fosse, il fatto che, in un piano generico, le aggiunte alla sezione determinata da questo piano in  $F^*$  passano tutte per il punto intersezione di questo stesso piano colla  $O^*A$  sarebbe possibile solo in quanto tale passaggio fosse conseguenza delle altre condizioni alle quali le aggiunte suddette devono soddisfare; e in quest'ultima ipotesi una sezione passante per  $A$  avrebbe punti multipli che impongono alle aggiunte condizioni non tutte distinte, il che (trattandosi di curva certo irriducibile) va escluso.

$O^*A$  sarà doppia per la superficie  $F^*$ . Che se poi ad  $A$  fosse infinitamente vicina una retta tacnodale infinitesima, vale a dire se  $A$  fosse un oscnodo, i coni aggiunti avrebbero in  $A$ , e perciò lungo la generatrice  $O^*A$  un piano tangente fisso; e in questo piano  $F^*$  avrebbe, consecutivamente ad  $O^*A$ , una seconda generatrice doppia.

3) Se poi ad un punto  $A$ , multiplo di ordine  $k \geq 3$  e sempre distinto da  $O^*$ , è infinitamente vicino un punto  $i^{p'o}$  (dove  $i \leq k$ ; e inoltre  $i \leq n - k + 1$ , non potendo la congiungente di tali due punti essere multipla per  $F^*$ ), la retta, infinitamente vicina ad  $O^*A$ , che da  $O^*$  proietta questo nuovo punto apparterrà alla superficie  $F^*$  colla molteplicità  $i - 1$  almeno (fatta soltanto eccezione pel caso inessenziale di un punto doppio al quale siano successivi soltanto un numero finito di altri punti doppi). Da ciò emerge altresì che una eventuale linea  $i^{p'ia}$  infinitesima infinitamente vicina ad  $A$  dovrebbe spezzarsi in rette, contenute in altrettanti piani passanti per  $O^*A$ , e in ciascuno dei quali  $F^*$  avrebbe una retta (non più soltanto  $(i - 1)^{p'ia}$ , ma)  $i^{p'ia}$  infinitamente vicina ad  $O^*A$ ; queste rette assorbono, per così dire, le rette  $i^{p'ie}$  infinitesime suindicate. E così di seguito, eventualmente, per gli intorni di ordini successivi. — Considerazioni analoghe si potrebbero fare altresì qualora  $A$ , anzichè punto  $k^{p'o}$  sopra una retta  $(k - 1)^{p'ia}$ , fosse un punto generico di quest'ultima retta.

Quanto alle eventuali singolarità infinitamente vicine ad  $O^*$ , sopra rette uscenti da  $O^*$  e non multiple per  $F^*$ , valgono le osservazioni seguenti:

1) Punti doppi isolati, ai quali siano successivi soltanto altri punti doppi, in numero finito, sono da considerarsi, in relazione alle superficie aggiunte e biaggiate, come non esistenti.

2) Linee doppie infinitesime soltanto nodali o cuspidali (linee di ordine  $\leq \frac{m-2}{2}$  se nell'intorno di 1.º ordine di  $O^*$ , e solamente rette se susseguenti uno o più punti doppi isolati successivi ad  $O^*$ ) impongono alle aggiunte di  $F^*$  di ordine  $m - 3$  condizioni che risultano già verificate per il fatto che tali aggiunte sono coni, hanno cioè in  $O^*$  la molteplicità  $m - 3$  anzichè soltanto  $m - 4$ .

3) Singolarità più elevate non sono possibili. Invero, se  $P$  fosse un punto infinitamente vicino ad  $O^*$ , sopra una retta non multipla per  $F^*$ , e punto generico di una linea infinitesima almeno tacnodale, oppure tale che ad esso segua una retta consimile (oscnodo, ecc.), dovrebbero i coni di ordine  $m - 3$  aggiunti ad  $F^*$  come prima ulteriore condizione contenere la generatrice  $O^*P$ , senza che ciò sia conseguenza delle rimanenti condizioni

cui già essi soddisfano (poichè le diverse singolarità di una superficie regolare di ordine  $m$  devono imporre alle aggiunte di ordine  $\geq m - 4$  condizioni tutte distinte); e perciò quei coni aggiunti non segherebbero più sopra un piano generico l'intero sistema aggiunto alle curve intersezioni di  $F^*$  con questo medesimo piano.

Tutto ciò premesso, dico ora che *I coni di ordine  $m - 3$  aggiunti alla superficie  $F^*$  sono razionali (\*)*. E infatti, se tali non fossero, essi, considerati come enti  $\infty^1$  della stella  $O^*$ , avrebbero almeno un cono aggiunto di ordine  $m - 6$ ; tale perciò che ogni retta della stella  $O^*$  la quale sia  $k^{p^a}$  per  $F^*$  e, per conseguenza,  $(k - 1)^{p^a}$  per i coni aggiunti, sia  $(k - 2)^{p^a}$  per questo nuovo cono. Aggiungendo a tale cono il cono di ordine  $m - 2$  tangente alla superficie  $F^*$  nel punto  $O^*$ , per il quale le rette  $k^{p^a}$  di  $F^*$  (tutte uscenti da  $O^*$ ) sono anche  $k^{p^a}$ , e le rette proiettanti i punti doppi infinitamente vicini ad  $O^*$ , sia isolati che formanti linee doppie infinitesime, sono tutte doppie, si avrà un cono complessivo di ordine  $2m - 8$ , il quale, come facilmente si verifica, costituirebbe una superficie *biaggiunta* ad  $F^*$ . Tale superficie non potendo esistere, poichè  $F^*$  è razionale, risulta assurda l'ipotesi fatta che non siano razionali i coni di ordine  $m - 3$  aggiunti ad  $F^*$ . Per conseguenza:

*Il sistema lineare  $|\mathbf{C}'|$  aggiunto alle sezioni iperpiane di  $F$  si compone di curve anch'esse iperellittiche, incontrantisi a due a due secondo  $p - 2$  coppie dell'involuzione  $\mathbf{I}_2$ . Invero i coni aggiunti ad  $F^*$ , essendo razionali e formando un sistema lineare completo di dimensione  $p - 1$ , devono incontrarsi a due a due secondo gruppi di  $p - 2$  generatrici.*

5. Il sistema lineare  $|\mathbf{C}'|$ , aggiunto alle sezioni iperpiane della superficie  $F$ , permette di rappresentare questa superficie sopra una superficie doppia dello spazio  $S_{p-1}$ , di ordine  $p - 2$ , a curve-sezioni razionali, sulla quale alle  $\mathbf{C}$ , sezioni iperpiane di  $F$ , corrisponderanno curve canoniche di genere  $p$  (semplici, di ordine  $2p - 2$ ).

Questa superficie  $\varphi^{p-2}$  sarà una rigata razionale normale, oppure, nello spazio  $S_3$ , e perciò nel solo caso  $p = 6$ , la ben nota *superficie di Veronese* (rappresentata sul piano dal sistema lineare  $\infty^5$  delle coniche). Quest'ultimo caso si esclude però facilmente. Infatti alle  $\infty^2$  coniche (doppie) della superficie  $\varphi^4$ , incontrate dalle immagini delle  $\mathbf{C}$  (le quali sono di ordine 10) in 5 punti, corrisponderebbero sopra  $F$  curve iperellittiche di 5.<sup>o</sup> ordine, perciò

(\*) CASTELNUOVO, Mem. cit.: *Sulle superficie di genere zero*, n.º 11.

di genere  $\leq 3$ . Queste curve incontrerebbero la curva doppia dell'involuzione  $\mathbf{I}_2$  in un numero di punti non superiore a *otto*; e perciò, riferendo la  $\varphi^4$  a sua volta ad un piano nel modo consueto, la  $F$  risulterà rappresentata sopra un piano doppio con curva di diramazione di ordine anche non superiore ad *otto*. Tenendo conto pertanto dei tipi ben noti ai quali questa curva deve potersi ridurre (poichè  $F$  e quel piano doppio sono razionali) (\*), vediamo immediatamente che la nominata curva di diramazione potrà essere soltanto:

1) una curva di 8.<sup>o</sup> ordine con un punto sestuplo, oppure con tre punti quadrupli, ciascuno dei quali può essere sostituito da due punti tripli infinitamente vicini;

2) una curva di 6.<sup>o</sup> ordine con punto quadruplo, oppure con due punti tripli infinitamente vicini;

3) una curva di 4.<sup>o</sup> o di 2.<sup>o</sup> ordine.

In ciascuno di questi casi, al sistema lineare  $|\mathbf{C}'|$  della superficie  $F$  corrisponderebbe nel piano doppio il sistema lineare  $\infty^5$  delle coniche doppie. E si verifica facilmente che quest'ultimo sistema, nei casi enumerati, non è mai l'aggiunto di un sistema lineare. Invero: nel caso 3), anzitutto, il sistema delle coniche doppie non è completo. Nel caso 2) esso è il sistema doppio di una rete di grado 2 e genere 2, riducibile a tipi ben noti (reti di curve piane di 4.<sup>o</sup>, 5.<sup>o</sup> o 6.<sup>o</sup> ordine); e in ciascuno di questi casi si può verificare direttamente che il sistema doppio di questa rete non è aggiunto di alcun sistema. Nel caso 1) infine, la superficie  $F$ , contenendo (come immagini delle rette del piano doppio) una rete di curve piane iperellittiche di 5.<sup>o</sup> ordine e genere 3, potrebbe essere soltanto una superficie di 5.<sup>o</sup> ordine di  $S_3$  con punto triplo (e ulteriori singolarità infinitamente vicine a questo, ma priva di linea doppia), sulla quale le aggiunte delle sezioni piane dovrebbero essere segate dai coni quadrici aventi il vertice nel punto triplo; il che si ri-

---

(\*) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*; Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. 14 (1900), p. 290. In questa Memoria sono accennate anche le fasi anteriori per le quali è passata la determinazione dei piani doppi razionali, dai lavori di CLEBSCH e NOETHER in poi. La curva di diramazione deve essere di ordine pari, e non deve avere « seconde aggiunte », coll'avvertenza che un suo punto multiplo di ordine dispari  $2k + 1$ , al quale non ne sia infinitamente vicino un altro consimile, va computato, nella determinazione delle seconde aggiunte, come se fosse solamente  $(2k)^{2k}$ . I punti tripli isolati e i punti doppi sono perciò, per le seconde aggiunte, come inesistenti. Da queste condizioni segue immediatamente che i soli casi possibili sono quelli sopra enumerati.



conosce immediatamente non essere possibile. Infatti, togliendo da entrambi i sistemi (sezioni piane e loro aggiunte) il sistema delle sezioni determinate dai piani passanti pel punto triplo, risulterebbe che la curva fondamentale rappresentata dal punto triplo, di genere  $\leq 1$ , avrebbe per aggiunte ancora queste stesse  $\infty^2$  sezioni piane (\*).

6. Supponiamo invece che la superficie  $\varphi^{p-2}$  di  $S_{p-1}$  considerata al n.º prec., e sulla quale, pensata come doppia, abbiamo rappresentata la  $F$ , sia una rigata razionale normale. Essendo già note tutte le superficie razionali a sezioni di genere *tre* (\*\*), perciò anche quelle del tipo che a noi interessa, possiamo supporre  $p \geq 4$ .

Ora, una curva canonica di genere  $p$  tracciata sopra una rigata razionale normale dello spazio  $S_{p-1}$  (e per noi  $p-1 \geq 3$ ) deve necessariamente incontrare ogni generatrice di questa rigata in *tre* punti. Infatti, indicato questo numero di punti con  $k$ , si avrà sulla curva stessa una serie lineare  $g_k^1$  (completa, speciale), la cui residua è una  $g_{2p-3-k}^2$ ; e ciò richiede sia  $2p-2-k > 2(p-3)$ , cioè appunto  $k < 4$ .

Alle generatrici (doppie) della rigata  $\varphi^{p-2}$  corrispondono dunque sopra  $F$  curve di 3.º ordine (formanti un fascio) (\*\*).

Tali curve di 3.º ordine sono certamente ellittiche e perciò piane. Infatti, se fossero razionali, la superficie  $F$  si potrebbe rappresentare sul piano in modo che a queste curve corrispondano rette di un fascio; alle sezioni iperpiane di  $F$  dovrebbero perciò corrispondere, in questo piano, curve trisecanti le rette del fascio anzidetto, vale a dire curve di un certo ordine  $m$  colla molteplicità  $m-3$  nel centro del fascio. E il sistema aggiunto  $|C|$  si comporrebbe allora di curve razionali.

(\*) Le superficie razionali del 5.º ordine di  $S_3$  con punto triplo e prive di linea doppia furono determinate dal PENZA (*Sulle superficie razionali del 5.º ordine*; Annali di Matem. (3), vol. 6 (1901), p. 249; cfr. in partic. n.º 20); e si può verificare direttamente che per nessuna di esse le quadriche aggiunte sono tutte con.

(\*\*) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*; Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. 25 (1890). In questa Nota è posta da principio una restrizione, che è soddisfatta (come si è riconosciuto in seguito) per tutte le superficie regolari; fra le superficie ivi determinate sono perciò comprese tutte quelle razionali.

(\*\*\*) Se  $p=4$ , e se perciò la  $\varphi^{p-2}$  è una quadrica di  $S_3$ , il ragionamento varrebbe per entrambi i sistemi di generatrici su di essa. Risulterà tuttavia in seguito che in questo caso, il quale è il solo possibile, la quadrica  $\varphi$  è un cono.

Inoltre le curve di 3.<sup>o</sup> ordine suddette della superficie  $F$ , avendo per immagini sulla rigata  $\varphi^{p-2}$  linee doppie, apparterranno all'involuzione  $\mathbf{I}_2$ , che sulla superficie  $F$  è segnata da rette uscenti dal punto  $O$ ; per questo punto passeranno dunque i loro piani, e anzi le stesse  $\infty^1$  curve, per le quali  $O$  costituirà pertanto una varietà unisecante.

Potremo dunque rappresentare la superficie  $F$  sul piano in modo che al fascio di cubiche esistente su di esse corrisponda un fascio di curve piane di un certo ordine  $3k$  con nove punti basi  $k^{p^i}$  (\*). E l'esistenza, pel fascio di cubiche, di una varietà unisecante, ci permette di concludere subito che dovrà essere  $k = 1$ , ossia che al fascio di cubiche sopra  $F$  dovrà corrispondere anche un fascio di cubiche piane. Invero, se fosse  $k > 1$ , al punto  $O$ , varietà unisecante le cubiche di  $F$ , non potrebbe corrispondere, nel piano, uno dei 9 punti basi del fascio considerato; dovrebbe dunque corrispondergli una curva di un certo ordine  $x$ , avente negli stessi 9 punti certe molteplicità  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9$ , tali che sia:

$$3k \cdot x - k \cdot \sum_{i=1}^9 \alpha_i = 1.$$

E poichè  $k$  è manifestamente divisore del primo membro, questa relazione è incompatibile coll'ipotesi  $k > 1$ .

Alle cubiche di  $F$  corrisponderanno dunque nel piano anche cubiche, passanti per 9 punti fissi. D'altra parte le curve  $\mathbf{C}'$ , aggiunte alle sezioni iperpiane di  $F$ , hanno per immagini sulla rigata (doppia)  $\varphi^{p-2}$  le sezioni iperpiane di questa, le quali sono bisecanti le generatrici (considerate pure come doppie). Alle  $\mathbf{C}'$  corrisponderanno dunque nel medesimo piano rappresentativo curve di un certo ordine  $y$  e con molteplicità  $\beta_i$  nei punti basi del fascio di cubiche, tali che sia:

$$3y - \sum \beta_i = 2.$$

Il sig. CASTELNUOVO, nella citata « Aggiunta » a una Memoria ENRIQUES (\*\*), ha determinati appunto tutti i sistemi lineari di curve piane soddisfacenti a queste condizioni (ciascuno dei quali appartiene necessariamente a una certa

(\*) A questo tipo (per un certo valore di  $k$ ) può infatti ridursi, per mezzo di una trasformazione cremoniana, qualunque fascio di curve piane ellittiche. La prima dimostrazione fu data dal BERTINI (Annali di Matem. (2), vol. 8 (1877), p. 248); e il FERRETTI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. 16 (1902), p. 236) confermò il risultato in modo da eliminare i dubbi sorti più tardi circa taluni casi di punti multipli infinitamente vicini.

(\*\*) Cfr. la prima nota al n.º 4.

involuzione di coppie di punti); e in particolare quelli fra essi che sono, come a noi pure occorre, aggiunti di un sistema lineare *semplice*. Di questi ultimi sistemi (precindendo dalla rete di cubiche con sette punti basi, che è aggiunta di un sistema di genere 3) ve n'è uno solo: *il sistema lineare  $\infty^3$  delle sestiche piane con otto punti basi doppi* (senza ulteriori punti basi, nel caso presente, perchè, essendosi supposto il sistema  $|\mathbf{C}|$  di genere  $\geq 4$ , il suo aggiunto deve essere almeno  $\infty^3$ ). Questo sistema è l'aggiunto di un *sistema di curve piane di ordine 9, avente gli stessi otto punti base come tripli, più eventualmente punti basi semplici*. Saranno questi perciò *i sistemi lineari rappresentativi delle sole superficie  $F$  del tipo da noi cercato e aventi le sezioni di genere  $> 3$* .

Quanto alle superficie a sezioni di genere 3, sempre del tipo speciale che a noi occorre, esse saranno tutte e soltanto quelle nelle quali le quartiche aggiunte alle sezioni iperpiane (o piane) formano una rete di grado 2; il che avviene quando le quartiche stesse hanno genere 1 o 2 (\*). Abbiamo così:

1) *La superficie di 8.° ordine di  $S_6$  rappresentata dal sistema lineare delle sestiche con sette punti basi doppi, e sue proiezioni*. Fra queste proiezioni vi è la superficie di 4.° ordine di  $S_3$  con tacnodo ( $F_4^{(1)}$ );

2) *La superficie di 4.° ordine  $F_4^{(2)}$  di NOETHER, rappresentata dal sistema delle curve piane di 7.° ordine aventi a comune un punto triplo e nove punti doppi, tutti appartenenti a una cubica;*

3) *La superficie di 4.° ordine  $F_4^{(3)}$  di NOETHER rappresentata dal sistema delle curve piane di 9.° ordine aventi a comune otto punti tripli, un punto doppio, e un punto semplice, anche tutti appartenenti a una cubica.*

A queste aggiungiamo, per il caso delle sezioni di genere 4:

4) *La superficie di 9.° ordine dello spazio  $S_6$  rappresentata dal sistema lineare delle curve di 9.° ordine con otto punti basi tripli, e sue proiezioni*. Fra queste proiezioni vi è anche la superficie  $F_4^{(3)}$  di NOETHER testè nominata; le rimanenti hanno ancora le sezioni di genere 4. Dalla rappresentazione piana di queste ultime superficie si rileva immediatamente che le loro sezioni iperpiane contengono un'unica serie lineare  $g_4^1$  (anzichè due, generalmente di-

---

(\*) Dal signor CASTELNUOVO, nella Nota cit. *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*, queste superficie sono designate come di 2.<sup>a</sup> specie e di 3.<sup>a</sup> specie. Quelle di 1.<sup>a</sup> specie hanno invece come curve aggiunte alle sezioni iperpiane delle quartiche razionali, formanti perciò una rete omaloidica; e quelle di 4.<sup>a</sup> specie non sono razionali.

stinte), segata dal fascio di cubiche che abbiamo riconosciuto esistere sopra  $F$ ; esse sono dunque riferibili a sestiche canoniche contenute in coni quadrici.

*Le varietà  $M_0^2$  corrispondenti al caso b) del n.° 2 hanno dunque come sezioni superficie dei soli tipi 1), 2) e 4) testè enumerati.*

**7.** Determiniamo ora quali siano le varietà  $M_0^2$ , luoghi di coniche contenute in piani per una retta, le quali hanno come sezioni superficie  $F$  dei singoli tipi indicati.

È facile anzitutto riconoscere che, se due varietà così fatte sono tali che le superficie loro sezioni generiche si possano ottenere l'una come proiezione dell'altra, la stessa relazione di proiezione sussisterà pure fra le due varietà considerate. Supponiamo infatti che la superficie  $F_0$ , sezione generica della varietà  $M_0$  e appartenente a una delle categorie 1) o 4) dianzi enumerate, sia proiezione di altra superficie  $F$  di questa stessa categoria da un suo punto  $P$ . La  $F$  e la  $F_0$  saranno contenute rispettivamente in coni normali a tre dimensioni  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ , a curve sezioni razionali, il secondo dei quali sarà pure proiezione del primo dal medesimo punto  $P$ . D'altra parte il cono  $\Phi_0$  è sezione iperpiana del cono  $\Gamma_0$  (a 4 dimensioni, e di 2.<sup>a</sup> specie) luogo degli  $\infty^2$  piani, passanti per una retta  $s_0$ , che contengono le singole coniche della varietà  $M_0$ . Da una retta generica  $s$ , contenuta nel piano  $Ps_0$  e passante pel vertice del cono  $\Phi$ , quest'ultimo cono verrà proiettato secondo un cono  $\Gamma$  di  $\infty^2$  piani, del quale  $\Gamma_0$  è proiezione dal punto  $P$ . E in questa stessa proiezione a quei punti del cono  $\Gamma_0$  che appartengono alla varietà  $M_0$  corrisponderanno sopra  $\Gamma$  punti di una varietà  $M$ , luogo a sua volta di  $\infty^2$  coniche contenute nei piani di  $\Gamma$ , e della quale  $F$  sarà sezione iperpiana. Se il punto  $P$  è per la superficie  $F$  (e perciò anche per la varietà  $M$ ) punto semplice, oppure punto doppio improprio, le varietà  $M$  e  $M_0$  avranno le curve-sezioni di egual genere, e perciò il sistema lineare  $|F + F'|$  nella prima sarà precisamente quello che ha per proiezione il sistema  $|F_0 + F'_0|$  nella seconda; e se questo appartiene al sistema  $\infty^2$  delle coniche di  $M_0$ , quello apparterrà all'analogo sistema sopra  $M$ ; vale a dire  $M$  sarà ancora una varietà del tipo che qui ci interessa. Vi è d'altra parte un solo caso nel quale l'ipotesi fatta per  $P$  non è verificata: il caso in cui  $F_0$  sia la superficie  $F_0^{\text{Noether}}$  di NOETHER, e la  $F$  una certa superficie di 6.<sup>o</sup> o 7.<sup>o</sup> ordine in  $S_4$ . E in questo caso si verifica immediatamente che, sulla varietà  $M_0$ , appartiene alla congruenza delle  $\infty^2$  coniche non solo il sistema  $|F_0 + F'_0|$ , ma anche l'intero sistema  $\infty^3$  aggiunto

alle immagini delle sezioni iperpiane della superficie anzidetta di  $S_4$ ; sicchè sta egualmente la conclusione enunciata.

Le varietà da determinarsi in relazione al caso *b*) del n.º 2 possono dunque limitarsi a quelle (sempre luoghi di  $\infty^2$  coniche contenuti in piani per una retta) che hanno come sezioni:

1) La superficie  $F^8$  di  $S_6$ , rappresentata dal sistema delle sestiche piane con 7 punti basi doppi;

2) La superficie  $F^9$  di  $S_6$ , rappresentata dal sistema delle curve di 9.º ordine con 8 punti basi tripli;

3) La superficie  $F_4^{(2)}$  di NOETHER.

Tutte le altre varietà di questa categoria saranno proiezioni di una delle prime due fra queste.

**8.** La superficie  $F^8$  di  $S_6$  rappresentata da un sistema di sestiche piane con 7 punti basi doppi è intersezione del cono proiettante una superficie del 4.º ordine di Veronese con una quadrica (non passante pel vertice di quel cono) (\*). Perciò una varietà  $M_3^8$  di  $S_7$  del tipo che a noi interessa sarà contenuta nel cono di 4.º ordine  $\Gamma^4$  che da una retta  $s$  proietta una superficie di Veronese (il cui spazio  $S_5$  non sia incidente a quella retta), e sarà a sua volta l'intersezione di quest'ultimo cono con una quadrica. Sono infatti equivalenti due varietà  $V_{k-1}$  contenute in una stessa  $V_k$  e aventi sezioni iperpiane equivalenti (entro la sezione di  $V_k$ ) (\*\*).

Le  $\infty^2$  coniche della varietà  $M_3^8$  incontrano perciò la retta  $s$  (asse del cono  $\Gamma$ ) negli stessi due punti  $A, B$  (distinti o coincidenti); e la varietà proposta è razionale, costituendo ciascuno di questi punti per le  $\infty^2$  coniche una varietà unisecante.

Da ciascuno dei due punti  $A, B$  esce un cono di rette contenuto nella varietà  $M_3^8$ , cono di ordine 8 e genere 3, intersezione della  $M_3^8$  collo spazio  $S_6$  tangente in quel punto a una qualunque delle quadriche che la segano sul cono  $\Gamma^4$ . Da uno qualunque di quei medesimi punti la  $M_3^8$  è proiettata in un cono  $\Delta^4$  di  $S_6$ , sezione iperpiana di  $\Gamma^4$ ; e alle sezioni iperpiane di  $M_3^8$  corrispondono su  $\Delta^4$  anche superficie  $F^8$ , tutte passanti per la curva  $\gamma^8$ , di genere 3, sezione del cono di rette testè nominato. A sua volta, il cono  $\Delta^4$  si

(\*) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*, n.º 7.

(\*\*) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*; Atti Ist. Veneto, t. LXV, parte II (1906), p. 625.

può rappresentare sullo spazio  $S_3$  proiettandolo dal piano di una sua conica; se questo piano si suppone contenuto nello spazio  $S_3$  della curva  $\gamma^8$ , di modo che quest'ultima curva si appoggerà a quella conica in 4 punti, alle sezioni iperpiane di  $M_3^8$  corrisponderanno in  $S_3$  superficie di 4.<sup>o</sup> ordine con tacnodo, aventi a comune questo tacnodo, il relativo piano tangente, le 4 rette uscenti dal tacnodo, e una sezione piana, immagine della  $\gamma^8$ . Da questi elementi il sistema lineare  $\infty^7$  rappresentante la  $M_3^8$  è completamente individuato. Assumendo il tacnodo come origine, il piano tangente in esso come piano  $x = 0$ , e il piano della quartica base come piano all'infinito, il sistema stesso è rappresentato in coordinate cartesiane dall'equazione:

$$a x^2 + x \cdot f_2(x y z) + f_4(x y z) = 0$$

dove  $f_2$  e  $f_4$  sono forme rispett. di 2.<sup>o</sup> e di 4.<sup>o</sup> grado nelle tre coordinate, quest'ultima a coefficienti tutti costanti ( $f_4 = 0$  essendo l'equazione del cono che dall'origine proietta la quartica base all'infinito), mentre i 6 coefficienti di  $f_2$  sono tutti variabili, e insieme ad  $a$  costituiscono i 7 parametri.

La curva  $\gamma^8$  dianzi considerata può spezzarsi in una conica e in una seatica (di genere uno): basta a tal uopo che la quadrica la quale sega la  $M_3^8$  sul cono  $\Gamma^4$  passi per uno dei coni quadrici (di  $S_3$ ) contenuti in  $\Gamma^4$  medesimo. In questo caso speciale, proiettando  $\Delta^4$  dal piano di quella conica, si trova come sistema lineare rappresentante la  $M_3^8$  *il sistema delle superficie di 3.<sup>o</sup> ordine aventi a comune una sezione piana, e un punto ulteriore col relativo piano tangente.*

**9.** La superficie  $F^9$  di  $S_6$  rappresentata dal sistema delle curve piane di 9.<sup>o</sup> ordine con otto punti basi tripli contiene un fascio di cubiche  $\gamma$ , alle quali corrispondono, nel piano, le cubiche passanti per gli stessi 8 punti suddetti. Al nono punto base di quest'ultimo fascio corrisponde sopra  $F^9$  un punto semplice  $O$  (quello già indicato con  $O$  ai n.<sup>1</sup> 3 e segg.), dal quale  $F^9$  è proiettata in una rigata quartica doppia di  $S_3$ , con direttrice rettilinea. Il punto  $O$  è flesso per tutte le cubiche  $\gamma$ . La sezione iperpiana generica della superficie  $F^9$  è contenuta anch'essa in una rigata  $R^4$  con direttrice rettilinea; e, incontrando le generatrici di questa in 3 punti, appartiene (su  $R^4$ ) al sistema lineare somma di due sezioni iperpiane e della direttrice rettilinea; si può dunque ottenere come intersezione di  $R^4$  con una forma cubica passante per 3 sue generatrici. Quest'ultima relazione si trasporta immediatamente alla superficie  $F^9$  e alla varietà  $M_3^8$  di cui  $F^9$  è sezione generica. Pertanto:

La superficie  $F^3$  suddetta è intersezione del cono proiettante una rigata razionale normale  $R^4$  a direttrice rettilinea con una varietà cubica passante per tre arbitrari fra i piani generatori di quel cono. Il vertice del cono è il punto della superficie  $F^3$  già indicato con  $O$ ; per la varietà cubica considerata esso è punto semplice, e ha come spazio  $S_6$  tangente lo spazio determinato dai tre piani generatori del cono che sono contenuti nella varietà stessa; questo spazio contiene anche il piano direttore, il quale ha a comune colla  $F^3$  il solo punto  $O$ . Resta così confermato che  $O$  è punto di flesso per tutte le cubiche  $\gamma$ .

La varietà  $M_3^3$  di  $S_7$  che a noi interessa è contenuta nel cono  $\Gamma^4$  che proietta una rigata  $R^4$  con direttrice rettilinea da una retta  $s$  (non incidente allo spazio  $S_5$  della  $R^4$ ); incontra i piani di questo cono secondo coniche, e i suoi  $S_3$  secondo superficie cubiche  $\varphi^3$  passanti (semplicemente) per la retta  $s$ . Essa è intersezione del cono  $\Gamma^4$  con una varietà cubica  $V^3$  di  $S_7$  passante per tre di quegli spazi  $S_3$ ; questi  $S_3$  sono contenuti in un medesimo  $S_6$ , che è tangente alla varietà lungo l'intera retta  $s$ ; sicchè la varietà stessa avrà sopra  $s$  due punti doppi  $A, B$ , distinti o consecutivi, i quali saranno pure doppi per tutte le  $\varphi^3$ , e comuni alle  $\infty^2$  coniche contenute nella  $M_3^3$ . E poichè le sezioni piane delle  $\varphi^3$  hanno tutte un flesso nel punto in cui si appoggiano alla retta  $s$ , ciascuna delle  $\varphi^3$  avrà lungo questa retta un piano osculatore fisso (e non soltanto tangente): questi  $\infty^1$  piani formano fascio attorno ad  $s$ , entro lo spazio  $S_3$  direttore del cono  $\Gamma^4$  (ossia proiettante la direttrice rettilinea di  $R^4$ ).

Le superficie  $(F + F')$  sono di 6.<sup>o</sup> ordine, a sezioni di genere due, e si incontrano a due a due secondo coppie di coniche.

In ciascuno dei due punti  $A, B$  la varietà  $V^3$  ha un cono quadrico tangente, il quale contiene i tre spazi di superficie  $\varphi^3$  già contenuti in  $V^3$ ; la sua intersezione con  $M_3^3$ , all'infuori di queste stesse  $\varphi^3$  le quali insieme costituiscono una sezione iperpiana di  $M_3^3$ , sarà perciò una seconda sezione iperpiana di  $M_3^3$  stessa, e precisamente un cono di ordine 9 e genere 4, luogo di tutte le rette ulteriori delle  $\varphi^3$  (all'infuori di  $s$ ) uscenti rispett. da  $A$  e da  $B$ . Questi due coni, se distinti, s'incontrano secondo una loro comune sezione iperpiana.

Anche questa varietà  $M_3^3$  è razionale; e si può rappresentarla sopra  $S_5$  proiettandola da uno dei due punti  $A$  e  $B$  secondo un cono  $\Delta^4$  di  $S_6$  (sezione di  $\Gamma^4$ ), e proiettando a sua volta quest'ultimo cono da una retta e da un punto rispett. di due suoi piani generatori (\*).

---

(\*) C. SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*; Atti della R. Accad. di Torino, vol. 21 (1885). V. in partic. n.º 17 e seg.

Proiettando  $M_3^3$  sul cono  $\Delta^4$ , alle sue sezioni iperpiane corrispondono anche superficie  $F^3$ , aventi una comune sezione iperpiana  $\gamma^3$ ; le superficie  $\varphi^3$  vengono proiettate sui singoli piani del cono  $\Delta^4$ .

Da una trisecante della curva  $\gamma^3$  il cono  $\Delta^4$  si proietta in un cono quadrico di 2.<sup>a</sup> specie  $\Lambda$  di  $S_4$ ; le  $F^3$  considerate passanti per  $\gamma^3$  si proiettano secondo  $F^6$ , intersezioni di  $\Lambda$  con forme cubiche, le quali in quel punto della retta asse di  $\Lambda$  che è proiezione del vertice di  $\Delta^4$  hanno un tacnodo con piano tangente pure fisso. Tali  $F^6$  hanno inoltre a comune le 3 rette uscenti dal tacnodo, e una sezione iperpiana, proiezione di  $\gamma^3$ .

Infine il cono  $\Lambda$  si proietta univocamente su  $S_3$  da un suo punto generico (che supponiamo non appartenente al piano tacnodale delle  $F^6$ ). Alle  $F^6$  su di esso considerate corrispondono in  $S_3$  superficie  $\psi^6$  aventi a comune:

a) un punto quadruplo  $P$ , proiezione del tacnodo, con una retta doppia infinitesima ad esso infinitamente vicina, nel piano  $\alpha$  proiezione del piano tacnodale delle  $F^6$ ;

b) due rette triple infinitamente vicine uscenti da  $P$ , disposte secondo la traccia  $d$  di quel piano del cono  $\Lambda$  che passa per il centro di proiezione, e nel piano  $\beta$  traccia dello spazio tangente a  $\Lambda$  lungo il piano suddetto. Al punto  $P$  viene ad essere infinitamente vicina, di conseguenza, una seconda retta doppia infinitesima, in questo secondo piano ( $\beta$ ); e la retta  $d$  sarà l'intersezione  $\alpha\beta$ ;

c) tre rette uscenti da  $P$  e contenute nel piano  $\alpha$ , e una sestica di genere 4 contenuta in un cono quadrico tangente lungo la retta  $d$  al piano  $\beta$  (con vertice però generalmente distinto da  $P$ ), proiezioni degli analoghi elementi già comuni alle  $F^6$  del cono  $\Lambda$ .

Da questi elementi basi il sistema lineare  $\infty^7$  rappresentante la  $M_3^3$  è completamente individuato.

Per rappresentarlo analiticamente (in coordinate cartesiane), assumiamo  $P$  come origine e i piani  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente come piani  $x = 0$  e  $y = 0$ . Alle  $\infty^6$  sezioni iperpiane del cono  $\Delta^4$  (proiezioni di quelle sezioni di  $M_3^3$  che passano per il primo centro) corrispondono in  $S_3$  rigate cubiche aventi  $d$  come unica direttrice, il piano  $\beta$  come piano tangente fisso lungo di essa, e il piano  $\alpha$  come ulteriore piano tangente nel punto  $P$ . Questo sistema di rigate è rappresentato dall'equazione:

$$ax^2y + yz(b_1x + b_2y) + f(x, y) = 0$$

dove  $f$  è forma binaria cubica, a coefficienti tutti variabili. Queste rigate vanno



integrate col piano  $\alpha$  e col cono quadrico contenente la sestica base. Sia  $x^2 + y = 0$  l'equazione di quel cono (nel caso presente, cilindro), e  $\Phi = 0$  l'equazione del cono che dall'origine proietta questa sestica (\*). L'equazione cercata del sistema lineare  $\infty^7$  sarà allora :

$$x(x^2 + y) \left[ a x y + y z (b_1 x + b_2 y) + f(x y) \right] + \Phi = 0.$$

I sette parametri sono  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , e i quattro coefficienti di  $f$ .

Le  $\infty^3$  superficie ( $F + F'$ ) contenute nella  $M_3^3$  hanno per immagini i coni quadrici di vertice  $P$  tangenti al piano  $\beta$  lungo la retta  $d$ .

**10.** Segnaliamo un caso particolare, nel quale la rappresentazione della varietà  $M_3^3$  su  $S_3$  può assumere forma notevolmente semplice: il caso in cui la sestica base del sistema precedente si spezza in tre coniche, e perciò sulla  $M_3^3$  i coni di rette uscenti dai punti  $A$  e  $B$  si spezzano in tre coni cubici. Allora, e allora soltanto, le tre rette delle superficie  $\varphi^3$  uscenti sia da  $A$  che da  $B$  e distinte dalla  $AB$  sono anche fra loro razionalmente distinte. D'altra parte ogni  $\varphi^3$  può rappresentarsi sopra un piano, p. es. sul piano ad essa osculatore lungo la retta  $AB$ , per mezzo della proiezione sghemba (ossia della congruenza lineare di rette) che ha per direttrici due sue rette sghembe uscenti rispett. da  $A$  e da  $B$ . Nel caso presente, facendo variare con continuità queste due rette sulle singole  $\varphi^3$ , rappresenteremo l'intera varietà  $M_3^3$  sullo spazio  $S_3$  direttore del cono  $\Gamma^4$ . E poichè le sezioni piane delle  $\varphi^3$  hanno per immagini, nel piano corrispondente, cubiche aventi a comune, sia in  $A$  che in  $B$ , tre punti semplici consecutivi (in generale non allineati), così alle sezioni iperpiane della varietà  $M_3^3$  corrisponderanno le  $\infty^7$  superficie di 3.° ordine aventi in ciascuno dei punti  $A$  e  $B$  un contatto di 2.° ordine con una superficie fissa.

Facendo uso di coordinate proiettive omogenee, e supponendo che queste superficie cubiche abbiano contatti di 2.° ordine nei punti fondamentali [3] e [4] rispett. colle due quadriche :

$$x_3 x_4 + a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 = 0$$

$$x_3 x_4 + a' x_1^2 + 2b' x_1 x_2 + c' x_2^2 = 0$$

---

(\*) Il polinomio  $\Phi$  sarà del tipo  $k x^6 + x^4 y K_1 + x^2 y^2 K_2 + y^3 K_3$ , dove  $k$  è coefficiente numerico, e le  $K_i$  sono forme di grado  $i$  nelle tre coordinate  $x, y, z$ .

(le quali sono già fra loro tangenti in ciascuno di quei punti), il sistema lineare  $\infty^7$  rappresentante la  $M_3^2$  avrà per equazione:

$$\lambda x_3 (x_3 x_4 + a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2) + \mu x_4 (x_3 x_4 + a' x_1^2 + 2b' x_1 x_2 + c' x_2^2) \\ + x_3 x_4 f_1(x_1, x_2) + f_3(x_1, x_2) = 0$$

dove  $f_1$  e  $f_3$  sono forme binarie, rispett. di 1.<sup>o</sup> e di 3.<sup>o</sup> grado, in  $x_1, x_2$ ; gli otto parametri omogenei sono  $\lambda, \mu$ , e i coefficienti di queste due forme.

Le superficie  $(F + F')$  hanno per immagini le quadriche bitangenti:

$$x_3 x_4 + k_1 x_1^2 + 2k_1 x_1 x_2 + k_3 x_2^2 = 0$$

le quali s'incontrano a due a due secondo coppie di coniche.

**11.** Consideriamo ora in  $S_4$  una varietà  $M_3^4$  la cui sezione generica sia una  $F_4^{(2)}$  di NOETHER. Questa superficie ha due punti doppi infinitamente vicini, la cui congiungente  $l$  non appartiene ad essa, ma è tale che ogni piano passante per questa incontra la superficie secondo una quartica razionale avente un terzo punto doppio consecutivo ai due primi. La varietà  $M_3^4$  avrà pertanto due rette doppie infinitamente vicine  $d, d'$  (la seconda anzi tacnodale), le quali staranno in un piano. Infatti, se fossero sghembe, determinerebbero uno spazio  $S_3$ , nel quale sarebbero contenute tutte le rette del tipo  $l$ , formanti una congruenza lineare speciale; e ogni spazio  $S_3$  passante per  $d$  conterrebbe un fascio di rette  $l$ . Questi spazi  $S_3$  dovrebbero perciò incontrare la  $M_3^4$  secondo superficie razionali del 4.<sup>o</sup> ordine aventi  $d$  come (sola) retta doppia, e su questa, nel centro del fascio delle  $l$ , un oscnodo; il che non è possibile.

Il piano delle due rette doppie  $d, d'$  non apparterrà alla varietà  $M_3^4$ ; e ogni spazio  $S_3$  passante per esso incontrerà la  $M_3^4$  secondo una superficie  $\psi^4$  a curve sezioni razionali, avente tre rette doppie infinitamente vicine, e incontrata dai piani del fascio  $d$  secondo coniche (in generale) irriducibili. Queste superficie sono dunque particolari *superficie di STEINER*; ciascuna di esse ha, sulla retta  $d$ , un punto triplo, e le coniche segate su di essa dai piani passanti per  $d$  sono tutte tangenti a  $d$  nel punto triplo. Perciò:

o la  $M_3^4$  ha anch'essa sopra  $d$  un punto triplo  $A$ , che è pure tale per tutte le  $\psi^4$ ; tutte le  $\infty^2$  coniche della  $M_3^4$  sono allora tangenti alla retta  $d$  in questo punto, mentre in ogni altro punto di  $d$  la  $M_3^4$  ha un medesimo spazio tangente (doppio), pure fisso;

oppure le  $\infty^1$  superficie  $\psi^4$  hanno punto triplo variabile sopra  $d$ , e

ognuna di esse è luogo delle  $\infty^1$  coniche tangenti a  $d$  nel proprio punto triplo. Lo spazio di ogni  $\psi^4$  è allora tangente alla  $M_3^4$  nel punto triplo della  $\psi^4$  stessa; e la punteggiata  $d$  risulta riferita proiettivamente al fascio degli  $S_3$  (doppi) tangenti ad essa in quei singoli punti.

Nel 1.<sup>o</sup> caso il cono cubico tangente alla  $M_3^4$  nel punto triplo  $A$  deve incontrare la  $M_3^4$  secondo un cono di  $\infty^1$  rette uscenti da  $A$  stesso; e poichè le  $\psi^4$  di STEINER non contengono rette (all'infuori di quelle doppie), quelle  $\infty^1$  rette dovranno ripartirsi tra un numero finito ( $\leq 3$ ) di spazi  $S_3$  passanti per il piano  $dd'$ : vale a dire il cono cubico tangente in  $A$  alle  $M_3^4$  si comporrà di tre spazi di questo medesimo fascio, eventualmente non tutti distinti, e distinti in generale dallo spazio fisso tangente alla  $M_3^4$  lungo la retta  $d$ . Le  $\psi^4$  contenute in quegli spazi saranno degenerate in coni.

Dal punto  $A$  la  $M_3^4$  si proietta univocamente sopra uno spazio  $S_3$ ; alle sue sezioni iperpiane corrisponde un sistema lineare di superficie, anche queste del tipo  $F_4^{(2)}$ , rappresentato da un'equazione:

$$X_1 X_2 X_3 (a x + b y + c z + d) + \Phi = 0$$

dove  $\Phi$  è un polinomio che, eguagliato a zero, rappresenta una qualsiasi  $F_4^{(2)}$  del sistema, mentre le equazioni  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) rappresentano tre piani appartenenti al fascio di quelli che incontrano la superficie  $\Phi = 0$ , e perciò ogni altra del sistema, secondo quartiche con tre punti doppi consecutivi. Viceversa, ogni sistema lineare così fatto rappresenta una  $M_3^4$  del tipo richiesto.

**12.** Se invece le  $\infty^1$  superficie di STEINER contenute nelle  $M_3^4$  hanno punto triplo variabile, uno spazio  $S_3$  generico passante per la retta doppia  $d$  incontrerà la  $M_3^4$  secondo una superficie  $\varphi^4$  con retta doppia, ma senza punto triplo, luogo di  $\infty^1$  coniche tutte tangenti alla retta  $d$ . In questo spazio, ogni piano passante per  $d$  contiene una conica di  $\varphi_4$ , e per ogni punto di  $d$  ne passa anche una, ivi tangente a  $d$  stessa. Di queste coniche, *quattro* (generalmente distinte) si spezzeranno in due rette, uscenti da uno stesso punto di  $d$ ; e questi *quattro* punti ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ) saranno gli stessi per tutte quante le  $\infty^2$  superficie  $\varphi^4$ , perchè gli spazi (doppi) ivi tangenti alla  $M_3^4$  dovranno incontrare questa varietà secondo superficie di STEINER contenenti rette semplici, perciò degenerate, e, per conseguenza, fisse. Queste intersezioni saranno coni razionali di 4.<sup>o</sup> ordine aventi nella posizione  $d$  tre generatrici doppie consecutive.

Anche questa  $M_3^4$  è razionale, poichè le  $\infty^2$  coniche in essa contenute hanno la retta  $d$  come varietà unisecante.

Per rappresentarla sopra uno spazio  $S_3 \equiv \Sigma$  (contenuto nel precedente  $S_4$ , e non passante per  $d$ ), basta proiettare ciascuna delle sue  $\infty^1$  superficie di STEINER ( $\psi^4$ ) dal proprio punto triplo. Alle  $\psi^4$  corrispondono i piani di un fascio, avente per asse la traccia  $s$  del piano  $dd'$ ; alle superficie  $\varphi^4$  (aventi  $d$  come retta doppia), i piani di una stella, avente il centro  $O$  nella traccia della retta  $d$ ; e alle sezioni iperpiane generiche della  $M_3^4$ , superficie  $\chi^5$  del 5.º ordine. Invero, nella proiezione suindicata, i raggi proiettanti che si appoggiano a una retta generica  $r$  dello spazio  $\Sigma$  formano una rigata quadrica contenuta nello spazio  $dr$ ; e una sezione iperpiana generica della  $M_3^4$  è incontrata da questo spazio secondo una quartica piana con cuspidi, la quale colla quadrica anzidetta, ad essa tangente nella cuspidi, ha 5 intersezioni ulteriori. Poichè le  $\chi^5$  non hanno punti multipli a distanza finita da  $O$ , e d'altra parte esse sono incontrate dai piani per  $s$  (oltre che in  $s$  stessa) secondo quartiche aventi in  $O$  tre punti doppi consecutivi, e da un piano generico della stella  $O$  secondo quintiche di genere 2 (immagini delle quartiche piane di  $M_3^4$  appoggiate a  $d$ ), si conclude che le  $\chi^5$  avranno a comune:

- 1) Il punto  $O$ , che è per esse triplo;
- 2) Una retta doppia infinitesima, infinitamente vicina a questo punto, nel piano  $\omega$  traccia di quello spazio  $S_3$  che è tangente alla  $M_3^4$  nel punto  $O \equiv d\Sigma$ ;
- 3) Un secondo punto triplo  $O_1$ , infinitamente vicino ad  $O$  e contenuto nella precedente retta doppia infinitesima, più un'ulteriore retta doppia infinitesima consecutiva ad  $O_1$ ;
- 4) La retta  $OO_1 \equiv s$ , e quattro quartiche contenute in piani per essa, tracce rispetti. dei quattro coni razionali del 4.º ordine contenuti nella  $M_3^4$ .

La singolarità complessiva presentata da questa superficie nell'intorno del punto  $O$  è esplicitamente enumerata dal PENZA fra quelle che rendono razionale una superficie del 5.º ordine (\*). E già prima superficie di questo tipo erano state considerate dal sig. MONTESANO (\*\*).

(\*) *Sulle superficie razionali del 5.º ordine*; Ann. di Matem. (3), vol. 6 (1901), p. 249, n.º 20. È il caso  $IV_2$ : punto triplo, al quale sia infinitamente vicina una retta doppia del tipo  $III_7$ .

(\*\*) *Su alcune superficie omaloidiche di 4.º e 5.º ordine prive di linee multiple*; Rend. Accad. di Napoli, adun. 23 giugno 1900. Queste superficie sono rappresentate sul piano da un sistema lineare di curve di 8.º ordine aventi a comune:

- 1) Un punto quadruplo  $A$ , nove punti doppi  $B_1, B_2, \dots, B_9$ , e due punti semplici

Le superficie  $(F + F')$  della varietà  $M_3^4$  (ossia le  $\varphi^4$  con retta doppia) hanno per immagini in  $S_3$  i piani della stella  $O_1$ .

**13.** Segnaliamo anche qui qualche caso particolare, che consente rappresentazioni più semplici della  $M_3^4$  sullo spazio  $S_3$ .

Se dei 4 coni razionali di 4.<sup>o</sup> ordine contenuti nella varietà  $M_3^4$  uno si spezza in due coni quadrici (fra loro osculatori lungo la generatrice  $d$ ), a sua volta una delle quattro quartiche comuni alle superficie  $\chi^5$  si spezzerà in due coniche osculatrici nel punto  $O$ . Il sistema omaloidico formato dalle quadriche che passano per una di queste coniche ( $\sigma$ ) e toccano in  $O$  il piano  $\omega$  consente allora di trasformare il sistema lineare  $|\chi^5|$  in un sistema di superficie del 4.<sup>o</sup> ordine  $f^4$  con retta doppia, aventi a comune questa stessa retta doppia e tre coniche contenute in piani per essa (\*). Infatti la conica intersezione variabile di due quadriche del sistema suddetto ha a comune colle superficie  $\chi^5$  tre punti coincidenti in  $O$ , due altri pure coincidenti nel punto consecutivo ad  $O$  (che appartiene alla prima retta doppia infinitesima delle  $\chi^5$ ), e ancora uno nella sua seconda intersezione colla conica  $\sigma$ : rimangono perciò solo quattro intersezioni variabili. Alle quartiche razionali intersezioni delle superficie  $\chi^5$  coi piani del fascio  $s$  corrispondono le coniche delle superficie  $f^4$ , tre delle quali saranno comuni a queste ultime. Le  $f^4$  hanno inoltre un contatto di 2.<sup>o</sup> ordine in un punto fisso della retta doppia (\*\*).

consecutivi  $C, C'$ , tutti appartenenti a una cubica, la quale è perciò curva fondamentale del sistema lineare; inoltre questi stessi punti devono soddisfare, sulla cubica, a particolari relazioni che qui non interessa precisare;

2) Un punto ulteriore  $C''$  consecutivo a  $C$  e  $C'$ , ma non appartenente alla cubica fondamentale;

3) Quattro punti semplici appartenenti a una retta passante per  $A$ .

(\*) Questa trasformazione fu già considerata dal signor MONTESANO: l. c., n.° 7.

(\*\*) Infatti l'intersezione residua di due  $f^4$  aventi a comune la retta doppia e tre coniche (in piani per quella retta) è una sestica di genere 4. Dovendo questa, nel caso presente, ridursi al genere 3, avrà un punto doppio fisso. D'altra parte dalla trasformazione cremoniana considerata emerge (MONTESANO, l. c.) che le  $f^4$  ottenute hanno a comune un elemento ulteriore della retta doppia; è questo, con quelli ad esso infinitamente vicini, pure comuni, che dà origine al punto doppio delle sestiche. — Considerando gli elementi di superficie appartenenti a una retta fissa come punti di una quadrica (e precisamente i sistemi di elementi che hanno a comune il punto o il piano come i due sistemi di generatrici), le rette doppie sovrapposte delle superficie  $f^4$  appaiono come quartiche ellittiche di questa quadrica, aventi a comune un gruppo di otto elementi associati (che implicano cioè soltanto 7 condizioni distinte); sei di questi appartengono rispettivamente alle 3 coniche basi; i rimanenti due coincidono nell'elemento ulteriore dianzi considerato.

Questa rappresentazione della  $M_3^4$  mediante superficie di 4.º ordine si può ottenere direttamente, valendosi delle quadriche di  $S_4$  che passano per uno dei due coni quadrici contenuti nella  $M_3^4$  stessa, e sono inoltre tangenti a questa lungo l'intera retta  $d$ . Tali quadriche segano infatti sulla  $M_3^4$  un sistema lineare  $\infty^3$  di superficie, completo, e a intersezioni variabili razionali (\*); dunque omaloidico.

Più particolarmente ancora, se sulla  $M_3^4$  tutti quattro i coni di 4.º ordine si spezzano in coni quadrici osculatori, e, per conseguenza, tutte tre le coniche basi del sistema lineare  $f^4$  si spezzano in coppie di rette, il sistema omaloidico delle rigate cubiche aventi la stessa retta doppia delle  $f^3$  e come generatrice una retta di ciascuna delle tre coppie suddette permette di ridurre il sistema  $|f^4|$  a un sistema di superficie del 3.º ordine, aventi a comune una retta, quattro punti contenuti in un medesimo piano, e i piani tangenti in questi punti: nel piano dei quattro punti, i punti stessi, le tracce dei loro piani tangenti, e la traccia della retta base sono i nove elementi basi di un fascio di cubiche. Alle superficie  $(F + F')$  della  $M_3^4$  corrispondono le quadriche passanti per la retta base e per la conica che contiene i quattro punti base e si appoggia a questa retta.

**14.** Dobbiamo ora esaminare se possa presentarsi l'eventualità di cui alla lettera c) del n.º 2; vale a dire se il sistema  $|F + F'|$ , quando non sia composto mediante una congruenza di linee, possa tuttavia appartenere a una involuzione  $\mathbf{I}_k$  della varietà  $M_3^4$ .

Supponiamo che ciò avvenga, e consideriamo il sistema  $\Gamma$  formato dalle  $\infty^3$  rette che congiungono a due a due i punti di ogni singolo gruppo dell'involuzione  $\mathbf{I}_k$  (o eventualmente di quella involuzione irriducibile di ordine inferiore, mediante la quale  $\mathbf{I}_k$  fosse composta). Supponiamo inoltre, se possibile, che ogni iperpiano dello spazio  $S_4$  contenga qualche retta, e perciò una semplice infinità di rette del sistema  $\Gamma$ . La curva sezione della  $M_3^4$  con un  $S_{r-2}$  generico passante per una retta di  $\Gamma$  conterrà una coppia di punti la quale, se tale curva ha genere  $\geq 2$ , imporrà una sola condizione a un gruppo canonico obbligato a contenerla; tale curva è dunque certo iperellittica (in particolare ellittica o razionale, se ha genere  $< 2$ ). Di più, la curva

---

(\*) Invero, due qualunque di quelle quadriche si incontrano ulteriormente secondo una quadrica di  $S_3$ , tangente lungo la  $d$  alla  $\varphi^4$  intersezione di  $M_3^4$  con questo medesimo  $S_3$ ; e l'intersezione di queste due superficie, prescindendo dalla  $d$ , da contarsi *tre* volte, e da una ulteriore retta, generatrice del cono quadrico scelto sopra  $M_3^4$ , è una quartica razionale.

stessa avrà il genere certo inferiore a quello ( $p$ ) della curva-sezione più generale; perchè nell'ipotesi contraria le superficie  $(F + F')$  segherebbero su di essa la sola serie canonica, e pertanto, essendo questa serie (poichè si tratta di curva iperellittica) composta mediante una  $g_2^1$ , ogni coppia di tale  $g_2^1$  imporrebbe alle  $(F + F')$  una sola condizione, e sarebbe perciò contenuta in un gruppo di  $\mathbf{I}_k$ ; per conseguenza ogni  $S_{r-2}$  passante per una retta del sistema  $\Gamma$  dovrebbe contenere  $\infty^1$  di cotali rette, il che non è possibile. — Consideriamo ora, sulla superficie  $F$  intersezione di  $M^3$  con un iperpiano generico  $\sigma$ , queste curve segate da spazi  $S_{r-2}$  passanti per rette del sistema  $\Gamma$ ; avendo esse genere  $< p$ , i loro spazi  $S_{r-2}$  o saranno tutti tangenti a  $F$ , oppure passeranno per qualche punto multiplo proprio; e qui si tratterà certamente di questo secondo caso. Gli spazi  $S_{r-2}$  considerati sono dunque, entro  $\sigma$ , quelli che passano per un certo punto  $P$ , o per uno fra più punti isolati; e per quel punto, o rispett. per uno fra questi, dovrà passare ogni retta del sistema  $\Gamma$  contenuta in  $\sigma$ . Inoltre:

1) *La superficie  $F$  non può proiettarsi univocamente dal suo punto  $P$ .* Invero, in caso contrario, la proiezione sarebbe una superficie anche normale, a curve sezioni iperellittiche, normali esse pure, e avente una linea doppia (certo esistente, perchè luogo delle traccie delle rette del sistema  $\Gamma$  passanti per  $P$ , le quali tutte contengono coppie dell'involuzione  $\mathbf{I}_k$ ). L'esistenza di questa linea doppia esclude che le sezioni possano avere genere  $< 2$ ; esse saranno perciò di genere  $\pi \geq 2$ , e con (almeno) un punto doppio  $P_0$ , nel quale sono sovrapposti due elementi semplici, generalmente distinti fra loro sulla curva, e coniugati nella  $g_2^1$  (poichè a un gruppo canonico essi certamente impongono un'unica condizione). Per una curva di questo tipo valgono le tre deduzioni seguenti: *a)* essendo essa normale e con punto doppio, la sua proiezione da questo punto è curva speciale; ma speciale e iperellittica ad un tempo, dunque una curva razionale doppia, ossia la curva considerata è proiettata da  $P_0$  doppiamente e secondo un cono razionale normale; *b)* invece da un numero conveniente di suoi punti generici la stessa curva è proiettata in una curva piana di un certo ordine  $k$  e con punto  $(k - 2)^{plo}$ , la quale è di genere  $\pi$  e normale soltanto se  $\pi = k - 2$ , vale a dire se non ha ulteriori punti doppi, e se perciò non ne aveva la curva primitiva, all'infuori di  $P_0$ ; *c)* quest'ultima conclusione è manifestamente incompatibile col fatto che i due elementi sovrapposti in  $P_0$  devono essere in generale distinti e coniugati nella  $g_2^1$  esistente sulla curva; richiedendosi a tal uopo che si abbiano due rami distinti passanti per  $P_0$  e con una stessa tangente, vale a dire un secondo punto doppio infinitamente vicino a  $P_0$ .

2) La proiezione della superficie  $F$  dal punto  $P$  non può nemmeno essere multipla di ordine  $x > 2$ . Infatti il sistema lineare delle sezioni iperpiane di  $F$  passanti per  $P$  ha la serie caratteristica completa, e contenente parzialmente la  $g_2^1$  di ogni singola curva del sistema (perchè ne contiene qualche coppia, costituita da punti appartenenti a rette di  $\Gamma$ ), senza che la serie residua (se  $x > 2$ ) si riduca a un gruppo di punti fisso: quella serie caratteristica ha dunque dimensione  $\geq 2$ , e il sistema lineare suddetto è almeno  $\infty^3$ . Consideriamo ora le sezioni determinate dagli iperpiani che contengono una retta generica uscente da  $P$ : esse formeranno un sistema lineare ancora completo, di dimensione  $\geq 2$ , certo sovrabbondante (perchè dotato di punti basi costituenti condizioni non indipendenti), perciò a serie caratteristica speciale, e composta per conseguenza, sopra ogni curva del sistema, mediante la relativa  $g_2^1$ . Ora questa serie, per essere completa, deve comprendere tutti i gruppi di un determinato numero di coppie della  $g_2^1$ ; non può dunque essere composta in pari tempo mediante gruppi di  $x > 2$  elementi.

3) La superficie  $F$ , se di ordine  $n$  e contenuta in  $S_3$ , avrà pertanto il punto  $P$  come multiplo di ordine  $n - 2$ ; e se appartiene a uno spazio superiore, si proietterà da un conveniente numero di suoi punti generici in una superficie consimile. Sopra questa, il sistema aggiunto alle sezioni piane è segato dalle aggiunte  $\varphi^{n-3}$ , le quali sono monoidi, aventi il punto  $P$  come  $(n - 4)^{plo}$  (e non sono certo coni, se no quell'aggiunto apparterebbe a una involuzione sopra  $F$ ). Dal punto  $P$  escono però  $\infty^1$  rette del sistema  $\Gamma$ , o proiezioni di queste, per ciascuna delle quali le due intersezioni ulteriori con  $F$ , generalmente distinte, impongono alle  $\varphi^{n-3}$  una condizione unica. In altri termini, il passaggio per una di queste rette implica per le  $\varphi^{n-3}$  una sola condizione; il che vuol dire che le  $\varphi^{n-3}$  contengono già tutte una direttrice fissa del cono formato da quelle rette, direttrice eventualmente anche infinitamente vicina a  $P$  (se questo cono fosse tangente in  $P$  a tutte le  $\varphi^{n-3}$ ), ma in ogni caso non appartenente ad  $F$ . Che ciò non sia possibile, se quest'ultima linea non è infinitamente vicina a  $P$ , si vede molto facilmente; ma l'ipotesi contraria esige un esame un po' più approfondito, che ora faremo, e in modo valido per ambo i casi.

**15.** Sopra una sezione piana generica di  $F$ , le superficie  $\varphi^{n-3}$  (e così anche le sezioni loro col piano della curva stessa) segnano la serie canonica completa. Se però si considera una sezione passante per qualche punto multiplo proprio (e tale è  $P$ ), perciò di genere inferiore, la serie segnata su di



essa può essere più ampia della relativa serie canonica, e eventualmente anche incompleta.

Nel caso presente, un piano generico per  $P$  incontra  $F$  secondo una curva di ordine  $n$  avente  $P$  come punto  $(n-2)^{2^0}$ ; e incontra le  $\varphi^{n-3}$  secondo curve di ordine  $n-3$ , le quali hanno in  $P$  la molteplicità  $n-4$ , passano semplicemente per gli eventuali punti doppi della prima curva (sia a distanza finita che infinitamente vicini a  $P$ ), e dovrebbero avere almeno un punto base ulteriore (anche questo eventualmente consecutivo a  $P$ ) non appartenente alla prima curva. Un calcolo semplicissimo (\*) mostra pertanto che la serie determinata dalle  $\varphi^{n-3}$  sulla sezione considerata di  $F$  sarebbe incompleta.

Questo invece non è possibile. E precisamente: *Se un sistema lineare  $|\gamma|$  di curve piane (nel nostro caso, il sistema che rappresenta la superficie  $F$ ) ha una curva fondamentale connessa  $\eta$  (immagine del punto  $P$ ), il sistema aggiunto ad esso segna sopra una curva residua generica  $\gamma - \eta$  una serie lineare ancora completa (\*\*).*

Invero, poichè la curva fondamentale  $\eta$ , immagine del punto  $P$ , è connessa, se essa è riducibile, le sue parti irriducibili dovranno potersi disporre in un ordine  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i$  tale che ogni  $\eta_h$  ( $h < i$ ) abbia coll'insieme  $(\eta_{h+1}, \dots, \eta_i)$  qualche punto comune che non sia base per  $|\gamma|$ . Allora, indicando con  $m$  l'ordine delle  $\gamma$ , e con  $k$  il numero delle intersezioni, fuori dei punti basi di  $|\gamma|$ , della curva  $\eta$  con una  $\gamma - \eta$  generica, è noto che, per una curva di ordine  $m-3$ , l'obbligo di essere aggiunta alle  $\gamma$  e di passare per di più per i  $k$  punti comuni a  $\eta$  e a una  $\gamma - \eta$  implica condizioni lineari

(\*) Infatti, se la sezione considerata sopra  $F$  ha, fuori di  $P$ , ancora  $d$  punti doppi, la serie lineare ottenuta su di essa avrà ordine

$$n(n-3) - (n-2)(n-4) - 2d = 3n - 8 - 2d$$

e dimensione certo inferiore a

$$\frac{(n-3)n}{2} - \frac{(n-4)(n-3)}{2} - d = 2n - 6 - d$$

poichè gli ulteriori punti basi, comuni alle  $\varphi^{n-3}$  e non appartenenti alla sezione considerata di  $F$ , trattandosi di curve razionali, impongono certe nuove condizioni in più. La serie, sopra una curva di genere  $n-2-d$ , è dunque incompleta.

(\*\*) Si avrebbe invece sulla curva residua una serie incompleta quando si staccassero da  $|\gamma|$  due diverse curve fondamentali, ossia si considerasse sopra  $F$  una sezione passante per due diversi punti multipli propri.

delle quali precisamente *una* è conseguenza delle rimanenti (\*). In altri termini, per una aggiunta di  $|\gamma|$ , il passaggio per i  $k$  punti ulteriori suddetti equivale a sole  $k - 1$  condizioni distinte. D'altra parte, poichè tra le aggiunte di  $|\gamma|$  vi sono tutte le curve composte di  $\pi$  e di una  $(\gamma - \pi)$  (ossia di una aggiunta alle  $\gamma - \pi$ ), la serie segnata dalle  $\gamma'$  sopra una  $\gamma - \pi$  generica deve ridursi alla serie canonica di quest'ultima curva togliendone i  $k$  punti dianzi considerati: indicando pertanto con  $p_1$  il genere delle  $\gamma - \pi$ , quella prima serie avrà ordine  $2p_1 - 2 + k$  e dimensione  $(p_1 - 1) + (k - 1) = p_1 - 2 + k$ : essa è dunque completa, e. s. v. d.

Rimane pertanto escluso che l'involuzione  $\mathbf{I}_k$  nella varietà  $M_3^n$  sia tale che ogni iperpiano contenga la retta congiungente almeno una sua coppia di punti.

**16.** Supponiamo adesso invece (cfr. n.º 13) che un iperpiano generico di  $S_r$  non contenga rette del sistema  $\Gamma$ . Vi saranno allora  $\infty^{r-1}$  iperpiani, ciascuno dei quali conterrà una doppia infinità di tali rette; e questi incontreranno la varietà  $M_3^n$  secondo superficie contenenti  $\infty^2$  gruppi (totali o parziali) dell'involuzione  $\mathbf{I}_k$ , e sulle quali perciò il sistema aggiunto alle sezioni iperpiane appartiene pur esso a una involuzione. Lo stesso ragionamento già usato al n.º 3 permette anche qui di concludere che il sistema  $\Gamma$  si comporrà di rette passanti per un punto fisso  $O$ ; gli iperpiani che contengono rette di questo sistema saranno quelli che passano per  $O$ ; e le superficie loro intersezioni colla  $M_3^n$  saranno perciò ancora razionali (\*\*). *Tali super-*

(\*) NOETHER, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*; Acta Mathem., vol. 8 (1886), p. 161. La proposizione di cui facciamo uso non è esplicitamente enunciata come a noi occorre, ma risulta molto chiaramente dalle considerazioni del n.º 10. Imponendo a una curva di essere aggiunta alla somma  $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_i + (\gamma - \pi)$  in tutti i punti che le singole parti hanno a comune a due a due, si hanno condizioni fra le quali  $i$  sono conseguenze delle rimanenti. Queste possono anzi distribuirsi in  $i$  gruppi, entro ciascuno dei quali *una* delle condizioni stesse sia conseguenza delle altre; e abbandonando la condizione già posta per quelle intersezioni delle  $\pi_i$  che cadono fuori dei punti basi di  $|\gamma|$ , si viene a escludere in ciascuno dei primi  $i - 1$  gruppi una o più condizioni, tali sempre che quelle che rimangono siano indipendenti. La curva  $\pi$  può anche avere componenti multiple; le componenti irriducibili sovrapposte vanno allora considerate come componenti distinte, le quali (nei riguardi della connessione) abbiano punti comuni anche fuori dei punti basi di  $|\gamma|$ .

(\*\*) Trattandosi di superficie-sezioni *particolari*, era presumibile che queste potessero essere anche *irregolari*, e perciò (nel caso presente) riferibili a rigate irrazionali. Ma quest'ipotesi rimane ora esclusa, poichè quelle superficie formano un sistema lineare  $\infty^{r-1}$ , a intersezioni manifestamente irriducibili.

ficie devono dunque appartenere a uno dei tipi determinati al n.º 6, tutti a curve-sezioni di genere 3 o 4; e l'involuzione  $\mathbf{I}_k$  è di 2.º ordine. Inoltre, poichè ogni curva-sezione della varietà  $M_3^2$  è congiunta ad  $O$  da un iperpiano il quale deve incontrare quella varietà secondo una superficie di uno dei tipi indicati, la superficie sezione generica della varietà  $M_3^2$  avrà anch'essa le curve sezioni di genere 3 o 4, pur avendo come aggiunto a queste sezioni un sistema lineare semplice; e dovrà ridursi come caso particolare — se l'iperpiano secante passa per  $O$  — a una delle superficie indicate alla fine del n.º 6.

Ora le superficie razionali a curve-sezioni di genere 3 sono tutte note; e la rete delle quartiche aggiunte a queste sezioni è semplice nel solo caso in cui queste quartiche sono razionali. Queste superficie non possono pertanto ridursi come caso particolare a una di quelle del n.º 6, sulle quali le aggiunte delle sezioni piane hanno genere  $\cong 1$ .

Rimane il caso del genere 4. Le superficie sezioni generiche della varietà  $M_3^2$  saranno allora superficie razionali a sezioni di genere 4, aventi il sistema aggiunto (che è  $\infty^3$ ) semplice e di genere  $\cong 2$  (così essendo per quelle incontrate al n.º 6); tale aggiunto sarà anzi certo di genere  $\cong 3$ , perchè, se fosse di genere 2 (e semplice), sarebbero razionali le seconde aggiunte, mentre queste sulle superficie del n.º 6 sono ellittiche. Le (prime) aggiunte sono dunque sestiche, non piane, perciò di genere 3 o 4, certo appartenenti a spazi  $S_3$ .

L'intersezione della varietà  $M_3^2$  con un  $S_{r-1}$  generico passante per il punto  $O$  avrà dunque anch'essa le sestiche aggiunte alle sue sezioni iperplane contenute in spazi  $S_3$ . Ora, fra le superficie proiezioni della  $F^9$  considerata alla fine del n.º 6, due soltanto (come immediatamente si verifica) godono di questa proprietà: la superficie di 6.º ordine di  $S_4$  (con tacnodo) proiezione della  $F^9$  da una retta contenuta nel piano di una sua cubica, e la superficie di 5.º ordine di  $S_3$  proiezione della precedente da un suo punto semplice. La varietà  $M_3^2$  sarà dunque o di 6.º ordine, in  $S_3$ , oppure di 5.º ordine, in  $S_4$ , avendo rispett.º le due superficie testè indicate come intersezioni con un iperpiano generico passante per  $O$ . Di questi due casi possiamo limitarci a esaminarne uno, p. es. il primo ( $M_3^6$  di  $S_3$ ), dal quale ogni varietà del secondo tipo, supposta esistente, dovrebbe potersi ottenere come proiezione (\*).

(\*) Questo secondo tipo sarebbe una  $M_3^5$  di  $S_4$ , la cui superficie-sezione — prescindendo da altre singolarità — avrebbe due rette doppie infinitamente vicine e complanari; la  $M_3^5$  avrebbe dunque due piani doppi infinitamente vicini, contenuti in uno spazio  $S_3$ . I coni qua-

— Sulle  $F^6$  di  $S_4$  sezioni generiche di questa  $M_3^6$  le aggiunte delle sezioni iperpiane — essendo contenute in spazi  $S_3$  — saranno a loro volta particolari sezioni iperpiane; avranno dunque genere certo inferiore a 4, e perciò eguale a 3. Più precisamente, saranno queste le sezioni della  $F^6$  passanti per un certo punto doppio (al quale, affinché la superficie sia razionale, dovrà essere successiva, nell'intorno di un certo ordine, una retta doppia infinitesima); la  $M_3^6$  avrà perciò una retta doppia  $d$  (anzi tacnodale, o di tipo analogo), e le superficie  $(F + F')$  saranno segate su di essa dagli spazi  $S_4$  passanti per tale retta doppia. Si tratta pertanto di vedere se questo sistema  $|F + F'|$  possa appartenere a una involuzione di ordine 2; vale a dire se la  $M_3^6$  possa proiettarsi doppiamente dalla sua retta  $d$  (\*).

Ora, da un punto generico di questa retta doppia, la  $M_3^6$  si proietta in una  $M_3^4$  di  $S_4$ , a curve-sezioni di genere 3, e le cui superficie-sezioni saranno perciò di uno dei tipi  $F_4^{(1)}$ ,  $F_4^{(2)}$  o  $F_4^{(3)}$  di NOETHER (\*\*), già più volte nominati (il caso del punto triplo si esclude facilmente); e va anche escluso il caso della  $F_4^{(2)}$ , perchè questa superficie non contiene rette passanti pel punto doppio, mentre invece una deve certo esservene, immagine del centro di proiezione (che è doppio e uniplanare per ogni  $F^6$  passante per esso). La  $M_3^4$  sarà dunque proiezione di una delle varietà considerate ai n.° 8-9; avrà perciò anch'essa una retta doppia tacnodale o di analoga natura, e sopra questa almeno un punto triplo (due, distinti o coincidenti (\*\*\*)). La  $M_3^6$  considerata è dunque tale che da ogni punto della sua retta  $d$  esce anche una retta, avente come traccia sullo spazio  $S_4$  della  $M_3^4$  il punto triplo di quest'ultima, e dalla quale essa  $M_3^6$  è proiettata univocamente sopra  $S_3$ ; questa

---

drici (tutti di 2.<sup>a</sup> specie) passanti per questi due piani (ossia passanti per il piano doppio e tangenti in ogni punto di esso allo spazio  $S_3$  anzidetto) segano sulla  $M_3^5$  un sistema di superficie contenente quello delle sezioni iperpiane, e di grado 6, perciò certo composto ancora di superficie razionali; questo sistema rappresenta la  $M_3^6$  di  $S_5$  della quale la  $M_3^5$  è proiezione.

(\*) Su questa retta starebbe naturalmente il punto già indicato con  $O$ .

(\*\*) V. la Mem. cit.: *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*, Math. Ann., vol. 33 (1889), p. 546.

(\*\*\*) Da considerazioni ulteriori si trae che la sola superficie di 4.<sup>o</sup> ordine soddisfacente alle condizioni qui richieste (vale a dire le cui sezioni piane siano le aggiunte di un sistema di sestiche, e tali ancora che queste sestiche contengano tutte una sola serie  $g_3^1$ , come è detto alla fine del n.° 6) è una particolare superficie con tacnodo, caratterizzata dall'aver lungo una delle rette uscenti dal tacnodo un piano tangente fisso, il quale è pure tangente ad essa lungo una seconda retta. La  $M_3^4$  avente questa superficie come sezione generica ha i suoi due punti tripli (appartenenti alla retta doppia) infinitamente vicini.

retta, certo multipla, non può variare con quel punto della retta  $d$ , e deve perciò necessariamente coincidere colla retta  $d$  stessa.

Non è dunque possibile che la  $M_3^2$  sia proiettata doppiamente dalla sua retta singolare, e rimane perciò esclusa anche l'ipotesi contemplata al principio di questo n.º

**17.** Ci rimane ancora da dare, infine, la dimostrazione di cui alla lettera  $d$ ) del n.º 2; dobbiamo cioè dimostrare che in nessun caso, nella proposta varietà  $M_3^2$ , il sistema di superficie  $|F + F'|$ , se di grado 3 e a intersezioni variabili ellittiche, può rappresentare una varietà priva di punti doppi. In altri termini, si tratta di verificare che sopra una  $V^3$  di  $S_4$  priva di punti doppi non esiste un sistema lineare semplice di superficie razionali  $\Phi$ , tali che il sistema  $|\Phi + \Phi'|$ , depurato, come abbiamo supposto, delle eventuali parti fisse, coincida col sistema delle sezioni iperpiane; vale a dire tali che il sistema doppio  $|2\Phi|$  abbia queste stesse sezioni per aggiunte (pure).

Supponiamo che esistano sopra  $V^3$  superficie  $\Phi$  così fatte: sappiamo che esse saranno intersezioni complete di  $V^3$  con varietà di un certo ordine  $m$  (\*). Le intersezioni variabili di queste superficie  $\Phi^{3m}$  saranno curve di genere 5 (essendo il sistema  $|\Phi + \Phi'|$  di dimensione 4), sulle quali gli iperpiani di  $S_4$  segano la serie canonica; perciò di ordine 8 (così dette «curve canoniche» di genere 5).

Dico anzitutto che il numero  $m$  (certo  $> 1$ ) non può essere eguale a 2. Infatti, se fosse  $m = 2$ , le  $\Phi$  sarebbero superficie di 6.º ordine segate sopra  $V^3$  da certe quadriche  $Q$ , e aventi a comune una linea di 4.º ordine, eventualmente riducibile. Tali  $\Phi^6$  non avrebbero linea doppia; invero questa linea, certo comune ad esse, potrebbe essere soltanto una retta, e le  $Q$  dovrebbero allora essere tutte tangenti a  $V^3$  lungo una retta fissa; cosa possibile solamente se  $V^3$  ha un punto doppio e se la retta considerata passa per

---

(\*) FANO, *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, Atti della R. Accad. di Torino, vol. 39 (1904); SEVERI, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, Rend. R. Accad. dei Lincei (5), vol. 15<sub>2</sub> (1906), p. 691. — Sopra una  $V^3$  di  $S_4$  il sistema delle sezioni iperpiane è l'aggiunto del sistema di superficie di ordine 9 segato dalle forme cubiche; ma questo secondo sistema non è doppio di alcun altro. Potrebbe però esistere un sistema di superficie, con punti o linee singolari, doppio di un altro e perciò segato da varietà di ordine pari  $2m (\geq 4)$ , il cui aggiunto si componga di una parte fissa, segata da una varietà di ordine  $2m - 3$ , e di una sezione iperpiana variabile; ed è appunto quest'eventualità che bisogna esaminare.

questo punto (unico caso nel quale gli spazi tangenti a  $V^3$  nei punti di una retta formano fascio, o in particolare coincidono, come avviene per una quadrica). — D'altra parte la curva di 4.<sup>o</sup> ordine comune alle  $\Phi^6$  è di genere (virtuale) *uno*, sezione iperpiana comune di tutte le superficie intersezioni delle quadriche  $Q$  a due a due (e base di un fascio di quadriche di  $S_3$ ). Per questa linea (anche se riducibile, o avente parti multiple) passano (precisamente)  $\infty^6$  quadriche di  $S_4$ , e perciò, entro  $V^3$ , altrettante superficie  $\Phi^6$ , tuttavia ancora di genere uno, formanti un sistema di grado 8; e sopra ogni  $C_5^8$  intersezione variabile di due  $\Phi^6$  la serie caratteristica è la  $g_8^4$  canonica. Il sistema  $|\Phi|$  che a noi occorre non può essere questo, perchè composto di superficie non razionali. E nemmeno può essere un sistema di dimensione 5 o 4 contenuto nel precedente; perchè la serie caratteristica sopra una  $C_5^8$  potrebbe soltanto ridursi a una  $g_7^3$ , oppure a una  $g_6^2$  o  $g_5^2$ , il che significa l'aggiunta di un nuovo punto base semplice, oppure di due, eventualmente con un terzo conseguenza dei primi, e ciò non è ancora sufficiente a rendere razionale la superficie generica del sistema. In sostanza, non si può rendere razionale questa superficie senza diminuire il genere della curva caratteristica.

Sia invece  $m \geq 3$ . Sulle superficie  $\Phi^{3m}$  il sistema lineare caratteristico di  $|\Phi|$ , essendo composto di curve di ordine 8, non potrà certo contenere il proprio aggiunto (puro), che è segato dagli iperpiani, ed è perciò di ordine  $3m \geq 9$ . Il genere  $\pi$  di quest'ultimo sistema soddisfa dunque alla disuguaglianza (\*):

$$\pi < 2 \cdot 5 - k - 1$$

dove  $k$  è la dimensione *virtuale* del sistema lineare caratteristico sopra una  $\Phi^{3m}$ . Ora quest'ultimo carattere è la differenza fra la dimensione effettiva del sistema, che è  $\geq 3$ , e la sovrabbondanza, cioè l'indice di specialità della serie caratteristica. E questa serie, che è almeno  $\infty^2$ , se speciale e perciò contenuta nella  $g_8^4$  canonica, può essere soltanto una  $g_7^3$  o  $g_6^2$  (con indice di specialità *uno*), o tutt'al più una  $g_5^2$ , con indice di specialità *due*: caso però che si esclude facilmente. Invero la  $M_5^3$  proposta sarebbe allora di 5.<sup>o</sup> ordine, in  $S_4$ , a curve-sezioni di genere 5, dunque con piano doppio (prescindendo dalle singolarità ulteriori, necessarie a rendere razionali le superficie sezioni); le sue sezioni conterrebbero perciò un fascio di cubiche ellittiche, alle quali,

---

(\*) CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, Mem. della R. Accad. di Torino (2), t. 42 (1891), n.° 29.

sulle  $\Phi^{3m}$  di  $V^3$  immagini di quelle sezioni, corrisponderebbero anche cubiche (\*). Tali  $\Phi^{3m}$ , essendo luoghi di  $\infty^1$  cubiche piane, potranno dunque segarsi sopra  $V^3$  mediante le varietà, necessariamente di ordine  $m$ , luoghi (serie razionali  $\infty^1$ ) dei piani di quelle cubiche; varietà che, se  $m \geq 3$ , non sono normali, sicchè non sarebbero allora normali nemmeno le  $\Phi^{3m}$  anzidette. E ciò contraddice all'ipotesi che, sopra una  $\Phi^{3m}$ , il sistema delle sezioni iperpiane sia l'aggiunto di altro sistema lineare (il sistema caratteristico di  $|\Phi|$ ), e perciò completo.

Nella diseuguaglianza scritta di sopra sarà dunque in ogni caso  $k \geq 2$ , e perciò  $\pi \leq 6$ .

D'altra parte, sopra una sezione iperpiana generica di  $V^3$  si considerino i due sistemi lineari (eventualmente incompleti) formati dalle curve ivi segate dalle  $\Phi^{3m}$  e dalle superficie del sistema doppio  $|\mathcal{Q}\Phi|$ . Il primo di questi sistemi è di genere  $\pi$  e di grado 8; sarà perciò  $2\pi + 7$  il genere del secondo, vale a dire il genere delle curve canoniche delle superficie  $(\mathcal{Q}\Phi)$ : più esattamente, delle curve canoniche *pure*, cioè astrazion fatta dalle loro eventuali componenti fisse (\*\*). Il grado del sistema di queste stesse curve, sulle superficie  $(\mathcal{Q}\Phi)$ , è l'ordine di queste superficie, cioè  $6m$ . Se si trattasse del sistema canonico completo (incluse le eventuali componenti fisse), il primo di questi due caratteri sarebbe il genere lineare  $p^{(1)}$  delle superficie  $(\mathcal{Q}\Phi)$ , e il secondo sarebbe il carattere  $p^{(2)}$ , che è eguale al precedente diminuito di un'unità; si avrebbe dunque  $6m = 2\pi + 6$ , ossia  $\pi = 3(m - 1)$ . Data tuttavia la possibilità che vi siano, nel sistema canonico, parti fisse, potremo soltanto scrivere la diseuguaglianza (\*\*\*):

$$6m \leq 2\pi + 6$$

ossia

$$\pi \geq 3(m - 1)$$

(\*) Infatti le sezioni iperpiane di  $V^3$  sono immagini delle superficie  $(F + F')$  della  $M_3^5$ , le quali ultime, essendo segate da quadriche passanti pel piano doppio, incontrano le cubiche della  $M_3^5$  anche in tre punti variabili.

(\*\*) Queste eventuali componenti fisse sarebbero «*ausgezeichnete Curven*» secondo M. NOETHER (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, II; Math. Ann., vol. 8 (1875), p. 495: v. in part. p. 521), ma non curve eccezionali nel senso odierno di questa parola, cioè trasformabili birazionalmente (ciascuna) nell'intorno di un punto semplice della superficie.

(\*\*\*) CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, Math. Ann., vol. 48 (1907), p. 241. Cfr. in partic. § 24.

la quale, insieme colle precedenti  $m \geq 3$ ,  $\pi \leq 6$ , lascia possibile l'unica soluzione  $m = 3$ ,  $\pi = 6$ .

Se sulla varietà  $V^3$  esiste un sistema lineare  $|\Phi|$  quale a noi occorre, le sue superficie  $\Phi^{3m}$  potranno soltanto essere di ordine 9, colle curve-sezioni (che sono le aggiunte delle  $C^8$  caratteristiche) di genere 6.

Ad escludere quest'ultima possibilità, valgono le considerazioni seguenti:

a) Si indichi, sopra una superficie  $\Phi^9$ , con  $\nu$  il grado del sistema lineare caratteristico di  $|\Phi|$ , supposto virtualmente privo di punti basi; e con  $\pi'$  il genere del secondo aggiunto di questo. Formando l'invariante relativo  $\omega$  di una  $\Phi^{(*)}$  mediante i caratteri del sistema lineare caratteristico anzidetto e del suo aggiunto (che è il sistema delle sezioni iperpiane), e mediante quelli del primo e secondo aggiunto, abbiamo:

$$\omega = \nu - 3 \cdot 4 + 6 = 9 - 3 \cdot 5 + \pi'$$

da cui  $\nu = \pi'$ . D'altra parte, sopra una  $\Phi^9$ , il sistema delle sezioni iperpiane è completo, regolare (la serie caratteristica essendo una  $g_9^3$  completa sopra una curva di genere 6), e per conseguenza di dimensione virtuale eguale alla effettiva, cioè 4. Esso pure non contiene il proprio aggiunto, le cui curve hanno ordine 10. Per una diseguaglianza già precedentemente applicata avremo dunque:

$$\pi' < 2 \cdot 6 - 4 - 1$$

ossia di nuovo  $\pi' \leq 6$ ; e perciò anche  $\nu \leq 6$ . E poichè  $\nu$  è certo non inferiore al grado effettivo del sistema  $|\Phi|$ , cioè all'ordine della varietà proposta  $M_3^9$ , il quale già si è riconosciuto essere  $> 5$ , avremo come unica soluzione  $n = \nu = \pi' = 6$ .

b) Sulle superficie cubiche  $\varphi^3$  sezioni iperpiane di  $V^3$  le superficie  $\Phi^9$  segano curve  $\gamma$  di ordine 9, intersezioni complete con altre superficie cubiche, e di genere 6, aventi sole 8 intersezioni variabili. Indicando con  $\alpha_i$  la molteplicità di un qualsiasi loro punto base (sopra una  $\varphi^3$  generica), sussisteranno le due relazioni:

$$\sum \alpha_i^2 = 27 - 8 = 19 \quad \sum \binom{\alpha_i}{2} = 10 - 6 = 4$$

dalle quali si deduce altresì:

$$\sum \alpha_i = 11$$

---

(\*) CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Annali di Matem. (3), vol. 6 (1901), p. 165; n.º 5.



dove le somme si intendono estese a tutti i punti base del sistema  $|\gamma|$  sopra una  $\varphi^3$ . Queste equazioni ammettono due sole soluzioni intere e positive:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2; & \quad \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 1 \\ \alpha_1 = 3; & \quad \alpha_2 = 2; \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 1. \end{aligned}$$

In quest'ultimo caso le  $\Phi^9$  avrebbero una retta base tripla, verrebbero cioè segate sopra  $V^3$  da altre varietà cubiche osculatrici alla prima lungo una retta. Da ciò si trae facilmente che le  $\Phi^9$  sarebbero luoghi di  $\infty^1$  coniche contenute in piani per questa retta (\*); avrebbero dunque, se razionali, le curve sezioni iperellittiche, e perciò certo il sistema aggiunto non di genere 6.

*Le superficie  $\Phi^9$  potranno dunque soltanto avere una linea base doppia di 4.º ordine, più un'altra, semplice, di 3.º ordine.*

c) Sulle superficie  $\Phi^9$ , le curve  $\gamma'$ , aggiunte alle sezioni iperpiane (ossia seconde aggiunte del sistema lineare caratteristico di  $|\Phi|$ ), di genere  $\pi' = 6$ , verranno segate da quadriche passanti per la linea doppia di 4.º ordine ( $\xi$ ), la quale avrà genere  $\leq 1$ . Queste stesse quadriche incontreranno la varietà  $V^8$  secondo superficie  $\psi^6$ , di genere uno, sulle quali le curve  $\gamma'$  (di ordine 10) saranno residue del sistema  $|2\xi|$  rispetto al sistema segato da tutte le forme cubiche. Ora le curve di quest'ultimo sistema sono di genere 28 e incontrano le  $(2\xi)$  in  $3 \cdot 8 = 24$  punti; d'altra parte alle  $(2\xi)$  spetta (sopra  $\psi^6$ ) un genere virtuale  $\varepsilon \leq 1$  e il grado  $2\varepsilon - 2$ ; si avrà dunque la relazione:

$$\pi' + \varepsilon + (24 - 2\varepsilon + 2) - 1 = 28$$

da cui  $\pi' = 3 + \varepsilon \leq 4$ ; risultato incompatibile coll'altro  $\pi' = 6$ .

La dimostrazione è così ultimata.

**18.** I risultati ottenuti nel presente lavoro possono pertanto così riassumersi:

1) *Le varietà a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali sono tutte rappresentabili birazionalmente sullo spazio  $S_3$ , fatta solo eccezione eventualmente per la varietà cubica di  $S_4$  priva di punti doppi.*

2) *Se la varietà cubica anzidetta costituisce una effettiva eccezione alla*

---

(\*) Infatti uno spazio  $S_3$  passante per la retta considerata incontrerebbe le due varietà cubiche di cui  $\Phi^9$  è intersezione secondo superficie anch'esse osculatrici lungo quella retta, e aventi perciò a comune, oltre a questa retta, tre coniche in piani per essa.

*proprietà suindicata* (come si ha ragione di ritenere probabile), essa gode invece di quest'altra proprietà caratteristica: che cioè su di essa ogni sistema lineare semplice di superficie razionali è un sistema  $\infty^4$ , di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche. Essa si distinguerebbe dunque dalle varietà razionali per il fatto di contenere un unico tipo di sistema lineare semplice di superficie razionali.

3) Designando per brevità ogni sistema lineare di superficie del tipo  $|F + F'|$  come « aggiunto di rango uno » del corrispondente sistema  $|F|$  (\*), si ha altresì: *L'aggiunzione di rango uno, applicata a un sistema lineare semplice di superficie razionali dello spazio  $S_3$ , e successivamente a quelli da esso ricavati con una o più operazioni consimili, conduce sempre a nuovi sistemi di superficie razionali, all'infuori eventualmente dell'ultimo. E dopo un numero finito di operazioni si perviene sempre a un sistema di uno dei due tipi seguenti:*

a) *Sistema lineare di superficie razionali a intersezioni variabili iperellittiche, in particolare ellittiche o razionali;*

b) *Sistema lineare equivalente, per trasformazione Cremoniana, a un sistema di coni collo stesso vertice. È notevole che ogni qual volta si giunge a un sistema di superficie a intersezioni variabili riducibili, perciò appartenente a una congruenza di linee, sempre questa congruenza sia trasformabile in una stella di rette.*

Torino, gennaio 1915.

---

(\*) Denominazione già usata dal sig. ENRIQUES per le curve sopra una superficie. Cfr. la Memoria: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*; Mem. della Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) (3), t. X (1896); n.º 31.

# Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare.

(Di FRANCESCO SEVERI, a Padova.)

È ben noto che, seguendo H. GRASSMANN (\*), si definiscono come coordinate (omogenee, sovrabbondanti) di uno spazio lineare  $S_k$ , entro un  $S_r$ , i determinanti d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di  $k+1$  punti (indipendenti) variabili in  $S_r$  o i determinanti — proporzionali ai precedenti — d'ordine massimo, estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di  $r-k$  iperpiani (indipendenti) passanti per quei punti (\*\*). Fra queste coordinate passano alcune relazioni quadratiche omogenee, scritte da D'OVIDIO (\*\*\*)).

Interpretando le coordinate grassmanniane come coordinate omogenee di punto, in uno spazio  $S_\rho$   $\left[ \rho = \binom{r+1}{k+1} - 1 \right]$ , gli  $S_k$  di  $S_r$  vengono rappresentati *biunivocamente, senza eccezioni*, dai punti di una varietà algebrica  $V_t$ , di dimensione  $t = (k+1)(r-k)$ , appartenente ad  $S_\rho$ , e della quale le sud-

---

(\*) *Die Ausdehnungslehre* von 1862 (Abs. I, Kap. III, N. 65) oppure: Ges. Werke, Bd. I, Th. II, p. 44. Per  $r=3$ ,  $k=1$  queste coordinate furono considerate diffusamente da PLÜCKER nella *Neue Geometrie des Raumes* (Leipzig, 1868-69). Di esse però egli aveva già fatto cenno, fin dal 1846, nella *Geometrie des Raumes*.

(\*\*) Cfr. ad es. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, ecc. (Pisa, Spoerri, 1907); nn. 14-18, p. 32 e segg. La proporzionalità fra i minori delle due matrici, cui s'è alluso nel testo, fu dimostrata da CLEBSCH, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissens. zu Göttingen, Bd. XVII, 1872), § 2, e indipendentemente, per via più elementare, da D'OVIDIO, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, v. XII, 1877, pp. 334-49).

(\*\*\*) Loc. cit. Di esse fecero pur cenno GRASSMANN (*Crelle's Journal*, 1877-78) e CLEBSCH, loc. cit., §§ 1 e 6. Ved. ad es. BERTINI, op. cit., p. 38.

dette relazioni quadratiche costituiscono la completa rappresentazione analitica (\*).

Nel caso più semplice  $r = 3$ ,  $k = 1$ , un bel teorema di KLEIN assicura che la  $V$  non contiene altre varietà algebriche a tre dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme dei vari ordini di  $S_3$  (\*\*). Col linguaggio della geometria della retta, il teorema di KLEIN afferma che ogni complesso algebrico di rette, nello spazio ordinario, può sempre rappresentarsi con una sola equazione (omogenea) nelle coordinate plückeriane, il che, trattandosi di coordinate sovrabbondanti, non potrebbe affatto affermarsi a priori.

Questo teorema è stato esteso, per via puramente algebrica, al caso di  $r$  qualunque, ma sempre  $k = 1$ , da C. H. SISAM (\*\*\*). La dimostrazione del teorema analogo in generale, qualunque siano  $r$ ,  $k$ , costituisce lo scopo principale di questo lavoro (teor. I, nn. 10, 20). Tratto prima la questione geometricamente, appoggiandomi ad uno dei miei « criteri di equivalenza » per varietà contenute in una data; e nella seconda parte del lavoro estendo anche, con opportuni accorgimenti algoritmici, il procedimento algebrico di SISAM. Il metodo geometrico da me seguito per dimostrare che su  $V_t$  la base minima è costituita da una sezione iperpiana (n. 9), si può applicare con lievissime modificazioni a molte altre varietà: p. e. alle varietà delle  $k$ -ple ( $k \geq 2$ ) — ordinate o non — dei punti di uno spazio  $S_r$ .

Il fatto che la  $V_t$ , che chiameremo « varietà grassmanniana di indici  $(r, k)$  », non contenga altre varietà algebriche a  $t - 1$  dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme di  $S_\rho$ , dà luogo ad una conseguenza notevole.

Allorchè si considera la classe di tutte le trasformate birazionali di una data varietà algebrica, si possono porre in una medesima sottoclasse due varietà che si corrispondano biunivocamente *senza eccezioni*. Si presenta allora il problema di ricercare, in una medesima sottoclasse, qual'è la varietà modello, proiettivamente determinata, d'ordine minimo. È questo evidente-

(\*) Però si deve avvertire che la  $V_t$  non può mai — tranne il caso  $r = 3$ ,  $k = 1$ , in cui  $V$  riducesi ad una quadrica dello  $S_3$  — considerarsi come completa intersezione di  $\rho - t$  forme di  $S_\rho$ , e tanto meno di  $\rho - t$  forme quadratiche (ved. il n. 4, Oss.).

(\*\*) *Ueber einen liniengeometrischen Satz* (Götting. Nachr., 1872; Math. Annalen, Bd. XXII, 1883).

(\*\*\*) *On algebraic hyperconical connexes in space of  $r$  dimensions* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, v. XLVI, 1911, pp. 481-87).

mente un problema, che rientra nel quadro generale dei problemi della base, da me altrove in più occasioni trattati.

Così ad esempio, nel campo delle superficie razionali, il piano e la superficie di VERONESE appartengono alla medesima sottoclasse (di cui il piano è il modello minimo), mentre il piano ed una quadrica appartengono a sottoclassi distinte.

Orbene, se si considera la sottoclasse di tutte le varietà che rappresentano birazionalmente senza eccezioni la totalità degli  $S_k$  di un  $S_r$ , dal teor. I segue che *entro questa sottoclasse la varietà grassmanniana costituisce appunto un modello minimo*. Ma di più si prova che *questo modello minimo è proiettivamente individuato*, nel senso cioè che ogni varietà d'ordine minimo della sottoclasse considerata, la quale sia normale (\*), è proiettivamente identica alla suddetta grassmanniana.

Acquista così un senso preciso la frase: « la varietà delle rette di  $S_3$  è una varietà quadratica », oppure: « la varietà delle rette di  $S_4$  è una varietà quintica », ecc. E da tutto ciò apparisce pure che *le coordinate grassmanniane sono, dal punto di vista della rappresentabilità senza eccezioni, le coordinate più naturali, in quanto offrono il modello più semplice*.

Da questo punto di vista, è indifferente scegliere come varietà rappresentatrice una qualunque trasformata proiettiva di  $V_i$ . D'altro canto però la varietà grassmanniana apparisce il modello più opportuno nelle questioni di realtà, giacchè ad ogni  $S_k$  reale (o a due  $S_k$  complessi-coniugati) di  $S_r$  corrisponde un punto reale (o una coppia di punti complessi-coniugati) di  $V_i$ . Si vede pure agevolmente che la  $V_i$  è costituita da una sola falda reale, e che lo stesso accade della sua sezione con un generico  $S_{\rho-i}$  reale ( $i \leq \chi + 1$ , ove  $\chi$  è il maggiore dei due interi  $k, r - k - 1$ ) (n. 14).

Un teorema analogo al teor. I vale anche per la sezione di  $V_i$  con un generico  $S_{\rho-i}$  ( $i \leq \chi$ ). Sopra una tal sezione non esistono cioè altre varietà algebriche a  $t - i - 1$  dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete colle forme di  $S_{\rho-i}$  (o di  $S_\rho$ ) (n. 13). Così ad es.: Nello  $S_3$  — com'è noto — una congruenza algebrica di rette, contenuta in un complesso lineare *non speciale*, è intersezione completa di questo complesso con un altro (di grado uguale all'ordine e alla classe della congruenza); nello  $S_4$  un sistema  $\infty^4$  (o  $\infty^3$ ) di rette contenuto in un complesso lineare generico (o risp. in un

---

(\*) Cioè che non sia proiezione di una, dello stesso ordine, appartenente ad uno spazio superiore a quello in cui essa è immersa.

fascio generico di complessi lineari) è intersezione completa di quel complesso (o del sistema base del fascio) con un altro complesso; ecc.

Approfondendo maggiormente lo studio delle sezioni di  $V_i$ , cogli spazi lineari delle diverse dimensioni, sono giunto a provare (nn. 13, 16):

a) Ch'esse sono tutte varietà normali.

b) Che — tranne il caso  $r=3$ ,  $k=1$  — esiste una tal dimensione  $l$  dello spazio lineare secante, per cui la varietà sezione ha il proprio sistema canonico d'ordine zero, e quindi il genere (geometrico = aritmetico) uguale ad 1.

c) Che le varietà sezioni con spazi superiori  $S_{i+1}$ ,  $S_{i+2}, \dots, S_{\rho-1}$  hanno il genere nullo, e fra esse quelle staccate da spazi di dimensione  $\geq \rho - \chi - 1$  sono razionali, restando dubbia in generale la razionalità delle altre.

d) Che la varietà sezione con un  $S_{i-1}$  generico è una varietà canonica, mentre le sezioni con spazi  $S_{i-2}$ ,  $S_{i-3}, \dots, S_{\rho-i+1}$  sono varietà sottocanoniche (\*). La deduzione di queste proprietà — tranne quella che concerne la razionalità delle sezioni con spazi di dimensione  $\geq \rho - \chi - 1$  —, si appoggia soltanto sulla normalità della  $V_i$  e sul fatto ch'essa ha l'irregolarità superficiale nulla, e per base minima una sezione iperpiana. Cosicché le proprietà stesse valgono in generale, per ogni varietà soddisfacente a queste condizioni.

Indico anche un modo per calcolare i generi delle sezioni spaziali e l'ordine di  $V_i$  (\*\*), e sviluppo diffusamente la cosa per  $k=1$  (n. 17). In tal caso la dimensione  $l$ , cui sopra si allude, è uguale ad  $r-3$ . Così ad esempio: La  $V_5^6$  di  $S_7$ , rappresentatrice delle rette di  $S_4$  ha [com'è noto (\*\*\*)] per sezioni curvilinee, quintiche ellittiche e per sezioni sezioni spaziali superiori, varietà

(\*) Cioè tali che su ognuna di esse il sistema delle sezioni iperpiane è un sottomultiplo conveniente del sistema canonico.

(\*\*) L'ordine di  $V_i$ , essendo uguale al numero degli  $S_k$  che appoggiansi a  $t S_{r-k-1}$  generici di  $S_r$  (n. 2), è espresso da

$$\frac{1! 2! \dots k! t!}{(r-k)! (r-k+1)! \dots r!} .$$

Cfr. SCHUBERT, *Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension* (Acta mathematica, t. 8, 1886), p. 97. Vedi pure una Nota nelle Hamburger Mitth., 1, 1884, p. 87.

(\*\*\*) Cfr. SEGRE, *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. II, 1888); CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti del R. Istituto Veneto, (7), t. II, 1891; pp. 855-901); SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche* (Annali di Matematica, (3), t. XV, 1908, pp. 217-273), n. 61.

razionali; la  $V_8^4$  di  $S_{11}$ , rappresentatrice delle rette di  $S_8$ , ha per sezioni curvilinee, curve canoniche del genere 8, per sezioni superficiali, superficie (regolari) con curva canonica d'ordine zero, per sezioni tridimensionali, varietà (completamente regolari) di genere zero, ma di cui è dubbia la razionalità, e per sezioni superiori varietà razionali.

Il fatto, stabilito al n. 17, che la formola di postulazione di  $V_i$  valga per ogni valore dell'ordine  $n$ , lascia prevedere che il minimo sistema lineare contenente ogni forma di ordine  $n + 1$ , spezzata in un iperpiano di  $S_p$  ed in una forma d'ordine  $n$  per  $V_i$ , sia sempre il sistema di tutte le forme d'ordine  $n + 1$  per  $V_i$ , e quindi che *ogni forma d'ordine  $n$  passante per  $V_i$  appartenga al modulo delle forme quadratiche, che definiscono  $V_i$* . Donde poi si trarrebbe che le relazioni quadratiche di D'OVIDIO formano un sistema completo di legami tra le coordinate grassmanniane di un  $S_k$ , nel senso cioè che ogni altra funzione intera delle coordinate suddette, la quale s'annulli identicamente quando al posto di queste coordinate si sostituiscano le loro espressioni nelle coordinate di punto, è funzione intera di quelle forme quadratiche. In realtà io mi trattengo a dimostrare completamente questo fatto, per via algebrica, soltanto nel caso  $k = 1$  (n. 21).

Osserverò infine che la dimostrazione algebrica del teor. I permette anche di assegnare le condizioni cui deve soddisfare una forma  $F$  d'ordine  $n$ , in  $k + 1$  serie di  $r + 1$  variabili, affinchè essa possa esprimersi come forma d'ordine  $n$  nei determinanti di grado  $k + 1$  estratti dalla matrice delle variabili: perchè ciò accada occorre e basta che le derivate d'ordine  $n - 1$  della  $F$ , rispetto alle variabili di ogni prefissata serie, si annullino identicamente, quando si eguagliano le variabili di quella serie con quelle di qualunque altra (n. 20).

## § 1. Preliminari.

1. *La varietà grassmanniana  $V_i$ , d'indici  $(r, k)$ , è evidentemente razionale*, giacchè può riferirsi birazionalmente alle  $(k + 1)$ -ple di punti tolti da altrettanti  $S_{r-k-1}$  di  $S_r$ . Inoltre *essa appartiene allo spazio  $S_p$  e non ad uno spazio inferiore*, perchè altrimenti fra le coordinate di un  $S_k$  esisterebbe almeno una relazione lineare omogenea, e l'annullarsi di certe  $p$  coordinate trarrebbe l'annullarsi della rimanente; mentre si posson sempre scegliere

$k + 1$  punti di  $S_r$ , per guisa che uno solo prefissato dei minori d'ordine  $k + 1$  estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di tali punti, sia diverso da zero.

2. Diremo *complesso* (algebrico) di  $S_k$ , entro  $S_r$ , un sistema algebrico di  $\infty^{t-1} S_k$ , cioè un sistema che abbia per immagine una varietà algebrica, a  $t - 1$  dimensioni, appartenente a  $V_t$ . *Grado  $n$*  del complesso è il numero degli  $S_k$  ch'esso ha comuni con un *fascio* generico di  $S_k$  (\*). La forma algebrica riempita dagli  $S_k$  del complesso passanti per un generico  $S_{k-1}$ , è un cono d'ordine  $n$ , avente per vertice il dato  $S_{k-1}$ .

In particolare, alle sezioni iperpiane di  $V_t$ , rispondono *complessi lineari* (o di grado 1), e tra questi si possono poi più particolarmente considerare i *complessi lineari speciali*, costituiti ciascuno dagli  $S_k$  che s'appoggiano a un dato  $S_{r-k-1}$ . Si verifica agevolmente — sviluppando colla regola di LAPLACE il determinante formato dalle coordinate di  $r - k$  punti indipendenti del dato  $S_{r-k-1}$  e dalle coordinate di  $k + 1$  punti di un  $S_k$  ad esso appoggiato — che ogni complesso lineare speciale è appunto rappresentato da una sezione iperpiana di  $V_t$ . Naturalmente trattasi di una particolare sezione; ma, pel nostro scopo, non occorre indagare in che cosa consista, geometricamente, questa particolarità. Osserviamo piuttosto che, siccome l'ordine  $n_{r,k}$  di  $V_t$  uguaglia il numero dei punti comuni a  $V_t$  ed a  $t$  iperpiani indipendenti di  $S_r$ , esso risulta anche uguale al numero degli  $S_k$  appoggiati a  $t$  spazi  $S_{r-k-1}$  generici di  $S_r$ .

3. Come sono rappresentati su  $V_t$  gli  $S_k$  passanti per un dato punto  $O$  di  $S_r$ ? Assumendo questo punto come uno dei vertici della piramide fondamentale delle coordinate, e individuando un  $S_k$  per  $O$ , mediante  $k$  punti dell'iperpiano opposto ad  $O$ , nella piramide fondamentale, le coordinate non nulle di quello  $S_k$  riduconsi ai minori d'ordine  $k$  estratti da una matrice di  $r$  verticali e di  $k$  orizzontali, e si può quindi affermare che « gli  $S_k$  passanti per un dato punto di  $S_r$ , sono rappresentati, sopra  $V_t$ , da una varietà grassmanniana d'indici  $(r - 1, k - 1)$  ».

E similmente, componendo le coordinate di un  $S_k$  mediante i minori di ordine  $r - k$  estratti dalla matrice delle coordinate di  $r - k$  iperpiani indi-

---

(\*) S'intende: col sistema degli  $S_k$  passanti per un  $S_{k-1}$  entro un  $S_{k+1}$ . Si verifica subito che le coordinate grassmanniane di un  $S_k$  d'un tal sistema, sono combinazioni lineari delle coordinate di due  $S_k$  fissi del fascio. L'immagine degli  $S_k$  d'un fascio, sopra  $V_t$ , è dunque una retta.



pendenti, variabili in  $S_r$ , si conclude che « gli  $S_k$  giacenti in un dato iperpiano  $S_{r-1}$ , sono rappresentati, sopra  $V_t$ , da una varietà grassmanniana di indici  $(r-1, k)$  ».

Più in generale: *gli  $S_k$  passanti per un dato  $S_{h-1}$  ( $h \leq k$ ) di  $S_r$ , sono rappresentati sopra  $V_t$  da una grassmanniana d'indici  $(r-h, k-h)$ , e quelli giacenti in un dato  $S_{r-h}$  ( $h \leq r-k-1$ ), da una grassmanniana d'indici  $(r-h, k)$ .*

È sottinteso che una grassmanniana di cui il secondo indice sia nullo o inferiore di un'unità rispetto al primo, si riduce ad uno spazio lineare di punti.

4. Ogni omografia dello spazio  $S_r$  in sè, muta un  $S_k$  in un  $S_k$ , per guisa che le coordinate dello  $S_k$  trasformato si esprimono linearmente mediante le coordinate dello  $S_k$  primitivo; ed essa rispecchiasi perciò in una omografia di  $S_\rho$ , la quale muta in sè la varietà  $V_t$ , che viene pertanto a possedere un gruppo continuo transitivo, ad  $r(r+2)$  parametri, di omografie.

Da ciò si trae che l'intorno di ogni punto di  $V_t$  è omograficamente equivalente ad ogni altro, e quindi, in particolare, che  $V_t$  non ha punti multipli

OSSERVAZIONE. Dal fatto che la varietà razionale  $V_t$  è priva di punti multipli segue che, non appena sia  $\rho \geq 2t+1$ , la  $V_t$  non può essere completa intersezione di  $\rho-t$  forme, degli ordini  $m_1, m_2, \dots, m_{\rho-t}$ . In caso contrario, infatti, risultando  $\sum m_i - \rho - 1 \geq 2(\rho-t) - \rho - 1 \geq 0$ , le forme d'ordine  $\sum m_i - \rho - 1$  staccherebbero per  $V_t$  il sistema canonico (\*) e quindi  $V_t$  non sarebbe razionale. Applicando la stessa considerazione alle sezioni spaziali di  $V_t$ , e tenendo conto del teor. VII (n. 16), che ad esse si riferisce, s'arriverebbe a concludere, più precisamente, che  $V_t$  non è mai completa intersezione, salvo il caso  $r=3, k=1$ , in cui trattasi d'una quadrica dello  $S_5$ . Ma su questa proprietà negativa, che del resto è irrilevante pel seguito, non ci indugiamo ulteriormente.

5. Secondo il n. 3, sulla  $V_t$  i punti che rappresentano gli  $S_k$  per un dato  $S_{k-2}, \Omega$ , formano una grassmanniana  $W$ , identica a quella che rappresenta le rette di un  $S_{r-k+1}$ . Ci gioverà, per gli scopi ulteriori, d'intrattenerci un momento su questa varietà. Essa ha la dimensione  $2(r-k)$  ed appartiene ad uno spazio lineare  $\left[ \binom{r-k+2}{2} - 1 \right]$  (\*\*). Gli  $S_k$  contenenti  $\Omega$  e giacenti

(\*) Cfr. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XVII, 1903). Ivi veramente la cosa è provata per curve e superficie, ma l'estensione alle varietà superiori è immediata.

(\*\*) Per comodità tipografica si usa talora d'indicare con  $[s]$  uno spazio lineare di dimensione  $s$ .

in un dato  $S_{r-1}$  (per  $\Omega$ ), corrispondendo alle rette di un dato  $S_{r-k}$  di  $S_{r-k+1}$ , hanno per immagini su  $W$  i punti di una varietà  $W'$ , di dimensione  $2(r-k-1)$ , appartenente ad uno spazio  $\left[ \binom{r-k+1}{2} - 1 \right]$ , talchè gli iperpiani di  $S_\rho$ , che contengono qualcuna delle  $\infty^{r-k+1}$   $W'$ , appartenenti ad una data  $W$ , dipendono al più da  $\rho - \binom{r-k+1}{2} + (r-k+1) = \rho - \binom{r-k}{2} + 1$  parametri.

Ora, se  $k < r - 2$ , questo numero risulta sempre minore di  $\rho$ , sicchè gli iperpiani considerati non sono tutti gl'iperpiani di  $S_\rho$ . Uno di quegli iperpiani stacca su  $V_i$  una sezione, imagine d'un complesso lineare tale, che fra gli  $S_k$  del complesso, passanti per  $\Omega$ , vi sono quelli che riempiono un certo iperpiano di  $S_r$ . Si conclude pertanto che:

*Un complesso lineare, il quale contenga tutti gli  $S_k$  che passano per un dato  $S_{k-2}$  dello  $S_r$ , e che giacciono in un dato iperpiano (uscendo da quello  $S_{k-2}$ ), è un complesso particolare.*

Questa conclusione vale anche nel caso, sopra escluso, in cui  $k = r - 2$ . Invero allora  $W$  è una quadrica dello  $S_5$ , e  $W'$  un piano di questa quadrica. Un iperpiano di  $S_\rho$  che contenga un piano di  $W$  è tangente alla quadrica, e contiene in conseguenza infiniti piani di  $W$ . Sicchè, anche in tal caso, gli  $S_{\rho-1}$  passanti per gli  $\infty^3$  piani di  $W$  sono meno che  $\infty^\rho$ .

6. Tra i complessi di grado  $n$ , vi sono quelli che hanno per immagini le sezioni di  $V_i$  colle forme d'ordine  $n$  dello  $S_\rho$ , cioè quelli rappresentabili in  $S_r$  con una sola equazione di grado  $n$ , fra le coordinate grassmanniane. Orbene, noi dimostreremo che:

*I. Ogni complesso algebrico di spazi  $S_k$  nello  $S_r$ , è rappresentabile completamente mediante una sola equazione nelle coordinate grassmanniane.*

In altri termini proveremo che ogni varietà algebrica a  $t - 1$  dimensioni, appartenente ad una grassmanniana  $V_i$ , è intersezione completa di  $V_i$  con una forma del suo spazio.

## § 2. Dimostrazione geometrica del teorema fondamentale.

### Proprietà delle sezioni spaziali di $V_i$ .

7. EQUAZIONE DI UN COMPLESSO IN COORDINATE DI PUNTI. Diremo che più punti di  $S_r$  sono coniugati rispetto ad un dato complesso  $\alpha$ , di grado  $n \geq 1$ , quando essi stanno sopra un medesimo  $S_k$  del complesso.

Le  $(k+1)$ -ple di punti coniugati, delle quali faccia parte una  $k$ -pla genericamente fissata in  $S_r$ , stanno tutte (n. 2) in una ben determinata forma conica d'ordine  $n$ , che ha per vertice lo  $S_{k-1}$  individuato da quella  $k$ -pla. Se  $f(x^{(0)}) = 0$  (\*) è l'equazione di questo cono in coordinate omogenee  $x_0^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}$  di punto, i coefficienti di  $f$  risulteranno funzioni algebriche ad un valore, e quindi funzioni razionali, dei gruppi di  $k$  punti  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ , variabili in  $S_r$ . Introducendo l'omogeneità anche nelle coordinate di questi punti variabili, l'equazione considerata si ridurrà alla forma

$$F(x_0^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}; x_0^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}; \dots; x_0^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}) = 0,$$

o, come scriveremo brevemente:  $F(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0$ , ove  $F$  è simbolo di un polinomio omogeneo in ciascuna serie di variabili.

La  $F=0$  esprime la condizione di coniugio, rispetto ad  $\alpha$ , di  $k+1$  punti  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ ; e poichè tale condizione è simmetrica rispetto ai punti stessi, così la  $F$  deve risultare d'ordine  $n$  in ciascuna serie di variabili, sì che anzi fissati comunque  $k$  dei  $k+1$  punti  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ , essa rappresenti sempre un cono d'ordine  $n$ , avente il vertice nello  $S_{k-1}$  congiungente i punti fissati.

Osserviamo di passaggio che la nozione di punti coniugati rispetto ad un complesso  $\alpha$ , si può ovviamente estendere, chiamando *coniugati* due spazi  $S_{k-i}, S_{i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, k$ ) quando sono congiunti da (almeno) un  $S_k$  di  $\alpha$ . Si vede subito che « gli  $S_{i-1}$  coniugati di un  $S_{k-i}$  generico formano, entro  $S_r$ , un complesso di grado  $n$  », ed inoltre che « fra questi  $S_{i-1}$ , quelli che giacciono in un dato  $S_{r-k+i-1}$ , formano ivi un complesso di grado  $n$  ».

Risulta pure senz'altro, da quanto precede, che il fatto che la forma  $F=0$  rappresenti un complesso di  $S_k$ , *equivale* algebricamente a ciò: che le derivate di ordine  $n-1$  della  $F$ , rispetto alle variabili di una qualunque serie, si annullino identicamente quando le variabili della serie considerata s'identificano colle variabili (degli stessi indici) di una qualsiasi delle  $k$  serie rimanenti (\*\*).

8. INESISTENZA DI COMPLESSI DI GRADO ZERO. Tutto quanto s'è esposto nel n.º prec. poggia sull'ipotesi che vi sia qualche  $S_k$  del dato complesso  $\alpha$ ,

(\*) Indicheremo con  $x^{(0)}$  il punto di coordinate  $x_0^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}$  e con  $f(x^{(0)})$  una forma nelle coordinate stesse.

(\*\*) Se  $n=1$ , si dovrà esigere che  $F$  si annulli identicamente, allorchè s'identificano le variabili di due serie qualunque.

che appartenga ad un qualunque fascio di  $S_k$ . Potrebbe però sorgere il dubbio che non ogni complesso soddisfacesse a questa condizione. Per rendere completamente rigorose le deduzioni ulteriori, occorre appunto provare che *non può esistere un complesso di grado zero*, cioè un sistema,  $\alpha$ ,  $\infty^{t-1}$  di  $S_k$ , tale che in un fascio generico di  $S_k$  non vi sia alcun  $S_k$  di  $\alpha$ .

È chiaro anzitutto che gli  $S_k$  ( $k \geq 1$ ) di  $\alpha$  debbono riempire lo spazio ambiente  $S_r$ , perchè se essi riempissero una varietà  $M_h$  ad  $h < r$  dimensioni, per un punto generico  $P$  di  $M_h$  passerebbero  $\infty^{t-1-h+k}$  spazi  $S_k$  di  $\alpha$ , i quali dovrebbero giacere tutti sullo  $S_h$  tangente ad  $M_h$  in  $P$ . Ora in questo  $S_h$  gli  $S_k$  passanti per  $P$  dipendono da  $k(h-k)$  parametri, numero che risulta inferiore a  $t-1-h+k$ .

È dunque assurdo ammettere che gli  $S_k$  di  $\alpha$  non invadano  $S_r$ .

Ciò posto, suppongasi dimostrata la proprietà da stabilirsi per i complessi di spazi  $S_{k-1}$  entro  $S_{r-1}$ . Fissato un punto generico  $P$  di  $S_r$  e un iperpiano  $\pi$ , non contenente  $P$ , ogni  $S_k$  di  $\alpha$ , per  $P$ , segna un  $S_{k-1}$  su  $\pi$ . Entro  $\pi$  si avranno in tal modo  $\infty^{t-1-r+k}$  spazi  $S_{k-1}$ , formanti ivi un complesso  $\bar{\alpha}$ ; e per ciò che si è ammesso, vi sarà un numero finito  $> 0$ , di spazi di  $\bar{\alpha}$  appartenenti ad un fascio generico di  $S_{k-1}$ , entro  $\pi$ . Proiettando da  $P$ , ne deriverà la proprietà analoga per  $\alpha$ .

Saremo ridotti pertanto a provare che il teorema è vero pei complessi di rette di uno spazio  $S_d$  ( $d = r - k + 1$ ). Ora questo risulta subito dall'osservazione già fatta che le rette di un tal complesso debbono invadere  $S_d$ , sicchè quelle che passano per un punto generico  $P$  di  $S_d$  sono  $\infty^{d-2}$ , e riempiono perciò una forma conica, la quale è tagliata in un numero finito  $> 0$  di generatrici da un fascio generico di rette col centro in  $P$ .

OSSERVAZIONE. È appena necessario di avvertire che il fascio di  $S_k$  con cui si sega il dato complesso  $\alpha$ , potrà benissimo per particolari posizioni giacere interamente in  $\alpha$ , ma che mai esso potrà non avere qualche  $S_k$  comune col dato complesso.

9. LA BASE MINIMA DELLE VARIETÀ A  $t - 1$  DIMENSIONI CONTENUTE IN  $V_t$ .  
Dimostreremo ora che:

*Sulla  $V_t$ , le varietà algebriche a  $t - 1$  dimensioni, immagini dei complessi di grado  $n$ , si distribuiscono in un sol sistema lineare.*

Cominciamo perciò a costruire sulla  $V$  un sistema  $\Sigma$ ,  $\infty^{t-1}$  di rette, avente l'indice 1, cioè tale che per un punto generico di  $V$  passi una sola retta di  $\Sigma$ .

Un sistema siffatto s'ottiene subito p. e. nel modo seguente:

Nello  $S_r$  si fissi un punto  $O$  ed un iperpiano  $\omega$ , che non si apparten-

gano, e si considerino i fasci di  $S_k$  che hanno lo  $S_{k-1}$ -asse su  $\omega$  e lo  $S_{k+1}$ -so-  
stegno passante per  $O$ . È ben chiaro che un  $S_k$  generico di  $S_r$  appartiene  
ad uno solo di tali fasci, cosicchè questi hanno appunto per imagini sopra  
 $V_{\infty^{t-1}}$  rette, formanti un sistema  $\Sigma$ , d'indice 1 (\*).

Verifichiamo facilmente che *il sistema  $\Sigma$  non ammette varietà fondata-  
mentali a  $t-1$  dimensioni*; cioè varietà che non siano tagliate in punti varia-  
bili da una retta variabile di  $\Sigma$ . Invero, poichè le rette di  $\Sigma$ , com'è evidente,  
non hanno punti fissi comuni, se esistesse una tale varietà fondamentale,  
esisterebbe in  $S_r$  un complesso di  $S_k$  non avente comune alcun  $S_k$  con un fascio  
generico appartenente al sistema sopra definito; il che è assurdo (n. 8, Oss.).

Ciò premesso, consideriamo due complessi  $\alpha, \beta$  dello stesso grado  $n$ . Le  
varietà imagini  $A, B$  tagliano sopra una retta  $u$  di  $\Sigma$  due gruppi  $a, b$  di  $n$   
punti. E poichè  $a, b$  sono equivalenti sulla  $u$ , così ne segue (\*\*), che le  $A, B$   
sono equivalenti sulla  $V$ .

OSSERVAZIONE. Prendendo come varietà  $B$  la sezione di  $V_t$  con una forma  
d'ordine  $n$ , il risultato stabilito può enunciarsi nel modo seguente:

*L'ordine  $m$  di una qualunque varietà  $A$ , a  $t-1$  dimensioni, tracciata  
su  $V_t$ , è multiplo dell'ordine  $n_{r,k}$  di  $V_t$  ( $m = n \cdot n_{r,k}$ ) e la  $A$  equivale sempre  
ad un multiplo (secondo  $n$ ) di una sezione iperpiana di  $V_t$ .*

In altri termini: *La base minima (\*\*\*) delle varietà a  $t-1$  dimensioni  
appartenenti a  $V_t$  è costituita da una sezione iperpiana.*

(\*) Il sistema  $\Sigma$  può anche definirsi, sopra  $V$ , come il sistema delle rette di  $V$  appog-  
giate alla grassmanniana  $M_{t-k-1}$ , rappresentatrice degli  $S_k$  di  $\omega$ , e alla grassmanniana  $N_{t-r+k}$ ,  
rappresentatrice degli  $S_k$  per  $O$ .

(\*\*) Se due varietà  $A, B$ , appartenenti a  $V_t$ , staccano gruppi equivalenti sulle curve di  
un sistema  $\Sigma$  d'indice  $\nu$ , le  $\nu A, \nu B$  sono equivalenti o differiscono per varietà fondamentali  
di  $\Sigma$ . Vedi SEVERI, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica  
o tra curve di una superficie* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LXX, 1911, pp. 373-382), n. 4.  
Per comodità del lettore, faccio qui il breve ragionamento che conviene al caso particolare  
del testo. Fissati tre iperpiani generici in  $S_q$ , mediante la terna dei punti da essi staccati sopra  
una retta  $u$  di  $\Sigma$ , resta su questa fissato razionalmente un sistema di coordinate proiettive.  
Siano  $a_1, a_2, \dots, a_n$  le coordinate proiettive dei punti di  $a$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  le coordinate  
proiettive dei punti di  $b$ . Allora la funzione  $\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)}$ , ove  $x$  è la coordi-  
nata proiettiva di un punto variabile sopra  $u$ , al variare di  $u$  entro  $\Sigma$ , risulta funzione razionale  
del punto variabile sopra  $V_t$ . Essa diviene infinita (di 1.° ordine) lungo  $B$  e nulla  
(di 1.° ordine) lungo  $A$ .

(\*\*\*) Cfr. pel concetto di base minima: SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes  
tracées sur une surface algébrique* (Annales de l'École Norm. de Paris, (3), t. XXV, 1908,  
pp. 449-468).

10. COMPLETEZZA DEI SISTEMI LINEARI STACCATI SU  $V_i$  DALLE FORME DEL SUO SPAZIO. DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA FONDAMENTALE. Per stabilire il teorema I basterà ormai provare che *sulla  $V_i$  le forme d'un ordine arbitrario  $n$ , dello spazio  $S_r$ , staccano un sistema lineare completo*. Le considerazioni svolte nel n. 7 ci mostrano anzitutto che il numero delle condizioni (lineari) indipendenti cui debbono soddisfare i coefficienti della forma  $F$ , affinché  $F=0$  rappresenti un complesso di grado  $n$ , è funzione (razionale) soltanto di  $n, r, k$ ; sicchè anche l'infinità dei complessi di dato grado  $n$ , cioè la dimensione del sistema lineare *completo*, che contiene (o coincide con) quello staccato su  $V_i$  dalle forme d'ordine  $n$ , risulterà, qualunque sia  $n$ , una certa funzione razionale  $\varphi(n, r, k)$ .

È poi chiaro che il numero delle condizioni affinché una  $F$  si possa porre sotto forma di un polinomio omogeneo di grado  $n$ , nelle coordinate grassmanniane di un  $S_k$ , è pur funzione razionale delle sole  $n, r, k$ ; e quindi la dimensione del sistema — forse parziale — staccato su  $V_i$  dalle forme d'ordine  $n$ , risulterà anch'essa una funzione razionale di  $n, r, k$ :  $\psi(n, r, k)$ .

Ora, poichè  $V_i$  è priva di punti multipli (n. 4), il teorema da dimostrarsi è vero per  $n \geq l$ , ove  $l$  è un conveniente intero (\*), per modo che, quando  $n \geq l$ , le due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  s'identificano. Ciò significa insomma che l'equazione algebrica in  $n$ ,  $\varphi = \psi$ , è soddisfatta, comunque siano dati  $r, k$ , per infiniti valori di  $n$  ( $\geq l$ ), e quindi ch'essa è un'identità in  $n, r, k$ . Questo prova, come volevasi, che le forme di un ordine qualunque  $n$  staccano su  $V_i$  un sistema lineare completo.

OSSERVAZIONE. Si rileverà che, in particolare, per  $n=1$ , il teorema ora dimostrato ci dice che *la varietà  $V_i$  è normale*.

11. CONFRONTO FRA LE VARIETÀ I CUI PUNTI RAPPRESENTANO SENZA ECCEZIONI GLI  $S_k$  DI UN  $S_r$ . Sia  $V'$ , un'altra varietà, normale in un certo spazio  $S_a$ , i cui punti rappresentino biunivocamente, senza alcuna eccezione (come quelli di  $V_i$ ) gli  $S_k$  di  $S_r$ . Nascerà allora tra  $V, V'$  una corrispondenza birazionale, senza eccezioni, chiamando omologhi due punti di  $V, V'$  immagini del medesimo  $S_k$ . Al sistema delle sezioni iperpiane di  $V'$  corrisponderà su  $V$  un sistema lineare completo, *senza punti base*. In forza dei teoremi dei n.º 9, 10, questo sistema coinciderà con quello staccato su  $V$  dalle forme di un certo ordine  $n$  ( $\geq 1$ ) dello spazio  $S_r$ ; e, se  $n=1$ , il che accadrà allora e solo al-

(\*) Cfr. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. XXVIII, 1909), n. 2.

lora che le  $V, V'$  abbiano lo stesso ordine (e sia in conseguenza  $d = \rho$ ), le  $V, V'$  risulteranno omografiche. Dunque:

II. *Fra tutte le varietà i cui punti rappresentano biunivocamente senza eccezioni, gli  $S_k$  di un  $S_r$ , il modello grassmanniano  $V_t$  è quello di ordine minimo. Ogni altra varietà rappresentatrice normale, di ordine minimo, è una trasformata omografica di  $V_t$ .*

12. SISTEMI DI  $S_k$  CONTENUTI IN UN COMPLESSO LINEARE. Considerazioni analoghe a quelle svolte per la varietà  $V_t$  si possono fare intorno alla sezione iperpiana  $W_{t-1}$  di  $V_t$ . Anzitutto proviamo che  $W$  è *razionale*.

Riprendiamo perciò a considerare il sistema  $\Sigma$  di rette di  $V_t$ , definito al n. 9. Basterà stabilire la razionalità di  $\Sigma$ , giacchè i punti di  $W$  sono biunivocamente riferiti alle rette di  $\Sigma$ .

Ora, nello  $S_r$ , la varietà dei fasci di  $S_k$ , che hanno lo  $S_{k-1}$ -asse su  $\omega$  e lo  $S_{k+1}$ -sostegno passante per  $O$ , è birazionalmente identica alla varietà delle coppie punto- $S_{k-1}$ , formate con un punto di un dato  $S_{r-k-1}$  e con un  $S_{k-1}$  di  $\omega$ , cioè, in ultima analisi, alla varietà razionale delle  $(k+1)$ -ple di punti tolti rispettivamente da un  $S_{r-k-1}$  e da  $k$  spazi  $S_{r-k}$  dati.

Si può anche definire, entro  $W$ , un sistema  $\Sigma_1$ , d'indice 1, costituito da  $\infty^{t-2}$  rette, nel modo seguente: Si fissi in  $S_r$  un iperpiano  $\omega$  ed una retta  $\Omega$  generica e si considerino i fasci di  $S_k$ , appartenenti al complesso lineare  $w$ , che ha per immagine  $W$ , i quali hanno lo  $S_{k-1}$ -asse su  $\omega$  e lo  $S_{k+1}$ -sostegno appoggiato ad  $\Omega$ . Il sistema  $\Sigma_1$ , delle rette immagini di questi fasci, è precisamente tale che per un punto generico di  $W$  passa una sola retta di  $\Sigma_1$ . È inoltre chiaro che il sistema  $\Sigma_1$  non ha punti base.

Può esistere in  $W$  una varietà  $M_{t-2}$  *fondamentale* pel sistema  $\Sigma_1$ , cioè tale che una retta generica di  $\Sigma_1$  non incontri affatto  $M$ ? Bisognerà ricercare se nel complesso lineare  $w$  possa esistere un sistema  $m$ ,  $\infty^{t-2}$ , di  $S_k$ , tale che un fascio generico di  $S_k$ , appartenente a  $w$ , non abbia in comune con  $m$  alcun elemento; giacchè, in caso contrario,  $m$  avrebbe sempre in comune qualche elemento con un fascio *qualsiasi* contenuto in  $w$ , e quindi, in particolare, coi fasci sopra definiti. La questione che ora ci si affaccia, è l'analogia di quella già risolta al n. 8 pel sistema  $\Sigma$ .

Ragionando come al n. 8, si vede intanto che, se gli  $S_k$  di un sistema  $\infty^{t-2}$ ,  $m$ , non riempiono lo spazio  $S_r$ , ma sibbene una varietà di dimensione  $h$  ( $\leq r-1$ ), deve aver luogo la disuguaglianza:

$$k(h-k) \geq t-2-h+k, \quad \text{cioè: } (k+1)(r-h) \leq 2,$$

la quale, per  $k > 1$ , non è mai soddisfatta, e per  $k = 1$  lo è soltanto quando sia  $h = r - 1$ .

Ora, nel caso  $k = 1$ , se un sistema  $m$  di  $\infty^{t-2}$  rette, contenute in  $w$ , invade lo spazio  $S_r$ , per un punto generico  $P$  di  $S_r$  passa qualche retta di  $m$ , e quindi precisamente  $\infty^{t-2-r+1}$ ; e queste  $\infty^{r-3}$  rette riempiono un cono ad  $r - 2$  dimensioni, il quale sta nell'iperpiano cui appartengono le rette di  $w$  passanti per  $P$ . Sicchè, nell'ipotesi considerata,  $m$  ha comune qualche retta con ogni fascio appartenente a  $w$ .

Che se poi, sempre nel caso  $k = 1$ ,  $m$  riempie una forma  $H$ , questa è necessariamente un insieme di un numero finito (\*) di iperpiani, perchè per ogni punto di  $H$  passano  $\infty^{r-2}$  rette, che debbono stare sull'iperpiano tangente ad  $H$  in quel punto. Si conclude pertanto che, in tal caso, il complesso  $w$  è particolare, perchè contiene degli  $S_{r-1}$  rigati (n. 5).

Proviamo infine che, pur nel caso  $k > 1$ , il fatto eccezionale richiesto si può presentare soltanto quando il complesso  $w$  sia particolare. Fissato invero un punto generico  $P_1$ , dello  $S_r$ , per esso passeranno  $\infty^{t-2(r-k)}$  spazi di  $m$ , i quali, se  $k - 1 > 1$ , dovranno ancora invadere tutto lo  $S_r$ , perchè essi staccano sopra un generico iperpiano un sistema  $\infty^{t'-2} [t' = k(r - k)]$  di  $S_{k-1}$ . Preso un altro punto generico  $P_2$ , per esso passeranno perciò  $\infty^{t-2-2(r-k)}$  spazi di  $m$ , i quali, se  $k - 2 > 1$ , dovranno invadere tutto lo  $S_r$ , perchè staccano sopra un generico  $S_{r-2}$  un sistema  $\infty^{t''-2} [t'' = (k - 1)(r - k)]$  di  $S_{k-2}$ . Così proseguendo, si arriva a fissare in  $S_r$  un gruppo  $(P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$  di  $k - 1$  punti generici, pei quali passano  $\infty^{2(r-k-1)}$  spazi di  $m$  formanti un sistema che indicheremo con  $\bar{m}$ .

Ora, per l'ipotesi che  $m$  sia un sistema eccezionale, nel senso spiegato, per un punto generico di  $S_r$  non deve più passare alcun  $S_k$  di  $\bar{m}$ , perchè altrimenti per un generico  $S_{k-1}$ , passerebbero  $\infty^{r-k-2}$  spazi di  $m$ , situati sull'iperpiano del complesso  $w$ , individuato dall' $S_{k-1}$ , e quindi un fascio appartenente a  $w$ , avrebbe sempre qualche  $S_k$  comune con  $m$ . Cosicchè il sistema  $\bar{m}$  staccherà sopra un  $S_{r-k+1}$  generico un sistema di rette, distribuite in un numero finito di  $S_{r-k}$ , e quindi gli  $S_k$  di  $\bar{m}$  saranno distribuiti in un numero finito di iperpiani passanti per  $(P_1, P_2, \dots, P_{k-1})$ . Ne consegue che il complesso  $w$  è particolare (n. 5) (\*\*).

(\*) O di un numero infinito, ma discreto, se il sistema  $m$  non è algebrico.

(\*\*) Se p. es.  $w$  fosse un complesso lineare speciale (n. 2) di asse  $\Omega$ , esso conterrebbe effettivamente varietà eccezionali del tipo  $m$ . Una tal varietà sarebbe data ad es. dall'insieme degli  $S_k$  appoggiati secondo rette ad un dato  $S_{r-k}$  per  $\Omega$ .



Applicando allora alla varietà  $W$  il ragionamento del n. 9, si conclude che:

*La base minima, entro un complesso lineare generale di spazi  $S_k$ , è data dalla sezione di esso con un altro complesso lineare.*

Se poi si avverte:

1.<sup>o</sup>) che la varietà  $W$ , sezione iperpiana generica di  $V$ , non ha punti multipli;

2.<sup>o</sup>) che la dimensione dell'unico sistema lineare completo formato entro  $w$  dai sistemi  $\infty^{t-2}$ , aventi in comune un dato numero  $n$  di spazi  $S_k$  con ogni fascio di  $S_k$  contenuto in  $w$ , non può essere funzione se non di  $n, r, k$ ;

3.<sup>o</sup>) che d'altra parte la dimensione del sistema lineare staccato su  $W$  delle forme d'ordine  $n$  di  $S_r$ , essendo espressa da

$$\varphi(n, r, k) - \varphi(n - 1, r, k) - 1$$

(ove  $\varphi$  è la funzione considerata al n. 10), dipende anch'essa soltanto da  $n, r, k$ , si conclude, come al n. 10, che « sopra  $W$  non ci sono che intersezioni complete », cioè che:

III. *Ogni sistema algebrico  $\infty^{(k+1)(r-k)-2}$  di  $S_k$ , appartenente ad un complesso lineare generale, è rappresentabile compiutamente con una sola equazione nelle coordinate grassmanniane (oltre, beninteso, a quella del complesso).*

OSSERVAZIONE. È ormai chiaro che anche per le varietà rappresentatrici di un complesso lineare generale vale un teorema analogo al II.

13. PROPRIETÀ DEI SISTEMI DI  $S_k$  CHE HANNO PER IMAGINI LE SEZIONI DI  $V_i$  CON SPAZI LINEARI. Consideriamo ora le sezioni di  $V_i$  cogli spazi lineari di dimensione  $\rho - 2, \rho - 3$ , ecc.

Indichiamo con  $W^{(i)}$  la varietà, di dimensione  $t - i$ , sezione di  $V_i$  con uno spazio lineare generico  $S_{\rho-i}$ , e con  $w^{(i)}$  il sistema di  $S_k$ , di cui essa è imagine. Supposto  $i \leq r - k - 1$ , si può costruire, nel modo seguente, entro  $W^{(i)}$ , un sistema  $\Sigma_i$  di rette, tale che per un punto di  $W^{(i)}$  passi una sola retta del sistema.

Si fissi genericamente in  $S_r$  un iperpiano  $\omega$  ed uno spazio  $\Omega$ , ad  $i$  dimensioni, e si considerino i fasci di  $S_k$ , che appartengono a  $w^{(i)}$  e che hanno lo  $S_{k-1}$ -asse su  $\omega$ , e lo  $S_{k+1}$ -sostegno appoggiato in un punto ad  $\Omega$ . Dato un  $S_k$  di  $w^{(i)}$ , questo sega  $\omega$  in un  $S_{k-1}$ , e gli  $S_k$  di  $w^{(i)}$ , passanti per tale  $S_{k-1}$ , riempiono un  $S_{r-i}$ , che appoggiasi in un punto ad  $\Omega$ . Questo punto, congiunto col dato  $S_k$ , dà luogo ad un  $S_{k+1}$ , sostegno di un fascio di  $S_k$ , appartenente a  $w^{(i)}$  e contenente il dato  $S_k$ .

Un'analisi analoga a quella svolta diffusamente nel caso  $i = 1$  e che omettiamo, perchè dovremmo addentrarci in una discussione minuziosissima, che non offrirebbe gran che di concettualmente nuovo, prova che in  $W^{(i)}$  non esistono varietà a  $t - i - 1$  dimensioni, fondamentali pel sistema  $\Sigma_i$  (\*), sicchè si può, come al solito, affermare che una sezione iperpiana costituisce sopra  $W^{(i)}$  la base minima, e che le forme di un ordine qualunque staccano sopra  $W^{(i)}$  un sistema completo.

Ciò vale per  $i \leq r - k - 1$ . Ma se  $k > r - k - 1$ , la conclusione a cui siamo pervenuti vale anche per  $i \leq k$ . Basta infatti osservare che la varietà grassmanniana d'indici  $(r, k)$  è omograficamente equivalente alla grassmanniana d'indici  $(r, r - k - 1)$ , giacchè dalla totalità degli  $S_k$  di  $S_r$  si passa alla totalità degli  $S_{r-k-1}$  di  $S_r$ , mediante una reciprocità dello spazio, la quale muta un complesso lineare di  $S_k$  in un complesso lineare di  $S_{r-k-1}$ . Si può dunque enunciare:

IV. Entro un sistema  $\infty^{t-i}$ ,  $w^{(i)}$ , di  $S_k$  ( $i \leq \chi$ , ove  $\chi$  è il maggiore dei due interi  $k, r - k - 1$ ), che sia base per un generico sistema lineare  $\infty^{t-1}$  di complessi lineari, non esistono altri sistemi algebrici  $\infty^{t-i-1}$ , all'infuori delle intersezioni complete di  $w^{(i)}$  coi complessi dei varî gradi.

Aggiungeremo che ogni sistema  $\infty^{t-i}$  di  $S_k$ , base per un sistema lineare  $\infty^{t-1}$  di complessi lineari ( $i \leq \chi + 1$ ), è razionale.

Invero, appena sia dimostrata la cosa per  $i = j$ , ne segue per  $i = j - 1$ , giacchè la varietà  $W^{(j-1)}$ , avendo le sezioni iperpiane  $W^{(j)}$  razionali, e contenendo inoltre un sistema  $\Sigma_{j-1}$ , d'indice 1, di rette, risulta birazionalmente identica alla varietà delle coppie di punti tolti risp. da un  $S_{i-j}$  e da una retta. Che poi il teorema sia vero per  $i = r - k$ , risulta subito da ciò, che gli  $S_k$  di un sistema  $w^{(r-k)}$  risultano in corrispondenza biunivoca colle loro tracce sopra un dato iperpiano di  $S_r$ , in quanto appunto per un  $S_{k-1}$  di  $S_r$  passa un solo  $S_k$  di  $w^{(r-k)}$ .

(\*) Così ad es. nel caso  $i = 2$  ci si trova a dover caratterizzare, in base alla disuguaglianza  $(k + 1)(r - k) \leq 3$ , che è soddisfatta per  $k = 2, h = r - 1$ , oppure  $k = 1, h = r - 1$ , una forma di  $S_r$ , contenente  $\infty^{3(r-3)}$  piani od una forma contenente  $\infty^{2r-5}$  rette. Quanto alla prima, si vede subito, in modo analogo a quel che s'è fatto per  $i = 1$ , ch'essa è costituita da un numero finito d'iperpiani; quanto alla seconda, si risponde mediante la proposizione seguente: Ogni forma irriducibile di  $S_r$ , contenente  $\infty^{2r-5}$  rette, o è una quadrica o un sistema  $\infty^1$  di  $S_{r-2}$  [Cfr. SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale*, ecc. (Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. XV, 1901), n. 10]. Veramente nella mia Nota citata, il teorema si trova per  $r = 4$ ; ma il ragionamento si estende subito.

L'identità proiettiva delle grassmanniane d'indici  $(r, k)$  ed  $(r, r - k - 1)$  prova infine che si può far crescere  $i$  fino al maggiore dei due interi  $k + 1, r - k$ .

In particolare, dal teorema IV si trae che la sezione di  $V_i$  con un generico  $S_{\rho-i}$  ( $i \leq \chi$ ) è una varietà normale. Orbene, questa proprietà delle sezioni spaziali di  $V_i$ , vale indipendentemente dal vincolo  $i \leq \chi$ , cioè:

*La sezione di  $V_i$  con uno spazio lineare generico, di dimensione qualunque, è una varietà normale.*

Ciò segue come corollario immediato di una proprietà da me altrove dimostrata (\*) per le varietà  $M_i$  a irregolarità superficiale nulla (cioè prive di sistemi continui completi non lineari di  $M_{i-1}$ ), qual'è appunto la varietà razionale  $V_i$ .

14. QUESTIONI DI REALITÀ. Nella rappresentazione grassmanniana degli  $S_k$  di  $S_r$ , ogni  $S_k$  reale è evidentemente rappresentato da un punto reale e due  $S_k$  complessi-coniugati, da due punti complessi-coniugati di  $V_i$ ; e quindi ad un punto reale di  $V_i$  non può che corrispondere un  $S_k$  reale di  $S_r$ .

Ciò posto, si vede facilmente che  $V_i$  è costituita da una sola *falda reale*, nel senso cioè che due punti reali qualunque di  $V_i$  si possono sempre congiungere con un cammino continuo reale, tutto giacente in  $V_i$ . E invero, dati in  $S_r$  due  $S_k$  reali, si possono p. es. considerare  $k + 1$  rette  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , che congiungano  $k + 1$  punti reali indipendenti  $P_0, P_1, \dots, P_k$  di uno degli  $S_k$  dati, ordinatamente con  $k + 1$  punti reali indipendenti  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ , dell'altro. Fissata poi una  $(k + 1)$ -pla di punti reali  $R_0, R_1, \dots, R_k$ , tolti genericamente da  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , si ponga fra le rette  $a_i, a_j$  ( $i, j = 0, 1, \dots, k$ ) la proiettività  $\left( \begin{matrix} P_i, Q_i, R_i \\ P_j, Q_j, R_j \end{matrix} \right)$ . Una  $(k + 1)$ -pla variabile di punti reali, omologhi in queste proiettività, sarà congiunta da un  $S_k$  reale, il quale descrive un sistema continuo  $\infty^1$  contenente i due dati  $S_k$ .

L'analoga proprietà vale anche per la sezione  $W^{(i)}$  di  $V_i$  con un  $S_{\rho-i}$  reale ( $i \leq \chi + 1$ ). Proviamo anzitutto la cosa per  $i = r - k$ . Fissati due  $S_k$  reali,  $\alpha, \beta$ , del sistema  $w^{(r-k)}$ , che ha per immagine  $W^{(r-k)}$ , e un generico iperpiano reale  $\pi$  di  $S_r$ , in forza di quanto precede, gli  $S_{k-1}$  traccie di  $\alpha, \beta$  su  $\pi$ , potranno sempre esser « congiunti » da un sistema continuo reale  $\infty^1$  di  $S_{k-1}$ . Da ognuno di questi  $S_{k-1}$  esce un  $S_k$  reale di  $w^{(r-k)}$ , e il luogo di questi  $S_k$  è appunto un sistema continuo  $\infty^1$  contenente  $\alpha, \beta$ . Si passa quindi da  $i = r - k$  ad  $i = r - k - 1$ , ecc.; ed in generale da  $i = j$  ad  $i = j - 1$ , osservando che

(\*) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (citata), nn. 14 e 17.

$W^{(r-1)}$  contiene il sistema  $\Sigma_{j-1}$  di rette reali, e dà per sezione, con un iperpiano reale, una varietà  $W^{(r)}$ , formata d'una sola falda reale. Si conclude dunque che:

V. La varietà grassmanniana  $V_i$  è costituita da una sola falda reale ed è tagliata da un  $S_{\rho-i}$  reale ( $i \leq \chi + 1$ ) secondo una varietà reale, costituita pure da una sola falda.

15. RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA  $V_i$ . Una rappresentazione birazionale assai semplice della  $V_i$  su di uno spazio  $S_t$ , si ottiene nel modo seguente:

Si ricordi che fissate  $(k+1)(r-k)+1 (=t+1)$  delle coordinate grassmanniane di un  $S_k$ , e siano p. es. il determinante  $y_0$  delle prime  $k+1$  colonne tolte dalla matrice delle coordinate omogenee di  $k+1$  punti di  $S_r$ , ed i determinanti  $y_1, y_2, \dots, y_t$ , ciascuno dei quali ha  $k$  colonne comuni col precedente, le altre coordinate dello  $S_k$ , finchè sia  $y_0 \neq 0$ , si esprimono razionalmente mediante  $y_0, y_1, \dots, y_t$  (\*). E viceversa, dato lo  $S_k$ , restano individuati i valori delle  $y$  (a meno, beninteso, d'un fattore di proporzionalità). Sicchè, ponendo  $z_i = \frac{y_i}{y_0}$  ( $i = 1, \dots, t$ ), e indicando con  $u_0, u_1, \dots, u_\rho$  le coordinate omogenee di un punto dello  $S_\rho$ , dalle espressioni cui si è alluso, seguono le formole che danno le coordinate non omogenee  $v_1, v_2, \dots, v_\rho$  di un punto di  $V_i$  (ove si è posto  $v_i = \frac{u_i}{u_0}$  ed  $u_0 = y_0, u_1 = y_1, \dots, u_t = y_t$ ), come funzioni razionali invertibili delle coordinate non omogenee  $z_1, \dots, z_t$  di un punto d'un  $S_t$ . È chiaro che la rappresentazione ottenuta si lascia interpretare geometricamente come la proiezione di  $V_i$  sopra lo  $S_t: u_{t+1} = \dots = u_\rho = 0$ , dallo spazio  $S_{\rho-t-1}: u_0 = u_1 = \dots = u_t = 0$ . Dunque:

*Esistono, nello spazio  $S_\rho$ , spazi  $S_{\rho-t-1}$  tali, che da uno di essi la  $V_i$  proiettasi univocamente sopra uno spazio  $S_t$ .*

Riducendo a forma intera le  $\rho - t$  relazioni che esprimono le  $v$  mediante le  $z$  — cioè mediante le  $v_1, v_2, \dots, v_t$  — e introducendo le coordinate omogenee  $u$ , si hanno le equazioni di altrettante forme — di cui alcune quadratiche, altre cubiche, ecc. — passanti per  $V$  e segantisi altrove secondo una varietà  $M$ . E poichè i punti della completa intersezione  $V+M$ , pei quali  $u_0 \neq 0$ , appartengono a  $V$ , così la  $M$  dovrà giacere sull'iperpiano  $u_0 = 0$ . Ciò è ben d'accordo con quanto si vedrà nel n.° successivo.

(\*) BERTINI, op. cit., p. 38.

Volendo illustrare in un caso concreto le considerazioni generali sopra esposte, ci riferiremo all'ipotesi  $r = 4$ ,  $k = 1$ . Chiamati  $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$  due punti di  $S_4$ , e posto  $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ , la  $V_6$  risulta intersezione completa delle 5 quadriche seguenti, che, come subito si verifica, sono linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv p_{01} p_{23} + p_{12} p_{03} + p_{02} p_{31} = 0, & f_1 &\equiv p_{01} p_{24} + p_{12} p_{04} + p_{02} p_{41} = 0, \\ f_2 &\equiv p_{01} p_{34} + p_{13} p_{04} + p_{03} p_{41} = 0, & f_3 &\equiv p_{02} p_{34} + p_{23} p_{04} + p_{03} p_{42} = 0, \\ & & f_4 &\equiv p_{12} p_{34} + p_{23} p_{14} + p_{13} p_{42} = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo le prime tre equazioni rispetto a  $p_{23}$ ,  $p_{24}$ ,  $p_{34}$ , s'ottiene la rappresentazione parametrica di  $V_6$  sullo spazio  $S_6$  ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ ):

$$\begin{aligned} p_{01} &= \lambda_6^2, & p_{12} &= -\lambda_0 \lambda_6, & p_{03} &= \lambda_1 \lambda_6, & p_{13} &= -\lambda_2 \lambda_6, & p_{02} &= -\lambda_3 \lambda_6, \\ p_{04} &= \lambda_4 \lambda_6, & p_{41} &= \lambda_5 \lambda_6, & p_{23} &= \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3, & p_{24} &= \lambda_0 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_5, \\ & & p_{34} &= \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_5. \end{aligned}$$

Le  $\rho - t$  forme, di cui parlavamo in generale, sono appunto attualmente le  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ , le quali si tagliano, fuori di  $V_6$ , in una  $M_6$ , del 3° ordine, appartenente all'iperpiano  $p_{01} = 0$ . Si ritrova così che le sezioni curvilinee di  $V_6$  sono quintiche ellittiche normali, ecc., ecc.

La rappresentazione suddetta può interpretarsi come la proiezione di  $V_6$  dal piano  $p_{01} = p_{12} = p_{03} = p_{13} = p_{02} = p_{04} = p_{14} = 0$ , sullo spazio  $S_6$

$$p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0.$$

Si osserverà anzi che, nel caso attuale, il centro di proiezione giace interamente sopra  $V_6$ .

16. PROPRIETÀ DELLE SEZIONI SPAZIALI DI  $V_t$ . Per ottenere altre proprietà delle sezioni spaziali di  $V_t$  e più precisamente di quelle prodotte da spazi  $S_{\rho-i}$ , ove  $i$  sorpassi il limite  $\chi + 1$  considerato nel n. 13, dimostreremo il teorema generale seguente:

VI. Se  $V_t$  è una qualunque varietà, d'irregolarità superficiale nulla, priva di punti multipli in uno spazio  $S_\rho$ , sulla quale una sezione iperpiana generica costituisca la base minima, per la sezione di  $V_t$  con un generico  $S_{\rho-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, t-1$ ), si presentano soltanto le alternative seguenti:

- a) Il suo genere geometrico è nullo.
- b) Il suo genere geometrico è uguale ad 1 ed il suo sistema canonico è d'ordine zero.

c) Essa è una varietà canonica o sottocanonica (cioè le sue sezioni iperpiane sono varietà del sistema canonico o sottomultiple di tali varietà).

Il teorema, per quel che concerne  $V_t$ , è pressochè evidente, in quanto, se  $V_t$  ha il genere geometrico  $> 0$  ed il sistema canonico d'ordine  $> 0$ , una sua varietà canonica  $K$  equivarrà ad un multiplo, p. es. secondo  $\lambda$ , della sezione iperpiana  $A$ , che forma la base minima. L'ipotesi che l'irregolarità superficiale di  $V_t$  sia nulla, è però essenziale per questa deduzione, chè altrimenti si potrebbe dire soltanto che  $K$  e  $\lambda A$  sono « algebricamente equivalenti ». Si osserverà inoltre che la  $V_t$  dovrà essere priva di varietà eccezionali di 1.<sup>a</sup> specie, perchè, in caso diverso, queste dovrebbero entrare nella base; cosicchè il sistema  $|K|$ , cui sopra s'è alluso, è il sistema canonico « puro ».

Conducansi adesso genericamente per  $V_t$   $\rho - t$  forme degli ordini

$$n_1, n_2, \dots, n_{\rho-t} (\nu = n_1 + n_2 + \dots + n_{\rho-t}),$$

le quali si taglino altrove lungo una  $M_t$ , appoggiata a  $V_t$  secondo una  $\Phi_{t-1}$ . Si sa (\*) che come *forme aggiunte* alla  $V_t$ , possono assumersi le forme passanti per  $\Phi$ ; ed inoltre che l'eventuale sistema canonico (puro) su  $V_t$  è staccato, fuori di  $\Phi$ , dalle aggiunte d'ordine  $\nu - \rho - 1$ . Quanto alla  $\Phi$ , essa, come ogni altra varietà algebrica a  $t - 1$  dimensioni tracciata su  $V_t$ , dovrà esser equivalente ad un multiplo della sezione iperpiana  $A$ : sia p. es.  $\Phi \equiv \mu A$ .

La  $V_t$  avrà allora il genere nullo, se  $\mu > \nu - \rho - 1$ ; il genere uguale ad 1, se  $\mu = \nu - \rho - 1$ ; sarà canonica, se  $\mu = \nu - \rho - 2$ ; e infine sottocanonica, se  $\mu < \nu - \rho - 2$ . Tagliando tutto con un generico  $S_{\rho-t}$ , la  $W_{t-i}$ , staccata su  $V_t$ , sarà anch'essa priva di punti multipli e intersezione parziale di  $\rho - t$  forme, degli ordini  $n_1, n_2, \dots, n_{\rho-t}$ , segantisi altrove in una  $N_{t-i}$  — sezione di  $M_t$  — appoggiata a  $W$  secondo una  $\Psi_{t-i-1}$  — sezione di  $\Phi_{t-1}$  —; ed inoltre  $\Psi$  risulterà equivalente al multiplo secondo  $\mu$  d'una sezione iperpiana di  $W$ .

Di più anche  $W$  avrà l'irregolarità superficiale nulla (\*\*), e quindi varrà pel suo eventuale sistema canonico tutto quanto s'è detto pel sistema canonico di  $V_t$ . La  $W$  sarà cioè di genere nullo, se  $\mu > \nu - \rho + i - 1$ ; di genere 1 e a sistema canonico d'ordine zero, se  $\mu = \nu - \rho + i - 1$ ; canonica se  $\mu = \nu - \rho + i - 2$ ; sottocanonica, se  $\mu < \nu - \rho + i - 2$ . C'è da avvertire soltanto che, nel caso attuale, non si può escludere a priori che  $W$  sia priva

(\*) Cfr. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione* (citata), §§ 2, 3. Ivi si tratta di forme aggiunte a curve e superficie; ma la trattazione si estende subito alle varietà superiori.

(\*\*) Loc. citato alla nota (\*) pag. 105.

di varietà eccezionali di 1.<sup>a</sup> specie, in quanto non si sa che il numero base di  $W$  sia uguale ad 1. Sicchè su  $W$  il sistema canonico staccato dalle aggiunte, fuori di  $\Psi$ , può essere eventualmente « impuro ».

Qualora  $V_t$  sia di genere geometrico nullo, ma la sua curva sezione con un generico  $S_{\rho-t+1}$  sia di genere  $> 0$ , dovrà risultare

$$v - \rho - 1 < \nu \leq v - \rho + t - 2,$$

e quindi esisterà un valore di  $i$ , fra 1 e  $t - 1$ , tale che  $v - \rho + i - 1 = \mu$ ; e qualora questo valore di  $i$  sia  $t - 1$ , le curve sezioni di  $V_t$  saranno ellittiche e le varietà superiori di genere nullo. Che se invece quel valore di  $i$  è minore di  $t - 1$ , la  $W_{t-i}$  corrispondente sarà a sistema canonico d'ordine zero, le sezioni superiori di genere nullo, la sezione immediatamente inferiore sarà canonica e le successive sottocanoniche.

Applichiamo tutto ciò ad una grassmanniana  $V_t$  d'indici  $(r, k)$ , ricordando (nn. 10, 13) ch'essa e tutte le sue sezioni spaziali sono varietà normali. Anzitutto, l'unico caso in cui le sezioni spaziali di  $V_t$ , fino alle sezioni curvilinee, sono di genere nullo, è il caso  $r = 3, k = 1$ , perchè secondo la formola di SCHUBERT [citata alla nota (\*\*\*) pag. 92] l'ordine delle sezioni curvilinee (curve razionali normali, in tal caso) si riduce alla dimensione  $\rho - t + 1$  del relativo spazio ambiente, soltanto nel caso suddetto. E similmente, l'unico caso in cui le sezioni curvilinee di  $V_t$  sono ellittiche, è il caso  $r = 4, k = 1$  (o il caso duale  $r = 4, k = 2$ ). Si conclude che:

VII. *Le sezioni spaziali di una grassmanniana  $V_t$  sono tutte di genere nullo, solo quando  $V_t$  ha gli indici  $(3, 1)$ . Nel caso successivo  $(4, 1)$ , o nel caso duale  $(4, 2)$ , le sezioni curvilinee sono ellittiche e le sezioni superiori di genere geometrico nullo. In tutti gli altri casi esiste una tal dimensione  $l (> \rho - t + 1)$  dello spazio lineare secante, che le sezioni corrispondenti sono varietà a sistema canonico d'ordine zero, la sezione spaziale immediatamente inferiore è canonica e le successive sottocanoniche, mentre le sezioni superiori hanno il genere geometrico nullo.*

Così p. es. per gli indici  $(5, 1)$  le sezioni curvilinee di  $V_5$ , che è una varietà del 14° ordine dello  $S_{14}$ , sono curve canoniche del genere 8; le sezioni superficiali, superficie regolari a curva canonica d'ordine zero, e le sezioni superiori, varietà di genere geometrico nullo.

Una maggiore determinazione del teor. VII, per  $k = 1$  ed  $r$  qualunque, si vedrà nel n.º seguente.

17. FORMULA DI POSTULAZIONE DELLA VARIETÀ  $V_t$ . MODO DI CALCOLARE

L'ORDINE E I GENERI ARITMETICI DELLE SEZIONI SPAZIALI DI  $V_r$ . Indichiamo con  $\pi_{t-i}$  il genere aritmetico della sezione  $W_{t-i}^{(0)}$  di  $V_t$  con un generico  $S_{\rho-i}$  ( $i=0, \dots, t$ ), cosicchè  $\pi_t$  sarà il genere aritmetico e  $\pi_0 + 1 (= n_{r,k})$  l'ordine di  $V$  (\*).

Per  $i \leq \chi + 1$  (n. 13) sappiamo già che  $\pi_{t-i} = 0$ , in quanto la relativa  $W^{(0)}$  è razionale. Ne deriva che, per  $n$  abbastanza alto ( $\geq l$ ), la postulazione di  $V_r$  per le forme d'ordine  $n$  sarà espressa da (\*\*):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(n, r, k) = & \binom{n+t}{t}(\pi_0 + 1) - \binom{n+t-1}{t-1}(\pi_0 + \pi_1) + \\ & + \binom{n+t-2}{t-2}(\pi_1 + \pi_2) - \dots \\ & + (-1)^{t-\chi-2} \binom{n+\chi+2}{\chi+2}(\pi_{t-\chi-3} + \pi_{t-\chi-2}) + \\ & + (-1)^{t-\chi-1} \binom{n+\chi+1}{\chi+1} \pi_{t-\chi-2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ora, la dimensione del sistema staccato su  $V_r$  dalle forme di un ordine qualunque  $n$ , è data dalla funzione  $\varphi(n, r, k)$ , considerata nel n. 10; dunque, per  $n \geq l$ , si avrà:

$$\Phi(n, r, k) = \varphi(n, r, k) + 1, \quad (2)$$

donde intanto segue, come è del resto intuitivo, che  $\Phi$  dipende soltanto da  $n, r, k$ . Se adesso si osserva che ciascuno dei due membri della (2), per valori comunque dati di  $r, k$ , dipende razionalmente da  $n$  (è anzi un polinomio in  $n$ ) e che d'altronde la (2) vale per infiniti valori di  $n$  (quelli non inferiori ad  $l$ ), si conclude ch'essa riducesi ad un'identità in  $n, r, k$ , cioè che *la formula di postulazione (1) vale per ogni valore di  $n$ .*

Questa osservazione offre il modo di calcolare i generi aritmetici  $\pi$ , ogni volta si conosca l'espressione effettiva di  $\varphi$ . Non sarebbe difficile ottenere quest'espressione, tenendo conto delle considerazioni che svolgeremo nella dimostrazione algebrica del teor. I, ed estendendo il computo fatto dal SISAM nel caso particolare  $k = 1$  (\*\*); noi non c'intratteremo diffusamente su tale questione, limitandoci ad osservare che, appunto nel caso  $k = 1$ , mediante

(\*) Cfr. la mia Memoria citata, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, n. 4.

(\*\*) Ibidem, n. 4 e nn. 30, 31.

(\*\*\*) Loc. cit. nella Prefazione.



l'espressione di  $\varphi$ , esplicitamente calcolata dal SISAM, essendo

$$\chi = r - 2, \quad t = 2(r - 1),$$

la (1) dà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \binom{n+r}{r} \binom{n+r-1}{r-1} &= \binom{n+2r-2}{2r-2} (\pi_0 + 1) - \\ &- \binom{n+2r-3}{2r-3} (\pi_0 + \pi_1) + \dots \\ &+ (-1)^{r-2} \binom{n+r}{r} (\pi_{r-3} + \pi_{r-2}) + (-1)^{r-1} \binom{n+r-1}{r-1} \pi_{r-2}. \end{aligned}$$

Facendo in questa  $n = -r$ , se ne ricava  $\pi_{r-2} = 0$ , e ponendo poi

$$n = -r - 1, \quad -r - 2, \quad \dots, \quad -2r + 2,$$

si ottengono successivamente i valori di  $\pi_{r-3}, \pi_{r-4}, \dots, \pi_1, \pi_0$ . Si trova così:

$$\pi_{r-3} = 1, \quad \pi_{r-4} = \binom{r}{2} - 2, \quad \pi_{r-5} = 2 \binom{r+1}{4} - 2 \binom{r}{2} + 3, \dots$$

e si conclude che:

VIII. *La sezione della grassmanniana  $V_{2r-2}$  di  $S_\rho \left[ \rho = \binom{r+1}{2} - 1 \right]$  rappresentatrice delle rette di  $S_r$ , con un generico  $S_{\rho-r-1}$ , ha il sistema canonico di ordine zero ed il genere uguale ad 1. Le sezioni di  $V$  cogli spazi superiori hanno tutte il genere nullo e sono razionali — tranne al più la sezione con un  $S_{\rho-r}$  —; la sezione con un  $S_{\rho-r-2}$  è una varietà canonica e le sezioni con spazi inferiori  $S_{\rho-r-i}$  ( $i = 3, 4, \dots, r-3$ ) sono varietà sottocanoniche di indice  $i-1$  (cioè tali che il multiplo secondo  $i-1$  delle loro sezioni iperpiane, costituisce su ognuna di esse, il relativo sistema canonico).*

Così ad es.

per  $r = 5, k = 1$  si ha:

$$\pi_0 = 13, \quad \pi_1 = 8, \quad \pi_2 = 1$$

$$\pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \pi_7 = \pi_8 = 0;$$

per  $r = 6, k = 1$ :

$$\pi_0 = 41, \quad \pi_1 = 43, \quad \pi_2 = 13, \quad \pi_3 = 1,$$

$$\pi_4 = \dots = \pi_{10} = 0;$$

per  $r = 7, k = 1$ :

$$\pi_0 = 131, \quad \pi_1 = 199, \quad \pi_2 = 101, \quad \pi_3 = 19, \quad \pi_4 = 1,$$

$$\pi_5 = \dots = \pi_{12} = 0; \text{ ecc.}$$

Nell'enunciato precedente abbiamo parlato dei generi delle sezioni considerate, senza distinguere i generi aritmetici dai geometrici, perchè la sezione di  $V_i$  con un  $S_{r-i}$ , ha sempre l'irregolarità  $(t-i)$ -dimensionale nulla. Ciò segue agevolmente dalle proprietà generali di una varietà algebrica, che ho esposto altrove (\*).

OSSERVAZIONE. La determinazione dei generi  $\pi$ , anche per una varietà grassmanniana d'indici  $(r, k)$ , con  $k > 1$ , può ritenersi virtualmente fatta non appena si conosca la *dimensione* della sezione spaziale di genere 1.

### § 3. Dimostrazione algoritmica del teorema fondamentale.

18. IDENTITÀ FONDAMENTALI. Conserviamo le notazioni introdotte nel n. 7. Il teorema di EULERO, applicato alla forma algebrica  $F$ , dà luogo alle identità:

$$\begin{aligned} n F &\equiv \sum_{i_0} x_{i_0}^{(0)} \frac{\partial F}{\partial x_{i_0}^{(0)}}, & n \frac{\partial F}{\partial x_{i_0}^{(0)}} &\equiv \sum_{i_1} x_{i_1}^{(1)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)}}, \dots, \\ n \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \dots \partial x_{i_{k-1}}^{(k-1)}} &\equiv \sum_{i_k} x_{i_k}^{(k)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}}, \end{aligned}$$

ove g'indici  $i$  variano da 0 ad  $r$ . Da queste poi segue:

$$n^{k+1} F \equiv \sum_{i_0 i_1 \dots i_k} x_{i_0}^{(0)} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_k}^{(k)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}}. \quad (1)$$

Inoltre, poichè dati  $k$  dei punti  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ , e siano p. e.  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  la  $F=0$  deve rappresentare un cono col vertice nello  $S_{k-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ , l'iperpiano polare di un punto qualunque  $x^{(0)}$  dello  $S_r$ , rispetto ad  $F=0$ , passerà pei punti  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ . Avremo pertanto le identità:

$$\sum_{i_h} x_{i_h}^{(j)} \frac{\partial F}{\partial x_{i_h}^{(h)}} \equiv 0 \quad (h = j; h, j = 0, 1, \dots, k). \quad (2)$$

La (1) vale qualunque sia la forma  $F$  d'ordine  $n$  nelle  $k+1$  serie di variabili  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ ; mentre le (2) caratterizzano (n. 7) le forme  $F$  che, ugualiate a zero, rappresentano complessi di  $S_k$ .

(\*) *Fondamenti* (citata), nn. 32, 33, 34. Naturalmente l'affermazione del testo è subordinata alle stesse ipotesi fatte nel mio lavoro citato.

Proviamo ora che se  $F = 0$  è l'equazione di un complesso di grado  $n$  di  $S_k$ , ha pur luogo l'identità:

$$\pm n^{k+1-\nu} F \equiv \sum_{i_0 i_1 \dots i_k} x_{i_0}^{(j_0)} x_{i_1}^{(j_1)} \dots x_{i_k}^{(j_k)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}}, \quad (3)$$

ove  $(j_0, j_1, \dots, j_k)$  è una fissata permutazione  $S$  degli apici  $(0, 1, \dots, k)$  e  $\nu = \sum_{i=1}^m (\nu_i - 1)$ , essendo  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$  gli ordini dei cicli in cui si decompone la  $S$ . Si dovrà inoltre scegliere il segno  $+$  o il segno  $-$ , secondo che  $S$  è pari o dispari.

Dimostreremo la (3) per induzione, supponendola già stabilita per le forme di  $k$  serie di  $r+1$  variabili (forme relative a complessi di  $S_{k-1}$  in  $S_r$ ). Poichè la (3) è vera per le forme di una sola serie di variabili (in quanto allora essa riducesi alla identità di EULERO), quando l'avremo dedotta per forme di  $k+1$  serie di variabili, essa risulterà stabilita in generale.

Per non complicare soverchiamente le notazioni, supponiamo p. e. che sia 0 uno degli apici che viene spostato dalla permutazione  $S$  e che sia  $C \equiv (0, 1, \dots, h)$  il ciclo individuato dall'apice 0 entro  $S$ .

La  $S$  subordini inoltre fra gli apici restanti  $h+1, \dots, k$  la sostituzione  $T \equiv \begin{pmatrix} a, \dots, l \\ h+1, \dots, k \end{pmatrix}$ , talchè sia  $S \equiv C T$ . Per l'ipotesi che  $F = 0$  rappresenti un complesso di  $S_k$ , varrà l'identità

$$\sum_{i_0} x_{i_0}^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_{i_0}^{(0)}} \equiv 0,$$

che si ottiene dalla (2) per  $h=0, j=1$ . Derivando una volta rispetto a ciascuna delle variabili  $x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_k}^{(k)}$ , ne trarremo:

$$\sum_{i_0} x_{i_0}^{(1)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}} + \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}} \equiv 0.$$

Moltiplichiamo ora i due membri di quest'identità per

$$x_{i_1}^{(2)} x_{i_2}^{(3)} \dots x_{i_{h-1}}^{(h)} x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \dots x_{i_k}^{(l)}$$

e sommiamo rispetto ad  $i_1, i_2, \dots, i_k$  (da 0 ad  $r$ ). Avremo:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i_0 i_1 \dots i_k} x_{i_0}^{(1)} x_{i_1}^{(2)} \dots x_{i_{h-1}}^{(h)} x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \dots x_{i_k}^{(l)} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_{i_0}^{(0)} \partial x_{i_1}^{(1)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}} + \\ & + \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1}^{(2)} x_{i_2}^{(3)} \dots x_{i_h}^{(0)} x_{i_{h+1}}^{(a)} \dots x_{i_k}^{(l)} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Osserviamo che il secondo sommatorio non è che l'espressione trasformata di

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1}^{(0)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}}$$

qualora si operi ivi sugli apici  $0, 2, \dots, k$  dei coefficienti  $x_{i_1}^{(0)} \dots x_{i_k}^{(k)}$  delle derivate, la sostituzione  $S' \equiv C' T$ , ove s'è indicato con  $C'$  il ciclo  $(0, 2, 3, \dots, h)$ . Avendo ammesso la validità della (3) pei complessi di  $S_{k-1}$ , poichè la  $F = 0$ , qualora si assumano come variabili soltanto quelle delle serie  $x^{(0)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$  rappresenta appunto un complesso di  $S_{k-1}$  in  $S_r$ , potremo scrivere:

$$\pm n^{k-v'} F \equiv \sum_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1}^{(2)} x_{i_2}^{(3)} \dots x_{i_n}^{(a)} x_{i_{n+1}}^{(a)} \dots x_{i_k}^{(l)} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}^{(0)} \partial x_{i_2}^{(2)} \dots \partial x_{i_k}^{(k)}}, \quad (5)$$

dove  $v'$  è il numero analogo a  $v$ , ma relativo alla sostituzione  $S'$ , ed il segno da assumersi è il  $+$  od il  $-$ , secondo che  $S'$  è pari o dispari.

Se ora si tiene conto del fatto che:

$$S \equiv C T \equiv (0, 1) C' T \equiv (0, 1) S',$$

e quindi che  $v = v' + 1$  e che  $S$  ed  $S'$  sono di classe opposta, dalle (4), (5) segue senz'altro la (3).

19. IL SIMBOLO OPERATIVO  $\Delta_{x_{i_0}^{(0)} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_k}^{(k)}}$  E LE SUE PROPRIETÀ. Rappresentiamo con questo simbolo lo sviluppo del determinante che ha per termine principale  $\frac{\partial}{\partial x_{i_0}^{(0)}} \times \frac{\partial}{\partial x_{i_1}^{(1)}} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_{i_k}^{(k)}}$ , ove  $(i_0, i_1, \dots, i_k)$  è una fissata permutazione di  $(0, 1, \dots, k)$ ; e notiamo alcune proprietà di tal simbolo, le quali ci saranno tosto utili.

a) Se  $F$  è una forma qualunque d'ordine  $n$ , nelle serie di variabili  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ , l'espressione  $G \equiv \Delta_{x_{i_0}^{(0)} \dots x_{i_k}^{(k)}} F$  è una forma d'ordine  $n - 1$  in ciascuna delle serie  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ . La cosa è senz'altro evidente.

b) Qualunque sia la forma  $F$ , delle  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ , l'espressione  $G$  si annulla identicamente, quando nel simbolo  $\Delta$  s'identifichino le variabili degli stessi indici, di due serie diverse. Infatti, in tale ipotesi, s'identificano due linee del determinante simbolico che definisce  $\Delta$ .

c) Se poi  $F$  è una tal forma delle  $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ , che  $F = 0$  rappresenti un complesso di grado  $n$  di  $S_k$ ,  $G = 0$  rappresenterà in conseguenza un complesso di grado  $n - 1$  di  $S_k$ .

Per dimostrare questo, basterà provare che le derivate di ordine  $n - 2$  di  $G$ , rispetto alle variabili di una qualunque serie, e sia p. es.  $x^{(k)}$ , si annullano identicamente quando le  $x^{(k)}$  coincidano ordinatamente colle variabili di un'altra serie (n. 7).

Affine di non complicare le notazioni, nel calcolo successivo sopprimeremo l'apice  $k$  nelle  $x^{(k)}$ . Tenendo conto della definizione del simbolo  $\Delta$ , si ha subito:

$$\frac{\partial^{n-2} G}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \equiv \sum_{j_0 j_1 \dots j_k} \varepsilon_{j_0 j_1 \dots j_k} \frac{\partial^{n+k-1} F}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_{j_k}^{\alpha_{j_k}+1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^{n-2} G}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}} \right\} (6)$$

$(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n - 2),$

ove  $(j_0, j_1, \dots, j_k)$  è una permutazione di  $(i_0, i_1, \dots, i_k)$  ed  $\varepsilon_{j_0 j_1 \dots j_k}$  è l'unità positiva o negativa secondo che  $(j_0, j_1, \dots, j_k)$  ed  $(i_0, i_1, \dots, i_k)$  sono della stessa classe o di classe opposta.

Per l'ipotesi che l'equazione  $F = 0$  rappresenti un complesso di grado  $n$  di  $S_k$ , la

$$H \equiv \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_{j_k}^{\alpha_{j_k}+1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

s'annulla identicamente, quando le  $x$  coincidono colle variabili di un'altra serie. Ora, poichè  $H$  è una forma lineare nelle  $x$ , questo fatto, a cagione del teorema di EULERO, può esprimersi mediante le identità

$$\sum_i x_i^{(h)} \frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0 \quad (h = 0, 1, \dots, k - 1),$$

ove le  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$  non dipendono dalle  $x$  (mentre sono forme di ordine  $n$  nelle  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ ).

Negli sviluppi successivi, per fissare le idee, supporremo ad es.  $h = 0$ . Dalla  $\sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial H}{\partial x_i} \equiv 0$ , derivando allora una volta rispetto a ciascuna delle variabili  $x_{j_0}^{(0)}, x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_{k-1}}^{(k-1)}$ , si trae:

$$\sum_i x_i^{(0)} \frac{\partial^{k+1} H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_i} + \frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \equiv 0. \quad (7)$$

Ciò posto, si osservi che, per essere la  $\frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}}$  lineare nelle

$x$ , ha luogo pure l'identità

$$\frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \equiv \sum_i x_i \frac{\partial^{k+1} H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_i},$$

la quale, confrontata colla (7), porge

$$\left( \frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0}^{(0)} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}} \right)_{x=x} \equiv - \frac{\partial^k H}{\partial x_{j_0} \partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)}}. \quad (8)$$

E dalle (6), (8) in definitiva si trae:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \right)_{x=x} &\equiv - \sum \varepsilon_{j_0 j_1 \dots j_k} \frac{\partial^{n+k-1} F}{\partial x_{j_1}^{(1)} \dots \partial x_{j_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1} \partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_{j_k}^{\alpha_{j_k}+1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \\ &\equiv - \frac{\partial^{n-2} \Delta_{x_0^{(k)} x_1^{(1)} \dots x_k^{(k)}} F}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}. \end{aligned}$$

Relazioni analoghe si avrebbero per  $h = 1, 2, \dots, k-1$ . Ricordando infine la proprietà b) del simbolo  $\Delta$ , si conclude coll'enunciato c).

20. DIMOSTRAZIONE ALGORITMICA DEL TEOREMA I. Indicando con  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$  il determinante che ha per termine principale  $x_0^{(0)} x_1^{(1)} \dots x_k^{(k)}$ , consideriamo l'espressione

$$\sum_{i_0 i_1 \dots i_k} X_{i_0 i_1 \dots i_k} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_0^{(0)} \partial x_1^{(1)} \dots \partial x_k^{(k)}}, \quad (9)$$

ove  $F=0$  sia l'equazione di un complesso di grado  $n$  di  $S_k$ . Se al posto di  $X_{i_0 i_1 \dots i_k}$  sostituiamo il suo sviluppo, la (9) si risolverà in una somma algebrica di espressioni deducibili dal secondo membro della (1), permutando nei vari modi possibili gli apici  $0, 1, \dots, k$ , che compajono nel coefficiente della derivata soggetta al sommatorio, e attribuendo a ciascuna di tali espressioni il segno  $+$  o  $-$  secondo che la permutazione eseguita è pari o dispari. Ciascuna delle espressioni cui s'allude, alla sua volta, in virtù delle identità (3), uguaglia la forma  $F$  moltiplicata per una costante positiva o negativa, secondo che la permutazione eseguita è pari o dispari. Indicando con  $\mu$  un numero intero positivo (somma di convenienti potenze di  $n$ ), s'avrà pertanto l'identità:

$$\mu F \equiv \sum_{i_0 i_1 \dots i_k} X_{i_0 i_1 \dots i_k} \frac{\partial^{k+1} F}{\partial x_0^{(0)} \partial x_1^{(1)} \dots \partial x_k^{(k)}}, \quad (10)$$

ove il sommatorio è esteso, come di consueto, alle *disposizioni* semplici degli indici  $0, 1, \dots, r$  a  $k + 1$  a  $k + 1$ . A causa della definizione del simbolo  $\Delta$ , è chiaro che la (10) potrà anche scriversi sotto la forma

$$\mu F \equiv \sum_{i_0 i_1 \dots i_k} X_{i_0 i_1 \dots i_k} \Delta_{x_{i_0}^{(0)} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_k}^{(k)}} F, \quad (11)$$

in cui il sommatorio è ora esteso alle *combinazioni* semplici di classe  $k + 1$  degl'indici  $0, 1, \dots, r$ . In particolare, se  $n = 1$ ,  $\Delta_{x_{i_0}^{(0)} \dots x_{i_k}^{(k)}} F$  è una costante, e la (11) dimostra il teor. I pei complessi lineari.

Che se poi si suppone stabilito il teor. I pei complessi d'ordine  $n - 1$ , in forza della proprietà c) del simbolo  $\Delta$ , ne seguirà subito, mediante la (11), la validità del teorema anche pei complessi di grado qualunque  $n$ .

OSSERVAZIONE. Il teor. I, nel suo aspetto algebrico, afferma in sostanza che appena la forma  $F(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ , di ordine  $n$ , soddisfa alle condizioni indicate alla fine del n. 7, la  $F$  può anche considerarsi come una forma di ordine  $n$  nei determinanti  $X$ .

Si può dunque enunciare che *la condizione necessaria e sufficiente affinché una forma algebrica  $F$ , di ordine  $n$ , in  $k + 1$  serie di  $r + 1$  variabili, possa esprimersi come forma d'ordine  $n$  nei determinanti di grado  $k + 1$  estratti dalla matrice delle variabili, è che le derivate d'ordine  $n - 1$  della  $F$ , rispetto alle variabili di ogni prefissata serie, si annullino identicamente quando le variabili di questa serie si eguagliano a quelle (degli stessi indici) di un'altra serie qualunque.*

La necessità della condizione enunciata è pressochè evidente. In particolare, per  $k = r$ , si ha una caratterizzazione algebrico-funzionale della potenza  $n$ -esima di un determinante.

Per contare da quanti parametri dipende un complesso di grado  $n$ , di spazî  $S_k$  in  $S_r$  (numero che abbiamo già indicato con  $\varphi(n, r, k)$ ), basterebbe ormai sceverare quante delle suddette condizioni lineari, imposte ai coefficienti della forma  $F$ , sono tra loro indipendenti. È — come abbiamo già ricordato — ciò che ha fatto il SISAM nel caso  $k = 1$ .

21. LA BASE DEL MODULO COSTITUITO DALLE FORME PASSANTI PER LA GRASSMANNIANA  $V_r$ . Come già abbiamo accennato nella prefazione, ci limiteremo a trattare la questione nel caso  $k = 1$ , poichè nel caso generale non abbiamo potuto mettere la mano sopra un simbolismo, che ci permettesse di esporre la dimostrazione senza soverchie complicazioni formali.

Indicheremo con  $p_{ik}$  le coordinate grassmanniane di una retta in  $S_r$ , cioè

porremo :

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \quad (i, k = 0, 1, \dots, r), \quad (12)$$

ove  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$   $(y_0, y_1, \dots, y_r)$  sono le coordinate omogenee di due punti della  $S_r$ .

Fra le  $p$  sussistono le relazioni quadratiche

$$p_{kh} p_{ij} + p_{ki} p_{jh} + p_{kj} p_{hi} = 0 \quad (h, k, i, j = 0, 1, \dots, r), \quad (13)$$

che si riducono (n. 17) a  $\binom{r+2}{2} - \frac{1}{3} \binom{r+2}{2} \binom{r+1}{2}$  linearmente indipendenti.

Sia  $f(p_{01}, \dots, p_{r-1,r})$  una forma d'ordine  $n$  nelle  $p$ , la quale, in virtù delle (12), si muti identicamente nella  $F(x_0, \dots, x_r; y_0, \dots, y_r)$ . Avremo allora:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_{hi}} y_i, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial p_{hi}} \equiv \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} x_j,$$

ove i sommatori si estendano ad  $i, j = 0, 1, \dots, r$ , tenendo presente che

$\frac{\partial f}{\partial p_{hi}} \equiv -\frac{\partial f}{\partial p_{ih}}$  e  $\frac{\partial f}{\partial p_{hh}} \equiv 0$ . Dalle precedenti si trae:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial x_h} &\equiv \sum_i \sum_j x_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} + \frac{\partial f}{\partial p_{hk}}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial x_k} &\equiv \sum_i \sum_j x_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

la seconda delle quali, ove si scambino tra loro gli indici  $i, j$ , può scriversi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial x_k} \equiv \sum_{ij} x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ih} \partial p_{kj}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}} \equiv \sum_{ij} x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{jk}} + \frac{\partial f}{\partial p_{kh}}.$$

Sottraendo membro a membro dalla prima delle (14) quest'ultima, verrà:

$$\Delta_{x_h y_k} F \equiv \sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{kj}} + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}},$$

ove il simbolo  $\Delta$  è quello stesso che abbiamo definito in generale al n. 19. Nella relazione ottenuta il sommatorio è esteso alle disposizioni  $ij$ ; se invece si vuol limitarsi ad estendere il sommatorio alle combinazioni, si dovrà



scrivere:

$$\Delta_{x_h y_k} F \equiv \sum_{ij} p_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hi} \partial p_{kj}} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hj} \partial p_{ki}} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} \equiv \sum_{ij} p_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj} \partial p_{hi}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial p_{hk}}. \quad (15)$$

Tutte le precedenti identità sono tali, si ricordi, in virtù delle (12).  
Si ha di più l'identità, rispetto alle  $p$ :

$$(n-1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} \equiv \sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hk} \partial p_{ij}},$$

ove il sommatorio si intende anche qui esteso alle combinazioni.

Da questa e dalla (15) si deduce inoltre:

$$\Delta_{x_h y_k} F \equiv (n+1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} + \sum_{ij} p_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hk} \partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj} \partial p_{hi}} \right), \quad (16)$$

e si osserverà che il sommatorio che ivi comparisce, svanisce identicamente, quando le due coppie di indici  $h, k$  ed  $i, j$  hanno qualche elemento comune.

Suppongasi ora che la forma  $f=0$  passi per la grassmanniana  $V_t$ , rappresentatrice delle rette di  $S_r$ , sicchè la forma  $F$  sia identicamente nulla nelle  $x, y$ . Sarà allora identicamente nulla anche la forma, d'ordine  $n-1$ ,  $\Delta_{x_h y_k} F$ , e quindi il secondo membro della (16), uguagliato a zero, rappresenterà una forma d'ordine  $n-1$  passante per  $V_t$ .

Ciò posto, ammettiamo d'aver già dimostrato che le forme di ordine  $n-1$  passanti per  $V_t$  appartengano al modulo  $H$  delle forme quadratiche (13) (\*). Poichè la cosa è vera per  $n=2$ , basterà far vedere come dal fatto ammesso per le forme di ordine  $n-1$ , si deduca la proprietà analoga per le forme di ordine  $n$ .

Si può intanto scrivere, in forza di quanto precede:

$$(n+1) \frac{\partial f}{\partial p_{hk}} + \sum_{ij} p_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_{hk} \partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj} \partial p_{hi}} \right) \equiv 0 \pmod{H}.$$

Moltiplicando i due membri di questa congruenza per  $p_{hk}$  e sommando rispetto alle combinazioni  $h k$ , si avrà:

$$n(n+1)f - \sum_{hk} \sum_{ij} p_{kh} p_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kh} \partial p_{ij}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{ki} \partial p_{jh}} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_{kj} \partial p_{hi}} \right) \equiv 0 \pmod{H}.$$

(\*) Cioè che ogni forma d'ordine  $n-1$ , passante per  $V_t$ , sia rappresentabile mediante una combinazione lineare delle (13), i cui coefficienti siano forme d'ordine  $n-3$  nelle  $p$ .

Nel sommatorio quadruplo che ivi compare, l'espressione tra parentesi muta soltanto di segno scambiando tra loro gl'indici  $i, h$ , e ritorna al valore ed al segno iniziale se successivamente si scambiano tra loro  $i, j$ ; per guisa che riunendo in un solo i tre termini del sommatorio così ottenuti, si ha in definitiva l'espressione tra parentesi moltiplicata per la forma quadratica (13). Ciò significa che il sommatorio quadruplo s'identifica ad una forma del modulo  $H$  e quindi che anche

$$f \equiv 0 \pmod{H}.$$

Si può concludendo enunciare:

*Ogni forma algebrica d'ordine  $n$ , passante per  $V_i$ , è rappresentabile mediante una combinazione lineare delle forme quadratiche che definiscono  $V_i$ , i coefficienti di tale combinazione essendo forme d'ordine  $n - 2$  nelle coordinate grassmanniane.*

Padova, 25 febbraio 1915.

# Le corrispondenze [2, 2] fra curve algebriche.

(Di OSCAR CHISINI, a Bologna.)

---

## INTRODUZIONE.

Scopo di questo lavoro è la classificazione e la costruzione delle corrispondenze [2, 2] fra curve algebriche, cioè la determinazione di tutte le coppie di curve

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

tali che le coordinate del punto dell'una si esprimano razionalmente mediante le coordinate del punto dell'altra e di una radice quadrata portante sopra una funzione razionale delle medesime coordinate. A questa determinazione si arriva facendo prima vedere come ogni corrispondenza [2, 2] fra curve algebriche dia origine ad una curva dotata di due involuzioni  $\gamma_2^1$  e viceversa, e classificando e costruendo quindi tutti i tipi di curve possedenti due  $\gamma_2^1$ . I risultati a cui sono pervenuto sono riassunti, per comodità del lettore, in un paragrafo speciale alla fine del presente lavoro: qui mi limito ad enunciare che:

Se due curve  $f_1$  e  $f_2$  sono fra di loro in corrispondenza [2, 2], esse sono birazionalmente identiche, o contengono una medesima involuzione  $\gamma_2^1$ , cioè si ottengono estraendo due radici quadrate sopra una medesima curva  $K$ , od infine appartengono a classi di curve *coniugate*, ben determinate in funzione l'una dell'altra.

## CAPITOLO I.

## Generalità sulle corrispondenze [2, 2] fra curve algebriche.

§ 1. IL PROBLEMA DELLE CORRISPONDENZE [2, 2] FRA CURVE ALGEBRICHE  
E SUA TRASFORMAZIONE.

Diremo che due curve algebriche

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

sono in corrispondenza [2, 2] quando esiste una trasformazione algebrica che faccia passare da un punto generico,  $(x_1, y_1)$ , della prima a due punti  $(x_2, y_2)$ ,  $(x'_2, y'_2)$  della seconda e che, invertita, faccia passare dal punto  $(x_2, y_2)$  della seconda a due punti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x'_1, y'_1)$  della prima. *Avremo dunque che: se fra le due curve  $f_1$  e  $f_2$  intercede una corrispondenza [2, 2], le coordinate del punto dell'una si esprimono razionalmente mediante le coordinate del punto dell'altra e di una radice quadrata, portante sopra una funzione razionale delle coordinate stesse.*

Si vede così come lo studio delle corrispondenze [2, 2] si presenti come uno dei proseguimenti dello studio delle involuzioni razionali e irrazionali.

Per intraprendere l'esame delle corrispondenze [2, 2] conviene notare come, date due curve  $f_1$  e  $f_2$  in corrispondenza [2, 2], si possa costruire una curva  $\varphi$  contenente due  $\gamma_2^1$  aventi rispettivamente per immagini le due curve date. A tale oggetto basta chiamare « punto » ogni coppia di punti (appartenenti uno alla  $f_1$  e l'altro alla  $f_2$ ) coniugati nella corrispondenza [2, 2]: questa curva  $\varphi$ , così definita, la chiameremo *immagine della corrispondenza*.

Della curva  $\varphi$  possiamo dare, per esempio, questa particolare costruzione geometrica:

Consideriamo le due curve  $f_1$  e  $f_2$  come curve inviluppo, e intersechiamo fra di loro le tangenti nei punti di  $f_1$  e  $f_2$  che sono omologhi nella corrispondenza [2, 2]: il luogo dei punti così ottenuti costituisce appunto la curva  $\varphi$  richiesta.

In questo modo abbiamo fatto vedere come ogni corrispondenza [2, 2] dia origine ad una curva  $\varphi$ , immagine della corrispondenza, la quale contiene due  $\gamma_2^1$ .

Viceversa, data una curva  $\varphi$  che contenga due  $\gamma_2^1$ , le curve  $f_1$  e  $f_2$  i cui punti corrispondano biunivocamente alle coppie di queste  $\gamma_2^1$ , sono fra di loro in corrispondenza [2, 2]. Per ottenere questa corrispondenza si considerino, sopra  $\varphi$ , i due punti  $A'$  e  $A''$  (coniugati nella prima  $\gamma_2^1$ ) omologhi di un punto  $A$  generico di  $f_1$ : questi punti determinano due coppie della seconda  $\gamma_2^1$  e quindi due punti di  $f_2$ ,  $B'$  e  $B''$ : la corrispondenza la quale fa passare da  $A$  a  $B'$  e  $B''$  è la corrispondenza [2, 2] richiesta.

Da quanto si è ora visto, risulta come sia perfettamente *equivalente classificare le corrispondenze* [2, 2] o *classificare le curve  $\varphi$  che contengono due  $\gamma_2^1$* , ed è appunto classificando e costruendo le curve siffatte, che noi classifichiamo e costruiremo tutti i tipi di corrispondenze [2, 2].

## § 2. GENERE E PERIODO DI UNA CORRISPONDENZA [2, 2]:

### TEOREMA FONDAMENTALE.

Chiameremo *genere di una corrispondenza* [2, 2] *il genere della sua curva immagine*.

Per definire il periodo di una corrispondenza [2, 2] osserviamo che una  $\gamma_2^1$  può essere considerata anche come operazione di periodo 2, cioè come quella operazione che ad ogni punto  $P$  fa corrispondere il punto coniugato  $P'$ . Ciò posto le due  $\gamma_2^1$  che abbiamo sulla nostra curva  $\varphi$  possiamo ora considerarle come operazioni: indicheremo la prima con  $A$  e la seconda con  $B$ . Sia  $C = AB$  il prodotto delle due operazioni. Se  $C$  non è *periodica* (il che avverrà in generale) diremo che *la corrispondenza* [2, 2] *è non periodica*: in caso contrario chiameremo *periodo della corrispondenza* [2, 2] *il periodo dell'operazione*  $C$ . Vogliamo giustificare questa definizione:

Sia  $P_1$  un punto di  $f_1$  e  $Q_1$  e  $Q'_1$  i due punti corrispondenti sulla  $f_2$ . Scegliamo uno di essi: per esempio  $Q_1$ ; ad esso corrisponderanno sulla  $f_1$  i due punti  $P_1$  e  $P_2$ ; a  $P_2$  corrisponderanno su  $f_2$  due punti  $Q_2$  e  $Q_3$ , e a  $Q_3$  corrisponderanno su  $f_1$  due punti  $P_2$  e  $P_3$ , e via dicendo. Abbiamo così definito su  $f_1$  un'operazione che da  $P_1$  fa passare a  $P_2$ , da  $P_2$  a  $P_3$ , da  $P_{n-1}$  a  $P_n$ . È facile vedere, considerando gli omologhi dei punti  $P$  e  $Q$  sulla curva  $\varphi$ , che

il periodo di questa operazione coincide con il periodo di  $C$  (anche se questo periodo è infinito). È poi evidente che, designato con  $n$  questo periodo, la corrispondenza  $[2, 2]$  fa passare dal gruppo degli  $n$  punti  $P$  al gruppo degli  $n$  punti  $Q$ , cioè essa induce una corrispondenza  $[1, 1]$  fra le due  $\gamma_2^1$  che così sorgono sulle  $f_1$  e  $f_2$ .

Resta così posta una distinzione fondamentale, dividendo le corrispondenze  $[2, 2]$  in periodiche e non periodiche. Per venire all'esame delle corrispondenze dell'uno e dell'altro tipo, premettiamo il

**TEOREMA FONDAMENTALE.** *Ogni corrispondenza  $[2, 2]$  non periodica ha il genere  $p \leq 1$ .*

Per dimostrarlo, basterà osservare che l'operazione  $C$  e le sue potenze dànno una trasformazione birazionale della curva  $\varphi$  in se stessa, e ricordare il teorema di SCHWARZ-KLEIN, il quale dice che una curva di genere  $p > 1$  non può ammettere infinite trasformazioni birazionali in sè (\*).

## CAPITOLO II.

### Le corrispondenze $[2, 2]$ di genere $p \leq 1$ .

Abbiamo visto che le corrispondenze  $[2, 2]$  non periodiche sono di genere  $p \leq 1$ ; per farne adunque la classificazione e la costruzione, conviene analizzare le corrispondenze  $[2, 2]$  di genere  $p = 0, 1$ . In questo capitolo appunto studieremo contemporaneamente tutte le corrispondenze dei generi 0, 1, periodiche o non periodiche che esse siano.

Cominceremo con l'esaminare

#### § 3. LE CORRISPONDENZE $[2, 2]$ DI GENERE $p = 0$ .

Consideriamo, adunque, una corrispondenza  $[2, 2]$  la cui curva immagine  $\varphi$  sia una curva razionale che possiamo sempre ridurre (con trasformazioni birazionali) ad essere una retta. In questo caso le due  $\gamma_2^1$  che si trovano

---

(\*) Cfr. la mia Nota, *Sul teorema di Schwarz-Klein*, ecc., nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, fasc. VIII, vol. XLVII.

sopra la curva  $\varphi$  risultano, per il teorema di LÜROTH, razionali anch'esse e si riducono quindi a due  $g_2^1$ .

Osserviamo ora che, sopra la retta  $\varphi$ , il prodotto di due involuzioni dà una proiettività, e che, viceversa, ogni proiettività può essere considerata (in  $\infty^1$  modi) come il prodotto di due involuzioni, come è facile verificare, sia analiticamente, sia geometricamente, trasportando la proiettività sopra una conica.

Adunque, tutte le corrispondenze [2, 2] di genere 0 si ottengono prendendo sopra una retta  $\varphi$  una proiettività  $C$  e decomponendola nel prodotto di due involuzioni  $A$  e  $B$ , e considerando le curve razionali  $f_1$  e  $f_2$ , che rappresentano le coppie di queste due involuzioni. Fra queste due curve sorge appunto, nel modo indicato al § 1, una corrispondenza [2, 2] di genere 0.

In particolare, se prendiamo come proiettività  $C$  la proiettività ciclica di periodo  $n$  definita da  $x' = x e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , si ottiene una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$ . E veniamo ora a

#### § 4. LE CORRISPONDENZE [2, 2] DI GENERE $p = 1$ .

Consideriamo, adunque, una corrispondenza [2, 2] la cui curva immagine  $\varphi$  sia una curva ellittica. Se la curva  $\varphi$  è ellittica, le uniche trasformazioni birazionali in sè, che essa ammette, sono dei tipi (\*):

- |      |                         |
|------|-------------------------|
| I)   | $u' = -u + C;$          |
| II)  | $u' = -i u + C;$        |
| III) | $u' = -\alpha u + C;$   |
| IV)  | $u' = -\alpha^2 u + C;$ |

dove  $u$  e  $u'$  sono i valori dell'integrale ellittico di prima specie calcolato nei punti  $P$  e  $P'$  corrispondenti, dove  $\alpha$  è una radice cubica immaginaria dell'unità, e dove  $C$  è una costante arbitraria. Inoltre si ha che le trasformazioni del primo tipo esistono su qualunque curva ellittica e per qualunque valore di  $C$ ; quelle invece del tipo II) solo sulle curve ellittiche armoniche e quelle dei tipi III) e IV) sulle equianarmoniche.

---

(\*) SEGRE, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche.* Atti dell'Acc. di Torino, Volume 24, pag. 734.

Ora, se la trasformazione deve essere involutoria di periodo 2, essa può essere solo del primo tipo, e deve assumere una delle seguenti 4 forme:

- 1)  $u + u' = C;$
- 2)  $u = u' + \frac{\omega_1}{2};$
- 3)  $u = u' + \frac{\omega_2}{2};$
- 4)  $u = u' + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2};$

dove  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono i due periodi dell'integrale  $u$ .

Osserviamo che le operazioni della prima forma non formano un gruppo, e che precisamente il prodotto di due di esse

$$u + u' = C_1$$

$$u + u' = C_2$$

è dato da

$$u = u' + C_1 - C_2.$$

Invece le operazioni 2), 3), 4) formano un gruppo, che per di più è abeliano.

Veniamo ora a determinare i vari tipi di corrispondenza [2, 2] di genere  $p = 1$ . Tre casi si possono presentare:

1) O tutte e due le  $\gamma_2^1$  appartengono alla prima forma, e si riducono cioè a due  $g_2^1$ .

2) O appartengono una alla prima forma e l'altra ad una delle altre tre, e si riducono quindi ad una  $g_2^1$  e ad una  $\gamma_2^1$ .

3) O appartengono tutte due alla seconda forma, cioè sono due  $\gamma_2^1$ . Consideriamo il primo caso.

Il prodotto delle due  $g_2^1$  ha la forma

$$u = u' + C_1 - C_2.$$

Due ipotesi si possono presentare:

a)  $C_1 - C_2 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$  con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  razionali  $\left(\lambda_1 = \frac{m_1}{n_1}, \lambda_2 = \frac{m_2}{n_2}\right)$  e allora la corrispondenza [2, 2] ha per periodo il minimo comune multiplo di  $n_1$  e  $n_2$ .

b)  $C_1 - C_2$  non si può scrivere nella forma  $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$  con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  razionali, e allora la corrispondenza [2, 2] non è periodica.



Consideriamo ora il secondo caso. Allora, come si verifica facilmente, il prodotto della  $g_2^1$  e della  $\gamma_2^1$  dà un'operazione ciclica di periodo 2. Si ha quindi che la corrispondenza [2, 2] ha il periodo 2.

Consideriamo infine il terzo caso: anche in questo il prodotto delle due  $\gamma_2^1$  è un'operazione ciclica di periodo 2, e quindi la corrispondenza [2, 2] ha il periodo 2.

Restano così determinate tutte le possibili corrispondenze [2, 2] di genere  $p = 1$  e ne resta fissata anche la costruzione effettiva, quantunque per via non algebrica, ma trascendente.

Riassumendo: le corrispondenze [2, 2] di genere  $p \leq 1$ , fra le quali solo si trovano quelle non periodiche, possono essere così classificate:

1) *Corrispondenze non periodiche*: esse intercedono solo fra due curve razionali. Se hanno il genere  $p = 0$ , esse si ottengono prendendo su di una curva razionale una proiettività non ciclica e scomponendola nel prodotto di due involuzioni  $A$  e  $B$ . Se invece hanno il genere  $p = 1$ , si ottengono prendendo su di una curva ellittica due involuzioni razionali

$$u' + u = C_1$$

$$u' + u = C_2$$

in modo che non sia

$$C_2 - C_1 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  razionali.

2) *Corrispondenze [2, 2] periodiche di periodo 2*. Esse possono intercedere o fra due curve razionali, o fra una curva razionale ed una ellittica, o fra due curve ellittiche.

Nel primo caso esse si ottengono prendendo su di una curva,  $\varphi$ , razionale un'involuzione  $C$  e scomponendola nel prodotto di due involuzioni  $A$  e  $B$ , oppure prendendo su di una curva ellittica,  $\varphi$ , due involuzioni razionali  $A$  e  $B$  date da

$$u' + u = C_1,$$

$$u' + u = C_2,$$

in modo che sia

$$C_2 - C_1 = \lambda_1 \frac{\omega_1}{2} + \lambda_2 \frac{\omega_2}{2}$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  interi, positivi entrambi, od uno nullo.

Nel secondo caso esse si ottengono prendendo su di una curva ellittica una  $g_2^1$  e una  $\gamma_2^1$  arbitrarie.

Nel terzo caso esse si ottengono prendendo sempre su di una curva ellittica due  $\gamma_2^1$  arbitrarie.

3) *Corrispondenze [2, 2] periodiche di periodo  $n > 2$*  e del resto qualunque. Esse possono intercedere solo fra due curve razionali. Se sono razionali, si ottengono decomponendo una proiettività ciclica di ordine  $n$ , presa su una curva razionale  $\varphi$ , nel prodotto di due involuzioni  $A$  e  $B$ . Se invece sono ellittiche, si ottengono prendendo su di una curva ellittica  $\varphi$  le due involuzioni razionali  $A$  e  $B$  date da

$$u + u' = C_1$$

$$u + u' = C_2$$

con

$$C_2 - C_1 = \frac{m_1}{n_1} \omega_1 + \frac{m_2}{n_2} \omega_2,$$

in modo che sia  $n$  il minimo comune multiplo dei numeri  $n_1$  e  $n_2$ .

### CAPITOLO III.

#### Le corrispondenze [2, 2] di genere $p \geq 2$ .

##### § 5. GRUPPO DI UNA CORRISPONDENZA [2, 2].

Esaurito l'esame e la costruzione delle corrispondenze [2, 2] dei generi 0, 1 dobbiamo dimostrare, per le corrispondenze [2, 2] di genere  $p > 1$ , il

**TEOREMA FONDAMENTALE.** *Le due operazioni  $A$  e  $B$ , definite dalle due  $\gamma_2^1$  appartenenti alla curva  $\varphi$  di genere  $p > 1$ , generano un gruppo  $G$  diedrico d'ordine  $2n$ , essendo  $n$  il periodo dell'operazione  $C = AB$ .*

Questo è evidente se le operazioni  $A$  e  $B$  sono permutabili, generando esse allora il *gruppo trirettangolo* che è un caso particolare del gruppo diedrico.

Supponiamo ora invece che le operazioni  $A$  e  $B$  non siano permutabili, cioè che il periodo di  $C = AB$  sia  $n > 2$ . Sotto questa ipotesi facciamo anzitutto vedere che:

Il gruppo  $G$ , generato dalle operazioni  $A$  e  $B$ , contiene  $2n$  operazioni e contiene, come sottogruppo invariante, il gruppo ciclico  $G'$ , generato dall'operazione  $C$ .

Notiamo dapprima che, essendo le  $A$  e  $B$  a periodo 2,

$$(BA)^r = (AB)^{n-r}$$

come si verifica moltiplicando a destra per  $(AB)^r$ .

Si ha così che tutte le operazioni del gruppo  $G$  si riducono ai tipi

- 1)  $(AB)^r \quad (r = 1, 2, \dots, n);$
- 2)  $B(AB)^s \quad (s = 1, 2, \dots, n);$
- 3)  $(AB)^p A \quad (p = 1, 2, \dots, n).$

Ma, osservando che

$$B(AB)^s = (AB)^{n-s-1} A$$

come si verifica moltiplicando a destra per  $A$ , e tenendo conto della precedente osservazione, si vede che le operazioni di  $G$  si riducono ai due tipi 1) e 2). Dimostriamo ora che queste  $2n$  operazioni sono tutte diverse.

Quelle di un medesimo tipo sono evidentemente diverse: inoltre non può essere

$$(AB)^r = B(AB)^s$$

perchè, se ciò fosse, sarebbe anche

$$B = (AB)^{r-s} \quad (*).$$

Allora  $AB$  sarebbe permutabile con  $B$ , che verrebbe ad esserne una potenza, e si avrebbe

$$B(AB) = (AB)B = A,$$

cioè, essendo  $B = B^{-1}$ ,  $A$  e  $B$  sarebbero permutabili contro l'ipotesi.

Per dimostrare la seconda parte del precedente enunciato, scriviamo il gruppo  $G$  nel quadro:

$$G = \begin{cases} 1, C, C^2, \dots, C^{n-1} \\ B, BC, BC^2, \dots, BC^{n-1}. \end{cases}$$

---

(\*) Si può sempre supporre  $r > s$  perchè  $C^r = C^{n+r}$ .

Sappiamo che, se un gruppo è invariante per due operazioni, è invariante anche per il loro prodotto. Ora  $G'$  è certamente invariante per  $C$ : basterà dimostrare che è invariante anche per  $B$ .

Ora questo è: infatti

$$B C^r B = B (A B)^r B = (B A)^r = (A B)^{n-r} = C^{n-r}.$$

In particolare  $B$ , e quindi  $A$ , trasformano  $C$  in  $C^{-1}$ . Ciò posto, per far vedere che il gruppo  $G$  è isomorfo oloedricamente al gruppo diedrico di  $2n$  sostituzioni sopra  $2n$  elementi, basta far corrispondere al sottogruppo  $G'$  il sottogruppo (del gruppo diedrico) ciclico d'ordine  $n$  (\*) ed alla operazione  $B$  una qualunque delle  $n$  operazioni di periodo 2 (appartenenti al gruppo diedrico).

#### § 6. I DUE TIPI DI CORRISPONDENZE [2, 2] PERIODICHE.

Distingueremo le corrispondenze [2, 2] periodiche nei due tipi seguenti:

- 1) Corrispondenze [2, 2] di periodo  $n = 2$ .
- 2) Corrispondenze [2, 2] di periodo  $n > 2$ .

Osserviamo che le corrispondenze del secondo tipo sono a gruppo diedrico propriamente detto, mentre quelle del primo tipo sono a gruppo trirettangolo.

Noi esamineremo e costruiremo separatamente le corrispondenze [2, 2] del primo e del secondo tipo.

#### § 7. LE CORRISPONDENZE [2, 2] DI PERIODO $n = 2$ .

Supponiamo che fra le curve  $f_1$  e  $f_2$  interceda una corrispondenza [2, 2] di periodo 2. Sulla curva  $\varphi$  immagine della corrispondenza [2, 2] consideriamo le due involuzioni  $A$  e  $B$ , le cui coppie sono rappresentate dai punti della  $f_1$  e della  $f_2$ : per ipotesi esse sono permutabili ed il gruppo  $G$ , da esse generato, è il gruppo trirettangolo. Applichiamo le operazioni di  $G$  ad un

---

(\*) I gruppi ciclici sono sempre isomorfi oloedricamente fra di loro.

punto generico sopra la  $\varphi$ : otteniamo così un gruppo di 4 punti

$$P_1, P_2, P_3, P_4.$$

Osserviamo che ogni punto di  $\varphi$  appartiene ad uno ed a uno solo di gruppi siffatti, e che quindi questi gruppi costituiscono una involuzione  $\gamma_4^1$ . Sia  $K$  la curva rappresentativa di questa  $\gamma_4^1$ ; inoltre sia  $P$  il punto di  $K$  corrispondente alla quaterna generica  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

Siccome questa quaterna è composta di due coppie di punti coniugati nella  $A$ , e anche di due coppie di punti coniugati nella  $B$ , così ad essa corrisponde biunivocamente una coppia di punti  $P'_1$  e  $P''_1$  sulla  $f_1$  e un'altra coppia  $P'_2$  e  $P''_2$  sulla  $f_2$ .

Da ciò risulta che le due curve  $f_1$  e  $f_2$  contengono ciascuna una  $\gamma_2^1$  rappresentata da una stessa curva  $K$ , cioè esse si ottengono estraendo due radici quadrate sopra una medesima curva  $K$ . Viceversa, presa una qualunque curva  $K$ , se noi estragghiamo su di essa due radici quadrate in un modo qualunque (cioè prendendo le diramazioni in modo completamente arbitrario) otteniamo due curve  $f_1$  e  $f_2$  fra le quali viene ad intercedere una corrispondenza [2, 2] di periodo 2, corrispondenza che si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto  $P'_1$  di  $f_1$  i due punti  $P'_2$  e  $P''_2$  di  $f_2$  che corrispondono al punto  $P$  di  $K$  cui corrisponde  $P'_1$ .

Resta così stabilito che:

*Ogni corrispondenza [2, 2] di periodo 2 è il prodotto di due corrispondenze [1, 2] e le due curve  $f_1$  e  $f_2$ , fra le quali essa intercede, si ottengono semplicemente estraendo due radici quadrate sopra una medesima curva  $K$ .*

Ottenute così le curve  $f_1$  e  $f_2$ , la costruzione della curva  $\varphi$ , immagine della corrispondenza [2, 2], non presenta nessuna difficoltà.

### § 8. LE CORRISPONDENZE [2, 2] DI PERIODO $n > 2$ .

#### 1) *Rango di una corrispondenza [2, 2].*

Consideriamo la curva  $\varphi$  immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$ . Se applichiamo ad un punto  $P$ , generico sulla curva  $\varphi$ , le operazioni del gruppo  $G$ , generato dalle due involuzioni  $A$  e  $B$ , otteniamo  $2n$  punti

$$P_1, P_2, \dots, P_{2n}$$

il cui insieme resta invariato per le operazioni di  $G$ . Siccome ogni punto di  $\varphi$  appartiene ad uno e ad uno solo di gruppi siffatti, questi gruppi costituiscono una involuzione  $\gamma_{2n}^1$ , che sarà rappresentata da una certa curva  $K$ . Per la costruzione delle corrispondenze [2, 2] di periodo  $n > 2$  è comodo cominciare dal caso in cui la curva  $K$  sia razionale, perciò conviene introdurre fra i caratteri della corrispondenza [2, 2] il *genere della*  $\gamma_{2n}^1$  determinata sulla  $\varphi$  dalle operazioni di  $G$ : questo numero (genere della curva  $K$ ) lo chiameremo *rango* della corrispondenza e lo indicheremo con  $\rho$ .

2) *Analisi delle corrispondenze [2, 2] di rango nullo.*

Consideriamo una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n > 2$  e di rango 0.

Sulla curva  $\varphi$  immagine di detta corrispondenza, le operazioni del gruppo diedrico  $G$  determinano i gruppi di una serie lineare  $g_{2n}^1$ . Con una trasformazione birazionale potremo far sì che questa serie venga segata (sulla trasformata di  $\varphi$  che continuiamo a chiamare  $\varphi$ ) dalle parallele all'asse  $y$ . Avremo allora che la curva  $\varphi$  definisce la  $y$  come funzione algebrica della  $x$  a  $2n$  rami. Per essa vale il

**TEOREMA FONDAMENTALE.** *La funzione algebrica  $y(x)$  ha come gruppo di monodromia il gruppo diedrico  $G$  (cioè un gruppo di sostituzioni isomorfo al gruppo  $G$ ).*

Siano  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ , i  $2n$  valori di  $y$  relativi al valore  $x = x_0$ . Dovremo far vedere che, quando  $x$  descrive un cappio intorno ad un punto di diramazione  $D$ , le  $2n$  determinazioni

$$y_1, y_2, \dots, y_{2n}$$

si scambiano secondo una sostituzione del gruppo diedrico d'ordine  $2n$ . Indichiamo con  $H_1, H_2, \dots, H_{2n}$  le  $2n$  operazioni del gruppo  $G$ , e osserviamo che, essendo  $G$  diedrico, esse vengono permutate secondo una sostituzione del gruppo diedrico, sopra  $2n$  elementi, quando vengano moltiplicate (per esempio a destra) per una di esse:  $H_i$ .

Ricordiamo che i valori  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$  si ottengono *razionalmente* da uno qualunque di essi, applicando le operazioni di  $G$ : supponiamo che sia  $H_1$  l'operazione identica, e che sia

$$\begin{aligned} y_1 &= H_1(y_1) \\ y_2 &= H_2(y_1) \\ &\dots \dots \dots \\ y_{2n} &= H_{2n}(y_1). \end{aligned}$$

Supponiamo che, quando  $x_0$  descrive un cappio intorno al punto di diramazione  $D$ ,  $y_1$  vada in  $y_2$ : siccome ciò equivale ad operare su  $y_1$  l'operazione  $H_2$ , avremo che i valori

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = H_1(y_1) & H_1 H_2(y_1) \\
 y_2 = H_2(y_1) & H_2 H_2(y_2) \\
 \dots & \dots \\
 y_{2n} = H_{2n}(y_1) & H_{2n} H_2(y_2),
 \end{array}$$

andranno nei valori

cioè verranno permutati secondo la sostituzione  $S_2$  (del gruppo diedrico di sostituzioni sopra  $2n$  elementi), secondo la quale l'operazione  $H_2$  permuta le  $2n$  operazioni  $H_1, H_2, \dots, H_{2n}$ .

Valendo questo per ogni cappio descritto da  $x_0$ , il nostro teorema resta così stabilito.

Siccome il gruppo diedrico d'ordine  $2n$  contiene come invariante un gruppo ciclico d'ordine  $n$ , così la *funzione  $y$  si ottiene estraendo successivamente un radicale quadratico e un radicale d'ordine  $n$ , cioè la curva ha una equazione del tipo*

$$1) \ y = F(x, \sqrt{\psi(x)}, \sqrt[n]{f(x) \cdot \sqrt{\psi(x)}}),$$

dove  $F, f, \psi$  sono simboli di funzioni razionali e, a meno di una trasformazione birazionale,

$$2) \ y = \sqrt[n]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}.$$

Questo risultato non è però invertibile: non ogni funzione del tipo 1) o 2) ha per gruppo di monodromia il gruppo diedrico e determina la curva immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  e di rango 0.

Per determinare quali siano le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare le funzioni  $f$  e  $\psi$  affinché ciò accada, dobbiamo premettere le seguenti

### 3) Considerazioni topologiche sulle curve iperellittiche.

Supponiamo di avere una curva iperellittica di genere  $p$

$$z^2 = \psi(x)$$

con  $2 + 2p$  punti di diramazione: consideriamo la sua riemanniana  $R$  (sfera con  $p$  manici), e consideriamo su di questa due punti coniugati nella  $g_2$ :  $P_1$  e  $P_2$  le cui coordinate siano rispettivamente

$$x, +\sqrt{\psi(x)}; \quad x, -\sqrt{\psi(x)}.$$

Facciamo descrivere a  $P_1$  (sopra  $R$ ) un ciclo chiuso  $C_1$ : contemporaneamente  $P_2$  descriverà un ciclo chiuso  $C_2$ . Si domanda se i cicli verranno percorsi sempre nello stesso senso, o sempre in sensi opposti, oppure quando verranno percorsi nello stesso senso, e quando in senso opposto.

Consideriamo sul piano della variabile complessa indipendente  $x$  il punto  $P$  cui corrispondono sulla superficie  $R$  i due punti coniugati  $P_1, P_2$ : quando  $P_1$  descrive  $C_1$ ,  $P$  descriverà un certo ciclo  $C$  immagine dei cicli  $C_1$  e  $C_2$ . Possiamo distinguere tre casi fondamentali

1)  $C$  non contiene nessun punto di diramazione della  $g_2^1$  (nessun zero della  $\psi(x)$ ).

2)  $C$  contiene un solo punto di diramazione della  $g_2^1$ .

3)  $C$  contiene due punti di diramazione, oppure più di due.

Nei primi due casi  $C$  è un ciclo nullo, riducibile ad un punto (ordinario nel primo e di diramazione nel secondo), nel terzo caso  $C$  è un ciclo riemanniano non riducibile ad un punto.

I CASO. Se  $C$  non contiene nessun punto di diramazione, esso si può ridurre per continuità ad un cerchietto infinitesimo  $C'$  intorno a  $P$ . Allora  $C_1$  e  $C_2$  si ridurranno a due cerchietti infinitesimi  $C'_1$  e  $C'_2$ . Facciamo descrivere a  $P$  un cammino chiuso intorno ad uno dei punti di diramazione della  $g_2^1$ ; contemporaneamente si muoveranno  $P_1$  e  $P_2$ ,  $C'_1$ ,  $C'_2$ . In questo modo sulla superficie *bilatera*  $R$  i due cicli  $C'_1$  e  $C'_2$  si vengono a scambiare: segue che  $P_1$  descrive  $C_1$  nello stesso verso in cui  $P_2$  descrive  $C_2$ .

II CASO. Supponiamo che il ciclo  $C$  contenga un punto di diramazione  $D$ . Essendo  $C$  immagine di un ciclo chiuso sulla superficie  $R$ ,  $P$ , per descrivere  $C$ , deve girare due volte intorno a  $D$ . Questo ciclo  $C$  si può, evidentemente, ridurre per continuità ad un cerchio  $C'$  percorso due volte, includente il solo punto di diramazione  $D$ , e senza punti di diramazione sul contorno. Contemporaneamente a questa deformazione di  $C$ , i cicli  $C_1$  e  $C_2$  si riducono ad un medesimo ciclo  $C'_{12}$  autoconiugato.

Siccome su  $C'$  non vi è nessun punto di diramazione, così il ciclo  $C'$  non ha sul suo contorno nessun punto doppio della  $g_2^1$ , quindi il punto  $P_1$  e il punto  $P_2$  lo percorrono nello stesso verso.

III CASO. Supponiamo che  $C$  contenga due (o più) punti di diramazione. Allora  $C_1$  e  $C_2$  sono due cicli riemanniani.

Sia  $U_h$  uno dei  $p$  integrali abeliani di prima specie appartenenti alla curva. Sia  $U_{h1}$  il suo valore nel punto  $P_1$  e  $U_{h2}$  il suo valore nel punto  $P_2$ . L'essere  $P_1$  e  $P_2$  coniugati nella  $g_2^1$ , è espresso per il teorema di ABEL da

$$U_{h1} + U_{h2} \equiv K_h \quad (h = 1, 2, \dots, p). \quad (1)$$



Ora se  $P_1$  descrive un certo ciclo  $C$ ,  $U_{h_1}$  aumenta di  $\omega_{hc}$ , essendo  $\omega_{hc}$  il periodo di  $U_h$  relativo al ciclo  $C$ ; allora, per la relazione (1),  $U_{h_2}$  deve diminuire di  $\omega_{hc}$ , cioè  $P_2$  deve descrivere lo stesso ciclo  $C$ , ma in senso opposto.

Concludendo, dati sulla riemanniana della curva iperellittica  $z^2 - \psi(x) = 0$  due punti coniugati  $P_1$  e  $P_2$ , quando  $P_1$  descrive un ciclo nullo, anche  $P_2$  descrive un ciclo nullo e nello stesso senso; quando  $P_1$  descrive un ciclo riemanniano,  $P_2$  descrive un ciclo riemanniano a questo equivalente, e lo descrive in senso inverso.

#### 4) Costruzione delle corrispondenze [2, 2] di rango nullo.

Abbiamo già annunciato che, se i polinomi  $f$  e  $\psi$  sono affatto generali, il gruppo di monodromia della

$$y = \sqrt[n]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}$$

pur essendo risolubile, non è il gruppo diedrico. Infatti una prima condizione perchè questo accada, è che sopra la  $R$ , riemanniana della curva  $z^2 - \psi(x) = 0$ , gli zeri della  $f$  figurino a coppie coniugati nella  $g_2^1$ :  $z' = -z$ ,  $x' = x$ . Ciò si deduce osservando che, se un punto  $E_1$  è unito per la operazione  $C$ , ciclica di periodo  $n$ , il suo trasformato,  $E_2$ , mediante l'operazione  $A$ , è pure un punto unito per la  $C$  in quanto  $A$  trasforma  $C$  in  $C^{-1}$ .

Ma neppure questa condizione è sufficiente: sarebbe infatti facile vedere che, se gli zeri della  $f$ , pur essendo a coppie coniugati nella  $g_2^1$  suddetta, figurano con la medesima molteplicità, il gruppo di monodromia risulta un gruppo abeliano, e quindi non diedrico (questo gruppo abeliano per  $n$  dispari si riduce ad un gruppo ciclico).

Ora ci proponiamo di far vedere che la *condizione necessaria e sufficiente acciocchè il gruppo sia diedrico*, è che, se il punto  $(x, z)$  è per  $f$  uno zero d'ordine  $i$ , il punto coniugato  $(x, -z)$  sia uno zero d'ordine  $r n - i$  ( $r$  numero intero). Svolgeremo le nostre considerazioni riferendoci, per semplicità di linguaggio, al caso  $n = 3$ , valendo le considerazioni stesse per qualunque valore di  $n$ .

Consideriamo adunque la superficie  $R$ , riemanniana della curva iperellittica

$$z^2 = \psi(x),$$

e su di essa due punti coniugati  $P_1$  e  $P_2$ .

Sul punto  $P_1$  la  $y$  avrà i tre valori

$$y_1, \quad \varepsilon y_1, \quad \varepsilon^2 y_1$$

dove  $y$  è un certo valore di

$$\sqrt[3]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}$$

che assumo come valore fondamentale, e dove

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Il punto  $P$ , immagine sul piano della  $x$  dei punti  $P_1$  e  $P_2$ , descriva un ciclo riemanniano chiuso intorno ad un certo punto  $D$ , il quale sia di diramazione per la  $z = \psi(x)$ : il punto  $P_1$  andrà a cadere in  $P_2$  e i tre valori  $y_1, \varepsilon y_1, \varepsilon^2 y_1$  si trasformeranno rispettivamente nei valori

$$y_2, \varepsilon y_2, \varepsilon^2 y_2$$

dove  $y_2$  differisce da  $y_1$  per il valore del segno del radicale quadratico, e dove il radicale cubico avrà un certo valore, cioè

$$y_2 = \sqrt[3]{f(x, -\sqrt{\psi(x)})}.$$

I sei valori

$$y_1, \varepsilon y_1, \varepsilon^2 y_1$$

$$y_2, \varepsilon y_2, \varepsilon^2 y_2$$

li chiameremo coi numeri

$$1 \quad 3 \quad 5$$

$$2 \quad 4 \quad 6.$$

Avremo così che la sostituzione  $S_D$ , data da un coppia intorno a  $D$ , è data da

$$S_D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sia ora  $E_1$  un punto di diramazione (sulla riemanniana  $R$ ) semplice di  $\sqrt[3]{f(xz)}$ , cioè corrisponda ad un'intersezione semplice delle due curve

$$f(xz) = 0, \quad z^2 = \psi(x);$$

compiamo con  $P_1$  un ciclo chiuso, non riemanniano, intorno al punto  $E_1$ , e compiamolo nel senso positivo (cioè nel senso che corrisponde al senso positivo sul piano  $x$ ). Questo giro produce su ciascuno dei valori 1, 3, 5 la moltiplicazione per  $\varepsilon$ , cioè equivale alla sostituzione

$$(1 \ 3 \ 5).$$

Ricordando che il gruppo di monodromia deve essere diedrico e che l'operazione  $A$  trasforma  $C$  in  $C^{-1}$ , si ha che, mentre  $P_1$  gira intorno a  $E_1$ ,  $P_2$  gira intorno a  $E_2$ , producendo la sostituzione

$$(2 \ 6 \ 4).$$

Abbiamo cioè, sulla superficie  $R$ , che: se un cappio intorno ad  $E_1$  equivale alla moltiplicazione per  $\varepsilon$ , un cappio intorno ad  $E_2$  equivale alla moltiplicazione per  $\varepsilon^2$ , e viceversa.

Da ciò, tenuto conto che i cicli descritti da  $P_1$  e  $P_2$  sono descritti nello stesso senso, si deduce che il punto  $E_2$  è uno zero di  $f(xz)$  di secondo ordine o, più in generale, d'ordine  $3r + 2$ . Tolta l'ipotesi che  $E_1$  sia un punto di diramazione semplice, possiamo dire in generale che: se la curva  $f(xz) = 0$  taglia la curva  $z^2 = \psi(x) = 0$  in un punto  $(\bar{x}, z)$  ed ha quivi  $3r + i$  intersezioni riunite, deve tagliare la  $z^2 - \psi(x) = 0$  anche nel punto  $(\bar{x}, -\bar{z})$  ed avere quivi  $3s + 2i$  intersezioni riunite,  $r$  e  $s$  essendo numeri interi, ( $r \geq 0$ ,  $s \leq 0$ ).

Abbiamo così determinato, per la curva  $\varphi$ , una condizione necessaria acciocchè il gruppo di monodromia della corrispondente funzione  $y$  sia il gruppo diedrico.

Vogliamo ora dimostrare che essa è anche sufficiente.

Siano  $D_1$  e  $D_2$  due zeri generici della  $\psi(x)$ .

Supponiamo che, descrivendo con  $x$  un cappio intorno a  $D_1$ , il valore 1 si cambi nel valore 2. Giriamo ora intorno a  $D_2$ . Due casi possono accadere: o il ramo 1 si cambia nel ramo 2, oppure si cambia in uno degli altri 4 o 6.

Nella prima ipotesi si ha che un giro riemanniano intorno ai due punti  $D_1$  e  $D_2$  non produce diramazione (moltiplicazione della  $\sqrt[3]{-}$  per  $\varepsilon$  o per  $\varepsilon^2$ ); nella seconda si ha che questo giro produce diramazione.

A questo punto dobbiamo fare un'osservazione. Se sulla riemanniana della curva iperellittica  $z^2 = \psi(x)$  esistono dei punti di diramazione per la  $\sqrt[3]{-}$ , i cicli riemanniani di una stessa famiglia vengono divisi in diverse categorie, le quali vengono separate dai cicli passanti per i punti di diramazione.

Siano  $C_1$  e  $C_2$  due cicli appartenenti a due categorie consecutive, separate dal ciclo  $C$  passante per il punto di diramazione  $E$ : si ha che il ciclo  $C_1$  è equivalente al ciclo  $C_2$  più un ciclo infinitesimo intorno al punto  $E$ , e quindi i cicli  $C_1$  e  $C_2$  non possono produrre la medesima diramazione.

Se la curva  $f(xz) = 0$  soddisfa alle condizioni anzidette, i punti di di-

ramazione  $E$  figurano a coppie, coniugati nella  $g_4^2$ , e se uno produce la diramazione  $\varepsilon$ , l'altro produce la diramazione  $\varepsilon^2$ . Sia  $C$  un ciclo autoconiugato: facciamo muovere lungo di esso il punto  $P_1$ , e supponiamo che, ciò facendo,  $y_1$  si cambi in  $\varepsilon y_1$ . Contemporaneamente  $P_2$  descriverà lo stesso ciclo, ma in senso opposto e ciascuno dei valori  $y_2, \varepsilon y_2, \varepsilon^2 y_2$  acquisterà il fattore  $\varepsilon^2$ . Partendo dal ciclo  $C$ , tenuto conto della disposizione e dell'effetto dei punti  $E$ , si vede facilmente che la stessa cosa accade per due cicli coniugati qualunque  $C_1$  e  $C_2$ , cioè: se percorrendo  $C_1$  i tre valori  $y_1, \varepsilon y_1, \varepsilon^2 y_1$ , vengono moltiplicati per  $\varepsilon$ , i valori  $y_2, \varepsilon y_2, \varepsilon^2 y_2$  vengono moltiplicati per  $\varepsilon^2$ .

Da queste considerazioni risulta facilmente che il gruppo di monodromia nel nostro caso è effettivamente diedrico, se è transitivo, il che avverrà certo se la radice cubica estratta sulla  $z^2 = \psi(x)$  ha qualche punto di diramazione. Infatti: un giro con  $x$  intorno a  $D_1$ , punto di zero per la  $\psi(x)$ , produce per ipotesi la sostituzione

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

allora un giro intorno ad un secondo zero della  $\psi(x)$ ,  $D_2$ , o produce la stessa sostituzione  $S_1$ , o produce la sostituzione

$$S_2 = S_1 (1 \ 3 \ 5)^r (2 \ 4 \ 6)^{2r} \quad (r = 1, 2)$$

e ciò secondo che il coppia intorno a  $D_1$  e  $D_2$  è immagine di una coppia di cicli riemanniani, i quali non siano, oppure siano, di diramazione per la  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ; infine un giro intorno ad un punto  $E_x$  immagine di due punti  $E_1$  e  $E_2$  produce la

$$S_3 = (1 \ 3 \ 5)^r (2 \ 4 \ 6)^{2r} \quad (r = 1, 2),$$

e tutte queste sostituzioni appartengono al gruppo diedrico d'ordine 6.

Ciò posto, vediamo come si costruisca la curva  $f$  soddisfacente alle condizioni volute.

Cominciamo dal caso  $n = 3$ .

Consideriamo adunque l'equazione

$$y = \sqrt[3]{f(xz)};$$

essendo  $z$  legato ad  $x$  dalla relazione

$$z^2 = \psi(x),$$

la  $f$  si ridurrà ad essere lineare in  $z$ , cioè ad avere la forma

$$f(xz) = f_1(x)z + f_2(x).$$

Ora  $f_1$  e  $f_2$  possono avere dei fattori comuni; possiamo quindi scrivere  $f(xz)$  nella forma

$$f(xz) = f_3(x) \left[ f'_1(x)z + f'_2(x) \right].$$

Abbiamo così che la curva  $f(xz) = 0$  (dove  $z^2 = \psi(x)$ ) si decompone in una curva razionale  $C$  ed in un certo numero di rette  $R_1, R_2, \dots, R_s$ , parallele all'asse  $z$ .

Ora la curva razionale  $C$  non può intersecare la  $z^2 - \psi(x) = 0$  in due punti coniugati  $E_1 = (x, z)$  e  $E_2 = (x, -z)$ : ne viene che, se la  $C$  taglia la  $z^2 - \psi(x) = 0$  in un punto  $E_1$  ed ha quivi  $3r + i$  intersezioni riunite, dovendo il punto  $E_2$ , coniugato di  $E_1$ , essere un'intersezione di  $f$  e di  $z^2 - \psi(x) = 0$  d'ordine  $3s + 2i$ , verrà che  $3q + i$  delle rette  $R$  passeranno per i punti  $E_1$  e  $E_2$ .

Si vede così come nel caso di  $n = 3$  la curva  $f$  si possa ottenere prendendo in modo arbitrario la curva razionale  $C$  e completandola con il sistema delle rette  $R_i$ , prese in modo che  $3q + i$  di esse passino per ogni punto  $E_i$  di contatto  $(3s + i)$  — punto della  $C$  e della  $z^2 - \psi(x) = 0$ .

Supponiamo ora invece  $n$  generale: avremo ancora

$$f(xz) = f_3(x) [f'_1(x) \cdot z + f'_2(x)],$$

e quindi ancora la curva  $f$  è data dalla somma di una curva razionale  $C$  e da un certo numero di rette  $R_i$ , ma la  $C$  non è più arbitraria.

Infatti la somma delle intersezioni di  $f$  con  $z^2 - \psi(x) = 0$  nei due punti coniugati  $E_1$  e  $E_2$  deve essere un multiplo di  $n$ ; supponiamo che in  $E_1$  siano riunite  $i$  intersezioni di  $f$  e  $z^2 - \psi(x) = 0$ , e che per  $E_1$  passino  $m$  rette  $R_i$ : avremo

$$i + 2m = rn \quad (r \text{ numero intero}),$$

cioè  $i$  è un numero della forma

$$i = rn - 2m.$$

*Cioè per  $n$  dispari  $i$  può assumere qualunque valore, mentre per  $n$  pari  $i$  deve essere pure pari.*

Adunque per costruire la curva  $f$  si prenderà una curva  $C$  del tipo

$$f'_1(x) \cdot z + f'_2(x) = 0$$

e del resto arbitraria se  $n$  è dispari, avente invece un numero pari d'intersezioni riunite in ogni punto in cui essa taglia la  $z^2 - \psi(x) = 0$  se  $n$  è pari; e a questa  $C$  si sommeranno poi delle rette  $R$  parallele all'asse  $y$ , facendone passare  $m = \frac{r n - i}{2}$  per ogni punto  $E_i$  in cui siano riunite i intersezioni delle curve  $f = 0$  e  $z^2 - \psi(x) = 0$ .

Esamineremo nella nota seguente il caso che la radice  $n$ -esima estratta sopra la  $z^2 = \psi(x)$  non abbia punti di diramazione, pure restando transitivo il gruppo di monodromia della funzione  $y$ .

Per ora concludiamo osservando che *una funzione*

$$y = \sqrt[n]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}$$

a gruppo diedrico definisce una curva  $\varphi$  immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  e di rango 0. Infatti, essendo diedrico il gruppo di monodromia della  $y$ , le sue  $2n$  determinazioni possono essere disposte sui  $2n$  vertici di un prisma  $n$ -agonale; ottenendo così una configurazione che resta invariata per qualunque cammino chiuso della variabile indipendente  $x$ . Questa disposizione mette in luce l'esistenza di due (anzi di  $n$  coppie) di  $\gamma_2^1$ , il cui prodotto dà un'operazione ciclica di periodo  $n$ . Abbiamo così che *tutte e sole le corrispondenze [2, 2] di periodo  $n > 2$  e di rango nullo si ottengono costruendo la curva immagine*

$$y = \sqrt[n]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}$$

dove la funzione  $f$  soddisfi alle condizioni sudeterminate.

NOTA. Noi abbiamo considerato la curva  $\varphi$  che possiede due  $\gamma_2^1$  e ha per equazione

$$y = \sqrt[n]{f(x, \sqrt{\psi(x)})}. \quad (1)$$

Abbiamo supposto inoltre che sulla curva iperellittica

$$z^2 = \psi(x)$$

esistano punti di diramazione per la  $y$ , cioè abbiamo supposto che le intersezioni delle due curve

$$z^2 = \psi(x) \quad (2)$$

$$f(xz) = 0 \quad (3)$$

non abbiano tutte molteplicità di ordine multiplo di  $n$ .

Ora, se questo accadesse, il gruppo della  $y$  non cesserebbe di essere diedrico, qualora restasse transitivo; infatti l'essere il gruppo diedrico dipende essenzialmente da ciò, che sulla superficie riemanniana della  $z^2 = \psi(x)$ , due punti coniugati nella  $g_2^1$  si muovono in modo che, se uno di essi descrive un ciclo riemanniano in un certo senso, l'altro descrive il medesimo ciclo, ma nel senso opposto.

Da questa osservazione si ricava che qualunque curva irriducibile  $\varphi$ , la quale contenga una  $\gamma_n^1$  ciclica, senza punti di coincidenza effettiva, rappresentata da una curva iperellittica di genere  $p > 0$ , ha come gruppo di monodromia il gruppo diedrico ed ammette quindi due  $\gamma_2^1$ .

Bisogna però esaminare quando la curva  $\varphi$  risulti irriducibile, cioè quando la corrispondenza (1,  $n$ ) fra la curva

$$z^2 = \psi(x)$$

e la

$$y^n = f(x, \sqrt{\psi(x)})$$

non si spezzi in  $n$  corrispondenze [1, 1].

Ora la condizione perchè la  $\varphi$  risulti irriducibile è che sia transitivo il gruppo di sostituzioni che si producono sopra le  $n$  determinazioni della funzione

$$y = \sqrt[n]{f(xz)}$$

quando il punto  $(xz)$  descrive i  $2p$  cicli non nulli sulla riemanniana della curva  $z^2 - \varphi(x) = 0$ .

È effettivamente possibile costruire la curva  $f$  in modo che le  $n$  determinazioni della

$$y = \sqrt[n]{f(xz)}$$

si permutino secondo sostituzioni assegnate (che devono essere potenze della sostituzione ciclica  $(1\ 2 \dots n)$ ), corrispondentemente ai  $2p$  cicli riemanniani percorsi dal punto  $(xz)$ . Precisamente (\*): si assuma come sistema fondamentale di cicli il sistema delle  $2p$  retrosezioni  $A_i$  e  $B_i$ , e si voglia che ad esse corrispondano le  $2p$  sostituzioni

$$S_{a_i} = (1\ 2 \dots n)^{\alpha_i}$$

$$S_{b_i} = (1\ 2 \dots n)^{\beta_i}.$$

(\*) Cfr. la mia Nota, *Sulle superficie di Riemann multiple prive di punti di diramazione*, Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, vol. XXIV, serie 5.<sup>a</sup>, 1.<sup>o</sup> semestre, fasc. 2.<sup>o</sup>.

Si trasformi birazionalmente la  $z^2 - \psi(x) = 0$ , riducendola ad una curva  $\psi(xz) = 0$  dotata solo di punti doppi a tangenti distinte.

Cercheremo la curva  $f$  tra le curve  $f_{rn}$  d'ordine  $rn$  abbastanza elevato, le quali passino per i punti doppi,  $D$ , della  $\psi(xz) = 0$ , ed abbiano  $n$  intersezioni riunite con ciascuno dei due rami di  $\psi$  uscenti dai punti  $D$ .

Fissiamo ora l'origine per i  $p$  integrali abeliani di prima specie  $U_h$  relativi alla curva  $\psi$  in modo che la serie lineare segata su  $\psi$  dalle curve d'ordine  $r$ ,  $f_r = 0$ , passanti per i punti doppi di  $\psi$ , sia definita dalle  $p$  relazioni

$$\sum U_h \equiv 0 \quad (h = 1 \ 2 \dots p)$$

indicando il segno  $\equiv$  la congruenza rispetto ai  $2p$  periodi

$$\omega_{a_i}^{(h)}, \quad \omega_{b_i}^{(h)}$$

relativi all'integrale  $U_h$  ed ai cicli dati dalle retrosezioni  $A_i$  e  $B_i$ .

Si consideri infine un gruppo  $G$  appartenente alla serie definita dalle relazioni

$$\sum U_h \equiv \sum \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \sum \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n};$$

si ha allora che esiste fra le  $f_{nr}$  una curva  $f$  la quale sega la  $\psi$  nei punti di  $G$  avendo ivi un contatto  $n$ -punto, ed è tale che la funzione

$$y = \sqrt[n]{f(xz)}$$

non ha punti di diramazione sulla  $\psi$ , e subisce le sostituzioni assegnate

$$S_{a_i} = (1 \ 2 \dots n)^{\alpha_i}$$

$$S_{b_i} = (1 \ 2 \dots n)^{\beta_i}.$$

##### 5) *Costruzione delle corrispondenze* [2, 2] *di rango qualunque.*

La costruzione della curva immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n > 2$  e di rango  $\rho \neq 0$ , è una facile generalizzazione della costruzione data nel caso di  $\rho = 0$ .

Consideriamo la curva  $\varphi$  immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n > 2$  e di rango  $\rho > 0$ . Essa contiene una  $\gamma_{2n}^1$  rappresentata da una certa curva  $K$  di genere  $\rho$ .

Sia  $K(xt) = 0$  l'equazione di questa curva  $K$ ; e sia  $R_n$  la sua riemanniana. Analogamente a quanto accade per le corrispondenze di rango 0,



avremo che: quando il punto  $(x t)$  si muove sulla  $R_n$ , i  $2n$  punti della curva  $\varphi$ , che ad esso corrispondono, si permuteranno secondo le sostituzioni del gruppo diedrico d'ordine  $2n$ . Ciò porta come conseguenza che l'equazione della curva  $\varphi$  è data dal sistema

$$y = \sqrt[n]{f(x, t, \sqrt{\psi(x t)})}$$

$$K(x t) = 0.$$

Occorrerà inoltre che, se la  $\sqrt[n]{\quad}$  che si estrae sopra la curva

$$z^2 = \psi(x t)$$

$$K(x t) = 0$$

ha come punto di diramazione il punto  $(x, t, z)$ , abbia anche come punto di diramazione il punto  $(x, t, -z)$ , e precisamente: se il primo è per la  $f(x t \sqrt{\psi(x t)})$  uno zero d'ordine  $i$ , l'altro deve essere uno zero d'ordine

$$rn - i,$$

essendo  $r$  un qualunque numero intero.

Dobbiamo ora far vedere che, come per le corrispondenze di rango 0 questa condizione è non solo necessaria, ma anche sufficiente. Anche qui, per comodità di linguaggio, supponiamo  $n = 3$ . Osserviamo che i due valori della  $\sqrt{\psi(x t)}$  definiscono una  $\gamma_2^1$  sopra la curva

$$z^2 = \psi(x t)$$

$$K(x t) = 0.$$

Sia  $R_\psi$  la riemanniana di questa curva. A noi basterà far vedere che: se un certo ciclo riemanniano  $C_1$  della  $R_\psi$  è di diramazione per la  $\sqrt[3]{f(x, t, \sqrt{\psi(x t)})}$ , anche il ciclo  $C_2$ , coniugato di  $C_1$  nella  $\gamma_2^1$ , è pure di diramazione per la  $\sqrt[3]{f(x, t, \sqrt{\psi(x t)})}$ ; e precisamente, se la diramazione attraverso al primo è data dalla moltiplicazione per  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , quella relativa al secondo è data dalla moltiplicazione per  $\varepsilon^2$ .

Dimostrato ciò, tutte le altre deduzioni si svolgono come per le corrispondenze di rango 0.

Veniamo adunque alla dimostrazione del nostro enunciato.

Distinguiamo due casi:

1)  $C_1$  e  $C_2$  sono rappresentati sopra la  $R_k$ , riemanniana della curva  $K(xt) = 0$ , da un ciclo  $C$  nullo.

2)  $C_1$  e  $C_2$  sono rappresentati sopra la  $R_k$  da un ciclo  $C$  non nullo.

Cominciamo dal primo caso: supponiamo adunque che i cicli  $C_1$  e  $C_2$  siano rappresentati sopra la  $R_k$ , riemanniana della curva  $K(xt) = 0$ , da un ciclo nullo  $C$ : questo ciclo dovrà avvolgere due punti di diramazione  $D_1$  e  $D_2$  per la  $\sqrt{\psi(xt)}$ .

Indichiamo con  $P$  un punto della  $R_k$  cui facciamo descrivere il ciclo  $C$ , e con  $P_1$  e  $P_2$  i due punti della  $R_\psi$  ad esso corrispondenti, i quali descriveranno i due cicli  $C_1$  e  $C_2$ . Indichiamo con  $P_{11}$  uno dei tre punti della  $\varphi$  corrispondenti al punto  $P_1$ , e con  $P_{12}$  e  $P_{13}$  gli altri due, per modo che sia la  $y$  di  $P_{12}$  e  $P_{13}$  uguale alla  $y$  di  $P_{11}$  moltiplicata rispettivamente per  $\varepsilon$  e per  $\varepsilon^2$ , il che indicheremo con

$$P_{12} = \varepsilon P_{11}, \quad P_{13} = \varepsilon^2 P_{11} = \varepsilon P_{12}.$$

Facciamo descrivere a  $P$  un cappio intorno a  $D_1$ : avremo allora che  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  andranno in tre altri punti che indico con

$$P_{21}, \quad P_{22}, \quad P_{23},$$

e sarà

$$P_{22} = \varepsilon P_{21}, \quad P_{23} = \varepsilon^2 P_{21} = \varepsilon P_{22}.$$

Per ipotesi il ciclo  $C_1$  è un ciclo di diramazione per la  $\sqrt[3]{f(x, t, \sqrt{\psi(xt)})}$ , e la diramazione attraverso ad esso è data dalla moltiplicazione per  $\varepsilon$ , vale a dire che, quando  $P_1$  descrive  $C_1$ , allora  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  si scambiano secondo la sostituzione ciclica

$$(P_{11}, P_{12}, P_{13}),$$

e quindi quando  $P_2$  descrive il cappio  $D_2$ , i punti  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ ,  $P_{23}$  devono andare in

$$P_{12}, \quad P_{13}, \quad P_{11}.$$

Si ha così che i cappi intorno a  $D_1$  e intorno a  $D_2$  dànno le sostituzioni

$$S_1 = (P_{11} P_{21})(P_{12} P_{22})(P_{13} P_{23})$$

$$S_2 = (P_{21} P_{12})(P_{22} P_{13})(P_{23} P_{11})$$

e quindi il ciclo  $C_2$  produce su  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ ,  $P_{23}$  la sostituzione

$$S_2 S_1 = (P_{21} P_{23} P_{22})$$

che è equivalente alla moltiplicazione per  $\varepsilon^2$ .

Veniamo ora al secondo caso.

Suppongasi adunque che i due cicli  $C_1$  e  $C_2$  siano rappresentati sopra la  $R_k$  da un ciclo riemanniano  $C$ . Consideriamo il piano della variabile complessa  $x$ : su questo il ciclo riemanniano  $C$  sarà rappresentato da un ciclo  $C_x$  avvolgente due punti di diramazione per la funzione algebrica  $t(x)$  definita dalla  $K(xt) = 0$  (\*): siano  $D_1$  e  $D_2$  questi due punti di diramazione. Indichiamo con  $P_x$  un punto del piano  $x$ , con  $P$  il punto della  $R_k$  che descrive  $C$ , quando  $P_x$  descrive  $C_x$ , ed infine con  $P_1$  e  $P_2$  i due punti della  $R_\psi$ , corrispondenti a  $P$ , punti che descrivono  $C_1$  e  $C_2$ , quando  $P$  descrive  $C$ . Da questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto nel caso precedente.

Possiamo quindi concludere che l'equazione della curva  $\varphi$  immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo 3 e di rango  $\rho$ , è data da

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{f(x, t, z)} \\ x^2 &= \psi(xt) \\ K(xt) &= 0 \end{aligned}$$

dove  $K(xt) = 0$  è una curva di genere  $\rho$ , e dove

$$f(xtz) = 0$$

è una superficie che si decompone nella superficie razionale

$$f_1(xt)z + f_2(xt) = 0$$

ed in una superficie cilindrica  $f_3(xt) = 0$ , che passa  $(3g + i)$  volte per ogni punto nel quale siano riunite  $3s + 1$  intersezioni della curva

$$z^2 = \psi(xt)$$

$$K(xt) = 0$$

e della superficie

$$f_1(xt)z + f_2(xt) = 0.$$

Ciò si estende, come per le corrispondenze di rango 0, a qualunque valore di  $n$ .

---

(\*) Si può sempre supporre che la  $t(x)$  abbia punti di diramazione tutti distinti, e che il gruppo di monodromia sia ridotto alla forma canonica di LÜROTH, sì che i cicli riemanniani della  $R_k$  siano dati da cappi, del piano  $x$ , avvolgenti due soli punti di diramazione.

L'equazione della curva  $\varphi$  immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  e rango  $\rho$  è data da

$$\begin{aligned}y &= \sqrt[n]{f(x, t, z)} \\z^2 &= \psi(x, t) \\K(x, t) &= 0,\end{aligned}$$

dove  $K(x, t) = 0$  è una curva di genere  $\rho$ , e dove  $f(x, t, z) = 0$  è una superficie che si scompone nella superficie razionale  $f_1(x, t)z + f_2(x, t) = 0$  ed in una superficie cilindrica  $f_3(x, t) = 0$ . Se  $n$  è dispari la superficie razionale può essere comunque, se  $n$  è pari essa deve avere due intersezioni riunite in ogni punto in cui essa tagli la curva gobba

$$\begin{aligned}z^2 - \psi(x, t) &= 0 \\K(x, t) &= 0.\end{aligned}$$

La superficie cilindrica è poi assoggettata alla condizione di passare  $m = \frac{rn - i}{2}$  volte per ogni punto  $E_1$  in cui siano riunite i intersezioni della superficie razionale con la curva gobba sunnominata.

Nel caso poi che in ogni punto comune alla superficie

$$f(x, t, z) = 0$$

ed alla curva

$$\begin{aligned}z^2 &= \psi(x, t) \\K(x, t) &= 0\end{aligned}$$

le intersezioni assorbite fossero in numero multiplo di  $n$ , allora la  $\sqrt[n]{\quad}$  andrebbe estratta con le avvertenze già indicate rispetto al gruppo dei punti critici apparenti, e ciò affinché la curva  $\varphi$  risulti irriducibile (Cfr. § VIII, n. 4, Nota).

## CAPITOLO IV.

Classificazione delle curve in corrispondenza  $[2, 2]$ .§ 9. CURVE IN CORRISPONDENZA  $[2, 2]$  DI PERIODO QUALUNQUE.

Ritorniamo ora alla considerazione delle curve  $f_1$  e  $f_2$  fra le quali intercede la corrispondenza  $[2, 2]$ .

Ricordiamo che le operazioni del gruppo diedrico  $G$ , generato dalle due involuzioni  $A$ ,  $B$ , determinano sulla curva  $\varphi$ , immagine della corrispondenza, una serie semplicemente infinita di gruppi di  $2n$  punti, cioè un'involuzione  $\gamma_{2n}^1$ , i cui gruppi corrispondono biunivocamente ai punti di una curva  $K$ : il genere di questa dà il rango della corrispondenza.

Osserviamo che le coppie di punti della  $\varphi$  coniugate nell'involuzione  $A$  corrispondono biunivocamente ai punti di  $f_1$ , e parimenti le coppie di punti coniugati nella  $B$  corrispondono ai punti di  $f_2$ : avremo quindi che ai gruppi della  $\gamma_{2n}^1$  appartenente alla  $\varphi$  corrisponderanno biunivocamente su  $f_1$  (e così su  $f_2$ ) i gruppi di  $n$  punti appartenenti ad una  $\gamma_n^1$ , e questi saranno rappresentati dai punti della curva  $K$ . Si conclude che:

*Le due curve  $f_1$  e  $f_2$ , fra le quali intercede una corrispondenza  $[2, 2]$  di periodo  $n$  e di rango  $\rho$ , contengono una medesima  $\gamma_n^1$  di genere  $\rho$ .*

La  $\gamma_n^1$ , appartenente alla  $f_1$ , sarà data da una funzione  $y$ , dei punti della curva  $K$ , a  $n$  valori: dico che se  $n > 2$  il gruppo di monodromia di questa funzione (sulla riemanniana di  $K$ ) è un gruppo diedrico: infatti esso è isomorfo al gruppo di monodromia relativo alla funzione, a  $2n$  rami, dei punti della  $K$  la quale definisce la  $\gamma_{2n}^1$  appartenente alla curva  $\varphi$ .

Chiamando *diedrica* una  $\gamma_n^1$  definita da una funzione a gruppo diedrico, possiamo riassumere quanto si è detto fino ad ora, enunciando il

**TEOREMA:** *Se due curve  $f_1$  e  $f_2$  sono fra di loro in corrispondenza  $[2, 2]$  di periodo  $n > 2$  e di rango  $\rho$ , esse contengono una medesima  $\gamma_n^1$  diedrica di genere  $\rho$ .*

Come caso particolare di questo teorema si può considerare la proposizione incontrata nel § 7: due curve in corrispondenza  $[2, 2]$  di periodo 2 contengono una medesima  $\gamma_2^1$  e viceversa.

Ritornando alle corrispondenze di periodo  $n > 2$ , facciamo vedere il

**TEOREMA:** *Se una curva  $f_1$  contiene una  $\gamma_n^1$  diedrica, essa ammette una corrispondenza [2, 2] che la trasforma in sè lasciando invariati i gruppi della  $\gamma_n^1$ : questa corrispondenza ha il periodo  $n$  se  $n$  è dispari, ed il periodo  $\frac{n}{2}$  se  $n$  è pari.*

Infatti sia  $P$  un punto della  $K$  rappresentatrice della  $\gamma_n^1$  appartenente alla  $f_1$ : a  $P$  corrisponderanno su  $f_1$   $n$  punti

$$P_1 P_2 \dots P_n,$$

appartenenti ad un gruppo di  $\gamma_n^1$ . Essendo diedrico il gruppo della  $\gamma_n^1$ , gli  $n$  punti  $P_1 \dots P_n$  potranno essere disposti — in un ordine circolare — sui vertici di un poligono regolare di  $n$  lati, che resterà invariato per qualunque cammino chiuso percorso da  $P$  sulla riemanniana di  $K$ : pertanto ad ogni punto di  $f_1$  si può associare *razionalmente* la coppia dei due punti che gli sono adiacenti nella disposizione circolare predetta: vale a dire esiste una corrispondenza [2, 2] fra i punti di  $f_1$ , la quale lascia invariato ogni gruppo della  $\gamma_n^1$  diedrica. È poi ovvio che il periodo di questa corrispondenza vale  $n$ , o  $\frac{n}{2}$ , secondo che  $n$  è dispari o pari.

Un semplice esempio si ha considerando una curva che contenga una  $\gamma_3^1$ : evidentemente essa ammette una corrispondenza [2, 2] che la trasforma in se stessa, e ciò è d'accordo col fatto che il gruppo totale su tre elementi è un gruppo diedrico.

Dal teorema precedente si deduce che:

Se una curva  $f_1$  è in corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  con un'altra, essa è anche in corrispondenza [2, 2] con se stessa: il periodo di questa corrispondenza è  $n$ , o  $\frac{n}{2}$ , secondo che  $n$  è dispari o pari.

A questo risultato si può arrivare anche direttamente osservando che a un punto  $P_1$  di  $f_1$  corrispondono i due punti  $Q_1$  e  $Q_n$  di  $f_2$ , e che a  $Q_1$  e  $Q_n$  corrispondono su  $f_1$  due coppie di punti  $P_1 P_2$  e  $P_1 P_n$ ; così in definitiva a  $P_1$  vengono a corrispondere i due punti  $P_2$  e  $P_n$ .

Ci proponiamo ora di stabilire la proposizione fondamentale data dal seguente

**TEOREMA:** *Se fra due curve  $f_1$  e  $f_2$  intercede una corrispondenza [2, 2], esse sono birazionalmente identiche, oppure fra di esse intercede una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ .*

Per stabilire questo teorema, dobbiamo premettere due osservazioni.

*Osservazione I.* Se la curva  $\varphi$  contiene due involuzioni  $A, B$  il cui prodotto  $C = AB$  abbia il periodo  $n$  dispari, allora è

$$B = (AB)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot A (AB)^{\frac{n+1}{2}},$$

come si verifica immediatamente.

*Osservazione II.* Se la curva  $\varphi$  contiene due involuzioni  $A, B$  il cui prodotto  $C$  abbia il periodo  $n = n_1 n_2$ , con  $n_2$  dispari, essa contiene anche una involuzione  $B'$ , birazionalmente identica alla  $B$ , tale che il prodotto

$$C' = AB'$$

abbia il periodo  $n_1$ .

Infatti l'involuzione

$$B' = C^{-\frac{n_2-1}{2}} \cdot B C^{\frac{n_2-1}{2}}$$

è birazionalmente identica alla  $B$ , essendo una sua trasformata; inoltre  $C' = AB'$  ha il periodo  $n_1$ , essendo

$$(C')^{n_1} = (AB')^{n_1} = \left( A (B A)^{\frac{n_2-1}{2}} B (A B)^{\frac{n_2-1}{2}} \right)^{n_1} = A B^{n_1 n_2} = 1.$$

Ciò posto sia  $n$  il periodo della corrispondenza [2, 2] che intercede fra le due curve  $f_1$  e  $f_2$ : se  $n$  è dispari, allora le due involuzioni  $A$  e  $B$  sono birazionalmente identiche, essendo  $B$  una trasformata della  $A$ , e quindi le due curve  $f_1$  e  $f_2$ , che ne rappresentano le coppie, risultano esse pure birazionalmente identiche.

Invece, se  $n$  è pari, sarà

$$n = 2^r n_2,$$

dove  $n_2$  è un numero dispari: in virtù dell'osservazione II esiste un'involuzione  $B'$ , birazionalmente identica alla  $B$ , tale che  $C' = AB'$  è un'operazione di periodo  $2^r$ : si consideri la curva  $f'_2$  immagine delle coppie di punti coniugati nella  $B'$ : questa curva è birazionalmente identica alla  $f_2$  ed è in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$  con la  $f_1$ , pertanto anche la  $f_2$  è in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$  con la  $f_1$ .

§ 10. CURVE IN CORRISPONDENZA [2, 2] DI PERIODO  $n = 2^r$ .

Vogliamo ora esaminare più da vicino le corrispondenze [2, 2] di periodo  $2^r$ .

Per esse sussiste anzitutto il

**TEOREMA:** *Se due curve  $f_1$  e  $f_2$  sono fra di loro in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ , esse sono in corrispondenza [2, 2] di periodo 2 con una medesima curva  $f$ , la quale è la curva immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^{r-1}$ : le equazioni delle  $f_1$ ,  $f_2$  si ottengono estraendo due radici quadrate sopra due curve  $K_1$ ,  $K_2$  fra le quali intercede la corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^{r-1}$ , che ha come curva immagine la curva  $f$ .*

Per dimostrare questo teorema, consideriamo la curva  $\varphi$  immagine della corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ , e su di essa le due involuzioni  $A$  e  $B$  le cui coppie corrispondono ai punti di  $f_1$  e  $f_2$ .

Per ipotesi l'operazione  $C = AB$  ha il periodo  $2^r$ , e pertanto la

$$D = C^{2^{r-1}}$$

ha il periodo 2, e quindi determina sulla  $\varphi$  una involuzione di coppie di punti. Ora si verifica immediatamente che le due involuzioni  $A$ ,  $D$  sono permutabili, e così pure sono permutabili le involuzioni  $B$ ,  $D$ .

Indichiamo con  $f$  la curva i cui punti corrispondono biunivocamente alle coppie di  $D$ ; avremo che la curva  $f$  è in corrispondenza [2, 2] di periodo 2 con la  $f_1$  e con la  $f_2$ .

Ora la  $f_1$  e la  $f_2$ , essendo in corrispondenza [2, 2] di periodo 2, posseggono entrambe (§ 7) una medesima  $\gamma_2^1$  rappresentata dai punti di una curva  $K_1$ , e così pure la  $f_2$  e la  $f$  posseggono una medesima  $\gamma_2^1$  rappresentata dai punti di una curva  $K_2$ : pertanto fra le curve  $K_1$  e  $K_2$  intercede una corrispondenza [2, 2] che ha per immagine la curva  $f$ .

Valutiamo infine il periodo di questa corrispondenza. Indichiamo con  $A'$ ,  $B'$  le due involuzioni (rappresentate dai punti di  $K_1$  e  $K_2$ ) che appartengono alla  $f$ : sia  $C' = A'B'$  il loro prodotto, il periodo di  $C'$  dà il periodo della corrispondenza [2, 2] che intercede fra  $K_1$  e  $K_2$ . Per determinare questo periodo osserviamo che:

1) due punti della  $f$  coniugati nella  $A'$  corrispondono a due coppie della  $D$  coniugate nella  $A$ ;



2) parimenti i due punti della  $f$  coniugati nella  $B'$  corrispondono a due coppie della  $D$  coniugate nella  $B$ ;

3) due punti della  $f$  coincidono, se le due coppie (di punti) corrispondenti sulla  $\varphi$  sono coniugate nella  $D$ .

Da queste osservazioni si deduce immediatamente che il periodo di  $C'$  è la metà di quello di  $C$ , vale a dire  $2^{r-1}$ .

Resta così provato che  $f_1$  e  $f_2$  si ottengono estraendo due radici quadrate sopra due curve  $K_1$  e  $K_2$  in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^{r-1}$ .

In virtù del teorema precedente si ha che:

*Se fra due curve  $f_1$  e  $f_2$  intercede una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ , esse si ottengono estraendo successivamente  $r$  radicali quadratici a partire da una medesima curva  $K$  i cui punti rappresentano le due  $\gamma_{2^r}^1$  diedriche, appartenenti alle due curve  $f_1$  e  $f_2$ .*

Ora, data una curva  $f$  la quale contenga una  $\gamma_{2^r}^1$  diedrica, quante sono le famiglie di curve  $f_2$ , contenenti la stessa  $\gamma_{2^r}^1$  diedrica in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$  con la  $f$ ?

A ciò risponde il seguente

**TEOREMA:** *Le curve  $f_2$ , legate alla  $f_1$  da una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$  con  $r > 1$ , formano un'unica classe di curve birazionalmente identiche, la quale è determinata in funzione della  $\gamma_{2^r}^1$  diedrica appartenente alla  $f_1$ .*

Sia  $K$  la curva rappresentatrice della  $\gamma_{2^r}^1$  appartenente ad  $f_1$ : consideriamo i punti di  $f_1$  e  $f_2$  corrispondenti ad un medesimo punto  $O$  di  $K$ : siano essi:

$$P_1 P_2 \dots P_{2^r}$$

$$Q_1 Q_2 \dots Q_{2^r}.$$

Disponiamo i punti  $P$  e  $Q$  in un ordine circolare, sui vertici di un poligono regolare di  $2^{r+1}$  lati, in modo che ogni punto  $P$  abbia come adiacenti i due punti  $Q$  omologhi nella corrispondenza [2, 2] che intercede fra le  $f_1$  e  $f_2$ : avremo così per i punti  $P$  e  $Q$  una disposizione che resta invariata per qualunque cammino chiuso percorso da  $O$  sulla riemanniana di  $K$ : ciò porta che gli elementi (punti e cieli riemanniani) di diramazione relativi alla  $\gamma_{2^r}^1$  appartenenti alla  $f_1$  siano anche elementi di diramazione relativi alla  $\gamma_{2^r}^1$  appartenente a  $f_2$ , le sostituzioni relative alla prima  $\gamma_{2^r}^1$  determinando quelle relative alla seconda. Precisamente disponendo i punti  $P$  e  $Q$  sui vertici di due poligoni regolari di  $2^r$  lati, si vede che ad ogni ribaltamento del primo poligono intorno ad una diagonale, corrisponde per l'altro un ribal-

tamento intorno ad una mediana, mentre ad una rotazione del primo corrisponde un'uguale rotazione del secondo. Da ciò risulta che tutte le curve  $f_2$  sono fra di loro birazionalmente identiche, avendo il medesimo gruppo di monodromia sulla riemanniana di  $K$ , e sono invece distinte dalla  $f_1$  essendo diverso il loro gruppo di monodromia.

La classe delle curve  $f_2$  potremo chiamarla *coniugata* alla classe delle curve  $f_1$ .

Le osservazioni svolte in questo capitolo permettono di costruire direttamente le coppie di curve coniugate  $f_1$  e  $f_2$  in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ , ma non ci addentriamo in questa ricerca, poichè la costruzione indicata (§ 8, n.º 5) per la curva immagine dà implicitamente la costruzione delle due curve suddette.

## CONCLUSIONE.

Riassumendo :

Il problema di determinare tutte le coppie di curve  $f_1$  e  $f_2$  in corrispondenza [2, 2] equivale al problema di determinare tutte le curve contenenti due  $\gamma_2^1$  (curve immagini della corrispondenza).

Posto così il problema, si ha che le corrispondenze [2, 2] si distinguono primieramente in periodiche e non periodiche, ed a questa distinzione si collega il risultato fondamentale: *le corrispondenze [2, 2] non periodiche hanno tutte il genere  $p \leq 1$*  (cioè la loro curva immagine ha il genere  $p \leq 1$ ). Ciò posto, per la costruzione effettiva delle corrispondenze [2, 2] queste vengono distinte in

- 1) Corrispondenze [2, 2] di genere  $p \leq 1$  ;
- 2) Corrispondenze [2, 2] di genere  $p \geq 2$ .

Tutti i tipi possibili di corrispondenze [2, 2] di genere  $p \leq 1$  sono indicati dal quadro seguente.

Periodo della corrispondenza	Genere della $f_1$	Genere della $f_2$	Genere della corrispondenza
$\infty$	0	0	0
			1
2	0	0	0
	0	0	1
	0	1	1
	1	1	1
$n > 2$	0	0	0
	0	0	1

Le corrispondenze [2, 2] di genere  $p \geq 2$  sono tutte periodiche e si distinguono secondo che il loro periodo è  $n = 2$ , o  $n > 2$ .

Le corrispondenze [2, 2] di periodo 2 sono il prodotto di due corrispondenze [1, 2], e le due curve  $f_1$  e  $f_2$ , tra le quali intercede la corrispondenza, si ottengono estraendo due radici quadrate sopra una medesima curva  $K$ . Le corrispondenze [2, 2] di periodo  $n > 2$  si ottengono costruendo la loro curva immagine  $\varphi$ : questa curva contiene una  $\gamma_{2n}^1$  rappresentata da una certa curva  $K$ , il cui genere dà il rango della corrispondenza. Dalla natura di questa  $\gamma_{2n}^1$  si desume per la curva l'equazione seguente:

$$y = \sqrt[n]{f(xtz)}$$

$$z^2 = \psi(xt)$$

$$K(xt) = 0,$$

dove  $f, \psi, K$  sono simboli di funzione razionale intera, e dove precisamente  $f(xtz) = 0$  rappresenta l'equazione di una superficie che si decompone in

una superficie razionale

$$f_1(x, t)z + f_2(x, t) = 0$$

ed in una superficie cilindrica

$$f_3(x, t) = 0$$

la quale passa  $\frac{r n - i}{2}$  volte per ogni punto nel quale siano assorbite  $s n + i$  intersezioni della superficie

$$f_1(x, t)z + f_2(n, t) = 0$$

e della curva

$$z^2 = \psi(x, t)$$

$$K(x, t) = 0,$$

essendo  $r$  ed  $s$  due numeri interi positivi o negativi o nulli: la superficie razionale può essere assunta ad arbitrio se  $n$  è dispari; invece, se  $n$  è pari, essa è obbligata ad avere un numero pari,  $i$ , d'intersezioni in ogni punto in cui essa tagli la curva gobba

$$z^2 = \psi(x, t)$$

$$K(x, t) = 0.$$

Va segnalato il caso in cui la  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  che si estrae sopra la curva

$$z^2 = \psi(x, t)$$

$$K(x, t) = 0$$

non abbia punti di diramazione, il che accade quando i punti comuni alla superficie  $f(x, t, z) = 0$  ed alla curva predetta siano punti critici apparenti, risultando intersezioni di un ordine  $i$  multiplo di  $n$ .

In questo caso, affinché la curva  $\varphi$  sia immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  occorre che essa sia irriducibile. Questo si ottiene scegliendo convenientemente il gruppo dei punti critici apparenti. Si noti infine che fra le corrispondenze [2, 2] periodiche si trovano, come caso particolare, quelle di genere 0, 1, indicate nel quadro precedente, le quali, per comodità di metodo, furono esaminate insieme alle altre non periodiche che ne hanno il medesimo genere.

Quanto alle curve fra le quali intercede una corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$ , possiamo dire che:

- 1) Se  $n$  è dispari le due curve sono birazionalmente identiche;
- 2) Se  $n$  è pari, fra le due curve intercede una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$ ;
- 3) Le curve in corrispondenza [2, 2] di periodo 2 contengono una medesima  $\gamma_2^1$  e quindi si ottengono estraendo due radici quadrate sopra una medesima curva  $K$ ;
- 4) Le curve in corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^r$  sono fra di loro birazionalmente identiche, ed appartengono a due famiglie distinte, l'una ben determinata in funzione dell'altra: esse poi sono in corrispondenza [2, 2] di periodo 2 con una medesima curva che è immagine di una corrispondenza [2, 2] di periodo  $2^{r-1}$ .

5) Ogni curva in corrispondenza [2, 2] di periodo  $n$  (con  $n > 2$ ) contiene una  $\gamma_n^1$  diedrica, ed ammette una corrispondenza [2, 2] con se stessa di periodo  $n$  se  $n$  è dispari, di periodo  $\frac{n}{2}$  se  $n$  è pari, e viceversa: in particolare tutte le curve che contengono una  $\gamma_3^1$  sono in corrispondenza [2, 2] con se stesse.

Siccome le curve razionali ed ellittiche contengono tutte una involuzione  $g_2^1$  razionale, così possiamo dare il seguente risultato che comprende le corrispondenze anche non periodiche:

6) Se due curve sono in corrispondenza [2, 2] esse sono birazionalmente identiche, o contengono una medesima involuzione (razionale o no), oppure appartengono a due classi coniugate di curve, l'una ben determinata in funzione dell'altra.

# INDICE

---

INTRODUZIONE . . . . .	PAG. 121
------------------------	-------------

## CAPITOLO I.

### GENERALITÀ SULLE CORRISPONDENZE [2, 2] FRA CURVE ALGEBRICHE.

§ 1. Il problema delle corrispondenze [2, 2] fra curve algebriche e sua trasformazione . . . . .	122
§ 2. Genere e periodo di una corrispondenza [2, 2]. Teorema fondamentale . . . . .	123

## CAPITOLO II.

### LE CORRISPONDENZE [2, 2] DI GENERE $p \leq 1$ .

§ 3. Le corrispondenze [2, 2] di genere $p = 0$ . . . . .	124
§ 4. Le corrispondenze [2, 2] di genere $p = 1$ . . . . .	125

## CAPITOLO III.

### LE CORRISPONDENZE [2, 2] DI GENERE $p \geq 2$ .

§ 5. Gruppo di una corrispondenza [2, 2] . . . . .	128
§ 6. I due tipi di corrispondenze [2, 2] periodiche . . . . .	130
§ 7. Le corrispondenze [2, 2] di periodo $n = 2$ . . . . .	ivi
§ 8. Le corrispondenze [2, 2] di periodo $n > 2$ . . . . .	131
1) Rango di una corrispondenza [2, 2] . . . . .	ivi
2) Analisi delle corrispondenze [2, 2] di rango nullo . . . . .	132
3) Considerazioni topologiche sulle curve iperellittiche . . . . .	133
4) Costruzione delle corrispondenze [2, 2] di rango nullo . . . . .	135
5) Costruzione delle corrispondenze [2, 2] di rango qualunque . . . . .	142

## CAPITOLO IV.

### CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE IN CORRISPONDENZA [2, 2].

§ 9. Curve in corrispondenza [2, 2] di periodo qualunque . . . . .	147
§ 10. Curve in corrispondenza [2, 2] di periodo $n = 2^r$ . . . . .	150
CONCLUSIONE . . . . .	152

---

# Opere matematiche di Luigi Cremona

pubblicate sotto gli auspicii della R. Accademia dei Lincei.

---

TOMO SECONDO - U. HOEPLI - MILANO, 1915

---

(*Recensione di FEDERIGO ENRIQUES, a Bologna.*)

Il Comitato per la pubblicazione delle Opere di Luigi Cremona, costituitosi sotto gli auspicii dell'Accademia dei Lincei, procede alacremente nel lavoro intrapreso: al primo volume che vide la luce l'anno scorso e di cui già discorremmo in questi *Annali* (\*), segue ora il secondo volume, su cui desideriamo parimente richiamare l'attenzione degli studiosi.

Questo volume contiene 47 Note e Memorie dedicate a svariatissime questioni: vi figurano contributi alla teoria delle coniche e dei sistemi di coniche, ricerche originali ed importanti sulle cubiche e le quartiche sghembe, sulle rigate gobbe e in particolare su quelle del 3° e 4° grado, sulla rappresentazione piana della superficie romana di Steiner, sulle trasformazioni delle figure piane, sulle superficie algebriche in generale, e poi anche sulla prospettiva lineare e su argomenti d'interesse storico-didattico.

Tanta varietà di temi porge un quadro della vasta operosità dell'Autore, nonchè del momento storico in cui questa ebbe ad esplicarsi; ma alcune Memorie — che sono divenute classiche — offrono ancora un interesse più attuale: tali sono specialmente gli studi sulle trasformazioni birazionali del piano che dal Cremona appunto hanno preso il nome, e i « Preliminari di una teoria geometrica delle superficie » che — com'è noto — costituiscono in qualche modo un'introduzione alla classica Memoria sulle superficie del 3° ordine.

Anche per questo volume, come per il primo, i revisori hanno compiuto un diligente esame delle Memorie pubblicate, rilevando qua e là le piccole

---

(\*) Serie III, tomo XXII (1914), pp. 327-330.

imperfezioni o completando le citazioni con sicura — se pure sobria — erudizione. Essi hanno reso così un prezioso servizio ai cultori della storia della Geometria che — in questa pubblicazione — troveranno esatti riferimenti e notizie.

E qui ci sia consentito insistere in una raccomandazione ai giovani matematici: col segnalare ad essi la lettura delle Opere cremoniane — nella loro edizione integrale e corretta — vorremmo appunto suscitare negli spiriti che si maturano una più larga visione storica della scienza, persuasi che a questa conviene attingere il senso di continuità della tradizione, da cui solo può scaturire la comprensione dei grandi problemi. Nelle ricerche che si riferiscono alla realtà fisica o naturale si può dire che lo stesso mondo dei fenomeni obbliga lo studioso a tenere presenti certi scopi o certe difficoltà, sicchè l'importanza delle questioni riceve — per così dire — il suggello della pratica; nelle Matematiche pure manca questo modo di valutazione, onde l'opportunità di educare in altro modo il giudizio. La storia delle dottrine adempie appunto a questo ufficio, ricostruendo innanzi agli occhi dello studioso quell'insieme di « esperienze mentali », sviluppo di problemi e perfezionamento di metodi, che tocca direttamente la realtà della scienza. La comprensione storica si deve intendere così — non come oggetto di pura erudizione letteraria — ma come comprensione del progresso delle idee, che costituisce un grado superiore della stessa conoscenza scientifica.

Bologna, Gennaio 1915.

---







# Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve d'una superficie algebrica (\*).

(Di GIACOMO ALBANESE, a Pisa.)

---

Consideriamo sopra una superficie algebrica  $F$  un sistema algebrico  $\Sigma$  di curve (\*\*), ed il sistema algebrico  $\Sigma'$  (eventualmente coincidente con  $\Sigma$ ) che si ottiene dal precedente come insieme dei sistemi lineari individuati dalle sue curve.

È chiaro che se  $\Sigma$  è irriducibile lo è pure  $\Sigma'$ , non necessariamente come totalità di curve, ma sibbene come totalità di sistemi lineari.

In generale  $\Sigma'$  risulterà irriducibile anche come totalità di curve. Può darsi però (e lo vedremo effettivamente in seguito) che  $\Sigma'$  sia riducibile come totalità di curve, pur essendo irriducibile come totalità di sistemi lineari.

Questo duplice modo di considerare un sistema algebrico, prendendone come elementi, una volta le curve ed un'altra i sistemi lineari, dà luogo ad un duplice modo di considerare l'equivalenza algebrica di due curve  $A$  e  $B$  sopra una superficie  $F$  (\*\*\*)).

*Diremo che  $A, B$  sono algebricamente equivalenti in senso stretto, e scri-*

---

(\*) Questo lavoro in parte è tratto dalla tesi presentata alla R. Università di Pisa per la laurea e in parte dall'altra tesi presentata per l'abilitazione all'insegnamento alla R. Scuola normale superiore di Pisa.

(\*\*) Per i primi concetti relativi ai sistemi algebrici ved. SEVERI: *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. 39, 1904, n.º 4).

(\*\*\*) La nozione di equivalenza è stata introdotta dal SEVERI nei suoi lavori sulla base. Ved. Math. Annalen, B. 62, 1906, pag. 197 e *La base minima* . . . (Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, T. XXV, 1908, pag. 449).

veremo

$$A \parallel B$$

se esse appartengono ad un sistema irriducibile come insieme di curve.

Se poi le  $A$ ,  $B$ , pur non appartenendo ad uno stesso sistema irriducibile di curve, sono contenute in un medesimo sistema irriducibile come insieme di sistemi lineari, si dirà che le  $A$ ,  $B$  sono *equivalenti algebricamente in generale*, od anche in breve, *algebricamente equivalenti*, e si scriverà:

$$A \sim B (*).$$

Questa equivalenza generale ammette la precedente come caso particolare.

Nel seguito ci converrà di estendere ulteriormente le relazioni d'equivalenza, introducendo l'*equivalenza a catena*, che nel caso di curve aritmeticamente effettive (\*\*), coincide con l'equivalenza algebrica generale sopra definita.

Un sistema algebrico irriducibile come insieme di curve lo chiameremo *sistema algebrico irriducibile* o *in senso stretto*, mentre un sistema irriducibile come insieme di sistemi lineari e riducibili come insieme di curve lo chiameremo *sistema algebrico riducibile* o *generale* o più semplicemente *sistema algebrico*.

Con una solita definizione, un sistema irriducibile si dirà completo quando non è contenuto in nessun altro sistema irriducibile (di curve dello stesso ordine) di dimensione maggiore. E analoga definizione s'intende per i sistemi algebrici generali completi.

(\*) A volte per esprimere che due curve  $A$  e  $B$  non appartengono a nessun sistema algebrico irriducibile diremo che esse sono algebricamente distinte in senso stretto e scriveremo  $A \not\parallel B$ . Così per dire che due curve  $A$  e  $B$  non appartengono a nessun sistema algebrico generale diremo che sono algebricamente distinte in generale e scriveremo  $A \not\sim B$ .

(\*\*) Aritmeticamente effettiva si dice una curva quando i suoi caratteri virtuali  $n$ ,  $\pi$  e  $i$ , rispettivamente grado, genere e indice di specialità, verificano insieme al genere  $p_a$  della superficie sulla quale si ragiona, la disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0.$$

Ved. SEVERI: *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto Veneto, T. LXV, pag. 627 e *Complementi della teoria della base...* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, T. XXX, 1910, § 1).

Fra i sistemi irriducibili a cui una curva  $A$  appartiene v'è sempre il sistema lineare completo  $|A|$ , sistema che, in ordine ad un ben noto teorema di NOETHER, è perfettamente individuato dalla curva  $A$  stessa.

La prima questione fondamentale che si presenta, nello studio dei sistemi algebrici, è quella di vedere se il predetto teorema di NOETHER si estende ai sistemi algebrici completi.

Ora noi proveremo che, per i sistemi algebrici irriducibili, una tale estensione non è possibile. Una curva — anche se aritmeticamente effettiva — può appartenere benissimo a due sistemi irriducibili completi. Anzi proveremo che una curva  $A$  può appartenere ad un sistema irriducibile completo  $\Sigma$  senza che tutte le curve del sistema lineare completo  $|A|$  siano contenute in  $\Sigma$ . In tal caso però  $|A|$  deve avere una dimensione necessariamente maggiore della dimensione del generico sistema lineare di  $\Sigma$ , sibbene questa particolarità non sia caratteristica, perchè un sistema lineare  $|C|$  può essere contenuto per intero in un sistema  $\Sigma$  completo e, ciò non ostante, avere la dimensione maggiore di quella del generico sistema lineare di  $\Sigma$ .

Se però invece di sistemi irriducibili, si considerano sistemi generali, il teorema di NOETHER effettivamente s'estende, e l'estensione cui alludiamo è contenuta nel seguente teorema di SEVERI:

*Assegnata sopra una superficie  $F$ , d'irregolarità  $p_g - p_a = q$ , una curva  $A$  aritmeticamente effettiva, resta su  $F$  individuato un sistema algebrico  $\Sigma$  di  $\infty^q$  sistemi lineari (\*), fra cui  $|A|$ ; ogni sistema continuo irriducibile che contiene una qualsiasi curva di  $\Sigma$  è tutto composto con curve di  $\Sigma$  stesso (\*\*).*

Sicchè la totalità  $\{A\}$  di tutte le curve di  $\Sigma$  è una totalità individuata, non solo da  $A$ , ma da una sua curva qualsiasi; solo che essa non sempre è irriducibile, e le parti in cui si spezza possono non avere neppure la stessa dimensione.

Quel che è certo però è che essa è una varietà connessa, cioè tale da non potersi mai suddividere in due varietà algebriche (riducibili o no) senza elementi comuni.

Questa osservazione ci conduce spontaneamente ad estendere, come abbiamo prima accennato, l'equivalenza generale.

(\*) Si noti che qualunque sia la curva *aritmeticamente effettiva* da cui si parte, la varietà di questi  $\infty^q$  sistemi lineari è sempre birazionalmente identica alla varietà di PICARD inerente ad  $F$ .

(\*\*) Vedi SEVERI: *Osservazioni varie di geometria* . . . (Atti del R. Istituto Veneto, T. LXV, pag. 638).

Diremo che due curve  $A$  e  $B$  sono algebricamente concatenate, e scriveremo

$$A \parallel B$$

quando esse appartengono ad un medesimo sistema algebrico connesso (\*).

Il teorema precedente mostra appunto che nel caso di curve aritmetiche effettive questo concetto non differisce dall'altro dell'equivalenza generale.

Se si tratta però di curve non aritmeticamente effettive l'equivalenza a catena, in molti casi, dà una relazione essenzialmente nuova.

L'equivalenza a catena per la definizione stessa gode della proprietà transitiva. Perciò la totalità delle curve concatenate ad una stessa curva  $A$  è perfettamente individuata, non solo da  $A$ , ma da qualsiasi curva della totalità stessa. Pertanto definiremo *sistema algebrico a catena* o *connesso* (completo), individuato da  $A$ , la totalità delle curve concatenate ad  $A$  e quindi fra di loro.

Che i sistemi lineari d'un sistema connesso non formino sempre una varietà irriducibile lo proveremo con esempi.

Le distinzioni sopra fatte fra sistemi algebrici irriducibili generali e a catena sono distinzioni essenziali, che è opportuno porre esplicitamente in rilievo. Ciò che faccio nella prima parte del lavoro, lueggiando le distinzioni stesse con esempi.

\*  
\* \*

Nella seconda parte mi occupo più espressamente della teoria della base.

Il SEVERI nei suoi lavori fondamentali della base, che abbiamo già avuto occasione di citare, considera sistemi di curve aritmeticamente effettive (\*\*), e che vanno quindi intesi come sistemi algebrici generali-irriducibili solo come insieme di sistemi lineari, ma non come insieme di curve. Per conseguenza le relazioni d'equivalenza algebrica — contenute nei detti lavori — sono relazioni d'equivalenza generale e non d'equivalenza in senso stretto.

Ora la questione che noi ci proponiamo — nella seconda parte del lavoro — è di vedere ciò che avviene dei teoremi sulla base quando, appunto, ci si limita al campo meno ampio dell'equivalenza in senso stretto.

---

(\*) Spesso per esprimere che due curve  $A$  e  $B$  non sono concatenate scriveremo  $A \not\parallel B$ .

(\*\*) O per lo meno si possono facilmente ridurre a tali.

Il primo risultato che otteniamo è identico a quello di SEVERI per l'equivalenza generale e cioè:

*Sopra una superficie  $F$ , a numero base  $\rho$ , date  $\rho$  curve a determinante diverso da zero*

$$C_1 C_2 \dots C_\rho,$$

*è sempre possibile, ed in  $\infty$  modi, fissare una curva  $E$  di  $F$  tale che, ogni altra curva  $C$  di  $F$  sia legata a queste con una relazione del tipo:*

$$\mu C + \lambda E \parallel \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\rho C_\rho + \lambda E,$$

$\mu$  essendo un numero intero diverso da zero e  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$  interi positivi o negativi non tutti nulli.

Dipendentemente da  $C, C_1, C_2, \dots, C_\rho$ ,  $\lambda$  può anche essere zero, ma ciò non avviene sempre.

Possiamo perciò dire che su  $F$ , le curve  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  formano base con l'ausilio della curva  $E$ .

Su questa curva ausiliaria  $E$  diciamo che essa non dipende dalla base scelta, nè dalla curva che per questa si vuole esprimere, e si può fissare a priori una volta per tutte, come precisamente avviene nel campo dell'equivalenza in generale. Ma mentre in questo campo  $E$  si può far coincidere con qualsiasi curva di  $F$  a grado virtuale positivo, per l'equivalenza in senso stretto, ciò non è più vero, e proveremo anche che ci sono casi in cui essa non può coincidere con nessuna combinazione lineare delle curve base  $C_1, C_2, \dots, C_\rho$ , anche se fra queste ve ne sono a grado virtuale positivo. *Sopra  $F$  esistono perciò curve  $C$  per le quali è impossibile una relazione del tipo*

$$\mu C + \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 + \dots + \nu_\rho C_\rho \parallel \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\rho C_\rho,$$

*per valori non tutti nulli dei coefficienti.*

Un secondo risultato più profondo ci permette però di *costruire basi particolari*

$$A_1 A_2 \dots A_\rho,$$

*per le quali non è più necessaria la curva ausiliaria  $E$ : Ogni altra curva  $A$  di  $F$  si può esprimere per esse con una relazione del tipo:*

$$\lambda A \parallel \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_\rho A_\rho.$$

Fatto notevole che evidentemente precisa e determina di più i risultati finora ottenuti sulla base,

\*  
\*\*

Dopo questi risultati sulla teoria della base — ed altri ad essa relativi che ò occasione di dimostrare — nella terza parte mi occupo della teoria della divisione.

Com'è noto questa teoria serve nella costruzione delle basi intermedie e minime.

Le leggi fondamentali di questa operazione sono stabilite da SEVERI con i seguenti due teoremi:

1.<sup>o</sup> *Data sopra una superficie  $F$  una curva  $A$  a caratteri generali (\*) il numero  $\sigma$  dei sistemi continui in cui si ripartiscono le curve  $B$  che con  $A$  verificano le relazioni aritmetiche*

$$[A^2] = [A B] = [B^2] = n > 0,$$

*è costante; non dipende cioè dalla curva  $A$  di partenza, ma è un carattere di  $F$ .*

2.<sup>o</sup> *Il numero dei sistemi continui che si possono ottenere dividendo un sistema qualunque per un numero intero non può superare il numero  $\sigma$ .*

Questi teoremi come quelli sulla base vanno interpretati nel campo dell'equivalenza algebrica in generale o a catena e non in quello dell'equivalenza in senso stretto. Tolta difatti quest'ipotesi essenziale essi non valgono completamente.

Per il secondo teorema poi va aggiunta un'altra restrizione: difatti esso vale solo quando tutti i sistemi quozienti sono composti di  $\infty^q$  sistemi lineari distinti —  $q$  essendo l'irregolarità di  $F$ . — In particolare quando le curve quozienti sono tutte aritmeticamente effettive, o una almeno è a caratteri generali.

Non potendo però escludere (come vedremo con esempi) che la divisione, anche applicata a curve a caratteri generali, porti a curve (quozienti) non variabili in sistemi algebrici composti d' $\infty^q$  sistemi lineari, ò cercato di vedere se con particolari convenzioni era possibile dare agli enunciati di quei

---

(\*) Una curva  $A$  si dice a caratteri generali se il suo ordine è maggiore di quello delle curve canoniche non depurate dalle eventuali curve eccezionali di 1.<sup>a</sup> specie di  $F$  e se i suoi caratteri  $n$  e  $\pi$  verificano col genere aritmetico  $p_a$  di  $F$  la disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 > 0.$$



teoremi — nella loro forma primitiva — un significato generale; ed è visto che lo scopo si raggiunge coll'introdurre il concetto di equivalenza virtuale.

Ecco brevemente di che si tratta:

*Data sopra una superficie  $F$ , una curva  $A$  qualsiasi (anche virtuale), chiameremo sistema virtuale completo  $V_A$ , da essa individuato, la totalità  $\infty^q$  dei sistemi lineari*

$$|A + C - C'|$$

*che si ottengono al variare di  $C$  e  $C'$  in un medesimo sistema algebrico  $\{C\}$  composto di  $\infty^q$  sistemi lineari distinti (\*).*

La definizione è indipendente dal sistema  $\{C\}$ .

Ogni curva

$$B \equiv A + C - C'$$

*sia effettiva che virtuale diremo che appartiene al sistema  $V_A$  ed è virtualmente equivalente ad  $A$ , il che indicheremo scrivendo:*

$$A \sim B.$$

L'equivalenza virtuale così definita contiene come caso particolare la equivalenza algebrica a catena e perciò il sistema virtuale  $V_A$  contiene il sistema algebrico connesso  $\{A\}$ . Anzi *condizione necessaria e sufficiente affinchè questi due sistemi coincidano è che  $\{A\}$  sia composto di  $\infty^q$  sistemi lineari distinti, in particolare che  $A$  sia aritmeticamente effettiva.*

La questione fondamentale è che non tutti i sistemi lineari di  $V_A$  sono sempre effettivi, parte possono essere effettivi e parte virtuali, e così  $V_A$  oltre il sistema  $\{A\}$  può contenere altri sistemi algebrici completi a catena.

Sicchè date due curve  $A, B$  d'uno stesso sistema virtuale, anche se effettive, non sempre si può passare dall'una all'altra con una catena di sistemi algebrici irriducibili di curve effettive. A volte  $A$  e  $B$  sono legate solo da sistemi algebrici di curve tutte virtuali.

Fatto analogo a quello di due punti reali d'una curva algebrica legati solo da una catena di punti immaginari.

Il fatto che un sistema virtuale contenga sistemi lineari virtuali si può considerare come un'irregolarità del sistema stesso, in quanto esso non si

(\*) Qualunque sia la curva  $A$  di partenza questi  $\infty^q$  sistemi lineari hanno sempre un'immagine effettiva nella varietà di PICARD inerente ad  $F$ .

presenta sempre, come nel caso generale delle curve aritmeticamente effettive. E come si vede facilmente tale irregolarità può considerarsi introdotta da una operazione di divisione. Come appunto gli immaginari si introducono con l'operazione algebrica di estrazione di radice sopra numeri reali. La divisione causa perciò nel campo effettivo delle lacune e degli spezzamenti che, a volere risultati generali, bisogna evidentemente togliere o in un modo o in un altro. E questo si raggiunge con l'introduzione dei sistemi virtuali.

E difatti è solo con questi sistemi che la teoria della divisione piglia un assetto completo e generale.

Noto che le considerazioni sui sistemi virtuali hanno sempre riscontro nel campo effettivo e che ogni risultato su di essi si traduce in un risultato del campo effettivo.

Come conseguenza delle cose dette si hanno i due seguenti teoremi:

1.<sup>o</sup> *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia regolare è che ogni suo sistema virtuale contenga uno ed uno solo sistema algebrico effettivo (completo).*

2.<sup>o</sup> *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia regolare è che ogni suo sistema algebrico di curve sia irriducibile, cioè che ogni curva appartenga ad uno ed uno solo sistema algebrico irriducibile completo.*

Questi teoremi mettono in evidenza una nuova differenza caratteristica tra le superficie regolari e quelle irregolari e mostrano ancora di più l'importanza delle considerazioni svolte.

## 1.<sup>a</sup> PARTE.

### 1.

#### **I sistemi di curve sul cono ellittico del 3.<sup>o</sup> ordine.**

1. *Primo esempio di curva appartenente a due sistemi algebrici irriducibili e completi.* Sia  $A$  una cubica piana di genere uno,  $S$  il cono che la proietta da un punto  $O$  dello spazio ordinario.

Dal punto di vista birazionale, questo punto  $O$  su  $S$  va considerato come una curva  $C$  di grado  $-3$  e di genere uno.

Se si trasforma  $S$  in una superficie  $S'$ , in maniera da perdere il punto multiplo  $O$ , la curva  $C$  non è altro che la curva di  $S'$  in cui si trasforma l'intorno del punto  $O$  di  $S$ .

Consideriamo il sistema lineare  $|A|$  delle  $\infty^3$  sezioni piane di  $S$ . Si prova molto facilmente che questo sistema, notoriamente completo, à la serie caratteristica completa.

Ne segue che  $|A|$  non solo è completo come sistema lineare, ma lo è anche come sistema continuo e non può perciò essere contenuto in nessun sistema continuo irriducibile di dimensione maggiore.

Fra le curve di  $|A|$  vi sono le sezioni piane di  $S$  che passano per  $O$ ; ognuna di queste  $\infty^2$  curve si compone evidentemente della curva  $C$ , come parte fissa, e di tre rette complanari di  $S$ . Sia  $L$  una tale curva:

$$L = C + R_1 + R_2 + R_3.$$

Questa curva  $L$  oltre appartenere al sistema lineare  $|A|$ , appartiene anche al sistema continuo  $\Sigma$  delle curve che si ottengono sommando la curva fissa  $C$  a tutte le possibili terne di rette di  $S$ , sistema anch'esso  $\infty^3$  e completo come si prova direttamente.

Ne segue che  $|A|$  e  $\Sigma$  sono completi, distinti, entrambi  $\infty^3$  ed àno a comune le  $\infty^2$  sezioni piane di  $S$  passanti per  $O$ .

Esempi analoghi vedremo più tardi su una qualsiasi superficie irregolare, d'onde il:

*Teorema I. Sopra una superficie algebrica  $F$  irregolare esistono curve appartenenti a due sistemi algebrici irriducibili e completi.*

Il fatto poi che  $|A|$  sia parzialmente contenuto in  $\Sigma$  ci dà quest'altro teorema:

*Teorema II. Una curva può appartenere totalmente ad un sistema irriducibile completo  $\Sigma$ , senza che tutte le curve del sistema lineare completo da essa individuato appartengano a  $\Sigma$ .*

Infine osservando che sebbene l'insieme dei sistemi lineari in cui si distribuiscono le curve di  $\Sigma$  e le curve di  $|A|$  sia un insieme irriducibile, perchè in corrispondenza biunivoca coi punti della curva irriducibile  $A$ , pure l'insieme di tutte queste curve è riducibile. D'onde:

*Teorema III. Un sistema algebrico può essere irriducibile come insieme di sistemi lineari e riducibile come insieme di curve.*

Per i caratteri virtuali delle curve in considerazione si à

$$n = 3 \quad \pi = 1 \quad e \quad i = 0$$

e siccome  $p_a$  in questo caso è uguale a  $-1$ , così per le curve di  $|A|$  e di  $\Sigma$  e in particolare per  $L$  si à:

$$n - \pi + p_a + 1 - i = 2 > 0,$$

cioè tutte queste curve sono aritmeticamente effettive (anzi esse sono a caratteri generali).

Ne risulta che questa particolarità non influisce per nulla sul verificarsi delle proprietà eccezionali dette e che i tre teoremi enunciati valgono anche se le curve in essi considerate sono tutte *aritmeticamente effettive*.

Indichiamo con  $B$  una generica curva  $C + R' + R'' + R'''$  ( $R'$ ,  $R''$  e  $R'''$  tre rette di  $S$  non complanari): le due curve  $B$  ed  $L$  appartengono al medesimo sistema  $\Sigma$ , ma i due sistemi lineari  $|B|$  e  $|L|$  àno dimensioni diverse, il primo 2 e il secondo 3. *Rimane così provato che la dimensione del sistema lineare completo, individuato da una curva  $B$  variabile in un sistema continuo  $\Sigma$ , può per posizioni particolari aumentare di valore (\*)*.

Notiamo infine che fra  $A$ ,  $L$  e  $B$  si àno le relazioni

$$A \parallel L, \quad L \parallel B,$$

ma nello stesso tempo non è  $A \parallel B$ . Quindi *per la equivalenza algebrica in senso stretto non vale la proprietà transitiva*.

Da tutto questo segue chiaramente la verità di quanto si è detto in generale nella prefazione.

2. *Sulle curve  $A$ ,  $B$  che verificano le relazioni  $[A^2] = [A B] = [B^2] > 0$* . Consideriamo ora più attentamente la cubica  $A$  e la generica curva  $B = C + R' + R'' + R'''$  ( $R'$ ,  $R''$  e  $R'''$  non complanari); esse verificano le relazioni aritmetiche:

$$[A^2] = [A B] = [B^2] = 3 > 0.$$

Ebbene io dico che per nessun valore di un numero intero e positivo  $\lambda$  si à mai

$$\lambda A \parallel \lambda B,$$

cioè  $\lambda A$  e  $\lambda B$  non possono appartenere mai ad un medesimo sistema algebrico irriducibile.

Per dimostrare questo teorema cominciamo a considerare il sistema li-

---

(\*) Questa proprietà è stata già notata da ROSENBLATT.

neare completo  $|\lambda A|$ ; e in primo luogo proviamo ch'esso ha la serie caratteristica completa.

Per questo osserviamo che il sistema lineare completo  $|\lambda A|$  è segnato su  $S$  dalle superficie d'ordine  $\lambda$  dello spazio (\*), la sua dimensione  $r_\lambda$  sarà perciò data dalla formula

$$r_\lambda = \left[ \binom{\lambda+3}{3} - 1 \right] - \left[ \binom{\lambda}{3} - 1 \right] - 1 = 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2};$$

e la dimensione della serie che esso segna su una generica curva  $(\lambda A)$  sarà uguale a:

$$r_\lambda - 1 = 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} - 1. \quad (1)$$

D'altra parte (applicando il teorema di RIEMANN-ROCH) per la dimensione  $\rho_\lambda$  della serie caratteristica completa si à:

$$\rho_\lambda = n_\lambda - \pi_\lambda + i_\lambda,$$

$n_\lambda$ ,  $\pi_\lambda$  e  $i_\lambda$  rispettivamente grado, genere ed indice di specialità. Ma per le formule d'addizione:

$$n_\lambda = 3\lambda^2 \quad \text{e} \quad \pi_\lambda = \lambda + 3 \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} - \lambda + 1 = 3 \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} + 1,$$

e poichè

$$n_\lambda - (2\pi_\lambda - 2) = 3\lambda$$

è maggiore di zero l'indice di specialità  $i_\lambda$  è zero e quindi:

$$\rho_\lambda = 3\lambda^2 - 3 \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} - 1 = 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} - 1,$$

che per la (1) ci dà:

$$\rho_\lambda = r_\lambda - 1 \quad \text{c. v. d.}$$

Quindi  $|\lambda A|$  à la serie caratteristica completa e non può essere contenuto in nessun sistema algebrico irriducibile più ampio.

Osserviamo poi che il sistema  $|\lambda A|$  à la curva  $C$  come curva fondamentale, in esso quindi è contenuto un sistema subordinato  $H$  avente la curva

---

(\*) BERTINI e SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale n.º 3* (Rend. della R. Acc. delle scienze di Torino, anno 1907-08),

fissa  $C$  e la dimensione uguale a  $r_\lambda - 1$ . Ed a prescindere o no dalla curva fissa  $C$ , tale sistema  $H$  è segnato su  $S$  dalle superficie d'ordine  $\lambda$  che passano per  $O$ . Ma tanto  $H$  che  $|\lambda A|$  si possono immaginare segnati su  $S$  in maniera diversa e sotto la forma che andiamo a dire ci sarà più utile.

Pensiamo su  $S$  tre rette  $R_1, R_2, R_3$  complanari: le superficie d'ordine  $\lambda + 1$  passanti per queste tre rette segnano su  $S$  il sistema completo

$$|(\lambda + 1)A - R_1 - R_2 - R_3| = |\lambda A + C|$$

e siccome esse passano tutte per  $O$ , così questo sistema à la curva fissa  $C$ .

Si può quindi dire (prescindendo dalla curva fissa  $C$  contata una sola volta e dalle tre rette  $R_1, R_2, R_3$ ) che il sistema completo  $|\lambda A|$  è segnato su  $S$  dalle superficie d'ordine  $\lambda + 1$  dello spazio che passano per le tre rette  $R_1, R_2, R_3$ .

Le superficie che segnano le curve di  $H$  sono allora quelle che contengono un'altra volta  $C$ , ossia che ànno punto doppio in  $O$ .

La condizione del punto doppio è necessaria, perchè  $R_1, R_2, R_3$  essendo complanari, le superficie d'ordine  $\lambda + 1$  che le contengono non tutte ànno necessariamente punto doppio in  $O$ .

Ciò detto cerchiamo di determinare il sistema continuo più ampio a cui appartiene la curva  $\lambda B$ , e cominciamo perciò a dimostrare che assegnate su  $S$  due rette qualsivoglia, per es. la retta  $R_1$  di sopra e una retta  $\bar{R}_2$  che per comodità prenderemo distinta da  $R_2$  e  $R_3$ , esiste su  $S$  una terza retta  $\bar{R}_3$ , perfettamente determinata per la quale si ha:

$$\lambda B \equiv (\lambda - 1)A + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + C. \quad (2)$$

Difatti indichiamo complessivamente con  $g_{3\lambda}$  il gruppo delle  $3\lambda$  rette che compongono  $\lambda B$ ,

$$g_{3\lambda} = \lambda(R' + R'' + R''')$$

e con  $g_{3\lambda-3}$  il gruppo delle  $3\lambda - 3$  rette che compongono  $(\lambda - 1)L$  ( $L$  essendo la curva del numero precedente uguale a  $C + R_1 + R_2 + R_3$ ):

$$g_{3\lambda-3} = (\lambda - 1)(R_1 + R_2 + R_3).$$

Nel fascio di rette di  $S$ ,  $g_{3\lambda}$  individua una serie lineare completa  $g_{3\lambda}^{3\lambda-1}$ . Assegnando a questa serie il gruppo delle  $(3\lambda - 1)$  rette  $g_{3\lambda-3} + R_1 + \bar{R}_2$ ,

resta individuata una terza retta  $\bar{R}_3$  per cui si à:

$$g_{3\lambda-3} + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = g_{3\lambda},$$

d'onde, sommando ad ambo i membri  $\lambda C$ , per le posizioni fatte segue:

$$(\lambda - 1) L + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + C \equiv \lambda B$$

e siccome è  $(\lambda - 1) L \equiv (\lambda - 1) A$ , così sarà:

$$\lambda B \equiv (\lambda - 1) A + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + C \quad \text{c. v. d.}$$

Consideriamo ora le superficie d'ordine  $(\lambda + 1)$  dello spazio che passano per le tre rette  $\bar{R}_1, R_2, R_3$ , dove  $\bar{R}_1$  è la terza retta di  $S$  nel piano di  $\bar{R}_2$  e  $\bar{R}_3$ . Tali superficie oltre queste rette fisse segnano su  $S$  il sistema lineare completo

$$|(\lambda + 1) A - \bar{R}_1 - R_2 - R_3| = |(\lambda - 1) A + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + 2C|. \quad (3)$$

Ma le tre rette  $\bar{R}_1, R_2, R_3$  stavolta non sono complanari, e le superficie d'ordine  $\lambda + 1$  che passano per esse, àno di necessità punto doppio in  $O$ . Ossia il sistema completo (3) che esse segnano su  $S$  à la curva  $2C$  come curva fissa e perciò il sistema completo

$$|\lambda B| = |(\lambda - 1) A + R_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 + C| \quad (4)$$

avrà la curva fissa  $C$ .

Per avere la dimensione di  $|\lambda B|$ , basta calcolare la dimensione delle serie che su  $S$  segnano le superficie d'ordine  $\lambda + 1$ , passanti per  $\bar{R}_1, R_2, R_3$ , dimensione che è data dalla formula

$$\left[ \binom{\lambda + 4}{3} - 1 \right] - \left[ 3(\lambda + 1) + 1 \right] - \left[ \binom{\lambda + 1}{3} - 1 \right] - 1 = r_\lambda - 1,$$

uguale a quella di  $H$ .

Se ora facciamo variare con continuità una delle tre rette che compongono  $B$ , per es.  $R''$ , otteniamo  $\infty^1$  sistemi lineari che descriveranno un sistema continuo completo  $\Sigma_\lambda$ . Finchè le tre rette  $R', R''$  e  $R'''$  rimangono non complanari, per tutti questi sistemi valgono le stesse considerazioni che per  $|\lambda B|$ .

Ma quando  $R'''$  cade nel piano di  $R'$  e  $R''$ , altrettanto avverrà di  $\bar{R}_1$ , rispetto a  $R_2$  e  $R_3$ , e le corrispondenti superficie d'ordine  $\lambda + 1$  non hanno più punto doppio in  $O$ ; il sistema (4) perde la curva fissa  $C$ , aumenta di una unità la sua dimensione e si riduce al sistema  $|\lambda A|$ .

È chiaro dunque che  $|\lambda A|$  e  $\Sigma_\lambda$  hanno la stessa dimensione  $r_\lambda$ , sono distinti completi ed hanno a comune tutte le curve del sistema lineare  $H$ .

Ora la curva  $\lambda A$  ( $A$  contata  $\lambda$  volte) non contiene  $C$ , quindi non fa parte di  $H$  e non può essere contenuta in  $\Sigma_\lambda$ .

Ora un sistema continuo irriducibile che contiene la curva  $(\lambda B)$  è tutto composto con curve del sistema  $\Sigma_\lambda$ , quindi esso non contiene mai  $\lambda A$ .

Né segue che qualunque sia  $\lambda$ , le curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$  non possono mai appartenere ad un medesimo sistema algebrico irriducibile, quindi:

**Teorema IV.** *Sopra una superficie algebrica irregolare esistono curve  $A$  e  $B$  che verificano le relazioni aritmetiche  $[A^2] = [AB] = [B^2] > 0$  senza che le due curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$ , qualunque sia  $\lambda$ , appartengano mai ad un medesimo sistema algebrico irriducibile.*

Questo solo teorema basta per provare quanta differenza passi tra l'equivalenza algebrica in senso stretto e l'equivalenza algebrica generale e come la distinzione fatta possa influire sulla teoria della base (\*).

3. *Su un'altra classe interessante di sistemi di curve  $S$ .* Per quel che segue c'importa considerare le curve di  $S$  del tipo

$$D = \lambda A + R_1 + R_2 + \dots + R_k$$

(\*) Così ricordiamo che uno dei teoremi fondamentali per la determinazione della base dice: «se due curve  $A$  e  $B$  verificano la 1) esiste su  $F$  un integrale semplice di terza specie «avente  $A$  e  $B$  per sole curve logaritmiche».

Infatti, dice il SEVERI, se  $A$  e  $B$  verificano la 1) per certi valori  $\lambda$  le due curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$  sono algebricamente equivalenti. Sia  $\Sigma$  un sistema  $\infty^1$  che contenga  $\lambda A$  e  $\lambda B$ ,  $\varphi$  la curva piana che rappresenta le curve di  $\Sigma$  ed  $a$  e  $b$  i punti corrispondenti alle due curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$ . L'integrale abeliano di terza specie  $I$  che ha i due punti  $a$  e  $b$  come punti logaritmici coi periodi  $+1$  e  $-1$ , interpretato su  $F$  dà un integrale di PICARD di 3.<sup>a</sup> specie che ha come curve logaritmiche le sole curve  $A$  e  $B$ .

Ma per poter parlare d'integrale abeliano  $I$ , la curva  $\varphi$  deve essere necessariamente *irriducibile* e quindi  $\Sigma$  deve essere irriducibile come totalità di curve.

Ora il teorema sopra dimostrato prova precisamente che (qualunque sia  $\lambda$ ) le due curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$  non sempre appartengono ad un sistema  $\Sigma$  irriducibile. In tali casi, dunque, il ragionamento di SEVERI cade in difetto.

Vedremo più tardi § 5 nota a pag. 202 come bisognerà modificarlo.



dove  $\lambda$  è un numero intero  $\geq 0$ ,  $K$  è  $\geq 1$  e  $R_1 R_2 \dots R_k$  sono  $k$  rette di  $S$ . Per poter trattare del numero  $\sigma$  e delle basi relative ad  $S$ , c'è necessario premettere alcune considerazioni su queste curve.

*Cominciamo col dimostrare che comunque si prendano le  $k$  rette  $R_1 R_2 \dots R_k$ , la dimensione del sistema lineare completo  $|D|$  non varia.*

In primo luogo osserviamo che l'arbitrarietà delle  $k$  rette,  $R_1 R_2 \dots R_k$ , si può limitare. Scelte difatti comunque  $k-1$  rette  $\bar{R}_1 \bar{R}_2 \dots \bar{R}_{k-1}$  di  $S$ , esiste una  $k^{\text{esima}}$  retta  $R$  di  $S$ , perfettamente determinata e tale che sia,

$$R_1 + R_2 + \dots + R_k \equiv \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \dots + \bar{R}_{k-1} + R,$$

perciò tutti i sistemi  $|D|$  si possono ottenere fissando ad arbitrio  $k-1$  rette di  $S$  e facendone variare una  $k^{\text{esima}}$  opportunamente

$$|D| \equiv |\lambda A + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \dots + \bar{R}_{k-1} + R|.$$

Ora per dimostrare il nostro teorema, tre casi sono da distinguere: 1.º  $k = 3h$ ; 2.º  $k = 3h + 1$  e infine  $k = 3h + 2$ . Vedremo che basterà trattare il solo primo caso.

Sia dunque  $k = 3h$ , sarà allora  $h \geq 1$ .

Per  $\bar{R}_1 \bar{R}_2 \dots \bar{R}_{k-3}$  scegliamo  $3(h-1)$  rette di  $S$ , formanti  $(h-1)$  terne di rette complanari e che complessivamente indicheremo con  $G_{3(h-1)}$ , rette che terremo sempre fisse, e per le altre due  $\bar{R}_{k-2}$ ,  $\bar{R}_{k-1}$  prendiamo due rette generiche di  $S$ ,  $R'$  e  $R''$ .

Così avremo:

$$|D| = |\lambda A + G_{3(h-1)} + R' + R'' + R|.$$

Indichiamo con  $R'''$  la terza retta di  $S$  nel piano di  $R'$  e  $R''$ , con  $\bar{R}$  la terza retta nel piano di  $R'$  e  $R$ , e chiamiamo  $G_{3(h+1)}$  la somma di due qualsiasi terne di rette di  $S$  col gruppo  $G_{3(h-1)}$ , si avrà:

$$|D| = |\lambda A + G_{3(h+1)} - R' - R''' - \bar{R}|$$

Tutti i possibili sistemi  $|D|$  ora si otterranno al variare di  $\bar{R}$ .

È importante osservare che le tre rette  $R' R'''$  e  $\bar{R}$  che compaiono in questa formula si possono supporre sempre distinte, potendo evidentemente sostituire ad esse una qualsiasi terna  $\bar{R}', \bar{R}''$ ,  $\bar{R}$  equivalente.

Ciò detto consideriamo il sistema lineare  $T$  di tutte le superficie dello spazio d'ordine  $\lambda + h + 1$ , che hanno punto  $(h+1)^{\text{uplo}}$  in  $O$ . Quelle fra queste superficie che passano per  $R'$ ,  $R'''$  e  $\bar{R}$  segnano su  $S$  il sistema completo  $|D|$

(oltre le curve fisse cioè,  $C$  contata  $(h+1)$  volte e le rette  $\bar{R}$ ,  $R'$  e  $R''$ ), perchè evidentemente si à

$$|D| = |\lambda A + G_{s(h+1)} - R' - R'' - \bar{R}| = |(\lambda + h + 1)A - (h + 1)C - R' - R'' - \bar{R}|.$$

Per dimostrare che tutti i sistemi  $|D|$  àno una stessa dimensione, basterà dimostrare che àno la stessa dimensione tutte le superficie di  $T$  che passano per tre qualunque rette distinte di  $S$ .

Ora ciò è facile a vedersi. Difatti, si osservi intanto che  $T$  segna su una qualsiasi retta  $R'$  di  $S$  una  $g_\lambda^2$  completa perchè fra le sue superficie vi sono per es. tutte le superficie d'ordine  $\lambda$  dello spazio aumentate di  $(h+1)$  piani passanti per  $O$ , e queste sole segnano, già, su  $R'$  una  $g_\lambda^2$  completa. Ne segue che se il sistema  $T$  à la dimensione  $r$ , il sistema  $T_1$  di tutte le superficie di  $T$  che passano per  $R'$  avrà la dimensione uguale a  $r - \lambda - 1$ .

In maniera analoga si vede che il sistema delle superficie di  $T_1$  che passano per  $R''$ , à la dimensione uguale a  $r - 2\lambda - 2$  e quello che di più passa per  $\bar{R}$  à la dimensione uguale a  $r - 3\lambda - 3$ .

E questo qualunque siano le tre rette distinte  $R'$ ,  $R''$  e  $\bar{R}$ , quindi la dimensione del sistema delle superficie di  $T$  che passano per tre qualsiasi rette distinte di  $S$  è sempre uguale a  $r - 3\lambda - 3$  e non varia.

E in questo primo caso il nostro teorema è dimostrato.

Nei casi di  $k = 3h + 1$  e  $k = 3h + 2$  basta ripetere lo stesso ragionamento con le superficie d'ordine  $(\lambda + h + 1)$  che àno punto  $(h + 1)^{\text{uplo}}$  in  $O$  e passano invece che per tre rette di  $S$ , rispettivamente per due o per una si àno analoghe considerazioni e analogo risultato.

E così il teorema resta dimostrato in generale.

Gli  $\infty^1$  sistemi lineari  $|D|$ , essendo d'uguale dimensione, appartengono ad un sistema completo  $\{D\}$  che pensato come totalità delle sue curve è certamente irriducibile. E siccome queste curve sono tutte aritmeticamente effettive qualunque sia  $\lambda$  e  $K \geq 1$ , così possiamo dire che:

*Ogni curva  $D = \lambda A + R_1 + R_2 + \dots + R_k$  con  $\lambda \geq 0$  e  $k \geq 1$ , individua su  $S$  uno ed uno solo sistema continuo completo irriducibile a cui essa appartiene come curva totale, e, che l'equivalenza algebrica in senso stretto per le curve  $D$  di questo tipo gode della proprietà transitiva se:*

$$D ||| D_1 \quad \text{e} \quad D_1 ||| D_2, \quad \text{sarà anche} \quad D ||| D_2.$$

Per  $\lambda > 0$  i sistemi lineari  $|D|$  in considerazione sono tutti *irriducibili*. Difatti:  $|D|$  un'involuzione in un fascio non può essere perchè essendo

$\lambda > 0$  nelle sue curve sono contenute parzialmente le curve di  $|\lambda A|$ . Per dimostrare che esso non può avere curve fisse distinguiamo due casi  $k > 1$  e  $k = 1$ .

Quando  $k$  è  $> 1$ ,  $|D|$  si può considerare come la somma dei due sistemi infiniti  $|\lambda A|$  e  $|R_1 + R_2 + \dots + R_k|$ , e questi non hanno alcuna curva fissa.

Sia dunque  $k = 1$ ,  $|D|$  è della forma  $|D| = |\lambda A + R|$ .

Se tale sistema è una curva fissa questa non può essere altro che  $R$ .

Ma ciò è impossibile, se no, la sua dimensione sarebbe uguale a  $3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$ , quella di  $|\lambda A|$ , mentre per il teorema di  $R:R$ : la dimensione  $r$  di  $|D|$  è maggiore uguale di

$$N - \pi + p_a + 1 - i = 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} + \lambda$$

che essendo per ipotesi  $\lambda > 0$  è certamente maggiore di  $3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$ .

Quindi in ogni caso per  $\lambda > 0$   $|D|$  è un sistema di curve irriducibili.

Sia  $D$  una curva generica irriducibile di questo sistema: il sistema completo  $\{D\}$  seguirà su  $D$  la serie caratteristica completa e poichè questa serie non è speciale perchè  $[D^2] - 2[D] + 2 = 3\lambda + 2k$  è sempre maggiore di zero, la dimensione di  $\{D\}$  sarà uguale a  $[D^2] - [D] + 1$  e conseguentemente quella di  $|D|$  sarà uguale a  $[D^2] - [D] = [D^2] - [D] + p_a + 1$ , cioè i sistemi  $|D|$  per  $\lambda > 0$  sono tutti regolari. Ma  $|D|$  è regolare anche per  $\lambda = 0$ ; difatti in tal caso la sua dimensione è  $k - 1$  e si è precisamente

$$k - 1 = [D^2] - [D] + p_a + 1$$

perchè ora,  $[D^2]$  è zero e  $[D]$  è uguale a  $-k + 1$ . Quindi:

*I sistemi lineari  $|D|$  sono tutti regolari e per  $\lambda > 0$  sono anche irriducibili, composti cioè di curve generalmente irriducibili.*

Per la dimensione effettiva  $r_{\lambda k}$  dei sistemi  $|D| = |\lambda A + R_1 + \dots + R_k|$  si è:

$$\begin{aligned} r_{\lambda k} &= 3\lambda^2 + 2\lambda k - \left[ \left( \lambda + \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} - \lambda + 1 \right) + (-k + 1) + \lambda k - 1 \right] \\ &= 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} + \lambda k + k - 1 \\ &= r_{\lambda} + \lambda k + k - 1 \quad (r_{\lambda} = r_{\lambda 0}). \end{aligned}$$

Quando  $k$  è zero questa formula dà la dimensione dei sistemi lineari di  $\Sigma_{\lambda}$  e non quella di  $|\lambda A|$ .

Per avere la dimensione  $R_{\lambda,k}$  del sistema continuo completo  $\{D\}$  non c'è che aumentare  $r_{\lambda,k}$  di una unità e così si à:

$$R_{\lambda,k} = 3 \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} + \lambda k + k = r_{\lambda} + \lambda k + k.$$

Per  $k = 0$  questa è poi la dimensione  $r_{\lambda}$  del sistema  $\Sigma_{\lambda}$ .

4. *Sul carattere di divisibilità  $\sigma$  di  $S$ .* Vedremo fra breve che le curve studiate, cioè le curve di  $|\lambda A|$ ,  $\Sigma_{\lambda}$  e  $\{D\}$  sono in fondo le più generali curve di  $S$ . Ma prima di classificare tutte queste curve prendiamo una curva tipo  $D$ , per es.  $D \equiv A + R$  e dimostriamo che  $D$  e una retta  $R$  qualsiasi formano su  $S$  una base anche nel campo dell'equivalenza algebrica in senso stretto. Difatti:

Sia  $E$  una qualsiasi curva di  $S$ ,  $\mu$  il numero dei punti ove essa incontra  $R$ . Se  $E$  non è composta con un gruppo di  $k$  rette, nel qual caso è già  $E \parallel k R$ , il numero  $\mu$  sarà maggiore di zero perchè il fascio di rette di  $S$  non ha altre curve fondamentali oltre le rette stesse.

Supponiamo dunque che sia  $\mu \geq 1$ . La curva  $E$  e la curva  $\mu D$  sono allora  $\mu$  secanti di tutte le rette di  $S$ ; esse perciò segnano gruppi equivalenti su tutte queste rette, e in ordine ad un ben noto criterio di equivalenza di SEVERI, dette  $R_1, R_2, \dots, R_m, R'_1, R'_2, \dots, R'_m$ , opportune rette di  $S$  sarà:

$$E + R_1 + R_2 + \dots + R_m \equiv \mu D + R'_1 + R'_2 + \dots + R'_m.$$

E per la proprietà transitiva dell'equivalenza algebrica in senso stretto tra curve tipo  $D$  possiamo scrivere più semplicemente:

$$E + m R \parallel \mu D + n R,$$

essendo  $R$  la retta sopra scelta.

Se nel secondo membro di questa relazione facciamo descrivere a  $D$  gli  $\infty^1$  sistemi lineari di cui si compone il sistema continuo completo  $\{D\}$ , otteniamo  $\infty$  curve  $\mu D + n R$  distribuite in infiniti sistemi lineari distinti. Fra essi, per un noto ragionamento, vi sarà anche  $|E + m R|$ , quindi per una posizione particolare  $D'$  di  $D$  in  $\{D\}$  si avrà:

$$E + m R \equiv \mu D' + n R,$$

dalla quale posto  $|m - n| = \nu$  si ricava:

$$E + \nu R \equiv \mu D' \quad \text{oppure} \quad E \equiv \mu D' + \nu R$$

e infine per la solita proprietà transitiva

$$E + \nu R \parallel \mu D \quad \text{oppure} \quad E \parallel \mu D + \nu R. \quad (5)$$

Dunque qualunque sia la curva  $E$  di  $S$ , essa è sempre algebricamente legata in senso stretto alle due curve  $D$  ed  $R$  e siccome il determinante di queste curve,  $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ , è diverso da zero,  $D$  ed  $R$  sono algebricamente distinte e formano effettivamente una base. Anzi osservando che nella (5) il coefficiente di  $E$  è uno, si può dire che  $D$  ed  $R$  formano base minima.

Ciò detto sia  $D'$  un'altra curva di  $S$  che con  $D$  verifica le relazioni:

$$[D^2] = [D D'] = [D'^2], \quad (6)$$

io dico che è:

$$D \parallel\parallel D'.$$

Difatti esprimiamo  $D'$  per  $D$  ed  $R$  e sia:

$$D' \parallel\parallel \mu D + \lambda R.$$

Seguendo con  $D'$  e poi con  $D$  si hanno le relazioni:

$$5 = 5\mu + \lambda\mu, \quad 5 = 5\mu + \lambda,$$

d'onde si ricava che è  $\mu = 1$  e  $\lambda = 0$ , cioè  $D' \parallel\parallel D$ . c. v. d.

Dunque: il numero  $\sigma$  dei sistemi continui completi in cui si ripartiscono le curve  $D'$  di  $S$  che con la curva a caratteri generali  $D$  verificano la (6), è uno. Nel n.º 1) abbiamo però visto che la solita curva  $A$  e la curva  $B = C + R' + R'' + R'''$  verificano le relazioni  $[A^2] = [A B] = [B^2]$ , sono a caratteri generali, ma pur non è  $A \parallel\parallel B$ . Se quindi per calcolare  $\sigma$  si parte dalla curva  $A$ , si trova che  $\sigma$  è maggiore di uno e perciò:

**Teorema V.** *Nel campo dell'equivalenza algebrica in senso stretto il numero  $\sigma$  non è costante, anche se si tratta di sole curve a caratteri generali.*

5. *I valori di  $\sigma$  sopra  $S$ .* È facile però vedere che su  $S$ ,  $\sigma$  è sempre uno o due, ed è due solo per le curve del tipo  $\lambda A + h C$ , (o  $\lambda B + h C$ ) con  $\lambda \geq 1$  e  $h \geq 0$ .

La discussione che faremo ci porterà a dimostrare che i sistemi algebrici riducibili di  $S$  non possono contenere più di due sistemi algebrici irriducibili.

Siano perciò in generale  $E$  ed  $E'$  due curve per le quali si abbia:

$$[E^2] = [E E'] = [E'^2]. \quad (7)$$

Esprimendo  $E$  ed  $E'$  per  $D$  ed  $R$ , in virtù di queste relazioni si trova subito che è:

$$E \parallel\parallel \lambda D + \mu R \quad \text{ed} \quad E' \parallel\parallel \lambda D + \mu R. \quad (8)$$

Da queste non si può però concludere che sia  $E \equiv E'$ ; tutto dipende dai valori di  $\lambda$  e  $\mu$ .

Se  $\lambda$  è zero, sarà certamente  $E \equiv E' \equiv \mu R$ , perchè le curve  $E$  ed  $E'$  sono allora tipo  $D$  ed appartengono al sistema continuo completo formato con tutte le  $\mu^{\text{uplo}}$  di rette di  $S$ .  $E$  in tal caso è  $\sigma = 1$ .

Se  $\lambda$  non è zero, sarà  $\lambda > 0$ , perchè  $\lambda$ , esprimendo il numero dei punti ove  $E$  incontra una retta di  $S$  non può essere mai negativo. Supponiamo che oltre  $\lambda > 0$  sia anche  $\mu \geq 0$ ; in tal caso per le (8)  $E$  ed  $E'$  risultano di nuovo curve tipo  $D$ ; vale la proprietà transitiva e si ha ancora  $E \equiv E'$  con  $\sigma = 1$ .

Se invece è  $\mu < 0$ , cambiamo  $\mu$  in  $-\mu$  e scriviamo le (8) sotto la forma:

$$E + \mu R \equiv \lambda D \quad E' + \mu R \equiv \lambda D.$$

Poscia, in queste sostituiamo alla curva  $D$ , la curva  $A + R$  ad essa equivalente linearmente; la sostituzione è lecita, trattandosi di curve tipo  $D$ , così avremo:

$$E + \mu R \equiv \lambda A + \lambda R \quad E' + \mu R \equiv \lambda A + \lambda R. \quad (9)$$

I coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  sono ora numeri interi e positivi.

Poniamo  $\lambda = \mu + s$  e distinguiamo i tre casi  $s > 0$ ,  $s = 0$  e  $s < 0$ .

*I Caso:*  $s > 0$ . Le (9) allora possiamo scriverle sotto la forma:

$$E + \mu R \equiv \lambda A + \mu R + s R \quad E' + \mu R \equiv \lambda A + \mu R + s R$$

e per due posizioni opportune  $R$  e  $\bar{R}$  di  $R$  in  $S$ , si ha:

$$E + \mu R \equiv \lambda A + \mu R + s R \quad E' + \mu R \equiv \lambda A + \mu R + s \bar{R}$$

da cui:

$$E \equiv \lambda A + s R \quad E' \equiv \lambda A + s \bar{R}$$

e infine per la solita proprietà transitiva:

$$E \equiv \lambda A + s R \quad E' \equiv \lambda A + s R,$$

così  $E$  ed  $E'$  risultano ancora tipo  $D$ , sarà  $E \equiv E'$  e di nuovo  $\sigma = 1$ .

*II Caso:*  $s = 0$ . Le (9) dànno semplicemente

$$E + \mu R \equiv \lambda A + \mu R \quad E' + \mu R \equiv \lambda A + \mu R.$$

Con ragionamento analogo a quello or ora svolto, è facile vedere che in

queste formule  $\mu$  si può sempre supporre uguale ad uno e si ha:

$$E + R \equiv \lambda A + R \quad E' + R \equiv \lambda A + R.$$

Ora al n.º 2) abbiamo visto che tutte le curve  $\lambda A + R$  si ottengono segnando  $S$  con le superficie d'ordine  $\lambda + 1$  dello spazio che passano per due rette di  $S$ , al variare di queste rette.

E abbiamo anche visto che quelle fra queste superficie — che passano per una terza retta  $R$  di  $S$  — segnano su  $S$  le curve dei due sistemi completi  $|\lambda A|$  e  $|\Sigma|$ . Ne segue che  $E$  ed  $E'$  sono fra le curve di questi due sistemi, e siccome viceversa: due curve qualsiasi di questi due sistemi verificano le (7), concludiamo che stavolta il numero  $\sigma$  è due e si hanno i tre casi seguenti:

$$E \equiv E' \equiv \lambda A \quad E \equiv E' \equiv \lambda B$$

oppure

$$E \equiv \lambda A \quad E' \equiv \lambda B$$

con

$$E \equiv E'.$$

Va notato, per quanto si disse al n.º 2), che in quest'ultimo caso non solo è  $E \equiv E'$ , ma per qualsiasi valore di  $\lambda$  è anche  $\lambda E \equiv \lambda E'$ .

Rimane ancora il *terzo caso* di  $s < 0$ . Questo però si riporta facilmente ai casi studiati.

Difatti seghiamo le (9) con  $C$ ; si hanno le due relazioni:

$$[E' \cdot C] + \mu = \lambda \quad [E \cdot C] + \mu = \lambda,$$

le quali ci provano che  $E$  ed  $E'$  incontrano  $C$  nel medesimo numero di punti e che questo numero è precisamente uguale ad  $s$ .

Se  $s$  è  $< 0$  le due curve  $E$  ed  $E'$  debbono necessariamente contenere, come parte, la curva  $C$  contata un certo numero di volte. Indichiamo con  $l$  il numero massimo di volte che  $C$  compare in entrambi e poniamo:

$$E = E_1 + l C \quad E' = E'_1 + l C.$$

Se  $E_1$  ed  $E'_1$  sono contemporaneamente nulle sarà

$$E = E' = l C$$

e di nuovo  $\sigma = 1$ .

Se poi  $E$  ed  $E'$  non sono nulle, esse verificano le relazioni

$$[E^2] = [E_1 E'_1] = [E'^2].$$

Come sopra allora risulta che  $E_t$  ed  $E'_t$  segnano  $C$  nello stesso numero di punti  $s_t$ , ma stavolta siccome per lo meno una delle due curve  $E_t$  od  $E'_t$ , non contiene più  $C$ ,  $s_t$  sarà maggiore uguale zero; quindi  $E_t$  ed  $E'_t$  sono nelle condizioni precise di  $E$  ed  $E'$  nei casi sopra trattati e sono applicabili i risultati ottenuti, così sarà:

$$\text{o } E_t \equiv E'_t \equiv D, \quad \text{o } E_t \equiv E'_t \equiv \lambda A, \quad \text{o } E_t \equiv E'_t \equiv \lambda B$$

oppure

$$E_t \equiv \lambda A \quad E'_t \equiv \lambda B$$

con

$$E_t \equiv E'_t$$

e corrispondentemente:

$$E \equiv E' \equiv D + l C, \quad E \equiv E' \equiv \lambda A + l C, \quad E \equiv E' \equiv \lambda B + l C$$

oppure

$$E \equiv \lambda A + l C \quad E' \equiv \lambda B + l C$$

con

$$E' \equiv E.$$

Nei primi tre casi è sempre  $\sigma = 1$ , nell'ultimo invece le curve  $E$  ed  $E'$  appartengono ai due sistemi  $|\lambda A + l C|$  e  $|\Sigma \lambda + l C|$  che hanno la curva fissa  $l C$  e si à  $\sigma = 2$ .

E si osservi che anche in questo caso, non solo  $E \equiv E'$ , ma è anche  $\lambda E \equiv \lambda E'$  qualunque sia  $\lambda$ .

Concludiamo che  $\sigma$  nel campo dei sistemi irriducibili è uno o due. Nel primo caso è sempre  $E \equiv E'$ ; nel secondo, può essere tanto  $E \equiv E'$ , quanto  $\lambda E \equiv \lambda E'$ ; ma allorchè  $E \equiv \lambda E'$  qualunque sia  $\lambda$  è anche  $\lambda E \equiv \lambda E'$  e questo avviene solo quando è:

$$E \equiv \lambda A + l C \quad E' \equiv \lambda B + l C \quad \text{con} \quad \lambda \geq 1 \quad \text{e} \quad l \geq 0.$$

Quando  $\sigma$  è uno i sistemi algebrici generali corrispondenti sono irriducibili anche come totalità di curve. Mentre per  $\sigma = 2$  si àno sistemi algebrici composti di due sistemi irriducibili.

Come corollario ricaviamo:

*Se due curve  $E$  ed  $E'$  di  $S$  verificano la relazione:*

$$\lambda E \equiv \lambda E' \tag{10}$$



è anche

$$E \parallel E'.$$

Cioè l'operazione di divisione su  $S$ , quando è possibile, è un'operazione univoca.

Difatti a causa della (10) le due curve  $E$  ed  $E'$  verificano la (7). Ora è vero che queste possano essere verificate anche quando è  $E \parallel E'$ , ma in tal caso abbiamo visto che per qualunque valore di  $\lambda$  è anche  $\lambda E \parallel \lambda E'$ ; se dunque vale la (10) bisogna che sia  $E \parallel E'$ . c. v. d.

Per via trascendente SEVERI ha già dimostrato questo teorema (\*).

6. *Classificazione delle curve di  $S$ .* La discussione sopra svolta ci permette anche di classificare le curve di  $S$ . Difatti abbiamo visto che una qualsiasi curva  $E$  è sempre una curva di uno dei seguenti tipi:

$$\begin{aligned} 1.^{\circ} E \parallel KR; \quad 2.^{\circ} E = KC; \quad 3.^{\circ} E \parallel D; \quad 4.^{\circ} E \equiv \lambda A; \\ 5.^{\circ} E \parallel \lambda B; \quad 6.^{\circ} E \parallel D + lC; \quad 7.^{\circ} E \equiv \lambda A + lC; \quad 8.^{\circ} E \equiv \lambda B + lC. \end{aligned}$$

Ora  $A$  è equivalente a  $C + 3R$  se  $R$  è una generatrice di flesso di  $S$ , quindi le curve  $A$  e tutte le curve tipo  $D$  sono tutte curve equivalenti a  $kC + hR$  per  $k$  ed  $h$  opportuni numeri  $\geq 0$  e  $R$  una opportuna retta di  $S$ .

Lo stesso dicasi di  $B$  e delle curve  $\lambda B$ . Quindi le curve generatrici delle curve di  $S$  sono  $C$  e le rette  $R$  (fatto del resto noto (\*\*)).

Ogni curva  $E$  di  $S$  è linearmente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi positivi o nulli di  $C$  ed  $R$

$$E \equiv kC + hR; \tag{11}$$

si badi però che qui  $R$  non è una retta fissa, ma una conveniente retta di  $S$ .

Tutti i tipi di curve di  $S$  sono quindi:

- 1.<sup>o</sup>  $k = 0$ . Le rette e i loro gruppi;
- 2.<sup>o</sup>  $h = 0$ . La curva  $C$  e i suoi multipli;
- 3.<sup>o</sup>  $h > 3k$ . Curve tipo  $D$  distribuite in sistemi continui completi composti di  $\infty^1$  sistemi lineari distinti e tutti regolari;
- 4.<sup>o</sup>  $h = 3k$ . Curve di due tipi: a) curve equivalenti a  $\lambda A$  che riempiono il solo sistema lineare completo  $|\lambda A|$  a serie caratteristica completa e

(\*) V.: *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della R. Acc. di Torino, t. 64, 1903, fine del n.° 11).

(\*\*) V. SEVERI, lavoro sopracitato, parte 2.<sup>a</sup>, § 3.

con la curva fondamentale  $C$ ; b) curve  $\lambda B$  distribuite nel sistema continuo completo  $\Sigma\lambda$  tutte concatenate a  $\lambda A$ , e con la curva fissa  $C$ ;

5.°  $h < 3k$ . Curve aventi tutte come parte la curva fissa  $C$  contata  $l = k - \left[ \frac{h}{3} \right]$  volte e distribuite nei seguenti tre tipi di sistemi:

a)  $\{\lambda A + l C\}$ ,  $h = 3\lambda$ ;

b)  $\Sigma\lambda + l C$ ,  $h = 3\lambda$ ;

c)  $\{D + l C\}$  per  $h = 3\lambda + 1$  o  $3\lambda + 2$ .

7. *Sul modo di comportarsi di alcune basi di  $S$ .* Dopo le cose dette, andiamo ora a trattare della teoria della base sopra  $S$ , *ma tutto dal punto di vista dell'equivalenza algebrica in senso stretto.*

Abbiamo visto che il numero base di  $S$  è due e che formano base le due curve  $D$  e  $R$ .

Consideriamo le due curve  $A$  e  $R$ , escludendo però che  $R$  sia una *generatrice di flesso*.

Il loro determinante  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$  è diverso da zero, perciò esse sono algebricamente distinte e si possono scegliere come curve base.

Esprimiamo  $C$  per  $A$  ed  $R$  e sia s'è possibile:

$$\lambda C \equiv \lambda_1 A + \lambda_2 R. \quad (12)$$

Seguendo con  $C$  e con  $R$  successivamente, si ha

$$-3\lambda = \lambda_2, \quad \lambda = \lambda_1,$$

e la (12) si può scrivere più semplicemente sotto la forma:

$$\lambda(C + 3R) \equiv \lambda A,$$

e dividendo per  $\lambda$ , giacchè la divisione è univoca:

$$C + 3R \equiv A. \quad (13)$$

Ma se  $R$  non è una generatrice di flesso, la curva  $C + 3R$  è una curva tipo  $B$  e la (13) è impossibile. Quindi è impossibile determinare tre valori non tutti nulli di  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  in maniera che abbia luogo la (12).

Per la stessa ragione è anche impossibile trovare dei valori non tutti nulli di  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\mu$  in maniera d'avere:

$$\lambda C + \mu A \equiv \lambda_1 A + \lambda_2 R + \mu A$$

e ciò non ostante che la curva  $A$ , aggiunta ad ambo i membri, sia a grado virtuale positivo.

Se però invece d'aggiungere curve  $A$ , aggiungiamo una retta  $R$ , si à

$$C + 3R + R \parallel A + R,$$

e questa è vera, perchè  $C + 4R$  ed  $A + R$  sono entrambe curve tipo  $D$ .

Quindi se si vuole un legame in senso stretto tra  $C$ ,  $R$  ed  $A$ , la curva d'aggiungere ad ambo i membri è  $R$ , non ostante questa abbia il grado virtuale uguale a zero.

E così la relazione che esprime  $C$ , per la base  $A$  e  $R$ , è

$$C \parallel A - 3R + R - R.$$

E qui possiamo dire che tutto va bene perchè in fondo nel secondo membro di questa relazione non compaiono che le sole curve  $A$  e  $R$  scelte a base.

Ma non è sempre così.

Consideriamo difatti le due curve  $A$  e  $C$ ; il loro determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

è diverso da zero, quindi esse sono algebricamente distinte.

Esprimiamo s'è possibile una retta  $R$ , che non sia generatrice di flesso, per  $C$  ed  $A$ . È facile vedere che in questo caso non si può avere una relazione che al secondo membro contenga solo curve base  $A$  e  $C$ ; difatti una relazione del tipo

$$\lambda R \parallel \lambda_1 A + \lambda_2 C + \mu A - \mu A + \nu C - \nu C$$

è impossibile perchè come sopra dovrebbe essere  $-3\lambda = \lambda_2$  e  $\lambda = \lambda_1$ , cioè:

$$\lambda(C + 3R) + \mu A + \nu C \equiv \lambda A + \mu A + \nu C,$$

che non può valere per le solite ragioni.

Volendo esprimere  $R$  per  $A$  e  $C$  si cade forzatamente nella relazione

$$C + 3R + R \parallel A + R,$$

ossia

$$4R \parallel A - C + R \quad \text{o} \quad 3R \parallel A - C + R - R,$$

che a secondo membro contiene la retta  $R$  che non è una curva base.

Così volendo esprimere una curva tipo  $D$ , per es.:  $D \equiv A + R$  per  $A$  e  $C$ , si cade di necessità in una delle seguenti relazioni

$$1.^{\circ} \quad 4D \equiv 4A - C + D$$

$$2.^{\circ} \quad 3D \equiv 4A - C + R - R.$$

Quest'ultima presenta l'inconveniente di contenere la curva  $R$  distinta dalla base e dalla curva che si vuole esprimere — la prima invece presenta l'inconveniente di contenere nel secondo membro la curva  $D$  che si vuole esprimere e quindi una curva variabile.

In base a questo e alla classificazione delle curve di  $S$  fatte al n.° 6), possiamo concludere che *le curve  $A$  e  $C$  formano base, ma con l'ausilio della curva  $R$ , nonostante  $A$  sia a grado virtuale positivo.*

E se qui sul cono del terz'ordine le cose procedono con relativa semplicità, non altrettanto avviene su qualsiasi altra superficie irregolare. Per es.:

Trasformiamo  $S$  in una superficie  $S'$ , in maniera che un suo punto  $M$  si trasformi in una retta  $M'$ . Indichiamo con  $A$  una generica sezione piana passante per  $M$ ;  $A'$  la sua trasformata su  $S'$  (priva della curva eccezionale di prima specie  $M'$ ) e così indichiamo con  $A'$  e  $C'$  le trasformate su  $S'$  d'una generica  $A$  non passante per  $M$  e di  $C$ . Su  $S'$  le tre curve  $A'$ ,  $A'$  e  $C'$  sono indipendenti; difatti il loro determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9,$$

è diverso da zero. Scegliamole allora a curve base, e vediamo se per esse si può esprimere la retta  $R'$  di  $S'$ , omologa della retta  $R$  di  $S$ , che passa per  $M$  (s'intende  $R'$  priva della curva  $M'$ ). Intanto una relazione della forma

$$\lambda R' \equiv \lambda_1 A' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' \tag{14}$$

è impossibile, perchè segnando con  $M'$ ,  $R'$  e  $C'$  si hanno le relazioni

$$\lambda = -3\mu \quad \lambda_1 = -3\mu \quad \lambda_2 = 2\mu \quad \lambda_3 = \mu,$$

$\mu$  essendo un intero indeterminato, e quindi

$$3\mu A' \equiv \mu(2A' + C' + 3R'),$$

che non è vera, tale essendo la corrispondente

$$3\mu \bar{A} ||| \mu (2A + C + B)$$

di  $S$ .

Dunque la (14), per valori non tutti nulli dei coefficienti, non può aver luogo.

Ma è facile vedere che la (14) non solo è impossibile di per sè, ma lo è anche se ad ambo i suoi membri si aggiunge un multiplo qualsiasi, o di  $B'$  o di  $\bar{A}'$  o di  $A'$  o di  $C'$ . Dico cioè che insieme alla (14) sono impossibili le relazioni:

$$\lambda R' + \nu R' ||| \lambda_1 \bar{A}' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' + \nu R',$$

$$\lambda R' + \nu A' ||| \lambda_1 A' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' + \nu A',$$

$$\lambda R' + \nu A' ||| \lambda_1 \bar{A}' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' + \nu A',$$

$$\lambda R' + \nu C' ||| \lambda_1 \bar{A}' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' + \nu C'.$$

Occupiamoci della prima. Come sopra essa si riduce alla forma:

$$3\mu \bar{A}' + \nu R' ||| \mu (2A' + C' + 3R') + \nu R'.$$

Indichiamo con  $\Sigma'$  il sistema continuo che dovrebbe contenere queste due curve.

Le curve di questo sistema dovrebbero segare  $M'$  in  $(3\mu + \nu)$  punti, e le rette del fascio di rette  $S'$  in  $3\mu$  punti.

Allora il sistema  $\Sigma$  di  $S$ , omologo di  $\Sigma'$ , dovrebbe incontrare le rette di  $S$  in  $3\mu$  punti ed avere punto  $(3\mu + \nu)^{\text{mo}}$  in  $M$ .

Ora questo è possibile solo quando  $\Sigma$  contiene la retta  $B$  per  $M$ , contata almeno  $\nu$  volte, come curva fissa, cioè come parte comune a tutte le sue curve.

Corrispondentemente  $\Sigma'$  conterrebbe la curva  $B'$  contata  $\nu$  volte, come curva fissa, tolta la quale resterebbe un sistema  $\Sigma' - \nu R'$ , contenente le due curve  $3\mu \bar{A}'$  e  $\mu (2A' + C' + 3R')$ , che così risulterebbero equivalenti contro quanto s'è detto sopra. Così stavolta *l'aggiunzione ad ambo i membri della curva  $R'$  che si vuole esprimere non basta per avere un legame in senso stretto tra le curve base e la curva  $R'$  stessa.*

Per dimostrare che sono anche impossibili le altre tre, dimostriamo più

in generale che è impossibile una relazione del tipo :

$$\lambda R' + \nu_1 A' + \nu_2 A' + \nu_3 C' \parallel \lambda_1 A' + \lambda_2 A' + \lambda_3 C' + \nu_1 A' + \nu_2 A' + \nu C,$$

che comprende quelle come caso particolare.

Difatti, come sopra, essa dovrebbe necessariamente ridursi alla forma :

$$3\mu \bar{A}' + \nu_1 A' + \nu_2 A' + \nu_3 C' \parallel \mu (2A' + C' + 3R) + \nu_1 A' + \nu_2 A' + \nu_3 C'$$

e questa non vale per le solite ragioni.

Ciò prova che fra  $R'$ ,  $\bar{A}'$ ,  $A'$  e  $C'$  è impossibile ogni qualsiasi relazione

$$\lambda R' + \nu_1 \bar{A}' + \nu_2 A' + \nu_3 C' \parallel \mu_1 \bar{A}' + \mu_2 A' + \mu_3 C'$$

pur essendo  $\bar{A}'$  e  $A'$  a gradi virtuali 2 a 3.

Volendo una relazione tra  $R'$ ,  $\bar{A}'$ ,  $A'$  e  $C'$  bisogna stavolta *ricorrere necessariamente all'ausilio di una nuova curva, distinta dalle curve base e dalla curva che si vuole esprimere*. Molto facilmente si prova che per una curva  $D'$  trasformata d'una conveniente curva tipo  $D$  di  $S$  si ha proprio :

$$3\mu \bar{A}' + D' \parallel \mu (2A' + C' + 3R') + D'.$$

Concludiamo pertanto :

*Teorema VI. Sopra una superficie  $F$  a numero base  $\rho$  si possono trovare delle basi  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  e delle curve  $\Gamma$  che nel campo dell'equivalenza in senso stretto non sono esprimibili per nessuna combinazione di  $C_1 C_2 \dots C_\rho$ , cioè per esse non è possibile nessuna relazione :*

$$\lambda \Gamma + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \dots + \mu_\rho C_\rho \parallel \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 + \dots + \nu_\rho C_\rho,$$

*per valori non tutti nulli dei coefficienti.*

*E questo può accadere anche se fra le curve  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  ve ne sono a grado virtuale positivo e se si vuole anche aritmeticamente effettive.*

E così sulla più semplice delle superficie irregolari abbiamo potuto dimostrare la verità di quanto abbiamo accennato in generale sull'esposizione riassuntiva.

Varie altre considerazioni si potrebbero aggiungere relativamente alle basi intermedie e minime, ma, credendo d'aver già detto abbastanza per le curve di questo cono  $S$ , passo ad altri più interessanti esempi su nuove superficie.

2.

**Esempi sul cono generale del 4.<sup>o</sup> ordine.**

8. *Esempio di curva appartenente a due sistemi continui completi irriducibili ed entrambi composti d' $\infty$  sistemi lineari distinti.*

I due esempi che andiamo ora a dare completano notevolmente quelli già esposti sul cono cubico ellittico.

Sia  $A_1$  una quartica piana di genere 3,  $S_1$  il cono che la proietta da un punto  $O_1$  dello spazio. Anche su questo cono,  $O_1$  va considerato come una curva  $C_1$ , il cui genere virtuale è 3 e grado virtuale è  $-4$ . Dimostriamo che le superficie d'ordine  $\lambda$  segnano su  $S$  un sistema lineare (completo) a serie caratteristica completa.

La cosa risulta osservando: 1.<sup>o</sup> che la dimensione  $r$  di tale sistema di sezioni è data dalla formola:

$$r = \left[ \binom{\lambda + 3}{3} - 1 \right] - \left[ \binom{\lambda - 1}{3} - 1 \right] - 1 = 2\lambda^2 + 1;$$

2.<sup>o</sup> che il genere  $\pi$  di una generica curva  $(\lambda A_1)$  è uguale a  $2\lambda^2 + 1$ , mentre il grado virtuale  $n$  è uguale a  $4\lambda^2$ ; 3.<sup>o</sup> che essendo  $n = 2\pi - 2$ , la serie caratteristica completa di tale curva coincide con la sua serie canonica ed ha perciò la dimensione uguale a  $2\lambda^2$ , onde, ecc., ecc.

Ciò detto, consideriamo tutte le superficie del terz'ordine dello spazio, che passano per tre qualsiasi rette di  $S$ . Queste superficie passano per  $O_1$  almeno semplicemente e segnano su  $S_1$  una totalità di curve contenenti tutte come parte fissa la curva  $C_1$ . Prescindiamo dalle tre rette scelte e da questa parte fissa  $C_1$ , contata una sola volta, e indichiamo con  $V$  la totalità di tutte le curve residue.

Vogliamo dimostrare che  $V$  si compone di due sistemi continui completi, uno,  $V_{11}$ , formato d' $\infty^{11}$  curve, generalmente irriducibili e distribuite in  $\infty^1$  sistemi lineari distinti, l'altro,  $V_{12}$ , composto d' $\infty^{12}$  curve tutte spezzate in una parte fissa  $C_1$  e in una parte residua variabile e distribuiti in  $\infty^3$  sistemi lineari distinti;  $V_{11}$  e  $V_{12}$  hanno poi a comune un sistema  $V_{10}$  d' $\infty^{10}$  curve, distribuite in  $\infty^1$  sistemi lineari distinti.

Difatti cominciamo a determinare  $V_{\square}$  e per questo siano  $R'$ ,  $R''$  e  $R'''$  tre rette complanari di  $S_1$ . Una generica superficie del terz'ordine che passa per queste tre rette, passa semplicemente per  $O_1$ , e per le ipotesi fatte tutte le superficie del terz'ordine passanti per  $R'$ ,  $R''$  e  $R'''$  segnano su  $S_1$ , oltre le curve fisse, un sistema

$$|E| = |3A_1 - R' - R'' - R''' - C_1|$$

che non ha più la curva  $C_1$  come parte fissa. In queste condizioni si trova facilmente che il sistema  $|E|$  è irriducibile.

Difatti dette  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  quattro rette complanari di  $S_1$  e  $R$  la 4.<sup>a</sup> retta nel piano di  $R', R''$  e  $R'''$  si ha:

$$|E| = |A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R + C_1|.$$

Ora il sistema

$$|A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R| = |A_1| + |R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R|,$$

essendo la somma di due sistemi infiniti senza curve fisse, è certamente irriducibile, ne segue che

$$|E| = |A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R| + |C_1|,$$

giacchè non ha la curva fissa  $C_1$ , è anch'esso irriducibile.

Per avere la dimensione di  $|E|$  osserviamo che il sistema  $T$  di tutte le superficie del 3.<sup>o</sup> ordine che passano per  $R'$  e  $R''$ , la cui dimensione è evidentemente uguale a  $19 - 4 - 3 = 12$ , segna su  $R'''$  una  $g_3^1$  avente il punto fisso  $O_1$  contato due volte, perchè tutte queste superficie sono tangenti in  $O_1$  a  $R'''$ .

Ne segue che le superficie cubiche per  $R', R''$  e  $R'''$  costituiscono un sistema di dimensione  $12 - 2 = 10$  e che perciò  $|E|$  ha la dimensione uguale a 10.

Siccome poi le terne di rette  $R' R'' R'''$  complanari si distribuiscono in  $\infty^1$  sistemi lineari distinti, così di sistemi  $|E|$ , come sopra, se ne hanno  $\infty^1$ .

Essi costituiscono quindi un sistema  $V_{11}$  d' $\infty^{11}$  curve distribuite in  $\infty^1$  sistemi lineari distinti.

Per dimostrare che  $V_{11}$  è completo calcoliamo i caratteri d'una generica curva  $E$ . Si ha:  $n = 20$  e  $\pi = 10$ , e quindi  $n > 2\pi - 2$ . La serie caratteristica di  $|E|$  è allora non speciale ed ha la dimensione uguale a  $20 - 10 = 10$ . Ne segue che  $V_{11}$  segna su  $E$  la serie caratteristica completa e che esso è un sistema irriducibile completo.



Una sua generica curva  $E$  non può perciò appartenere a nessun'altro sistema irriducibile completo. Così  $E$ , poichè si ha :

$$n - \pi + p_a + 1 - i = 20 - 10 - 3 + 1 = 8 > 0,$$

dà l'esempio d'una curva aritmeticamente effettiva che sopra una superficie d'irregolarità  $q = 3$  appartiene ad un solo sistema continuo completo irriducibile, ma composto di soli  $\infty^1$  sistemi lineari distinti, invece che d' $\infty^3$ .

Un fatto analogo s'è visto sul cono  $S$  con la curva aritmeticamente effettiva  $A$ , che invece d'appartenere ad un sistema algebrico irriducibile d' $\infty^1$  sistemi lineari distinti apparteneva al solo sistema lineare  $|A|$ .

Vedremo più avanti (n.º 10) che lo stesso fatto si presenta su qualunque superficie irregolare. E si ha perciò il seguente :

**Teorema VII.** *Sopra una superficie algebrica  $F$  esistono sistemi irriducibili completi di curve aritmeticamente effettive, i cui sistemi lineari formano un insieme di dimensione  $r$  minore dell'irregolarità  $q$  di  $F$ .*

Ma, ritornando alle curve di  $V$ , resta intanto dimostrato che  $V_{11}$ , essendo completo è una parte di  $V$ .

Per avere l'altra parte di  $V$ , che è una  $V_{12}$ , non c'è che considerare tre rette  $R' R'' R'''$  non più complanari e le superficie del terz'ordine che passano per esse: non essendo queste tre rette complanari, tutte queste superficie hanno punto doppio in  $O_1$  e segnano su  $S_1$  curve che contengono 2 volte  $C_1$ ; di una bisogna prescindere, come abbiamo fatto sopra, l'altra rimarrà come parte fissa di tutte le curve residue.

Il sistema

$$|E| = |3A_1 - \bar{R}' - R'' - R''' - C_1|$$

ha così la curva fissa  $C_1$ .

Osservando poi che le superficie cubiche che passano per  $R'$  e  $\bar{R}''$  non sono tutte tangenti a  $R'''$ , si trova che  $|\bar{E}|$  ha la dimensione uguale a 9. E siccome di tali sistemi  $|E|$  se ne hanno  $\infty^3$ , così, fra le curve di  $V$  oltre  $V_{11}$ , v'è anche un sistema continuo  $V_{12}$  d' $\infty^{12}$  curve, aventi tutte la curva fissa  $C_1$  e distribuite in  $\infty^3$  sistemi lineari distinti. Questo sistema  $V_{12}$  si può definire come il sistema di tutte le curve segnate sopra  $S_1$  dalle superficie del terzo ordine dello spazio che hanno punto doppio in  $O_1$  e passano per tre qualsiasi rette di  $S_1$ .

È chiaro poi che  $V_{11}$  e  $V_{12}$  hanno a comune tutte le  $\infty^{10}$  curve segnate su  $S_1$  dalle superficie del terz'ordine che hanno punto doppio in  $O_1$  e passano per tre rette complanari qualsiasi di  $S_1$ .

Queste  $\infty^{10}$  curve costituiscono il sistema che sopra abbiamo chiamato  $V_{10}$ .

E così il nostro teorema è completamente dimostrato.

Ne risulta che una qualsiasi curva di  $V_{10}$  è una curva (aritmeticamente effettiva) appartenente a due sistemi continui completi irriducibili, uno  $V_{11}$  d' $\infty^1$  sistemi lineari, l'altro  $V_{12}$  d' $\infty^3$  sistemi lineari.

9. *Esempio di sistema algebrico a catena, i cui sistemi lineari formano un insieme riducibile.* Prendiamo dieci punti  $G_{10}$  generici di  $S_1$  e assegniamoli al sistema  $V$ . Il sistema  $V'$  che si ottiene si comporrà di due varietà  $V'_1$  e  $V'_2$ . La prima composta d' $\infty^1$  curve di  $V_{11}$  rappresenti gli  $\infty^1$  sistemi lineari  $V_{11}$  stessi. L'altra  $V'_2$  composta di  $\infty^3$  curve tutte di  $V_{12}$  e distinte dalle precedenti.

I sistemi  $V'_1$  e  $V'_2$  hanno poi a comune le curve di  $V_{10}$  che passano per  $G_{10}$  e che sono certamente in numero finito.

Ne segue che  $V'$  è un sistema algebrico a catena evidentemente completo e che i suoi sistemi lineari non formano una varietà irriducibile.

Le curve di  $V'$  non sono però aritmeticamente effettive; difatti per i loro caratteri  $n$ ,  $\pi$  e  $i$  si à

$$n = 10 \quad \pi = 10 \quad i = 0$$

e quindi

$$n - \pi + p_a + 1 = 10 - 10 - 3 + 1 = -2 < 0.$$

*Teorema VIII. Un sistema algebrico a catena può essere riducibile tanto come insieme di curve quanto come insieme di sistemi lineari.*

In questo caso l'equivalenza a catena dà effettivamente una relazione essenzialmente nuova.

Osservasi che se non si vogliono considerare sistemi con punti base assegnati non c'è che trasformare birazionalmente  $S_1$  in una superficie  $S'_1$  in maniera che i punti di  $G_{10}$  si trasformino in altrettante curve eccezionali di prima specie.

10. *Sulla dimensione dei sistemi lineari d'un medesimo sistema irriducibile.* — Le curve di  $S_1$  sopra considerate sono tutte le curve dei sistemi lineari

$$|A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + C_1|$$

al variare delle cinque rette  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ .

Vogliamo ora occuparci di tutte le curve

$$A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

al variare di  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .

Troveremo che tutte queste curve costituiscono un sistema continuo completo irriducibile  $\Sigma_{10}$  composto d' $\infty^3$  sistemi lineari irriducibili e distinti i quali sono tutti  $\infty^7$ , tranne uno solo che è  $\infty^8$ .

Così resterà provato il

**Teorema IX.** *Un sistema irriducibile completo  $\Sigma$  può a volte contenere per intero un sistema lineare completo  $|C|$  e ciò non ostante  $|C|$  avere dimensione maggiore del generico sistema lineare di  $\Sigma$ .*

Veramente un 1.<sup>o</sup> esempio molto semplice di questa proprietà si ha considerando sulle superficie con fascio di genere  $p$ , le  $p^{\text{upla}}$  di curve di questo fascio. Ma l'esempio che andiamo ora a dare è evidentemente più completo e più espressivo perchè tratta di curve irriducibili.

Consideriamo dunque le superficie cubiche che hanno punto doppio in  $O_1$  e passano per quattro rette qualsiasi di  $S_1$ .

Queste superficie segnano su  $S_1$  una totalità di curve contenenti 2 volte  $C_1$ .

Noi come al solito prescindiamo da tutte le curve fisse compresa  $C_1$  contata 2 volte e considereremo le sole curve residue.

Per studiare questa totalità di curve prendiamo 4 rette  $R', R'', R''', R^{IV}$ ; se queste sono complanari il sistema delle superficie del terz'ordine che hanno punto doppio in  $O$  e passano per esse si riduce a tutte le quadriche dello spazio passanti per  $O_1$  aumentate dal piano fisso di  $R', R'', R'''$  e  $R^{IV}$ .

Tali superficie sono evidentemente  $\infty^8$  e oltre le curve fisse  $C_1, R', R'', R''', R^{IV}$  segnano su  $S$  un sistema lineare completo

$$|C| = |3A_1 - R' - R'' - R''' - R^{IV} - 2C_1| = |A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4|$$

(con  $R_1, R_2, R_3, R_4$  complanari) di dimensione uguale a 8.

Questo sistema  $|C|$  è irriducibile perchè

$$|A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4| = |A_1| + |R_1 + R_2 + R_3 + R_4|$$

si può considerare come somma di due sistemi  $|A_1|$  e  $|R_1 + R_2 + R_3 + R_4|$  infiniti e privi di curve fisse, senza che entrambi siano un'involuzione in un fascio.

Il sistema  $|C|$  come sistema algebrico non è completo. Difatti il grado virtuale di  $|C|$  è  $4 + 2 \cdot 4 = 12$  e il genere è  $3 - (4 - 1) + 4 - 1 = 3$ ; sicchè la serie caratteristica di una generica curva  $C$  ha la dimensione uguale a  $9 = 12 - 3$ .

Ricorrendo allora al solito teorema fondamentale d'ENRIQUES bisogna concludere che il sistema irriducibile completo a cui  $|C|$  appartiene deve avere la dimensione uguale a 10.

Questo nel caso che  $R', R'', R''', R''''$  siano complanari; supponiamo ora che ciò non sia.

Il sistema  $|D|$  che le superficie cubiche passanti per queste 4 rette segnano su  $S_1$  non è più  $\infty^8$  bensì  $\infty^7$  perchè imponendo alle superficie del terz'ordine di passare per  $R', R'', R''', R''''$  bisogna imporre successivamente 4, 3, 3, 2 condizioni e quindi in tutto 12 condizioni; perciò il sistema

$$|D| = |A_1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4|$$

tutte le volte che  $R_1, R_2, R_3, R_4$  non sono complanari è  $\infty^7$ .

Al variare di queste 4 rette si hanno così  $\infty^3$  sistemi lineari completi  $|D|$  che determinano un sistema continuo completo  $\Sigma_{10} = \{D\}$  di dimensione 10.

Il sistema  $|C|$ , essendo una posizione particolare di  $|D|$ , ha per lo meno  $\infty^7$  delle sue curve contenute in  $\{D\}$ .

Ma io dico che esso è tutto contenuto in  $\{D\}$ .

Difatti indichiamo con  $\Sigma'$  il sistema continuo più ampio a cui esso appartiene; per quanto s'è detto sopra  $\Sigma'$  sarà pure  $\infty^{10}$ .

Ora tutte le curve  $A_2 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ , sono aritmeticamente effettive, quindi in ordine al teorema di SEVERI, ricordato nella prefazione, il sistema  $\Sigma'$  si deve comporre con curve dei sistemi lineari  $|D|$ .

Ne risulta che tutte le curve di  $\Sigma'$  sono curve di  $\{D\}$  e che  $\Sigma'$  avendo così  $\infty^{10}$  curve a comune con  $\{D\}$  coincide con esso. Il sistema  $|C|$  è perciò contenuto per intero in  $\{D\}$ .

E il nostro asserto è completamente dimostrato.

Si può notare che essendo

$$7 = n - \pi + p_a + 1 - i + 6 = 12 - 3 - 3 + 1 - 0 + 0$$

tutti quest'ultimi sistemi  $|D|$  sono regolari, mentre il primo corrispondente alle 4 rette  $R_1, R_2, R_3, R_4$  complanari à la sovrabbondanza uguale a 1.

## 3.

**Esempi sopra una superficie irregolare qualsiasi.**

11. *Nuovo esempio sopra una superficie irregolare qualsiasi di sistema algebrico irriducibile come insieme di sistemi lineari e riducibile come insieme di curve.* In questo paragrafo ci proponiamo di dimostrare che i fatti incontrati sui coni  $S$  ed  $S_1$  non sono dovuti alle particolarità di queste due superficie, ma che fatti analoghi si presentano su qualsiasi superficie irregolare.

Per ora ci limiteremo a provare le proprietà più importanti.

*Sopra una superficie irregolare qualsiasi: 1.° esistono curve aritmeticamente effettive appartenenti a due sistemi irriducibili completi; 2.° esistono curve  $A$  e  $B$ , che verificano le relazioni  $[A^2] = [AB] = [B^2] > 0$  senza che, per nessun valore  $\lambda$ , sia mai  $\lambda A \parallel \lambda B$ ; 3.° per l'equivalenza in senso stretto il numero  $\sigma$  non è costante.*

Sia  $F$  una superficie irregolare,  $|E|$  un sistema lineare di  $F$  variabile in un sistema irriducibile completo  $\{E\}$ , composto d' $\infty^2$  sistemi lineari tutti della stessa dimensione  $r$ .

Sia poi  $C$  una curva irriducibile pure di  $F$  e variabile in un sistema continuo  $\{C\}$ , che non sia un fascio irrazionale.

Supporremo, com'è lecito, che il sistema  $|A| = |E + C|$  sia irriducibile e senza punti base.

Indichiamo poi con  $G$  il gruppo di punti ove  $C$  incontra una generica curva  $A_0$  di  $|A|$ .

Il SEVERI à dimostrato che assegnando al sistema lineare  $|A|$  il gruppo  $G$ , il sistema residuo  $|A_0|$  à la serie caratteristica completa (\*) e perciò sarà completo anche come sistema irriducibile.

Il sistema  $|A_0|$  à la curva  $C$  come curva fondamentale. In esso sarà quindi contenuto un sistema subordinato che à la curva  $C_0 = C - G$  come parte

---

(\*) *Sulla regolarità del sistema aggiunto.* R. Acc. dei Lincei, 1908. L'osservazione che andiamo a dimostrare è implicitamente contenuta nella nota 3 a pag. 466 di questo stesso lavoro.

fissa. È chiaro poi che questo sistema coincide con  $|E| + C_0$ , e che perciò  $|A_0|$  ha la dimensione uguale ad  $r + 1$ .

Ora  $|E| + C_0$  appartiene anche al sistema  $\Sigma = |E| + C_0$ , che si ottiene sommando a tutte le curve di  $|E|$  la curva fissa  $C_0$ .

Che il sistema così fatto sia completo risulta dall'osservare ch'esso si compone d' $\infty^2$  sistemi lineari distinti e che ognuno di questi ha di necessità la curva fissa  $C_0$ , se no la sua dimensione sarebbe per lo meno uguale ad  $r + 1$  e il sistema  $|A_0|$  sarebbe ampliabile, contro quanto abbiamo già detto.

Le curve  $E + C_0$  ci danno allora l'esempio di curve appartenenti a due sistemi irriducibili completi e distinti,  $|A_0|$  e  $\Sigma$ .

Anzi  $E + C_0$  ci dà l'esempio (sopra una superficie irregolare qualsiasi) di una curva appartenente al sistema completo  $\Sigma$ , senza che tutte le curve del sistema lineare completo  $|E + C_0| = |A_0|$  siano contenute in  $\Sigma$  (v. n.º 1).

Per i caratteri delle curve  $A_0$  e  $E + C_0$  in considerazione si ha:

$$N = [E^2] + 2[C_0 E] + [C_0^2] = [E^2] + 2[E C] + C^2 - [D C]$$

$$\pi = [E] + [C] + [E C_0] - 1 = [E] + [C] + [E C] - 1$$

d'onde:

$$\begin{aligned} N - \pi + p_a + 1 - i &= \{[E^2] - [E] + p_a + 1\} + [E C] + [C^2] - [C] - [D C] + 1 - i \\ &= \{[E^2] - [E] + p_a + 1\} + 1 - i - [C], \end{aligned}$$

e detta  $\rho_e$  la dimensione virtuale del sistema  $|E|$ ,

$$\rho_e = [E^2] - [E] + p_a + 1,$$

si à:

$$N - \pi + p_a + 1 - i = \rho_e + 1 - [C] - i.$$

E perchè si verifichi la disuguaglianza

$$N - \pi + p_a + 1 - i > 0,$$

non c'è che scegliere a priori  $|E|$  rispetto a  $C$  in maniera che sia

$$\rho_e + 1 - i - [C] > 0.$$

In tali ipotesi le curve dei due sistemi  $|A_0|$  e  $\Sigma$  sono tutte a caratteri generali e in particolare aritmeticamente effettive.

Concludiamo che la proprietà detta si verifica anche se si tratta di curve a caratteri generali. Si osservi poi a complemento di quanto si disse al n.º 8 che una generica curva  $A_0$  è aritmeticamente effettiva ed appartiene al solo sistema lineare  $|A_0|$  invece che ad un sistema d'∞<sup>g</sup> sistemi lineari distinti.

12. *Sul carattere di divisibilità  $\sigma$  di  $F$ .* Siano

$$\{E\} \quad \{E_1\} \dots \quad \{E_{\sigma-1}\}$$

tutti i sistemi irriducibili di curve di  $F$  che con  $E$  verificano le relazioni:

$$[E^2] = [E E_1] = [E_1^2] > 0,$$

e insieme ad essi consideriamo i  $\sigma + 1$  sistemi irriducibili:

$$|A_0| \quad \{E\} + C_0 = \Sigma, \quad \{E_1\} + C_0 \dots, \quad \{E_{\sigma-1}\} + C_0.$$

Tutte le curve  $A$  di questi  $\sigma + 1$  sistemi verificano con  $A_0$  le relazioni:

$$[A_0^2] = [A_0 A] = [A^2] > 0.$$

Sicchè se si calcola  $\sigma$  partendo dalla curva  $A_0$ , il numero che si trova supera per lo meno di una unità quello che si ottiene partendo dalla curva  $E$ . Ne segue che per i sistemi irriducibili sopra  $F$   $\sigma$  non è costante anche se si tratta di sole curve a caratteri generali.

13. *Un altro esempio di curve  $A$  e  $B$  che verificano le relazioni  $[A^2] = [AB] = [B^2] > 0$  senza che sia mai  $\lambda A ||| \lambda B$ .* Scegliamo in  $\{E\}$  una curva  $\bar{E}$ , distinta però dalle curve del sistema lineare  $|E|$  e poniamo

$$B_0 = \bar{E} + C_0.$$

Per l'ipotesi fatta  $A_0, B_0$  saranno algebricamente distinte in senso stretto e verificano le relazioni:

$$[A_0^2] = [A_0 B_0] = [B_0^2] > 0:$$

ebbene io dico che per nessun valore  $\lambda$  è mai

$$\lambda A_0 ||| \lambda B_0.$$

Facciamo difatti i multipli secondo  $\lambda$  — con  $\lambda$  qualsiasi — del sistema  $|A_0|$  e del sistema  $\Sigma$ .

Il sistema  $|\lambda A_0|$  ha punti  $\lambda^{p_i}$  nei punti del gruppo  $G$ . Esso può quindi considerarsi come il sistema subordinato di  $|\lambda A|$  che à punti  $\lambda^{p_i}$  assegnati nei punti di  $G$ , e siccome questi esauriscono tutte le intersezioni di una  $(\lambda A)$  con  $C$  per il ricordato teorema di SEVERI anche  $|\lambda A_0|$  ha la serie caratteristica completa.

Come al n.º 11 si dimostra allora che il sistema  $\lambda \Sigma$  ha la curva fissa  $C_0$ : e per concludere che  $\lambda A_0$  e  $\lambda B_0$  sono algebricamente distinte in senso stretto, non c'è che ripetere il ragionamento svolto per lo stesso scopo sul cono  $S$ . E il teorema rimane dimostrato.

Osserviamo che volendo escludere la considerazione di sistemi con punti base assegnati non c'è che trasformare  $F$  in una superficie  $F'$  in maniera che, tutti i punti di  $G$  si trasformino in altrettante curve eccezionali di prima specie.

I sistemi  $|A'_0|$ ,  $\Sigma'$  di  $F'$  omologhi di  $|A_0|$  e  $\Sigma$ , non avranno più punti base, non conterranno le curve introdotte nella trasformazione e del resto verificano tutte le proprietà dette per  $|A_0|$  e  $\Sigma$ .

Chiudiamo così questa prima parte d'esempi che ci à servito a dimostrare la necessità di distinguere nettamente l'equivalenza generale dall'equivalenza in senso stretto e passiamo alla 2.<sup>a</sup> parte sulla teoria della base.

## II.<sup>a</sup> PARTE.

### 4.

#### Osservazioni preliminari.

14. In questa 2.<sup>a</sup> parte tratteremo della teoria della base nel campo dell'equivalenza algebrica in senso stretto.

Sia  $F$  una superficie irregolare immersa in certo spazio  $S_r$ , e ivi priva di singolarità.

Indicheremo con  $|E|$  il sistema delle sezioni iperpiane di  $F$  e con  $B$  una sua curva d'ordine  $m$ .

È noto, e del resto si prova con semplici considerazioni proiettive, che qualunque siano le particolarità di  $B$ , leipersuperficie d'ordine  $m$  di  $S_r$ , che



passano per  $B$  segnano altrove su  $F$  un sistema lineare

$$|D| = |mE - B|,$$

più volte infinito, irriducibile e senza punti base.

Per la stessa ragione, posto  $\lambda_0 = m(n-1)$ , sarà tale anche il sistema

$$|\lambda_0 E - D| = |\lambda_0 E - (mE - B)| = |(\lambda_0 - m)E + B|;$$

e a fortiori lo saranno tutti i sistemi

$$|lE + B|, \tag{15}$$

con  $l \geq l_0 = \lambda_0 - m = m(n-2)$ .

Possiamo perciò dire, *che data comunque sopra  $F$  una curva  $B$  d'ordine  $m$ , per tutti i valori di un numero  $l$  a partire da  $l_0 = m(n-2)$  in poi, il sistema lineare (15) è infinito, irriducibile e senza punti base.*

L'importanza del risultato sta nel fatto che il numero  $l_0$  così determinato è indipendente d'ogni particolare posizione della curva  $B$ ; se  $B$  varia, conservando l'ordine  $m$ , la proprietà vale per tutte le sue posizioni e a partire sempre dallo stesso numero  $l_0$ .

In particolare se  $B$  appartiene ad un sistema algebrico  $\Sigma$ , composto d' $\infty^s$  sistemi lineari distinti, *gli  $\infty^s$  sistemi lineari (15) che si ottengono al variare di  $B$  in  $\Sigma$  rimangono tutti, per ogni valore di  $l \geq$  il numero fisso  $l_0$ , infiniti irriducibili e senza punti base.*

Prendiamo ora sopra  $B$  un sistema lineare  $|A'|$  regolare ed aggiunto ad un sistema lineare  $|A|$ .

Per una nota formola di CASTELNUOVO, detto  $\sigma$  la sovrabbondanza di  $|A' + lE + B|$ ,  $\delta$  e  $\tau$  la deficienza e la specialità della serie che questo sistema segna su una generica curva  $(lE + B)$ , si ha:

$$0 = \sigma + \delta - \tau. \tag{16}$$

Ma per il teorema dell'aggiunzione d'ENRIQUES, in virtù della seconda ipotesi sul sistema  $|A'|$ , questa serie è la serie canonica della curva  $(lE + B)$  aumentata dal gruppo di punti ove essa incontra una curva  $A$ , quindi  $\tau$  è zero, e

$$0 = \sigma + \delta.$$

---

(\*) V. : *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi di curve e tracciate sopra una superficie algebrica* (Annali di Matematica pura ed applicata, S. II, T. XXV, 1899, n.º 39).

Ma tanto  $\sigma$  che  $\delta$  sono numeri  $\geq 0$ , ne segue necessariamente :

$$\sigma = 0 \quad \delta = 0,$$

cioè  $|A' + lE + B|$  è anch'esso regolare.

E questo qualunque sia  $l \geq l_0$  e qualunque sia  $B$  nel sistema  $\Sigma$ .

E siccome per le ipotesi fatte su  $F$ , per  $\nu$  maggiore un conveniente numero  $\nu_0$ , il sistema  $|\nu E|$  è anch'esso regolare ed aggiunto, così scegliendo per sistema  $|A'|$  il sistema  $|\nu E|$  e posto  $\mu_0 = l_0 + \nu_0$ , si ha:

*Teorema X. Dato sopra una superficie  $F$  priva di singolarità, un qualsiasi sistema algebrico  $\Sigma$  di curve  $B$ , è possibile fissare un numero  $\mu_0$  tale che, per tutti i valori di un numero intero  $\mu$  a partire da  $\mu_0$  in poi, i sistemi*

$$|\mu E + B|,$$

*dove  $E$  è una sezione iperpiana di  $F$  e  $B$  una qualsiasi curva di  $\Sigma$ , siano tutti regolari.*

Il teorema si può notevolmente estendere e dargli anche forma invariante.

Sia  $G$  una curva di  $F$  a grado virtuale positivo, irriducibile e *priva di curve fondamentali*.

Ebbene io dico che nel teorema di sopra alla curva  $E$  si può sostituire la curva  $G$ .

Difatti. Indichiamo con  $\nu$  e  $\rho$  il grado virtuale e il genere virtuale di  $G$ , sarà per ipotesi  $\nu > 0$ , e con le solite formole d'addizione calcoliamo il grado virtuale  $N_k$  e il genere virtuale  $\pi_k$  delle curve  $(kG)$ , avremo :

$$N_k = k^2 \nu \quad \pi_k = k \rho + \frac{k^2 - k}{2} \nu - k + 1$$

e per la dimensione virtuale  $\rho_k$  del sistema  $|kG|$ , supposto  $k$  così grande, che esso sia non speciale :

$$\rho_k = \frac{k^2 - k}{2} \nu - k \rho + k + p_a,$$

che, per l'ipotesi di  $\nu > 0$ , ci permette di dire che per  $k \geq$  un conveniente numero  $k_0$  il sistema  $|kG|$  è infinito e aritmeticamente effettivo.

Il sistema  $|kG|$  non può essere riducibile per tutti i valori di  $k$ , difatti un'involuzione in un fascio non può evidentemente essere, quindi se esso è

riducibile, deve avere qualche curva fissa. Ma fra le curve di  $|kG|$  v'è la curva  $G$  contata  $k$  volte, e poichè la  $G$  è per ipotesi irriducibile, così tale curva fissa deve coincidere con  $G$  contata un certo numero  $h$  di volte. Ne segue che, posto  $t = k - h$ , il sistema  $|tG|$  e suoi multipli sono tutti irriducibili.

Si prova anche facilmente che questi sistemi  $|tG|$  sono semplici. Difatti al crescere di  $t$ , la dimensione del sistema  $|tG|$  cresce come  $t^2$ , mentre la dimensione della serie che esso segna su una generica sezione iperpiana di  $F$  cresce solo come  $t$ , ne segue che a partire da un certo punto in poi il sistema  $|tG|$  contiene il sistema  $|E|$  delle sezioni iperpiane di  $F$ .

Ma le curve  $E$  che passano per un punto  $M$  di  $F$  non passano per nessun altro punto. Perciò, se tutte le curve  $|tG|$  che passano per  $M$  passano per un altro punto  $N$ , questo deve essere punto base del sistema  $|tG - E|$ . E siccome tale sistema non può avere che un numero finito di punti base, così  $|tG|$  è semplice. Osserviamo che se  $|tG|$  ha dei punti base, *tali punti noi v'intenderemo sempre assegnati con la loro molteplicità effettiva.*

Ciò detto trasformiamo  $F$  in una superficie  $F'$  in maniera che il sistema  $|tG|$  si trasformi nel sistema delle sezioni iperpiane di  $F'$ . Poichè per ipotesi  $|tG|$  non ha curve fondamentali,  $F'$  non avrà singolarità come  $F$ .

È chiaro quindi che nel teorema di sopra alla curva  $E$  si può sostituire la curva  $(tG)$  e che per  $l \geq$  un conveniente numero  $l_0$ , i sistemi  $|ltG + B|$ , qualunque sia  $B$  in  $\Sigma$ , sono tutti regolari.

Per dimostrare completamente il nostro asserto bisognerà ancora provare che questa proprietà vale anche quando il coefficiente di  $G$  non è multiplo di  $t$ , bisognerà in altri termini dimostrare che detto  $i$  un qualsiasi numero tra 1 e  $(t - 1)$ , è possibile aggiungere al sistema  $|ltG + B|$  la curva  $(iG)$  senza alterarne la regolarità. Ora questo si prova facilmente.

Basta infatti osservare che se  $|ltG + B|$  è regolare, per la solita formula del CASTELNUOVO, lo è anche  $|ltG + B + G|$ , e poi lo sarà  $|ltG + B + 2G|$  e così via fino a  $|ltG + B + (t - 1)G|$ .

Prima di finire osserviamo che la condizione di  $G$  irriducibile non è necessaria; basta per esempio che la curva  $G$  sia composta di parti irriducibili e a grado virtuale positivo. Difatti se è

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_k \quad \text{e} \quad G_1, G_2, \dots, G_k$$

sono irriducibili e a grado virtuale positivo, per convenienti numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  i sistemi

$$|\lambda_1 G_1|, \quad |\lambda_2 G_2|, \dots, \quad |\lambda_k G_k|$$

sono irriducibili, sicchè detto  $\lambda$  un multiplo comune di  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$  anche

$$|\lambda(G_1 + G_2 + \dots + G_k)| = |\lambda G|$$

sarà irriducibile e privo di curve fondamentali come  $G$ , onde, ecc., ecc.

Per brevità conveniamo di chiamare *generica* una curva di  $F$ , quando essa è priva di curve fondamentali e composta di sole curve irriducibili a grado virtuale positivo. Allora si à:

**Teorema XI.** *Dato sopra  $F$  un sistema algebrico  $\Sigma$  di curve  $B$  e una curva  $G$  generica, è sempre possibile fissare un numero  $\mu_0$  tale che per tutti i valori di un numero  $\mu$  a partire da  $\mu_0$  in poi, i sistemi*

$$|\mu G + B|,$$

*che si ottengono al variare di  $B$  in  $\Sigma$ , siano tutti regolari.*

In particolare posto  $B = G$  si ha il

**Corollario.** *Se  $G$  è una curva generica di  $F$  per  $\mu \geq$  un conveniente numero  $\mu_0$  la curva  $(\mu G)$  appartiene ad un solo sistema irriducibile  $\{\mu G\}$  composto d' $\infty^2$  sistemi lineari tutti regolari.*

I teoremi dimostrati portano a varie conseguenze. Con essi intanto cominciamo a conoscere sopra una qualsiasi superficie irregolare la esistenza di sistemi algebrici completi composti di sistemi lineari distinti tutti regolari e rappresentabili quindi con i punti di una varietà irriducibile  $V_{g+r}$  d' $\infty^g$  spazi  $V_r$  razionali. *Per l'equivalenza algebrica in senso stretto fra curve di questa natura vale la proprietà transiliva.*

## 5.

**Le curve  $A$  e  $B$  che verificano le relazioni  $[A^2] = [AB] = [B^2]$ .**

15. Sopra la solita superficie  $S$  siano  $A$  e  $B$  due curve algebriche dello stesso ordine che verificano le relazioni

$$[A^2] = [AB] = [B^2] = n > 0. \quad (16)$$

Il ragionamento svolto da SEVERI su tali curve, nel secondo paragrafo della sua prima Memoria sulla base, prova che per opportuni numeri interi  $\lambda$ ,

i sistemi lineari completi  $|\lambda A|$  e  $|\lambda B|$  appartengono ad un medesimo sistema continuo  $\Sigma_\lambda$  di sistemi lineari. Da questo però non è lecito dedurre che corrispondentemente sia  $\lambda A ||| \lambda B$ . Ciò sarebbe possibile se, per ragioni particolari del caso, si sapesse che  $\Sigma_\lambda$  è irriducibile, non solo come totalità de'suoi sistemi lineari, ma anche come totalità di tutte le sue curve, come avviene, per es., trattandosi di curve  $(\mu E + B)$  o  $(\mu G + B)$  del paragrafo precedente o di curve tipo  $D$  del cono ellittico del terzo ordine.

Questo però non si verifica in generale, come nel caso delle curve  $A$  e  $B$  del cono ellittico studiate nei nn. 1 e 2 o delle curve  $A_0$  e  $B_0$  studiate nel n. 13 sopra una qualsiasi superficie irregolare, e perciò tale deduzione non è sempre possibile. Come totalità di curve  $\Sigma_\lambda$  può essere riducibile e  $\lambda A$  e  $\lambda B$ , pur essendo concatenate fra di loro, possono essere algebricamente distinte in senso stretto per qualsiasi valore di  $\lambda$ .

Ecco quello che si può dire in generale.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che qualunque sia il sistema  $\Sigma_\lambda$  è sempre possibile fissare una curva  $G$  di  $F$  ed un numero  $\mu_0$  tali che per  $\mu \cong \mu_0$  il sistema  $|\mu G + C|$  sia regolare, qualunque sia  $C$  in  $\Sigma_\lambda$ . Al variare di  $C$  questi sistemi descrivono quindi un sistema continuo  $V$  irriducibile anche come totalità delle sue curve, ne segue che per  $\mu \cong \mu_0$  è sempre

$$\mu G + \lambda A ||| \mu G + \lambda B. \quad (17)$$

Questa formula vale anche se si abbandona l'ipotesi di  $n > 0$ , cioè se due curve  $A$  e  $B$  dello stesso ordine verificano le relazioni:

$$[A^2] = [A B] = [B^2] = m \leq 0; \quad (18)$$

esse sono sempre legate da una relazione (17).

Difatti presa una curva  $G$  qualsiasi per le curve

$$A_1 = \nu G + A, \quad B_1 = \nu G + B$$

si ha, come sopra,  $[A_1^2] = [A_1 B_1] = [B_1^2] > 0$  e quindi

$$\mu G + \lambda \nu G + \lambda A ||| \mu G + \lambda \nu G + \lambda B$$

che rientra nel tipo (17). Concludiamo:

**Teorema XII.** *Se sopra una superficie  $F$ ,  $A$  e  $B$  sono due curve algebriche dello stesso ordine che verificano le relazioni*

$$[A^2] = [A B] = [B^2], \quad (19)$$

della  $G$  una curva generica di  $F$ , è sempre possibile fissare opportuni numeri interi e positivi  $\lambda$  e un numero  $\mu_0$ , tali che, per  $\mu \geq \mu_0$ , si abbia

$$\mu G + \lambda A \parallel \mu G + \lambda B. \quad (17)$$

Si noti che viceversa se  $A$  e  $B$  sono due curve legate da una relazione (17), esse sono dello stesso ordine e verificano la (19), quindi nell'ipotesi di  $A$  e  $B$  dello stesso ordine la (17) e la (19) sono l'una conseguenza dell'altra (\*).

È importante osservare che la curva  $G$  che compare nella (17) si può fissare a priori e una volta per tutte indipendentemente da  $A$  e da  $B$ .

Dipendenti da  $A$  e da  $B$  sono invece di due numeri  $\lambda$  e  $\mu$ .

Va anche notato che se la curva  $G$  presenta una grande arbitrarietà, pure per essa non può scegliersi una qualunque curva di  $F$ . Nè ogni curva a grado virtuale positivo può prendersi per curva  $G$ . Abbiamo difatti visto che condizione essenziale per tale curva è quella di non avere curve fondamentali; così, per es., sul cono  $S$  per curva  $G$  non può mai scegliersi una sezione piana. Del resto negli esempi esposti abbiamo più volte notato tale impossibilità.

Se una delle due curve in considerazione  $A$  o  $B$ , per es.  $A$ , è essa stessa una curva generica di  $F$ , allora per curva  $G$  possiamo scegliere la curva  $A$ , sicchè per  $\mu \geq \mu_0$  tutti i sistemi  $|\mu A + C|$ , dove  $C$  è una qualsiasi curva di  $\Sigma_\lambda$ , sono regolari e costituiscono un sistema  $V$  irriducibile anche come totalità di curve.

Supponiamo  $\mu$  multiplo di  $\lambda$ ,  $\mu = k\lambda$ . Il sistema  $V$  contiene allora i due sistemi lineari  $|(k+1)\lambda A|$  e  $|(k+1)\lambda B|$  e conseguentemente posto  $t_0 = k+1$  si à:

$$t\lambda A \parallel t\lambda B,$$

qualunque sia  $t \geq t_0$ .

**Teorema XIII.** *Se sopra una superficie  $F$ ,  $A$  e  $B$  sono due curve dello*

(\*) Se nel ragionamento di SEVERI per dimostrare che quando  $A$  e  $B$  verificano la (16), esiste su  $F$  un integrale di terza specie avente  $A$  e  $B$  come sole curve logaritmiche, alle due curve  $\lambda A$  e  $\lambda B$  si sostituiscono le due curve  $\mu G + \lambda A$  e  $\mu G + \lambda B$ , l'obbiezione fatta alla fine del n.º 2 (vedi nota a pag. 172) viene rimossa perchè allora per il teorema di sopra esistono certamente sistemi irriducibili  $\Sigma$  che contengono  $\mu G + \lambda A$  e  $\mu G + \lambda B$ . Con tale sostituzione la dimostrazione corre rigorosissima e la conclusione finale rimane la stessa perchè in ultimo, la curva ausiliaria  $G$  non risulta curva logaritmica dell'integrale  $I$  costruito. Anzi con questa osservazione la dimostrazione si estende anche al caso che  $A$  e  $B$  verificano la (19) invece che la (16).

stesso ordine che verificano le relazioni (16) e di più una di esse, per es.  $A$ , è generica per opportuni numeri interi e positivi  $\lambda$ , si ha :

$$\lambda A \parallel \lambda B. \quad (20)$$

Questo è un caso notevolissimo ed evidentemente molto generale. Si può quindi dire che il teorema di SEVERI, su queste curve dal campo dell'equivalenza algebrica in generale, si trasporta tale e quale in quello dell'equivalenza algebrica in senso stretto con la semplice condizione sopra detta per la curva  $A$ .

Nota che il coefficiente  $\lambda$  che compare nella formola (20) del teorema precedente non coincide con l'analogo coefficiente di SEVERI per la equivalenza generale.

In seguito a questi teoremi è chiaro che il criterio di SEVERI per riconoscere se più curve sono o no legate in generale rimane tale e quale anche nell'equivalenza in senso stretto.

*Condizione necessaria e sufficiente affinché  $l$  curve algebriche  $C_1 C_2 \dots C_l$ , tracciate sopra una superficie algebrica  $F$ , siano legate da una relazione del tipo*

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_l C_l + \nu G \parallel \mu_{l+1} C_{l+1} + \dots + \mu_l C_l + \nu G, \quad (21)$$

è che sia nulla la matrice discriminante dell'aggruppamento  $(C_1 C_2 \dots C_l)$ , cioè

$$M = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{l1} & n_{l2} & \dots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_l \end{vmatrix} = 0$$

dove è  $n_{ik} = n_{ki} = [C_i C_k]$  e  $m_i$  l'ordine di  $C_i$ .

Da questo teorema si deduce che allorchè la matrice  $M$  non è nulla, le curve  $(C_1 C_2 \dots C_l)$  sono algebricamente distinte tanto in generale quanto in senso stretto. Anzi si può dire che in tal caso  $(C_1 C_2 \dots C_l)$  non possono essere nemmeno concatenate e sono perciò distinte in tutti i sensi.

## 6.

**Osservazioni sulla teoria della base.**

16. *La teoria della base nel campo dell'equivalenza algebrica in senso stretto.* Il SEVERI in virtù di un teorema fondamentale di PICARD sugli integrali di terza specie di  $F$ , à dimostrato che quando  $l$  supera un certo numero fisso  $\rho$  (numero base di  $F$ ) la matrice  $M$  del numero precedente è sempre zero qualunque siano  $C_1 C_2 \dots C_l$ ; mentre ciò non è più vero se è  $l = \rho$ . Vi sono cioè su  $F$  aggruppamenti  $(C_1 C_2 \dots C_\rho)$  la cui corrispondente matrice  $M$  è diversa da zero; anzi in tal caso il SEVERI mostra che è diverso da zero il determinante dell'aggruppamento  $(C_1, C_2, \dots, C_\rho)$ , cioè il determinante d'ordine  $\rho$  formato colle prime  $\rho$  righe di  $M$ .

Riunendo questi teoremi con i risultati del numero precedente possiamo dire:

**Teorema XIV.** *Se sopra una superficie algebrica  $F$ , a numero base  $\rho$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_\rho$  sono  $\rho$  curve a determinante diverso da zero, ogni altra curva  $C$  di  $F$  è legata ad esse con una relazione del tipo:*

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_i C_i + \nu G \parallel \nu_{i+1} C_{i+1} + \dots + \nu_\rho C_\rho + \nu G, \quad (21)$$

essendo  $\lambda$  un numero intero e positivo,  $\nu$  un numero intero qualsiasi a partire da un certo  $\nu_0$  in poi,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_\rho$  opportuni numeri interi positivi non tutti nulli e  $G$  una qualsiasi curva *generica* di  $F$ .

Per esprimere questo diremo che  $C$  è legata algebricamente in senso stretto a  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  con l'ausilio della curva  $G$  e che  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  formano sopra  $F$  una base con l'ausilio della curva  $G$ .

Nella (21) dipendentemente dalle curve  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  il numero  $\nu$  può anche essere zero. Abbiamo però dato esempi in cui  $\nu$  è necessariamente diverso da zero, anche quando fra  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  vi siano curve a grado virtuale positivo.

La curva  $G$  ha una grande arbitrarietà e qualche volta si può far coincidere o con una delle curve  $C_1 C_2 \dots C_\rho$  della base, o con la curva  $C$  che si vuole esprimere, ma s'è visto che ciò non è sempre possibile e che a volte per la particolarità delle curve date  $C, C_1, \dots, C_\rho$  non può coincidere con nessuna combinazione  $l_1 C_1 + l_2 C_2 + \dots + l_\rho C_\rho$ .



Va notato che questa curva ausiliaria  $G$  compare necessariamente anche per le basi di SEVERI nell'equivalenza generale, sola differenza è che in questo caso  $G$  ha maggiore arbitrarietà e può essere sostituita con una qualsiasi curva a grado virtuale positivo di  $F$ , mentre nel caso dell'equivalenza in senso stretto  $G$  deve essere generica in  $F$ . In ogni modo quello che importa rilevare è che per ora la presenza di questa curva  $G$  si rende necessaria.

17. *Costruzione di una base senza curva ausiliaria.* Un problema fondamentale si presenta a questo punto.

È possibile scegliere le curve base  $C_1, C_2, \dots, C_p$  in maniera da non rendere mai necessario l'ausilio della curva  $G$ , tale cioè, che qualunque sia  $C$  su  $F$  nella (27)  $\nu$  possa farsi sempre uguale a zero?

La risposta è affermativa.

Indichiamo con  $A_1$  una generica curva del sistema  $|\mu E|$  multiplo secondo  $\mu$  del sistema  $|E|$  delle sezioni iperplane di  $F$ ; supporremo  $\mu$  così alto che le curve  $(\mu E)$  siano aritmeticamente effettive e che il sistema algebrico  $\{\mu E\}$  da esse individuato consti d' $\infty^2$  sistemi lineari distinti irriducibili e regolari.

Evidentemente  $A_1$  non ha curve fondamentali ed è generica su  $F$ .

Sia  $B$  una qualsiasi curva di  $F$  algebricamente distinta da  $A_1$ . Ogni curva  $A_2 \equiv k A_1 + B$ , qualunque sia  $k$ , è algebricamente distinta da  $A_1$ . Difatti, posto  $[A_1^2] = n_{11}$ ,  $[A_1 B] = \nu_{12} = \nu_{21}$ ,  $[B^2] = \nu_{22}$ ,  $m_1$  ordine di  $A_1$ ,  $\mu_2$  ordine di  $B$  sarà per ipotesi

$$\begin{vmatrix} n_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \\ m_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = M = 0.$$

Ma da tali posizioni segue:

$$[A_1 A_2] = n_{12} = n_{21} = k n_{11} + \nu_{12}, \quad [A_2^2] = k^2 n_{11} + 2k \nu_{12} + \nu_{22}$$

e detto  $m_2 = k m_1 + \mu_2$  l'ordine di  $A_2$ , per la matrice dell'aggruppamento  $(A_1, A_2)$  si avrà:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_{11} & k n_{11} + \nu_{12} \\ k n_{11} + \nu_{12} & k^2 n_{11} + 2k \nu_{12} + \nu_{22} \\ m_1 & k m_1 + \mu_2 \end{vmatrix}.$$

In questa matrice sottraggiamo dalla seconda riga la prima multipli-

cata per  $k$  e poscia dalla seconda colonna la prima moltiplicata pure per  $k$ ; ciò facendo essa si riduce alla matrice  $M$ , che per ipotesi è di caratteristica due. Ne segue che  $(A_1, A_2)$  hanno la matrice discriminante diversa da zero e sono algebricamente distinte, qualunque sia  $k$ .

Scegliamo  $k$  così alto che  $A_2$  non abbia curve fondamentali e che gli  $\infty^q$  sistemi lineari di cui si compone il sistema algebrico da essa individuato siano tutti irriducibili e regolari. La curva  $A_2$  si può allora supporre irriducibile.

Determinata così  $A_2$ , sia  $C$  una terza curva di  $F$  algebricamente distinta da  $A_1, A_2$ .

Si consideri la curva  $A_3 \equiv k A_1 + C$ , si prova come sopra, che le tre curve  $A_1, A_2, A_3$  sono algebricamente distinte tra di loro e che per  $k$  sufficientemente grande,  $A_3$  non ha curve fondamentali ed appartiene ad un sistema algebrico composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti irriducibili e regolari.

E così si continua replicando lo stesso processo. Alla fine si saranno trovate  $\rho$  curve algebricamente distinte

$$A_1 A_2 \dots A_\rho,$$

irriducibili senza curve fondamentali e ciascuna variabile in un sistema continuo d' $\infty^q$  sistemi lineari regolari.

In virtù della (16) di CASTELNUOVO è chiaro poi che detti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ ,  $\rho$  numeri positivi non tutti nulli, anche le curve linearmente equivalenti a  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_\rho A_\rho$  godranno delle stesse proprietà, e che perciò l'equivalenza algebrica in senso stretto fra curve di tale natura gode della proprietà transitiva.

Sia  $A$  una curva qualsiasi di  $F$ ; per il teorema precedente esisteranno dei numeri  $\lambda, \mu, \nu$  e una curva  $G$  per i quali si avrà:

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_t A_t + \nu G \equiv \mu_{t+1} A_{t+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho + \nu G. \quad (21')$$

Poniamo

$$A' = \lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_t A_t, \quad B' = \mu_{t+1} A_{t+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho,$$

dalla (21') segue allora:

$$[A'^2] = [A' B'] = [B'^2] > 0.$$

E poichè la curva  $B'$  così fatta è generica sopra  $F$ , per il teorema XIII

si avrà  $\lambda' A' \parallel \lambda' B'$  e includendo  $\lambda'$  in  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_\rho$ :

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_i A_i \parallel \mu_{i+1} A_{i+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho, \quad (22)$$

ossia posto  $\lambda_{i+1} = -\mu_{i+1}, \dots, \lambda_\rho = -\mu_\rho$ , simbolicamente,

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_\rho A_\rho \parallel 0 \quad (23)$$

e posto invece  $\lambda_1 = -\mu_1, \lambda_2 = -\mu_2, \dots, \lambda_i = -\mu_i, \lambda = \mu$

$$\mu A \parallel \mu_1 A_1 + \dots + \mu_\rho A_\rho. \quad (24)$$

**Teorema XV.** *Sopra una superficie algebrica  $F$  a numero base  $\rho$  è sempre possibile fissare opportunamente  $\rho$  curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  tali che, una qualsiasi curva  $A$  di  $F$  sia legata algebricamente ad esse con una relazione (22), (23), (24).*

Va notato che qui le curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  sono opportune  $\rho$  curve di  $F$ . In generale  $\rho$  curve algebricamente distinte non formano una base di tale natura.

18. *La teoria della base nel campo dell'equivalenza lineare.* Riprendiamo la relazione (22) e sommiamo ad ambo i suoi membri la curva  $A_1$

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_i A_i + A_1 \parallel \mu_{i+1} A_{i+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho + A_1.$$

Facciamo variare la curva  $A_1$  del secondo membro nel proprio sistema algebrico  $\{A_1\}$ . Per ogni posizione  $\bar{A}_1$  di  $A_1$  si avrà sempre:

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_i A_i + A_1 \parallel \mu_{i+1} A_{i+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho + \bar{A}_1 \quad (25)$$

e per note proprietà della varietà di PICARD relativa ad  $F$ , esisterà una posizione  $\bar{A}_1$  di  $A_1$  per la quale la (25) si riduce lineare, cioè:

$$\lambda A + (\lambda_1 + 1) A_1 + \dots + \lambda_i A_i \equiv \mu_{i+1} A_{i+1} + \dots + \mu_\rho A_\rho + \bar{A}_1. \quad (26)$$

Osserviamo che per ottenere questa relazione,  $A_1$  basta farla variare in un sistema  $\Sigma_1$  subordinato di  $\{A_1\}$  e composto di sole  $\infty^q$  curve due a due linearmente distinte; si ha perciò:

**Teorema XVI.** *Sopra una superficie  $F$  è sempre possibile fissare  $\rho$  curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  e un sistema  $\Sigma$  d' $\infty^q$  curve linearmente distinte due a due, tali che, qualunque curva  $A$  di  $F$  sia legata ad esse e ad una curva  $\bar{A}_1$  di  $\Sigma$ , perfettamente determinata da  $A$ , con una relazione d'equivalenza lineare del tipo (26).*

Diremo per questo che le curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  e le curve di  $\Sigma$  formano una base lineare.

È evidente a priori che per una base lineare sono sempre necessarie le curve d'un sistema  $\infty^2$ .

Algebricamente il teorema dimostrato s'esprime:

*Sopra una superficie  $F$  è sempre possibile fissare  $\rho$  curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  e un sistema  $\Sigma$  d' $\infty^2$  curve tali che, presa una qualsiasi curva  $A$  di  $F$ , esiste una funzione razionale dei punti di  $F$  aventi i suoi poli e i suoi zeri unicamente sulle curve  $A_1 A_2 \dots A_\rho$  e su una curva  $A_1$  di  $\Sigma$  perfettamente determinata da  $A$ .*

Osserviamo che se  $\lambda_1$  è  $> 0$  le curve  $|(\lambda_1 + 1) A_1 - \bar{A}_1|$  esistono e sono curve di  $|\lambda_1 A_1|$ .

Prendiamo la varietà di PICARD di  $P$  che rappresenta i sistemi lineari di  $\{A_1\}$  e siano  $M$  ed  $N$  i punti corrispondenti ad  $|A_1|$  e  $|\bar{A}_1|$ .

Il punto  $M$  contato  $\lambda_1 + 1$  volte individua in questa varietà una  $g_{\lambda_1+1}^2$  (nel senso di CASTELNUOVO). Esistono allora dei punti  $Q$  tali che  $\lambda_1$  volte  $Q$  più  $N$  sia un gruppo di  $g_{\lambda_1+1}^2$ . Se  $Q$  rappresenta il sistema  $|\bar{A}_1|$  corrispondentemente si avrà  $|(\lambda_1 + 1) A_1 - \bar{A}_1| = |\lambda_1 \bar{A}_1|$ , di modo che la (26) si può scrivere:

$$\lambda A + \lambda_1 \bar{A}_1 + \dots + \lambda_i A_i \equiv \nu_{i+1} A_{i+1} + \dots + \nu_\rho A_\rho. \tag{27}$$

Con la (27) parrebbe che si potesse diminuire di una unità il numero delle curve fisse per una base lineare, ridurre cioè la base lineare alle sole curve  $A_2, A_3, \dots, A_\rho$  e quelle di  $\Sigma$ .

Ma ciò non è perchè il coefficiente  $\lambda_1$  non sempre è diverso da zero indipendentemente da  $A$ .

Certo uno,  $\lambda_i$ , dei coefficienti in ogni caso deve essere diverso da zero e il ragionamento precedente invece che per la curva  $A_1$  si può rifare per la corrispondente curva  $A_i$ . Ma in tal caso il teorema a cui si giunge è il seguente:

*Sopra una superficie algebrica  $F$  è sempre possibile fissare  $\rho$  sistemi continui di curve*

$$\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_\rho,$$

*ciascuno d' $\infty^2$  curve, tali che ogni curva  $A$  di  $F$  sia esprimibile linearmente per  $\rho - 1$  curve, arbitrariamente scelte in certi  $\rho - 1$  di questi sistemi, e per un'altra del rimanente sistema, perfettamente determinata da  $A$  e dalle  $\rho - 1$  curve scelte.*

Questo teorema s'interpreta anch'esso algebricamente dando luogo ad un risultato analogo a quello di sopra.

Osserviamo che le considerazioni qui svolte sulle basi lineari si possono anche fare partendo da una qualsiasi base  $C_1 C_2 \dots C_p$  (\*).

Le cose dette fin qui sulle basi generali si riportano tali e quali nella teoria delle basi intermedie e minime, si hanno considerazioni e risultati analoghi, ma per non dilungarci più oltre omettiamone un esplicito svolgimento e passiamo alla terza parte.

### III.<sup>a</sup> PARTE.

#### 7.

#### Prime considerazioni sull'operazione di divisione ed esempi.

##### 19. Proprietà del numero $\sigma$ nel campo dell'equivalenza generale.

In questa terza parte del lavoro abbandoneremo il campo dell'equivalenza in senso stretto e faremo uso delle semplici nozioni d'equivalenza algebrica generale ed a catena date in principio nell'esposizione riassuntiva.

Sia  $A_1$  una curva di  $F$  a caratteri generali e consideriamo tutte le curve  $A$  dello stesso ordine di  $A_1$ , e che con  $A_1$  verificano le relazioni

$$[A_1^2] = [A_1 A] = [A^2] = n > 0. \quad (28)$$

Per le ipotesi fatte il numero  $\sigma$  dei sistemi algebrici (generali) in cui si distribuiscono tutte queste curve  $A$ , è evidentemente finito (\*\*). Indichiamo tali sistemi con

$$\{A_1\}, \{A_2\}, \dots, \{A_\sigma\}. \quad (29)$$

Il numero  $\sigma$  gode di due proprietà fondamentali:

(\*) Notiamo che queste considerazioni sulle basi lineari si riferiscono alle sole superficie irregolari.

(\*\*) SEVERI: 2.<sup>a</sup> Memoria. *La base minima*. Annales de l'École normale, T. 25,

1.° è indipendente dalla curva  $A$  di partenza, finchè questa rimane a caratteri generali e perciò è un carattere di  $F$ .

2.° è un invariante assoluto.

Sia  $B$  un'altra curva di  $F$  pure a caratteri generali, e indichiamo con

$$\{B_1\}, \{B_2\}, \dots, \{B_\sigma\} \quad (30)$$

tutti i sistemi algebrici distinti di curve  $B$  che con  $B_1$  verificano le solite relazioni

$$[B_1^2] = [B_1 B] = [B^2]. \quad (31)$$

Io dico che è  $\sigma' = \sigma$ . Difatti essendo  $B$  a caratteri generali i sistemi

$$\left. \begin{aligned} \{B'_1\} &= \{B_1\} = \{B + A_1 - A_1\}, \quad \{B'_2\} = \{B_1 + A_1 - A_2\}, \dots, \\ \{B'_\sigma\} &= \{B_1 + A_1 - A_\sigma\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

hanno tutti la dimensione virtuale positiva e sono sistemi di curve effettive di  $F$ . In virtù della (28) tutte le curve  $B$  di questi sistemi (che evidentemente sono dello stesso ordine) verificano con  $B_1$  la (31).

Ne segue che ogni sistema  $\{B'_i\}$  è un sistema (30) (\*).

Da questo non si deve però concludere senz'altro che è  $\sigma' \cong \sigma$ ; per fare una tale deduzione occorre ancora dimostrare che i sistemi (32) sono tutti distinti fra di loro, fatto che nel campo dell'equivalenza algebrica generale è vero e si dimostra facilmente, ma che nel campo dell'equivalenza algebrica in senso stretto non è più vero, come provano gli esempi dati nella 1.ª parte. Quindi la necessità, in queste considerazioni, di far uso dell'equivalenza generale e dei corrispondenti sistemi algebrici, e non dell'equivalenza in senso stretto.

Sia s'è possibile

$$\{B_1 + A_1 - A_i\} = \{B_1 + A_1 - A_k\},$$

allora i due sistemi lineari  $|B_1 + A_1 - A_i|$ ,  $|B_1 + A_1 - A_k|$  appartengono ad un medesimo sistema algebrico e per una posizione particolare  $\bar{A}_k$  di  $A_k$  nel proprio sistema  $\{A_k\}$  (per ipotesi composto d' $\infty^q$  sistemi lineari) sarà:

$$B_1 + A_1 - A_i \equiv B_1 + A_1 - \bar{A}_k \quad \text{e} \quad A_i \equiv \bar{A}_k,$$

---

(\*) Fino a questo punto la dimostrazione si trova nel SEVERI; memoria citata a pag. 209, n.º 3.

cioè  $A_i$  è una curva di  $\{A_k\}$  e quindi  $\{A_i\} = \{A_k\}$ , il che vale solo quando è  $i = k$ . Ne risulta che  $\sigma' \geq \sigma$ .

Invertiamo ora le considerazioni scambiando  $A_i$  con  $B_i$ . Avendo supposto  $B_i$  pure a caratteri generali, i sistemi (32) saranno composti d' $\infty^q$  sistemi lineari e come sopra si avrà  $\sigma \geq \sigma'$ . D'onde segue che è proprio  $\sigma = \sigma'$  c. v. d.

*Osservazione:* Cosa avviene quando  $B_i$  non è a caratteri generali? In tal caso i sistemi (32) possono in parte non esistere, cioè essere alcuni effettivi ed altri virtuali.

Supponiamo che siano tutti effettivi, che, come vedremo, è un caso reale; sarà ancora  $\sigma = \sigma'$ ?

Per la prima parte della dimostrazione sarà certamente  $\sigma' \geq \sigma$ , ma ora il viceversa non si può più stabilire perchè non è detto che i sistemi (32), pur esistendo tutti, siano composti d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti, e due curve  $B_i$  e  $B_k$  con  $i \neq k$  potrebbero dar luogo ad un medesimo sistema

$$\{A_i + B_i - B_i\} = \{A_i + B_i - B_k\}.$$

Vedremo con esempi che questo caso si verifica e  $\sigma'$  può effettivamente superare  $\sigma$  e di lì le prime contraddizioni con i risultati di SEVERI. Questa è un'altra ragione che impone la necessità di dimostrare che i sistemi (32) siano tutti distinti.

2.<sup>o</sup>  $\sigma$  è un invariante assoluto. Difatti:

Se  $F$  si trasforma in una superficie  $F'$  senza che nella trasformazione vi siano elementi fondamentali, nè nell'uno nè nell'altro senso, la proprietà è evidente. Tanto su  $F$  che su  $F'$   $\sigma$  avrà sempre lo stesso valore.

Supponiamo che nella trasformazione un punto  $M$  di  $F$  si trasformi in una curva eccezionale di prima specie  $M'$  di  $F'$ .

Sopra  $F$ , la curva  $A_i$  di partenza, per calcolare  $\sigma$ , scegliamola irriducibile e non passante per  $M$ . La sua trasformata  $A'_i$  su  $F'$  sarà allora irriducibile, non incontrerà  $M'$  in nessun punto, avrà il grado virtuale  $n$  uguale a quello  $A_i$  e come  $A_i$  sarà a caratteri generali.

Sia  $A'$  una curva di  $F'$  dello stesso ordine di  $A'_i$  e verificante le relazioni:

$$[A'_i] = [A', A'] = [A'^2] = n > 0, \quad (28')$$

e del resto qualsiasi.

Sappiamo che per le relazioni (28')  $A'_i$  e  $A'$  incontrano una qualsiasi curva di  $F'$  nello stesso numero di punti, quindi il numero delle intersezioni

(virtuali) tra  $A'$  e  $M'$  è zero come per  $A_1$  e  $M'$ . Ne segue che la curva  $A$  di  $F$ , omologa di  $A'$ , avrà pur essa il grado virtuale uguale  $n$  (anche se passa per  $M$ ). Siccome poi  $A_1$  non passa per  $M$  i punti comuni ad  $A$  e  $A_1$  sono gli omologhi dei punti comuni ad  $A'$  e  $A'_1$  e perciò anch'essi in numero di  $n$ .

La curva  $A$ , verificando così le (28) appartiene ad uno dei sistemi (29), per es. ad  $\{A_i\}$ , e corrispondentemente  $A'$  appartiene al suo sistema trasformato  $\{A'_i\}$ .

Concludiamo che tutte le curve  $A'$  di  $F'$ , dello stesso ordine di  $A'_1$  e che con questa verificano le (28'), appartengono ai sistemi

$$\{A'_1\} \{A'_2\} \dots \{A'_\sigma\},$$

trasformati su  $F'$  dei sistemi (29) e che essendo questi sistemi algebrici distinti, sopra  $F'$  il numero  $\sigma$  corrispondente alla curva  $A'_1$ , a caratteri generali, ha lo stesso valore che sopra  $F$ .

In ordine a noti teoremi sulla trasformazione delle superficie da ciò risulta che  $\sigma$  è un invariante assoluto. c. v. d.

#### 20. Due teoremi preliminari.

**Teorema XVII.** *Se sopra una superficie  $F$  due curve  $A$  e  $B$  a grado virtuale positivo verificano insieme ad una terza curva  $C$  di  $F$  la relazione*

$$A + C \equiv B + C, \quad (33)$$

*esiste un numero  $\lambda_0$  tale che per tutti i valori di  $\lambda$  a partire da  $\lambda_0$  in poi si abbia:*

$$\lambda A \equiv \lambda B \quad (\lambda \geq \lambda_0).$$

Difatti essendo  $A$  e  $B$  a grado virtuale positivo è possibile determinare un numero  $\lambda_0$  tale che per  $\lambda \geq \lambda_0$  le due curve  $(\lambda A)$  e  $(\lambda B)$  siano aritmeticamente effettive e quindi contenute in due sistemi algebrici (generali)  $\{\lambda A\}$  e  $\{\lambda B\}$  composti d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti.

Ebbene io dico che questi due sistemi coincidono.

Infatti dalla (33) qualunque sia  $\lambda$  e quindi anche per  $\lambda \geq \lambda_0$  si à sempre

$$\lambda A + \lambda C \equiv \lambda B + \lambda C,$$

e per la proprietà transitiva dell'equivalenza algebrica generale fra curve aritmeticamente effettive, detta  $\bar{B}$  una qualsiasi curva del sistema  $\{\lambda B\}$ , sarà anche

$$\lambda A + \lambda C \equiv \bar{B} + \lambda C,$$



Ma quando  $\bar{B}$  descrive gli  $\infty^2$  sistemi lineari di  $\{\lambda B\}$  il sistema  $|\bar{B} + \lambda C|$  descrive tutti gli  $\infty^2$  sistemi lineari del sistema algebrico  $\{\lambda A + \lambda C\}$ , quindi per una posizione particolare  $B'$  di  $\bar{B}$  in  $\{\lambda B\}$  sarà

$$\lambda A + \lambda C \equiv B' + \lambda C$$

ossia

$$\lambda A \equiv B'.$$

Questa ci prova che per  $\lambda \geq \lambda_0$  la curva  $\lambda A$  è contenuta nel sistema  $\{\lambda B\}$ , ossia che per tutti questi valori di  $\lambda$ ,  $\{\lambda A\}$  e  $\{\lambda B\}$  coincidono, c. v. d.

L'importanza di questo teorema sta nel fatto che, come proveremo tra breve, le due curve  $A$  e  $B$  che verificano la (33) possono essere algebricamente distinte fra di loro.

Vedremo quali conseguenze se ne ricaveranno.

Intanto queste considerazioni si possono invertire e si à:

**Teorema XVIII.** *Se  $A$  e  $B$  sono due curve di  $F$  che per ogni numero  $\lambda$  a partire da un certo  $\lambda_0$  in poi, verificano la relazione:*

$$\lambda A \equiv \lambda B, \quad (\lambda \geq \lambda_0) \quad (34)$$

esistono curve  $C$  di  $F$  per le quali si à:

$$A + C \equiv B + C. \quad (35)$$

Difatti se  $A$  e  $B$  soddisfano la (34) esse sono dello stesso ordine e verificano le relazioni

$$[A^2] = [AB] = [B^2]$$

conseguentemente i sistemi (a caratteri generali)

$$\{E\}, \{E + A - B\}, \dots, \{E + \lambda(A - B)\}, \dots$$

sono tutti effettivi e composti di curve dello stesso ordine, essi perciò sono in numero finito e a partire da un certo punto in poi debbono riprodursi.

È chiaro d'altra parte che si riproducono periodicamente e siccome per  $\lambda \geq \lambda_0$  in virtù della (34) è sempre:

$$\{E + \lambda(A - B)\} = \{E\}$$

così da  $\lambda_0$  in poi tutti i sistemi detti coincidono col primo.

Ne segue necessariamente che essi coincidono tutti con  $\{E\}$  e si à:

$$\{E + A - B\} = \{E\},$$

ossia

$$E + A - B \equiv E,$$

$\bar{E}$  essendo una conveniente curva di  $\{E\}$ , e infine:

$$E + A \equiv E + B. \quad \text{c. v. d.}$$

*Concludiamo che la (33) e la (34) sono una conseguenza dell'altra.*

21. *Esempio di divisione con più di  $\sigma$  sistemi quozienti.* Premesse queste considerazioni riprendiamo i  $\sigma$  sistemi (29) e indichiamo con  $R_1, R_2, \dots, R_\sigma$  le loro rispettive dimensioni. Supporremo che  $R_1$  sia il più piccolo fra questi numeri e che nello stesso tempo sia  $R_1$  minore del grado virtuale  $n$  comune a tutti i sistemi (29):  $R_1 < n$ .

Indicheremo con  $\nu$  l'indice del sistema  $\{A_1\}$ ; trattandosi di sistemi algebrici non lineari, sarà  $\nu \geq 2$ .

Scegliamo sopra  $F$  genericamente un gruppo  $G_{R_1}$  di  $R_1$  punti. Le curve di  $\{A_1\}$  passanti per questo gruppo le chiameremo:

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1\nu}. \quad (36)$$

Per l'ipotesi fatta su  $R_1$ , rispetto a  $R_2, R_3, \dots, R_\sigma$ , in ogni altro sistema  $\{A_i\}$  esisteranno delle curve passanti per  $G_{R_1}$ . Di queste curve ne possono esistere anche infinite e distribuite in più sistemi; noi però ci limiteremo a sceglierne una sola  $A_i$ , ad arbitrio, in maniera da avere  $\sigma - 1$  curve

$$A_2, A_3, \dots, A_\sigma, \quad (37)$$

algebricamente distinte due a due e tutte passanti per  $G_{R_1}$ .

Fra le (36) e le (37) avremo così  $s = \sigma + \nu - 1$  curve passanti per  $G_{R_1}$ , con  $s > \sigma$ .

Trasformiamo  $F$  in una superficie  $F'$  in maniera che i punti del gruppo  $G_{R_1}$  si trasformino in altrettante curve di prima specie, che complessivamente indicheremo con  $G'_{R_1}$ .

Sopra  $F'$  le curve omologhe delle curve (36) e (37) (depurate dalle rette eccezionali  $G'_{R_1}$ ) siano:

$$A'_{11} = A'_1; \quad A'_{12}, \dots, A'_{1\nu}, \quad A'_2, \dots, A'_\sigma. \quad (38)$$

Due qualsiansi di queste curve sono algebricamente distinte tanto in senso generale che in senso stretto, anzi non possono essere nemmeno concatenate.

Difatti  $A'_{11}, A'_{12}, \dots, A'_{1s}$  sono isolate, e perciò non sono equivalenti a nessuna curva di  $F'$ ; in quanto poi a due curve  $A'_i$  e  $A'_k$  con  $i \neq k$ , esse sono distinte perchè tali sono le due curve  $A'_i + G'_{R_i}, A'_k + G'_{R_k}$ .

È chiaro poi che tutte queste  $s$  curve sono a grado virtuale  $n' = n - R_1$ , che per ipotesi è maggiore di zero, e a due a due s'incontrano in  $n'$  punti, esse quindi verificano le relazioni:

$$\begin{aligned} [A'^2_{ii}] &= [A_{ii}, A'_{ik}] = [A'^2_{ik}] = [A'^2_{jj}] = [A'_{ii}, A'_j] = \\ &= [A_j, A'_i] = n' > 0 \quad \left( \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \dots, s \\ j, l = 2, 3, \dots, \sigma \end{array} \right). \end{aligned}$$

Esistono allora dei numeri  $\lambda$  per i quali si à

$$\lambda A'_{11} \equiv \lambda A_{12} \dots \equiv \lambda A'_{1s} \equiv \lambda A'_2 \dots \equiv \lambda A'_\sigma, \quad (39)$$

esisterà cioè sopra  $F$  un sistema algebrico  $\Sigma_\lambda$  di curve che contiene tutte queste curve  $(\lambda A'_{11}) \dots (\lambda A'_\sigma)$ .

Dividiamo  $\Sigma_\lambda$  per  $\lambda$  e ricordiamo che il valore di  $\sigma$  sopra  $F'$  coincide con quello di  $F$ . Fra le curve quozienti di questa divisione vi sono tutte le  $s$  curve (38), che abbiamo dimostrato essere tutte distinte.

*Essendo  $s > \sigma$  risulta che questa divisione ha più di  $\sigma$  sistemi quozienti.*

*Osservazione I.* A questo punto potrebbe nascere il dubbio che perchè si verifichi questa proprietà, tutti i sistemi quozienti debbono, necessariamente, essere  $\infty^0$ .

E qualche volta ciò avviene.

Difatti i  $\sigma$  sistemi (39) si possono pensare tutti regolari come i sistemi costruiti al § 4, cioè composti d' $\infty^0$  sistemi lineari regolari; in tal caso le dimensioni  $R_1 R_2 \dots R_s$  risultano tutte uguali e conseguentemente le curve (38) saranno isolate e gli  $s$  sistemi quozienti tutti  $\infty^0$ .

Ma non sempre è così; *si possono costruire facilmente esempi in cui fra i detti  $s$  sistemi quozienti ve ne sia qualcuno composto d' $\infty$  curve.*

Riprendiamo il cono  $S_1$  generale del 4.<sup>o</sup> ordine del § 2: ivi  $\sigma$  è uguale ad uno. Al n.<sup>o</sup> 8 abbiamo visto che le superficie del 3.<sup>o</sup> ordine dello spazio che passano per tre qualsiansi rette di  $S_1$ , segnano su  $S_1$  oltre le curve fisse un sistema algebrico  $V$  composto di due sistemi continui connessi  $V_{11}$  e  $V_{12}$ , uno di dimensione 11 e l'altro 12.

Ebbene per superficie  $F$  prendiamo questo cono e per sistema  $\{A_1\}$  questo sistema  $V$ ; la cosa è possibilissima perchè le curve di  $V$  sono a carattere generale e il loro grado virtuale 20 è maggiore delle due dimensioni 11 e 12.

Per gruppo  $G_{R_i}$  stavolta sceglieremo un gruppo  $G_{11}$  di 11 punti generici di  $S_1$ ; per tale gruppo allora passeranno un numero finito di curve  $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12}, \dots, A_{1v}$  di  $V_{11}$  e almeno un sistema algebrico  $\bar{\Sigma}$  d' $\infty^1$  curve di  $V_{12}$ . Trasformando  $S_1$  come s'è fatto per  $F$  si ottiene una superficie  $S'_1$  a numero  $\sigma = 1$  dove i sistemi algebrici

$$\{\bar{A}'_{11}\} \{\bar{A}'_{12}\} \dots \{\bar{A}'_{1v}\} \quad (40)$$

e il sistema  $\infty, \Sigma'$  sono tutti distinti fra di loro e quozienti d'una certa divisione.

c. v. d.

Si capisce poi come questi esempi si moltiplicano e si completano sui coni d'ordine superiore.

*Osservazione II.* L'esempio di sopra è stato costruito su  $F'$  che è una conveniente superficie di un dato corpo di superficie irregolari birazionalmente identiche fra di loro. Ove si volessero esempi analoghi sopra la superficie irregolare  $F$  qualsiasi, basterebbe considerare su di essa le curve (36) e (37) col gruppo  $G_{R_i}$  assegnato.

Dunque di questi esempi se ne hanno su qualunque superficie irregolare e si ha:

**Teorema XIX.** *Sopra una qualsiasi superficie irregolare vi sono divisioni il cui numero di sistemi algebrici quozienti supera il valore di  $\sigma$  relativo alla superficie stessa.*

22. *Esempio di divisione per un numero  $\lambda$  primo con  $\sigma$  non univoca.*  
Le curve

$$A'_{11}, A'_{12}, \dots, A'_{1v},$$

oltre soddisfare le relazioni sopradette e di essere algebricamente distinte con le curve  $G_{R_i}$  verificano evidentemente le relazioni:

$$A'_{11} + G'_{R_1} \equiv A'_{12} + G'_{R_1} \equiv \dots \equiv A'_{1v} + G'_{R_1}. \quad (41)$$

Per il teorema del n.º 20 esisterà allora un conveniente numero intero e positivo  $\lambda_0 > 1$  tale che per qualunque  $\lambda \geq \lambda_0$  si abbia:

$$\lambda A'_{11} \equiv \lambda A'_{12} \equiv \dots \equiv \lambda A'_{1v}, \quad (\lambda \geq \lambda_0). \quad (42)$$

Questo ci prova sopra la superficie  $F'$  l'esistenza di curve  $A'$  e  $B'$  che

per conto loro sono *algebricamente distinte, mentre per tutti i valori di un numero  $\lambda$  a partire da un certo  $\lambda_0$  in poi è sempre*

$$\lambda A' = \lambda B'. \quad (43)$$

Da questo ricaviamo:

1.° Se  $\mu$  è il più piccolo numero intero e positivo per cui vale la relazione

$$\mu A' \equiv \mu B'$$

*non è lecito in nessuna maniera dal confronto di questa con la (43) concludere che è  $\mu$  un divisore di  $\lambda$ .*

In altri termini seguendo tutti i numeri interi

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$$

per cui valgono le relazioni

$$\mu A' \equiv \mu_1 B'_1, \quad \mu_2 A' \equiv \mu_2 B', \quad \mu_3 A' \equiv \mu_3 B' \dots$$

*questi numeri non si ripetono periodicamente.*

2.° Nella dimostrazione del primo teorema del n.° 20 abbiamo visto che allorchè due curve  $A'$  e  $B'$  sono legate dalla relazione  $A' + C \equiv B' + C$  la curva  $+(A' - B')$  riproduce i sistemi lineari d'ogni sistema algebrico  $\{E\}$  a caratteri generali, cioè le curve  $|E + A - B|$  sono ancora curve di  $\{E\}$ . In virtù delle (41) bisognerà allora dire che  $+(A'_{11} - A'_{12})$  gode della stessa proprietà, e ciò nonostante  $A'_{11}$  e  $A'_{12}$  sono algebricamente distinte.

Quindi: *Una curva  $+(A' - B')$  può riprodurre i sistemi lineari d'un sistema algebrico a caratteri generali senza che contemporaneamente sia*

$$A' \equiv B';$$

*ossia  $+(A' - B')$  può essere l'identità nel senso di SEVERI (\*) senza che contemporaneamente sia  $A' \equiv B'$ .*

3.° Giacchè le (42) valgono qualunque sia il numero  $\lambda$  a partire da un certo  $\lambda_0$  in poi, scegliamo un numero  $\bar{\lambda} \cong \lambda_0$  e primo con  $\sigma$  sarà anche:

$$\bar{\lambda} A'_{11} \equiv \bar{\lambda} A'_{12} \dots \equiv \bar{\lambda} A'_{1\sigma}.$$

---

(\*) Il SEVERI chiama appunto identità una curva  $M$  d'ordine zero a grado virtuale zero che riproduca i sistemi lineari d'un sistema  $\{E\}$  a caratteri generali —  $\{E + M\} = \{E\}$  —.

Esisterà allora su  $F$  un sistema  $\Sigma_{\bar{\lambda}}$  che contiene queste curve

$$(\bar{\lambda} A'_{11}) \dots (\bar{\lambda} A'_{1v}).$$

Dividiamo  $\Sigma_{\bar{\lambda}}$  per  $\bar{\lambda}$ : fra i sistemi quozienti distinti vi saranno

$$\{A'_{11}\} \dots \{A'_{1v}\} \text{ con } v \geq 2,$$

quindi *la divisione non è univoca nonostante sia  $\lambda$  primo con  $\sigma$* . E se si riguarda l'osservazione I del numero precedente si vede che le curve (40) e  $\Sigma$  sono in condizioni perfettamente analoghe e che perciò

**Teorema XX.** *Sopra una qualunque superficie irregolare esistono sistemi algebrici generali, che divisi per un  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$ , danno luogo a più sistemi quozienti (l'operazione non è univoca) e fra questi sistemi quozienti ve ne possono essere anche infiniti.*

*Osservazione I.* Supponendo che le curve (29) di partenza siano tutte prive di curve fondamentali e generalmente irriducibili, in tutte le relazioni considerate nei numeri 21 e 22, all'equivalenza algebrica generale si può sostituire l'equivalenza algebrica in senso stretto. Può darsi però che per tale sostituzione sia necessario ingrandire i coefficienti  $\lambda$  ivi considerati, sibbene questo non influisce per nulla sui risultati. Del resto si capisce a priori, che le proprietà dette valgono a fortiori nel campo più ristretto dei sistemi continui irriducibili.

Più importante invece è osservare che in tutte le considerazioni di questo paragrafo all'equivalenza algebrica si può sostituire, senz'altra variazione, l'equivalenza a catena; i risultati rimangono tali e quali.

Difatti tale sostituzione non può evidentemente avere alcuna influenza sulle questioni riguardanti il numero  $\sigma$ , giacchè allora trattasi di sistemi di curve a caratteri generali e le due equivalenze algebrica e a catena coincidono.

In quanto poi ai teoremi XVII e XVIII si può fare di più, e cioè, nell'ipotesi sostituire l'equivalenza a catena e nella tesi lasciare l'equivalenza generale, ottenendo così un'estensione dei teoremi stessi. Così per il teorema XVII si può dire: Se  $A$  e  $B$  verificano la relazione

$$A + C \parallel\parallel B + C$$

esiste un  $\lambda_0$  tale che, per  $\lambda \geq \lambda_0$  si abbia

$$\lambda A \equiv \lambda B;$$

e lo stesso per l'altro.

Trattando per ultimo dei teoremi XIX e XX basta osservare che le curve (38) non solo sono distinte in generale, ma lo sono anche nell'equivalenza a catena.

Dunque anche nel campo dei sistemi algebrici a catena si ànno divisioni con più di  $\sigma$  sistemi quozienti e divisioni per numeri  $\bar{\lambda}$  primi con  $\sigma$  non univoche.

*Osservazione II.* Le proprietà incontrate in questo numero, per le curve a caratteri non generali, si allontanano dai teoremi di SEVERI sulle divisioni.

Ciò non dipende più dalla distinzione tra equivalenza in senso stretto ed equivalenza generale o a catena, come per le cose dette nella 2.<sup>a</sup> parte. Qui entra un nuovo fatto e precisamente che nel campo dell'equivalenza algebrica (sia a catena o generale o in senso stretto) la sottrazione non è un'operazione univoca; cioè se (in generale) è:

$$A ||| B, \quad C ||| D,$$

ed esistono le curve  $|A - C|$  e  $|B - D|$ , queste non sempre sono concatenate fra di loro.

## 8.

**Equivalenza virtuale e sistemi virtuali.**

23. *Ancora sulle divisioni per un numero  $\lambda$  primo con  $\sigma$  non univoche.* Riprendiamo le considerazioni del n.º 22 per studiare un po' più da vicino le divisioni, per un numero  $\lambda$  primo con  $\sigma$ , che dàno luogo a più sistemi quozienti.

Siano  $A$  e  $B$  due curve di  $F$  sottomultiple, secondo questo numero, d'una stessa curva  $D$

$$\lambda A \equiv \bar{\lambda} B \equiv D. \tag{44}$$

A pag. 269 della Memoria: *Complementi alla teoria della base* il SEVERI s'occupa di tali curve. Ma se si segue attentamente il suo ragionamento, tenendo presente quanto abbiamo detto nelle prime considerazioni del numero

precedente, l'unica conclusione a cui si deve giungere è che l'operazione  $+(A - B)$  riproduce i sistemi lineari d'ogni sistema algebrico  $\{E\}$  di curve aritmeticamente effettive, cioè che il sistema  $\{E + A - B\}$  coincide con  $\{E\}$ . In tali condizioni le curve  $A$  e  $B$  verificano la relazione:

$$A + E \equiv B + E, \quad (45)$$

che insieme ai teoremi del n.º 20 ci dà:

**Teorema XXI.** *Se sopra una superficie  $F$   $A$  e  $B$  sono due curve che per un certo numero  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$  verificano la relazione  $\bar{\lambda} A \equiv \bar{\lambda} B$ , esiste un numero  $\lambda_0$  tale che, per qualunque  $\lambda \geq \lambda_0$  si abbia sempre  $\lambda A \equiv \lambda B$ .*

Ma  $\lambda_0$  non sempre coincide con l'unità, e dalla (45) non sempre si può dedurre  $A \equiv B$ , nel qual caso vi saranno più sistemi quozienti.

Per poter ritenere univoca tale divisione bisognerebbe potere in qualche modo non considerare come distinte le due curve  $A$  e  $B$  legate dalla (45).

Anzi si arriva proprio al risultato generale:

*Le divisioni per un numero  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$ , nel campo dell'equivalenza generale, si possono ritenere univoche se non si considerano come distinte due curve  $A$  e  $B$  legate con un'altra curva  $E$  di  $F$  da una relazione (45).*

E questa osservazione si riflette anche sulle considerazioni del n.º 21. Perchè è vero che allora abbiamo trovato una divisione con  $\sigma + \nu - 1$  sistemi quozienti, ma  $\nu$  fra questi sistemi sono costituiti dalle curve  $A'_{11}, A'_{12}, \dots, A'_{1\nu}$ , che verificano le relazioni

$$A'_{11} + G'_{R_1} \equiv A'_{12} + G'_{R_2} \equiv \dots \equiv A'_{1\nu} + G'_{R_\nu},$$

analoghe alla (45).

Ora se è possibile la convenzione di sopra queste curve non si debbono considerare più come distinte ed i sistemi quozienti si riducono proprio a  $\sigma$ .

E così almeno in questo caso particolare le cose si aggiustano anche per il numero dei sistemi quozienti.

Ora il fatto è generale e siamo così condotti ad introdurre nuove definizioni e ad ampliare ancora una volta il campo dell'equivalenza.

**24. Definizione dei sistemi virtuali.** Osserviamo che se due curve  $A$  e  $B$  verificano la (45) per una opportuna posizione  $\bar{E}$  di  $E$  in  $\{E\}$  si ha

$$|B| \equiv |A + E - \bar{E}| \quad (46)$$

e viceversa da questa si ha la (45).



Se nella (46) facciamo variare  $\bar{E}$  in  $\{E\}$ , si ottengono  $\infty^9$  sistemi lineari distinti  $|B|$ , non sempre effettivi, ma tutti rappresentabili con i punti della varietà (irriducibile) di PICARD inerente ad  $F$ . Ebbene ampliamo il campo delle curve effettive con le virtuali e poniamo le seguenti definizioni:

*Data sopra  $F$  una curva  $A$  qualsiasi (anche virtuale) chiameremo sistema virtuale  $V_A$ , individuato da  $A$ , la totalità algebrica irriducibile,  $\infty^9$ , dei sistemi lineari (46) che si ottengono, fissando una curva  $E$  in un sistema algebrico  $\{E\}$  di curve aritmeticamente effettive e facendo percorrere ad  $E$  tutti i sistemi lineari dello stesso sistema.*

La prima cosa da fare per legittimare questa definizione è di mostrare che essa è indipendente dalla curva  $E$  fissata in  $\{E\}$  non solo, ma è anche indipendente dal sistema  $\{E\}$  stesso. Dimosteremo di più e precisamente che dette  $D$  e  $D$  due qualsiasi curve di  $F$  concatenate fra di loro,  $D ||| D$ , il sistema lineare  $|A + D - \bar{D}|$  è uno dei sistemi  $|B|$  dati dalla formula (46). Bisognerà provare che si può determinare una posizione  $E$ , tale che sia:

$$A + D - D \equiv A + E - E$$

ossia

$$E \equiv E + D - D.$$

Ma se  $E$  è una curva aritmeticamente effettiva e  $D$  e  $D$  appartengono ad uno stesso sistema algebrico a catena, il sistema lineare  $|E + D - \bar{D}|$  avrà la dimensione virtuale positiva, sarà effettivo e contenuto in  $\{E\}$ . Quindi la curva  $\bar{E}$  che si cerca esiste ed è perfettamente individuata da  $D$  e  $D$ .

Ne segue che il sistema  $V_A$  dipende esclusivamente da  $A$ .

*Una curva  $B$ , effettiva o virtuale, appartenente ad uno dei sistemi lineari (46) diremo che appartiene a  $V_A$ . E due curve  $B$  e  $B'$  appartenenti al medesimo sistema virtuale le diremo equivalenti virtualmente e in simboli scriveremo:*

$$B' \sim B.$$

Vuol dire allora che è  $B \equiv A + E - E$  e  $B' \equiv A + E - \bar{E}$  ossia

$$B + E \equiv B' + \bar{E},$$

cioè  $B$  e  $B'$  soddisfano la (45).

25. *Proprietà dei sistemi virtuali.* Ecco le proprietà più importanti di questi sistemi:

1.° Se  $A$  e  $B$  sono due curve di  $F$  concatenate fra di loro,  $A \parallel\parallel B$ , in particolare algebricamente equivalenti sia in generale che in senso stretto, è anche  $A \sim B$ . Quindi il sistema algebrico a catena  $C_A$  individuato da  $A$  appartiene per intero al sistema virtuale  $V_A$ .

Il sistema virtuale  $V_A$  amplia perciò  $C_A$ .

Quand'è che questi due sistemi coincidono?

Ora ogni sistema lineare di  $C_A$  è un sistema lineare di  $V_A$ ; perchè essi coincidano bisogna allora che  $C_A$  contenga, come  $V_A$ ,  $\infty^q$  sistemi lineari; e viceversa. Quindi

**Teorema XXII.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè i due sistemi  $V_A$  (virtuale) e  $C_A$  (a catena) coincidano, è che  $C_A$  sia composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti.*

*Concludiamo pertanto, che per le curve  $E$  aritmeticamente effettive e per le curve a caratteri generali, il sistema virtuale  $V_E$  coincide col sistema algebrico  $\{E\}$ .*

Quando però il sistema a catena  $C_A$  a cui appartiene la curva  $A$  di partenza non è composto d' $\infty^q$  sistemi lineari,  $V_A$  e  $C_A$  non coincidono, allora  $C_A$  è contenuto in  $V_A$ , ma  $V_A$ , oltre questo sistema, contiene altri sistemi lineari di curve che possono essere tutti virtuali, ma fra i quali a volte ve ne possono essere anche effettivi.

Se siamo sulla superficie  $F'$  del n.° 21 e per curva  $A$  prendiamo la curva  $A'_{11}$ , allora il sistema virtuale  $V_{A'_{11}}$  si compone delle sole  $\nu$  curve  $A'_{11} \dots A'_{1\nu}$ , e di nessuna altra curva effettiva; i restanti sistemi lineari sono tutti virtuali. Lo stesso dicasi sulla superficie  $F$  per la curva  $A_{11}$ , con il gruppo di punti  $G_{R_1}$  assegnato.

Se siamo invece sulla superficie  $S'$ , e per curva di partenza si prende la curva che allora abbiamo indicato con  $\bar{A}'_{11}$ , il sistema  $V_{\bar{A}'_{11}}$  si comporrà delle  $\nu$  curve distinte  $\bar{A}'_{11} \dots \bar{A}'_{1\nu}$ , e delle curve del sistema algebrico infinito  $\bar{\Sigma}$ ; tutti gli altri sistemi lineari sono virtuali.

In generale quindi un sistema virtuale può contenere *più sistemi algebrici a catena* (effettivi)

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_r \quad (47)$$

*non connessi fra di loro.*

L'importanza di questi sistemi virtuali sta appunto nel legare assieme questi sistemi algebrici (47), che nel campo effettivo sono invece distinti fra di loro.

2.<sup>o</sup> L'equivalenza virtuale gode della proprietà transitiva. Se

$$A \sim B \text{ e } B \sim C \text{ è anche } A \sim C.$$

3.<sup>o</sup> La sottrazione nel campo virtuale è un'operazione univoca. Se

$$A \sim B \text{ e } C \sim D \text{ è anche } A - C \sim B - D.$$

Difatti dalle ipotesi segue:

$$B \equiv A + E - \bar{E} \quad \text{e} \quad D \equiv C + E - \bar{E},$$

che sottratte membro a membro dànno:

$$A - C + \bar{E} - \bar{E} \equiv B - D \quad \text{ossia} \quad A - C \sim B - D.$$

Si osservi che nel campo dell'equivalenza algebrica quando si ha

$$A \equiv B \quad \text{e} \quad C \equiv D$$

è anche

$$A - C \equiv B - D \tag{48}$$

(e lo stesso per l'equivalenza a catena), ma questa relazione ha un significato puramente formale; sta ad indicare che è  $A + D \equiv B + C$  e non ha alcun altro significato all'infuori di questo. Così se esistono le curve  $|A - C|$  e  $|B - D|$  per la (48) non si può dire che queste curve siano algebricamente equivalenti.

Invece quello che noi abbiamo sopra dimostrato è precisamente che se è  $A \sim B$  e  $C \sim D$ , le curve  $|A - C|$  e  $|B - D|$  sono pur esse equivalenti virtualmente.

Dunque la sottrazione non è univoca nel campo effettivo, ma lo è nel campo virtuale. Ne segue che quando è  $A \equiv B$  è anche  $A - C \sim B - C$ , sicchè:

**Teorema XXIII.** *Imponendo alle curve d'un sistema algebrico di passare per una curva (in particolare per punti assegnati), i sistemi algebrici distinti in cui si distribuiscono tutte le curve residue, appartengono ad un medesimo sistema virtuale.*

Con l'equivalenza virtuale alcuni dei teoremi dimostrati acquistano una forma più semplice e generale; così i teoremi del n.<sup>o</sup> 20 si possono esprimere più semplicemente così:

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due curve  $A$  e  $B$  per tutti i valori d'un numero  $\lambda$  a partire da un certo  $\lambda_0$  in poi verificano le relazioni*

$$\lambda A \equiv \lambda B$$

*è che sia*

$$A \sim B.$$

Ne segue che il teorema XXIII si può enunciare:

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due curve  $A$  e  $B$  verificano le relazioni*

$$\bar{\lambda} A \equiv \bar{\lambda} B$$

*per un numero  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$ , è che sia:*

$$A \sim B.$$

Così dai teoremi del § 5 si à:

c) *Se sopra una superficie  $F$ ,  $A$  e  $B$  sono due curve dello stesso ordine che verificano le relazioni*

$$[A^2] = [A B] = [B^2],$$

*esistono dei numeri interi  $\lambda$  per i quali si ha:*

$$\lambda A \sim \lambda B.$$

d) *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $l$  curve,  $C_1 C_2 \dots C_l$ , d'una superficie  $F$  siano legate da una relazione*

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_l C_l \sim 0$$

*a coefficienti interi, positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli, è che la matrice discriminante dell'aggruppamento  $(C_1 C_2 \dots C_l)$  sia zero.*

e) *Ne segue che quando sopra una superficie a numero base  $\rho$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_\rho$  sono  $\rho$  curve a determinante diverso da zero, una qualsiasi curva di  $F$  è legata virtualmente ad esse con una relazione del tipo:*

$$\lambda C \sim \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho.$$

Tali basi  $(C_1 C_2 \dots C_\rho)$  si potrebbero per ciò chiamare *virtuali* e dare il nome di basi *effettive* alle basi  $(A_1 A_2 \dots A_\rho)$  costruite nel n.º 17.

Osserviamo per ultimo che da tutto questo risulta chiaramente che un sistema virtuale qualsivoglia si può considerare come differenza tra un si-

stema algebrico  $\{E\}$  composto d' $\infty^g$  sistemi lineari effettivi ed un'opportuna curva.

Analogamente un qualsiasi sistema virtuale a grado positivo si può considerare come sistema quoziente fra un sistema algebrico  $\{E\}$  ed un opportuno numero  $\lambda$ .

Quindi il fatto che un sistema virtuale può contenere dei sistemi lineari non effettivi si può ritenere come un effetto di tali operazioni.

## 9.

**Sul carattere di divisibilità  $\sigma$  d'una superficie.**

26. *Il numero  $\sigma$  nel campo virtuale.* Sulla solita superficie  $F$  sia  $A_1$  una curva effettiva a caratteri generali. Sappiamo allora che tutte le curve effettive  $A$  di  $F$ , dello stesso ordine di  $A_1$ , e che con essa verificano le relazioni:

$$[A_1^2] = [A_1, A] = [A^2] \quad (49)$$

si distribuiscono in  $\sigma$  sistemi algebrici:

$$\{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_\sigma\}. \quad (50)$$

Questi sistemi essendo a caratteri generali sono tutti composti d' $\infty^g$  sistemi lineari distinti e coincidono con i corrispondenti sistemi virtuali:

$$V_{A_1} V_{A_2} \dots V_{A_\sigma}. \quad (51)$$

Tutte le curve effettive o virtuali di questi sistemi verificano con  $A_1$  le dette proprietà e viceversa, è chiaro che ogni curva  $A$  effettiva o virtuale, legata nel modo detto ad  $A_1$ , appartiene ad uno di questi sistemi.

Questo però se si parte da una curva  $A_1$  a caratteri generali; partiamo ora da una curva  $B_1$  qualsiasi, anche virtuale, e vediamo cosa avviene delle curve  $B$  dello stesso ordine e verificanti le relazioni  $[B_1^2] = [B_1, B] = [B^2]$ .

Qui il risultato è completo.

Difatti: se  $B$  è una tale curva,  $A_1 + B_1 - B$  sarà una delle curve  $A$  di sopra e apparterrà ad uno dei sistemi (51), per es. a  $V_{A_i}$ , cioè:

$$A_1 + B_1 - B \sim A_i$$

e da questa:

$$B \sim B_1 + A_1 - A_i.$$

Ne segue che tutte le curve  $B$  in considerazione sono virtualmente equivalenti ad una delle  $\sigma$  curve

$$B_1 \equiv B_1 + A_1 - A_1 \quad B_2 \equiv B_1 + A_1 - A_2 \dots B_\sigma \equiv B_1 + A_1 - A_\sigma,$$

ossia appartengono ai sistemi virtuali

$$V_{B_1} V_{B_2} \dots V_{B_\sigma}. \tag{52}$$

Viceversa ogni curva di questi sistemi è evidentemente una curva  $B$ .

Ora i sistemi (52) sono tutti distinti, perchè, ove fosse  $V_{B_i} = V_{B_k}$ , cioè  $B_i \sim B_k$ , dovrebbe essere:

$$B_1 + A_1 - A_i \sim B_1 + A_1 - A_k$$

e quindi

$$A_i \sim A_k \quad \text{o} \quad V_{A_i} = V_{A_k},$$

il che può avvenire solo quando è  $i = k$ .

Concludiamo:

*Teorema XXIV. Data comunque una curva  $B$  di  $F$  (effettiva o virtuale a caratteri generali o no), tutte le curve  $B$  di  $F$  dello stesso ordine e che con essa verificano le relazioni  $[B_i^2] = [B_1 B] = [B^2]$ , si distribuiscano in numero fisso  $\sigma$  di sistemi virtuali.*

E questo numero  $\sigma$  oltre non dipendere dalla curva  $B_1$  da cui si parte, è anche un invariante assoluto (v. n.º 19).

E così in questo campo virtuale il carattere di divisibilità  $\sigma$  acquista un significato più netto e più completo.

27. *Il gruppo fondamentale della divisione.* Sia  $C = A - B$  una curva d'ordine zero e a grado virtuale zero.

Supponiamo che la curva  $B_1$  del numero precedente sia una sezione iperpiana di  $F$  e consideriamo la curva  $B_1 + C$ .

Per le ipotesi fatte, le due curve  $B_1$  e  $B_1 + C$  sono dello stesso ordine e verificano le relazioni:

$$[B_i^2] = [B_1 (B_1 + C)] = [(B_1 + C)_1^2],$$

per cui detta  $B$ , una conveniente curva (52) sarà:

$$B_1 + C \sim B_i \sim B_1 + A_1 - A_i$$

e per l'univocità della sottrazione nel campo virtuale :

$$C \sim A_1 - A_i.$$

Da questo intanto segue che *qualsiasi curva d'ordine zero e a grado virtuale zero, è virtualmente equivalente ad una ed una sola delle  $\sigma$  curve distinte :*

$$M_1 = A_1 - A_1 \quad M_2 = A_1 - A_2 \dots \quad M_\sigma = A_1 - A_\sigma. \quad (53)$$

Cioè *rispetto all'equivalenza virtuale le curve d'ordine zero e grado zero si riducono alle sole  $\sigma$  curve (53).*

Prese comunque due curve fra queste,  $M_i$  e  $M_k$ , distinte o coincidenti, chiamiamo loro prodotto la curva

$$M_i + M_k \sim (A_1 - A_i + A_1 - A_k),$$

essendo anche questa una curva d'ordine zero e grado zero; detta  $M_s$  un'opportuna curva (53), sarà :

$$M_i + M_k \sim M_s.$$

Per tale operazione dunque le curve (53) si riproducono e siccome per il prodotto così definito vale la proprietà commutativa e la proprietà associativa :

$$1.^{\circ} \quad M_i + M_k \sim M_k + M_i$$

$$2.^{\circ} \quad (M_i + M_k) + M_l \sim M_i + (M_k + M_l).$$

Possiamo dire :

**Teorema XXV.** *Le curve d'ordine zero e grado virtuale zero d'una superficie  $F$  rispetto all'equivalenza virtuale, formano un gruppo abeliano  $G_\sigma$  di curve rappresentabili con le curve (53).*

L'ordine del gruppo è  $\sigma$ . L'identità sarà rappresentata dalla curva  $M_1$ , perchè qualunque sia  $\lambda$  è sempre

$$\lambda M_1 = \lambda (A_1 - A_1) \sim 0$$

e quindi

$$\lambda M_1 \sim M_1.$$

Ne segue che se  $\mu_i$  è il periodo di  $M_i$ , sarà

$$\mu_i M_i = \mu_i (A_1 - A_i) \sim (A_1 - A_i) \sim 0,$$

cioè  $\mu_i A_1 \sim \mu_i A_i$  e sarà  $\mu_i$  un divisore di  $\sigma$ ,

In generale se una curva  $C = A - B$  a grado virtuale zero e d'ordine zero coincide con l'identità  $M_1$  sarà :

$$A - B \sim A_1 - A_1 \sim 0$$

ed

$$A \sim B.$$

Risulta allora che, seguendo tutti i numeri interi  $\mu$  per i quali si ha :

$$\mu_1 A \sim \mu_1 B \quad \mu_2 A \sim \mu_2 B \quad \mu_3 A \sim \mu_3 B \dots$$

questi numeri coincidono con tutti i multipli di  $\mu_1$ , perchè se  $A$  e  $B$  verificano queste relazioni, la curva  $A - B$  sarà d'ordine zero e a grado virtuale zero e le relazioni di sopra si possono scrivere

$$\mu_1(A - B) \sim 0 \quad \mu_2(A - B) \sim 0 \quad \mu_3(A - B) \sim 0 \dots$$

$\mu_1$  sarà allora il periodo di  $(A - B)$  e  $\mu_2, \mu_3, \dots$  saranno tutti i suoi multipli.

Volendo interpretare  $G_\sigma$  come gruppi d'operazioni, basta considerare  $M_i$  come la curva che bisogna aggiungere ad  $A_1$  per passare da  $A_1$  ad  $A_i$  o dal sistema  $V_{A_1}$  al sistema  $V_{A_i}$  e si può dire che il gruppo  $G_\sigma$  è il gruppo d'operazioni che ci porta da una curva  $A_1$  alle sue curve associate  $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ . E in questo senso si ricade in un concetto del SEVERI. Se non che, definendo, come fa il SEVERI, questo gruppo  $G_\sigma$  nel campo dell'equivalenza in senso stretto fra curve a caratteri generali, esso è un gruppo di operazioni che permette solo di passare da un sistema  $\{A_1\}$  a tutti i sistemi  $\{A_1\}, \dots, \{A_\sigma\}$ , ma mai un gruppo di curve come noi l'abbiamo definito; perchè in questo campo  $\sigma$  non è costante, e, anche a prescindere da questa difficoltà, che si rimuove, introducendo al posto dei sistemi irriducibili i sistemi algebrici, nel nuovo campo dell'equivalenza algebrica generale, come in quello dell'equivalenza a catena valgono sempre le prime considerazioni del n.º 22 e l'identità  $+(A - B)$  del gruppo, pur riproducendo tutti i sistemi  $\{A_i\}$ ,

$$\{A_i + A - B\} = \{A_i\},$$

può non essere equivalente allo zero ed essere  $A \equiv B$ .

In tal caso, rispetto all'equivalenza algebrica, per la curva  $(A - B)$  manca addirittura la nozione del periodo.

$$(A - B), \quad 2(A - B), \quad 3(A - B), \dots$$



non si riproducono periodicamente perchè nel campo effettivo la sottrazione non è un'operazione univoca e non vale la proprietà associativa. E così in questo campo l'operazione del gruppo  $G_\sigma$  hanno solo il valore di sostituzione e in nessuna maniera possono legarsi alla teoria della divisione.

Nel campo virtuale ciò non è perchè le osservazioni del n.º 22 sopra ricordate non valgono più e  $G_\sigma$  si può considerare proprio come un gruppo di curve.

## 10.

## Le leggi dell'operazione di divisione.

28. *Teoria della divisione nel campo virtuale.* Sia  $V_D$  un sistema virtuale, dividiamolo per un numero  $\lambda$ , supponendo che la divisione sia possibile, e indichiamo con

$$V_{B_1}, V_{B_2}, \dots \quad (54)$$

tutti i sistemi virtuali quozienti; allora sarà:

$$\lambda B_i \sim \lambda B_1 \dots$$

per cui  $B_1, B_2, \dots$  risultano tutte curve dello stesso ordine che verificano le relazioni  $[B_i^2] = [B_1 B] = [B^2]$ . Da questo intanto si ricava, con tutta precisione, che il numero dei sistemi virtuali quozienti *non può mai superare*  $\sigma$ .

Ma si può precisare di più.

Sia  $M$  una curva di  $G_\sigma$  il cui periodo divide  $\lambda$ ; la curva  $B_i \sim B_1 + M$  verifica la relazione  $\lambda B_i \sim \lambda B_1$  e il sistema virtuale  $V_{B_i}$  sarà uno dei sistemi quozienti della nostra divisione. Viceversa, se  $V_{B_i}$  è un sistema quoziente, essendo  $\lambda B_i \sim \lambda B_1$ , cioè  $\lambda(B_i - B_1) \sim 0$ ; il periodo della curva  $(B_i - B_1) \sim M_i$  sarà un divisore di  $\lambda$  e si avrà  $B_i \sim B_1 + M_i$ . Onde il

**Teorema XXVI.** *Il numero dei sistemi quozienti, che si ottengono dividendo un sistema virtuale  $V$  per un numero  $\lambda$  (quando la divisione è possibile), non supera mai  $\sigma$  ed è uguale al numero delle curve distinte di  $G_\sigma$  che hanno come periodo un divisore di  $\lambda$ . Gli stessi sistemi si ottengono tutti da uno di essi aggiungendovi queste curve.*

Ora poichè  $G_\sigma$  è un gruppo abeliano, detto  $\mu$  un qualsiasi divisore di  $\sigma$ , in esso sono contenuti sottogruppi d'ordine  $\mu$ ; volendo allora che la divisione di un dato sistema  $V$  per numero  $\lambda$ , dia luogo ad un solo sistema virtuale quoziente bisogna che  $\lambda$  e  $\sigma$  non abbiano divisori comuni all'infuori dell'unità. Viceversa se  $\lambda$  e  $\sigma$  sono primi fra loro, l'unica operazione di  $G_\sigma$  che ha per periodo un divisore di  $\lambda$  è l'identità e non si può avere più d'un sistema quoziente. Quindi:

**Teorema XXVII.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la divisione d'un sistema  $V$  per un intero  $\lambda$  sia univoca, è che  $\lambda$  sia primo con  $\sigma$ .*

29. *Teoria della divisione nel campo effettivo.* Ritorniamo ora al campo effettivo dei sistemi algebrici generali e vediamo quali deduzioni possiamo trarre dai risultati ottenuti.

Sia  $D$  una curva algebrica effettiva e variabile in un sistema algebrico composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti. Allora sarà  $\{D\} = V_D$ .

Dividiamo  $\{D\}$  per  $\lambda$  e chiamiamo

$$V_{B_1}, V_{B_2}, \dots, V_{B_\mu}, \quad (\mu \leq \sigma) \quad (55)$$

i sistemi virtuali in cui si dipartiscono tutte le curve quozienti sia effettive che virtuali.

Prese due curve  $B$  e  $\bar{B}$  qualsiasi fra le curve effettive di questi sistemi sarà sempre:

$$\lambda B \sim \lambda \bar{B} \sim D$$

e poichè per ipotesi  $V_D$  è composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti effettivi, sarà:

$$\lambda B - \lambda \bar{B} = D.$$

Così le curve *effettive* sottomultiple di  $D$  secondo  $\lambda$  sono tutte e sole le curve effettive dei sistemi (55) e il numero dei sistemi algebrici distinti in cui esse si dipartiscono, sarà uguale al numero dei sistemi algebrici contenuti nei sistemi virtuali stessi, d'onde:

**Teorema XXVIII.** *Dividendo un sistema algebrico  $\{D\}$  composto d' $\infty^q$  sistemi lineari per un numero  $\lambda$  (quando la divisione è possibile), i sistemi algebrici quozienti sono tutti e soli i sistemi effettivi contenuti nei corrispondenti sistemi virtuali quozienti (55).*

Chiamiamo  $\bar{\sigma}$  il numero di questi sistemi algebrici quozienti e  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\mu$  il numero dei sistemi algebrici distinti contenuti rispettivamente in  $V_{B_1}, V_{B_2}, \dots, V_{B_\mu}$ , si avrà:

$$\bar{\sigma} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\mu. \quad (56)$$

Dagli esempi studiati sappiamo che questi numeri  $\nu$  possono superare uno e allora si capisce bene come, nel campo effettivo, una divisione possa dar luogo a più di  $\sigma$  sistemi algebrici quozienti. È vero che  $\mu$  è sempre  $\leq \sigma$ , ma, potendo ciascun numero  $\nu$  essere maggiore di uno,  $\bar{\sigma}$  può benissimo superare  $\sigma$  (teorema XIX).

Perchè  $\bar{\sigma}$  non superi  $\sigma$  bisogna e basta che sia

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\mu \leq \sigma. \quad (57)$$

La (57) si verifica se ognuno dei numeri  $\nu$  non supera l'unità ( $\nu_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, \mu$ ), cioè quando ognuno dei sistemi virtuali (55) non contiene più d'un sistema algebrico effettivo. E questo porta ad un caso molto notevole: quello in cui ognuno dei sistemi (55) è, o completamente virtuale, cioè composto di sistemi lineari tutti virtuali, o completamente effettivo, cioè composto di sistemi lineari tutti effettivi. In tal caso i sistemi algebrici quozienti della nostra divisione sono tutti composti d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti. Viceversa, se tutti i sistemi algebrici quozienti sono composti d' $\infty^q$  sistemi lineari essi coincidono coi corrispondenti sistemi virtuali (55) (teorema XXII) e il loro numero ( $\leq \mu$ ) non può mai superare  $\sigma$ . Quindi:

**Teorema XXIX.** *Se sopra una superficie  $F$  d'irregolarità  $q$ , un sistema algebrico  $\{D\}$  si divide per un numero  $\lambda$ , il numero dei sistemi algebrici quozienti non supera il carattere di divisibilità  $\sigma$  di  $F$ , se questi stessi sistemi quozienti sono tutti composti d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti.*

La condizione posta per i sistemi quozienti si può semplificare, basta per es. che siano tutti aritmeticamente effettivi, o più semplicemente, che uno almeno sia a carattere generale, perchè allora di conseguenza lo saranno anche gli altri.

Considerazioni analoghe si hanno sulle divisioni per un numero  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$ ; allora  $\mu$  è uno e i sistemi (55) si riducono al solo sistema  $V_{B_1}$ ; la divisione nel campo virtuale è univoca (teorema XXVIII). Anzi qui si ha che: *condizione necessaria e sufficiente perchè la divisione risulti univoca, anche nel campo effettivo, è che  $V_{B_1}$  contenga un solo sistema algebrico di curve effettive* e questo si verifica certamente se esso è composto d' $\infty^q$  sistemi lineari effettivi. Quindi:

**Teorema XXX.** *Se sopra  $F$  un sistema algebrico  $\{D\}$  si divide per un numero  $\bar{\lambda}$  primo con  $\sigma$ , la divisione risulterà univoca, se almeno una delle curve*

quozienti varia in un sistema algebrico composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti, in particolare quando le curve quozienti sono aritmeticamente effettive o a caratteri generali.

30. *Differenze caratteristiche tra le superficie regolari e le irregolari.* Un caso in cui questi teoremi acquistano una portata generale è quello di  $q = 0$ , cioè delle superficie regolari. Se  $F$  è regolare qualunque suo sistema virtuale si compone d'un solo sistema lineare, anzi coincide con questo e i teoremi dei n.º 26, 27 e 28 si possono interpretare addirittura nel campo effettivo.

Esistono altre superficie i cui sistemi virtuali, o sono completamente virtuali, o contengono un solo sistema algebrico di curve effettive?

Al n.º 25 si è visto che se si considerano curve con punti base assegnati, ciò non vale su nessuna superficie *irregolare* e se non si vogliono considerare punti base assegnati, la proprietà non vale lo stesso su quante si vogliono superficie d'un qualsiasi corpo di superficie irregolari birazionalmente identiche fra di loro.

Quindi possiamo dire, che il fatto che tutti i sistemi virtuali d'una superficie non contengono più d'un sistema algebrico, è caratteristico delle superficie regolari; e non escludendo le considerazioni di sistemi con punti base assegnati abbiamo:

*Teorema XXXI. Condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie sia regolare, è che qualunque suo sistema virtuale non contenga più d'un sistema algebrico generale di curve effettive.*

Questo teorema si può anche esprimere diversamente. Difatti:

Ricordiamo che la sottrazione fra i sistemi virtuali è un'operazione univoca: se avviene allora che sopra una superficie ogni sistema virtuale non contiene più d'un sistema algebrico generale di curve effettive, sopra essa sarà anche univoca la sottrazione fra i sistemi algebrici.

E viceversa. Siccome qualunque sistema virtuale si può considerare come differenza fra un sistema algebrico composto d' $\infty^q$  sistemi lineari distinti ed una opportuna curva, se la sottrazione fra i sistemi algebrici è univoca, esso non può mai contenere più d'un solo sistema algebrico effettivo. Quindi:

*Teorema XXXII. Condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie sia regolare, è che l'operazione di sottrazione, fra i suoi sistemi algebrici, sia univoca.*

Un altro teorema della stessa natura è il seguente:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie sia regolare, è*

---

*che nel campo effettivo, le divisioni per ogni numero primo col carattere di divisibilità  $\sigma$  della superficie stessa, siano univoche (\*).*

Difatti abbiamo visto che affinchè tali divisioni siano univoche bisogna e basta che ogni sistema virtuale non contenga più d'un sistema algebrico effettivo.

Ne segue che *sopra* una superficie, l'univocità di queste divisioni e l'univocità della sottrazione si equivalgono perfettamente; valendo l'una vale di conseguenza l'altra.

Infine ricordando gli esempi e i teoremi dati al § 3 si ha il seguente :

*Teorema XXXIII. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia regolare, è che ogni sua curva appartenga ad uno ed uno solo sistema irriducibile completo.*

O, che è lo stesso, *che tutti i sistemi algebrici completi della superficie siano irriducibili come totalità di curve.*

Nelle considerazioni di questi due ultimi numeri 29 e 30 si può, come alla fine del § 7, ai sistemi algebrici (generali) sostituire i sistemi algebrici a catena, senza per ciò alterare in nessuna maniera i risultati trovati.

Da tutto questo appare ancora di più come la considerazione dei sistemi algebrici e dei sistemi virtuali possa essere interessante nello studio delle superficie.

Pisa, giugno 1914.

---

(\*) Sul cono effettivo di terz'ordine abbiamo visto che tutte le divisioni sono univoche, ma allora consideravamo sistemi senza punti base assegnati. Invece qui non intendiamo affatto escludere tale caso.

---



# Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali derivati per trasformazione di Combescure dai sistemi a curvatura costante.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

---

## PREFAZIONE.

È noto che da ogni sistema triplo di superficie ortogonali la *trasformazione di Combescure* fa nascere una infinità di tali sistemi dipendente da tre funzioni arbitrarie (\*). Tutti questi sistemi hanno a comune col primo, in punti corrispondenti, l'orientazione del triedro principale, ciò che per brevità significheremo dicendo, con DARBOUX, che i sistemi sono fra loro paralleli.

Nella presente Memoria studio in generale la classe dei sistemi paralleli, nel detto senso, ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante, la cui teoria ho sviluppato in una Memoria del 1885 (\*\*\*) e completata poi nel Volume II delle *Lezioni* (Cap. XXVII). I sistemi tripli paralleli a questi, oltre che delle proprietà generali inerenti alla trasformazione di COMBESCURE, godono di interessanti proprietà loro proprie. Una prima classe di queste proprietà dipende da speciali relazioni a cui soddisfano in questo caso le rotazioni  $\beta_{ik}$ , dalle quali risultano delle trasformazioni che permettono di dedurre da un sistema noto della specie una serie infinita (discreta) di sistemi paralleli con soli calcoli di derivazione (\*\*\*).

---

(\*) Cf. DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (Livre III, Chap. V, 2<sup>me</sup> Édition 1910), o anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. II, § 413.

(\*\*) *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten*. Annali di Matematica, Serie 2.<sup>a</sup>, T. XIII.

(\*\*\*) Questi metodi ricorrenti offrono una notevole analogia con quelli dovuti ad EGOROV pei così detti sistemi (*E*) che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni di COMBESCURE (DARBOUX, l. c., livre III, Chap. VIII).

Una seconda classe di trasformazioni dei nostri sistemi si lega alle trasformazioni di BÄCKLUND e loro derivate, pei sistemi a curvatura costante; queste richiedono, in generale, quadrature oppure l'integrazione di un'equazione del tipo di RICCATI. Per sistemi paralleli a quelli a curvatura costante *positiva* le trasformazioni elementari di BÄCKLUND sono soltanto immaginarie; ma componendo opportunamente due tali trasformazioni coniugate immaginarie se ne ottengono delle nuove *reali* per *inviluppi di sfere*, le quali esistono del resto anche nel caso della curvatura negativa.

L'ultima parte della Memoria è dedicata allo studio di una classe particolare notevole dei nostri sistemi che si distinguono per le loro proprietà geometriche. Sono questi i sistemi paralleli *ai sistemi di Weingarten a flessione costante* (\*), che godono della seguente proprietà *caratteristica*: *se si prendono le sfere osculatrici delle curve trasformate delle curve a flessione costante, il centro della sfera descrive un nuovo sistema triplo ortogonale parallelo al sistema di Weingarten complementare.*

In questi sistemi le superficie di due delle serie, che diciamo superficie  $G$ , sono caratterizzate dalla proprietà che sulla superficie luogo dei centri delle sfere osculatrici, per le linee di curvatura di un sistema, alle linee di curvatura della primitiva corrispondono le linee di curvatura. Come superficie isolate, queste superficie  $G$  sono state studiate recentemente da GUICHARD (\*\*), esse hanno a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colle superficie le cui linee di curvatura di un sistema sono curve a flessione costante. Riprendendo le formole date nella mia Memoria del 1885 per queste ultime superficie, si stabiliscono qui, insieme alle trasformazioni delle superficie  $G$  dipendenti dalla trasformazione complementare (considerate anche da GUICHARD), quelle più generali che dipendono dalle trasformazioni di BÄCKLUND.

---

(\*) *Lezioni*, Vol. II, Cap. XXVII, § 441.

(\*\*) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Tome 160 (15 février, 1915).



§ 1.

PROPRIETÀ GENERALI DELLA TRASFORMAZIONE DI COMBESCURE.

Per maggiore chiarezza del seguito riportiamo qui le formole relative alle trasformazioni di COMBESCURE dei sistemi tripli ortogonali.

Un sistema triplo ortogonale  $(u_1, u_2, u_3)$  è perfettamente definito, a meno di movimenti, dalla corrispondente espressione del  $ds^2$  dello spazio:

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2, \quad (1)$$

note che siano cioè le funzioni  $H_1, H_2, H_3$  delle tre variabili  $u_1, u_2, u_3$ . In ogni punto dello spazio l'orientazione del triedro principale dipende essenzialmente dalle sei rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \quad (i \neq k),$$

dove la coppia  $(i, k)$  di indici diversi percorre le sei coppie prese dalla serie 1, 2, 3. Indicando con  $(i, k, l)$  una qualunque permutazione degli indici (1, 2, 3), le rotazioni  $\beta_{ik}$  debbono soddisfare al sistema delle *nove* equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} &= \beta_{il} \beta_{lk}, \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \beta_{li} \beta_{lk} &= 0, \end{aligned}$$

che scriviamo per disteso:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} &= \beta_{13} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} &= \beta_{21} \beta_{13}, & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} &= \beta_{32} \beta_{21}, \\ \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} &= \beta_{23} \beta_{31}, & \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} &= \beta_{31} \beta_{12}, & \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} &= \beta_{12} \beta_{23}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} &= -\beta_{31} \beta_{32}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} &= -\beta_{12} \beta_{13}, \\ & & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} &= -\beta_{33} \beta_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Note le sei rotazioni  $\beta_{ik}$ , l'orientazione del triedro principale risulta determinata, a meno di movimenti, dal sistema di equazioni ai differenziali totali pei nove coseni  $(X_i, Y_i, Z_i)$   $i = 1, 2, 3$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u_i} &= -\beta_{ki} X_k - \beta_{li} X_l, \\ \frac{\partial X_i}{\partial u_k} &= \beta_{ik} X_k, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

dove  $(i, k, l)$  è, come sempre, una qualunque permutazione degli indici 1, 2, 3.

La ricerca degli infiniti sistemi tripli ortogonali (paralleli) colle date rotazioni  $\beta_{ik}$  può effettuarsi in due modi sostanzialmente equivalenti:

a) Il primo modo consiste nel cercare i corrispondenti valori dei coefficienti  $H_i$  nella (1), assoggettati a soddisfare al sistema differenziale

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_i} = \beta_{ik} H_i. \quad (a)$$

b) Il secondo modo si ottiene assumendo invece come incognite le distanze (algebriche)  $W_i$  dell'origine dalle tre facce del triedro principale. Queste tre funzioni  $W_i$  ( $P_i$  nelle notazioni di DARBOUX) debbono soddisfare al sistema aggiunto del sistema (a)

$$\frac{\partial W_k}{\partial u_i} = \beta_{ki} W_i. \quad (a')$$

Scrivendo per disteso il sistema (a) abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} & , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \beta_{31} H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \beta_{12} H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \beta_{32} H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= \beta_{13} H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = \beta_{23} H_2, \quad * \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

e similmente pel sistema (a'):

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \beta_{12} W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13} W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \beta_{21} W_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \beta_{23} W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} &= \beta_{31} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \beta_{32} W_2, \quad * \end{aligned} \right\} \quad (III')$$

In virtù delle *prime sei equazioni* (I), i sistemi (III), (III') hanno la forma lineare canonica completamente integrabile nel senso del BOURLET (\*) e nel loro integrale generale entrano tre funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna (\*\*).

È poi da osservare che se  $(H_1, H_2, H_3)$  è una qualunque terna di soluzioni del sistema (III) e  $(W_1, W_2, W_3)$  una terna di soluzioni del sistema aggiunto (III'); l'espressione  $H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + H_3 W_3 du_3$  risulta un differenziale esatto.

Una terna  $(H_1, H_2, H_3)$  di soluzioni delle (III) individua un sistema triplo ortogonale, colle assegnate rotazioni, pel quale le coordinate  $x, y, z$  di un punto dello spazio si calcolano (noti i coseni  $X_i$ ) con quadrature dalle formole:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = H_3 X_3. \quad (2)$$

Data invece una terna  $(W_1, W_2, W_3)$  di soluzioni delle (III'), si ottiene in termini finiti il corrispondente sistema triplo colle formole

$$x = W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3, \quad \text{ecc.} \quad (3)$$

In generale è da osservarsi che, per la forma lineare omogenea delle (III), (III'), da due o più soluzioni, combinate linearmente con coefficienti costanti, si deducono nuove soluzioni, e per la forma delle (2), (3) le nuove  $x, y, z$  sono le medesime combinazioni lineari delle precedenti. Questo si può esprimere geometricamente al modo di DARBOUX (l. c., pag. 211):

Se in due sistemi tripli ortogonali paralleli si dividono in un rapporto fisso i segmenti  $MM'$  congiungenti le coppie di punti corrispondenti, il punto

(\*) *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées* (Annales de l'École Normale Supérieure, tom. VIII, 3<sup>ème</sup> Série, Suppl.).

(\*\*) Fissato un sistema iniziale  $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$  di valori per le variabili, si può dare ad arbitrio la funzione della  $u_4$  (variabile parametrica) a cui si riduce la  $H_i$  (o la  $W_i$ ) quando le altre due variabili (principali)  $u_k, u_l$  ricevono i valori fissi  $u_k^{(0)}, u_l^{(0)}$ .

di divisione  $P$  descrive un altro sistema parallelo. Medesimamente se per un punto fisso  $O$  dello spazio si conduce un segmento  $OP$  eguale e parallelo ad  $MM'$ , l'estremo  $P$  descrive un nuovo sistema triplo parallelo.

## § 2.

### CASO DEI SISTEMI A CURVATURA COSTANTE.

Per le nostre ricerche è indispensabile riportare qui le formole fondamentali relative ai sistemi tripli ortogonali  $(u_1, u_2, u_3)$  nei quali una delle tre famiglie, p. e., la famiglia  $u_3 = \text{cost.}$  è formata di superficie ciascuna delle quali ha la curvatura costante, variabile però in generale colla superficie della famiglia.

Lasciando da parte il caso ovvio che le  $u_3 = \text{cost.}$  siano superficie di rotazione, distinguiamo i due casi

$$K = -\frac{1}{R^2}, \quad K = +\frac{1}{R^2}$$

della curvatura  $K$  negativa o positiva, dove  $R$  sarà in generale una funzione di  $u_3$ . Quando  $R$  si riduca ad una costante avremo il caso dei *sistemi di Weingarten*.

1.° Caso  $K = -\frac{1}{R^2}$ . Assumendo convenientemente i parametri  $u_1, u_2, u_3$ , il  $ds^2$  dello spazio prende la forma caratteristica

$$ds^2 = \cos^2 \theta du_1^2 + \sin^2 \theta du_2^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2, \quad (4)$$

dove  $R = R(u_3)$ , e la funzione  $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ , insieme alle due

$$A = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}, \quad B = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3},$$

soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2^2} &= \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{R^2}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} &= A \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} = B \operatorname{sen} \theta, \\ \frac{\partial A}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} B + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta}{R} \right), \quad \frac{\partial A}{\partial u_2} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} B, \\ \frac{\partial B}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} A, \quad \frac{\partial B}{\partial u_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} A - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\cos \theta}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

L'integrale generale di questo sistema dipende da *cinque* funzioni arbitrarie.

2.° Caso  $K = +\frac{1}{R^2}$ . In questo caso al  $ds^2$  dello spazio si può dare la forma

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta du_1^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta du_2^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2, \quad (4^*)$$

ed al sistema di equazioni a derivate parziali (IV) è da sostituirsi l'analogo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2^2} &= -\frac{\operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh} \theta}{R^2}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} &= A \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} = B \operatorname{cosh} \theta, \\ \frac{\partial A}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} B - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\operatorname{cosh} \theta}{R} \right), \quad \frac{\partial A}{\partial u_2} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} B, \\ \frac{\partial B}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} A, \quad \frac{\partial B}{\partial u_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} A - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\operatorname{senh} \theta}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}^*)$$

Calcolando le rotazioni  $\beta_{ik}$ , nel caso (4) abbiamo

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{13} = RA, \quad \beta_{23} = RB, \\ \beta_{21} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2}, \quad \beta_{31} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{R}, \quad \beta_{32} = \frac{\cos \theta}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e si osserverà che il sistema (IV) non è altro che quello delle equazioni differenziali (I) cui debbono soddisfare in generale le rotazioni,

Nell'altro caso (4\*) troviamo

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, & \beta_{13} &= R A, & \beta_{23} &= R B, \\ \beta_{21} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2}, & \beta_{31} &= \frac{\cosh \theta}{R}, & \beta_{32} &= \frac{\sinh \theta}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

e nuovamente il sistema differenziale (IV\*) risulta dalle equazioni generali (I).

Ora noi osserviamo che le rotazioni (5) o (5\*), oltre alle equazioni generali (I), soddisfano nel caso attuale a speciali relazioni, le quali, *per la conveniente scelta dei parametri*  $u_1, u_2$ , vengono ad assumere la forma seguente:

a) Nel caso della curvatura negativa queste relazioni si scrivono

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} &= -\beta_{32} \beta_{12}, & \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} &= -\beta_{31} \beta_{21}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

b) Nel secondo caso della curvatura positiva si ha invece

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1} &= \beta_{31} \beta_{12}, & \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2} &= \beta_{31} \beta_{21}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (V^*)$$

Ora andiamo a dimostrare che queste speciali relazioni (V) o (V\*) caratterizzano perfettamente le immagini sferiche dei sistemi tripli ortogonali colle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  a curvatura costante, insieme ad un caso limite in cui queste superficie si riducono a sfere.

### § 3.

LE RELAZIONI (V), (V\*) SONO CARATTERISTICHE.

Cominciamo dall'osservare che, se si aggiungono alle equazioni generali (I) per le rotazioni le tre equazioni (V), o le (V\*), indi si risolve l'intero

sistema rispetto alle seguenti coppie di derivate

$$\left(\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3}\right), \quad \left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3}\right), \quad \left(\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2}\right), \quad \left(\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2}\right), \quad \left(\frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_2}\right),$$

il sistema che si ottiene è lineare canonico completamente integrabile, e sono quindi applicabili i teoremi generali del BOURLLET per l'esistenza degli integrali.

a) Ora suddistinguendo i due casi delle relazioni (V) o (V\*), cominciamo dal caso che siano verificate le prime. Ne seguono le due

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2) = 0,$$

e per ciò  $\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2$  è una funzione della sola  $u_3$  che indichiamo con  $\frac{1}{R^2}$ . Possiamo dunque porre

$$\beta_{31} = -\frac{\text{sen } \theta}{R}, \quad \beta_{32} = \frac{\text{cos } \theta}{R},$$

e dalle due prime (V) avremo

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2}.$$

Ma se prendiamo le due formole del sistema (I)

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31},$$

ne deduciamo

$$\beta_{13} = \frac{R}{\text{cos } \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}, \quad \beta_{23} = \frac{R}{\text{sen } \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3}.$$

I valori delle 6 rotazioni  $\beta_{ik}$  combinano così con quelli dati dalle (5) e, introdotti nelle formole (I), conducono come già si è visto al sistema (IV). Se  $\theta$  contiene  $u_3$  ( $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \neq 0$ ), la formola (4) definisce dunque un sistema triplo ortogonale nel quale le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono pseudosferiche di raggio  $R = R(u_3)$ . Quanto al caso eccezionale in cui si avesse  $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$ , si os-

servi che dalle (IV) risulta allora  $A = 0$ ,  $B = 0$  e per ciò  $\beta_{13} = \beta_{23} = 0$ , indi

$$\frac{\partial H_3}{\partial u_1} = \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = 0.$$

Può quindi farsi  $H_3 = 1$  ed il sistema consta di superficie  $u_3 = \text{cost.}$  fra loro parallele, ed aventi a comune l'immagine sferica con una superficie pseudosferica fissa. È questo un caso ovvio, che in generale trascureremo nel seguito.

*b)* Prendiamo ora l'altro caso che valgano le (V\*), dalle quali deduciamo che  $\beta_{31}^2 - \beta_{32}^2$  sarà funzione della sola  $u_3$ . Qui bisogna suddividere due casi, secondo che l'espressione  $\beta_{31}^2 - \beta_{32}^2$  non si annulla identicamente, ovvero si annulla.

*Sottocaso b<sub>1</sub>*). Se  $\beta_{31}^2 - \beta_{32}^2$  non è zero, possiamo supporre  $\beta_{31}^2 - \beta_{32}^2$  positiva, bastando nel caso opposto scambiare gli indici 1, 2. Essendo allora  $R = R(u_3)$  una funzione della sola  $u_3$ , poniamo

$$\beta_{31} = \frac{\cosh \theta}{R}, \quad \beta_{32} = \frac{\sinh \theta}{R}.$$

Procedendo come in *a)*, ne deduciamo i valori (5\*) per le rotazioni e le conseguenti equazioni (V\*). Dunque se  $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \neq 0$  esisterà un sistema triplo ortogonale (4\*) colle  $u_3 = \text{cost.}$  a curvatura costante positiva e colle assegnate rotazioni. Quando poi fosse  $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$ , la famiglia  $u_3 = \text{cost.}$  conterà di superficie parallele aventi a comune l'immagine sferica con una superficie a curvatura costante positiva.

*Sottocaso b<sub>2</sub>*). Se  $\beta_{31}^2 = \beta_{32}^2$ , si potrà supporre  $\beta_{31} = \beta_{32}$ , poichè se invece  $\beta_{31} = -\beta_{32}$ , basta cangiare il segno di uno dei due parametri  $u_1, u_2$ . Poniamo allora

$$\beta_{31} = \beta_{32} = e^\theta$$

e dalle due prime (V\*) risulterà

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2},$$

indi dalle formole (I)

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31},$$



avremo

$$\beta_{13} = e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}, \quad \beta_{23} = e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3}.$$

Questi valori delle rotazioni, introdotti nelle formole fondamentali (I), danno il seguente sistema differenziale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2^2} &= -e^{2\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \right) &= -e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial u_3} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \cdot e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3}, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \cdot e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3}, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \right) &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \right) &= -e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial u_3} - \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \cdot e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI)}$$

L'integrale generale, che dipende da quattro funzioni arbitrarie, si può in questo caso ottenere subito geometricamente come segue.

Prescindendo dal caso ovvio  $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$  (\*), le (VI) esprimono che il  $ds^2$  dato dalla formola

$$ds^2 = e^{2\theta} (du_1^2 + du_2^2) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2 \quad (6)$$

appartiene allo spazio euclideo. Ma siccome per le curvature principali  $\frac{1}{r_{31}}, \frac{1}{r_{32}}$  delle  $u_3 = \text{cost.}$  si ha

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{r_{32}} = 1,$$

si vede che le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere di raggio = 1. Inversamente si consideri

(\*) Se  $\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0$ , alla formola (6) si sostituisca l'altra

$$ds^2 = e^{2\theta} u_3^2 (du_1^2 + du_2^2) + du_3^2,$$

onde si vede che le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere concentriche, e le  $u_1 = \text{cost.}, u_2 = \text{cost.}$  i coni che proiettano dal centro le linee di un doppio sistema ortogonale isoterma.

un sistema  $\infty^1$  di sfere di egual raggio, i cui centri siano distribuiti sopra una curva arbitraria dello spazio. Tracciato ad arbitrio, sopra una delle sfere, un sistema doppio ortogonale isoterma  $(u_1, u_2)$ , si considerino le  $\infty^2$  traiettorie ortogonali delle sfere, le quali segnano sulle sfere una rappresentazione conforme (precisamente un'affinità circolare di MÖBIUS) (\*); ne risulta così individuato il sistema triplo ortogonale in discorso.

Manifestamente questo sottocaso  $b_2$ ) può riguardarsi come un caso limite del generale  $b_1$ ), colla particolarità che qui le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere. In ogni sistema parallelo le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  hanno rappresentazione isoterma delle linee di curvatura.

Così è dimostrato in effetto che le relazioni (V) o (V\*) per le rotazioni caratterizzano i sistemi tripli ortogonali paralleli ai sistemi di curvatura costante. Nel seguito, per abbreviare, indicheremo tutti questi sistemi come *sistemi* ( $\Sigma$ ), e chiameremo ( $S$ ) i loro sistemi paralleli a curvatura costante.

#### § 4.

##### PRIME TRASFORMAZIONI PER I SISTEMI ( $\Sigma$ ).

Le relazioni (V), o (V\*), che sussistono fra le  $\beta_{ik}$  per un sistema ( $\Sigma$ ), conducono subito a trovare delle *trasformazioni* dei sistemi ( $\Sigma$ ) in altri paralleli fondandosi sulle osservazioni seguenti.

1.° *Se le rotazioni  $\beta_{ik}$  soddisfano le (V), da una terna nota  $(H_1, H_2, H_3)$  di soluzioni delle (III) si passa ad una corrispondente terna  $(W_1, W_2, W_3)$  di soluzioni delle (III\*) colle formole lineari:*

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \beta_{12} H_2. \\ W_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial u_2} + \beta_{21} H_1, \\ W_3 &= \beta_{31} H_1 + \beta_{32} H_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

La verifica è immediata, quando si tenga conto che le  $\beta_{ik}$  soddisfano alle (I) ed alle (V).

(\*) *Lezioni*, Vol. I, § 22.

Similmente, nel caso delle relazioni (V\*), si ha:

2.° Se le rotazioni  $\beta_{ik}$  soddisfano le (V\*) le formole

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial u_1} - \beta_{12} H_2, \\ W_2 &= -\frac{\partial H_2}{\partial u_2} + \beta_{21} H_1, \\ W_3 &= \beta_{31} H_1 - \beta_{32} H_2, \end{aligned} \right\} \quad (7^*)$$

fanno passare da una terna  $(H_1, H_2, H_3)$  di soluzioni delle (III) ad una terna  $(W_1, W_2, W_3)$  di soluzioni delle (III\*).

Dai teoremi generali ricordati al § 1 risulta ora che, se si conosce un sistema  $(\Sigma)$  parallelo al sistema pseudosferico (4) e definito dalle (2) § 1, se ne avrà subito un secondo  $(\Sigma_1)$  colle formole

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_2 \right) X_1 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_1 \right) X_2 + \\ &\quad + \frac{1}{R} (H_2 \cos \theta - H_1 \sin \theta) X_3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

e le altre due analoghe.

Se il sistema  $(\Sigma)$  è parallelo ad un sistema  $(S)$  a curvatura positiva, se ne avrà un secondo  $(\Sigma_1)$  colle altre formole

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_2 \right) X_1 - \left( \frac{\partial H_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_1 \right) X_2 + \\ &\quad + \frac{1}{R} (H_1 \sinh \theta - H_2 \cosh \theta) X_3. \end{aligned} \right\} \quad (8^*)$$

In fine nel caso dei sistemi  $(\Sigma)$  paralleli ai sistemi sferici (6) le formole pel sistema  $(\Sigma_1)$  derivato si scrivono

$$x_1 = \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_2 \right) X_1 - \left( \frac{\partial H_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_1 \right) X_2 + (H_1 - H_2) e^\theta X_3. \quad (8^{**})$$

In ogni caso poi dal sistema  $(\Sigma_1)$  potremo far derivare, nel medesimo modo, un nuovo sistema  $(\Sigma_2)$ , e così via per una catena di sistemi

$$(\Sigma), (\Sigma_1), (\Sigma_2), \dots \quad (9)$$

estendenti all'infinito in un senso.

Osserviamo che, a causa della linearità di queste formole di trasformazione, ad una combinazione lineare di due o più sistemi ( $\Sigma$ ) (cf. § 1) corrisponderà la medesima combinazione lineare dei sistemi trasformati.

Quando si prenda per sistema ( $\Sigma$ ) il sistema ( $S$ ) a curvatura costante le (7), (7\*) dànno

$$W_1 = W_2 = W_3 = 0$$

e in questo caso la trasformazione diventa illusoria, riducendosi ( $\Sigma_1$ ) ad un punto.

### § 5.

#### LE TRASFORMAZIONI INVERSE.

Domandiamo ora se la catena (9) di sistemi ( $\Sigma$ ) può prolungarsi anche nel senso ascendente, ossia:

*Dato un sistema ( $\Sigma$ ), esiste qualche sistema parallelo ( $\Sigma_{-1}$ ), da cui ( $\Sigma$ ) derivi colla trasformazione del paragrafo precedente?*

Intanto è visibile che se un tal sistema ( $\Sigma_{-1}$ ) esiste, ne esistono  $\infty^1$  ottenuti combinando linearmente quel particolare ( $\Sigma_{-1}$ ) col sistema ( $S$ ) a curvatura costante, giacchè il derivato di quest'ultimo si riduce ad un punto.

Per risolvere la questione prendiamo per  $W_1, W_2, W_3$  nelle (7) o (7\*) i valori che competono al sistema ( $\Sigma$ ), e cerchiamo di determinare  $H_1, H_2, H_3$  in guisa da soddisfare a queste e inoltre alle (III) § 1, dopo di che questi valori di  $H_1, H_2, H_3$  determineranno il sistema ( $\Sigma_{-1}$ ) cercato.

Vedremo che, lasciando da parte il caso dei sistemi ( $\Sigma$ ) a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, ciò è sempre possibile, ed  $H_1, H_2, H_3$  si hanno con quadrature.

Per fissare le idee, prendiamo p. es. il caso pseudosferico nel quale le rotazioni  $\beta_{ik}$  hanno valori (5), e quindi  $W_1, W_2, W_3$  sono supposte soddisfare le corrispondenti equazioni (III\*):

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} W_2, & \frac{\partial W_1}{\partial u_3} &= R A W_3, \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} W_2, & * \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} &= R B W_3, \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} &= -\frac{\text{sen } \theta}{R} W_1, & \frac{\partial W_3}{\partial u_2} &= \frac{\cos \theta}{R} W_2, & * \quad . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dobbiamo determinare  $H_1, H_2, H_3$  in guisa da soddisfare alle (III):

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{R} H_3; \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{R} H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= R A H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = R B H_2, \quad * \quad , \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ed insieme anche alle (7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_2 &= W_1, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_1 &= W_2, \\ H_2 \operatorname{cos} \theta - H_1 \operatorname{sen} \theta &= R W_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dall'ultima di queste, derivata rapporto a  $u_3$ , abbiamo per le (11)

$$H_3 = R \frac{\partial}{\partial u_3} (R W_3) + R (H_1 \operatorname{cos} \theta + H_2 \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial \theta}{\partial u_3},$$

cosicchè esprimendo  $H_2, H_3$  per  $H_1$  abbiamo

$$\left. \begin{aligned} H_2 &= H_1 \operatorname{tg} \theta + \frac{R W_3}{\operatorname{cos} \theta}, \\ H_3 &= \frac{R}{\operatorname{cos} \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u_3} (H_1 + R W_3 \operatorname{sen} \theta) + R \frac{\partial}{\partial u_3} (R W_3). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Sostituendo nelle (11), (12), ed osservando le (10), le equazioni per  $H_1$  possono scriversi sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_1}{\operatorname{cos} \theta} \right) &= -\frac{R W_3}{\operatorname{cos}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \frac{W_1}{\operatorname{cos} \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_1}{\operatorname{cos} \theta} \right) &= -\frac{R W_3}{\operatorname{cos}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u_2}, \\ \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_1}{\operatorname{cos} \theta} \right) &= -\frac{R W_3}{\operatorname{cos}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u_3} + R W_3 \frac{\partial \theta}{\partial u_3} - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial u_3} (R W_3), \end{aligned}$$

ed anche, per le (11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_1}{\cos \theta} \right) &= W_1 \cos \theta - \frac{\partial}{\partial u_1} (R W_3 \operatorname{tg} \theta), \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_1}{\cos \theta} \right) &= W_2 \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial}{\partial u_2} (R W_3 \operatorname{tg} \theta), \\ \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_1}{\cos \theta} \right) &= W_3 R \frac{\partial \theta}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial u_3} (R W_3 \operatorname{tg} \theta). \end{aligned} \right\} \quad (13^*)$$

Per l'osservazione generale al § 1, si ha che l'espressione

$$W_1 \cos \theta \, d u_1 + W_2 \operatorname{sen} \theta \, d u_2 + R W_3 \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \, d u_3$$

è il differenziale esatto di una funzione che indicheremo con  $\tau$ , e quindi le condizioni d'integrabilità per le (13\*) sono soddisfatte. Se ne deducono per  $H_1, H_2, H_3$  le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} H_1 &= \tau \cos \theta - R W_3 \operatorname{sen} \theta + C \cos \theta, \\ H_2 &= \tau \operatorname{sen} \theta + R W_3 \cos \theta + C \operatorname{sen} \theta, \\ H_3 &= R \frac{\partial \theta}{\partial u_3} + R \frac{\partial}{\partial u_3} (R W_3) + C R \frac{\partial \theta}{\partial u_3}, \end{aligned}$$

dove  $C$  è una costante arbitraria.

Esistono dunque in effetto  $\infty^1$  sistemi  $(\Sigma_{-1})$  che hanno  $(\Sigma)$  per sistema derivato, e sono composti linearmente con un particolare  $(\Sigma_{-1})$  e col sistema  $(S)$  a curvatura costante corrispondente ai valori

$$\left( \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, R \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right),$$

conforme all'osservazione premessa.

## § 6.

### TRASFORMAZIONI DI BÄCKLUND DEI SISTEMI PSEUDOSFERICI.

Le trasformazioni dei sistemi  $(\Sigma)$  fin qui considerate sono relative a sistemi fra loro paralleli. Ma già nel caso particolare dei sistemi  $(S)$  a curvatura costante noi ne conosciamo trasformazioni di altra natura, per le quali cangia

l'immagine sferica del sistema. Sono queste le trasformazioni di BÄCKLUND e loro derivate, che noi ci proponiamo ora di estendere a tutti i sistemi ( $\Sigma$ ).

Dapprima esaminiamo le trasformazioni elementari di BÄCKLUND, nel qual caso, volendo restare nel campo reale, dovremo supporre che nel sistema ( $S$ ) parallelo le  $u_3 = \text{cost.}$  siano superficie pseudosferiche.

Varranno pertanto le formole ricordate al § 2, in particolare le equazioni fondamentali del sistema (IV). Convieni poi che scriviamo anche per disteso le formole per le derivate dei nove coseni, e cioè le seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_2 + \frac{\sin \theta}{R} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= R A X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_1 - \frac{\cos \theta}{R} X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= R B X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= -\frac{\sin \theta}{R} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= \frac{\cos \theta}{R} X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -R(A X_1 + B X_2). \end{aligned} \right\} (15)$$

Prendiamo ora un altro sistema pseudosferico ( $S'$ ) derivato da ( $S$ ) per una trasformazione  $B_k$  di BÄCKLUND (\*), e corrispondente alla nuova forma del  $ds^2$

$$ds'^2 = \cos^2 \theta' du_1^2 + \sin^2 \theta' du_2^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta'}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2.$$

La funzione  $\theta'$  è legata alla primitiva  $\theta$  dalle formole di trasformazione

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} &= \frac{\cos \theta \sin \theta' + \sin \sigma \sin \theta \cos \theta'}{k}, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial u_2} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} &= -\frac{\sin \theta \cos \theta' + \sin \sigma \cos \theta \cos \theta'}{k}, & (k = R \cos \sigma), \\ \sin \sigma \frac{\partial \theta'}{\partial u_3} + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} &= -k(A \cos \theta' + B \sin \theta'), \end{aligned} \right\} (16)$$

dove l'angolo  $\sigma = \sigma(u_3)$  è legato ad  $R(u_3)$  e alla costante  $k$  dalla relazione

$$k = R \cos \sigma.$$

È qui da ricordare che, salvo il caso in cui con  $R$  costante si ha  $\sin \sigma = 0$ , le (16) formano un sistema completamente integrabile per  $\theta'$ . Il

(\*) *Lezioni*, Vol. II, §§ 433, 434.

caso eccezionale di  $R$  costante e  $\text{sen } \sigma = 0$  si presenta solo per la trasformazione complementare dei sistemi ( $S$ ) di Weingarten. Allora la terza delle (15) diventa l'equazione in termini finiti per  $\theta'$

$$R(A \cos \theta' + B \text{sen } \theta') + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} = 0,$$

e fornisce due valori, in generale, distinti per  $\theta'$  (reali od immaginari), che rendono poi identiche le due prime (16). Così, mentre ogni sistema pseudo-sferico ( $S$ ) ne possiede  $\infty^3$  contigui per trasformazione di BÄCKLUND (poichè nella  $\theta'$  entra, oltre  $k$ , una costante arbitraria), la trasformazione complementare invece è applicabile nel solo caso dei sistemi di WEINGARTEN. Ogni tale sistema ne possiede due contigui per trasformazione complementare, che possono essere reali distinti, immaginari coniugati, o coincidenti, la quale ultima cosa avviene nel caso particolarmente interessante dei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante.

In generale poi i coseni  $X'_i$  delle direzioni principali nel sistema trasformato ( $S'$ ) si esprimono pei primitivi  $X_i$  colle formole di sostituzione ortogonale:

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3, \\ X'_2 &= \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3, \\ X'_3 &= \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

coi seguenti valori pei coefficienti:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \theta \cos \theta' - \text{sen } \sigma \text{sen } \theta \text{sen } \theta', \\ \alpha_{12} &= \cos \theta \text{sen } \theta' + \text{sen } \sigma \text{sen } \theta \cos \theta', & \alpha_{13} &= \cos \sigma \text{sen } \theta, \\ \alpha_{21} &= \text{sen } \theta \cos \theta' + \text{sen } \sigma \cos \theta \text{sen } \theta', \\ \alpha_{22} &= \text{sen } \theta \text{sen } \theta' - \text{sen } \sigma \cos \theta \cos \theta', & \alpha_{23} &= -\cos \sigma \cos \theta, \\ \alpha_{31} &= -\cos \sigma \text{sen } \theta' & \alpha_{32} &= \cos \sigma \cos \theta', & \alpha_{33} &= -\text{sen } \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Sono infine da notarsi le formole che danno pel sistema ( $S'$ ) le quantità  $A'$ ,  $B'$  analoghe alle  $A$ ,  $B$  pel sistema ( $S$ ), cioè:

$$\left. \begin{aligned} A' &= \alpha_{23} A - \alpha_{21} B + \frac{\cos \sigma \cos \theta}{R} \frac{\partial \theta'}{\partial u_3} + \frac{\text{sen } \theta}{R} \frac{d\sigma}{d u_3}, \\ B' &= -\alpha_{13} A + \alpha_{11} B + \frac{\cos \sigma \text{sen } \theta}{R} \frac{\partial \theta'}{\partial u_3} - \frac{\cos \theta}{R} \frac{d\sigma}{d u_3}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



§ 7.

TRASFORMAZIONE DIRETTA DI BÄCKLUND PEI SISTEMI ( $\Sigma$ ).

Prendiamo ora un qualunque sistema ( $\Sigma$ ) parallelo al sistema pseudosferico ( $S$ ) e definito dalle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = H_3 X_3, \quad (20)$$

dove ( $H_1, H_2, H_3$ ) sia una terna di soluzioni del corrispondente sistema differenziale (III) § 1:

$$\left. \begin{aligned} * \quad & , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = -\frac{\text{sen } \theta}{R} H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_1, \quad & * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \frac{\text{cos } \theta}{R} H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = R A H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = R B H_2, \quad & * \quad . \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Similmente per un sistema ( $\Sigma'$ ), parallelo al sistema pseudosferico trasformato ( $S'$ ), avremo

$$\frac{\partial x'}{\partial u_1} = H'_1 X'_1, \quad \frac{\partial x'}{\partial u_2} = H'_2 X'_2, \quad \frac{\partial x'}{\partial u_3} = H'_3 X'_3, \quad (20')$$

dove ( $H'_1, H'_2, H'_3$ ) soddisferanno al sistema analogo al (21):

$$\left. \begin{aligned} * \quad & , \quad \frac{\partial H'_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial \theta'}{\partial u_2} H'_2, \quad \frac{\partial H'_1}{\partial u_3} = -\frac{\text{sen } \theta'}{R} H'_3, \\ \frac{\partial H'_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \theta'}{\partial u_1} H'_1, \quad & * \quad , \quad \frac{\partial H'_2}{\partial u_3} = \frac{\text{cos } \theta'}{R} H'_3, \\ \frac{\partial H'_3}{\partial u_1} = R A' H'_1, \quad \frac{\partial H'_3}{\partial u_2} = R B' H'_2, \quad & * \quad . \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Le trasformazioni dei sistemi ( $\Sigma$ ) in sistemi ( $\Sigma'$ ), che andiamo ora a stabilire, equivalgono analiticamente a formole *lineari* di passaggio dalle terne ( $H_1, H_2, H_3$ ) di soluzioni delle (21) a corrispondenti terne ( $H'_1, H'_2, H'_3$ ) di

soluzioni delle (21'), e viceversa. Stabiliamo la prima trasformazione (diretta) di BÄCKLUND colla costruzione seguente, la quale per le superficie isolate trasformate di COMBESURE delle pseudosferiche combina in sostanza colla trasformazione già considerata da EISENHART. Per ogni punto  $P \equiv (u_1, u_2, u_3)$  del sistema  $(\Sigma)$  consideriamo il piano  $\pi$  parallelo al piano tangente nel punto  $(u_1, u_2, u_3)$  alla superficie  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema pseudosferico trasformato. Se spostiamo il punto  $P$  sopra una superficie  $u_3 = \text{cost.}$  in  $(\Sigma)$ , il piano  $\pi$  involupa una superficie che ha la stessa immagine sferica delle  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema pseudosferico  $(S')$  trasformato (EISENHART): *il punto  $P' \equiv (u_1, u_2, u_3)$  di contatto di  $\pi$  colla detta superficie descrive, al variare di  $u_1, u_2, u_3$ , un sistema  $(\Sigma')$  parallelo al sistema pseudosferico  $(S')$ .*

Dimostriamo queste proprietà scrivendo le coordinate  $x', y', z'$  del punto  $P'$  di contatto sotto la forma

$$x' = x + \lambda X'_1 + \mu X'_2, \text{ ecc.}, \quad (22)$$

col determinare i moltiplicatori  $\lambda, \mu$  dalle condizioni

$$S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u_1} = 0, \quad S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u_2} = 0. \quad (23)$$

Per questo osserviamo in primo luogo che si ha dalle (17), (20)

$$S X'_3 \frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 S X'_3 X_1 = -H_1 \cos \sigma \sin \theta',$$

$$S X'_3 \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 S X'_3 X_2 = H_2 \cos \sigma \sin \theta',$$

e d'altra parte dalle (15)

$$S X_3 \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = \frac{\sin \theta}{R}, \quad S X_3 \frac{\partial X_2}{\partial u_1} = 0,$$

$$S X_3 \frac{\partial X_1}{\partial u_2} = 0, \quad S X_3 \frac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\frac{\cos \theta}{R},$$

onde sussistono anche le analoghe

$$S X'_3 \frac{\partial X'_1}{\partial u_1} = \frac{\sin \theta'}{R}, \quad S X'_3 \frac{\partial X'_2}{\partial u_1} = 0,$$

$$S X'_3 \frac{\partial X'_1}{\partial u_2} = 0, \quad S X'_3 \frac{\partial X'_2}{\partial u_2} = -\frac{\cos \theta'}{R}.$$

Sostituendo questi valori nelle (23), troviamo

$$\lambda = k H_1, \quad \mu = k H_2,$$

sicchè le (22) si scrivono definitivamente

$$x' = x + k (H_1 X'_1 + H_2 X'_2). \quad (24)$$

Se ora deriviamo queste rapporto ad  $u_1, u_2, u_3$ , osservando le (20) e le formole (15) scritte per ( $S'$ ), si trova subito che valgono in effetto le (20'), ove si attribuiscono ad  $H'_1, H'_2, H'_3$  i valori seguenti

$$\left. \begin{aligned} H'_1 &= k \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \alpha_{11} H_1 - k \frac{\partial \theta'}{\partial u_2} H_2, \\ H'_2 &= k \frac{\partial H_2}{\partial u_2} + k \frac{\partial \theta'}{\partial u_1} H_1 + \alpha_{22} H_2, \\ H'_3 &= k R (A' H_1 + B' H_2) - \text{sen } \sigma H_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Dunque le (24) definiscono in effetto un sistema ( $\Sigma'$ ) parallelo al sistema pseudosferico, e le formole (25) fanno passare da una terna ( $H_1, H_2, H_3$ ) di soluzioni delle (21) ad una terna ( $H'_1, H'_2, H'_3$ ) di soluzioni delle (21').

Naturalmente quando ( $\Sigma$ ) coincida con ( $S$ ) anche ( $\Sigma'$ ) coinciderà con ( $S'$ ), come si verifica subito colle formole precedenti.

## § 8.

### LEGAME COLLE TRASFORMAZIONI DEL § 4.

Se si ripete sul nuovo sistema ( $\Sigma'$ ) la costruzione stessa del paragrafo precedente conducendo pei punti di ( $\Sigma'$ ) i piani paralleli ai piani tangenti alle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema ( $S$ ), o ciò che è lo stesso in ( $\Sigma$ ), questi piani involupperanno un nuovo sistema ( $\Sigma''$ ) parallelo ad ( $S$ ). Così continuando otterremo una catena infinita di sistemi ( $\Sigma$ )

$$(\Sigma), (\Sigma'), (\Sigma''), \dots$$

alternativamente paralleli ai sistemi pseudosferici ( $S$ ), ( $S'$ ).

Ora se consideriamo p. es. la serie di quelli di posto impari

$$(\Sigma), (\Sigma'), (\Sigma''), \dots, \quad (26)$$

tutti paralleli ad  $(S)$ , mostriamo che si presenta questa notevole circostanza:

*La serie (26) dipende solo dal sistema  $(\Sigma)$  e dalla costante  $k$ ; essa viene a coincidere essenzialmente colla serie ottenuta nelle trasformazioni del § 4.*

Per questo calcoliamo le coordinate  $(x'', y'', z'')$  di un punto di  $(\Sigma'')$  colle formole analoghe alle (22)

$$x'' = x' + l X_1 + m X_2,$$

determinando i moltiplicatori  $l, m$  dalle condizioni

$$S X_3 \frac{\partial x''}{\partial u_1} = 0, \quad S X_3 \frac{\partial x''}{\partial u_2} = 0.$$

Procedendo come al § 7, troviamo

$$l = -k H'_1, \quad m = -k H'_2,$$

onde avremo per le (24)

$$x'' = x + k H_1 (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3) + k H_2 (\alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3) - \\ - k H'_1 X_1 - k H'_2 X_2.$$

Ponendo mente alle (25) ed alle (16) e (18), troviamo le formole definitive

$$x'' = x - k^2 \left\{ \left( \frac{\partial H_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_2 \right) X_1 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_1 \right) X_2 + \right. \\ \left. + \frac{l}{R} (H_2 \cos \theta - H_1 \sin \theta) X_3 \right\}. \quad (27)$$

dalle quali è sparita ogni traccia della particolare soluzione  $\theta'$  delle (16) che definiva il sistema trasformato  $(S')$ . Se paragoniamo queste formole colle (8) § 4, che definivano quel sistema trasformato  $(\Sigma_1)$ , le (27) si scrivono semplicemente

$$x'' = x - k^2 x_1,$$

onde  $(\Sigma'')$  è una combinazione lineare di  $(\Sigma)$   $(\Sigma_1)$ . Così è provato quanto sopra abbiamo asserito per la serie (26), e lo stesso vale naturalmente per l'altra

dei sistemi

$$(\Sigma), (\Sigma''), \dots$$

tutti paralleli al sistema  $(S')$ .

### § 9.

#### LE TRASFORMAZIONI INVERSE DI BÄCKLUND.

Per invertire le trasformazioni dei sistemi  $(\Sigma)$  sopra trovate conviene risolvere la questione seguente :

*Dato un qualunque sistema  $(\Sigma)$  parallelo ad  $(S)$ , esistono sistemi  $(\bar{\Sigma})$  paralleli a  $(S')$  che abbiano  $(\Sigma)$  per sistema derivato secondo la costruzione del paragrafo precedente?*

Si risolverà la questione in senso affermativo, e si troverà anzi che esistono  $\infty^2$  tali sistemi  $(\bar{\Sigma})$ , escludendo per altro il caso che  $(S)$ ,  $(S')$  siano due sistemi di WEINGARTEN complementari, caso che nella trasformazione diretta del § 8 non figurava come eccezionale.

Nelle nostre ipotesi, il piano tangente in un punto  $P$  di  $(\Sigma)$  alla  $u_3 = \text{cost.}$  dovrà contenere il punto corrispondente  $\bar{P}$  del sistema  $(\bar{\Sigma})$ . Pertanto le coordinate  $x, \bar{y}, \bar{z}$  di  $\bar{P}$  saranno date da formole del tipo

$$\bar{x} = x + l X_1 + m X_2, \tag{28}$$

e i moltiplicatori  $l, m$  saranno da determinarsi in guisa che sussistano le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1} &= H_1 X'_1 = H_1 (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3), \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_2} &= H_2 X'_2 = H_2 (\alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3), \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial u_3} &= \bar{H}_3 X'_3 = H_3 (\alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3), \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

per convenienti valori di  $\bar{H}_1, H_2, H_3$ .

Derivando le (28) troviamo

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \left( \frac{\partial l}{\partial u_1} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} m + H_1 \right) X_1 + \left( \frac{\partial m}{\partial u_1} + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} l \right) X_2 + \frac{l \operatorname{sen} \theta}{R} X_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_2} = \left( \frac{\partial l}{\partial u_2} - \frac{\partial \theta}{\partial u_1} m \right) X_1 + \left( \frac{\partial m}{\partial u_2} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} l + H_2 \right) X_2 - \frac{l \operatorname{cos} \theta}{R} X_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_3} = \frac{\partial l}{\partial u_3} X_1 + \frac{\partial m}{\partial u_3} X_2 + \left\{ R(A l + B m) + H_3 \right\} X_3,$$

e paragonando colle (29), dal confronto dei termini in  $X_3$  risulta

$$\bar{H}_1 = \frac{l}{k}, \quad \bar{H}_2 = \frac{m}{k}, \quad \bar{H}_3 = -\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \left\{ R(A l + B m) + H_3 \right\}. \quad (30)$$

Successivamente, confrontando i termini in  $X_1$ ,  $X_2$ , troviamo per le incognite  $l$ ,  $m$  il seguente sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u_1} &= \frac{\alpha_{11}}{k} l + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} m - H_1, & \frac{\partial l}{\partial u_2} &= \left( \frac{\alpha_{21}}{k} + \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \right) m, \\ & & \frac{\partial l}{\partial u_3} &= \cot \sigma \operatorname{sen} \theta' \left\{ R(A l + B m) + H_3 \right\}, \\ \frac{\partial m}{\partial u_1} &= \left( \frac{\alpha_{12}}{k} - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \right) l, & \frac{\partial m}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} l + \frac{\alpha_{22}}{k} m - H_2, \\ & & \frac{\partial m}{\partial u_3} &= -\cot \sigma \operatorname{cos} \theta' \left\{ R(A l + B m) + H_3 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Le condizioni d'integrabilità per questo sistema sono identicamente soddisfatte, come si può verificare; esso ammette per ciò  $\infty^2$  soluzioni, potendosi fissare ad arbitrio, per valori iniziali delle variabili  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , i valori delle incognite  $l$ ,  $m$ .

Quanto alla integrazione del sistema (31), si osservi che, essendo lineare in due funzioni incognite, può riportarsi, col metodo di D'ALEMBERT ad un'equazione differenziale ordinaria del tipo di RICCATI.

§ 10.

SISTEMI  $(\Sigma_0)$  CON UN SISTEMA DERIVATO  $(\Sigma)$  RIDOTTO AD UN PUNTO.

Tutto ciò che abbiamo detto sopra sussiste anche se si suppone che il sistema  $(\Sigma)$  si riduca ad un punto, per il che basta porre

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0,$$

ed esisteranno ancora i sistemi  $(\bar{\Sigma})$  corrispondenti, che qui indicheremo con  $(\Sigma_0)$ , e si ridurranno (prescindendo da omotetie) ad una semplice infinità.

Il sistema differenziale (31) si riduce allora omogeneo ed è manifesto che gli  $\infty^2$  sistemi  $(\bar{\Sigma})$  generali del § 9 si compongono linearmente con uno di essi e coi sistemi  $(\Sigma_0)$ . Ora andiamo a dimostrare che:

*Nei sistemi  $(\Sigma_0)$ , con sistema derivato  $(\Sigma)$  ridotto ad un punto, le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono integrali di un'equazione del secondo ordine della forma Ampère-Weingarten.*

Ponendo nelle formole del paragrafo precedente  $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ , pei coefficienti  $H_1, H_2, \bar{H}_3$  degli attuali sistemi  $(\bar{\Sigma})$  risulta

$$\bar{H}_1 = \frac{l}{k}, \quad \bar{H}_2 = \frac{m}{k}, \quad \bar{H}_3 = -\frac{R}{\text{sen } \sigma} (A l + B m). \quad (32)$$

Calcolando di qui le curvature principali  $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$  delle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  dalle formole

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{\bar{H}_2 \bar{H}_3} \frac{\partial H_2}{\partial u_3},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{\bar{H}_3 \bar{H}_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_3},$$

ne deduciamo per le (31), (32)

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos \sigma \cos \theta'}{m}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{\cos \sigma \text{sen } \theta'}{l},$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= \frac{m \operatorname{sen} \theta' - l \operatorname{cos} \theta'}{\operatorname{cos} \sigma \operatorname{sen} \theta' \operatorname{cos} \theta'} \\ \rho_1 \rho_2 &= -\frac{l m}{\operatorname{cos}^2 \sigma \operatorname{sen} \theta' \operatorname{cos} \theta'} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Introducendo ora le notazioni di WEINGARTEN, indichiamo con  $p$  la distanza (algebraica) dell'origine del piano tangente alla  $u_3 = \operatorname{cost.}$  in  $(\bar{\Sigma}_0)$ , e con  $2q$  il quadrato della distanza dal punto di contatto. Abbiamo

$$\begin{aligned} p &= S X_3 (l X_1 + m X_2) = \operatorname{cos} \sigma (m \operatorname{cos} \theta' - l \operatorname{sen} \theta'), \\ 2q &= S (l X_1 + m X_2)^2 = l^2 + m^2. \end{aligned}$$

Ed ora formando l'espressione

$$2q - p(\rho_1 + \rho_2),$$

troviamo subito per le (33)

$$2q - p(\rho_1 + \rho_2) + \operatorname{cos}^2 \sigma \cdot \rho_1 \rho_2 = 0. \quad (34)$$

È questa l'annunciata equazione della forma d'AMPÈRE-WEINGARTEN a cui soddisfano le  $u_3 = \operatorname{cost.}$  nel sistema  $(\Sigma_0)$ . Si osserverà che nel caso di  $\sigma$  costante (sistemi di WEINGARTEN) l'equazione è la stessa per tutte le superficie della famiglia.

Aggiungiamo che un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto all'origine cangia un sistema  $(\bar{\Sigma}_0)$  in un altro; e i due sistemi pseudosferici paralleli a questi sono dedotti l'uno dall'altro con una trasformazione per involupi di sfere, di cui ora andiamo a parlare.

## § 11.

### TRASFORMAZIONI PER INVILUPPI DI SFERE DEI SISTEMI $(S)$ .

Fino ad ora, nello studio delle trasformazioni di BÄCKLUND e loro inverse pei sistemi  $(\Sigma)$ , ci siamo limitati al caso che i loro sistemi  $(S)$  paralleli fossero a curvatura costante negativa, perchè soltanto in questo caso si hanno



trasformazioni di BÄCKLUND *reali*. Ma è noto che in ogni caso possono ottenersi di tali trasformazioni reali combinando fra loro due trasformazioni opposte di BÄCKLUND, o reali o coniugate immaginarie (\*). In queste trasformazioni due superficie a curvatura costante corrispondenti sono le due falde di un involuppo di sfere, le cui superficie luogo dei centri sono applicabili sopra una quadrica rotonda (reale od immaginaria).

Considereremo il caso più interessante della curvatura positiva, ove mancano le trasformazioni *reali* di BÄCKLUND, e ci limiteremo per semplicità al caso dei sistemi di WEINGARTEN ove  $R$  è una costante assoluta, che porremo  $= 1$ . Abbiassi dunque un sistema ( $S$ ) di WEINGARTEN a curvatura positiva  $K = + 1$ , corrispondente alle formole (4\*), (IV\*) del § 2, ove faremo  $R = 1$ . Colle solite notazioni avremo pel sistema ( $S$ ) le formole fondamentali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} &= \sinh \theta X_1, & \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \cosh \theta X_2, & \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_3} X_3, \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_2 - \cosh \theta X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= A X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_1 - \sinh \theta X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= B X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= \cosh \theta X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= \sinh \theta X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -(A X_1 + B X_2). \end{aligned} \right\} (35)$$

Sia ora ( $\bar{S}$ ) un altro sistema di WEINGARTEN a curvatura  $+ 1$  derivato da  $S$  con una delle dette trasformazioni *per involuppi di sfere*. Le formole di trasformazione dipendono da un sistema differenziale lineare in quattro funzioni incognite

$$\Lambda, M, \Phi, W$$

della forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} &= \sinh \theta \Lambda, & \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} &= \cosh \theta M, & \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_3} W, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} M + c \sinh \theta \Phi - (c + 1) \cosh \theta W, & \frac{\partial \Lambda}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} M, & \frac{\partial \Lambda}{\partial u_3} &= A W, \\ \frac{\partial M}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \Lambda, & \frac{\partial M}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} \Lambda + c \cosh \theta \Phi - (c + 1) \sinh \theta W, & \frac{\partial M}{\partial u_3} &= B W, \\ \frac{\partial W}{\partial u_1} &= \cosh \theta \Lambda, & \frac{\partial W}{\partial u_2} &= \sinh \theta M, & (c + 1) \frac{\partial W}{\partial u_3} &= c \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi - A \Lambda - B M, \end{aligned} \right\} (36)$$

(\*) *Lezioni*, Vol. II, § 438.

dove  $c$  è una costante arbitraria, tale però che sia

$$c(c+1) > 0.$$

Il sistema (36) è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\Lambda^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1)W^2 = \text{cost.}$$

Per ottenere una delle nostre trasformazioni occorre disporre dei valori iniziali di  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $\Phi$ ,  $W$  per modo da annullare la costante del secondo membro, onde avremo

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 = c(\Phi^2 - W^2). \quad (37)$$

Scelta una tale quaderna di soluzioni, il sistema trasformato ( $\bar{S}$ ) è dato dalle formole:

$$\bar{x} = x + \frac{2\Phi}{c(W^2 - \Phi^2)} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3). \quad (38)$$

Le normali in due punti corrispondenti alle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  nei sistemi ( $S$ ), ( $\bar{S}$ ) s'incontrano nel punto  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$  di coordinate

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \quad \text{ecc.}, \quad (39)$$

e questo è il centro della sfera che tocca le due superficie in punti corrispondenti.

In fine, se si indicano con ( $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{X}_3$ ) i coseni delle direzioni principali pel sistema ( $\bar{S}$ ), si hanno le formole

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_1 &= X_1 + \frac{2\Lambda}{c(W^2 - \Phi^2)} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3), \\ \bar{X}_2 &= X_2 + \frac{2M}{c(W^2 - \Phi^2)} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3), \\ \bar{X}_3 &= X_3 + \frac{2W}{c(W^2 - \Phi^2)} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3). \end{aligned} \right\} \quad (40).$$

§ 12.

TRASFORMAZIONI PER INVILUPPI DI SFERE DEI SISTEMI ( $\Sigma$ ).

Prendiamo ora un qualunque sistema ( $\Sigma$ ) parallelo al sistema ( $S$ ) di WEINGARTEN a curvatura positiva, e sia

$$d s^2 = H_1^2 d u_1^2 + H_2^2 d u_2^2 + H_3^2 d u_3^2$$

la corrispondente forma dell'elemento lineare dello spazio.

Indicando con  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate di un punto generico di ( $\Sigma$ ), avremo

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1} = H_1 X_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_2} = H_2 X_2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_3} = H_3 X_3,$$

dove  $H_1, H_2, H_3$  sono assoggettate a soddisfare al corrispondente sistema (III) § 1

$$\left. \begin{aligned} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = \cosh \theta H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_1, \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = \sinh \theta H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= A H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = B H_2, \quad * \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Ciò premesso, domandiamo di trovare un sistema ( $\bar{\Sigma}$ ) parallelo al sistema ( $\bar{S}$ ), che derivi da ( $\Sigma$ ), come ( $\bar{S}$ ) da ( $S$ ), con una trasformazione per inviluppo di sfere. Dette  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  le coordinate di un punto di ( $\bar{\Sigma}$ ), dovranno intanto sussistere le proporzioni

$$\bar{\xi} - \xi : \bar{\eta} - \eta : \bar{\zeta} - \zeta = \bar{x} - x : \bar{y} - y : \bar{z} - z,$$

onde per le (38) potremo porre

$$\bar{\xi} = \xi + \tau (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3), \quad (42)$$

e la funzione incognita  $\tau$  sarà da determinarsi in guisa che sussistano le

formole

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_1} = \bar{H}_1 \bar{X}_1, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_2} = \bar{H}_2 \bar{X}_2, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_3} = \bar{H}_3 \bar{X}_3, \quad (43)$$

per convenienti valori di  $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ .

Ora derivando l'espressione

$$\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3,$$

troviamo per le (35), (36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3) &= c (\sinh \theta \Phi - \cosh \theta W) X_1, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3) &= c (\cosh \theta \Phi - \sinh \theta W) X_2, \\ \frac{\partial}{\partial u_3} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3) &= c \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi - \frac{\partial W}{\partial u_3} \right) X_3, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

e ne risultano le formole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_1} &= \left\{ c \tau (\sinh \theta \Phi - \cosh \theta W) + H_1 \right\} X_1 + \frac{\partial \tau}{\partial u_1} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3), \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_2} &= \left\{ c \tau (\cosh \theta \Phi - \sinh \theta W) + H_2 \right\} X_2 + \frac{\partial \tau}{\partial u_2} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3), \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u_3} &= \left\{ c \tau \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi - \frac{\partial W}{\partial u_3} \right) + H_3 \right\} X_3 + \frac{\partial \tau}{\partial u_3} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3). \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori a sinistra nelle (43) e a destra i valori (40) di  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ , abbiamo in primo luogo le formole

$$\bar{H}_1 = \frac{c(W^2 - \Phi^2)}{2\Lambda} \frac{\partial \tau}{\partial u_1}, \quad \bar{H}_2 = \frac{c(W^2 - \Phi^2)}{2M} \frac{\partial \tau}{\partial u_2}, \quad \bar{H}_3 = \frac{c(W^2 - \Phi^2)}{2W} \frac{\partial \tau}{\partial u_3},$$

ed in secondo luogo un sistema differenziale per  $\tau$  che, osservando le (36), può scriversi

$$\begin{aligned} c \frac{\partial}{\partial u_1} \left[ \tau (W^2 - \Phi^2) \right] &= 2 H_1 \Lambda, & c \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \tau (W^2 - \Phi^2) \right] &= 2 H_2 M, \\ & & c \frac{\partial}{\partial u_3} \left[ \tau (W^2 - \Phi^2) \right] &= 2 H_3 W. \end{aligned}$$

Ora, per le (36) stesse, l'espressione

$$H_1 \Lambda du_1 + H_2 M du_2 + H_3 W du_3$$

è un differenziale esatto, onde ponendo

$$T = \int (H_1 \Lambda du_1 + H_2 M du_2 + H_3 W du_3) \quad (45)$$

avremo pel valore cercato di  $\tau$

$$\tau = \frac{2T}{c(W^2 - \Phi^2)} + \frac{a}{W^2 - \Phi^2}, \quad (46)$$

con  $a$  costante arbitraria. Viceversa, col valore (46) di  $\tau$ , tutte le nostre condizioni sono soddisfatte:

*Ogni sistema ( $\Sigma$ ) parallelo al sistema ( $S$ ) di WEINGARTEN ammette  $\infty^1$  trasformazioni per involuppi di sfere in sistemi ( $\bar{\Sigma}$ ) paralleli al sistema trasformato ( $S$ ).*

In particolare è lecito far coincidere ( $\Sigma$ ) con ( $S$ ) ponendo

$$H_1 = \sinh \theta, \quad H_2 = \cosh \theta, \quad H_3 = \frac{\partial \theta}{\partial u_3},$$

ed allora si può prendere  $T = \Phi$ , onde le formole (42) pel sistema trasformato diventano

$$\bar{\xi} = x + \frac{2\Phi + ac}{c(W^2 - \Phi^2)} (\Lambda X_1 + M X_2 + W X_3).$$

È manifesto che per  $a=0$  si ha così il sistema ( $\bar{S}$ ) di WEINGARTEN trasformato e per gli altri valori di  $a$  sistemi ( $\bar{\Sigma}$ ) paralleli a questo.

### § 13.

#### UNA CLASSE PARTICOLARE DI SISTEMI ( $\Sigma_0$ ).

Risulta dalle formole (44) che se si pone

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \Lambda X_1 + M X_2 + W X_3, \\ y_0 &= \Lambda Y_1 + M Y_2 + W Y_3, \\ z_0 &= \Lambda Z_1 + M Z_2 + W Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

il punto di coordinate  $x_0, y_0, z_0$  descrive un particolare sistema  $(\Sigma_0)$  parallelo al sistema  $(S)$  di WEINGARTEN. Dimostriamo che questi sistemi  $(\Sigma_0)$  danno, pel caso della curvatura positiva, la classe analoga a quella considerata nel § 10 per il caso pseudosferico, essendo che le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  in  $(\Sigma_0)$  sono integrali di una medesima equazione del secondo ordine della forma di AMPÈRE-WEINGARTEN.

Secondo le formole (44), i valori di  $H_1, H_2, H_3$  pei sistemi  $(\Sigma_0)$  sono dati da

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= c (\sinh \theta \Phi - \cosh \theta W), & H_2 &= c (\cosh \theta \Phi - \sinh \theta W), \\ H_3 &= c \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi - \frac{\partial W}{\partial u_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

e calcolando i raggi principali di curvatura  $\rho_1, \rho_2$  delle  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema  $(\Sigma_0)$ , p. e. dalle formole

$$\frac{\partial x_0}{\partial u_1} = \rho_2 \frac{\partial X_3}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial u_2} = \rho_1 \frac{\partial X_3}{\partial u_2},$$

abbiamo

$$\rho_1 = c (\coth \theta \Phi - W),$$

$$\rho_2 = c (\tanh \theta \Phi - W)$$

e perciò

$$\rho_1 \rho_2 + c W (\rho_1 + \rho_2) = c^2 (\Phi^2 - W^2).$$

Ma, colle notazioni di WEINGARTEN già ricordate al § 10, abbiamo

$$p = S X_3 x_0 = W,$$

$$2q = S x_0^2 = c (\Phi^2 - W^2),$$

onde risulta:

*Nel sistema  $(\Sigma_0)$  le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono tutte integrali della equazione d'Ampère-Weingarten*

$$2q - p(\rho_1 + \rho_2) - \frac{1}{c} \rho_1 \rho_2 = 0.$$

Ricerchiamo ora che cosa diventano le trasformazioni del paragrafo precedente nel caso attuale. Se nella (45) introduciamo per  $H_1, H_2, H_3$  i valori (48), ne viene

$$T = c \int (\Phi d\Phi - W dW),$$

onde si può prendere

$$T = \frac{c}{2} (\Phi^2 - W^2),$$

e per ciò

$$\tau + 1 = \frac{a}{W^2 - \Phi^2}.$$

Allora le formole (42) pel sistema trasformato ove per  $\xi, \eta, \zeta$  si pongono i valori  $x_0, y_0, z_0$  diventano

$$x_0 = \frac{a}{W^2 - \Phi^2} x_0, \quad y_0 = \frac{a}{W^2 - \Phi^2} y_0, \quad \bar{z}_0 = \frac{a}{W^2 - \Phi^2} z_0,$$

e siccome

$$S x_0^2 = c (\Phi^2 - W^2), \quad S \bar{x}_0^2 = \frac{a}{(\Phi^2 - W^2)^2},$$

si vede che il nuovo sistema ( $\bar{\Sigma}_0$ ) si ottiene dal primitivo ( $\Sigma_0$ ) con un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto alle sfere di raggio  $= ac$  col centro nell'origine.

#### § 14.

##### I SISTEMI ( $\Sigma$ ) A RAPPRESENTAZIONE ISOTERMA DELLE LINEE DI CURVATURA.

Abbiamo già visto, al § 3 (sottocaso  $b_2$ )), che accanto ai sistemi ( $\Sigma$ ) paralleli ai sistemi ( $S$ ) a curvatura costante positiva, sono da collocarsi i sistemi ( $\Sigma$ ) paralleli ai sistemi sferici ( $u_1, u_2, u_3$ ) nei quali le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere e il sistema ortogonale ( $u_1, u_2$ ) sopra ogni sfera è isoterma. Essi ammettono le trasformazioni studiate ai §§ 4, 5, e, come ora proveremo, ammettono anche trasformazioni per involucri di sfere affatto analoghe a quelle del § 12.

Prima però vogliamo caratterizzare geometricamente gli attuali sistemi ( $\Sigma$ ) rilevandone le seguenti proprietà: 1.<sup>a</sup> le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura; 2.<sup>a</sup> le immagini sferiche delle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono tutte in rappresentazione conforme. Diciamo che queste proprietà sono affatto caratteristiche, ed anzi più in generale:

*Se un sistema triplo ortogonale ( $u_1, u_2, u_3$ ), riguardando come punti cor-*

rispondenti sulle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  quelli d'incontro alle loro traiettorie ortogonali ( $u_3$ ), le immagini sferiche sono sempre in rappresentazione conforme, esiste un sistema triplo parallelo nel quale le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere.

Che ogni sistema triplo ortogonale parallelo ad un sistema con una serie  $u_3 = \text{cost.}$  di sfere goda della proprietà ora descritta è d'immediata evidenza, poichè sulla famiglia di sfere le traiettorie ortogonali tracciano, come già si è ricordato al § 3, una corrispondenza conforme (affinità circolare di MÖBIUS). Per dimostrare che sussiste anche il teorema inverso enunciato, cominciamo dall'osservare che l'elemento lineare sferico rappresentativo  $ds'$  delle superficie  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema triplo ortogonale è dato da

$$ds'^2 = \beta_{31}^2 du_1^2 + \beta_{32}^2 du_2^2.$$

La nostra ipotesi equivale dunque a supporre che il rapporto  $\frac{\beta_{31}}{\beta_{32}}$  sia indipendente da  $u_3$ , onde potremo scrivere

$$\frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} = \lambda \beta_{31}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = \lambda \beta_{32},$$

con  $\lambda$  conveniente fattore di proporzionalità. Dovranno quindi essere soddisfatte le condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} (\lambda \beta_{32}),$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} (\lambda \beta_{31}),$$

dalle quali, ponendo mente alle formole (I) § 1

$$\frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31} \beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{21},$$

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31},$$

seguono le altre

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \beta_{31} \beta_{13}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{13}.$$

Ma allora soddisfacciamo al sistema (III) § 1 ponendo

$$H_1 = \beta_{31}, \quad H_2 = \beta_{32}, \quad H_3 = \lambda,$$



e con questi valori per le  $H$  le curvature principali

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_3},$$

$$\frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_3},$$

riescono ambedue = 1; dunque le  $u_3 = \text{cost.}$  sono sfere di raggio = 1, c. d. d.

Tornando ai nostri sistemi ( $\Sigma$ ) attuali, dipendenti dal sistema differenziale (IV) § 3 per la funzione  $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ , osserviamo che i valori delle rotazioni sono qui

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2}, \quad \beta_{13} = e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}, \quad \beta_{23} = e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3},$$

$$\beta_{31} = \beta_{32} = e^\theta.$$

Le equazioni differenziali (III) § 1 pei nove coseni si scrivono qui adunque

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_2 - e^\theta X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_2, & \frac{\partial X_1}{\partial u_3} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u_1} X_1 - e^\theta X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u_3} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} &= e^\theta X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} &= e^\theta X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial u_3} &= -e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} X_1 - e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} X_2. \end{aligned} \right\} (49)$$

Sarà definito uno dei nostri sistemi ( $\Sigma$ ) dalle formole

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = H_1 X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = H_2 X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial u_3} = H_3 X_3, \quad (49^*)$$

quando  $H_1, H_2, H_3$  siano soluzioni del sistema

$$\left. \begin{aligned} * \quad & \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2} H_2, & \frac{\partial H_1}{\partial u_3} &= e^\theta H_3, \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} H_1, & * \quad & \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = e^\theta H_3, \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} H_1, & \frac{\partial H_3}{\partial u_2} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} H_2, & * \end{aligned} \right\} (50)$$

## § 15.

UNA CLASSE PARTICOLARE DI QUESTI SISTEMI ( $\Sigma$ ).

Le trasformazioni per involuppi di sfere degli attuali sistemi ( $\Sigma$ ) dipendono da un sistema differenziale analogo al sistema (36) del § 11, che si connette alle trasformazioni delle superficie ad area minima dedotte dal teorema inverso di GUICHARD sulle deformate del paraboloide rotondo come quello sopra ricordato alle deformate delle quadriche a centro rotonde.

Indicando con ( $\Lambda$ ,  $M$ ,  $W$ ,  $\Phi$ ) una quaderna di funzioni incognite, con  $m$  una costante arbitraria non nulla, l'accennato sistema si scrive:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} &= -e^{-\theta} \Lambda, & \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} &= e^{-\theta} M, \\
 m \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} &= -m \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi + e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \Lambda + e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} M + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} W, \\
 \frac{\partial \Lambda}{\partial u_1} &= m e^{\theta} \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial u_2} M - (e^{\theta} + m e^{-\theta}) W, & \frac{\partial \Lambda}{\partial u_2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_1} M, \\
 & & \frac{\partial \Lambda}{\partial u_3} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} W, \\
 \frac{\partial M}{\partial u_1} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \Lambda, & \frac{\partial M}{\partial u_2} &= m e^{\theta} \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \Lambda - (e^{\theta} - m e^{-\theta}) W, \\
 & & \frac{\partial M}{\partial u_3} &= e^{-\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} W, \\
 \frac{\partial W}{\partial u_1} &= e^{\theta} \Lambda, & \frac{\partial W}{\partial u_2} &= e^{\theta} M, & \frac{\partial W}{\partial u_3} &= \frac{\partial \theta}{\partial u_3} W.
 \end{aligned} \tag{51}$$

A causa delle equazioni differenziali (VI) § 3 cui soddisfa  $\theta$ , il sistema (51) è illimitatamente integrabile. Esso possiede inoltre l'integrale quadratico

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 - 2m\Phi W = \text{cost.}$$

e per ottenere le trasformazioni in vista conviene scegliere i valori iniziali (arbitrarii) di  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $W$ ,  $\Phi$  in guisa da annullare la costante del secondo membro, onde

$$\Lambda^2 + M^2 + W^2 = 2m\Phi W. \tag{52}$$

È bene osservare che se nel sistema differenziale (51) si tralasciano le equazioni della prima linea e nelle altre quelle che danno le derivate

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial M}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial u_3},$$

indi si cangiano le notazioni  $\Lambda, M, W$  in  $W_1, W_2, W_3$ , si hanno precisamente le equazioni del sistema (III') § 1 nel caso attuale. Da questa osservazione, congiunta alle fondamentali del § 1, risulta che se  $(\Lambda, M, W, \Phi)$  è una qualunque quaderna di soluzioni delle (51), ponendo

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Lambda X_1 + M X_2 + W X_3, \\ \eta &= \Lambda Y_1 + M Y_2 + W Y_3, \\ \zeta &= \Lambda Z_1 + M Z_2 + W Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

il punto  $(\xi, \eta, \zeta)$  descriverà un sistema  $(\Sigma)$  coll'assegnata rappresentazione sferica. Dimostriamo ora:

*In questi particolari sistemi  $(\Sigma)$  le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono tutte integrali della equazione di Ampère-Weingarten*

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2q}{p}. \quad (54)$$

Per questo, calcolando dalle (53) le derivate osservando le (49), (51), deduciamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= m (e^\theta \Phi - e^{-\theta} W) X_1, \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_2} &= m (e^\theta \Phi + e^{-\theta} W) X_2, \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_3} &= m \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi \right) X_3, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

e conseguentemente pei raggi principali di curvatura  $\rho_1, \rho_2$  delle  $u_3 = \text{cost.}$

$$\rho_1 = m (\Phi + e^{-\theta} W), \quad \rho_2 = m (\Phi - e^{-\theta} W),$$

onde

$$\rho_1 + \rho_2 = 2m\Phi.$$

D'altronde si ha dalle (53), e dalla (52)

$$2q = S \xi^2 = \Lambda^2 + M^2 + W^2 = 2m\Phi W,$$

$$p = S X_3 \xi = W,$$

onde appunto la (54).

## § 16.

TRASFORMAZIONI PER INVILUPPI DI SFERE DEI SISTEMI ( $\Sigma$ ).

Scelta una qualunque quaderna ( $\Lambda, M, W, \Phi$ ) dei sistemi differenziali (51), (52), se poniamo

$$e^{\theta'} = e^{-\theta} \frac{W}{\Phi}$$

la funzione  $\theta'$  viene a soddisfare alle medesime equazioni differenziali (VI) § 3 cui soddisfaceva  $\theta$ . Ne resta quindi determinata una nuova classe di sistemi ( $\Sigma'$ ) coll'immagine sferica corrispondente alla nuova funzione  $\theta'$ , e i valori dei nuovi coseni  $X'_i$  delle direzioni principali sono dati dalle formole

$$X'_1 = X_1 - \frac{\Lambda}{m \Phi W} \xi, \quad X'_2 = -X_2 + \frac{M}{m \Phi W} \xi, \quad X'_3 = X_3 - \frac{W}{m \Phi W} \xi, \quad (56)$$

essendo  $\xi, \eta, \zeta$  definite dalle (53).

Ora prendiamo un qualunque sistema ( $\Sigma$ ) definito dalle formole (49\*), (50) § 14, e cerchiamo di trovare un corrispondente sistema ( $\Sigma'$ ), colla nuova immagine sferica, dedotto da ( $\Sigma$ ) con una trasformazione per involuppi di sfere. Come nella ricerca analoga del § 12, dovremo porre per questo

$$x' = x + \tau \xi \quad (57)$$

e determinare la funzione incognita  $\tau$  in guisa che sussistano le relazioni:

$$\frac{\partial x'}{\partial u_1} = H'_1 X'_1, \quad \frac{\partial x'}{\partial u_2} = H'_2 X'_2, \quad \frac{\partial x'}{\partial u_3} = H'_3 X'_3,$$

per convenienti valori di  $H'_1, H'_2, H'_3$ .

Eseguendo le derivazioni nelle (57), otteniamo in primo luogo le formole

$$H'_1 = -\frac{m \Phi W}{\Lambda} \frac{\partial \tau}{\partial u_1}, \quad H'_2 = \frac{m \Phi W}{M} \frac{\partial \tau}{\partial u_2}, \quad H'_3 = -m \Phi \frac{\partial \tau}{\partial u_3},$$

indi per  $\tau$  il sistema differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} (m \Phi W \cdot \tau) &= -H_1 \Lambda, & \frac{\partial}{\partial u_2} (m \Phi W \cdot \tau) &= -H_2 M, \\ \frac{\partial}{\partial u_3} (m \Phi W \cdot \tau) &= -H_3 W. \end{aligned}$$

Ma poichè

$$H_1 \Lambda du_1 + H_2 M du_2 + H_3 W du_3$$

è in effetto un differenziale esatto, le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte, e posto

$$T = \int (H_1 \Lambda du_1 + H_2 M du_2 + H_3 W du_3),$$

abbiamo

$$m \Phi W \cdot \tau = C - T \quad (C \text{ costante arbitraria}),$$

indi finalmente

$$x' = x + \frac{C - T}{m \Phi W} \xi, \quad (57^*)$$

formole che ci danno  $\infty^1$  sistemi ( $\Sigma'$ ) trasformati.

In particolare se prendiamo per sistema ( $\Sigma$ ) un sistema della classe del paragrafo precedente, ponendo

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

abbiamo per le (55)

$$H_1 = m (e^\theta \Phi - e^{-\theta} W), \quad H_2 = m (e^\theta \Phi + e^{-\theta} W),$$

$$H_3 = m \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} + \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \Phi \right),$$

indi si trova

$$T = m \Phi W,$$

e per ciò

$$\tau + 1 = \frac{C}{m \Phi W}.$$

Allora le (57) diventano

$$x' = \frac{C}{m \Phi W} \xi, \quad \text{ecc.}$$

od anche

$$x' = 2c \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y' = 2c \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z' = 2c \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

In questo caso adunque il sistema ( $\Sigma'$ ) è dedotto con una inversione per raggi vettori reciproci dal primitivo (cf. § 13).

## § 17.

SISTEMI ( $\Sigma$ ) PARALLELI AI SISTEMI DI WEINGARTEN A FLESSIONE COSTANTE.

Fra i sistemi tripli ortogonali ( $\Sigma$ ) che studiamo nella presente Memoria si distinguono, per le loro proprietà geometriche, quelli paralleli ai sistemi pseudosferici di WEINGARTEN a flessione costante, ed è allo studio di questi particolari sistemi ( $\Sigma$ ) che dedichiamo i paragrafi seguenti.

Ricordiamo che i sistemi di WEINGARTEN a flessione costante, si presentano a coppie ( $S$ ), ( $S'$ ) di sistemi complementari; ciascuno dei due è il luogo dei centri di curvatura delle curve a flessione costante dell'altro. E siccome per le curve a flessione costante ogni centro di curvatura coincide col centro della sfera osculatrice, possiamo anche enunciare la proprietà sotto la forma equivalente:

*Se in un sistema di Weingarten a flessione costante si prendono le sfere osculatrici delle curve a flessione costante, il centro della sfera descrive un altro sistema della stessa specie (complementare).*

La proprietà così segnalata si mantiene, in una certa maniera, per tutti i sistemi ( $\Sigma$ ) paralleli, ciò che dimostriamo geometricamente, nel modo più semplice e rapido, facendo uso dei teoremi di DARBOUX sui sistemi tripli coniugati (\*).

Per questo cominciamo dallo stabilire il teorema generale seguente:

*Se in un qualunque sistema triplo ortogonale ( $u_1, u_2, u_3$ ) si prendono le sfere osculatrici delle curve di una serie, per es. delle ( $u_3$ ), il centro descrive un sistema triplo coniugato.*

Il teorema si può dedurre da una costruzione generale di DARBOUX (l. c., n.º 1052) che fa derivare da un sistema triplo coniugato nuovi sistemi tripli coniugati. Si sa che se per tutte le superficie  $S$  di una delle famiglie nel sistema triplo coniugato si conducono le tangenti alle linee di una serie, e nella congruenza così formata, che ha  $S$  per prima falda focale, si considera sopra ogni raggio il secondo fuoco  $F_1$ , questo fuoco  $F_1$  descrive un altro sistema triplo coniugato.

---

(\*) DARBOUX, *Leçons*, IV<sup>ème</sup> Tome, n.º 1047-1052, oppure *Systèmes orthogonaux*. Livre III, Chap. III.

Ciò premesso, applichiamo due volte la costruzione di DARBOUX al sistema triplo ortogonale dato  $(u_1, u_2, u_3)$  nel modo seguente. Sulle superficie  $u_2 = \text{cost.}$  tiriamo le tangenti alle linee di curvatura  $(u_1)$ . Qui il secondo fuoco  $F_1$  è il centro di curvatura delle superficie  $u_1 = \text{cost.}$  relativo alle linee di curvatura  $(u_3)$ , sicchè nel sistema triplo coniugato descritto da  $F_1$  le superficie  $u_1 = \text{cost.}$ , che diremo  $S_1$ , sono evolute delle  $u_1 = \text{cost.}$  del sistema triplo ortogonale, e pertanto le linee  $(u_3)$  sulle  $S_1$  sono geodetiche.

Ora ripetiamo la costruzione di DARBOUX sulle  $S_1$  tirando le tangenti alle loro linee  $(u_2)$  coniugate delle geodetiche  $(u_3)$  ed il secondo fuoco  $F_0$  descriverà un nuovo sistema triplo coniugato. Ma si vede subito che  $F_0$  è precisamente il centro della sfera osculatrice della curva  $(u_3)$  nel sistema triplo ortogonale, ciò che dà appunto il teorema enunciato.

Le considerazioni geometriche stesse provano inoltre che: *se si applica la costruzione del teorema a due sistemi tripli ortogonali paralleli, anche i due sistemi tripli coniugati generati dai rispettivi centri delle sfere osculatrici sono paralleli.*

Segue di qui che se uno di questi sistemi coniugati è *ortogonale*, anche l'altro è ortogonale. Si è visto che la proprietà ora segnalata si verifica per ogni sistema  $(S)$  di WEINGARTEN a flessione costante, onde abbiamo il risultato finale:

*In ogni sistema  $(\Sigma)$  parallelo ad un sistema  $(S)$  di Weingarten a flessione costante il centro della sfera osculatrice delle curve trasformate di quelle a flessione costante descrive un altro tale sistema  $(\Sigma^{(1)})$  parallelo al sistema  $(S')$  di Weingarten complementare.*

## § 18.

### LA PROPRIETÀ DELLE SFERE OSCULATRICI COME CARATTERISTICA.

Possiamo invertire la proposizione precedente e dimostrare:

*Se in un sistema triplo ortogonale il centro della sfera osculatrice delle curve di una delle tre serie descrive un nuovo sistema triplo ortogonale, i due sistemi sono paralleli a due sistemi  $(S)$   $(S')$  di Weingarten a flessione costante e complementari l'uno dell'altro.*

Supponiamo che nel sistema triplo ortogonale  $(u_1, u_2, u_3)$ , che diremo  $(\Omega)$ , la proprietà enunciata appartenga alle sfere osculatrici delle curve  $(u_3)$ , e diciamo  $(\Omega')$  il nuovo sistema derivato. Nel sistema  $(\Omega)$  i cerchi osculatori delle curve  $(u_3)$  nei punti di una superficie  $u_3 = \text{cost.}$  formano, per un noto teorema di RIBAUCOUR (\*), un sistema ciclico, cioè ammettono una serie di superficie ortogonali; d'altronde i loro assi (le perpendicolari ai piani dei cerchi nei centri) sono, nella nostra ipotesi, le normali della corrispondente superficie  $u = \text{cost.}$  in  $(\Omega')$ . Dunque le normali di questa ultima superficie formano una congruenza *ciclica*; e risulta ora da un noto teorema (\*\*) che la superficie stessa ha a comune l'immagine sferica con una superficie pseudosferica, e le superficie normali ai cerchi, fra le quali la corrispondente  $u_3 = \text{cost.}$  in  $(\Omega)$ , hanno ciascuna a comune l'immagine sferica con una superficie complementare della prima.

A questo punto vediamo già che: *nel sistema  $(\Omega)$  le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  hanno a comune l'immagine sferica con superficie pseudosferiche e le corrispondenti in  $(\Omega')$  sono a loro volta trasformate di Combescure di superficie pseudosferiche complementari delle prime.*

Per completare la dimostrazione applichiamo ora al sistema  $(\Omega)$  una trasformazione di COMBESCORE che cangi una delle  $u_3 = \text{cost.}$ , sia  $u_3 = 0$ , in una superficie pseudosferica di raggio  $= 1$  e contemporaneamente la curva  $(u_3)$  uscente da un suo punto in una curva a flessione costante  $= 1$ , e dimostriamo che questo nuovo sistema  $(S)$  è un sistema di WEINGARTEN a flessione costante (\*\*\*) .

Il sistema ciclico osculatore lungo la superficie pseudosferica  $u_3 = 0$  in  $(S)$  ha uno dei suoi cerchi osculatori di raggio  $= 1$ , e perciò anche tutti gli altri cerchi sono di raggio  $= 1$ . Abbiamo dunque un sistema ciclico di RIBAUCOUR a raggio costante, onde segue che la superficie contigua alla  $u_3 = 0$  nel sistema ciclico, quindi anche in  $(S)$ , è ancora pseudosferica dello stesso raggio. Con questa nuova superficie pseudosferica di  $(S)$  ci troviamo ora nelle stesse condizioni come colla primitiva, sicchè passando ad un'altra superficie contigua nel sistema avremo ancora una superficie pseudosferica, e così via. Il sistema  $(S)$  è adunque in effetto un sistema di WEINGARTEN a flessione costante.

(\*) *Lezioni*, Vol. II, § 411.

(\*\*) *Lezioni*, Vol. II, § 278.

(\*\*\*) In quest'ultima parte della dimostrazione facciamo uso, per abbreviare, di considerazioni infinitesimali, alle quali non sarebbe però difficile sostituire un'analisi rigorosa.



Stabilita così la proprietà delle sfere osculatrici negli attuali sistemi  $(\Sigma)$  come caratteristica, andiamo ora a completare le costruzioni geometriche relative, come segue.

Si è visto che il centro della sfera osculatrice delle curve  $(u_3)$  del sistema  $(\Sigma)$  descrive un altro tale sistema  $(\Sigma^{(1)})$  parallelo al sistema  $(S')$  di WEINGARTEN complementare. Ora proviamo che  $(\Sigma)$  proviene a sua volta da un altro sistema  $(\Sigma^{(-1)})$ , *contiguo a  $(\Sigma)$  a sinistra*, come luogo dei centri delle rispettive sfere osculatrici. Per questo basterà ricorrere alla costruzione generale del § 6 applicata ai sistemi di WEINGARTEN complementari  $(S)$ ,  $(S')$ . Conduciamo per ogni punto  $P \equiv (u_1, u_2, u_3)$  di  $(\Sigma)$  il piano  $\pi$  parallelo al piano tangente della superficie  $u_3 = \text{cost.}$  in  $(S')$ , Tenendo fisso  $u_3$ , e variando  $u_1, u_2$ , il piano  $\pi$  inviluppa una superficie  $u_3 = \text{cost.}$  in un nuovo sistema  $(\Sigma^{(-1)})$  parallelo a  $(S')$ . Ogni curva  $(u_3)$  in  $(\Sigma^{(-1)})$  ha come luogo dei centri delle sfere osculatrici la corrispondente curva  $(u_3)$  di  $(\Sigma)$ , che è adunque il luogo dei centri delle sfere osculatrici di  $(\Sigma^{(-1)})$ .

È manifesto poi che non esiste alcun altro sistema  $(\Sigma)$  che abbia  $(\Sigma)$  come luogo dei centri delle sfere osculatrici, poichè le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  in  $(\bar{\Sigma})$  sarebbero gli inviluppi dei piani osculatori delle curve  $(u_3)$  di  $(\Sigma)$  lungo una  $u_3 = \text{cost.}$ , ciò che caratterizza completamente le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  di  $(\Sigma^{(-1)})$ .

Concludiamo quindi:

*Ogni sistema  $(\Sigma)$  dà luogo ad una catena di tali sistemi*

$$\dots (\Sigma^{(-2)}), (\Sigma^{(-1)}), (\Sigma), (\Sigma^{(1)}), (\Sigma^{(2)}) \dots$$

*estesa all'infinito nei due sensi, ciascuno dei sistemi avendo per luogo dei centri delle sfere osculatrici quello contiguo a destra. I sistemi stessi sono alternativamente paralleli ad un sistema  $(S)$  di Weingarten a flessione costante ed al suo complementare  $(S')$ .*

## § 19.

LE SUPERFICIE  $G$  DELLE ALTRE DUE SERIE  $u_1 = \text{cost.}$ ,  $u_2 = \text{cost.}$

In un sistema  $(S)$  di WEINGARTEN a flessione costante le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  sono sempre pseudosferiche dello stesso raggio e le loro traiettorie ortogonali  $(u_3)$  sono curve a flessione costante. Le superficie delle altre

due serie  $u_1 = \text{cost.}$ ,  $u_2 = \text{cost.}$  hanno dunque un sistema di linee di curvatura a flessione costante. Serbando per brevità una denominazione introdotta nella mia Memoria del 1885, chiamo superficie *iperciclica* ogni superficie con un sistema di linee di curvatura a flessione costante. Qualunque superficie iperciclica individua un sistema ( $S$ ) di WEINGARTEN a flessione costante di cui fa parte. Le superficie ipercicliche si presentano a coppie di superficie coniugate, ciascuna delle quali è il luogo dei centri di curvatura (o dei centri delle sfere osculatrici) delle linee di curvatura a flessione costante dell'altra.

Indicheremo col nome di *superficie  $G$*  le superficie aventi a comune colle ipercicliche l'immagine sferica delle linee di curvatura. Manifestamente le superficie  $G$  sono le superficie  $u_1 = \text{cost.}$ ,  $u_3 = \text{cost.}$  di un sistema triplo ortogonale ( $\Sigma$ ) parallelo ad un sistema ( $S$ ) di WEINGARTEN a flessione costante. Da quanto abbiamo dimostrato nel § 18 risulta che alla superficie  $G$  appartiene la seguente proprietà caratteristica :

*Se in una superficie  $G$  si prendono le sfere osculatrici delle linee di curvatura trasformate delle curve a flessione costante della superficie iperciclica  $S$ , il centro di questa sfera descrive una nuova superficie  $G'$ , che corrisponde alla  $G$  per linee di curvatura ed ha a comune l'immagine sferica colla superficie iperciclica coniugata  $S'$ .*

Come ho detto nella prefazione, le superficie  $G$  (isolate) sono state recentemente considerate da GUTCHARD e caratterizzate colla detta proprietà.

In generale si osservi che : *Per una superficie qualunque  $\Sigma$ , costruendo la superficie  $\Sigma_0$  luogo dei centri delle sfere osculatrici per le linee di curvatura di un sistema, alle linee di curvatura di  $\Sigma$  corrisponde sopra  $\Sigma_0$  un sistema coniugato.*

Questo si riconosce utilizzando le proprietà delle evolute, oppure applicando le considerazioni del paragrafo precedente al sistema triplo ortogonale costituito dalle superficie parallele a  $\Sigma$  e dalle sviluppabili delle normali lungo le linee di curvatura. E si ha anche subito : *Superficie  $\Sigma$  parallele hanno la stessa superficie  $\Sigma_0$  luogo dei centri delle sfere osculatrici delle linee di curvatura di un sistema.*

Le superficie  $G$  sono caratterizzate dalla proprietà che sulla superficie  $G_0$ , luogo dei detti centri delle sfere osculatrici, il doppio sistema corrispondente alle linee di curvatura di  $G$ , oltre che coniugato, è anche ortogonale. Ma si può esprimere la stessa proprietà sotto un'altra forma così : La congruenza delle tangenti alle linee di curvatura di un sistema di  $G$  ha per seconda falda focale una superficie  $S_1$ , sulla quale alle dette linee di curvatura di  $G$

corrispondono delle linee geodetiche. Le evolventi di  $S_1$  rispetto a queste geodetiche sono altrettante superficie  $\bar{G}$  (parallele), che hanno la primitiva  $G$  come luogo dei centri delle rispettive sfere osculatrici.

§ 20.

FORMOLE PER LE SUPERFICIE IPERCICLICHE E PER LE  $G$ .

Nella mia Memoria più volte citata (1885) ho dimostrato che le coppie di superficie ipercicliche coniugate ( $S, S'$ ), riferite alle loro linee di curvatura ( $u, v$ ) delle quali supponiamo che le  $v = \text{cost.}$  siano a flessione costante  $= 1$ , dipendono dalle coppie di funzioni  $(\theta, \omega)$  delle variabili  $u, v$  che soddisfano al seguente sistema di equazioni del 2.<sup>o</sup> ordine (\*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= \cos \theta \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} &= -\cos \theta \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

I rispettivi elementi lineari di  $S, S'$  sono dati dalle formole

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 du^2 + \cos^2 \theta dv^2, \\ ds'^2 &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 du^2 + \cos^2 \omega dv^2. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Ritenendo le consuete notazioni  $(X_1, X_2, X_3)$  pei coseni delle direzioni principali in  $S$ , e le analoghe  $(X'_1, X'_2, X'_3)$  per la coniugata  $S'$ , abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= \text{sen } \omega X_2 - \cos \omega X_3, \\ X'_2 &= -\text{sen } \theta X_1 + \cos \theta (\cos \omega X_2 + \text{sen } \omega X_3), \\ X'_3 &= \cos \theta X_1 + \text{sen } \theta (\cos \omega X_2 + \text{sen } \omega X_3). \end{aligned} \right\} \quad (59^*)$$

(\*) Lo stesso sistema è stato ritrovato da GUICHARD nelle sue note recenti.

Per le derivate di  $X_1, X_2, X_3$  si hanno le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} (\cos \omega X_2 + \operatorname{sen} \omega X_3), & \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial u} X_1, \\ & & \frac{\partial X_3}{\partial u} &= \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial u} X_1, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= -\operatorname{sen} \theta X_2, & \frac{\partial X_2}{\partial v} &= \operatorname{sen} \theta X_1 - \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) X_3, \\ & & \frac{\partial X_3}{\partial v} &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) X_2. \end{aligned} \right\} (60)$$

e formole analoghe per  $X'_1, X'_2, X'_3$ .

Si consideri ora una qualunque superficie  $G$  avente a comune colla iperciclica  $S$  l'immagine delle linee di curvatura  $(u, v)$ . Se indichiamo con  $x, y, z$  le coordinate di un punto di  $G$ , avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = H_1 X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = H_2 X_2, \quad (61)$$

dove  $H_1, H_2$  siano assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial u} H_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u} = -\operatorname{sen} \theta H_1. \quad (62)$$

Viceversa, se le funzioni  $\theta, \omega, H_1, H_2$  soddisfano alle (58), (62), dalle (61) risulta definita una corrispondente superficie  $G$ , le cui curvature principali si calcolano subito dalle formole

$$r_1 = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega}{H_2}, \quad r_2 = \frac{\operatorname{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial u}}{H_1}. \quad (63)$$

Osserviamo che si soddisfa in particolare alle (62) ponendo

$$H_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad H_2 = \cos \theta, \quad (64^*)$$

ed in tal caso la  $G$  viene a coincidere colla superficie iperciclica  $S$  stessa.

Un'altra coppia notevole di soluzioni delle (62) si ha ponendo

$$H_1 = \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad H_2 = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega, \quad (64^*)$$

nel qual caso risulta dalle (63) che la  $G$  si riduce alla sfera rappresentativa.

§ 21.

VERIFICA DELLE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICIE  $G$ .

Colle formole superiori è facile confermare le proprietà delle superficie  $G$  descritte al § 19. Così per le coordinate  $x', y', z'$  del centro della sfera osculatrice della linea  $v = \text{cost.}$ , troviamo

$$x' = x - \frac{H_1}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} (\cos \omega X_2 + \text{sen } \omega X_3) + \frac{\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{H_1}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \right)}{\frac{\partial \omega}{\partial u}} (\text{sen } \omega X_2 - \cos \omega X_3), \quad (65)$$

e si potrebbe facilmente verificare che la superficie  $G'$  definita da queste formole ha le linee  $(u, v)$  per linee di curvatura.

D'altra parte la superficie  $G$  è alla sua volta il luogo dei centri delle sfere osculatrici delle linee di curvatura  $v = \text{cost.}$  di  $\infty^1$  superficie  $G$  parallele, che otteniamo nel modo seguente (§ 19). Conduciamo le tangenti alle linee di curvatura  $v = \text{cost.}$  di  $G$ , e della congruenza rettilinea così formata (che ha per prima falda focale  $G$ ) troviamo la seconda falda focale  $S_1$ . Dette  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate del secondo fuoco, si trova subito

$$x_1 = x + \frac{H_2}{\text{sen } \theta} X_1. \quad (66)$$

Ed ora tiriamo le tangenti alle  $v = \text{cost.}$  di  $S_1$ , che formeranno una congruenza normale (§ 19). Ciò si conferma derivando le (66), ciò che dà

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = - \frac{H_2}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} X'_3,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{H_2}{\text{sen } \theta} \right) \cdot X_1,$$

onde i raggi della congruenza hanno i coseni di direzione  $(X'_3, Y'_3, Z'_3)$ ,

cioè sono paralleli alle corrispondenti normali di  $S'$ . Ora se poniamo

$$U = S X'_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} = - \frac{H_2}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$V = S X'_3 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{H_2}{\text{sen} \theta} \right),$$

si verifica subito che  $U du + V dv$  è un differenziale esatto, onde la detta congruenza è normale (\*). In fine, posto

$$T = \int \left\{ \frac{H_2}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} du - \cos \theta \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{H_2}{\text{sen} \theta} \right) dv \right\},$$

le coordinate  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  di un punto delle superficie  $G$  normali ai raggi (evolventi di  $S_1$ ) saranno date da

$$\bar{x} = x + \frac{H_2}{\text{sen} \theta} X_1 + (T + c) X'_3 \quad (c \text{ costante}). \quad (67)$$

Queste superficie  $G$  hanno l'immagine sferica  $(u, v)$  della superficie iperciclica  $S'$ , e la superficie  $G$  primitiva è il luogo dei centri delle sfere osculatrici delle  $v = \text{cost.}$  per tutte le superficie  $\bar{G}$ .

In particolare si osservi che, se si prendono per  $H_1, H_2$  i valori (64\*), la  $G$  si riduce alla sfera rappresentativa, e le formole (67) risolvono (nel modo più generale) il problema di: *trovare le superficie  $G$  per le quali i centri delle sfere osculatrici delle linee di curvatura di un sistema hanno per luogo una sfera.*

## § 22.

### TRASFORMAZIONI DI BÄCKLUND DELLE SUPERFICIE $G$ .

Le costruzioni del § 19 che servono a passare (in termini finiti) da una superficie  $G$  ad altre superficie  $G$  della stessa specie dipendono in sostanza dalla trasformazione *complementare* delle superficie ipercicliche. Ma esistono

(\*) *Lezioni*, Vol. I, § 143.

altre trasformazioni più generali, che dipendono, in modo analogo, dalle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie ipericliche, e di queste ci occupiamo qui da ultimo.

Indicando con  $\theta'$  una funzione incognita di  $u, v$ , che avrà per la superficie  $G'$  trasformata lo stesso significato come  $\theta$  per la primitiva  $G$ , e con  $\sigma$  un angolo costante arbitrario, si consideri il sistema differenziale per  $\theta'$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} &= \frac{1 + \cos \sigma \cos (\theta' - \omega)}{\sin \sigma} \frac{\partial \theta}{\partial u}, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} &= \frac{\cos \theta \sin \theta' - \sin \sigma \sin \theta \cos \theta'}{\cos \sigma} + \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Questo è un sistema completamente integrabile per  $\theta'$ , sicchè la soluzione generale  $\theta'$  contiene (oltre  $\sigma$ ) una costante arbitraria. Scelta una tale soluzione  $\theta'$ , ne resta individuata una superficie ipericlica  $S'$  trasformata coll'elemento lineare

$$d s'^2 = \left( \frac{\partial \theta'}{\partial u} \right)^2 d u^2 + \cos^2 \theta' d v^2, \quad (69)$$

e i relativi coseni  $(X'_1, X'_2, X'_3)$  delle direzioni principali sono dati dalle formole

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= \sin \sigma X_1 - \cos \sigma \sin \theta' X_2 + \cos \sigma \cos \theta' X_3, \\ X'_2 &= \cos \sigma \sin \theta X_1 + (\cos \theta \cos \theta' + \sin \sigma \sin \theta \sin \theta') X_2 + \\ &\quad + (\cos \theta \sin \theta' - \sin \sigma \sin \theta \cos \theta') X_3, \\ X'_3 &= -\cos \sigma \cos \theta X_1 + (\sin \theta \cos \theta' - \sin \sigma \cos \theta \sin \theta') X_2 + \\ &\quad + (\sin \theta \sin \theta' + \sin \sigma \cos \theta \cos \theta') X_3. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Ora considerando una superficie  $G$  definita dalle formole (61) del § 20, nel piano normale alla sua linea di curvatura  $v = \text{cost.}$  in un punto  $P \equiv (x, y, z)$  segniamo un punto  $P' \equiv (x', y', z')$ , le cui coordinate potremo scrivere

$$x' = x + l X_2 + m X_3; \quad (71)$$

domandiamo di determinare le incognite  $l, m$  per modo che la superficie  $G'$  descritta da  $P'$  sia una trasformata di COMBESCURE della superficie iperci-

clica  $S'$ . Per questo occorre e basta che sussistano relazioni della forma

$$\frac{\partial x'}{\partial u_1} = H'_1 X'_1, \quad \frac{\partial x'}{\partial u_2} = H'_2 X'_2, \quad (72)$$

con  $H'_1, H'_2$  convenienti fattori di proporzionalità. Ma dalle (71) derivando risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial u} (l \cos \omega + m \operatorname{sen} \omega) + H_1 \left\{ X_1 + \frac{\partial l}{\partial u} X_2 + \frac{\partial m}{\partial u} X_3, \right. \right. \\ \frac{\partial x'}{\partial u} &= l \operatorname{sen} \theta X_1 + \left\{ \frac{\partial l}{\partial v} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) m + H_2 \left\{ X_2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \frac{\partial m}{\partial v} - \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) l \right\} X_3, \right. \right. \end{aligned}$$

e sostituendo nelle (72) a sinistra questi valori, a destra i valori (70) di  $X'_1, X'_2$ , abbiamo in primo luogo

$$H'_1 = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial u} (l \cos \omega + m \operatorname{sen} \omega) + H_1}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad H'_2 = \frac{l}{\cos \sigma}, \quad (73)$$

poi per le incognite  $l, m$  il sistema di equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= -\cot \sigma \operatorname{sen} \theta' \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial u} (l \cos \omega + m \operatorname{sen} \omega) + H_1 \right\}, \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= \frac{\cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta'}{\cos \sigma} l - \left( \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) m + H_2, \\ \frac{\partial m}{\partial u} &= \cot \sigma \cos \theta' \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial u} (l \cos \omega + m \operatorname{sen} \omega) + H_1 \right\}, \\ \frac{\partial m}{\partial v} &= \left( \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \theta' - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta'}{\cos \sigma} + \frac{\partial \omega}{\partial v} + \cos \theta \operatorname{sen} \omega \right) l. \end{aligned} \right\} (74)$$

Questo è un sistema completamente integrabile, onde (fissate  $\theta', \sigma$ ) esistono  $\infty^2$  trasformate  $G'$  della superficie  $G$  per una trasformazione  $B_\sigma$ .

Osserviamo da ultimo che ove si prenda per superficie  $G$  l'iperfacciale



stessa  $S$  ponendo (§ 20)

$$H_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad H_2 = \cos \theta,$$

si ha subito una coppia  $l, m$  di soluzioni delle (44) data da

$$l = \cos \sigma \cos \theta', \quad m = \cos \sigma \sin \theta',$$

e poichè segue allora dalle (73)

$$H'_1 = \frac{\partial \theta'}{\partial u}, \quad H'_2 = \cos \theta',$$

in questo caso la  $G'$  si riduce alla superficie iperciclica  $S'$ .

# INDICE

---

	PAG.
PREFAZIONE . . . . .	235
§ 1. Proprietà generali della trasformazione di Combescure . . . . .	237
§ 2. Caso dei sistemi a curvatura costante . . . . .	240
§ 3. Le relazioni (V), (V*) sono caratteristiche . . . . .	242
§ 4. Prime trasformazioni pei sistemi ( $\Sigma$ ) . . . . .	246
§ 5. Le trasformazioni inverse . . . . .	248
§ 6. Trasformazioni di Bäcklund dei sistemi pseudosferici . . . . .	250
§ 7. Trasformazione diretta di Bäcklund pei sistemi ( $\Sigma$ ) . . . . .	253
§ 8. Legame colle trasformazioni del § 4 . . . . .	255
§ 9. Le trasformazioni inverse di Bäcklund . . . . .	257
§ 10. Sistemi ( $\bar{\Sigma}_0$ ) con un sistema derivato ( $\Sigma$ ) ridotto ad un punto . . . . .	259
§ 11. Trasformazioni per involuppi di sfere dei sistemi (S) . . . . .	260
§ 12. Trasformazioni per involuppi di sfere dei sistemi ( $\Sigma$ ) . . . . .	263
§ 13. Una classe particolare di sistemi ( $\Sigma_0$ ) . . . . .	265
§ 14. I sistemi ( $\Sigma$ ) a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura . . . . .	267
§ 15. Una classe particolare di questi sistemi ( $\Sigma$ ) . . . . .	270
§ 16. Trasformazioni per involuppi di sfere dei sistemi ( $\Sigma$ ) . . . . .	272
§ 17. Sistemi ( $\Sigma$ ) paralleli ai sistemi di Weingarten a flessione costante . . . . .	274
§ 18. La proprietà delle sfere osculatrici come caratteristica . . . . .	275
§ 19. Le superficie G delle altre due serie $u_1 = \text{cost.}$ , $u_2 = \text{cost.}$ . . . . .	277
§ 20. Formole per le superficie ipercicliche e per le G . . . . .	279
§ 21. Verifica delle proprietà delle superficie G . . . . .	281
§ 22. Trasformazioni di Bäcklund delle superficie G . . . . .	282

---

# Giovanni Ceva ed il suo carteggio inedito con Vincenzo Viviani.

(Di ALBERTO PASCAL, a Napoli.)

---

1. È ben conosciuto il nome di GIOVANNI CEVA, matematico milanese del secolo XVII. Egli appartenne a quella scuola di matematici che s'era andata formando in Milano verso la fine di quel secolo, e della quale fecero parte TOMMASO CEVA (1648-1737), che gli era fratello; GIROLAMO SACCHERI (1667-1733), PIETRO PAOLO CARAVAGGIO senior (1617-1688) e PIETRO PAOLO CARAVAGGIO junior (1659-1723), e, senza dubbio, altri che pur forse meriterebbero d'esser tratti dall'oblio.

Uno studio comparativo dei progressi che questa scuola apportò alle scienze esatte, sarebbe oggi veramente desiderabile; uno studio condotto sul tipo di quello che il prof. LORIA ci diede a proposito della Scuola napoletana di NICOLA FERGOLA (<sup>1</sup>). Già ho dato il mio piccolo contributo agli studi che su questa scuola di matematici potrebbero compiersi, tentando di illustrare la vita e l'opera matematica del maggior rappresentante di essa, GIROLAMO SACCHERI (<sup>2</sup>), e ricordando l'apparecchio che, nel 1695, ideò TOMMASO CEVA per la plurisezione degli angoli (<sup>3</sup>).

2. Ma, dopo GIROLAMO SACCHERI, ci appare la figura di GIOVANNI CEVA come quella di un geometra veramente eminente. Egli rimase pressochè di-

---

(<sup>1</sup>) G. LORIA, *Nicola Fergola e la scuola di Matematici che lo ebbe a duce* (Atti della Regia Università di Genova, pubblicati per le onoranze a Cristoforo Colombo, 1892).

(<sup>2</sup>) A. PASCAL, *Girolamo Saccheri nella vita e nelle opere* (Giornale di Matematiche di Battaglini, (3) vol. 52, 1914); *Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. 74, 1914-15).

(<sup>3</sup>) A. PASCAL, *L'apparecchio polisetettore di Tommaso Ceva ed una lettera inedita di Guido Grandi* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVIII, 1915).

menticato, sino a quando lo CHASLES, nel suo *Aperçu historique* (4), non fece notare tutta la copia di risultati a cui il CEVA era giunto nella sua opera: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (5). Lo CHASLES prima, e poi il CREMONA (6), fecero vedere come, per primo, GIOVANNI CEVA avesse avuto l'idea di servirsi delle proprietà del centro di gravità d'un sistema di punti nella teoria delle trasversali, dove cioè occorre considerare rapporti di segmenti determinati dai punti di intersezione di rette.

Quando si suppongono connessi in questi punti, pesi inversamente proporzionali ai segmenti staccati, potrà dedursi, dal rapporto di questi pesi, il rapporto fra i segmenti. Seguendo quest'ordine di idee, CEVA dimostra il notissimo teorema che oggi da lui prende il nome; lo dimostra prima col suo metodo *statico*; poi ne riporta due altre dimostrazioni geometriche che egli dice dovute all'amico suo PIETRO PAOLO CARAVAGGIO (junior). Da quel teorema, egli ricava numerose proprietà e teoremi, e, fra gli altri, CEVA deduce anche il cosiddetto *teorema di Tolomeo*; poi, sempre col suo metodo, giunge a dimostrare anche parecchie delle proprietà conosciute del triangolo; e, proseguendo ancora, dimostra proprietà sul tetraedro, sul quadrilatero gobbo, ecc.; ed, infine, nel libro secondo, dimostra anche che *in un poligono circoscritto ad una conica, i punti di contatto dividono i lati del poligono in segmenti tali che il prodotto di quelli non aventi estremi a comune, è uguale al prodotto dei rimanenti*.

Come ha fatto notare CREMONA, il CORIOLIS (7) pervenne, nel 1811, a gran parte dei teoremi di CEVA, senza conoscere il libro di questi: egli diede nove teoremi, dei quali alcuni non son compresi nell'opera di CEVA, e gli altri comprendono, come casi particolari, i teoremi che vi sono contenuti.

Questa opera di CEVA, per la quale egli può giustamente considerarsi come il precursore delle idee fondamentali che MÖBIUS applicò per creare il

(4) M. CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, etc.*, II édit. (Paris, Gauthier-Villars, 1875), Note VII, pp. 294-296.

(5) G. CEVA, *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Mediolani, ex typ. Ludovici Montiae, MDCLXXVIII).

(6) L. CREMONA, *Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva matematico milanese del secolo XVII* (Rivista ginnasiale e delle Scuole tecniche e reali, t. VI, 1859; *Opere matematiche*, Milano, Hoepli, 1914, t. I, p. 208).

(7) In parecchi lavori riassunti in CORIOLIS, *Sur la théorie des momens considérée comme analyse des rencontres des lignes droites* (Journal de l'École Polytechnique, cahier 24, 1835).

suo *Calcolo baricentrico*, fu, come dicevamo, sempre dimenticata; il CORIOLIS, in nota della sua Memoria citata, avvertiva che sol quando già aveva finito il suo lavoro, si accorse della esistenza del libro del geometra milanese. Essa è menzionata appena nell' *Histoire des mathématiques* del MONTUCLA <sup>(8)</sup>, il quale avvertì peraltro che solo conosceva il nome del CEVA per gli accenni che di questi, e delle sue opere, aveva fatto GUIDO GRANDI nel suo libro sulla logaritmica <sup>(9)</sup>.

3. Quasi nessuna notizia ci è stata tramandata purtroppo sopra GIOVANNI CEVA: un suo stesso contemporaneo, l'ARGELATI, nel redigere l'articolo destinatogli nella sua *Bibliotheca Scriptorum Mediolanensium* <sup>(10)</sup>, ci avverte di aver tentato inutilmente di ricercar notizie sopra GIOVANNI CEVA a Mantova (dove cioè CEVA, secondo ogni probabilità, dovette morire); e si limita perciò a dar l'elenco (alquanto scorretto) delle opere di lui, e qualche scarsa notizia.

L'anno della nascita ci è ignoto; egli appartenne ad una famiglia di ricchi banchieri di Milano; suo padre si chiamava CARLO FRANCESCO, e sua madre PAOLA COLOMBA. Tutti i fratelli di GIOVANNI si diedero alla religione; il maggiore di età, NICOLÒ, fu carmelitano scalzo; un altro, CRISTOFORO, fu gesuita, e fu poeta di merito; l'altro fratello fu TOMMASO, ancor egli gesuita e celebre poeta e matematico <sup>(11)</sup>.

GIOVANNI fu Commissario della Camera Arciducale del Ducato di Mantova; e purtroppo null'altro ci è dato, per ora, di aggiungere alle notizie

<sup>(8)</sup> J. É. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; etc.* Tome II (Paris, chez Jombert, MDCCLVIII), p. 72.

<sup>(9)</sup> Nella *Epistola geometrica ad virum clarissimum Thomam Cevam Societatis Jesu*, riportata in fine dell'opera G. GRANDI, *Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, seu logarithmicam lineam, etc.* (Florentiae, MDCCI, apud Brigonci).

<sup>(10)</sup> PH. ARGELATI, *Bibliotheca Scriptorum Mediolanensium seu Acta, et Elogia virorum omnigenaeruditione illustrium, qui in Metropoli insubriae oppidisque circumjacentibus orti sunt; etc.* Tomus primus (Mediolani, in Aedibus Palatinis, 1745), parte 2.<sup>a</sup>, col. 417.

<sup>(11)</sup> G. C. CORDARA, *Vita del P. Tomaso Ceva* [in *Le vite degli Arcadi illustri scritte da diversi autori, e pubblicate d'ordine della Generale Adunanza da MICHEL GIUSEPPE MOREI, Custode d'Arcadia*, parte V (Roma, tip. De' Rossi, 1751)]. — *Prolusione agli studi nel solenne aprimento del Liceo di Milano in Porta Nuova recitata il giorno 24 novembre 1812 da CESARE ROVIDA professore di Matematica, e reggente provvisoriale* (Milano, dalla stamperia Pirotta, 1813), pag. 45.

sulla sua vita, se non che studiò matematica sotto la guida del livornese DONATO ROSSETTI, come CEVA stesso ci dice nel proemio al *De lineis rectis* <sup>(12)</sup>.

Dall'elenco delle sue opere, riportato dal RICCARDI <sup>(13)</sup>, appare che il CEVA, oltre che di pura matematica s'occupò anche specialmente di questioni d'idraulica, e anche del problema della moneta, scrivendo al riguardo un'opera *De re numaria* <sup>(14)</sup>.

<sup>(12)</sup> Quando questo nostro lavoro era già stato ultimato, il chiarissimo prof. GINO LORIA è riuscito a corrispondere in parte alle speranze nostre sul ritrovamento di notizie circa la vita di GIOVANNI CEVA. Egli ha resi noti i risultati suoi in una breve nota: *Per la biografia di Giovanni Ceva* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVIII, 1915).

Nell'Archivio di Stato di Mantova (Archivio Gonzaga) esistono alcune buste con scritti vari di CEVA, e di lui si parla inoltre in altri documenti in quell'Archivio custoditi: da tutta questa messe preziosa di documenti si potrebbe perciò ricavare parte della biografia di GIOVANNI CEVA.

Altre notizie su CEVA, il LORIA riproduce dall'opera inedita di CARLO D'ARCO, intitolata *Famiglie mantovane*; dalla quale appare, tra l'altro, esser GIOVANNI CEVA nato nel dicembre 1647, e morto nel 1734.

<sup>(13)</sup> *Biblioteca Matematica Italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX compilata dal dott. ing. PIETRO RICCARDI* (Modena, tip. Soliani, MDCCCLXX), col. 342-343.

<sup>(14)</sup> Crediamo opportuno riportare la lista delle opere di GIOVANNI CEVA:

1) *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Mediolani, ex typ. Montiae MDCLXXVIII).

2) *Opuscula Mathematica de potentiis obliquis, de pendulis, de vasis, et de fluminibus* (Mediolani, ex typ. Montiae, 1682).

3) *Geometria motus. Opusculum geometricum a JOANNE CEVA mediolanensi in gratiam Aquarum excogitatum. Continet duos libros. Primum de simplicibus motu, alterum de composito* (Bononiae, typ. Pisarij, MDCXCII).

4) *Tria problemata geometris proposita, una cum ipsius ratiocinio in gravitatem omnigeni corporis ostendendam* (Mantuae, ex typ. Pazzoni, 1710).

5) *De re numaria quoad fieri potuit geometricè tractata, ecc.* (Mantuae, apud Pazzonum, MDCCXI).

6) *De mundi fabrica, unico gravitatis principio innixa, deque fluminibus, ecc.* (Mantuae, 1715).

7) *Le conseguenze del Reno, se coll'aderire al progetto de' Signori Bolognesi, si permettesse in Pò grande* (In Mantova, per Pazzoni, MDCCXVI).

8) *Replica di GIOVANNI CEVA in difesa delle sue dimostrazioni, e ragioni, per le quali non debbasi introdurre Reno in Pò, contro la risposta datasi dal signor dottor Eustachio Manfredi* (In Mantova, per Pazzoni, MDCCXVII).

9) *Risposta di GIOVANNI CEVA alle osservazioni del signor dottor Eustachio Manfredi contro la di lui replica in proposito dell'immissione di Reno in Pò grande, pretesa da' signori Bolognesi* (In Mantova, per Pazzoni, MDCCXXI).

10) *Opus hydrostaticum* (Mantuae, apud Pazzonum, MDCCXXVIII).

4. Visto che sulla vita di questo illustre geometra così poco oggi si conosce, può senza dubbio offrire un qualche interesse la notizia del ritrovamento di molte sue lettere, nell'epistolario dell' « ultimo discepolo di GALILEI » VINCENZIO VIVIANI, che si custodisce nella R. Biblioteca Nazionale di Firenze. L'importanza eccezionale, per la storia della matematica del secolo XVII, che offre il carteggio del VIVIANI, è stata additata agli studiosi dall'illustre storico della scuola galileiana, ANTONIO FAVARO (15).

Nulla, credo, per la storia scientifica degli ultimi secoli, ha maggiore importanza delle lettere che ci son conservate nelle Biblioteche e negli Archivi; in quelle lettere che fra loro si trasmettevano i dotti del tempo, essi si comunicavano tutte le loro nuove ricerche, i risultati che via via ottenevan negli studi loro: lettere che, sebbene non destinate alla pubblicazione, facevano in certo modo per quei tempi l'ufficio delle moderne Note e comunicazioni accademiche. Del resto la importanza che in alcuni casi potevan avere queste comunicazioni fu riconosciuta da essi stessi: e così, per esempio, vediamo WALLIS, COLLINS, NEWTON, LEIBNIZ, FERMAT, ecc., raccogliere gran parte delle lettere ch'essi s'eran andati scambiando, per stampare i *Commercium epistolicum*, così importanti per la storia dei progressi, specialmente dell'analisi, nei secoli XVII-XVIII.

Il carteggio di VINCENZIO VIVIANI è conservato, assieme ai manoscritti del medesimo, nei volumi 142-148 dei *Manoscritti Galileiani, Discepoli*, della Biblioteca Nazionale di Firenze. Tutti questi manoscritti di VIVIANI furono lasciati dal VIVIANI in eredità all'abate JACOPO PANZANINI, morto il quale furono posti in vendita, e gran parte di essi poté esser recuperata ed acquistata da G. B. CLEMENTE NELLI. Di tutti questi manoscritti, il prof. FAVARO ha dato un utilissimo elenco alla fine della citata sua biografia del VIVIANI; ed ha dato altresì un elenco dei corrispondenti di questi, quale risulta dal carteggio.

Per comprendere in modo adeguato tutta la importanza che potrebbe avere la pubblicazione del carteggio di VIVIANI, bisogna pensare alla grande fama che raggiunse, ai suoi tempi, questo scienziato, e per merito dei suoi lavori geometrici, e, specialmente fra questi, della sua divinazione del V libro delle *Coniche* di APOLLONIO (16).

(15) Cfr. A. FAVARO, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei*, XXIX, *Vincenzo Viviani* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. 72, 1912-13).

(16) V. VIVIANI, *De maximis et minimis geometrica divinatio in quantum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum*, ecc. (Florentiae, apud I. Cocchini, MDCLIX). Per la storia particolareggiata di questa divinazione di Apollonio, si veggia A. FAVARO, loc. cit.

Tutti i matematici più illustri dell'epoca avevan comunicazioni col VIVIANI, e, fra i nomi de'suoi corrispondenti, troviamo quelli di LEIBNIZ, HUYGENS, WALLIS, DE L'HOSPITAL, VARIGNON, ecc., per non far cenno che degli stranieri. Son molte poi anche le copie delle lettere di risposta del VIVIANI, molto spesso però redatte in caratteri illeggibili, e senza nome di destinatario, nè data.

ANTONIO FAVARO è l'unico che abbia estratto qualcosa da questo prezioso carteggio (<sup>17</sup>); vadano a questo illustre Maestro, che in Italia tiene così alto l'onore degli studi di storia delle scienze, i miei più vivi ringraziamenti per gli aiuti ed i consigli preziosi dei quali m'è stato largo.

5. Le lettere che abbiamo trovate sono le seguenti:

- I. G. CEVA a VIVIANI; 5 ottobre 1685 (tomo 145, car. 236).
- II. VIVIANI a G. CEVA; 16 ottobre 1685 (tomo 146, car. 285 t).
- III. G. CEVA a VIVIANI; 26 ottobre 1685 (tomo 146, car. 286).
- IV. VIVIANI a G. CEVA; 11 novembre (?) 1685 (tomo 143, car. 70).
- V. G. CEVA a VIVIANI; 23 novembre 1685 (tomo 146, car. 287).
- VI. G. CEVA a VIVIANI; 17 gennaio 1686 (tomo 147, car. 1).
- VII. G. CEVA a VIVIANI; 8 febbrajo 1686 (tomo 147, car. 2).
- VIII. G. CEVA a VIVIANI; 20 febbrajo 1693 (tomo 145, car. 236).
- IX. VIVIANI a G. CEVA; 3 marzo 1693 (tomo 143, car. 125).
- X. G. CEVA a VIVIANI; 13 marzo 1693 (tomo 147, car. 125).
- XI. G. CEVA a VIVIANI; 11 marzo 1701 (tomo 147, car. 193) (<sup>18</sup>).

6. Dalla prima lettera che riproduciamo, si scorge che CEVA cominciò sin dal 1685 ad occuparsi delle ricerche ch'egli poi raccolse nel suo libro, pubblicato sette anni dopo:

---

(<sup>17</sup>) A. FAVARO, *Due lettere inedite del P. Gerolamo Saccheri d. C. d. G. a Vincenzio Viviani* (Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, anno IV, 1903); *Contribuzioni inedite al carteggio di Evangelista Torricelli* (Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, anno XVI, 1914).

(<sup>18</sup>) La brevissima lettera VI non la riprodurremo, perchè ci è sembrata di nessuna importanza.

Ringrazio pubblicamente il distinto signor MARIO MONTAGNA che, con vero spirito di abnegazione e di amicizia, trasse per me, dalla Biblioteca di Firenze, copia dei documenti riportati in questo lavoro.



*Geometria motus. Opusculum geometricum à IOANNE CEVA mediolanensi in gratiam aquarum excogitatum. Continet duos libros. Primum de simplicibus motu, alterum de composito* (Bononiae, M.DC.XCII, typ. Pisarij).

L'esempio che CEVA comunica a VIVIANI è contenuto nella prop. XII, theor. XII del volume.

Assieme alla lettera di CEVA abbiamo anche la copia della risposta del VIVIANI; ecco ambo le lettere :

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup>, Sig.<sup>r</sup> Pne Col.<sup>mo</sup>,*

*È un secolo che non ho riverito con mie linee il sig.<sup>r</sup> Vincenzo mio S.<sup>ro</sup>, il di cui merito serbo sempre avanti gli occhi. Nel tempo che son stato fuori in villa ho impiegato qualche hore in veder se mi riusciva alcuna inventione nell'argomento dell'aque, et ho havuto quella fortuna, che non speravo dalla mia inabilità; con essa occasione mi è riuscito farmi largo campo nella scienza de' moti, e loro tempi; et è methodo così universale, e geometrico, che serve per ritrovare cose geometriche, cioè a quadrare de' curvilinei; le darò qui un esempio, senza la dimostrazione per non estendermi con un processo.*

*Sia la curva di tal sorte B C D & che tirate fra essa, e la retta A G le perpendicolari A B, E C, F D alla stessa A G; sia sempre F D ad A B in proportion sottodoppia di A G a G F; e così E C ad A B in proportion suduplicata di A G a G E. È noto a V. S. Ill.<sup>ma</sup> che la perpendicolare G & è assintoto, cioè a dire non concorrerà mai colla curva B C D &; si chè il piano & B A G & sarà senza fine longo alla parte &. Hora io dico che questo piano è uguale al doppio rettangolo di G A in A B, e che qualsisia portione B D F A tra le ugualm.<sup>te</sup> distanti A B, F D è uguale al rettangolo di A B nella doppia differenza di A G sopra la media proportionale tra A G, e G F.*

*Ma sia hora la detta curva di tal natura, che la F D alla A B stia in*

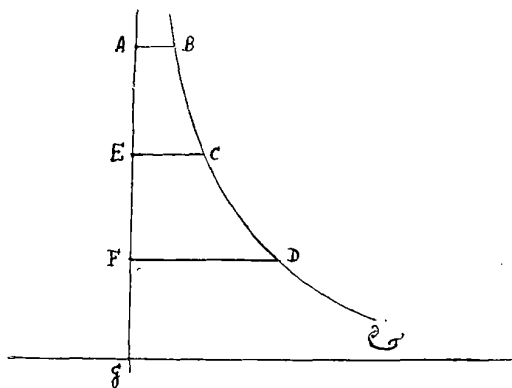


Fig. 1.

*proportion triplicata della suduplicata di AG a GF, e così EC ad AB in proporzion triplicata di AG alla media proporzionale tra AG, e GE.*

*Qui havrei di bisogno che mi fosse indicato da V. S. Ill.<sup>ma</sup> qualche autore dal quale potessi trovare artificio di quadrare qualche delle portioni AC, ED etc., tra le sue parallele; giachè per altro il curvilineo & BAG & si dimostra infinito per grandezza; io non ne suplico direttivam.<sup>te</sup> V. S. Ill<sup>ma</sup>, perchè sarebbe troppo mio ardire attese le occupat.<sup>ti</sup> gravi di V. S. Ill.<sup>ma</sup> med.<sup>a</sup>.*

*Io mi ho affaticato un pezzo ma indarno per esser cosa che molto mi preme per le dimostrat.<sup>ti</sup> dell'aque; e che senza questa, mi conviene, o lasciar molto, o veram.<sup>te</sup> restar sospeso.*

*Onde la priego con tutto lo spirito a farmene l'honore richiesto; e mentre la supplico conservarmi vivo nella sua pregiatis.<sup>ma</sup> grazia, resto con farle hum.<sup>ma</sup> riverenza. Mant.<sup>a</sup> li 5 ott.<sup>o</sup> 85.*

*di V. S. Ill.<sup>ma</sup>*

*devot.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>mo</sup> Ser.<sup>o</sup>*

GIOVANNI CEVA.

addi 16 ottobre  
1685 al Sig. Gio. Ceva  
Mantova.

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup> Pad.<sup>e</sup> Col.<sup>mo</sup>*

*Parmi, se io non erro, la prima delle due curve linee indicatemi da V. S. Ill.<sup>ma</sup> con la favorit.<sup>ma</sup> sua del 5 del corrente esser la stessa di quella la quale in fine del mio Diporto Geometrico pubblicato nel 1676 in quel Trattatello de Modi varj Meccanici, Lineari e Solidi per la bisezzione dell'angolo e per le due medie proporzionali<sup>(19)</sup> io chiamai Iperbole Mesolabica e la quale*

<sup>(19)</sup> Si allude al libretto sui *Modi vari meccanici, lineari, e solidi tentati da V. V. per le costruzioni de' due illustri problemi, il primo, della divisione dell'angolo in data proporzione, il secondo, dell'invenzione delle due medie proporzionali*, contenuto nel Quinto libro degli *Elementi di Euclide*, ovvero *Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo*, con *nuov'ordine distesa*, e per la prima volta pubblicata da VINCENZIO VIVIANI, ultimo suo discepolo. Aggiuntevi cose varie, e del Galileo, e del Torricelli; i ragguagli delle ultime opere loro, con altro, che dall'indice si manifesta (In Firenze, alla Condotta, MDCLXXIV), a pag. 279 del quale si fa parola della *iperbole mesolabica*.

dissi aver raffigurata per la s.<sup>a</sup> delle innumerabili Iperbole, cioè per quella in cui le ascisse da una delle due Asintote prese dal Centro, o concorso delle med.<sup>e</sup> Asintote stanno in proporzion reciproca dell'ordinata q.<sup>ta</sup> applicate alle med. asintote e la qual curva io conclusi quivi per ultimo esser ella peraltro maravigliosa, intendendo io per cagione dell'esser quadrabile quello spazio benchè d'estensione infinita, si come le sue parti; e per aver anche in se altre ammirabili proprietà.

La generatione poi dell'altra curva di V. S. Ill.<sup>ma</sup>, s'io pur non mi inganno, si riduce ad esser la stessa che quella, nella quale i Cubi delle dette ascisse, stanno in proporzione reciproca de' quadrati delle d.<sup>e</sup> applicate, e la quadratura dello spazio di questa che è immensurabile da una parte, ma ben mensurabile dall'altra la troverà V. S. Ill.<sup>ma</sup> enunciata con altre innumerabili . . . . del Commercio Epistolico scritto da Mons.<sup>r</sup> Fermat Francese al Caval.<sup>r</sup> Digby Inglese (2<sup>o</sup>).

Tanto penso io che basta per soddisfare ad desid.<sup>o</sup> e comandaz.<sup>ne</sup> di V. S. Ill.<sup>ma</sup> la quale per i gran progressi che io mi prometto dal di lei acutissimo ingegno, esorto con . . . . esultanza, a coltivare adesso che ell'è sul verde degli anni suoi, queste nobili scienze, affinchè non le avvenga ciò che è avvenuto a me, che da 40 e più anni in quà mi sono immerso in affari tanto remoti da queste speculazioni che ormai despero di poterle più ripigliare per farle pubbliche, come ne vengo stimolato da più parti.

E qui per fine etc.

Di V. S. Ill.<sup>ma</sup>

Dev.<sup>mo</sup> Oblig.<sup>mo</sup> Ser.

VINCENZO VIVIANI.

---

(2<sup>o</sup>) *Commercium epistolicum, de questionibus quibusdam Mathematicis nuper habitum. Inter nobilissimos viros D. Gulielmum Vicecomitem Brouncker, anglum; D. Kenelmum Digby, item Equitem anglum; D. Fermatum, in supremo Tholosatum Curia Iudicem primarium; D. Frenicium, nobilem parisinum. Una cum D. Joh. Wallis Geomet. Profess. Oxonii. D. Franc. a Schooten, Math. Prof. Lugduni Batavorum; aliisque. Edidit JOHANNES WALLIS, S. Th. D. in celeberrima Oxoniensi Academia Geometriae Professor Savilianus. (Oxonii, Excudebat A. Lichfield, Acad. Typograph. Impensis Tho. Robinson, M.DC.LVIII).*

[La copia da me consultata è della Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma, e vi è segnato a mano « Ex lib. Alph. Borelli »].

Questo libro fu tradotto in francese e riprodotto per intero nel vol. III delle *Oeuvres de FERMAT publiées par les soins de MM. PAUL TANNERY et CHARLES HENRY sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique* (Paris, Gauthier-Villars, MDCCCXCVI), pp. 399-610.

La *iperbole mesolabica* alla quale accenna VINCENZIO VIVIANI nella precedente lettera, fu da lui descritta per la costruzione delle due medie proporzionali; egli prima l'aveva chiamata *cissoide mesolabica* (pel modo col quale l'ottenneva, alquanto analogo a quello con cui si ottiene la cissoide di DIOCLE dal cerchio); ma si accorse poi esser quella curva la medesima di quella che altri (come diremo ora) aveva già considerato.

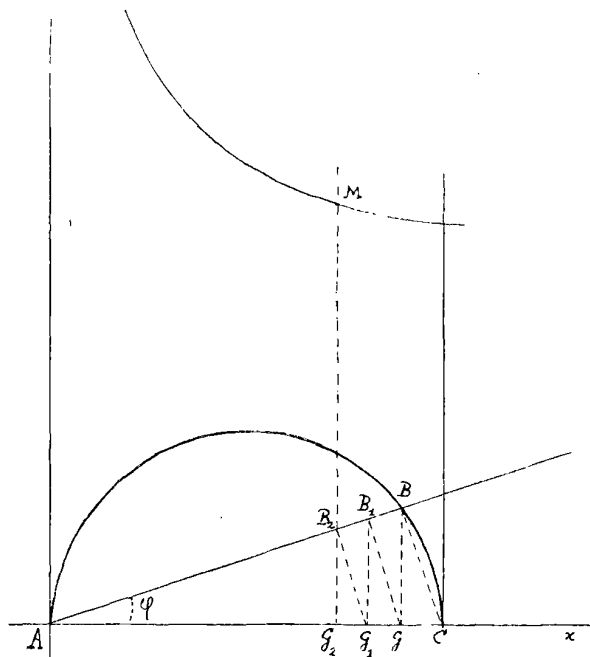


Fig. II.

Questa curva non è che un caso particolare della curva che si ottiene come segue <sup>(21)</sup>: si consideri (vedi figura II) un semicerchio di diametro  $AC = a$ , e, per  $A$ , si conduca una retta arbitraria che tagli la circonferenza in  $B$ , ed in  $D$  la tangente alla circonferenza condotta nel punto  $C$ . Costruiamo la  $BG$  perpendicolare ad  $AC$ , la  $GB_1$  perpendicolare ad  $AD$ , la  $B_1G_1$  perpendicolare ad  $AC$ , la  $G_1B_2$  perpendicolare ad  $AD$ , e così via.

Sull'ultima retta così ottenuta  $B_{k-1}G_{k-1}$  si stacchi un segmento  $GM = AD$ ; il luogo del punto  $M$  (al variare, naturalmente, della retta condotta per  $A$ ) è una curva (che può chiamarsi *iperbole*) d'ordine  $2k + 1$ , la cui equazione è:

$$x y^{2k} = a^{2k+1}.$$

Invero, detto  $\varphi$  l'angolo  $DAC$ , ed  $(x, y)$  le coordinate di  $M$ , si ha:

$$y = AD = \frac{a}{\cos \varphi}$$

<sup>(21)</sup> G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. SCHÜTTE. II Auflage. Erster Band* (Leipzig und Berlin, Teubner, 1910), p. 319.

$$\begin{array}{ll}
 AB = a \cos \varphi & AG = a \cos^2 \varphi \\
 AB_1 = a \cos^3 \varphi & AG_1 = a \cos^4 \varphi \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 AB_{k-1} = a \cos^{2k-1} \varphi & AG_{k-1} = x = a \cos^{2k} \varphi;
 \end{array}$$

eliminando  $\varphi$  dalla prima ed ultima relazione, si ottiene, per equazione del luogo di  $M$ :

$$x y^{2k} = a^{2k+1}.$$

Per  $k = 1$  la costruzione precedente si riduce a quella della curva del terzo ordine:

$$x y^2 = a^3,$$

che è quella che VIVIANI chiama *iperbole mesolabica*. Questa medesima curva è trattata da FERMAT nella lettera IV del *Commercium* citato; nella lettera cioè, del 20 aprile 1657, a DIGBY (1603-1665) <sup>(22)</sup>; a proposito di essa, FERMAT enuncia la stessa proprietà notata da G. CEVA nella lettera da noi riportata; nella iperbole ordinaria il rettangolo  $NP$  è costante (v. figura III); si supponga ora (dice FERMAT) che sia costante il prodotto del quadrato di  $BN$ , per  $BP$ , che cioè, quindi, come di-

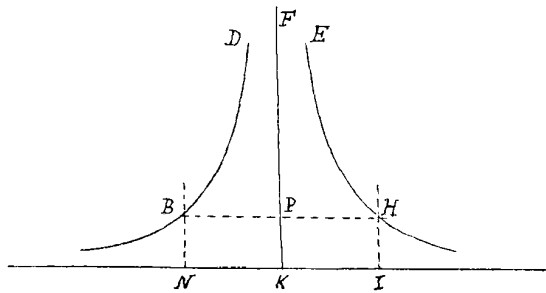


Fig. III.

remmo noi, l'equazione della curva, riferita agli assintoti, sia  $x y^2 = \text{cost}$ . La curva allora sarà una *iperbole* tale che il parallelogrammo  $BI$  sarà eguale allo spazio compreso fra la base  $BH$  e le due curve  $BDF, FEH$ .

Se, invece, è costante il prodotto del cubo di  $BN$  per  $BP$ , si otterrà un'altra iperbole, tale che il parallelogrammo  $BI$  sarà doppio dello spazio compreso fra la base  $BH$  e le due curve. E così poi, in generale, se il prodotto d'una potenza di  $BN$  per una potenza di  $BP$  è costante, il parallelogrammo  $BI$  starà allo spazio suddetto, come la differenza fra l'esponente

<sup>(22)</sup> È riprodotta come lettera LXXXII della corrispondenza di FERMAT, stampata nel volume II delle *Oeuvres de FERMAT* già citate.

della potenza di  $BN$  e l'esponente della potenza di  $BP$ , sta all'esponente della potenza di  $BP$ .

Ne segue, osserva FERMAT, che nell'ordinaria iperbole lo spazio suddetto non è eguale ad uno spazio dato, e che, in generale, l'esponente di  $BN$  deve esser maggiore di quello di  $BP$ .

Le stesse considerazioni aveva fatte prima WALLIS nella sua *Arithmetica infinitorum* <sup>(23)</sup> (prop. 102 e 104), come scrive lo stesso WALLIS al DIGBY (lettera V del *Commercium*).

7. All'ultima lettera riportata CEVA rispondeva ancora :

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup>, Sig.<sup>r</sup> Prne Col.<sup>mo</sup>*

*La favorit.<sup>mo</sup> di V. S. Ill.<sup>mo</sup> mi è sembrata un tesoro, e per le grazie che mi fa, e per le notizie massime che m'accenna. Quà in Mantova non si sa dove ricorrere per un libro in genere di Mathematica, onde ho scritto al Pre Ceva Gesuita mio fr.<sup>mo</sup> in Milano che esso pure si diletta di simili scienze, anzi le professa in Brera, doppo il pranzo, havendo impiegata la matina nell'insegnar la Rettorica <sup>(24)</sup>; l'ho dico pregato a far diligenza in biblioteca Ambrosiana, acciochè mi rimetta la coppia di quella lettera contenuta nell'opera che mi accenna, con insieme il titolo preciso, ossia la notitia d'haver il medesimo libro del Valisio. Ma ho anche premura, et ansietà grande di godere dell'opera di V. S. Ill.<sup>mo</sup>, che pur m'accenna, eperò se è cosa piccola V. S. Ill.<sup>mo</sup> è supplicata, e sententiata a rimettermela subito. Mi par di vedervi cose bellissime, et anco utilissime al mio proposito sichè Le rinnovo l'istanza; inoltre so che son da niente, e che parla in me solo l'affetto grande, che porto a simili scienze, ardisco come scolaro miserabile verso un suo gran Maestro di solcitarla a trovar tempo per dar alla luce il parto che mette in dubbio, nè permetta in*

<sup>(23)</sup> JOHANNIS WALLISII SS. *Th. D. Geometriae Professoris Saviliani in celeberrimâ Academia Oxoniensi Arithmetica infinitorum sive Nova methodus inquirendi in Curvilinearum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata* (Oxonii, Typis Leon. Lichfield Academiae Typographi, Impensis Tho. Robinson, Anno 1656).

<sup>(24)</sup> Il p. TOMMASO CEVA, gesuita, insegnò nel Collegio di Brera in Milano, per ben 45 anni, la Matematica.

*modo alcuno, che si sepelliscano nel niente speculationi sue, che per la grandezza loro, e chiarezza sono ammirate da tutto il Mondo. Assicuro V. S. Ill.<sup>ma</sup> che io oggidì non stimo quasi altro Geometra, che la persona di V. S. Ill.<sup>ma</sup> med.<sup>ma</sup>, nè ho dubbio che io non m'habbia a cavar grandem.<sup>te</sup> la sete, o per meglio dire riacenderla più per la qualità troppo saporita del liquore e vena sua geometrica. Conosco d'essermi avanzato troppo, però la suplico con un riflesso della sua gran bontà compatire la mia penna mentre con non più diffundermi . . . . sempre qual fui*

*Di V. S. Ill.<sup>ma</sup>*

*Mant.<sup>a</sup> li 26 ott.<sup>o</sup> 85.*

*Devot.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>mo</sup> Ser.<sup>o</sup>*

GIOVANNI CEVA.

8. Ed ecco poi come VIVIANI signorilmente annunzia al CEVA la sua intenzione di donargli il *Commercium* che egli non poteva trovare in Mantova :

Al Sig. Gio. Ceva

Mantova

11 . . . . . 1685

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup> mio Prne Col.<sup>mo</sup>*

*L'amore intenso che ho e che di continuo ho avuto alle Matematiche è stato di tal tempra e così staccato dall'amor di me stesso che quantunque io per la magg. parte del tempo da che io ne ho qualche cognizione, io mi sia trovato in impieghi . . . . dal poter applicare a dar fuori le cose mie, ho però sempre a tutto mio potere cooperato che gli altri vi si adoperino, e si facciano onore col promuoverle con le lor nuove speculazioni. Di qui è che ora vedendo V. S. Ill.<sup>ma</sup> tutta intenta e in ordine a farci godere le sue, e sentendo all'incontro per la di lei amorevol.<sup>ma</sup> del 22 <sup>(25)</sup> del passato che le manchi quel Commercio Epist.<sup>co</sup> del Vallisio d'onde io le scrissi che poteva cavarne notizie al bisogno . . . . e dopo molte dilig.<sup>e</sup> fatteci non l'avendo trovato mi son risoluto di buon quore (sic) a privarmene con staccarlo da altre opere colle quali era legato, e di farvene un libero dono insieme con le mie bagatelle stampate che mi dice non aver ancor vedute e che mi ha comandato inviarle.*

<sup>(25)</sup> Dovrebbe dire 26.

*Il tutto la supplicherei per sua benignità a voler gradire in segno della venerazione che ho al merito suo, e del desid.<sup>o</sup> ardent.<sup>mo</sup> delle sue glorie. Resta che si compiaccia d'indicarmi per qual via io debba farle pervenire questi libri, e a chi io debba qua consegnarle ad effetto che le giunghino sicuri e ben condizionati. Mentre non essendo questa per altro [la copia della lettera finisce così senz'altro].*

[manca la firma].

E CEVA così risponde ringraziando:

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup>, Sig. mio Pne Col.<sup>mo</sup>*

*Quando cominciavo quasi a temere della mia importunità verso di V. S. Ill.<sup>ma</sup> con forse essermi abusato delle sue grazie, ecco che son oltremodo favorito dalla gentilissima sua, che sol hora ricevo; dalla quale per le sovrabbondanti grazie che mi significa esser V. S. Ill.<sup>ma</sup> per farmi, colla missione delle sue nobili speculationi, et altro, concepisco di goder senza fallo la fortuna d'esser tra' privilegiati servi di V. S. Ill.<sup>ma</sup>; e già chè ha così disposto di graziarmi potrà restar anco servita di far avere il tutto à Sig.<sup>ri</sup> Simon, e Flaminio Piazza, che questi rimettendolo con prime occasioni a questi mercanti ebrei Franchetti, da essi ricupererò ogni cosa spero bene condizionata; però la suplico quanto so, e posso a non volere per causa mia guastare il complesso di quelle sue opere che mi dice, con estrarvi il commercio epistolico, che non mi è mai riuscito di poterlo far rinvenire, ne meno nella Biblioteca Ambrosiana <sup>(26)</sup> da dove pure mancano poche opere, che son di profitto al Mondo letterario, che se poi è cosa già seguita, mi riuscirà ben favore segnalato. Non so propriamente svilupparmi in mostrarle colla penna que' segni che esprimano le mie molte obbligazioni, so bensì di conservarle nell'anima sempre vive, sicuro di non poterle smaltire, se V. S. Ill.<sup>ma</sup> non me ne dà in qualche parte la forma, con nuovi favori, cioè con qualche materia per ubidirla. Resto dunque con umiliarmi a' suoi cenni, rassegnandomi sempre di V. S. Ill.<sup>ma</sup>*

*Mant.<sup>o</sup> li 23 nov.<sup>o</sup> 1685*

*dev.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>o</sup> Ser.<sup>re</sup>*

GIOVANNI CEVA.

<sup>(26)</sup> Oggi neppure esiste alla Biblioteca Ambrosiana di Milano il libro del WALLIS; come pure non esiste alla Biblioteca Nazionale della medesima città, alla quale il fondo di libri antichi di matematica pervenne dalla Biblioteca dell'ex-Collegio di Brera della Compagnia di Gesù.



9. L'ultima lettera, infine, di questo periodo di tempo, è la seguente:

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup>, Sig.<sup>r</sup> Prne Col.<sup>mo</sup>*

*Hebbi alla venuta del corriere nell'ordinario scorso i tre favoritissimi libri<sup>(27)</sup>, con la gentilissima di V. S. Ill.<sup>ma</sup>, e perchè il dono, massime da una mano così riverita, e che di doni n'è la compositrice, non mi poteva riuscire più prezioso, perciò ne devo a V. S. Ill.<sup>ma</sup>, dovuti miglioni (sic) di grazie. Non ho potuto a meno di non ricorrere l'ultima opera di V. S. Ill.<sup>ma</sup> in qualche parte, riserbandomi di vederla attentam.<sup>te</sup> piacendomi assaissimo il methodo del dimostrare il quinto libro delle proporzioni d'Euclide mettendo per comuni notizie, quelle cose che per dimostrarle, ha dovuto Euclide supporre cose molte più dimostrabili; mi piaciono poi assaissimo le dimostr.<sup>te</sup> della trisett.<sup>te</sup> dell'angolo, e delle due medie. In quanto poi al bisogno mio per hora, ho osservato la proposit.<sup>te</sup> generale nella lettera 2<sup>a</sup> in francese del Caval.<sup>r</sup> Digbi, circa q.<sup>te</sup> piani di lunghezza infinita, e loro quadratura; ma la dimostratione non mi è riuscita di vederla nelle seguenti lettere. In ogni caso quando mai altro, mi basterà che la proportione assegnata di d.<sup>e</sup> quadrature sia infallibile, e che mi sia approvata da V. S. Ill.<sup>ma</sup>*

*Non posso per hora maggiormente diffundermi, onde carico di molte obbligazioni resto sempre* Mantova 8 febr. 1686.

*Di V. S. Ill.<sup>ma</sup>*

*Devot.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>mo</sup> Sre*  
GIOVANNI CEVA.

S. VINCENZO VIVIANI Firenze.

10. Uscito, verso la fine del 1692, stampato a Bologna, il libro *Geometria motus* del CEVA, questi ne inviò copia al VIVIANI, colla lettera che segue, a proposito della quale notiamo che la dimostrazione del VIVIANI che CEVA dice di aver riportata nel suo libro, è quella di p. 55 della *Geometria motus*.

---

(27) I tre libri inviati al CEVA dovettero essere il *Commercium* di WALLIS, il *Quinto libro degli elementi di Euclide* del VIVIANI, già citato, e l'altra opera di VIVIANI stesso: *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum, etc.* (Florentiae, typ. Cocchini, MDCLIX), nella quale, come si è detto, VIVIANI divinò il V libro di APOLLONIO.

Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup> mio S. Prne Col.<sup>mo</sup>

È un gran tempo che non ho con mie riverito V. S. Ill.<sup>ma</sup>, la di cui eccellente virtù mi sta sempre viva nanti gli occhi, e ne ho havuto un grande esemplare legendo il gran bel libro di V. S. Ill.<sup>ma</sup> de maximis et minimis <sup>(28)</sup> dove si vede la miniera fecondissima del di lei grande ingegno. Ho rossore in mandargli un mio ultimo libriciuolo inscritto geometria motus, e mi si accresce tanto più quanto che temo esser la miglior parte di quello le dimostr.<sup>mi</sup> che la mi mandò già gran tempo fa de' pendoli per difesa del celebrimo G. Gallilei, anzi dissi della verità. La supplico a compatire questo ardire, e se non altro riconoscere nel povero mio libro l'ossequio che le porto. Mi son inoltre preso libertà d'inviargli due altre coppie, acciochè l'una la faccia tenere al S. D.<sup>r</sup> Lorenzo Bellini d.<sup>r</sup> leggente in Pisa, et altra al S. Ant.<sup>o</sup> Magliabecchi <sup>(29)</sup> ambi miei SS.<sup>ri</sup> riveriti, e supplicandola a compassionare le mie debolezze, e scusare i disturbi che le aggingo, resio di V. S. Ill.<sup>ma</sup>

Mant.<sup>a</sup> li 20 febr. 1693.

Devot.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>mo</sup> S.<sup>re</sup>

GIOVANNI CEVA.

A questa VIVIANI rispose colla lettera che segue, che porta, certo per errore, la data del 1692; la copia di questa lettera, di mano del VIVIANI, presenta in parecchi punti cancellature e sgorbi, ed è scritta in modo che, in qualche punto riesce indecifrabile, od almeno, se pur si comprendono le singole parole, non si comprende il senso complessivo della frase: ond'è che io ho creduto miglior cosa sostituire dei puntini in luogo dei passi e delle parole suddette.

<sup>(28)</sup> È l'opera (inviata da VIVIANI a CEVA) nella quale VIVIANI compì la sua famosa divinazione del V libro d'APOLLONIO.

<sup>(29)</sup> In una lettera del 30 luglio 1693, ai redattori del *Journal des Scavans*, MAGLIABECCHI fa cenno della *Geometria motus* inviategli in dono da CEVA; cfr. *Le Journal des Scavans, pour l'année M.DC.XCIII. Avec le Catalogue des Livres dont il y est parlé, et une Table des Matieres. Nouvelle édition* (A Paris, chez Witte, M.DCC.XXIX), p. 342.

Al Sig.<sup>r</sup> Giovanni Ceva  
Mantova  
3 marzo 1693

*Ill.<sup>mo</sup> Sig. mio Sig. Pad. Col.*

*La sera del Martedì prossimo passato mi pervenne dalla Posta la gentiliss. . . . di V. S. Ill.<sup>ma</sup> per la quale mi dà avviso d'inviami tre copie d'un suo nuovo libro che una per me, l'altra al Sig.<sup>r</sup> Bellini, la 3 al sig. . . . . [Magliabecchi] una per chi in essa non vi si dice.*

*Se tal missione sia stata già fatta, ne per qual via, e mi sovvenne che altra volta per ricever da me alcune delle mie opere V. S. Ill.<sup>ma</sup> si valse di certi Ebrei a quali mi impose di farne la consegna, mi credei ancora che di un mezzo simile ella si fosse valsa adesso per farmi avere le sudd. copie: ond'io m'ero accomodato prima di rispondere di attender per tal via la consegna di quelle quale in breve speravo. Non ostante dentro a questo tempo non ho mancato di intender da questi Ebrei . . . . et alla stanza di Procacci se per sorta vi fosse questo involto, ma non già alla Posta di dove un mio Ser.<sup>re</sup> recuperò la lettera, stante che ne men su la coperta di essa era indicata questa missione.*

*Ma stassera in passando a caso dalla Posta mi venne in pensiero di domandar se per fortuna vi fosse per me qualche involto di libri; et quale di fatto trovai che vi era, e vi avrebbe dimorato fin tanto che questi . . . . non ne fossero ricercati, essendo soliti di attender che mandi a prendergli quel tale che possa averne avuto lettera d'avviso, la quale non era annessa all'involto. Subito dunque ne mandai uno a legare et in questo giorno l'ho scorso tutto con estrema avidità, e così alla sfuggita ho compreso esser un degno parto del di lei fertilissimo ingegno e non quale l'innata modestia sua pretendeva di figurarmelo.*

*Ben è ver che di questa mia età di 71 anni aggravata da tanti mali non ho più la memoria così tenace nè la mente così chiara . . . . . si che io non [?] mi faccio sicuro di poter continuare a studiar quest'opera sua come bramerei, e avrei fatto di mia gioventù.*

Nondimeno rendo umil.<sup>o</sup> grazie alla S. V. Ill.<sup>ma</sup> della memoria che ella conserva di me così cadente ch'io sono, col tenermi nel numero di quelli che ne sien capaci . . . . .

Ho già mandato in nome di lei un esemplare per ciascuno a suddetti Signori da quali doverà sentirne il recapito, e poichè la sua liberalità si è estesa invece di tre di mandarne quattro ad un giovane mio Nipote che ha qualche . . . . e diletto in queste materie, ed in nome di questo ancora le rendo vivissime grazie.

Fra non molto spero di mandarle qualcosa di mio, se Dio lo permetterà, e fra queste una Lettera scritta ad un nostro comune Amico, con altresì appresso dei miei studi più vecchi dove alcune delle cose che mi par di vedere in questa sua nobiliss.<sup>ma</sup> opera, le vedrà trattate diversam.<sup>te</sup>

Vedo qui che ella ha fatto assai più conto di quel che si meritava quella mia bagatella sopra il moto de pendoli col riferirla nel proprio libro, dandole così quel pregio che per se stessa non ha; ma però in comparazione delle sue profonde e solide speculazioni spiccherà molto più la debolezza di quella alla quale io già non pensava più.

Ben è vero che quegli onorati attributi ch'ella si è compiaciuta di darmi non si devono ad uno che sà d'esser inferior di merito a qualsisia ben novizio scolare e che in tempo di vita sua è stato occupato sempre in affari pubblici e del suo Sig.<sup>ro</sup> . . . . operando cose alienissime a quelle che nella somma quiete si meditano al tavolino . . . . onde chi ben mi conosce dirà ch'ella si sia lasciata trasportar dall'affetto ch'ella mi porta, e di questo io mi pregio . . . .

Per adesso invio alla S. V. Ill.<sup>ma</sup> due esemplari d'un mio libercolo stampato mesi sono per comando di chi sopra di me ha sovrana autorità. Uno servirà per lei, e l'altro per chi più le aggrada; e tutto riceverà franco per la posta con questa mia. Compatisca se una materia così grave e mera speculazione geom.<sup>a</sup> io l'ho portata come in ischerzo a meccanica per via di timpano e di suono, che così fare m'è convenuto per dar nel genio; . . . . .

Riderebbe V. S. in veder le strane risposte che son comparse da diversi, e da fa.<sup>mi</sup> Geometri e Analitici d'Europa nel propos. del . . . . Problema non ostante che nel libretto io abbia accennato tanto che basta per ricavar la soluzione e dimostraz.<sup>ne</sup> e tardi mi son avvisto che io doveva scrivere in latino, e non in toscano per farlo comune a tutti, e a quei che han preso scusa di non intender questa lingua.

Ma ora io non mi sento da far di nuovo una simile fatica: la quale, se

*Dio vorrà, si vedrà portata per la sua via e inclusa in altra mia opera antica elementare.*

*E qui per non più tediare chi si gloriosamente operando spende il suo tempo, con riverente ossequio mi confermo*

*Di V. S. Ill.<sup>a</sup>*

*Di Fir. 3 Marzo*

*1692*

.....

*V. V.*

Il *libercolo* che VIVIANI dice di inviare a CEVA deve esser certamente quello che conteneva la risoluzione del famoso problema ch'egli propose negli *Acta Eruditorum*, e che oggi va appunto sotto il nome di *problema di Viviani* <sup>(30)</sup> (*aprire quattro finestre in una volta emisferica, in modo che la rimanente parte di questa sia quadrabile*).

L'*enigma* fu risolto, come si sa, analiticamente da molti dei maggiori matematici dell'epoca (LEIBNIZ, GIACOMO BERNOULLI, WALLIS, DE L'HOSPITAL), e di ciò VIVIANI rimase molto addolorato, giacchè aveva così avuta una prova dell'eccellenza di quei metodi analitici, ch'egli reputava inferiori ed inadatti alla miglior risoluzione dei problemi geometrici.

Nella copia riprodotta della lettera egli chiama *strane* le risposte date al suo problema; e si duole, in sostanza, che gli altri matematici non avessero risolto il problema coi metodi suoi <sup>(31)</sup>. Egli, nella sua risoluzione, non inserì le dimostrazioni; queste, peraltro, furon poi date da GUIDO GRANDI nella

<sup>(30)</sup> VIVIANI pose il suo enigma col titolo di *Aenigma geometricum de miro officio Testudinis quadrabilis emisphaericae a D. Pio Lisci pupillo geometra propositum, die 4 Aprilis A. 1692* (*Acta Eruditorum*, a. 1692, p. 274), nascondendo così il suo nome con l'anagramma dell'appellativo *postremo Galilaei discipulo*. Ne diede la soluzione in *Al Serenissimo Principe di Toscana, Formazione, e misura di tutti i cieli, con la struttura, e quadratura esatta dell'intero, e delle parti di un nuovo Cielo ammirabile, e di uno degli antichi delle volte regolari degli architetti. Curiosa esercitazione matematica di V. V.* (In Firenze, nella st. di Piero Martini, 1692).

<sup>(31)</sup> Il MONTUCLA, nella sua *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; etc.* Tome II (Paris, chez Jombert, M.DCC.LVIII), p. 71, è di opinione che nessuna delle soluzioni date del problema, superi per eleganza quella data dal VIVIANI.

sua prima pubblicazione matematica <sup>(32)</sup>. Notiamo anzi che GRANDI diede poi anche la traduzione latina dell'opera di VIVIANI, traduzione che VIVIANI nella lettera precedente si rammarica di non aver pensato di stampare.

G. CEVA rispose allora coll'altra seguente lettera :

*Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup> mio Pne Col.<sup>mo</sup>*

*Non fui veramente avvertito di avvisarla, che le quattro coppie del mio libro, glielie trasmettevo con il corriere, ben mi avviddi quasi subb.<sup>o</sup> partito il Corriere med., ma non servì; men male che V. S. Ill.<sup>ma</sup> se l'immaginò, e con ciò hebbi adempito il mio desiderio, che ella restasse prontam.<sup>e</sup> servita, come che anche questo concorrevva alla gran stima che si deve al merito di V. S. Ill.<sup>ma</sup> Quanto poi alli meriti del libro, ella che n'è quel gran Giudice saprà quello possa pesare, e stimo che l'affetto . . . . pure comunque sia ho inteso d'imprimere in quella le note dell'alto ossequio, che le professo. Se io havessi letto prima il bellissimo suo libro de maximis et minimis, havrei facilitate molte dimostrazioni; massime quelle, che caminano per doppia posizione, bastandone di una, ma servirammi in avvenire, e così potrò gloriarmi d'essere vero scolare di V. S. Ill.<sup>ma</sup> alla quale vorrei crescere una buona parte di vita, e di prosperità per godere lungo tempo un tanto mio Padrone, ma son questi desideri mere vanità, e la verità è che habbiamo a godere un Paese di gran lunga più bello se Iddio ci farà la grazia per sua misericordia.*

*La ringrazio del ricapito delli due esemplari, e che abbia collocato così bene anco il quarto, godendo che un suo P. Nipote camini per una strada così feconda per grandi cose, massime guidato dall'ingegno grande di V. S. Ill.<sup>ma</sup>, e di q.<sup>mo</sup> che esso havrà dalla propria indole.*

*Mi sarà sopramodo caro di vedere l'altro libro, che in breve pensa V. S. Ill.<sup>ma</sup> di collocare in luce, e non potrà essere che degno delle sue bellissime idee, si come lo è il libricino che ho ricevuto, e visto con avidità, nell'ordinario stesso, e non (so) se non scorgere in V. S. Ill.<sup>ma</sup> argomenti della gran sua bontà, ingegno, e generosità, e quanto a questo ultimo suo libro mi riserbo a goderlo più diffusam.<sup>e</sup> havendo hora qualche occupazione, che non mi lascia l'animo del tutto libero.*

<sup>(32)</sup> G. GRANDI, *Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum quae in exercitatione geometrica, etrusco idiomate anno 1692 edita, cum sola determinatione prodidierant, ecc.* (Florentiae, ex typ. de Guiduccis, M.DC.IC).

Quella mia *machinetta*, o sia *balestra* <sup>(83)</sup> l'ho fatta far qui et è stata molto gradita da questo ser.<sup>mo</sup> mio Prne, al quale ho dedicato il libro. L'artefice è un tal francese detto Monsù Cotel <sup>(84)</sup>, è questo un artefice, che credo habbia pochissimi pari, poichè oltre il maneggiare bene il martello, e lima, lavora anco d'ingegno con belle inventioni della sua arte. La sua eccellenza ha meritato di esser già molto tempo . . . . da Sua Altezza, e se V. S. Ill.<sup>ma</sup> comanderà che sia servito codesto Ser.<sup>mo</sup> Prencipe mi prometto di una cosa da par suo quanto al lavoriero, e per quello riguarda la sostanza della macchina (benchè è stato mio ardire il crederla degno di un Prencipe) tutta volta contribuirò ogni mia assistenza, acciochè sia di gran lunga più efficace della già fatta.

Circa il commercio epistolico tengo quello del Valisio, che V. S. Ill.<sup>ma</sup> con la sua solita generosità mi regalò insieme cole sue opere già anni sono, e se mai a caso fosse questo, che la cercasse me lo accenni, che subb.<sup>o</sup> glielo invierò. Da questo hebbi luce esservi stampato di d.<sup>o</sup> Vallisio altro libro inscrito *arithmeticæ infinitorum*, e per quante diligenze io habbia usate non l'ho mai potuto rinvenire come desideravo, perchè tratta di *methodo* molto bello, e qui con ogni più riverente ossequio resto di V. S. Ill.<sup>ma</sup>

Mant.<sup>a</sup> li 13 marzo 1693.

Devot.<sup>o</sup> ed obligat. Serv.

GIOVANNI CEVA.

11. Colla precedente lettera finisce il carteggio CEVA-VIVIANI conservatoci, della fine del '600.

Ci rimane ancora una lettera del CEVA del 1701:

Ill.<sup>mo</sup> Sig.<sup>r</sup> Prne Col.<sup>mo</sup>

Haverà V. S. Ill.<sup>ma</sup> tempo fa ricevuto dal Pre Tomaso mio fr.<sup>ello</sup> un di lui libro nel quale evvi un trattatello de natura *gravium* <sup>(85)</sup>, e come che tra le

<sup>(83)</sup> Questa *balestra* è quella descritta in fine della *Geometria motus*.

<sup>(84)</sup> Questo artefice è quello che, secondo ogni probabilità, costruì l'apparecchio ideato da TOMMASO CEVA per la plurisezione dell'angolo. Cfr. A. PASCAL, *L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva ed una lettera inedita di Guido Grandi* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVIII, 1915).

<sup>(85)</sup> TH. CEVAE, *De natura gravium Libri duo* (Mediolani, typ. Malatestae, 1699).

altre cose, alle quali non sapevo piegare il mio assenso, eravi, che i gravi dovessero in proporzion delle distanze dal centro dell'universo acquistare mass. velocità, nè quel suo methodo parevami efficace per dimostrare una cosa tanto lontana dal senso comune, gli riuscì per via di movimenti, che si consumano nel med. tempo scorrendo il grave realm.<sup>o</sup> per un lato d'un triangolo, e virtualm.<sup>o</sup> per gli altri duoi, farmi col beneficio di una libra immaginaria, render per qualche tempo persuaso; ma riandando poscia la sua argumentat.<sup>o</sup>, mi nacquero difficoltà tali, che mi fecero ritornare nella primiera mia, e vulgata opinione, che de gravi la distanza dal centro nulla conferisse al supposto aumento di velocità; per lo che pensando di poter in esso suo argomento ritrovare una manifesta fallaccia, fui io per il contrario da me med.<sup>o</sup> convinto, con la dimostr.<sup>o</sup> seguente; ma poichè può essere, che prenda qualche equivoco, venendomi questa messa in dubbio da un Pre della Compagnia di Gesù a cui l'ho comunicata, siamo convenuti di porla sotto la giustiss.<sup>a</sup> censura di V. S. Ill.<sup>ma</sup>, la quale, come amica della verità, e peritissimo di tali scienze, non vorrà dire, che puramente il suo sentimento.

Siano dunque i duoi corpi gravi  $AD$ ,  $CB$ , i centri dei quali  $A$ ,  $B$ ;  $BE$ ,  $AE$  siano le distanze loro dal centro  $E$  dell'universo: dico che la velocità di  $BC$  dalla quiete in  $B$  alla velocità di  $DA$  dalla quiete in  $A$  verso il medesimo centro  $E$  sta come la distanza  $BE$  quanta si vogli alla distanza  $AE$ ; sia  $F$  il centro di gravezza de' duoi corpi gravi  $AD$ ,  $BC$ ; si che supposta

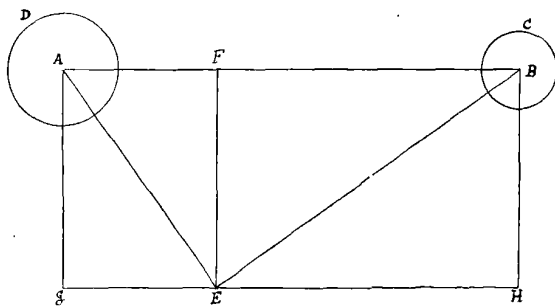


Fig. IV.

$AFB$  una libra, equiponderi q.<sup>est</sup>a sospesa dal punto  $F$ . Tirisi poi per  $E$  la  $GEH$  parallela alla  $AFB$ , e parimenti da  $B$ , et  $A$  le due  $BH$ ,  $AG$  parallele alla  $FE$ , la quale per più facilità intendosi perpendicolare alla  $AB$ . Poichè supposta  $BE$  la velocità del grave  $CB$  dalla quiete in  $B$  equivale la med.<sup>a</sup> alle due  $BF$ ,  $BH$ , sarà èqualm.<sup>o</sup> tirate l'estremo

$B$  dal grave  $BC$  giusta la direzione  $BE$ , che dal corpo  $BC$  considerato senza gravezza, ma affetto co le due velocità  $BH$ ,  $BF$ : dunque il grave  $BC$  farà forza secondo la direzione  $BH$  con la velocità  $BH$ , e secondo  $BF$  con la velocità  $BF$ , e poichè si suppone la libra  $AB$  in equilibrio starà  $BF$  ad  $AF$  come il corpo  $AD$  al corpo  $BC$ , cioè il corpo  $DA$  dovrà havere la medesima



velocità secondo  $AG$ , che  $CB$  secondo la  $BH$ , cioè essendo  $BH$  la velocità di  $BC$  sarà  $AG$  quella di  $DA$ ; e poichè per il med. equilibrio il momento del grave  $BC$  verso  $A$  è uguale al momento del grave  $DA$  verso  $B$ , sarà la velocità del corpo  $BC$  a quella di  $DA$ , verso  $F$ , come il corpo  $DA$  al corpo  $CB$ , cioè come la  $BF$  ad  $AF$ ; ma la velocità di  $BC$  verso  $F$  fa  $BF$ , dunque quella di  $DA$  verso  $F$  sarà  $AF$ ; tanto che il corpo affetto delle due velocità  $AF$ ,  $AG$  sarà equilibrato con il grave  $BC$ , ossia con il corpo affetto delle due velocità  $BH$ ,  $BF$ ; ma poichè il corpo  $DA$  affetto delle velocità  $AF$ ,  $AG$  equivale al grave  $DA$  (sendo che tanto l'uno, quanto l'altro equiponderà al contraposto  $CB$ ) dunque il grave  $DA$  haverà in  $A$  la velocità  $AE$ , che è equivalente alle due . . . . laonde il corpo  $CB$  in  $B$  dalla quiete haverà una tal velocità, che a quella di  $DA$  in  $A$  (ambi verso  $E$ ) starà come  $BE$  ad  $AE$ , che è quello etc.

Corollario.

Dalla sudetta dimostraz.<sup>o</sup> si vede, che la libra  $AB$ , il di cui centro in  $F$ , intanto sta in equilibrio in quanto la resta  $BF$  alla  $FA$  sta come la mole corporea  $DA$  alla mole corporea  $CB$ ; e non già in proporzion reciproca de pesi, come volgarm.<sup>o</sup> è ricreduto.

Corollario.

Parimenti per la similitudine de movimenti, e che si consummano in uguali tempi secondo la  $BH$ , et  $AG$ ; facilm.<sup>o</sup> si dimostra, che i tempi per le  $BE$ ,  $AE$  sarebbero uguali.

Scholio.

Si è proposta una figura facile per abbreviare la dimostrazione; per altro in qualsivoglia inclinazione di libra, si dimostra lo stesso; indi poi un harmonia maravigliosa, con la quale i gravi cadendo nello stesso tempo verso

il centro dell'universo, concorrono anco a particolari; cioè in questo caso in E, et F.

*Compatisca V. S. Ill.<sup>ma</sup> il disturbo, ma già chè si tratta di cosa assai curiosa, non ho temuto di prendermi questa libertà, e qui con tutto l'ossequio resto con inchinarla.*

*Di V. S. Ill.<sup>ma</sup>, la quale supplico darmi pure qualche nuova del S. D.<sup>r</sup> Lorenzo Bellini mio riverit.<sup>mo</sup> Prne, al quale pure potrà se gli piace, comunicare essa dimostrazione, sperando di poter poi dire come nasca la med.<sup>a</sup> gravezza.*

*Mantua li 11 Marzo 1701.*

*Devot.<sup>mo</sup> et obligat.<sup>mo</sup> Serv.<sup>e</sup>*

GIOVANNI CEVA.

Napoli, Facoltà Matematica della R. Università,  
marzo 1915.