

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Ulisse Dini in Pisa

Giuseppe Jung in Milano

Corrado Segre in Torino

SERIE III. * TOMO XXIII.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—
1914.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXIII.^o (SERIE III.^a)

	PAG.
Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine. — <i>Georges I. Rémoundos</i>	1
Einige Anwendungen der Impulssätze. — <i>V. Válcovici</i>	27
Intorno all'interpretazione della Teoria di Galois in un campo di razionalità finito. — <i>U. Scarpis</i>	41
Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari. — <i>Leonida Tonelli</i>	61
Ueber eine Transformation von Luigi Bianchi. — <i>A. V. Bäcklund</i>	107
Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche. — <i>Luigi Bianchi</i>	135
Sulla connessione delle superficie razionali reali. — <i>Annibale Comessatti</i>	215
Vene confluenti. — <i>U. Cisotti</i>	285

AI SIGNORI SOTTOSCRITTORI

PER

IL MONUMENTO AD ENRICO BETTI

Il Comitato costituitosi per erigere un monumento ad ENRICO BETTI ha potuto soltanto ora soddisfare al proprio compito. Il lunghissimo ritardo è provenuto da molteplici circostanze, in particolare dalle pratiche fatte per collocare il monumento stesso nel Cimitero urbano, ove riposa la salma dell'insigne matematico: pratiche che, accolte dapprima favorevolmente, non poterono poi avere l'esito desiderato per una disposizione ministeriale che proibiva in modo assoluto di porre in quel Cimitero nuovi monumenti moderni. Il Comitato dovette quindi accogliere l'unica soluzione che, dopo varie discussioni, fu trovata possibile, cioè di mettere il monumento nel Cimitero suburbano.

Presentemente l'opera è compiuta. Il monumento ivi eretto è, a parere di tutti, un onorevole ricordo alla memoria di quel Sommo.

La spesa totale è stata di L. 4385,73 che provennero dalle L. 2866,05 raccolte per sottoscrizione e dagli interessi di questa somma che era stata depositata nella Cassa Postale di Risparmio.

La composizione ed il disegno del monumento sono dovuti al professore arch. cav. uff. Enrico Ristori dell'Accademia di Belle Arti di Firenze: la modellazione e fusione del busto e delle altre parti in bronzo furono eseguite dal prof. Pietro Arcangeli, scultore ed architetto di Firenze, e la lavorazione delle parti in pietra (granito di Firenze) fu fatta dalla Ditta Sandrini di Firenze.

Pisa, Giugno 1914.

Per il Comitato

Il Presidente U. DINI.

Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine.

(Par M. GEORGES I. RÉMOUNDOS, à Athènes.)

INTRODUCTION.

1. On sait que des travaux récents de MM. G. VITALI, P. MONTEL, C. SEVERINI, C. CARATHÉODORY et E. LANDAU ont montré que l'existence de valeurs exceptionnelles dans un domaine D communes à toutes les fonctions d'une série ou d'une famille, supposées holomorphes dans D , entraîne des propriétés importantes concernant le module de ces fonctions et la convergence de la série ou des séries extraites de la famille ainsi que la nature des fonctions-limites [le lecteur trouvera la bibliographie relative dans les chapitres de ce travail]. Encouragé par les résultats de mes travaux antérieurs qui ont montré que les fonctions algébroides dans un domaine ou dans tout le plan de la variable indépendante jouissent de propriétés très voisines et analogues à celles des fonctions holomorphes, j'ai entrepris des recherches ayant comme but l'étude du rôle des valeurs exceptionnelles des fonctions d'une série ou d'une famille, supposées algébroides dans un domaine D , sur leur module et sur la convergence des séries, et j'ai obtenu des résultats satisfaisants, dont une grande partie a paru dans mon Mémoire : *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (Acta Mathematica, 37, 1914) et les autres, qui se rapportent au cas de trois valeurs exceptionnelles (0, 1 et ∞ , par exemple) sont exposées ici d'une façon indépendante du Mémoire des *Acta Mathematica*.

Comme il s'agit de séries de fonctions multiformes, dont les valeurs ne sauraient être séparées les unes des autres à cause de l'existence de points critiques dans le domaine considéré, il était d'abord nécessaire de donner des définitions de la convergence d'une telle série en un point et de sa convergence uniforme dans un domaine, par lesquelles j'ai dû commencer.

Dans les deux derniers chapitres je traite d'autres problèmes concernant les singularités des fonctions-limites d'une série de fonctions algébroides dans un domaine D convergeant uniformément dans D et la convergence des séries formées par les dérivées d'ordre quelconque des termes de la série donnée.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris* [« Sur la convergence des séries de fonctions analytiques », 26 Janvier, 1914]. Dans une nouvelle Note insérée aussi dans les *Comptes rendus* (« Sur les séries de fonctions multiformes dans un domaine », 30 Mars 1914) j'ai énoncé les résultats des deux derniers chapitres.

Définition de la convergence des suites de fonctions algébroides dans un domaine.

2. Soit :

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (1)$$

une suite de fonctions algébroides à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et soit z_0 un point de ce domaine.

Limite de convergence. Nous dirons que un nombre λ est une limite de convergence de la série :

$$f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0), \dots, f_n(z_0), \dots \quad (2)$$

si à chaque nombre ε nous pouvons faire correspondre un entier positif n_1 tel que pour $n > n_1$, l'on ait l'inégalité

$$|f_n(z_0) - \lambda| < \varepsilon \quad (3)$$

pour une au moins des branches de $f_n(z_0)$.

Nous dirons que la limite de convergence λ est de degré de multiplicité k , si l'inégalité (3) est satisfaite pour k branches de $f_n(z_0)$.

Limite de convergence uniforme. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(z)$ [ou branche de fonction] est une limite de convergence uniforme de la série (1) à l'intérieur d'un domaine D , si à chaque nombre ε nous pouvons faire correspondre un entier n_1 tel que pour $n > n_1$, et pour tout point intérieur du domaine D l'on ait l'inégalité :

$$|f_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad (4)$$

pour une au moins branche de $f_n(z)$.

Nous dirons que la limite $\varphi(z)$ de convergence uniforme est de degré de multiplicité égal à k si l'inégalité (4) est satisfaite pour k branches de $f_n(z)$.

Convergence. Nous dirons que la suite (1) converge en un point z_0 du domaine D si la suite (2) admet des limites de convergence dont la somme totale des degrés de multiplicité est égale à ν .

Convergence uniforme. Nous dirons que la suite (1) converge uniformément à l'intérieur du domaine D , si elle admet des fonctions-limites de convergence uniforme dont la somme totale de degré de multiplicité est égale à ν .

Une limite de convergence de degré k comptera pour k branches-limites de la série. Une conséquence immédiate de nos définitions consiste en ce que le nombre des branches-limites de convergence de la série ne saurait jamais dépasser le nombre ν .

CHAPITRE I.

Extension aux familles de fonctions algébroides dans un domaine d'un théorème de M. Montel.

3. Dans son Mémoire : *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* [Annales de l'École normale de Paris, tome XXIX, Novembre 1912, pages 497-501], M. P. MONTEL a établi le théorème suivant :

« Les fonctions $f(z)$, holomorphes dans un domaine D , où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, forment une famille normale. »

Je me propose, dans ce chapitre, d'étendre ce théorème de M. MONTEL aux familles de fonctions algébroides dans un domaine D [c'est-à-dire : fonctions ayant un nombre fini de branches dans D et aucun point singulier transcendant dans ce domaine].

Je traiterai d'abord le cas particulier où le domaine D est un cercle dont le centre est le seul point singulier (point critique) des fonctions de la famille et ensuite je traiterai le cas général avec la seule restriction que l'ensemble des points critiques des fonctions de la famille (géométriquement distincts) situés dans le domaine D ne doit avoir aucun point limite à l'intérieur de D .

CAS PARTICULIER.

4. Considérons une famille (F) de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un cercle (C):

$$|z| < R$$

dont le centre $z = 0$ est un point régulier ou un point critique (algébrique) des ν branches.

Soit :

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \tag{5}$$

une série de fonctions appartenant à la famille (F) et désignons par S_1, S_2, \dots, S_m les systèmes circulaires formés par les branches de $f_n(z)$, contenant respectivement $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ branches; parmi les nombres entiers $\nu, m, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ le premier seulement sera supposé fixe (c'est-à-dire: indépendant de n), tandis que les autres $m, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ peuvent dépendre de n et varier avec lui.

Soient :

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1}(z) &= \alpha_{10} + \alpha_{11} z^{\frac{1}{\nu_1}} + \alpha_{12} z^{\frac{2}{\nu_1}} + \dots && \text{pour le système } S_1 \\ \sigma_{n_2}(z) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} z^{\frac{1}{\nu_2}} + \alpha_{22} z^{\frac{2}{\nu_2}} + \dots && \text{» } S \\ \dots & && \\ \dots & && \\ \sigma_{n_m}(z) &= \alpha_{m0} + \alpha_{m1} z^{\frac{1}{\nu_m}} + \alpha_{m2} z^{\frac{2}{\nu_m}} + \dots && \text{» } S_m \end{aligned}$$

les séries qui représentent dans le voisinage de $z = 0$ les branches, supposées finies en $z = 0$, de chacun des systèmes circulaires; soit k un nombre positif fixe (indépendant de n) et commun multiple de tous les nombres $2, 3, 4, \dots, \nu$ et, par conséquent, des $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$; nous pouvons, par exemple, prendre: $k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \nu = \nu!$ Les formules (6) montrent que, si nous faisons la substitution (*) $z = x^k$, toutes les branches de toutes les

(*) D'une façon plus précise, nous faisons la substitution: $b(z) = x$, en désignant par $b(z)$ une branche déterminée de $z^{\frac{1}{k}}$, par exemple celle dont l'argument est compris entre 0 et $\frac{2\pi}{k}$; de cette façon à chaque valeur de z correspond une seule valeur de x .

qui convergent uniformément, à l'intérieur du cercle (C), vers les fonctions:

$$\lambda_1(z) = \varphi_1 [b(z)], \quad \lambda_2(z) = \varphi_2 [b(z)], \dots, \quad \lambda_\nu(z) = \varphi_\nu [b(z)]$$

ou la constante infinie. Il en résulte immédiatement que ces ν fonctions $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_\nu(z)$ sont des branches-limites de convergence uniforme de la série:

$$f_{q_1}(z), f_{q_2}(z), \dots, f_{q_n}(z), \dots$$

qui est extraite de la série donnée (5). Nous voyons, donc, que de la série donnée (5) nous pouvons toujours extraire une nouvelle série convergeant uniformément, à l'intérieur du cercle (C), vers des fonctions (*), dont le nombre total des branches est égal à ν . Lorsque une famille de fonctions possède cette propriété elle s'appelle *normale*, d'après la définition de M. MONTEL, dans le domaine (C); par conséquent, il est démontré que la famille donnée (F) est normale.

CAS GÉNÉRAL.

5. Considérons maintenant un domaine connexe D , dans lequel les fonctions de la famille (F) sont algébroides à ν branches finies, ne contenant qu'un nombre fini de points critiques des fonctions de la famille; soient c_1, c_2, \dots, c_μ ces points critiques situés à l'intérieur du domaine D . Supposons que dans le domaine D les fonctions de la famille ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1 et traçons μ cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu$ ayant comme centres respectivement les points c_1, c_2, \dots, c_μ , situés à l'intérieur du domaine D , et ne se coupant pas mutuellement; considérons aussi μ autres cercles $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_\mu$ concentriques et intérieurs respectivement aux cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu$ et désignons par Δ la partie connexe du domaine D qui est extérieure aux cercles $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_\mu$; traçons enfin μ autres cercles K_1, K_2, \dots, K_μ dont les circonférences soient comprises respectivement entre les circonférences Γ_1 et Γ'_1 , Γ_2 et $\Gamma'_2, \dots, \Gamma_\mu$ et Γ'_μ .

Considérons maintenant une suite infinie quelconque:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \tag{11}$$

(*) Ou la constante infinie.

de fonctions de la famille; il s'agit de démontrer que l'on peut en extraire une autre suite infinie convergeant uniformément, dans tout domaine intérieur à D , vers ν branches-limites.

La famille (F) est normale dans le domaine Δ , puisque toutes les branches de ses fonctions sont holomorphes dans Δ et n'y prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1; si, donc, nous désignons par D_1 un domaine intérieur à D et par Δ_1 la partie de D_1 extérieure aux cercles K_1, K_2, \dots, K_μ , il est possible d'extraire de la suite (11) une nouvelle suite :

$$f_{a_1}(z), f_{a_2}(z), \dots, f_{a_n}(z), \dots \quad (12)$$

convergeant dans Δ et uniformément dans le domaine Δ_1 vers ν fonctions $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_\nu(z)$ holomorphes dans Δ ; la constante infinie peut remplacer certaines de ces fonctions-limites.

Or, la famille (F) est, d'après le cas particulier du numéro précédent, aussi normale dans le cercle Γ_1 ; nous pouvons, donc, extraire de la série (12) une autre série :

$$f_{b_1}(z), f_{b_2}(z), \dots, f_{b_n}(z), \dots \quad (13)$$

convergeant dans Γ_1 et uniformément dans le cercle K_1 (sur la circonférence aussi) vers des branches-limites qui coïncident avec les fonctions $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_\nu(z)$ ou la constante infinie, puisque les domaines Δ et Γ_1 ont une partie commune: la couronne circulaire comprise entre les deux circonférences Γ_1 et Γ'_1 .

La famille (F) étant aussi normale dans le cercle Γ_2 , d'après le numéro précédent, nous pouvons extraire de la suite (13) une nouvelle suite infinie :

$$f_{\gamma_1}(z), f_{\gamma_2}(z), \dots, f_{\gamma_n}(z), \dots$$

convergeant dans le cercle Γ_2 uniformément dans le cercle et sur la circonférence K_2 vers des branches-limites qui coïncideront avec les $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_\nu(z)$, puisque les domaines Δ et Γ_2 ont une partie commune: la couronne circulaire comprise entre les deux circonférences Γ_2 et Γ'_2 .

En continuant ainsi nous finirons par trouver une suite infinie des nombres entiers :

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

telle que la série :

$$f_{q_1}(z), f_{q_2}(z), \dots, f_{q_n}(z), \dots \quad (14)$$

converge dans tous les domaines $\Delta, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu$ et uniformément dans (et

sur la périphérie) les domaines $\Delta_1, K_1, K_2, \dots, K_\mu$, dont l'ensemble compose le domaine D_1 . Le nombre des branches limites est égal à ν .

Nous voyons, donc, que la série (14), qui est extraite de la série (11), converge dans le domaine D et uniformément dans tout domaine D_1 intérieur à D vers ν branches-limites. Par conséquent, la famille donnée (F) est normale dans le domaine D .

Remarque. Il est à peine utile de prouver que l'uniformité de la convergence de la série (14) dans chacun des domaines $\Delta_1, K_1, K_2, \dots, K_\mu$ séparément entraîne l'uniformité dans le domaine total

$$D_1 = \Delta_1 + K_1 + K_2 + \dots + K_\mu :$$

en effet, à chaque nombre positif ε correspondent des nombres entiers $\bar{n}, n_1, n_2, \dots, n_\mu$ tels que l'inégalité :

$$|f_{q_n}(z) - \varphi_i(z)| < \varepsilon \quad [i = 1, 2, 3, \dots, \nu] \quad (15)$$

soit satisfaite (*) pour une au moins branche de $f_{q_n}(z)$ dans le domaine Δ_1 pour $n > \bar{n}$, dans le domaine K_1 pour $n > n_1$, dans le domaine K_2 pour $n > n_2$, et ainsi de suite, ..., dans le domaine K_μ pour $n > n_\mu$. Si, donc, nous désignons par N un nombre entier supérieur à tous les entiers $\bar{n}, n_1, n_2, \dots, n_\mu$, chacune des inégalités (15) sera satisfaite pour une au moins branche de $f_{q_n}(z)$ pour $n > N$ et pour tous les points du domaine total $D_1 = \Delta_1 + K_1 + K_2 + \dots + K_\mu$; par conséquent, les $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_\nu(z)$ seront des limites de convergence uniforme de la série (14) dans tout le domaine D_1 .

6. Nous avons ainsi établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Étant donné un domaine connexe quelconque D et des points quelconques $C_1, C_2, C_3, \dots, C_\mu$ (en nombre fini) situés à son intérieur, si nous considérons toutes les fonctions $f(z)$ qui possèdent les trois propriétés suivantes :*

\alpha') elles sont algébroides à un nombre fixe ν de branches finies dans le domaine D ,

\beta') elles ne prennent dans le domaine D ni la valeur 0 ni la valeur 1,

\gamma') elles n'admettent pas, à l'intérieur du domaine D , d'autres points critiques que les points $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$ [c'est-à-dire : les points $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$

(*) Dans le cas où la constante infinie est une branche-limite, il s'agit de l'inégalité :

$$|f_{q_n}(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

sont les seuls points du domaine D qui puissent être singuliers pour les fonctions considérées].

Ces fonctions $f(z)$ forment une famille normale; c'est-à-dire: de toute suite infinie de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément dans tout domaine D , intérieur à D .

CHAPITRE II.

EXTENSION AUX FONCTIONS MULTIFORMES D'UN THÉORÈME DE MM. CARATHÉODORY ET LANDAU.

7. On sait que l'existence de valeurs exceptionnelles des fonctions d'une série, holomorphes dans un domaine D , est un fait important pour la convergence de la série dans ce domaine. MM. VITALI (*) et MONTEL (**) sont les premiers qui ont utilisé les valeurs exceptionnelles dans la théorie de la convergence des séries de fonctions holomorphes.

En utilisant d'une part le théorème de M. CHOTKY sur le module des fonctions holomorphes et $\frac{1}{n}$ de 0 et 1 dans un cercle et d'autre part le théorème de M. VITALI sur les séries de fonctions holomorphes et bornées dans un domaine, qui convergent en une infinité de points de ce domaine, MM. CARATHÉODORY et LANDAU ont récemment établi [*Beiträge zur Konvergenz von Functionenfolgen*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, XXVI, 1911] le théorème suivant:

Soit:

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots$$

une série de fonctions holomorphes dans un domaine D et n'y prenant pas les valeurs 0 et 1 (ou deux valeurs quelconques).

(*) *Sopra le serie di funzioni analitiche*. Annali di Matematica pura ed applicata, 3.^a serie, t. X, 1904.

(**) *Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques* (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. CXLV, 1907, p. 910). Voir aussi C. SEVERINI, *Sulle successioni infinite di funzioni analitiche* (Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, t. II, 1909, p. 186).

Si les fonctions $f_n(z)$ de la série donnée (16) ne prennent, dans le domaine D , ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*, elles forment, d'après le théorème (1), une famille normale dans D et il en sera, visiblement, de même des fonctions des séries (18) qui sont holomorphes dans le domaine.

Nous pouvons, donc, appliquer à ces séries (18) un théorème général de M. P. MONTEL [*Sur les familles de fonctions analytiques...* Annales de l'École normale, XXIX, Novem., 1912, page 531], par lequel l'auteur a généralisé les théorèmes de MM. VITALI, MONTEL (*), CARATHÉODORY et LANDAU sur la convergence des séries de fonctions holomorphes.

Ce théorème de M. MONTEL a l'énoncé suivant :

« Soit une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

holomorphes dans D et appartenant à une famille normale dans ce domaine :

1.° Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble en D , elle converge dans tout le domaine ;

2.° Si la suite converge dans D , la convergence est uniforme dans l'intérieur de D . »

L'application de ce théorème nous conduit à la conclusion que, dans l'intérieur de D , les séries (18) convergent uniformément vers des fonctions holomorphes dans D ; si, donc, nous désignons par $A_1(z), A_2(z), \dots, A_\nu(z)$ les fonctions-limites de ces séries, la série (16) converge vers la fonction $w = f(z)$ définie par l'équation :

$$w^\nu + A_1(z) w^{\nu-1} + A_2(z) w^{\nu-2} + \dots + A_{\nu-1}(z) w + A_\nu(z) = 0.$$

Cette fonction $w = f(z)$ est visiblement algébroïde à ν branches finies dans le domaine D . Je dis maintenant que chacune de ses branches est une limite de convergence *uniforme* dans D de la série (16).

Soit, en effet, w_1 une branche de la fonction w , z_1 un point (**) intérieur au domaine D et ε un nombre positif arbitrairement petit. Si l'inégalité :

$$|f_n(z_1) - w_1| > \varepsilon$$

était satisfaite pour une infinité de valeurs de n , il serait impossible d'extraire

(*) Théorème antérieur du même auteur : *Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques* (Comptes rendus, t. CXLV, 1907, p. 910).

(**) Ce point z_1 dépend de n et varie, en général, avec lui.

de toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$ une nouvelle série convergeant uniformément dans l'intérieur de D , ce qui est absurde, parce que les fonctions de la série (16) forment une famille normale.

Le théorème de MM. CARATHÉODORY et LANDAU est ainsi étendu à la série (16) et nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME II. *Soit :*

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots,$$

une série de fonctions algébroides à ν branches finies (ν fixe) dans un domaine D , dans lequel elles n'admettent comme points singuliers (points critiques) que certains points fixes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\nu$, dont le nombre est fini, et supposons que les fonctions de la série ne prennent dans le domaine D ni la valeur 0 ni la valeur 1.

Si cette série converge en une infinité de points du domaine D ayant un au moins point limite dans l'intérieur de D , elle converge dans tout le domaine; de plus, elle converge uniformément, dans l'intérieur de D , vers des fonctions algébroides et finies dans D (dont le nombre total de branches est égal à ν).

Je ne veux pas insister sur les généralisations immédiates des théorèmes I et II, que l'on peut obtenir en remplaçant les valeurs 0 et 1 par deux autres valeurs exceptionnelles.

CHAPITRE III.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE MM. SCHOTTKY-LANDAU.

9. M. LANDAU (*), généralisant un théorème bien connu de M. SCHOTTKY, a établi le théorème suivant :

« La famille (F) de fonctions holomorphes dans le cercle de centre origine et de rayon R , ne prenant dans le cercle ni la valeur 0 ni la valeur 1

(*) Voir : H. BOHR und E. LANDAU, *Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma=1$* (Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1910, p. 309).

et prenant à l'origine des valeurs a_0 telles que $|a_0| < \alpha$, jouit de la propriété que, dans le cercle concentrique de rayon $\frac{R}{2}$, le module de toutes les fonctions de la famille est inférieur à un nombre fixe $M(\alpha)$. »

M. MONTEL (*) a établi un théorème plus général qui s'énonce comme il suit :

« La famille (F) de fonctions holomorphes dans un domaine D , ne prenant dans D ni la valeur 0 ni la valeur 1 et prenant en un point z_0 intérieur à D des valeurs bornées, est bornée en module dans tout domaine D_1 inférieur à D . »

C'est, d'ailleurs, une conséquence du fait que la famille sera normale.

Nous établirons ici une généralisation du théorème ci-dessus énoncé de M. LANDAU concernant un cercle (C) dans lequel les fonctions de la famille ne sont pas nécessairement holomorphes, le centre pouvant être un point critique algébrique des fonctions. Nous pouvons, bien entendu, supposer toujours que le centre du cercle (C) soit l'origine.

Soit une famille (F) de fonctions algébroides à ν branches finies dans un cercle (C) de centre origine et de rayon R , dont le centre est le seul point qui puisse être point critique des fonctions de la famille; supposons que les ν valeurs, que prend à l'origine chaque fonction de la famille, sont en module inférieures à un nombre fixe θ .

Considérons une fonction quelconque $f(z)$ de la famille et désignons par S_1, S_2, \dots, S_m les systèmes circulaires formés par les branches de $f(z)$ autour de l'origine, contenant respectivement $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ branches, et soient :

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_{10} + \alpha_{11} z^{\frac{1}{\nu_1}} + \alpha_{12} z^{\frac{2}{\nu_1}} + \dots & \text{pour le système } (S_1) \\
 \alpha_{20} + \alpha_{21} z^{\frac{1}{\nu_2}} + \alpha_{22} z^{\frac{2}{\nu_2}} + \dots & \text{» } (S_2) \\
 \dots & \dots \\
 \alpha_{m0} + \alpha_{m1} z^{\frac{1}{\nu_m}} + \alpha_{m2} z^{\frac{2}{\nu_m}} + \dots & \text{» } (S_m)
 \end{array}$$

les séries qui représentent, dans le cercle (C), les branches de chacun des

(*) Mémoire déjà cité, page 516.

systèmes circulaires. Nous utiliserons ici la substitution $z = x^k$ [Voir : Chapitre I, n. 4] par laquelle toutes les branches de $f(z)$ deviennent des fonctions holomorphes de x dans le cercle (C_1) :

$$|x| < |\sqrt[k]{R}|$$

représentées par des séries entières dont le premier terme est un des nombres $a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}$; soient $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_\nu(x)$ ces ν fonctions holomorphes dans le cercle (C_1) , qui en $x = 0$ prennent les valeurs $a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}$ [certaines de ces fonctions peuvent avoir en $x = 0$ la même valeur].

Si les fonctions de la famille ne prennent, dans le cercle (C) , ni la valeur 0 ni la valeur 1, il en sera de même des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_\nu(x)$ dans le cercle (C_1) ; d'autre part, nous avons, par hypothèse, les inégalités :

$$|a_{10}| < \theta, \quad |a_{20}| < \theta, \quad \dots, \quad |a_{m0}| < \theta$$

et, par conséquent, l'application du théorème de M. LANDAU nous conduit immédiatement à la conclusion que le module de toutes les branches des fonctions de la famille donnée F est inférieur à $M(\theta)$ dans le cercle :

$|x| < \frac{1}{2} |\sqrt[k]{R}|$ du plan x et, par conséquent, dans le cercle : $|z| < \frac{R}{2^k}$ du plan z .

Dans les théorèmes de MM. SCHOTTKY et LANDAU on peut remplacer le rayon $\frac{R}{2}$ par εR , où ε désigne un nombre positif et plus petit que l'unité, et, alors, le nombre fixe $M(\theta)$ est remplacé par un nombre fixe $M(\theta, \varepsilon)$ dépendant aussi de ε . Nous pouvons, donc, faire la même chose dans mon sujet en remplaçant le rayon $\frac{R}{2^k}$ par εR , où $0 < \varepsilon < 1$.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant :

THÉORÈME III. *Soit (F) une famille de fonctions algébroides à ν branches finies dans un cercle, dont le centre est le seul point critique, de rayon R . Si nous supposons que les fonctions de la famille ne prennent, dans ce cercle, ni la valeur 0 ni la valeur 1 et que les valeurs de toutes ces fonctions au centre du cercle soient en module inférieures à un nombre fixe α , le module des fonctions de (F) est, dans le cercle concentrique de rayon θR ($0 < \theta < 1$), inférieur à un nombre fixe $M(\alpha, \theta)$ ne dépendant que des α et θ .*

CHAPITRE IV.

Singularités des fonctions-limites d'une série convergente.

10. Soit :

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (19)$$

une série de fonctions algébroides et finies dans le voisinage d'un point; nous pouvons toujours supposer que ce point soit l'origine $z = 0$. Si ce point est régulier pour une infinité de termes de la série et si la série est uniformément convergente dans le voisinage du point $z = 0$, nous savons que la fonction-limite est aussi holomorphe en $z = 0$.

Supposons maintenant que le point $z = 0$ soit critique pour les termes de la série à partir d'un certain rang, la série étant toujours uniformément convergente; on pourra, alors, extraire de la série (19) une autre :

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \dots, \varphi_n(z), \dots \quad (20)$$

dont chaque terme possède un système (S) circulaire de ν branches, l'entier ν étant fixe, permutables autour de $z = 0$. Nous nous proposons le problème suivant :

Le point $z = 0$ est-il aussi critique pour les fonctions-limites des branches de ce système circulaire ?

Moyennant la substitution $z^{\frac{1}{\nu}} = x$, les branches du système (S) deviennent des fonctions holomorphes de x dans le voisinage de $x = 0$ et il en sera de même des branches-limites. Comme les branches (S) de $\varphi_n(z)$ résultent d'une fonction holomorphe $\sigma_n(x)$ en $x = 0$, si nous y substituons les diverses déterminations de $z^{\frac{1}{\nu}}$, les ν branches-limites résulteront aussi de la même manière d'une fonction $\sigma(x)$ holomorphe en $x = 0$. Soit :

$$\sigma(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots \quad (21)$$

la série qui détermine dans le voisinage de $x = 0$ cette fonction $\sigma(x)$. Il est clair que, s'il existe dans cette série des exposants qui ne soient pas multiples de ν , la substitution $x = z^{\frac{1}{\nu}}$ nous fournira certainement des branches-

limites singulières en $z = 0$: on obtiendra, en effet, des branches différentes qui se permuteront autour de $z = 0$. Il faut, donc, que tous les exposants de x dans la série (21) soient multiples de ν pour que la substitution $x = z^{\frac{1}{\nu}}$ dans (21) fournisse des fonctions holomorphes en $z = 0$; il est clair que cela suffit, puisque, alors, la substitution de toutes les déterminations de $z^{\frac{1}{\nu}}$ nous donnera une seule série de MACLAURIN.

Il faut et il suffit que la série (21) se réduise à la forme :

$$\sigma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x^{\nu k_1} + \gamma_2 x^{\nu k_2} + \gamma_3 x^{\nu k_3} + \dots \quad (22)$$

les k_1, k_2, k_3, \dots étant des entiers positifs, pour que le point $z = 0$ soit régulier des branches-limites.

Si $\sigma(x)$ est de la forme (22), on a : $\sigma^{(q)}(0) = 0$, lorsque q n'est pas multiple de ν , et, par conséquent, d'après un théorème de M. MONTEL [*Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales de l'École normale, Novembre 1912, p. 490], toute dérivée de $\sigma_n(x)$, dont l'ordre n'est pas multiple de ν , s'annulera, à partir d'un certain rang, dans le voisinage de $x = 0$, et il en sera de même des branches (S) de $\varphi_n(z)$. Inversement, si les branches (S) de $\varphi_n(z)$ ont la propriété que, à partir d'un certain rang, leurs dérivées, dont l'ordre n'est pas multiple de ν , s'annulent dans le voisinage de $z = 0$, il en sera de même de $\sigma_n(x)$ et, par conséquent, d'après le théorème de M. MONTEL ci-dessus indiqué, toute dérivée de la fonction $\sigma(x)$ limite de $\sigma_n(x)$, dont l'ordre n'est pas multiple de ν , s'annulera pour $x = 0$ et les branches-limites des branches du système circulaire (S) seront holomorphes dans le voisinage de $z = 0$. Les considérations précédentes nous montrent aussi que les branches-limites sont simultanément holomorphes en $z = 0$, c'est-à-dire : si une branche-limite des branches (S) est holomorphe en $z = 0$, il en est de même de toutes les branches-limites des branches (S).

Nous avons ainsi établi le théorème suivant :

THÉORÈME IV. *Soit :*

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$$

une série de fonctions algébroides à ν branches finies et formant un seul système circulaire dans le voisinage d'un point z_0 (qui est un point critique de toutes les branches de tous les termes de la série). Si cette série converge uni-

formément dans un domaine renfermant le point z_0 , la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les branches-limites soient holomorphes dans le voisinage de $z = z_0$ est la suivante : il faut et il suffit que toutes les branches des dérivées de $\varphi_n(z)$, dont l'ordre n'est pas divisible par ν , s'annulent, à partir d'un certain rang (à partir d'une valeur de n), dans le voisinage du point $z = z_0$. De plus, lorsque une branche-limite est holomorphe en $z = z_0$, il en est de même de toutes les autres branches-limites.

11. Considérons une série :

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (23)$$

de fonctions algébroïdes à μ branches finies dans le voisinage d'un point $z = z_0$ et convergeant uniformément à l'intérieur d'un cercle (C) renfermant le point z_0 . Si nous remplaçons chaque terme de la série (23) par une de ces branches, on en déduit une nouvelle série qui sera appelée *branche* de la série (23). Un système de μ branches sera appelé *fondamental*, s'il contient toutes les branches de chaque terme de la série (23).

D'après les définitions données au commencement de ce travail, la série (23) converge uniformément à l'intérieur du cercle (C), s'il existe un système fondamental de μ branches de la série, convergeant uniformément à l'intérieur de C . En général, la série (23) converge en un point z_1 du cercle C s'il existe un système fondamental de μ branches convergeant en $z = z_1$.

Soit $f(z)$ une branche-limite de la série (23), c'est-à-dire la limite d'une branche :

$$f_{11}(z), f_{12}(z), f_{13}(z), \dots, f_{1n}(z), \dots \quad (24)$$

de la série (23), qui converge uniformément à l'intérieur de C . Désignons, en général, par m_n le nombre des branches du système circulaire, auquel appartient $f_{1n}(z)$ dans le voisinage du point $z = z_0$; ce nombre m_n sera appelé *poids critique* du terme $f_{1n}(z)$ dans le voisinage de $z = z_0$. S'il existe une infinité (I) de termes de la série (24) ayant le même point critique m_n , en appliquant à cette série (I) le théorème IV, nous obtenons la conclusion que, à partir d'un certain rang, toutes les dérivées de $f_{1n}(z)$, dont l'ordre n'est pas multiple de m_n , doivent, à partir d'un certain rang, s'annuler dans le voisinage du point $z = z_0$, pour que la branche-limite $f(z)$ soit holomorphe dans le voisinage de $z = z_0$, et cela suffit.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME V. « Soit :

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (25)$$

une série de fonctions algébroides à ρ branches finies dans un domaine D , convergeant uniformément à l'intérieur de D , et soit $z = z_0$ un point intérieur au domaine D et critique pour tous les termes (*) d'une branche :

$$f_{11}(z), f_{12}(z), \dots, f_{1n}(z), \dots \quad (26)$$

de la série (25). La condition nécessaire et suffisante pour que la limite de la série (26) soit holomorphe dans le voisinage de $z = z_0$ est la suivante : Il faut et il suffit qu'il existe, dans le voisinage du point z_0 , des zéros de toute dérivée de $f_{1n}(z)$, dont l'ordre n'est pas divisible par le poids critique de $f_{1n}(z)$ dans le voisinage de z_0 , et cela pour tous les termes de la branche (26) à partir d'un certain rang. »

Nous disons qu'une fonction admet des zéros dans le voisinage d'un point z_0 , lorsque elle en admet dans tout cercle arbitrairement petit de centre z_0 . Par conséquent, la condition du théorème, que nous venons d'énoncer, s'exprime d'une façon très précise comme il suit : A chaque nombre ρ , arbitrairement petit, correspond un entier n_1 , tel qu'il existe, à l'intérieur du cercle de centre z_0 et de rayon ρ , des zéros, pour $n > n_1$, de toutes les dérivées de $f_{1n}(z)$, dont l'ordre (de dérivation) n'est pas divisible par le poids critique de $f_{1n}(z)$ en $z = z_0$.

Le théorème V peut s'énoncer aussi de la façon suivante :

VI. « Pour que la série (25) admette une branche-limite holomorphe dans le voisinage de $z = z_0$, il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, une au moins branche de $f_n(z)$ ou bien soit holomorphe en $z = z_0$ ou bien jouisse de la propriété suivante : Toute dérivée de cette branche $\overline{f_n(z)}$, dont l'ordre de dérivation n'est pas divisible par le poids critique de $\overline{f_n(z)}$, admette des zéros dans le voisinage du point z_0 .

La condition est visiblement nécessaire, grâce au théorème V. Elle est aussi suffisante, parce que l'on aura une au moins branche :

$$\overline{f_1(z)}, \overline{f_2(z)}, \dots, \overline{f_n(z)}, \dots \quad (27)$$

jouissant de la propriété des zéros des dérivées, dont l'ordre n'est pas divisible par le poids critique. Si cette série (27) est une branche du système fondamental, nous sommes immédiatement ramenés au théorème V ; si non, on pourra extraire de la série (27) une autre :

$$\overline{f_{k_1}(z)}, \overline{f_{k_2}(z)}, \dots, \overline{f_{k_m}(z)}, \dots \quad (28)$$

(*) À partir d'un certain rang.

faisant partie d'une branche du système fondamental et, alors, cette série (28) converge uniformément vers une branche-limite de la série (25), qui, en vertu du théorème V, sera holomorphe dans le voisinage du point $z = z_0$.

Il faut même remarquer que, d'après les raisonnements précédents, lorsque la condition des théorèmes V et VI est réalisée par une infinité de termes de la suite (25), cela suffit pour qu'une au moins branche-limite soit holomorphe dans le voisinage de $z = z_0$ et, alors, tous les termes de la série (25) satisferont, à partir d'un certain rang, à la même condition.

CHAPITRE V.

Dérivation des séries de fonctions algébroïdes.

12. Soit :

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \tag{29}$$

une série de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un domaine D ne contenant que μ points critiques $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$ fixes des fonctions de la série, et supposons qu'elle converge uniformément dans D .

Envisageons un point critique c et rappelons-nous (Chap. I) que, si nous faisons la substitution

$$b(z) = x$$

où $b(z)$ désigne une branche déterminée de $(z - c)^{\frac{1}{k}}$ et $k = 1.2.3 \dots \nu$ la fonction $f_n(z)$ devient, pour toute valeur de l'indice n , une fonction $\varphi_n(x)$ dont toutes les branches sont holomorphes dans le voisinage de $x = 0$. Si nous désignons par $\varphi_{1n}(x), \varphi_{2n}(x), \dots, \varphi_{\nu n}(x)$ les branches de $\varphi_n(x)$, les séries (*)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{11}(x), \varphi_{12}(x), \dots, \varphi_{1n}(x), \dots \\ \varphi_{21}(x), \varphi_{22}(x), \dots, \varphi_{2n}(x), \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_{\nu 1}(x), \varphi_{\nu 2}(x), \dots, \varphi_{\nu n}(x), \dots \end{array} \right\} \tag{30}$$

(*) C'est-à-dire : il existe un système fondamental de branches de la série : $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, convergeant uniformément dans le domaine D et ce système sera composé par des séries de la forme (30).

convergent uniformément dans le domaine D vers des branches-limites $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_\nu(x)$ qui sont, d'après un théorème classique de WEIERSTRASS, holomorphes dans le voisinage de $x=0$. On sait que la série des $\varphi'_{1n}(x)$ converge vers la dérivée $\Phi'_1(x)$, la série des $\varphi'_{2n}(x)$ converge vers la dérivée $\Phi'_2(x)$ et ainsi de suite... la série des $\varphi'_{\nu n}(x)$ converge vers la dérivée $\Phi'_\nu(x)$ dans le voisinage de $x=0$ [c'est-à-dire : dans un cercle assez petit entourant le point $x=0$] dans lequel les fonctions des séries (30) sont holomorphes. En général, les séries :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{11}^{(q)}(x), \varphi_{12}^{(q)}(x), \dots, \varphi_{1n}^{(q)}(x), \dots \\ \varphi_{21}^{(q)}(x), \varphi_{22}^{(q)}(x), \dots, \varphi_{2n}^{(q)}(x), \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_{\nu 1}^{(q)}(x), \varphi_{\nu 2}^{(q)}(x), \dots, \varphi_{\nu n}^{(q)}(x), \dots \end{array} \right\} \quad (31)$$

formées par les dérivées d'ordre quelconque q convergent, dans le voisinage de $x=0$, respectivement vers les fonctions-limites $\Phi_1^{(q)}(x), \Phi_2^{(q)}(x), \dots, \Phi_\nu^{(q)}(x)$.

Or, nous avons :

$$f'_n(z) = \varphi'_n(x) b'(z)$$

ou bien :

$$(z - c) f'_n(z) = (z - c) b'(z) \varphi'_n(x)$$

et, comme la série des $\varphi'_n(x)$ converge, dans le voisinage de $x=0$, vers les fonctions limites : $\Phi'_1(x), \Phi'_2(x), \dots, \Phi'_\nu(x)$, la série des $(z - c) f'_n(z)$ converge, dans le voisinage du point $z=c$, vers les fonctions-limites :

$$(z - c) b'(z) \Phi'_1(x), (z - c) b'(z) \Phi'_2(x), \dots, (z - c) b'(z) \Phi'_\nu(x). \quad (32)$$

D'autre part, les branches-limites de la série donnée (29) sont visiblement les

$$F_1(z) = \Phi_1[b(z)], \quad F_2(z) = \Phi_2[b(z)], \dots, \quad F_\nu(z) = \Phi_\nu[b(z)]$$

et, par conséquent, les fonctions-limites (32) sont égaux à :

$$(z - c) F'_1(z), \quad (z - c) F'_2(z), \dots, \quad (z - c) F'_\nu(z).$$

Nous avons aussi :

$$f''_n(z) = \varphi''_n(x) [b'(z)]^2 + \varphi'_n(x) b''(z)$$

ou bien :

$$(z - c)^2 f''_n(z) = (z - c)^2 [b'(z)]^2 \varphi''_n(x) + (z - c)^2 b''(z) \varphi'_n(x). \quad (33)$$

Nous avons multiplié les deux membres par $(z - c)^2$ parce que les fonctions :

$$(z - c) b'(z), \quad (z - c)^2 b''(z), \quad (z - c)^3 b'''(z), \dots, \quad (z - c)^q b^{(q)}(z), \dots$$

sont sûrement finies dans le voisinage du point $z = c$.

Comme la série des $\varphi'_n(x)$ converge vers les $\Phi'_1(x), \Phi'_2(x), \dots, \Phi'_\nu(x)$ dans le voisinage de $x = 0$ et la série des $\varphi''_n(x)$ converge vers les $\Phi''_1(x), \Phi''_2(x), \dots, \Phi''_\nu(x)$, la formule (33) montre que la série des fonctions $(z - c)^2 f''_n(z)$ converge, dans le voisinage du point $z = c$, vers les branches-limites :

$$\begin{aligned} (z - c)^2 [b'(z)]^2 \Phi''_1(x) + (z - c)^2 b''(z) \Phi'_1(x) &= (z - c)^2 F''_1(z) \\ (z - c)^2 [b'(z)]^2 \Phi''_2(x) + (z - c)^2 b''(z) \Phi'_2(x) &= (z - c)^2 F''_2(z) \\ \dots &\dots \\ (z - c)^2 [b'(z)]^2 \Phi''_\nu(x) + (z - c)^2 b''(z) \Phi'_\nu(x) &= (z - c)^2 F''_\nu(z) \end{aligned}$$

parce que les facteurs communs $(z - c)^2 [b'(z)]^2$ et $(z - c)^2 b''(z)$ sont finis dans le voisinage du point $z = c$.

De la même façon nous démontrons, en général, que la série :

$$(z - c)^q f_1^{(q)}(z), \quad (z - c)^q f_2^{(q)}(z), \dots, \quad (z - c)^q f_\nu^{(q)}(z), \dots \quad (33')$$

où l'ordre q des dérivées est quelconque, converge, dans le voisinage de $z = c$ [dans un cercle entourant le point $z = c$ et ne renfermant aucun autre point critique] vers les branches-limites :

$$(z - c)^q F_1^{(q)}(z), \quad (z - c)^q F_2^{(q)}(z), \dots, \quad (z - c)^q F_\nu^{(q)}(z). \quad (34)$$

On sait, d'ailleurs, que cela est vrai, d'après un théorème classique, pour tout domaine Δ intérieur à D et ne renfermant aucun des points critiques c_1, c_2, \dots, c_μ , puisque les fonctions de la série donnée (29) seront holomorphes dans Δ .

13. Si nous posons : $(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_\mu) = P(z)$, la série :

$$[P(z)]^q f_1^{(q)}(z), \quad [P(z)]^q f_2^{(q)}(z), \dots, \quad [P(z)]^q f_\nu^{(q)}(z), \dots \quad (35)$$

converge, d'après le numéro précédent, vers les branches-limites :

$$[P(z)]^q F_1^{(q)}(z), [P(z)]^q F_2^{(q)}(z), \dots, [P(z)]^q F_\nu^{(q)}(z) \quad (36)$$

dans le voisinage de tous les points critiques $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$ et dans tout domaine Δ intérieur à D et ne renfermant aucun point singulier. Il en résulte immédiatement que la série (35) converge, pour toute valeur de l'entier q , dans tout domaine D_1 intérieur à D vers les branches-limites (36).

Nous savons que les fonctions-limites $F_1(z), F_2(z), \dots, F_\nu(z)$ sont aussi algébroïdes dans le domaine D [Voir le théorème XVII de mon Mémoire : *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine*. Acta Mathematica, 37, 1914]; on le voit d'ailleurs facilement (*); il en sera, donc, de même des dérivées de tout ordre des fonctions-limites.

Nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME VII. Soit :

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_\nu(z), \dots \quad (37)$$

une série de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un domaine D , dans lequel il n'existe que μ points critiques $c_1, c_2, c_3, \dots, c_\mu$ des fonctions de la série (l'entier μ étant quelconque), et posons :

$$P(z) = (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3) \dots (z - c_\nu).$$

Si la série (37) converge uniformément dans le domaine D vers les branches-limites :

$$F_1(z), F_2(z), \dots, F_\nu(z)$$

la série :

$$P(z) f'_1(z), P(z) f'_2(z), \dots, P(z) f'_\nu(z), \dots$$

converge, à l'intérieur du domaine D , vers les branches-limites :

$$P(z) F'_1(z), P(z) F'_2(z), \dots, P(z) F'_\nu(z)$$

la série :

$$[P(z)]^2 f''_1(z), [P(z)]^2 f''_2(z), \dots, [P(z)]^2 f''_\nu(z), \dots$$

(*) Parce que, grâce à la convergence uniforme, les fonctions de la série (29) forment une famille bornée en module [Voir aussi le théorème VII de mon Mémoire des *Acta Mathematica* ci-dessus cité].

converge, à l'intérieur de D , vers les branches-limites :

$$P(z)F''_1(z), \quad P(z)F''_2(z), \dots, \quad P(z)F''_{\nu_1}(z)$$

et, en général, la série :

$$[P(z)]^q f_1^{(q)}(z), \quad [P(z)]^q f_2^{(q)}(z), \dots, \quad [P(z)]^q f_n^{(q)}(z), \dots$$

où l'ordre q des dérivées est quelconque, converge, à l'intérieur de D , vers les branches-limites :

$$[P(z)]^q F_1^{(q)}(z), \quad [P(z)]^q F_2^{(q)}(z), \dots, \quad [P(z)]^q F_{\nu}^{(q)}(z).$$

Il faut faire la remarque que les facteurs communs $P(z)$, $[P(z)]^2, \dots$, $[P(z)]^q, \dots$ ne sont utilisés ici que pour éviter les valeurs infinies des dérivées dans le domaine D , dont l'existence empêcherait la considération de la convergence des séries des dérivées. C'est pour cela que le théorème ci-dessus énoncé est précisément l'extension fidèle aux séries de fonctions algébroides dans un domaine du théorème classique concernant la dérivation des séries de fonctions holomorphes dans un domaine, dans lequel elles convergent uniformément.

Athènes, le 21 Mars 1914.

TABLE DES MATIERES

	PAG.
INTRODUCTION -----	1
Définition de la convergence des suites de fonctions algébroïdes dans un domaine --	2
CHAPITRE I. Extension aux familles de fonctions algébroïdes dans un domaine d'un théorème de M. MONTEL -----	3
CHAPITRE II. Extension aux fonctions multiformes d'un théorème de MM. CARATHÉODORY et LANDAU -----	10
CHAPITRE III. Généralisation d'un théorème de MM. SCHOTTKY-LANDAU -----	13
CHAPITRE IV. Singularités des fonctions-limites d'une série convergente -----	16
CHAPITRE V. Dérivation des séries de fonctions algébroïdes -----	20

Einige Anwendungen der Impulssätze (*).

(Von V. VĂLCOVICI, in Iassy [Rumänien].)

Die mathematische Schwierigkeit der von der Praxis aufgestellten hydrodynamischen Problemen haben die Hydraulikern veranlasst, Hypothesen und Sätze anzuwenden, welche den Theoretikern mit Unrecht meist unbekannt geblieben sind. Es gibt fast kein theoretisches Buch der Hydrodynamik, welches sich mit den Impulssätzen beschäftigt, obgleich dieselben manchmal sehr gute Dienste leisten könnten. Im Folgenden will ich eine allgemeine und einfache Form dieser Impulssätze angeben und einige ihrer wichtigsten Anwendungen zeigen.

1. Impuls nennt man den Vektor $m \mathbf{v}$, wenn m die Masse und \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor eines materiellen Punktes bedeutet. Hat man statt eines Punktes mit einem ganzen Punkthaufen zu tun, so heisst Impuls des Systems der Vektor $\sum m \mathbf{v}$, wobei die Summe auf sämtliche Punkte des Systems ausgedehnt ist. Aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen erhält man den sogenannten Schwerpunktsatz, den wir folgendermassen ausdrücken wollen:

Die zeitliche Änderung des Impulses eines den äusseren Kräften

$$\mathfrak{F}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

unterworfenen Punktsystems ist gleich der Resultierenden dieser äusseren Kräfte:

$$\frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathfrak{F}_k; \quad (1)$$

\mathfrak{I} bedeutet dabei den Gesamtimpuls des Systems. Wohlgemerkt, diese Gleichung ist eine vektorielle, die man in drei Skalargleichungen zerlegen kann.

(*) Ein Teil der vorliegenden Arbeit ist in gedrängter Form in den Pariser *Comptes Rendus* (t. 157, p. 1131 und t. 158, p. 169) erschienen.

Andere drei Gleichungen bekommt man mit dem Flächensatz :

Die zeitliche Änderung des Momentes des Gesamtimpulses eines solchen Punktsystems in bezug auf einen festen Punkt ist gleich dem Gesamtmomente aller äusseren Kräfte \mathfrak{F}_k in bezug auf denselben festen Punkt, oder analytisch ausgedrückt :

$$\frac{d}{dt} (\Sigma m \mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \Sigma_{k=1}^n (\mathfrak{F}_k \times \mathbf{r}_k); \quad (\text{II})$$

die Summe auf der linken Seite bezieht sich auf sämtliche Punkte des Systems, \mathbf{r} bzw. \mathbf{r}_k bedeutet den Vektor, der von dem betrachteten festen

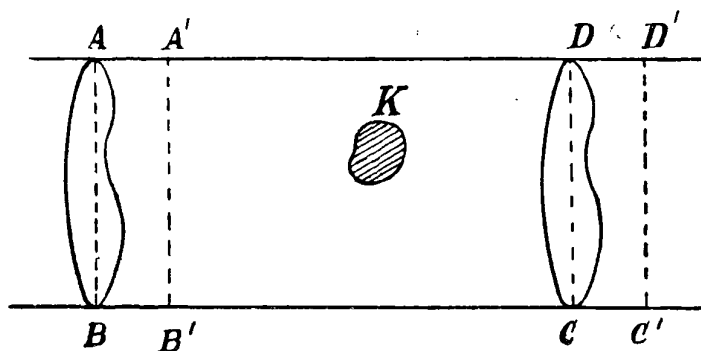


Fig. 1.

Punkte zu einem Punkte bzw. zu dem Punkte k des Systems führt, und das Zeichen \times deutet auf eine vektorielle Multiplikation hin.

Wir wollen unser Augenmerk auf die Gleichung (I) richten, wovon wir einige Anwendungen zeigen werden.

2. Eine der bekanntesten Anwendungen des Satzes (I) ist wohl das D'Alembertsche Paradoxon; dasselbe will ich im Falle der sich in einem zylindrischen Kanal bewegendem Flüssigkeit beweisen. Der Satz ist auf diese Weise einerseits allgemeiner, und andererseits wird er einfacher bewiesen, indem man über das Verhalten des Potentials im Unendlichen nichts zu wissen braucht.

In einem zylindrischen Kanal $A B C D$ (Fig. 1), dessen konstanter, zu den Erzeugenden senkrecht stehender Querschnitt gleich F ist, bewegt sich stationär eine reibungslose inkompressible Flüssigkeit mit der Dichte 1 um einen festen Körper K ; die Bewegung ist durch die konstante Geschwindigkeit V im Unendlichen charakterisiert. Wir wollen nur die Komponente in

der Bewegungsrichtung von dem Tripel (I) betrachten und zunächst die zeitliche Änderung der in dieser Richtung vorhandenen Impulskomponente im Gebiete $ABCD$ ermitteln, wobei wir uns die Entfernungen der Querschnitte AB und CD von dem Körper K sehr gross im Vergleich zu den Querdimensionen des Kanals denken wollen. Nach Ablauf einer Sekunde ist der Querschnitt AB in die neue Lage $A'B'$ und CD in $C'D'$ gekommen. Die Flüssigkeitsmasse $AB B' A'$, welche bis auf sehr kleine Grössen gleich $F \cdot V$ ist, zählt nicht mehr zu dem betrachteten Gebiete, und also der Gesamtimpuls ist um

$$F \cdot V \cdot V = F \cdot V^2$$

kleiner geworden; dagegen ist die Flüssigkeitsmasse $CDD'C'$ hinzugekommen und hat den Gesamtimpuls um $F \cdot V^2$ vergrössert. Die Impulsmenge der Flüssigkeitsmasse $A'B'CD$ ist unverändert geblieben, da die Bewegung stationär angenommen worden ist. Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses dieses Punktsystems ist also gleich Null.

Die äusseren Kräfte bestehen aus den Druckkräften, welche auf die Mantelfläche und Deckel des Flüssigkeitszylinders $ABCD$ und auf die Berührungsfläche des Körpers K mit der Flüssigkeit ausgeübt werden. Die auf die beiden Deckel AB und CD wirkenden Druckkräfte heben sich gegenseitig auf, da der Druck p infolge der Bernoullischen Gleichung in AB und CD bis auf vernachlässigbare Grössen denselben Wert hat; die auf die Mantelfläche wirkenden Druckkräfte liefern keinen Beitrag zu den Komponenten in der Bewegungsrichtung, da der Druck senkrecht auf dieser Richtung steht; endlich ist die Kraft, die die Flüssigkeit von Seiten des Körpers K erleidet, gleich $-W$, wenn W den Widerstand des Körpers K bedeutet.

Die Komponente der Gleichung (I) in der Bewegungsrichtung wird infolgedessen folgendermassen lauten:

$$0 = -W,$$

und somit ist der Beweis des D'Alembertschen Paradoxons für den betrachteten Zylinder und also als Sonderfall für die nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit geleistet (*). Ich will noch die Bemerkung hin-

(*) Diese Verallgemeinerung des D'Alembertschen Paradoxons wurde auch von Herrn Prof. U. CISOTTI (*Sul moto di un solido in un canale*, Rend. Palermo, 1909, 2.º sem.) mittels des Greenschen Satzes gegeben.

zufügen, dass die Annahme einer kompressibler oder einer schweren Flüssigkeit keine Änderung dieses Resultates hervorrufen würde, wenn die Schwerkraft senkrecht zu der Bewegungsrichtung stehen würde.

3. Es ist ohne weiteres klar, dass die Impulsänderung der betrachteten flüssigen Masse in einer senkrecht zur Bewegung stehenden Richtung gleich Null ist; hat etwa der Kanal die Form eines rechteckigen Prismas, so muss also die Differenz der beiden Reaktionen zweier gegenüberliegenden Wände gegen die Flüssigkeit gleich der von der Flüssigkeit her auf den Körper K ausgeübten Kraft sein. Daraus kann man die bekannte Tatsache schliessen, dass eine gleichförmig fallende Kugel längs einer Wand von dieser angezogen

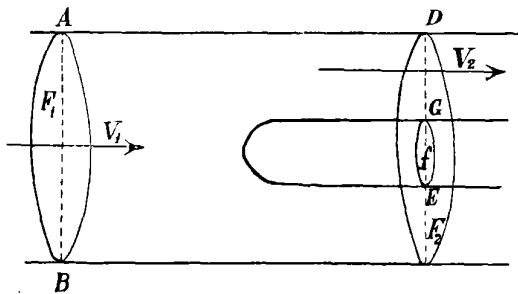


Fig. 2.

wird; in der Tat nehmen wir an, dass drei von den vier Wänden des betrachteten Prismas sehr weit entfernt von dem Körper K (einer Kugel in diesem Falle) seien; dann wird der hydrodynamische Druck auf diesen Wänden ungefähr derselbe sein wie im Unendlichen. Auf der sich im Endlichen befindlichen Wand fließt aber die verdrängte Flüssigkeits

masse schneller als im Unendlichen, so dass der darauf wirkende Druck der Bernoullischen Gleichung gemäss kleiner als im Unendlichen ist; die ganze Reaktion dieser Wand gegen die Flüssigkeit (ein Druckintegral über die Wand) ist also kleiner als die der gegenüberliegenden Wand; die Differenz beider ist gegen die sich in der Nähe der Kugel befindlichen Wand gerichtet. W. z. b. w.

4. Etwas anders liegen die Verhältnisse beim Halbkörper, einer Fläche, welche sich in einer Richtung asymptotisch zu einem Zylinder ins Unendliche erstreckt (*); hier erhält man einen von Null verschiedenen Widerstand, wenn sich der Halbkörper in einem Zylinder wie oben befindet (Fig. 2), wo eine wirbellose stationäre Bewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit mit den konstanten Geschwindigkeiten V_1 und V_2 im Unendlichen ($V_2 > V_1$) stattfindet.

Es sei nämlich F_1 der konstante Querschnitt des Zylinders, f der asymptotische Querschnitt des Halbkörpers. Wir betrachten die in dem Gebiete

(*) Vgl. G. FUHRMANN, *Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen*, Dissertation Göttingen, 1912.

$A B C E F G D$ enthaltene Flüssigkeit und wenden darauf die Bewegungskomponente der Gleichung (I) an; dabei sollen die Abstände der Querschnitte $A B$ und $C D$ von dem Vorderende des Halbkörpers im Vergleich zu den Querdimensionen des Kanals sehr gross sein. Durch eine ähnliche Überlegung wie im vorigen Paragraphen findet man, dass die zeitliche Änderung des Impulses dieser Flüssigkeitsmasse gleich:

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2$$

ist, wenn $F_1 - f$ gleich F_2 gesetzt worden ist.

Die äusseren Kräfte, welche hier in Betracht kommen, sind: der auf den vorderen Deckel $A B$ ausgeübte Druck $F_1 p_1$, der auf den hinteren wirkende $- F_2 p_2$ und der von Seiten des Halbkörpers ausgeübte Druck $-(W + p_2 f)$ (*), wobei p_1 , p_2 den Druck in $A B$ bzw. $C D$ bedeuten.

Man hat also für die gesuchte Gleichung:

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 = F_1 p_1 - F_2 p_2 - (W + p_2 f). \quad (1)$$

Benutzt man die Kontinuitätsgleichung:

$$F_1 V_1 = F_2 V_2$$

und die Bernoullische Gleichung:

$$p_1 + \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \frac{V_2^2}{2},$$

so erhält man aus (1):

$$W = \frac{F_1 f^2}{2 F_2^2} V_1^2 = \frac{f^2}{2 F_1} V_2^2$$

oder, wenn die Dichte der Flüssigkeit anstatt 1 gleich ρ gewesen wäre:

$$W = \rho \frac{F_1 f^2}{2 F_2^2} V_1^2 = \rho \frac{f^2}{2 F_1} V_2^2.$$

Man erhält also in diesem Falle einen positiven Widerstand, welcher auf den Hauptspannt f und die Geschwindigkeit V_1 bezogen den dimensionslosen

(*) Die Summe der Komponenten in der Bewegungsrichtung aller von der Flüssigkeit her auf den Halbkörper ausgeübten Drucke übersteigt nämlich den Widerstand W um den Betrag des auf f im Unendlichen herrschenden Druckes $f \cdot p_2$.

Faktor

$$\psi_1 = \frac{F_1 f}{2 F_2^2}$$

und auf V_2 den Faktor:

$$\psi_2 = \frac{f}{2 F_1}$$

liefert (*).

Hierzu passt wiederum die Bemerkung, dass die senkrecht zu der Bewegungsrichtung wirkende Schwerkraft keinen Beitrag zu diesem Widerstande hinzubringen würde.

Für den Fall, dass F_1 unendlich gross wird, f aber endlich bleibt, wird sowohl ψ , als auch ψ_2 also W auch gleich Null; dabei braucht der Kanal gar

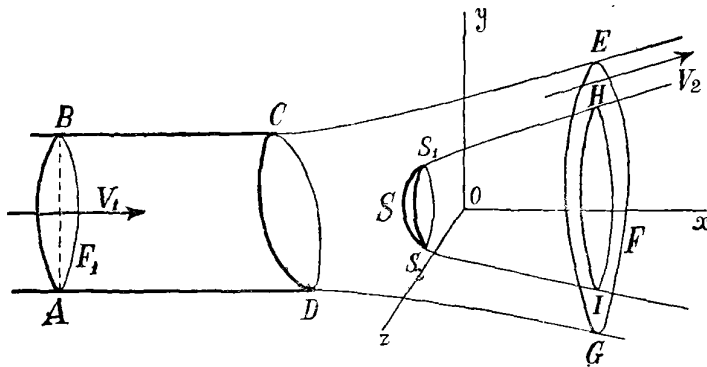


Fig. 3.

nicht nach allen Richtungen hin ins Unendliche zu rücken. Für den speziellen Fall, dass der Halbkörper von einer gewissen Rotationsfläche begrenzt wird, und dass der Kanal vollkommen verschwindet, hat Herr G. Fuhrmann (**) sowohl auf graphischem Wege als auch rechnerisch diese Tatsache bestätigt.

Mann kann ohne jegliche Schwierigkeit diese Formeln und Resultate auf die zweidimensionale Bewegung übertragen; sodann werden F_1 , F_2 , f die entsprechenden Querschnitte bedeuten, welche in der Richtung der dritten Dimension durch zwei parallele Ebenen begrenzt sind.

5. Eine andere brauchbare Anwendung finden die Impulssätze in der diskontinuierlichen stationären Bewegung. Aus einem in einer Richtung — in der negativen x -Richtung z. B. (Fig. 3) — unendlich ausgedehnten Kanäle

(*) Betreffs der Bezeichnung s. L. PRANDTL, *Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformeln* (Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1910).

(**) a. a. O., S. 9-11.

$A B C D$ kommt ein Helmholtz'scher Strahl heraus und trifft eine Schale S mit scharfen Rändern, so dass sich hinter der Schale ein Totwasser bildet.

Ich begrenze eine Flüssigkeitsmenge durch den zu Ox in grosser Entfernung von der Schale senkrecht stehenden Querschnitt AB im Kanal, durch eine weit hinter der Schale zu sämtlichen Stromlinien normal stehende Fläche $E G H I$, durch die Mantelfläche $A B C D$ des Kanals, durch die doppelte Mantelfläche des gebohrten Strahles $C E H S_1 S_2 I G D$ und durch die Schale S selbst; dieses einfach zusammenhängende Gebiet heisse \mathfrak{G} . Es sei V_1, p_1 die Geschwindigkeit bezw. der Druck der Flüssigkeit im Kanal sehr weit entfernt in der negativen x -Richtung und V_2, p_0 die Geschwindigkeit bezw. der Druck auf den freien Grenzen also auch in allen Punkten mit unendlich grossen und positiven Abscissen; es sei ferner F_1 der Flächeninhalt des normalen Querschnitts des Kanals und F_2 derjenige der Ringfläche $E G I H$. Besitzt die Flüssigkeit die konstante Dichte 1, so ist die sekundliche Zunahme des Gesamtimpulses in der x -Richtung der sich in diesem Gebiete befindlichen Flüssigkeit gleich

$$- F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 \cos \bar{\theta}.$$

$\cos \bar{\theta}$ ist an Stelle des Mittelwertes

$$\cos \bar{\theta} = \frac{1}{F_2} \int \cos \theta \cdot dF_2$$

gesetzt worden, wobei θ den Winkel, den die x -Achse mit einer asymptotischen Richtung des Strahles einschliesst, und dF_2 das Flächenelement in der betrachteten Ringfläche bedeutet; das Integral erstreckt sich über die ganze Fläche F_2 .

Um die äusseren, auf die Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte bequem zu ermitteln, wollen wir uns denken, dass eine gleichmässig verteilte Spannung an der Grenze des betrachteten Gebietes \mathfrak{G} , also eine auf der Grenzoberfläche dieses Gebietes senkrecht stehende, von innen nach aussen gerichtete Oberflächenkraft vom Betrage p_0 pro Flächeneinheit hinzukommt; die Einführung derselben bringt nämlich keine Veränderung der Gleichung (I) mit. Nun sieht man unmittelbar ein, dass die einzigen von Null verschiedenen x -Komponenten der äusseren Kräfte eine Resultierende gleich

$$(p_1 - p_0) F_1 - W$$

geben, wenn W den gegen die Schale S bewirkten hydrodynamischen Wider-

stand bedeutet; denn die Mantelfläche $ABCD$ des Kanals erfährt einen zu der x -Achse senkrecht stehenden Druck und auf der freien Grenze herrscht ja der Druck p_0 , welcher sich gegen die fingierte Spannung p_0 aufhebt.

Man hat also für die x -Komponente der Gleichung (I):

$$-F_1 V_1^2 + F_2 V_2^2 \cos \bar{\theta} = (p_1 - p_0) F_1 - W; \quad (2)$$

kraft der Kontinuitätsgleichung

$$F_1 V_1 = F_2 V_2$$

und der Bernoullischen Gleichung

$$p_1 + \frac{V_1^2}{2} = p_0 + \frac{V_2^2}{2}$$

kann man die Beziehung (2) folgendermassen umgestalten:

$$W = \frac{F_1 V_1^2}{2} \left\{ \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 2 \frac{F_1}{F_2} \cos \theta + 1 \right\} \\ = \frac{F_1 V_2^2}{2} \left\{ \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 2 \frac{F_2}{F_1} \cos \theta + 1 \right\}, \quad (3)$$

woraus man bezüglich der Widerstandsfläche f der Schale die dimensionslosen Widerstandsfaktoren

$$\psi_1 = \frac{F_1}{2f} \left\{ \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 2 \frac{F_1}{F_2} \cos \bar{\theta} + 1 \right\} \quad (3)'$$

und

$$\psi_2 = \frac{F_1}{2f} \left\{ \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - 2 \frac{F_2}{F_1} \cos \bar{\theta} + 1 \right\} \quad (3)''$$

erhält, jenachdem man den Widerstand auf die Geschwindigkeit V_1 oder V_2 bezieht.

Ist der Kanal in beiden x -Richtungen unendlich ausgedehnt (Fig. 4), so hat man in diesem speziellen Falle

$$\bar{\theta} = 0$$

und also:

$$W = \frac{f_1^2 F_1}{2 F_2^2} V_1^2 = \frac{f_1^2}{2 F_1} V_2^2, \quad (4)$$

wenn f_1 die asymptotische Breite des Totwassers ist. Die entsprechenden dimensionslosen Widerstandsfaktoren sind :

$$\psi_1 = \frac{f_1^2 F_1}{2 f F_2^2} \quad (4)'$$

auf die Geschwindigkeit vor der Schale und

$$\psi_2 = \frac{f_1^2}{2 f F_1} \quad (4)''$$

auf die Geschwindigkeit hinter der Schale bezogen. ψ_1 ist nach (3)' und (4)' sowohl im Falle des ausströmenden Strahles als auch im Kanal grösser als ψ_2 , welches durch (3)'' bzw. (4)'' gegeben wird.

Diese Bemerkung hat eine besondere Bedeutung, was die praktischen Widerstandsmessungen betrifft; dieselben werden entweder in einem solchen ausströmenden

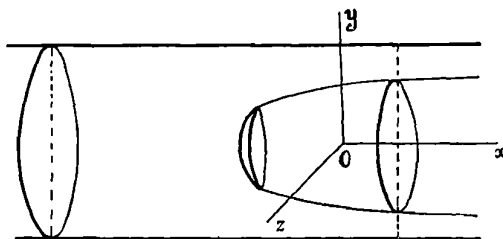


Fig. 4.

Strahle (wie z. B. in der Eiffelschen Versuchsanstalt in Paris) oder aber in einem Kanal (wie in der Prandtl'schen Versuchsanstalt in Göttingen) ausgeführt, und die auf diese Weise ermittelten Zahlen werden annähernd für den Fall der nach allen Richtungen hin unendlich ausgedehnten Flüssigkeit als gültig angesehen. Die kleinsten Abweichungen bekommt man dabei, wenn man den Widerstand auf die Geschwindigkeit hinter der Schale bezieht; diese Tatsache ist für die zweidimensionale Bewegungen theoretisch bewiesen worden (*).

Dass der dimensionslose Faktor grösser bei den Kanalversuchen als in der nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ausfällt, wenn der Widerstand auf die Geschwindigkeit vor der Schale bezogen wird, kann man sich allgemein folgendermassen plausible machen. (Fig. 5 stellt einen durch den Staupunkt A und durch eine Erzeugende der Mantelfläche des Kanals gezogenen Querschnitt in der allgemeinen dreidimensionalen Bewegung dar; die Schale ist durch eine zu den Zylindererzeugenden senkrecht

(*) V. VÁLCOVICI, *Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen*. Diss. Göttingen, 1913.

stehende Platte ersetzt worden, was für das Folgende vollkommen belanglos bleibt). Wird die Breite des Kanals vergrößert, der Druck und die Geschwindigkeit in D — dem gemeinsamen Punkte der Erzeugenden des Zylinders im Unendlichen — festgehalten, so nimmt die Geschwindigkeit auf der freien Grenze ab, und also der Staudruck p_0 wird grösser. Der Druck p auf der vorderen Seite der Platte nimmt seinen grössten Wert $p_{max.}$ im Staupunkte A an und nimmt allmählich ab, bis er am Rande gleich p_0 wird. $p_{max.}$ bleibt aber wegen der Bernoullischen Gleichung bei der Erweiterung des Kanals unverändert, so dass das Integral:

$$\int (p - p_0) df,$$

welches den Widerstand darstellt, offenbar abnimmt, wenn p_0 grösser wird.

Ähnlich kann man es für den ausströmenden Strahl zeigen; die Widerstandsfaktoren werden also sowohl in der Eiffelschen als auch in der Prandtl'schen Versuchsanstalt grösser als in Wirklichkeit, wenn die Widerstandsmessungen auf die Geschwindigkeit von der Platte bezogen werden.

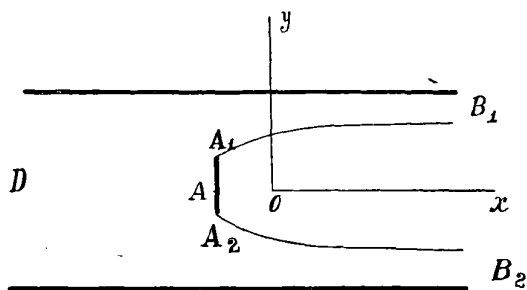


Fig. 5.

Man bezieht sie aber in den beiden Versuchsanstalten auf die Geschwindigkeit, welche in einiger

Entfernung hinter der Platte d. h. theoretisch auf der freien Grenze herrscht. Wie sich dieser auf diese Weise ermittelte Widerstandsfaktor verhält im Vergleich zu demjenigen, den man im Falle der Abwesenheit des Kanals erhält, kann man nicht mehr so einfach wie oben einsehen.

Für die zweidimensionale Bewegung ist der Fehler, den man begeht, wenn man die Widerstandsmessungen auf die Geschwindigkeit von der Platte bezieht, positiv und von der ersten Ordnung in $\sqrt{\frac{d}{D}}$, wenn D die Breite des Kanals und d die der Platte bedeutet, d. h. der gemessene Widerstandsfaktor im Kanal oder in einem aus einer Düse ausströmenden Strahle übertrifft denjenigen, den man in einem nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Flüssigkeit messen würde, um eine Grösse, welche proportional zu $\sqrt{\frac{d}{D}}$ zu Null geht. Bezieht man dagegen den Widerstand auf die Ge-

schwindigkeit hinter der Platte, so erhält man im Kanal einen positiven Fehler von der Grössenordnung $\frac{d}{D}$ und im vollkommen freien Strahle (wo der Kanal also verschwunden ist), einen negativen Fehler von derselben Grössenordnung; der Fehler, den man begeht, wenn man die Widerstandsmessungen in einem nur nach einer Richtung unendlich ausgedehnten Kanale vollführt, liegt zwischen diesen beiden extremen Fällen (*).

Die Formeln (3) und (4) bezw. (3)', (3)', (4)', (4)'' gelten auch für die zweidimensionale Strömung. Formel (4) ist von Herrn U. Cisotti(**) und von Herrn H. Villat(***) mittelst des Greenschen Satzes bei der zweidimensionalen Bewegung gefunden worden.

6. Als letzte Anwendung der Impulssätze will ich die Antwort auf eine aktuelle hydrodynamische Frage geben. Es handelt sich um die stationäre zweidimensionale Bewegung einer idealen, inkompressiblen, im Unendlichen eine linear veränderliche Geschwindigkeit besitzenden Flüssigkeit um einen festen Körper. Diese Strömung lenkte neuerdings auf sich eine besondere Aufmerksamkeit durch die Vermutung, dass eine solche Strömung gewisse mit dem Energieprinzip anscheinend in Widerspruch stehende Erscheinungen — wie der Vortrieb d. h. die Bewegung gegen den Wind ohne Arbeitsaufwand — zu erklären vermag. Herr v. Sanden hat diese Strömung um einem flügel förmigen Körper mittelst der Rungeschen graphischen Methode studiert und die dabei auftretenden Widerstandskräfte zu ermitteln versucht(****). Seine Resultate, was den Widerstand — die auf den Körper in der Richtung der Strömung ausgeübte Kraft — anbelangt, sind nicht richtig; wir werden ganz allgemein zeigen, dass der Widerstand gleich Null ist.

Es handelt sich um die zweidimensionale Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit in einem unendlich ausgedehnten mit ebenen parallelen Wänden versehenen Kanal $ABCD$ um einen festen Körper K (Fig. 6); es seien:

$$y = b, \quad y = -b$$

(*) S. die auf Seite 35 zitierte Dissertation.

(**) *Sul moto di un solido in un canale.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909.

(***) *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle.* Annales de l'École normale supérieure, 1912.

(****) *Über den Auftrieb im natürlichen Winde.* Ztschr. f. Math. u. Phys., 61. Bd., H. 3.

die Gleichungen der beiden Wände des Kanals,

$$x = a, \quad x = -a$$

die der zwei Querschnitte AB und CD . Die Strömung wird durch die Geschwindigkeit im Unendlichen:

$$u_\infty = 2\omega y, \quad v_\infty = 0 \quad (5)$$

und durch den konstanten Wirbel

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega \quad (6)$$

charakterisiert. Ich will noch vorausschicken, dass die Energiegleichung dieser Strömung, wie ich anderswo gezeigt habe (*) folgende Gestalt hat:

$$p + \frac{u^2 + v^2}{2} = 2\omega\psi + C; \quad (7)$$

die Dichte ist wie bisher gleich 1 gesetzt worden. Dabei bedeutet C eine konstante Grösse und ψ die der betrachteten Bewegung entsprechende Stromfunktion, die übrigens

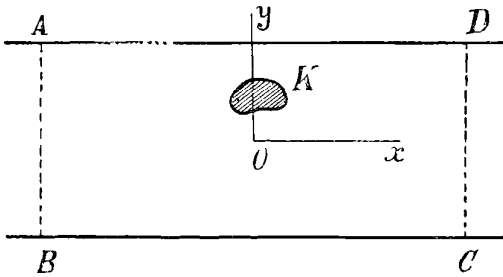


Fig. 6.

kraft des Beziehung (6) folgender Gleichung genügt:

$$\Delta\psi = 2\omega.$$

Ausserdem soll ψ den Wert ωb^2 auf den beiden Wänden des Kanals und den konstanten Wert k auf der Kontur des Körpers K annehmen; diese Konstante lässt sich, wie wir zeigen werden, eindeutig bestimmen. Im übrigen soll die Differenz

$$\psi - \omega y^2$$

im Unendlichen regulär sein.

Setzt man

$$\psi = \psi_0 + \omega y^2, \quad (8)$$

(*) *Über die Bewegung inkompressibler reibungsloser Flüssigkeiten.* Bulletin de l'Académie roumaine, novembre 1913.

so hat man für ψ_0 die Gleichung:

$$\Delta \psi_0 = 0 \quad (9)$$

und die Bedingungen der Regularität im ganzen Flüssigkeitsgebiet einschliesslich im Unendlichen, die Beziehung:

$$\bar{\psi}_0 = 0 \quad (10)$$

längs der Wände des Kanals und

$$\bar{\psi}_0 = k - \omega y^2 \quad (11)$$

auf der Grenze des Körpers K .

Die Beziehungen (9), (10) und (11) lassen bekanntlich eine eindeutig bestimmte, überall in dem betrachteten Gebiete reguläre Lösung zu; die Konstante k bestimmt man hinterher durch die Bedingung, dass die Zirkulation um den Zylinder K einen vorgegebenen Wert hat.

Jetzt wollen wir den ersten Impulssatz auf die Bewegung der Flüssigkeitsmasse, welche durch die Wände des Kanals, durch die beiden Querschnitte AB und CD , durch die Oberfläche des Körpers K und durch zwei zu xOy parallele im Abstände 1 voneinander stehende Ebenen begrenzt wird, anwenden. Die beiden Querschnitte AB und CD nehmen wir genügend entfernt vom Körper, also a genügend gross, sodass die Geschwindigkeit sowohl in AB als auch in CD bis auf unendlich kleine Grössen durch (5) gegeben wird.

Es ist ohne weiteres klar, dass die Impulsänderung in der x -Richtung gleich Null ist, so dass sich die x -Komponente der Gleichung (I) zu:

$$W = \int_B^A p \, dy - \int_C^D p \, dy \quad (12)$$

reduziert, wenn W die Resultierende der x -Komponenten der hydrodynamischen, auf die Oberfläche des Körpers K ausgeübten Kräfte bedeutet.

Aus (7), (8) und (5) erhält man unmittelbar folgende, bis auf unendlich kleine Grössen gültige Gleichung:

$$p_{AB} \cong C + 2\omega \psi_0$$

und also

$$W = 2\omega \int_B^A \psi_0 \, dy - 2\omega \int_C^D \psi_0 \, dy. \quad (12)'$$

ψ_0 ist aber regulär im Unendlichen und besitzt da den Wert Null, so dass die beiden Integrale auf der rechten Seite identisch Null sind, wenn man unendlich kleine Grössen vernachlässigt. Die Gleichung (12)' liefert infolgedessen :

$$W = 0.$$

Lassen wir für ψ_0 eine logarithmische Singularität nur im Unendlichen zu, so bedeutet das hydrodynamisch, dass die Strömung eine Zirkulation um den Körper K besitzt. Dieselbe Formel (12) oder (12)' zeigt in diesem Falle fast ebenso einfach wie oben, dass *der Widerstand gleich Null ist*.

Somit ist die Frage nach dem horizontalen Schube, den ein Körper in einem solchen linear veränderlichen Winde erfährt, vollkommen und allgemein beantwortet, wenigstens für die zweidimensionale Strömung. Das Energieprinzip kann in diesem Falle über das Vorhandensein eines Widerstandes oder eines Vortriebes *a priori* gar nichts entscheiden, da, wie Herr Prof. Prandtl bemerkt hat, die Gesamtenergie des Systems in bezug auf jedes Koordinatensystem unendlich gross ist; die überraschenden Ergebnisse der von Sandenschen Arbeit insbesondere dasjenige der Existenz eines Vortriebes, d. h. einer Kraft welche den Flügel gegen den Wind bewegen würde, konnten deshalb unmittelbar nicht widerlegt werden. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass weder Vortrieb noch Widerstand vorhanden ist, und dass also eine Erklärung des Segelfluges auf diese Weise ausgeschlossen ist.

Intorno all'interpretazione della Teoria di Galois in un campo di razionalità finito.

(Di U. SCARPIS, a Bologna.)

Ho constatato in una breve precedente Nota (*), che applicando alla risoluzione di una congruenza di terzo grado (mod. p) la formola cardanica, in dipendenza dal carattere quadratico di certi elementi, essa, in certi casi, diviene illusoria quando la congruenza ammette tre radici, ed efficace quando ne possiede una sola; mentre, in altri, succede precisamente il contrario. Ho quindi accennato alle modificazioni che potrebbe subire la Teoria di GALOIS ove si volesse applicare ad equazioni i cui coefficienti e le cui radici appartenessero ad un campo composto di un numero finito di elementi.

Scopo di questo lavoro è di presentare alcuni risultati ottenuti intorno a tale questione, i quali potrebbero forse servire di incentivo ad altri più profondi ed esaurienti.

1) Data una funzione dell'indeterminata i

$$f(i) = \alpha_0 i^n + \alpha_1 i^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

i cui coefficienti sono interi qualunque appartenenti al sistema completo di residui del modulo primo p e che si suppone irriducibile mod. p , è noto che i p^n elementi:

$$\alpha_{0h} i^{n-1} + \alpha_{1h} i^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1h} = r_h \quad (1)$$

che si ottengono attribuendo ai coefficienti α_{kh} , indipendentemente l'uno dall'altro, p valori congrui mod. p ad uno qualunque dei p residui

$$0, 1, 2, \dots, (p-1)$$

costituiscono un esempio di un dominio « pseudo-ortoide » chiamato « campo

(*) *Periodico di Matematica*. Volume XXVII, Fasc. II, 1911.

di GALOIS » definito dalla funzione modulare $f(i)$ e dal numero primo p , e che indicheremo brevemente con (r) .

Agli elementi (1), altri si possono sostituire che ad essi siano rispettivamente congrui rispetto alla $f(i)$ ed a p , i quali si identificheranno coi precedenti.

Manifestamente (r) contiene in sè come divisore il campo

$$0, 1, 2, \dots, (p-1)$$

che si può considerare generato dall'irriducibile

$$f(i) = a_0 i + a_1$$

e come è noto (*) in (r) sono sempre univoche e possibili le operazioni razionali esclusa la divisione per l'elemento nullo.

Per quanto concerne le equazioni, si dimostra che una

$$\varphi(x) = 0$$

i cui coefficienti appartengono ad (r) non può avere nello stesso campo più radici che unità il suo grado e che in particolare l'equazione

$$x^m = 1$$

possiede in (r) un numero di radici eguale al m. c. d di m e $(p^n - 1)$.

Notiamo inoltre che gli elementi di (r) (*marche*, secondo il DICKSON), ove si escluda lo 0, formano un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione; mentre, includendovi lo 0, costituiscono un gruppo pure abeliano rispetto all'addizione.

Se ora, in luogo del sistema completo di residui mod. p , assumiamo come *base* il campo di GALOIS precedentemente definito:

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_s \quad (r)$$

dove $s = p^n - 1$, detta $f(i)$ una funzione di grado m dell'indeterminata i a coefficienti ed irriducibile in (r) , considerando il sistema di $p^{n \cdot m}$ elementi:

$$a_{0h} i^{m-1} + a_{1h} i^{m-2} + \dots + a_{m-1h} = R_h \quad (2)$$

verremo così a costruire un campo più esteso (R) contenente (r) come di-

(*) DICKSON, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. Teubner, Leipzig.

visore e relativamente al quale si può ripetere quanto si è affermato pel precedente.

2) Data ora una funzione $\varphi(x)$ irriducibile in (r) si dimostra (*) che la condizione necessaria e sufficiente perchè $\varphi(x)$ divida il binomio

$$x^{p^{n \cdot k}} - x$$

è che il grado ν di $\varphi(x)$ sia divisore di k .

Ciò premesso, sia

$$\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

un'equazione a coefficienti ed irriducibile in (r) il cui grado ν è divisore di m . In quest'ipotesi $\varphi(x)$ divide

$$x^{p^{nm}} - x$$

e poichè l'equazione:

$$x^{p^{nm}} - x = 0$$

ha per radici le p^{nm} marche di (R) , se ne conclude che la (1) avrà essa pure nello stesso campo ν radici distinte e fuori di (r) in conseguenza della sua irriducibilità.

Poichè se α è radice di (1) lo è pure

$$\alpha^{p^n},$$

segue che la successione

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \alpha^{p^{2n}}, \dots, \alpha^{p^{kn}}, \dots \tag{2}$$

risulterà composta di radici di (1).

I termini della (2) non possono risultare tutti tra loro diversi, per cui se ne incontreranno senza dubbio due tra loro eguali, ed i primi soddisfacenti a tale condizione siano:

$$\alpha^{p^{rn}} = \alpha^{p^{(r+s)n}}$$

per cui dividendo per $\alpha^{p^{rn}} \neq 0$ risulta:

$$1 = (\alpha^{p^n})^{p^{sn}-1} = (\alpha^{p^{sn}-1})^{p^{rn}}.$$

Dico che $\alpha^{p^{sn}-1} = 1$.

(*) DICKSON, Op. cit., Cap. II, § 25.

Infatti, ove ciò non fosse, posto :

$$\alpha^{p^{sn}-1} = \beta = 1$$

si dovrebbe avere

$$\beta^{p^{rn}} = 1,$$

il che non può essere, poichè la

$$\alpha^{p^{rn}} = 1$$

essendo p^{rn} primo con $p^{sn}-1$, ammette in (R) l'unica radice $\alpha = 1$.

Segue che

$$\alpha^{p^{sn}-1} = 1$$

e se ne conclude che α appartiene all'esponente $p^{sn}-1$, o ad un suo divisore, e che intanto si ha :

$$\alpha^{p^{sn}} = \alpha.$$

cioè che il primo a riprodursi dei (2) è lo stesso α e che quindi $r = 0$.

Ne viene che le s radici di (1)

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \alpha^{p^{2n}}, \dots, \alpha^{p^{(s-1)n}} \quad (3)$$

sono tutte diverse, e che quindi non potrà aversi

$$\alpha^{p^{\sigma n}-1} = 1 \quad \sigma < s,$$

vale a dire che, se α non appartiene a $p^{sn}-1$ deve aver per periodo un suo divisore proprio.

Poichè la :

$$\alpha^{p^{ns}} = \alpha$$

ammette la radice α dell'irriducibile (1), le possiede tutte; vale a dire

$$\alpha^{p^{ns}} - \alpha$$

è divisibile per $\varphi(\alpha)$ e quindi ν è divisore di s , per cui $\nu \leq s$. D'altra parte, poichè le (3), tutte diverse, sono radici di (1) dovrà pur essere $s \leq \nu$, e se ne conclude :

$$s = \nu.$$

Abbiamo quindi che, se α è una qualunque delle radici di (1), il loro

insieme vien dato da :

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \alpha^{p^{2n}}, \dots, \alpha^{p^{(v-1)n}}, \quad (4)$$

dal che segue che la (1) è normale ed abeliana.

Supponiamo ora che il grado v di (1) non sia divisore di m , e che essa possieda una radice α in (R) . Come prima si dimostrerà che in questa ipotesi dovrebbero esser pure radici :

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \alpha^{p^{2n}}, \dots, \alpha^{p^{(v-1)n}} \quad (5)$$

appartenendo α a $p^{v^n} - 1$ o ad un suo divisore proprio, essendo le (5) tutte tra loro diverse.

Ma avendo la

$$x^{p^{m \cdot n}} - x = 0$$

una radice α comune con l'irriducibile (1) dovrebbe ammetterle tutte, ed essere

$$x^{p^{m \cdot n}} - x$$

divisibile per $\varphi(x)$, vale a dire m multiplo di v , il che è contro l'ipotesi, per cui non è ammissibile che la (1) abbia radici in (R) . Concludiamo col Teorema seguente: « Un'equazione di grado v

$$\varphi(x) = 0$$

a coefficienti ed irriducibile in (r) , possiede in (R) o v radici o nessuna secondo che v è o no divisore di m ».

Se α è una qualunque di tali radici, il loro insieme è dato dalla successione :

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \alpha^{p^{2n}}, \dots, \alpha^{p^{(v-1)n}}$$

e la data equazione è abeliana ».

Segue da questo Teorema che il problema che si riferisce alla risoluzione in (R) di una irriducibile in (r) , rimane limitato al caso in cui v è divisore di m .

3) Detta α una qualunque delle radici dell'irriducibile in (r) :

$$\varphi(x) = 0 \quad (1)$$

di grado v divisore di m , sappiamo che il loro insieme è dato da

$$\alpha, \alpha^{p^n}, \dots, \alpha^{p^{(v-1)n}}. \quad (2)$$

Se ora in (2), ad α sostituiamo una qualunque α^{p^r} , esse si riproducono permutandosi secondo la potenza r^{esima} della sostituzione circolare:

$$g = (\alpha \ \alpha^{p^n} \ \alpha^{p^{2n}} \ \dots \ \alpha^{p^{(v-1)n}})$$

e reciprocamente, l'effetto della sostituzione g^r in (2) equivale a sostituire $\alpha^{p^{rn}}$ ad α .

Le operazioni che rimpiazzano α con α^{p^r} ($r = 0, 1, 2, \dots, (v-1)$) sono suscettibili di composizione (*), ed il prodotto di due di esse si risolve in una delle stesse: indicandole con

$$1 = \left(\begin{matrix} \alpha \\ \alpha \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \alpha^{p^n} \\ \alpha \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \alpha^{p^{2n}} \\ \alpha \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} \alpha^{p^{(v-1)n}} \\ \alpha \end{matrix} \right)$$

si scorge subito che costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo ciclico

$$G = \left\{ g^0 = 1, g, g^2, \dots, g^{v-1} \right\}.$$

Dimostriamo ora le proprietà fondamentali del gruppo G .

α) « Se una funzione razionale delle radici di (1) con coefficienti in (r) , rimane *numericamente* invariata per tutte le sostituzioni di G , essa ha valore razionale, cioè in (r) ».

Sia $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v)$ una tale funzione, e se ne esprimano le radici mediante una qualunque di esse. Si avrà:

$$F(\alpha, \alpha^{p^n}, \dots, \alpha^{p^{(v-1)n}}) = \psi(\alpha). \quad (3)$$

Se ora si eseguisce sul primo membro di (3) la g^r , ciò equivale a sostituire $\alpha^{p^{rn}}$ ad α , per cui:

$$F_{g^r} = \psi(\alpha^{p^{rn}}).$$

Ma, per ipotesi, la F non muta di valore qualunque sia g^r , per cui ne viene:

$$F = \frac{1}{v} \left(\psi(\alpha) + \dots + \psi(\alpha^{p^{(v-1)n}}) \right)$$

ed essendo la somma tra parentesi funzione simmetrica delle α , se ne deduce che F è razionale.

(*) WEBER, *Lehrbuch der Algebra*. I, § 154.

b) Reciprocamente, sia :

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \psi(\alpha) = \rho$$

dove ρ appartiene ad (r) .

L'equazione

$$\psi(x) = \rho$$

avendo una radice in comune coll'irriducibile (1), le ammetterà tutte, per cui :

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha^{p^n}) = \dots = \psi(\alpha^{p^{(p-1)^n}}) = \rho$$

e parimenti :

$$F_{g^0} = F_g = \dots = F_{g^{p-1}} = \rho.$$

c) « Se una sostituzione sulle α lascia numericamente invariata qualunque funzione razionale delle radici a coefficienti e valore in (r) , essa appartiene a G ».

Sia infatti γ una sostituzione dotata della detta proprietà, e si ponga

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = \psi(\alpha) = \rho.$$

Applicando la γ alla relazione

$$\psi(\alpha) = \rho$$

questa continua, per ipotesi, a sussistere, per cui si avrà :

$$\psi(\alpha^{p^{kn}}) = \rho$$

essendo $\alpha^{p^{kn}}$ la radice che γ sostituisce ad α . Ripetendo la γ sulla precedente si otterrà :

$$\psi(\alpha^{p^{2kn}}) = \rho,$$

dal che segue che γ^2 ad α sostituisce $\alpha^{p^{2kn}}$. Così continuando si conclude che

$$\gamma = (\alpha, \alpha^{p^{kn}}, \alpha^{p^{2kn}}, \dots),$$

vale a dire che :

$$\gamma = g^k,$$

cioè che γ appartiene a G (*).

Ammettendo il gruppo G le tre proprietà a), b), c) caratteristiche del gruppo di GALOIS di un'equazione algebrica, lo si dirà, esso pure, gruppo di GALOIS dell'irriducibile (1).

(*) Se γ lasciasse ferma quella particolare α in funzione della quale si immaginano espresse le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, basterebbe, come è lecito, supporla sostituita con una qualunque di quelle che vengono spostate dalla γ .

Dalla forma stessa di G risulta senz'altro che esso è transitivo: reciprocamente data una

$$F(x) = 0 \quad (3)$$

a coefficienti in (r) e riducibile, ammesso che possieda radici, e che esista un gruppo Γ su di esse dotato delle proprietà *a) b) c)*, si dimostra che esso dev'essere intransitivo.

Detto infatti $f_1(x)$ uno dei fattori irriducibili di $F(x)$ che possieda μ radici in (R) , siano esse:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu. \quad (4)$$

Le funzioni simmetriche elementari delle (4), come razionali, dovranno ammettere tutte le sostituzioni di Γ , le quali dovranno limitarsi a permutarle tra loro; poichè, ove esistesse una γ che trasformasse il sistema (4) in un altro totalmente o parzialmente diverso

$$\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_\mu, \quad (5)$$

le (4) e (5) dovrebbero soddisfare alla stessa equazione $f_1(x) = 0$, il che è assurdo.

Risulta da ciò che le (4) costituiscono un sistema d'intransitività.

Teorema: « Un'equazione

$$\varphi(x) = 0$$

a coefficienti ed irriducibile in (r) e con radici in (R) , possiede un gruppo di GALOIS transitivo; reciprocamente se un'equazione

$$F(x) = 0$$

a coefficienti in (r) e riducibile in questo campo ammette radici in (R) ed esiste per essa un gruppo di GALOIS, questo dev'essere intransitivo. »

4) Supposto ora che il grado m della funzione modulare $f(i)$ (§ 1) non sia maggiore di p^n ordine del campo (r) che si è assunto come base di (R) , passiamo a riassumere quelle tra le proposizioni della Teoria di GALOIS che ne costituiscono il nucleo.

Per brevità, indicheremo costantemente nel seguito una funzione razionale delle radici di una $\varphi(x) = 0$ a coefficienti ed irriducibile in (r) , col simbolo F ; specificando volta a volta il campo a cui si intenderà appartengano i suoi coefficienti ed il suo valore.

Per quei Teoremi, la cui dimostrazione procede parallelamente a quella che si dà nell'Algebra ordinaria (*), si riporterà il solo enunciato.

Teorema 1.º: « Quelle sostituzioni del gruppo di GALOIS della $\varphi(x) = 0$ che lasciano numericamente invariata una F a coefficienti in (r) ed a valore qualunque, ne formano un sottogruppo. »

Teorema 2.º: Se G è il gruppo di GALOIS di una

$$\varphi(x) = 0$$

a coefficienti ed irriducibile in (r) , e G' è il sottogruppo di G cui appartiene una F a coefficienti in (r) , applicando a quest'ultima tutte le sostituzioni di G , essa assumerà $\frac{v}{v_1} = q$ valori

$$F = y_1, y_2, \dots, y_q$$

essendo q l'indice di G' in G , i quali saranno radici di una:

$$\psi(y) = 0$$

a coefficienti in (r) ed in esso irriducibile, ed il cui gruppo di GALOIS è il gruppo complementare

$$\Gamma = \frac{G}{G'} \text{ »}.$$

Teorema 3.º: « Se F ed F' appartengono allo stesso sottogruppo G' di G , esse si possono esprimere razionalmente l'una nell'altra ».

Detto q l'indice di G' , siano

$$F = y_1, y_2, \dots, y_q$$

i valori diversi che assume la F per tutte le sostituzioni di G , i quali sono radici dell'irriducibile

$$\psi(y) = 0.$$

Se $\gamma_1 = 1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ sono sostituzioni di G che fanno assumere alla F i valori $y_1 = F, y_2, \dots, y_q$, lo stesso effetto produrranno le:

$$g' \cdot \gamma_1; g' \cdot \gamma_2; \dots; g' \cdot \gamma_q$$

dove g' è una qualunque di G' .

(*) Cfr. BIANCHI, *Teoria dei gruppi di sostituzioni*, etc.

Ciò premesso, costruendo la funzione :

$$\Phi(y) = \left(\frac{F'g\gamma_1}{y - y_1} + \frac{F'g\gamma_2}{y - y_2} + \dots + \frac{F'g\gamma_q}{y - y_q} \right) \cdot \psi(y)$$

ed eseguendo sulle α una qualsiasi sostituzione di G , le y_i si permutano nei denominatori, come le $F'g\gamma$ nei numeratori: $\Phi(y)$ è quindi funzione di y i cui coefficienti, funzioni alla lor volta delle α , ammettono tutte le sostituzioni di G e sono quindi razionali, cioè in (r) . Facendo $y = y_i$ risulta :

$$\Phi(y_i) = F'g\gamma_i \cdot \psi'(y_i),$$

dove $\psi'(y) \neq 0$ poichè la $\psi(y) = 0$ come irriducibile non ha radici multiple, e ne segue quindi che $F'g\gamma_i$ è razionale in y ed in particolare che F' è razionale in $y_i = F$.

Corollario: « Se F' rimane invariata per tutte le sostituzioni di G' e per altre ancora; vale a dire se appartiene relativamente a G ad un gruppo contenente G' come sottogruppo, la F' sarà sempre esprimibile razionalmente mediante la F , ma non viceversa ».

Teorema 4.^o: « Data una

$$\varphi(x) = 0$$

a coefficienti ed irriducibile in (r) aggregando al suo campo di razionalità una $F = y_1$, il sottogruppo G' cui F appartiene, diventa il gruppo dell'equazione nel campo (r, y_1) .

In (r, y_1) , la $\varphi(x)$ diviene riducibile spezzandosi in q fattori $\varphi_i(x)$ irriducibili di grado $\frac{v}{q} = v_i$, essendo q l'indice di G' in G , e v_i l'ordine di G' .

Ciascuna poi delle q equazioni:

$$\varphi_i(x) = 0$$

ha per gruppo il corrispondente fattore circolare della base di G' ».

Che G' ammetta la proprietà *b*) (§ 3) del gruppo di GALOIS, ogni qualvolta il valore della funzione delle radici appartenga, insieme ai suoi coefficienti, al primitivo campo di razionalità, è manifesto poichè G' è sottogruppo di G .

Sia ora $U(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v)$ una funzione che in generale supponiamo a valore e coefficienti in (r, y_1) , per cui:

$$U(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v) = \theta(y_1).$$

Ma la $(U - \theta(y_1))$, che in ultimo si riduce ad una funzione razionale delle α con coefficienti in (r) , come nulla ammette tutte le sostituzioni di G e quindi di G' per cui:

$$U_{g'} - \theta(F_{g'}) = 0.$$

Ma $F_{g'} = F = y_1$ e quindi:

$$U_{g'} = \theta(y_1) = U.$$

Resta così provato che G' possiede la proprietà *b*).

Per la proprietà *a*), basta osservare che, in base al Teorema e Corollario precedenti, se una F' rimane numericamente invariata per tutte le sostituzioni di G' sarà F' razionale in $F = y_1$, cioè apparterrà al nuovo campo di razionalità. Rimane ancora a provarsi che G' risponde pure alla condizione *c*). A tal uopo, ricordiamo che essendo G ciclico, G' avrà la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha \alpha^{p^{nq}} \alpha^{p^{2nq}} \dots \alpha^{p^{(v_1-1)nq}}) (\alpha^{p^n} \alpha^{p^{n(q+1)}} \dots \alpha^{p^{n((v_1-1)q+1)n}}) \\ \dots \dots (\gamma^{p^{n(q-1)}} \alpha^{p^{n(2q-1)}} \dots \alpha^{p^{n(v_1q-1)}}) \end{array} \right\} \\ = \left\{ C_1 C_2 \dots C_q \right\}.$$

Ciò premesso, essendo ρ in (r, y_1) , consideriamo la funzione

$$(\rho - \alpha)(\rho - \alpha^{p^{nq}}) \dots (\rho - \alpha^{p^{(v_1-1)nq}}) = \theta$$

i cui coefficienti, ammettendo tutte le sostituzioni di G' appartengono ad (r, y_1) . Se ora γ è una sostituzione di G che lasci numericamente invariata qualunque funzione razionale delle radici a coefficienti e valore in (r, y_1) e quindi anche la θ , dovrà necessariamente permutare tra loro le:

$$\alpha, \alpha^{p^{nq}}, \dots, \alpha^{p^{(v_1-1)nq}}$$

sostituendo ad α una $\alpha^{p^{knq}}$, a questa la $\alpha^{p^{knq}}$ e così di seguito, per cui γ conterrà come fattore la potenza k^{esima} del ciclo C_1 .

Nello stesso modo si dimostrerà che dovrà pure contenere una potenza h^{esima} di C_2 e così di seguito; e poichè le sostituzioni di G sono regolari ed è quindi $k = h = \dots$ si conclude che

$$\gamma = C_1^k \cdot C_2^k \dots C_q^k,$$

vale a dire γ appartiene a G' .

Il gruppo G' , soddisfacendo alle condizioni $a)$ $b)$ $c)$, è quindi il gruppo di GALOIS della $\varphi(x) = 0$ nel campo ampliato (r, y_1) . Essendo G' intransitivo, la $\varphi(x) = 0$ nel nuovo campo diviene riducibile in fattori irriducibili di egual grado ciascuno dei quali ha per radici quelle appartenenti ad uno stesso sistema d'intransitività, e se indichiamo con $\varphi_1(x)$ quelle dei fattori di $\varphi(x)$ le cui radici appartengono al ciclo C_1 , è facile il vedere che C_1 diventa il gruppo di GALOIS in (r, y_1) dell'irriducibile:

$$\varphi_1(x) = 0.$$

Teorema 5.º: « Per ogni sottogruppo di G , esistono funzioni ad esso appartenenti ».

Sia G' tale sottogruppo: esso avrà la forma già notata nel Teorema precedente, ed eseguendo le sue sostituzioni sulla funzione $F = y_1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= (\rho - \alpha) (\rho - \alpha^{\lambda n_2}) \dots (\rho - \alpha^{p^{(\nu_1-1)n_2}}) \\ &= \rho^{\nu_1} + c_{11} \rho^{\nu_1-1} + c_{12} \rho^{\nu_1-2} + \dots + c_{1\nu_1} \end{aligned}$$

dove ρ è un'indeterminata in (r) , la predetta funzione non muta, mentre per una sostituzione di G non in G' , si cambia in:

$$y'_1 = (\rho - \alpha^{p^{\lambda n}}) (\rho - \alpha^{p^{\lambda n_2}}) \dots (\rho - \alpha^{p^{(\nu_1-1)n_2 + \lambda n}}).$$

Se ora immaginiamo effettuate sulla y_1 tutte le sostituzioni di G , otterremo $q = \frac{\nu}{\nu_1}$ funzioni algebricamente distinte:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \rho^{\nu_1} + c_{i1} \rho^{\nu_1-1} + \dots + c_{i\nu_1} \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, q). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dico che potremo sempre scegliere l'indeterminata ρ in modo che le y_i risultino numericamente diverse.

Premesso che nella successione:

$$c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{qk}; \quad (k = 1, 2, \dots, \nu_1)$$

ciascun termine si deduce dal precedente sostituendo α^{p^m} ad α , e che lo stesso avviene quindi nella:

$$y_1, y_2, \dots, y_q$$

notiamo che se due delle y_r ed y_s per un certo ρ assumono valori eguali,

esse diventano tutte eguali se q è dispari; mentre se q è pari od accade lo stesso, o risultano tra loro eguali quelle d'indice pari, e quelle d'indice dispari.

Infatti dall'ipotesi

$$y_r = y_s$$

segue che $y_r - y_s = 0$ ha valore razionale e che rimarrà quindi invariata per tutta la sostituzione di G per cui:

$$y_{r+1} - y_{s+1} = 0; \quad y_{r+2} - y_{s+2} = 0 \dots$$

e di qui, facilmente, quanto si è asserito.

Ne viene che, se per un certo ρ due qualunque delle y se q è dispari, o due con indice di egual parità nel caso opposto, risultano tra loro diverse, per lo stesso ρ tutte indistintamente le y assumeranno valori diversi. Consideriamo dopo ciò la:

$$y_r - y_s = (c_{r1} - c_{s1}) \rho^{v_1-1} + (c_{r2} - c_{s2}) \rho^{v_1-2} + \dots + c_{rv_1} - c_{sv_1} = 0$$

soddisfacendo gli indici r, s alla predetta condizione.

Una tale equazione che non può mai ridursi ad una identità, potrà avere al più $(v_1 - 1)$ radici in (r) e siccome $v_1 < m \leq p^n$, esisterà in (r) per lo meno un ρ per cui le due y_r, y_s assumeranno valori diversi e tali risulteranno tutti i termini della successione

$$y_1, y_2, \dots, y_q.$$

Resta così provata l'esistenza di una funzione appartenente a G' .

Osservazione: « Confrontando questa dimostrazione con quella che si dà nel caso ordinario (*), si scorge il perchè dell'ipotesi restrittiva $m \leq p^n$ ».

Teorema 6.º: « Se ampliando (r) con una qualsiasi marca di (R) , il gruppo di $\varphi(x) = 0$ si abbassa ad un suo sottogruppo G' , lo stesso risultato si può conseguire aggregando ad (r) una F appartenente a G' ».

Teorema 7.º: « Siano

$$\varphi(x) = 0; \quad \psi(x) = 0$$

due irriducibili a coefficienti in (r) con radici in (R) , e G, Γ i loro gruppi di GALOIS: se aggregando ad (r) le radici β di $\psi(x) = 0$, G discende a G' d'indice q , reciprocamente ampliando il campo (r) con le radici α di $\varphi(x) = 0$, Γ si riduce ad un suo sottogruppo Γ' d'indice q ».

(*) BIANCHI, Op. cit., § 69.

Anche la dimostrazione di questo importante Teorema è del tutto simile a quella sua corrispondente nell'Algebra (*), ed è una conseguenza diretta delle precedenti proposizioni.

Da quanto precede risulta che le proposizioni fondamentali della Teoria di GALOIS conservano il loro significato anche se applicate ad equazioni in uno speciale campo di razionalità finito.

Nel paragrafo seguente vedremo come esse si possano applicare alla risoluzione e discussione del problema che ha per scopo la determinazione delle radici mediante radicali.

5) Data la

$$\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

a coefficienti ed irriducibile in (r) di grado ν divisore di m e quindi dotata di ν radici in (R) , indichiamo con ε una radice primitiva ν^{esima} dell'unità, e si ponga quindi:

$$y_1 = (\varepsilon, \alpha) = \alpha + \varepsilon \alpha^{p^n} + \varepsilon^2 \alpha^{p^{2n}} + \dots + \varepsilon^{\nu-1} \alpha^{p^{n(\nu-1)}},$$

Applicando ad y_1 la sostituzione fondamentale

$$g = (\alpha \ \alpha^{p^n} \ \alpha^{p^{2n}} \ \dots \ \alpha^{p^{n(\nu-1)}})$$

del gruppo della (1) si ottiene:

$$y_{1g} = y_2 = \alpha^{p^n} + \varepsilon \alpha^{p^{2n}} + \dots + \varepsilon^{\nu-1} \alpha = \varepsilon^{-1} \cdot y_1,$$

dal che segue che la potenza ν^{esima} di y_1

$$y_1^\nu = (\varepsilon, \alpha)^\nu$$

rimane numericamente invariata per la g e per le sue potenze, e ne viene che essa è razionalmente esprimibile mediante ε e gli elementi di (r) .

Ponendo in generale

$$(\varepsilon^r, \alpha)^\nu = B_r \tag{2}$$

le B_r saranno tutte razionalmente note e però le B_r si otterranno estraendo una radice ν^{esima} .

Facendo successivamente in (2) $r = 0, 1, 2, \dots, (\nu - 1)$, ne risulta un si-

(*) BIANCHI, Op. cit., § 72.

stema di ν equazioni lineari a ν incognite $\alpha, \alpha^{p^n}, \dots, \alpha^{p^{(\nu-1)n}}$ da cui, sommando, la formula di risoluzione:

$$\alpha = \frac{-\alpha_1 + \sqrt[\nu]{B_1} + \sqrt[\nu]{B_2} + \dots + \sqrt[\nu]{B_{\nu-1}}}{\nu} \quad (3)$$

essendo α , il coefficiente del secondo termine di (1) supposto quello del primo ridotto all'unità, e sulla quale si possono ripetere le stesse osservazioni che valgono pel caso analogo nell'Algebra ordinaria (*) e intorno a cui non insistiamo.

Poniamo ora che il grado ν della (1) sia primo con $S = p^{n-m} - 1$. In questa ipotesi la:

$$x^\nu = 1$$

ha in (R) l'unica radice $x = 1$, e la (3) diviene evidentemente illusoria. Se invece ν non è primo con S , ma non è nemmeno un suo divisore, possono presentarsi due casi: che ν sia composto di soli fattori primi di S , oppure che contenga qualche fattore estraneo. Nel primo caso si raggiungerà la soluzione della (1) mediante quella di una catena di equazioni i cui gradi risulteranno tutti divisori di S ed alle quali si potrà sempre applicare il procedimento su indicato.

Nel secondo caso, posto $\nu = \nu_1 \cdot q$ dove ν_1 è il prodotto di tutti i fattori di ν estranei ad S , determinando una $F = y_1$ appartenente a G' d'ordine ν_1 e d'indice q (§ 4) che si otterrà risolvendo una $\psi(y) = 0$ di grado q , ampliando poi il campo (r) con la y_1 , la (1) verrà ad avere per gruppo G' divenendo riducibile. La sua risoluzione si potrà bensì far dipendere da quella dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero uno dei suoi fattori irriducibili in (r, y_1) di grado ν_1 , ma essendo ν_1 primo con S , la (3) risulta nuovamente illusoria. Facciamo ancora vedere come, applicando il Teorema 7.º del § 4, si possa dimostrare l'impossibilità di abbassare comunque il gruppo della (1) quando sia ν primo con S .

Supponiamo infatti che ampliando (r) con le radici β di una qualsiasi ausiliaria $\psi(x) = 0$, irriducibile in (r) e di grado μ divisore di S , o composto di soli fattori primi di S , e di gruppo Γ , sia possibile ridurre quello della (1) ad un suo sottogruppo G' d'indice q : per il citato Teorema, l'aggregare ad (r)

(*) BIANCHI, Op. cit., § 73 e seguenti.

le radici α di (1) dovrebbe pure abbassare Γ ad un suo sottogruppo Γ' d'indice q . Ne verrebbe allora:

$$\nu = \nu_1 \cdot q \quad \mu = \nu_1 \cdot q$$

e poichè μ risulta di soli fattori primi di S , non sarebbe più ν primo con S . Dovrà quindi essere necessariamente

$$q = 1$$

e $G' = G$.

Se il grado μ non è composto di soli fattori primi di S , potrà anche ottenersi un abbassamento del gruppo di (1), ma allora bisogna supporre *date* le radici di $\psi(x) = 0$, poichè ove si volessero costruire per radicali, si urterebbe nella stessa difficoltà. Un caso che sembra a primo aspetto contraddire ai risultati precedenti, è quello in cui la (1) fosse della forma:

$$x^\nu = \rho \tag{4}$$

con ν non composto di soli fattori primi di S : ma è facile vedere che in questa ipotesi la (4) non può soddisfare alla duplice condizione di essere irriducibile e di avere il suo grado divisore di m .

In vero posto:

$$\nu = \nu_1 \cdot \delta; \quad \delta = D(S, \nu)$$

le potenze di grado ν delle S marche di (R) (lo zero escluso) danno luogo ad un sistema di $\frac{S}{\delta}$ residui diversi ciascuno dei quali è ripetuto δ volte (*).

La (1) possiede quindi o δ radici o nessuna ($\delta < \nu$), mentre se fosse irriducibile con ν divisore di m , dovrebbe ammetterne ν .

Osservazione: « La formula di risoluzione (3) qualora sia ν composto di soli fattori primi di S è valida in generale poichè viene dedotta da proposizioni che sussistono indipendentemente dall'ipotesi restrittiva $m \leq p^n$; non sarebbe però legittimo l'uso dei Teoremi 5.º, 6.º, 7.º del § 4 alla sua discussione nel caso ν primo con S , qualora fosse $m > p^n$ ».

6). Esempi:

$$\text{I.º } p = 2; \quad f(i) = i^6 - i - 1; \quad n = 1; \quad m = 6$$

$$\varphi(x) = x^3 + x + 1 = 0. \tag{1}$$

(*) DICKSON, Op. cit., Cap. III.

Come base di (R) assumiamo

$$(r) = (0, 1)$$

ed (R) risulta costituito dai 2^6 elementi:

$$a_0 i^5 + a_1 i^4 + \dots + a_5$$

che si ottengono attribuendo alle a i valori 0, 1.

La (1), il cui grado $v = 3$ è divisore di $m = 6$ ed è irriducibile in (r) , ha tre distinte radici in (R) e poichè v è divisore di

$$S = 2^6 - 1 = 63$$

potremo applicare la formula (3) § 5.

Detta ε una radice cubica primitiva dell'unità, avremo:

$$B_1 = (\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3)^3 = \sum \alpha_i^3 + 6 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon^2 (\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2) + \varepsilon (\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3).$$

Posto, in base al Teorema del § 2, $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = \alpha^2$; $\alpha_3 = \alpha^4$, risulta:

$$\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 = \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^{10}$$

e poichè:

$$\alpha^8 = \alpha$$

ne viene:

$$\alpha^6 = \alpha^8 \cdot \alpha^6 \cdot \alpha^4 = \alpha^{20} = (\alpha^4)^5$$

$$\alpha^{10} = (\alpha^2)^5$$

per cui:

$$\begin{aligned} \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^{10} &= \alpha^5 + (\alpha^2)^5 + (\alpha^4)^5 = \\ &= \alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 = \sum \alpha_i^5. \end{aligned}$$

Parimenti:

$$\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 = \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^9 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 = \sum \alpha_i.$$

Avremo così per B_1 :

$$B_1 = \sum \alpha_i^3 + 6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \varepsilon^2 \sum \alpha_i^5 + \varepsilon \sum \alpha_i.$$

e dalle formule di NEWTON (*):

$$\Sigma \alpha_i^3 = 1; \quad \Sigma \alpha_i^5 = 1; \quad \Sigma \alpha_i = 0$$

$$6 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -6 = 0$$

per cui in fine:

$$B_1 = 1 + \varepsilon^2$$

e sostituendo ad $\varepsilon, \varepsilon^2$:

$$B_2 = 1 + \varepsilon.$$

Fissata la radice ε , e supposta stabilita la corrispondenza tra i simboli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e le radici di (1), il radicale

$$\sqrt[3]{B_1} = \sqrt[3]{(\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3)^3} = \sqrt[3]{1 + \varepsilon^2}$$

è suscettibile di tre diverse determinazioni che, convenendo di indicare col semplice radicale la determinazione $\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3$, si possono esprimere ponendo:

$$\sqrt[3]{B_1} = \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3$$

$$\varepsilon^2 \sqrt[3]{B_1} = \alpha_2 + \varepsilon \alpha_3 + \varepsilon^2 \alpha_1$$

$$\varepsilon \sqrt[3]{B_1} = \alpha_3 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2$$

a cui corrispondono tre valori per $\sqrt[3]{B_2}$ che si deducono sostituendo ε^2 ad ε :

$$\sqrt[3]{B_2} = \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon \alpha_3$$

$$\varepsilon \sqrt[3]{B_2} = \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3 + \varepsilon \alpha_1$$

$$\varepsilon^2 \sqrt[3]{B_2} = \alpha_3 + \varepsilon^2 \alpha_1 + \varepsilon \alpha_2.$$

Le formole di risoluzione, osservando che $\alpha_1 = 0$ e che nel campo $(r) = (0, 1)$ si ha: $\frac{1}{3} = 1$, diventano:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{B_1} + \sqrt[3]{B_2}$$

$$\alpha_2 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{B_1} + \varepsilon \sqrt[3]{B_2}$$

$$\alpha_3 = \varepsilon \sqrt[3]{B_1} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{B_2}$$

(*) DICKSON, Op. cit., Cap. III.

ciascuna delle quali soddisfa la (1), purchè si ponga :

$$(\sqrt[3]{B_1})^3 = 1 + \varepsilon^2; \quad (\sqrt[3]{B_2})^3 = 1 + \varepsilon; \quad \sqrt[3]{B_1} \cdot \sqrt[3]{B_2} = 1.$$

Supposta ora costruita la tavola di moltiplicazione del gruppo costituito dagli elementi di (R) escluso l'elemento nullo, si potrà col suo sussidio risolvere la questione che ha per oggetto di determinare se e da quali marche risulti soddisfatta un'equazione del tipo :

$$x^\lambda = r_n \quad (r_n \text{ in } (R))$$

e ricaveremo quindi :

$$\varepsilon = i^5 + i^4 + i^3 + i; \quad \varepsilon^2 = i^5 + i^4 + i^3 + i + 1$$

$$\sqrt[3]{1 + \varepsilon} = i^4 + i^3 + i^2; \quad \sqrt[3]{1 + \varepsilon^2} = i^3 + i + 1.$$

I valori assunti per $\sqrt[3]{B_1} = \sqrt[3]{1 + \varepsilon^2}$, e per $\sqrt[3]{B_2} = \sqrt[3]{1 + \varepsilon}$ soddisfano alla condizione :

$$\sqrt[3]{B_1} \cdot \sqrt[3]{B_2} = 1.$$

Infatti rammentando che :

$$2 = 0; \quad i^6 = i + 1; \quad i^7 = i^2 + i$$

risulta :

$$(i^4 + i^3 + i^2) (i^3 + i + 1) = i^7 + i^6 + 2i^5 + 2i^4 + 2i^3 + i^2 \\ = 2i^2 + 2i + 1 = 1.$$

Avremo quindi :

$$\alpha_1 = i^3 + i + 1 + i^4 + i^3 + i^2 = i^4 + i^2 + i + 1$$

$$\alpha_2 = i^4 + i^3 + 1$$

$$\alpha_3 = i^3 + i^2 + i$$

$$\text{II.}^0 \quad p = 7; \quad f(i) = i^3 - i + 2; \quad n = 1; \quad m = 3$$

$$\varphi(x) = x^3 - 2x + 2 = 0 \tag{2}$$

$$(r) = (0, 1, 2, \dots, 6)$$

$$(R) = (\alpha_0 i^2 + \alpha_1 i + \alpha_2) \quad S = 7^3 - 1 = 342$$

$$B_1 = (\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3)^3; \quad B_2 = (\alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon \alpha_3)^3$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha; & \alpha_2 &= \alpha^7; & \alpha_3 &= \alpha^{49} \\ \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3^2 &= \alpha^{15} + (\alpha^7)^{15} + (\alpha^{49})^{15} = \sum \alpha_i^{15} \\ \alpha_1^3 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3 &= \alpha^9 + (\alpha^7)^9 + (\alpha^{49})^9 = \sum \alpha_i^9 \\ B_1 &= \sum \alpha_i^3 + 6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 3 \varepsilon^2 \sum \alpha_i^{15} + 3 \varepsilon \sum \alpha_i^9 \\ \sum \alpha_i^3 &= 1; & \sum \alpha_i^9 &= 0; & \sum \alpha_i^{15} &= 6; & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= -2 \end{aligned}$$

e quindi sostituendo

$$B_1 = 3(1 - \varepsilon^2); \quad B_2 = 3(1 - \varepsilon).$$

Supposto fissata la ε e stabilito l'ordinamento delle radici, ripetendo le stesse considerazioni dell'esempio precedente, posto $\alpha_1 = 0$; $\frac{1}{3} = 5$, si trova:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5 \sqrt[3]{B_1} + 5 \sqrt[3]{B_2} \\ \alpha_2 &= 5 \varepsilon^2 \sqrt[3]{B_1} + 5 \varepsilon \sqrt[3]{B_2} \\ \alpha_3 &= 5 \varepsilon \sqrt[3]{B_1} + 5 \varepsilon^2 \sqrt[3]{B_2} \end{aligned}$$

ciascuna delle quali soddisfa alla (2) purchè si faccia:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{B_1})^3 &= 3(1 - \varepsilon^2); & (\sqrt[3]{B_2})^3 &= 3(1 - \varepsilon) \\ \sqrt[3]{B_1} \cdot \sqrt[3]{B_2} &= (\alpha_1 + \varepsilon \alpha_2 + \varepsilon^2 \alpha_3) (\alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon \alpha_3) = 6. \end{aligned}$$

Rimarrebbe ora a compiersi l'estrazione dei radicali cubici in (B), ma per l'estensione del campo che risulta di 343 elementi, l'operazione diviene eccessivamente prolissa.

Bologna, Settembre 1913.

Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari.

(Di LEONIDA TONELLI, a Cagliari.)

Seguendo PLATEAU, si può ottenere sperimentalmente un liquido sottratto all'azione della gravità introducendo dell'olio d'oliva in una miscela opportuna di acqua ed alcool. Conseguendo in questa miscela una densità esattamente uguale a quella dell'olio, l'azione della gravità sull'olio stesso viene annullata dalla reazione della miscela. Restano così in gioco le sole tensioni superficiali e da queste viene esclusivamente a dipendere la forma che la massa oleosa assume, per restarvi in equilibrio.

Se, come PLATEAU ha fatto realmente, si procede in modo che l'olio si appoggi a due sostegni rigidi fissi, a due dischi circolari, uguali, disposti perpendicolarmente alla retta che ne congiunge i centri, e ad una distanza reciproca tale che il volume del cilindro costruito su essi come basi sia uguale al volume dell'olio, si riesce ad ottenere che l'olio medesimo si disponga secondo il cilindro detto, ogniqualvolta la distanza fra i dischi non superi la loro periferia. Ne viene così che, verificata la disuguaglianza menzionata fra l'altezza del cilindro e la periferia delle sue basi, il cilindro dà una forma di equilibrio stabile.

Questo è il risultato dell'esperienza; e questo è anche quello a cui deve condurre la teoria.

Senonchè la teoria, qui come in altri casi, si è mostrata assai recalcitrante. E nonostante l'opera di HAGEN, PLATEAU, BEER, MATHIEU, POINCARÉ e ALMANSI, la dimostrazione puramente analitica della stabilità dell'equilibrio del cilindro, nel caso detto, non è ancora riuscita in modo completo.

Col presente lavoro ci proponiamo di sopperire a questa deficienza.

I.

1. Innanzi tutto, un po' di storia della questione; e per intenderci bene, formuliamo subito, con precisione, il problema analitico.

Consideriamo la nostra massa oleosa a forma cilindrica e appoggiantesi ai due dischi detti. Dovendosi dimostrare che si tratta di una configurazione di equilibrio stabile, devesi far vedere che si ha un minimo per il potenziale delle forze che agiscono sull'intero sistema (olio, miscela, dischi, vaso che contiene il tutto). Supponendo di mantenere inalterata la superficie libera della miscela, e supponendo inoltre che l'olio sia ad una distanza sufficiente tanto dalla superficie libera detta come dalle pareti del vaso, la variazione del potenziale dovuta a deformazioni della massa oleosa — deformazioni che non spostano il centro di gravità del sistema, per l'uguale densità della miscela e dell'olio — si può considerare come unicamente dipendente dalle forze molecolari esercitanti su e fra l'olio, i dischi e la miscela, in quanto e solo però questa miscela trovasi nelle immediate vicinanze dell'olio e dei dischi. Questa parte di potenziale, diciamo così attiva di fronte alle modificazioni della massa d'olio, risulta di tre componenti, proporzionali rispettivamente alla superficie S di separazione fra l'olio e la miscela, alla superficie Σ di contatto dell'olio coi dischi, e a quella di contatto della miscela coi medesimi dischi; e può ridursi perciò ad una funzione lineare di S , Σ e della superficie totale dei dischi (*). Tralasciando quello che rimane costante per ogni deformazione della massa oleosa, resta

$$W = m S - n \Sigma, \quad (1)$$

e devesi mostrare che questa espressione (nella quale il primo coefficiente m è *positivo*) ammette un minimo sulla superficie cilindrica di cui si tratta.

E conviene ricordare che, dovendo le deformazioni ammissibili esser tali da consentire l'invariabilità del volume dell'olio, il minimo che qui si presenta non è libero, ma condizionato; in altre parole, qui si ha a che fare con uno di quei problemi di minimo detti *isoperimetrici* (**).

(*) Cfr. POINCARÉ, *Capillarité* (Paris, G. Carré, 1895), p. 87.

(**) Il problema attuale è però più complesso di quelli che si considerano ordinariamente nel *Calcolo delle Variazioni*, perchè qui non si tratta di render minima solamente la superficie S , ma tutta l'espressione $W = m S - n \Sigma$.

2. Dopo che PLATEAU ebbe provata sperimentalmente la stabilità del cilindro — dentro quel determinato limite per l'altezza, cui già abbiamo accennato — HAGEN (*) si preoccupò di raggiungere lo stesso risultato per mezzo del Calcolo. Ma il suo lavoro è inquinato da due errori fondamentali: 1.^o) quello di considerare le curve meridiane delle superficie deformate, che poneva a confronto con quella del cilindro, come composte di tanti archi di cerchio; 2.^o) l'altro di calcolare, in luogo delle pressioni capillari esercitate su tutta la lunghezza di questi archi di cerchio (poichè egli intendeva appunto di dedurre la stabilità dal confronto delle pressioni capillari), solamente quelle esercitate nei vertici degli archi medesimi. E questi errori condussero l'autore ad affermare che la stabilità si ha solo per l'altezza del cilindro inferiore al diametro delle basi moltiplicato per $2^{3/2}$, mentre invece si ha in fatto la stabilità per ogni altezza inferiore al diametro moltiplicato per π .

3. Facendo la critica alla Nota dell'HAGEN, il PLATEAU (**) cercò di mostrare che il cilindro di altezza inferiore alla circonferenza delle sue basi dà il minimo per l'area della superficie, compatibilmente all'invariabilità del volume racchiuso. A tal uopo confrontò il cilindro con le superfici di rivoluzione racchiudenti lo stesso volume ed aventi per curva meridiana una sinusoidale. Ma il limitarsi alla considerazione di questa classe speciale di superficie non permette di dedurre la proprietà di minimo in generale; talchè la dimostrazione del PLATEAU risulta già del tutto insufficiente. E quello che importa ancora di rilevare si è che il PLATEAU suppone, implicitamente, che *le basi della massa deformata siano invariabilmente i due dischi*, vale a dire, che Egli si riduce alla considerazione di questo problema analitico (che è ben più semplice di quello che deve effettivamente risolversi): « mostrare che fra tutte le superficie di rivoluzione attorno all'asse del cilindro, che passano per i cerchi basi di quest'ultimo e che racchiudono lo stesso volume, il cilindro dà la minima area ». Di questa proprietà di minimo, diciamo così ristretta, il PLATEAU ha dato altre dimostrazioni, oltre quella accennata, ma nessuna è soddisfacente dal punto di vista puramente analitico. Per rendere

(*) *Ueber die Auflösung flüssiger Cylinder in Tropfen* (Ann. di Poggendorff, 1850, v. LXXX, p. 559).

(**) J. PLATEAU, *Ueber die Gränze der Stabilität eines flüssigen Cylinders* (Ann. di Poggendorff, 1850, v. LXXX, p. 566). — *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (Paris, Gauthier-Villars, 1873).

al PLATEAU piena giustizia, è però doveroso ricordare che Egli non si propose veramente mai di ottenere delle dimostrazioni fondate solo sul calcolo, poichè, come Egli stesso afferma, si pose sempre « au point de vue physique », « en s'aidant à la fois de l'expérience et de la théorie » (*).

4. Vogliamo ora ricordare un'altra delle dimostrazioni menzionate del PLATEAU, e ciò specialmente nell'intento di chiarire un equivoco nel quale pare sia caduto il POINCARÉ. La dimostrazione è fondata sul seguente principio, suggerito al PLATEAU dal LAMARLE, e che io riporto letteralmente dalla *Statique expérimentale, etc.* (**):

« Supposons un cylindre d'huile horizontal réalisé entre deux disques au sein du mélange alcoolique, et assez court pour être stable, sans être cependant trop en deçà de la limite. Si, en poussant légèrement le liquide en plus grande quantité vers l'un des disques au moyen du bec de la petite seringue, on détermine la formation artificielle d'un renflement et d'un étranglement, et si cette modification de la figure ne dépasse pas un certain degré, la masse abandonnée ensuite à elle-même reprend spontanément la figure cylindrique initiale. Mais si l'altération excède le degré dont il s'agit, elle progresse ensuite spontanément, et la transformation s'achève. Or, au degré précis d'altération qui sépare les tendances à ces deux effets opposés, la masse doit évidemment être indifférente à l'une et à l'autre; il doit donc y avoir là un état d'équilibre, bien que cet équilibre soit instable; et comme la figure est alors encore de révolution et qu'elle se compose d'un renflement et d'un étranglement, elle forme nécessairement une portion d'onduloïde. En second lieu, puisque cet onduloïde partiel constitue le degré d'altération où va commencer la tendance spontanée à une altération plus profonde, il doit s'écarter d'autant moins de la figure initiale, c'est-à-dire du cylindre, que celui-ci est plus près de sa limite de stabilité. Enfin, lorsque le cylindre est à cette limite même, l'onduloïde partiel doit coïncider exactement avec lui, puisque alors la plus faible trace d'un renflement et d'un étranglement doit suffire pour amener la transformation spontanée ».

Il PLATEAU verifica col calcolo che quando l'onduloide, di cui si parla nel principio ricordato, tende a confondersi col cilindro, la distanza fra le basi dell'onduloide medesima tende a diventare uguale alla loro circonferenza; donde la conclusione voluta, che cioè il limite superiore dell'altezza

(*) Cfr. *Statique expérimentale, etc.* Tome second, pp. 296-97.

(**) T. II, pp. 249-50.

del cilindro, per la quale si ha stabilità, è dato dalla circonferenza delle basi del cilindro stesso.

Il POINCARÉ, alla pag. 96 del libro citato, scrive: « Pour chercher théoriquement les conditions de stabilité du cylindre de révolution, il faut comparer cette surface aux surfaces d'équilibre très voisines et voir dans quels cas la surface du cylindre est un minimum relatif. PLATEAU a appliqué cette méthode; mais, au lieu de comparer la surface du cylindre à la surface de l'onduloïde, qui est la surface d'équilibre résultant d'une petite déformation du cylindre, il l'a comparée à la surface de révolution engendrée par la rotation d'un senoïde ». Ora è da avvertire che, nella dimostrazione cui qui ci si riferisce, il PLATEAU non intende affatto di considerare la senoide in sostituzione della curva meridiana di una superficie di equilibrio; le superficie di equilibrio entrano in gioco solo nella dimostrazione fondata sul principio del LAMARLE, la quale non ha nulla a che vedere con la senoide.

5. Tralascio di discorrere dell'opera del BEER (*), sia perchè anch'Egli si aiuta or col calcolo or coi risultati dell'esperienza, sia perchè si fonda sull'erronea considerazione che le superficie a curvatura media costante siano sempre delle superficie di area minima fra quelle racchiudenti lo stesso volume; e vengo al MATHIEU (**), la cui indagine, che ha un'importanza soprattutto critica, ha messo precisamente in evidenza la tacita ipotesi fatta dal PLATEAU, relativa all'invariabilità dei cerchi base. Nello stesso mentre, mostrando, con un esempio, che, con l'abbandonare tale ipotesi, viene a mancare sul cilindro il minimo vincolato per l'area della superficie laterale, pur restando verificata la condizione che l'altezza del cilindro sia inferiore alla circonferenza delle sue basi, ha creduto di trovare una contraddizione fra teoria ed esperienza, per eliminare la quale ha avanzato tre considerazioni diverse:

1.º) che dovendosi avere il minimo per W e non per la sola S , nelle deformazioni della massa oleosa che non conservano immutate le basi sui dischi, la variazione corrispondente al secondo termine — $m \Sigma$ di W possa compensare quella del primo, dovuta alla diminuzione eventuale di S , per modo da aversi ancora una variazione positiva per W ;

2.º) che l'ipotesi del PLATEAU non sia del tutto ingiustificata, potendo

(*) *Ueber die Oberflächen rotirender Flüssigkeiten im allgemeinen, insbesondere über den Plateau'schen Rotationsversuch* (Ann. di Poggendorff, 1855, v. XCVI, pp. 1 e 210).

(**) *Théorie de la Capillarité* (Paris, Gauthier-Villars, 1883), p. 73 e seguenti.

essere l'olio costretto a poggiare invariabilmente sugli interi dischi a causa dell'aderenza e dell'attrito;

3.º) che gli spostamenti piccolissimi che ordinariamente si comunicano alla colonna oleosa non siano in fatto del tutto arbitrari, avendo la colonna liquida « une tendance à passer par des figures d'équilibre ».

Le prime due considerazioni non son sembrate, al MATHIEU stesso, atte a spiegare la contraddizione avvertita fra teoria ed esperienza; mentre invece è apparsa a Lui decisiva la terza. Ma l'argomento, per il MATHIEU fondamentale, pare insufficiente; e quand'anche poi lo si potesse giustificare in modo opportuno, esso avrebbe tutt'al più valore dal punto di vista fisico, ma non potrebbe mai condurre a rilevare l'esistenza effettiva del minimo di W , considerato questo in senso analitico.

6. Tutto questo risultò chiaramente al POINCARÉ, il quale credette assai meglio di attaccarsi alla seconda delle giustificazioni proposte dal MATHIEU, aderendo cioè all'ipotesi del PLATEAU sull'invariabilità delle basi della colonna liquida. Egli, infatti, scrisse (*): « ... si nous remarquons que le long de la courbe d'intersection l'angle de raccordement de la surface liquide et de la surface du plateau doit avoir une valeur constante, en général différente d'un droit, nous en déduisons que le raccordement ne peut se faire que suivant le bord du disque où, l'arête étant toujours plus ou moins émoussée, l'angle de raccordement peut prendre la valeur qui lui convient. Dans ces conditions, le rayon des circonférences des bases conserve encore une valeur constante ». Dobbiamo però osservare che, se la premessa del POINCARÉ è giusta, non può dirsi tuttavia che ne scenda legittimamente la conclusione, per giungere alla quale si dovrebbe postulare l'esistenza del minimo per il potenziale W . Qui, in sostanza, si fa uso dello stesso modo di ragionare con cui STEINER dimostrò la proprietà di minimo del cerchio e della sfera, e del quale recentemente il PERRON (**), con un esempio semplicissimo, ha mostrata tutta l'incongruenza.

D'altra parte, anche concedendo l'invariabilità dei cerchi base e seguendo il POINCARÉ nella sua dimostrazione della proprietà di minimo

(*) Loc. cit., p. 102.

(**) *Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums* (Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, 1913). L'esempio del PERRON è questo: Si consideri la classe dei numeri interi positivi; nessuno di essi, se è diverso da 1, può esserne il massimo, perchè è di certo superato dal suo quadrato. Dunque 1 è il massimo intero positivo.

del cilindro, ci si imbatte in un punto in cui il ragionamento non corre (*).

7. Passiamo ora alla Memoria dell'ALMANSI (**). L'Autore, rilevata l'insufficienza della giustificazione addotta dal POINCARÉ, relativamente alle basi della colonna liquida, coglie il vero lato della questione riconoscendo che, a rimettere in perfetta armonia teoria ed esperienza, è necessario e basta ricorrere al primo degli argomenti formulati dal MATHIEU, al fatto cioè che, tenendo conto esatto tanto della variazione del primo termine di cui si compone W , quanto di quella del secondo, — termini che si riferiscono l'uno alla superficie di separazione fra olio e miscela, l'altro a quella fra olio e dischi, — il potenziale risulta in realtà minimo sulla configurazione cilindrica. E il chiarissimo Autore imprende, prima di tutto, a dimostrare quanto gli altri ave-

(*) È detto, alla pag. 117 del libro citato: « surf. $C''C' < \text{surf. } CC'$, résultant de ce que, la droite CC'' étant normale en C'' à l'arc AQC' , l'élément d'arc $C''C'$ est plus petit que l'élément CC' ». Ora questo non è perfettamente vero: l'arco $C''C'$ è minore dell'arco CC' , ma non se ne può dedurre *sempre* la disuguaglianza relativa alle superfici di rivoluzione da essi generate. Supponiamo, infatti, che $C'C$ sia un segmento rettilineo parallelo all'asse di rotazione, e che $C''C'$ sia anch'esso rettilineo. Posto $C'C = l$,

$\widehat{C''C'} = \alpha$, $d =$ distanza di $C'C$ dall'asse di rotazione, si ha

$$\text{sup. } CC' = 2\pi dl, \quad \text{sup. } C''C' = \pi l \cos \alpha \left(2d + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \right).$$

Ponendo, inoltre,

$$y(\alpha) = \pi l \cos \alpha \left(2d + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \right),$$

si ha

$$y'(\alpha) = -\pi l \sin \alpha \left(2d + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \right) + \pi l^2 \cos \alpha \cos 2\alpha,$$

$$y(0) = 2\pi dl = \text{sup. } CC',$$

$$y'(0) = \pi l^2 > 0.$$

La funzione $y(\alpha)$ è dunque crescente in $\alpha=0$, e, per tutti i valori di α , positivi e minori di un certo $\bar{\alpha}$, è $y(\alpha) > y(0)$,

$$\text{sup. } C''C' > \text{sup. } CC'.$$

(**) *Sopra una delle esperienze del Plateau* (Annali di Matematica, 1906).

vano già tentato, vale a dire la proprietà di minimo del cilindro, circa la sua area laterale ed in relazione con tutte le superfici di rivoluzione poggianti su gli stessi cerchi e racchiudenti lo stesso volume (*), e passa poi a stabilire il minimo per il potenziale W .

Se non che vi è luogo a rivolgere al lavoro dell'ALMANSI un'obbiezione la quale mostra che esso non esaurisce compiutamente la questione.

Si tratta di questo. L'Autore, come Egli stesso dichiara esplicitamente, si limita a confrontare la superficie cilindrica con quelle superfici di rivoluzione, racchiudenti lo stesso volume, per le quali la linea meridiana tende alla generatrice del cilindro uniformemente insieme alle sue tangenti (convergenza uniforme della funzione rappresentativa e della sua derivata). A giustificazione di che Egli scrive (**): « Questa limitazione è pienamente giustificata dal fatto che, a rigore, basterebbe (come fa il POINCARÉ (***)) confrontare la superficie σ (****) colle superfici di rivoluzione a curvatura (*_{*}) costante ». Ora, mentre da una parte nessuno ha mai messo in valore l'affermazione qui contenuta con un ragionamento rigoroso, dall'altra è da farsi un'osservazione che è decisiva al proposito. Ed è che, come risulterà in seguito (*_{*}), di superfici di rivoluzione a curvatura media costante, passanti per i cerchi limiti dei dischi base, e racchiudenti con questi dischi lo stesso volume del cilindro, non ne esiste, nelle immediate vicinanze della superficie cilindrica, *nessun'altra*, se, come qui si suppone, l'altezza del cilindro è inferiore alla circonferenza delle sue basi. Limitandosi dunque alle superfici a curvatura media costante, e tenendo invariati i cerchi base, si verrebbe a confrontare la superficie cilindrica unicamente con sè stessa.

(*) È da avvertire però che questa proprietà di minimo era stata già stabilita, con metodi del tutto diversi (diversi anche da quello che seguiremo noi) da: a) G. HORMANN: *Untersuchungen über die Grenzen zwischen welchen Unduloide und Noduloide die von zwei festen Parallelkreisflächen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen* (Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1887). — b) W. HOWE: *Die Rotations-Flächen welche bei vorgeschriebener Flächengröße ein möglichst grosses oder kleines Volumen enthalten* (Inaugural-Dissertation, Berlin, 1887).

(**) Loc. cit., p. 4.

(***) In realtà il POINCARÉ fa questa osservazione alla pag. 96 del suo libro (e noi ne abbiamo già riportato il passo), ma poi, nella sua dimostrazione, non ne tien conto.

(****) Che sarebbe la superficie del cilindro.

(*_{*}) Media.

(*) Cfr. n. 19.

La dimostrazione dell'ALMANSI non è quindi completa (*) e porta solo ad affermare che l'area della superficie cilindrica dapprima, e poi il potenziale, danno dei minimi *deboli*, per usare una denominazione in uso nel *Calcolo delle Variazioni*. Noi mostreremo che realmente si tratta di minimi *forti*, vale a dire di minimi effettivi.

Inoltre, completeremo l'indagine sulla stabilità anche in ciò che riguarda i casi limiti relativi ai coefficienti m ed n ($m = n$, $n = 0$), casi non considerati antecedentemente. E faremo vedere che, per $n = m$, si ha ancora stabilità per tutte le altezze del cilindro inferiori alla circonferenza delle basi; e che, per $n = 0$, si ha, invece, stabilità o instabilità a seconda che l'altezza è inferiore o superiore ad un certo limite compreso fra πR e $\frac{3}{2} \pi R$. Quest'ultimo caso, $n = 0$, porta ad un esame accurato del problema di minimo relativo all'area della superficie cilindrica, sotto la solita condizione riguardante il volume racchiuso, quando le basi delle superfici da considerarsi non si suppongano più invariabili. Siamo così condotti a stabilire che, nel caso di ambedue le basi variabili, il cilindro dà sempre il minimo voluto per tutte le altezze inferiori a πR (metà della circonferenza delle basi) (**), mentre il minimo non si ha più per altezze maggiori. Se poi una sola delle basi è variabile, il limite superiore delle altezze, per le quali la proprietà di minimo si conserva, è quel numero, cui si è accennato sopra, compreso fra πR e $\frac{3}{2} \pi R$. E si aggiunge che, per queste stesse altezze, si ha ancora il minimo se le basi variano entrambi nello stesso senso, oppure in modo che il rapporto delle loro variazioni sia sufficientemente piccolo.

(*) Ben inteso, non completa come dimostrazione rigorosamente analitica del fatto in questione; che, invece, essa può considerarsi sufficiente dal punto di vista fisico (fatta eccezione dei casi limiti, $n = 0$, $m = n$, che l'ALMANSI non considera e che noi tratteremo compiutamente) perchè, come l'ALMANSI stesso mi osserva in una cortese lettera, « quando si tratta di *spiegare* un fenomeno fisico, il rigore analitico, spinto oltre un certo limite, diventa illusorio ».

(**) E ciò contrariamente a quanto credeva il MATHIEU (cfr. loc. cit., p. 77).

II.

8. Dimostriamo, in primo luogo, la proprietà di minimo della superficie cilindrica. Precisamente dimostriamo che « supposta l'altezza inferiore alla circonferenza delle basi, l'area della superficie del cilindro è inferiore a quella di qualsiasi altra superficie, abbastanza prossima, avente le stesse basi e racchiudente, con queste, ugual volume ». Si osservi (*) che, ad ogni superficie soddisfacente alle condizioni dell'enunciato, ma non di rotazione, se ne può sempre sostituire un'altra che soddisfi alle stesse condizioni, che sia di rotazione attorno all'asse del cilindro e che abbia una superficie di area minore. Questa sostituzione può ottenersi col seguente semplice procedimento. Si intersechi la superficie data con un piano perpendicolare all'asse del cilindro, e in questo stesso piano si costruisca un cerchio equivalente, in area, alla sezione ottenuta ed avente il centro sull'asse detto. Al variare del piano si ha una superficie di rotazione che soddisfa alle condizioni richieste. In questo procedimento si avrà l'avvertenza di considerare, come facenti parte della sezione considerata, quei pezzi di superficie che eventualmente venissero a trovarsi sul piano stesso della sezione, e si avrà cura, inoltre, qualora i cerchi estremi risultassero maggiori delle basi del cilindro, di completare la superficie con corone circolari convenienti.

Se si considera la linea meridiana della superficie di rivoluzione costruita, si vede che essa viene ad essere incontrata in un sol punto da una perpendicolare generica all'asse del cilindro, oppure ha su questa tutto un segmento, ed esso solo.

Dopo ciò, la questione si riduce a quest'altra: « Fra tutte le superfici generate dalla rotazione attorno all'asse x di curve del piano (x, y) , congiungenti i punti $(0, R)$, (h, R) (che sono ugualmente distanti dall'asse x e da una stessa parte di esso) e racchiudenti assieme ai cerchi di centri $(0, 0)$, $(h, 0)$, di raggio R e perpendicolari all'asse detto, un volume uguale a quello del cilindro delimitato dai cerchi menzionati, la superficie del cilindro dà un

(*) Quest'osservazione è stata fatta in un caso particolare dal PLATEAU (*Statique, etc.*, T. II, pagg. 287-289). Per il caso generale, vedi: a) SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. II, p. 328; — b) POINCARÉ, loc. cit., pp. 102-106; — c) L. TONELLI, *Sulla proprietà di minimo della sfera* (Rend. Circ. Matem. Palermo, 1914).

minimo (relativo) per l'area, qualora sia

$$h < 2 \pi R \text{ ,} \quad (2)$$

9. Si ha qui a fare con un problema di *Calcolo delle Variazioni* e precisamente con uno di quelli detti *isoperimetrici*. L'integrale da render minimo è (considerandolo sotto forma parametrica, il che porta alla maggiore generalità dei risultati)

$$I = 2 \pi \int_{(0,R)}^{(h,R)} y \, ds,$$

dove s dà la lunghezza dell'arco della curva considerata, a partire dal primo estremo, il quale deve essere costantemente il punto $(0, R)$, mentre poi il secondo rimane invariabilmente fissato in (h, R) . Inoltre, la curva per cui si considera l'integrale I deve soddisfare alla condizione

$$I = \pi \int_{(0,K)}^{(h,K)} y^2 x' \, ds = \pi R^2 h,$$

essendosi indicata con x' la derivata dell'ascissa del punto generico della curva, ascissa considerata come funzione dell'arco s .

L'equazione differenziale d'EULERO, relativa al nostro problema, è quella dell'integrale

$$\int F(x, y, x', y') \, dt = \int (y \sqrt{x'^2 + y'^2} + \lambda y^2 x') \, dt,$$

dove λ è una costante numerica (costante isoperimetrica), ossia

$$F_{xy'} - F_{x'y} + F_1(x' y'' - x'' y') = 0,$$

con

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = - \frac{F_{x'y'}}{x' y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

e quindi

$$- \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + 2 \lambda y \right) + \frac{y}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} (x' y'' - x'' y') = 0, \quad (3)$$

$$\frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} - \frac{x'}{y \sqrt{x'^2 + y'^2}} = 2 \lambda.$$

Se qui si osserva che la prima frazione dà la curvatura della curva integrale di (3), mentre la seconda dà la lunghezza della normale della stessa

curva, si vede che la superficie generata dalla rotazione della curva detta attorno all'asse x (asse del cilindro) è a *curvatura media costante* ($= \lambda$).

Come DELAUNAY (*) e LAMARLE (**) hanno mostrato, ogni curva integrale dell'equazione differenziale (3) può ottenersi quale luogo di un fuoco di una conica che rotoli senza strisciare sull'asse delle x ; ed anzi, tutte le curve così generate sono altrettanti integrali della equazione detta. Se la conica che rotola è un'ellisse, la superficie di rivoluzione del luogo considerato dicesi *onduloide*; se un'iperbole, *nodoide*; se, infine, è una parabola, il luogo è la *catenaria* e la superficie il *catenoide*. Quando poi la conica sia un cerchio di raggio R , la curva generata dal rotolamento è una retta: la generatrice del nostro cilindro, la quale soddisfa così alle condizioni del primo ordine relative al problema di minimo che stiamo considerando.

Aggiungiamo un'osservazione. L'integrale della (3) contiene tre costanti: la costante isoperimetrica λ e le due costanti d'integrazione. Ad esse corrispondono i tre elementi arbitrari che si hanno nella generazione meccanica della curva integrale: i due elementi che determinano la conica da far rotolare e il punto dell'asse x che corrisponde ad un determinato vertice della conica stessa.

10. La generatrice del nostro cilindro, che come abbiam veduto è un integrale particolare della (3), è rappresentata, in coordinate non parametriche, dall'equazione

$$y = y(x) = R.$$

Confrontiamola con la curva rappresentata nell'intervallo $(0, h)$ dall'equazione

$$y_t(x) = R + u(x, t),$$

dove $u(x, t)$ è una funzione finita e continua insieme alla sua prima derivata, per ogni x di $(0, h)$ e per ogni t di un certo intervallo $(0, t_1)$, la quale:

1.º per $t=0$ è identicamente nulla, talchè si ha $y_0 = R$;

2.º è sempre in modulo minore di R e, al tendere di t a zero, converge uniformemente a zero, insieme alla sua derivata (fatta rapporto ad x) in tutto $(0, h)$;

(*) *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (Journ. de Liouville, t. VI, p. 309).

(**) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure* (Bulletin de l'Acad. de Belgique, 1857, 2.º ser., t. II, p. 33). — *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral* (Mém. de l'Acad. de Belgique, t. XV, 1863, 3.º partie, p. 247).

3.º) soddisfa, per ogni t di $(0, t_1)$, all'uguaglianza

$$u(0, t) = u(h, t);$$

4.º) verifica, per tutti gli stessi t , la condizione

$$\int_0^h (R + u(x, t))^2 dx = \int_0^h R^2 dx,$$

che si riduce all'altra

$$\int_0^h u^2(x, t) dx + 2R \int_0^h u(x, t) dx = 0. \quad (4)$$

Quest'ultima condizione stabilisce l'uguaglianza dei volumi racchiusi dalle due superfici generate dalla rotazione attorno all'asse x delle curve $y = R$, $y = y_t(x)$, considerate entrambi nell'intervallo $(0, h)$. Calcoliamo la differenza delle aree di tali superfici

$$\Delta S = 2\pi \left\{ \int_0^h y_t(x) \sqrt{1 + y_t'(x)^2} dx - \int_0^h R dx \right\}.$$

Abbiamo

$$\frac{\Delta S}{2\pi} = \int_0^h \left\{ (R + u(x, t)) \sqrt{1 + u'(x, t)^2} - R \right\} dx,$$

ed anche, essendo

$$\sqrt{1 + u'(x, t)^2} = (1 + u'^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} u'^2 \left(1 + \varepsilon(x, t)\right),$$

dove $\varepsilon(x, t)$ tende a zero con t , uniformemente rispetto ad x ,

$$\frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{R}{2} \int_0^h u'^2 \left(1 + \frac{u}{R}\right) (1 + \varepsilon) dx + \int_0^h u dx.$$

Indicando con θ_t un determinato valore di $\left(1 + \frac{u}{R}\right)(1 + \varepsilon)$, si ha, per il primo teorema della media,

$$\frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{R}{2} \theta_t \int_0^h u'^2 dx + \int_0^h u dx.$$

Osserviamo che, per il fatto della convergenza uniforme ad t di

$\left(1 + \frac{u}{R}\right) (1 + \varepsilon)$, per $t \rightarrow 0$, è

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta_t = 1.$$

Per la (4) abbiamo poi

$$\frac{\Delta S}{\pi} R = R^2 \theta_t \int_0^h u^2 dx - \int_0^h u^2 dx.$$

Facciamo il seguente cambiamento di variabile

$$x = \frac{h}{2\pi} \omega,$$

il quale trasforma l'intervallo $(0, h)$ nell'altro $(0, 2\pi)$. Abbiamo con ciò

$$u(x, t) = u\left(\frac{h}{2\pi} \omega, t\right) = U(\omega, t), \quad u'(x, t) = \frac{2\pi}{h} U'(\omega, t),$$

$$U(0, t) = U(2\pi, t)$$

e

$$2R \frac{\Delta S}{h} = \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta_t \int_0^{2\pi} U'^2(\omega, t) d\omega - \int_0^{2\pi} U^2(\omega, t) d\omega. \quad (5)$$

Nello stesso tempo la condizione (4) si muta nella

$$\int_0^{2\pi} U^2(\omega, t) d\omega + 2R \int_0^{2\pi} U(\omega, t) d\omega = 0. \quad (4)$$

Sia

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega)$$

lo sviluppo in serie di FOURIER di $U(\omega, t)$. Poichè questa funzione ammette, per ipotesi, derivata finita e continua in tutto $(0, 2\pi)$, è

$$U(\omega, t) = \int_0^{\omega} U'(\omega, t) d\omega;$$

avendosi, inoltre, come già si è notato, $U(0, t) = U(2\pi, t)$, lo sviluppo in serie di FOURIER di $U'(\omega, t)$ si ottiene derivando termine a termine quello di $U(\omega, t)$ (*) ed è perciò

$$\sum_1^{\infty} p \left\{ -a_p \sin p\omega + b_p \cos p\omega \right\}.$$

(*) Cfr. H. LEBESQUE, *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906), pp. 103-104.

Applicando allora la formola di PARSEVAL si ha

$$\int_0^{2\pi} U^2 d\omega = \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) \right\},$$

$$\int_0^{2\pi} U'^2 d\omega = \pi \sum_1^{\infty} p^2 (a_p^2 + b_p^2);$$

e la (5) può scriversi

$$\frac{2R}{\pi h} \Delta S = \left(\frac{2}{h} \pi R \right)^2 \theta_t \sum_1^{\infty} p^2 (a_p^2 + b_p^2) - \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) \right\}. \quad (6)$$

Analogamente la (4') può scriversi, poichè è $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U d\omega$,

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) + 2R a_0 = 0. \quad (4'')$$

Da quest'uguaglianza ricaviamo che, se $y = y_t(x)$ non coincide con la generatrice del cilindro $y = R$, è

$$\left| \frac{a_0}{\sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2)} \right| < \frac{1}{R}.$$

E infatti, se è $\sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) \neq 0$, da (4'') si ricava

$$\frac{a_0}{\sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2)} = - \frac{2}{a_0 + 4R},$$

ed essendo sempre $|U| < R$ e quindi

$$|a_0| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |U| d\omega < 2R,$$

ne viene la disuguaglianza scritta.

Se poi fosse $\sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) = 0$, si avrebbe da (4'')

$$a_0 (a_0 + 4R) = 0$$

e quindi, per essere $|a_0| < 2R$, $a_0 = 0$ e

$$\int_0^{2\pi} U^2 d\omega = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_p^2 + b_p^2) = 0$$

$$U = 0, \quad y_t(x) = R,$$

vale a dire la curva $y = y_t(x)$ coinciderebbe con la generatrice del cilindro.

Supponendo che la curva $y = y_t(x)$ sia distinta dalla generatrice detta, la (6) può scriversi

$$\frac{2R}{\pi h} \Delta S = \left\{ \Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2) \right\} \left\{ \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \frac{\Sigma p^2 (\alpha_p^2 + b_p^2)}{\Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2)} - 1 - \frac{\alpha_0}{2} \cdot \frac{\alpha_0}{\Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2)} \right\}.$$

Ora è $h < 2\pi R$, $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_t = 1$,

$$\frac{\Sigma p^2 (\alpha_p^2 + b_p^2)}{\Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2)} \geq 1;$$

dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \frac{\Sigma p^2 (\alpha_p^2 + b_p^2)}{\Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2)} - 1 \right\} \geq \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 - 1 > 0.$$

Essendo poi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U d\omega = 0$$

è, per quanto si è visto poco fa,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{2} \cdot \frac{\alpha_0}{\Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2)} = 0.$$

Se ne conclude che, per t sufficientemente piccolo, è

$$\Delta S > \frac{\pi}{2R} (2\pi R - h) \Sigma (\alpha_p^2 + b_p^2) > 0, \quad (7)$$

e resta così dimostrato che il cilindro di generatrice $y = R$ e di altezza h , con $h < 2\pi R$, dà un *minimo debole* per il problema isoperimetrico formulato al n. 8. Ho detto *minimo debole* e non *forte*, perchè le curve $y = R + u(x, t)$, per le quali è dimostrata la disuguaglianza (7), sono tali per ipotesi che, al tendere a zero di t , tenda a zero uniformemente non solo $u(x, t)$, ma anche la derivata $u'(x, t)$; e resta perciò il dubbio che esistano delle funzioni $u(x, t)$, le cui derivate non convergano uniformemente a zero con t , per le quali, comunque si prenda piccolo il t , non sia $\Delta S \geq 0$. Non è dunque ancora definitivamente dimostrata la proprietà di minimo del cilindro, che ci interessa.

11. Nel *Calcolo delle Variazioni* si dà (*) un gruppo di condizioni suf-

(*) Cfr. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, p. 518 (Leipzig, P. G. Teubner, 1909).

ficienti affinchè una data curva sia minimum (forte) per un certo problema isoperimetrico a estremi fissi; e vi si stabilisce, in particolare, che il minimo è certo se:

1.º) la curva considerata, giacendo tutta internamente al campo ammesso, soddisfa all'equazione differenziale di EULERO relativa al problema isoperimetrico di cui è questione;

2.º) il problema è totalmente regolare, vale a dire, qualunque sia il valore della costante isoperimetrica, è sempre positivo l'invariante di WEIERSTRASS relativo all'integrale della funzione $f + \lambda g$, dove f è la funzione che sta sotto il segno dell'integrale da render minimo, e g è quella dell'integrale che deve rimanere costante;

3.º) la curva considerata non contiene il punto coniugato del suo primo estremo, vale a dire, su essa, eccettuato il primo estremo, non deve mai annullarsi un certo determinante Δ , che è una funzione del punto della curva stessa.

Nel caso nostro, la generatrice del cilindro soddisfa alla 1.^a di queste condizioni, come già si è visto al n. 9. La seconda condizione è poi anch'essa soddisfatta, perchè, essendo qui $f = y \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $g = y^2 x'$, l'invariante di WEIERSTRASS F_1 di $F = f + \lambda g$ è dato da $F_1 = \frac{y}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$, ed è di certo positivo in tutta la parte del piano (xy) che è al di sopra dell'asse x , parte che comprende interamente la generatrice del nostro cilindro.

Resta dunque a verificarsi la 3.^a condizione.

Questa stessa terza condizione, oltre che figurare nel gruppo delle condizioni sufficienti, comparisce, con una piccola modificazione, anche in quello delle necessarie. Effettivamente si dimostra che condizione necessaria perchè l'integrale dell'equazione di EULERO dia un minimo, è che, sull'arco che si considera della curva integrale, il determinante Δ non si annulli mai, fatta eccezione degli estremi (nel caso della condizione sufficiente, si esclude l'annullamento anche nel 2.º estremo). Orbene, qui è di somma importanza la seguente osservazione. Se si pensa al modo col quale, nel *Calcolo delle Variazioni*, si giunge alla condizione necessaria ora ricordata, si scorge subito che ad essa può darsi un senso più largo: cioè a dire, che essa risulta necessaria non solo nel caso del minimo ordinario (minimo forte), ma anche in quello del minimo debole. Ed infatti, nello stabilire la condizione in discorso, non si fanno entrare in gioco tutte le possibili variazioni della curva minimum, ma solo quelle deboli, quelle cioè che, al tendere a zero del para-

metro, si annullano uniformemente insieme alla loro derivata. Gli è anzi questa, se ben si ricorda, la ragione dell'errore pre-weierstrassiano, in base al quale alla nostra condizione necessaria si voleva dare senz'altro il valore di condizione sufficiente, nella teoria di minimi liberi.

Osservato questo, scende subito da quanto si è detto al n. 10, che il determinante Δ non si annulla mai sulla generatrice del cilindro, $y = R$, eccettuati gli estremi. Ma l'eccezione relativa al secondo estremo si toglie immediatamente. Il risultato del n. 10, che si compendia nella disuguaglianza (7), è valido finchè sia $h < 2\pi R$; per guisa tale che se d è un numero positivo soddisfacente alla disuguaglianza $h + d < 2\pi R$, la (7) vale anche per il cilindro di altezza $h + d$. Ne risulta che sulla generatrice $y = R$, il determinante Δ è diverso da zero in tutti i punti *interni* al segmento di estremi $(0, R)$, $(h + d, R)$. È dunque $\Delta \neq 0$ anche nel punto (h, R) , ed il *coniugato* del punto di ascissa 0 non si trova sulla generatrice del nostro cilindro di altezza h .

La terza condizione sufficiente è così soddisfatta anch'essa, e resta definitivamente dimostrata la proprietà di minimo del cilindro che abbiamo enunciata al n. 8.

12. È facile vedere che il limite superiore dell'altezza h del cilindro, compatibile con la proprietà di minimo ora stabilita, è precisamente dato da $2\pi R$. Si supponga, invero, $h > 2\pi R$ e si prenda a considerare la funzione

$$u(x, t) = R \left(-1 + \sqrt{1 + t \sin \frac{2\pi}{h} x} \right),$$

la quale, per t tendente a zero, converge uniformemente a zero insieme alla sua derivata; qualunque poi sia t (che supporremo in modulo minore di 1) è $u(0, t) = u(h, t)$, ed anche

$$\int_0^h u^2(x, t) dx + 2R \int_0^h u(x, t) dx = R^2 t \int_0^h \sin \left(\frac{2\pi}{h} x \right) dx = 0.$$

La nostra funzione soddisfa dunque alle condizioni fissate al n. 10, e vale perciò l'uguaglianza (5)

$$\begin{aligned} 2R \frac{\Delta S}{h} &= \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \int_0^{2\pi} U^{12}(\omega, t) d\omega - \int_0^{2\pi} U^2(\omega, t) d\omega \\ &= \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \frac{R^2 t^2}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \omega}{1 + t \sin \omega} d\omega - R^2 t^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega}{(1 + \sqrt{1 + t \sin \omega})^2} d\omega, \end{aligned}$$

ossia, indicando con θ' , e θ'' , due numeri tendenti rispettivamente ad 1 e a $\frac{1}{4}$ col tendere di t a zero,

$$\begin{aligned} \frac{2R}{h} \Delta S &= \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \frac{R^2 t^2}{4} \theta_t \theta'_t \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega d\omega - R^2 t^2 \theta''_t \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega d\omega \\ &= \frac{\pi R^2 t^2}{4} \left\{ \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \theta'_t - 4 \theta''_t \right\}. \end{aligned}$$

Di qui si vede che, essendo $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_t \cdot \theta'_t = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \theta''_t = \frac{1}{4}$, se è $h > 2\pi R$, per t sufficientemente piccolo, è $\Delta S < 0$.

III.

13. Nei numeri precedenti si son prese in considerazione solo quelle superfici di rivoluzione che hanno le stesse basi del cilindro. Vogliamo ora vedere in quali limiti, per l'altezza h , la proprietà di minimo del cilindro si conserva indipendentemente dall'invariabilità delle basi delle superfici da considerarsi. In altre parole la questione che ci proponiamo è questa: « trovare i valori di h per i quali il cilindro dà un'area minima rispetto a quella di tutte le superficie di rivoluzione attorno allo stesso asse, limitate dai piani delle basi del cilindro, giacenti in prossimità della superficie cilindrica e racchiudenti il medesimo volume ».

Confrontiamo la nostra superficie cilindrica con quella generata dalla rotazione attorno all'asse x della curva di equazione

$$y = R + u(x, t)$$

dove la $u(x, t)$ soddisfa a tutte le condizioni del n. 10, tranne la 3.^a, perchè qui intendiamo di lasciare completamente libere le basi delle nostre superfici. E poichè il ragionamento del numero ricordato è indipendente dalla 3.^a condizione fino alla uguaglianza (5), potremo scrivere anche qui

$$\frac{2R}{h} \Delta S = \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2 \theta_t \int_0^{2\pi} U'^2(\omega, t) d\omega - \int_0^{2\pi} U^2(\omega, t) d\omega.$$

Prima di proseguire, sarà opportuno fare la seguente posizione :

$$U^2(\omega, t) + 2R U(\omega, t) = \varphi(\omega, t).$$

La nuova funzione $\varphi(\omega, t)$ soddisfa alle stesse condizioni della $U(\omega, t)$, tranne che, invece di verificare l'uguaglianza

$$\int_0^{2\pi} U^2(\omega, t) d\omega + 2R \int_0^{2\pi} U(\omega, t) d\omega = 0,$$

verifica l'altra

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\omega, t) d\omega = 0.$$

In seguito alla posizione fatta, l'uguaglianza scritta sopra, che dà ΔS , diventa

$$\frac{2R}{h} \Delta S = \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \frac{1}{4} \theta_t \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'^2(\omega, t)}{R^2 + \varphi(\omega, t)} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2(\omega, t)}{(R + \sqrt{R^2 + \varphi(\omega, t)})^2} d\omega$$

ed anche, indicando con θ'_t e θ''_t due numeri convenienti, che tendono entrambi ad 1 col tendere di t a zero,

$$\frac{8R^2}{h} \Delta S = \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta_t \theta'_t \int_0^{2\pi} \varphi'^2(\omega, t) d\omega - \theta''_t \int_0^{2\pi} \varphi^2(\omega, t) d\omega. \quad (8)$$

La questione è allora tutta qui: vedere per quali valori di h la differenza

$$\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \int_0^{2\pi} \varphi'^2 d\omega - \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\omega$$

si mantiene costantemente positiva per tutte le funzioni φ che soddisfano alla condizione

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) d\omega = 0. \quad (9)$$

14. Poniamo $\frac{2\pi R}{h} = p$, e poichè già sappiamo che non può essere $h > 2\pi R$, riterremo $p \geq 1$.

Cerchiamo il minimo dell'integrale

$$I_p = \int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2) d\omega$$

sotto la condizione unica (9). Come insegna la regola isoperimetrica di Eu-

LERO, formiamo l'integrale

$$\bar{I}_p = \int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2 + \lambda \varphi) d\omega,$$

dove λ è la così detta costante isoperimetrica, e cerchiamone le *estremali*.

L'equazione differenziale di EULERO relativa al caso nostro è

$$2p^2 \varphi'' + 2\varphi - \lambda = 0,$$

la quale, integrata, dà

$$\varphi = \frac{\lambda}{2} + 2a \cos \frac{\omega}{p} + 2b \sin \frac{\omega}{p},$$

dove a e b sono le costanti d'integrazione. Determiniamo la costante isoperimetrica λ . Dovendo essere verificata la (9), si avrà

$$\int_0^{2\pi} \varphi d\omega = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\lambda}{2} + 2a \cos \frac{\omega}{p} + 2b \sin \frac{\omega}{p} \right\} d\omega = 0$$

e quindi

$$\lambda = \frac{2p}{\pi} \left(-a \sin \frac{2\pi}{p} + b \cos \frac{2\pi}{p} - b \right)$$

e

$$\varphi = \frac{p}{\pi} \left(-a \sin \frac{2\pi}{p} + b \cos \frac{2\pi}{p} - b \right) + 2a \cos \frac{\omega}{p} + 2b \sin \frac{\omega}{p}. \quad (10)$$

E ognuna di queste curve soddisfa alla (9).

15. Vediamo se fra esse ve n'è sempre una ed una sola che unisca due punti scelti arbitrariamente e rispettivamente sulle rette di ascissa 0 e 2π . Dette φ_1 e φ_2 le ordinate dei due punti, si dovranno determinare le costanti a e b mediante il sistema

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \left(2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right) a + \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right) b \\ \varphi_2 &= \left(2 \cos \frac{2\pi}{p} - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right) a + \left(2 \sin \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \cos \frac{2\pi}{p} - \frac{p}{\pi} \right) b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Questo sistema è lineare e il suo determinante è

$$4 \left\{ \sin \frac{2\pi}{p} - \frac{p}{\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{p} \right) \right\} = 4 \left(\sin \frac{2\pi}{p} - 2 \frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{p} \right),$$

il quale è nullo per $p=1$, è diverso da zero per $p=2$, e per $p \neq 2$ e > 1

è uguale a

$$4 \sin \frac{2\pi}{p} \cdot \left(1 - \frac{p}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}\right) = \frac{4p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \cdot \left(\frac{\pi}{p} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}\right)$$

e quindi ancora diverso da zero. Dunque, per ogni $p > 1$, ossia per ogni $h < 2\pi R$, esiste sempre una curva (10), ed una sola, che congiunge i due punti scelti.

16. Si supponga $p > 1$, ossia $h < 2\pi R$, e siano P_0 e P_1 due punti scelti comunque l'uno sulla retta $\omega = 0$, l'altro su quella $\omega = 2\pi$. Per quanto si è detto or ora, esiste una curva (10), ed una sola che li congiunge:

$$\varphi = \frac{p}{\pi} \left(-a_1 \sin \frac{2\pi}{p} + b_1 \cos \frac{2\pi}{p} - b_1\right) + 2a_1 \cos \frac{\omega}{p} + 2b_1 \sin \frac{\omega}{p}.$$

Indicando con λ_1 il valore di λ corrispondente ai punti P_0 e P_1 , tutte le estremali dell'integrale

$$\bar{I}_{p,\lambda_1} = \int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2 + \lambda_1 \varphi) d\omega$$

sono date da

$$\varphi = \frac{\lambda_1}{2} + 2a \cos \frac{\omega}{p} + 2b \sin \frac{\omega}{p}. \quad (12)$$

Presi ora due punti qualsiasi Q_0 e Q_1 di coordinate $(\omega_0, \bar{\varphi}_0)$, $(\omega_1, \bar{\varphi}_1)$, è possibile congiungerli con un'estremale (12), la quale risulti anche unica?

Si tratta di ricavare le costanti a e b dal sistema

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \frac{\lambda_1}{2} + 2a \cos \frac{\omega_0}{p} + 2b \sin \frac{\omega_0}{p} \\ \bar{\varphi}_1 &= \frac{\lambda_1}{2} + 2a \cos \frac{\omega_1}{p} + 2b \sin \frac{\omega_1}{p}, \end{aligned}$$

il cui determinante è $4 \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{p}$; e questo determinante è diverso da zero finchè è $\omega_1 - \omega_0 < p\pi$ (supposto $\omega_1 > \omega_0$). Ne viene dunque, se è $p > 2$ ($h < \pi R$), che, fissato un punto Q_0 di ascissa compresa fra $(2-p)\pi$ e 0, ed un altro Q_1 di ascissa ω_1 positiva e minore o uguale a 2π , avendosi

$$\omega_1 - \omega_0 < 2\pi + (p-2)\pi = p\pi,$$

Q_0 e Q_1 possono sempre congiungersi con un'estremale (12) di \bar{I}_{p,λ_1} ; e quest'estremale è unica.

È allora possibile circondare l'estremale che unisce P_0 e P_1 con un *fascio*

d'estremali (*) il quale riempia tutta la striscia compresa fra le perpendicolari all'asse ω passanti per P_0 e P_1 . E ne viene, per le note condizioni sufficienti del *Calcolo delle Variazioni*, che, avendo la funzione che sta sotto il segno dell'integrale \bar{I}_{p,λ_1} una derivata seconda, fatta rapporto a φ' , sempre positiva ($2p^2 > 0$), l'estremale (12), la quale congiunge P_0 e P_1 , dà un minimo assoluto per l'integrale \bar{I}_{p,λ_1} . Scende a fortiori che, « se è $p > 2$, l'estremale (10) la quale congiunge P_0 e P_1 dà un minimo assoluto per l'integrale I_p , rispetto a tutte le curve, rappresentabili nella forma $\varphi = \varphi(\omega)$, che congiungono P_0 e P_1 e soddisfano alla condizione (9) ».

17. Cerchiamo ora il minimo dell'integrale I_p , calcolato sull'estremale (10) che congiunge P_0 e P_1 , considerando questi punti variabili sulle perpendicolari all'asse ω di ascisse 0 e 2π . Fissati P_0 e P_1 , restano fissate le costanti a e b , e l'integrale I_p risulterà funzione di queste variabili: $I_p(a, b)$. Calcoliamone il valore. È

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \frac{4}{p^2} \left(a^2 \sin^2 \frac{\omega}{p} + b^2 \cos^2 \frac{\omega}{p} - 2ab \sin \frac{\omega}{p} \cos \frac{\omega}{p} \right) \\ \varphi^2 &= 4 \left(a^2 \cos^2 \frac{\omega}{p} + b^2 \sin^2 \frac{\omega}{p} + 2ab \sin \frac{\omega}{p} \cos \frac{\omega}{p} + \frac{\lambda^2}{16} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{2} \left(a \cos \frac{\omega}{p} + b \sin \frac{\omega}{p} \right) \right) \\ p^2 \varphi'^2 - \varphi^2 &= 4 \left\{ (b^2 - a^2) \cos \frac{2\omega}{p} - 2ab \sin \frac{2\omega}{p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{2} \left(a \cos \frac{\omega}{p} + b \sin \frac{\omega}{p} \right) - \frac{\lambda^2}{16} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} I_p(a, b) &= \frac{p}{2} (b^2 - a^2) \sin \frac{4\pi}{p} + pab \left(\cos \frac{4\pi}{p} - 1 \right) - \\ &\quad - \frac{\lambda p}{2} \left(a \sin \frac{2\pi}{p} - b \cos \frac{2\pi}{p} + b \right) - \frac{\lambda^2}{8} \pi, \end{aligned}$$

(*) Cfr. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*, recueillies par M. FRÉCHET (Paris, A. Hermann, 1910), pag. 360.

e sostituendo a λ il suo valore $\lambda = \frac{2p}{\pi} \left(-a \sin \frac{2\pi}{p} + b \cos \frac{2\pi}{p} - b \right)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} I_p(a, b) &= (b^2 - a^2) \sin \frac{4\pi}{p} + 2ab \left(\cos \frac{4\pi}{p} - 1 \right) + \\ &+ \frac{p}{\pi} \left(-ab \sin \frac{4\pi}{p} + 2ab \sin \frac{2\pi}{p} + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{p} + b^2 \cos^2 \frac{2\pi}{p} - \right. \\ &\left. - 2b^2 \cos \frac{2\pi}{p} + b^2 \right) \\ &= a^2 \left(\frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{2\pi}{p} - \sin \frac{4\pi}{p} \right) + b^2 \left(\sin \frac{4\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \cos^2 \frac{2\pi}{p} - \right. \\ &\left. - \frac{2p}{\pi} \cos \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \right) + \\ &+ ab \left(2 \cos \frac{4\pi}{p} - 2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{4\pi}{p} + 2 \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right). \end{aligned}$$

L'integrale $I_p(a, b)$ risulta così una funzione di secondo grado e omogenea in a e b , le cui derivate parziali prime si annullano per $a = b = 0$. Geometricamente, si ha un paraboloide; e il punto $(0, 0)$ non è un minimo se il paraboloide è iperbolico; è invece minimo se il paraboloide è ellittico e rivolto verso l'alto.

Per decidere se il paraboloide è iperbolico o ellittico basta vedere se la differenza

$$\left. \begin{aligned} &\left(2 \cos \frac{4\pi}{p} - 2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{4\pi}{p} + 2 \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right)^2 - \\ &- 4 \left(\frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{2\pi}{p} - \sin \frac{4\pi}{p} \right) \left(\sin \frac{4\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \cos^2 \frac{2\pi}{p} - \frac{2p}{\pi} \cos \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \right) \end{aligned} \right\} (13)$$

è positiva o negativa. Ora la differenza scritta non è altro che

$$\frac{64p}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} \left(\frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} - \sin \frac{\pi}{p} \right),$$

espressione che, per $\frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{2} (2k+1)$, è

$$\frac{64p}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{p} \left(\frac{\pi}{p} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right).$$

Si vede perciò che, se è $1 < p < 2$, avendosi $\operatorname{tg} \frac{\pi}{p} < 0$, la differenza (13) è *positiva* e il paraboloido è iperbolico e non si ha minimo per $a = 0$, $b = 0$.

Se è $p = 2$ la differenza (13) è nulla, il paraboloido è un cilindro parabolico tangente al piano (a, b) , e poichè in tal caso si ha $\frac{1}{4} I_2(a, b) = \frac{8}{\pi} b^2$, il punto $a = 0$, $b = 0$ è un minimo. Se è, infine, $p > 2$, avendosi $\operatorname{tg} \frac{\pi}{p} > \frac{\pi}{p}$, la differenza (13) è *negativa* e il paraboloido è ellittico e si ha in $a = 0$, $b = 0$ minimo o massimo a seconda che il coefficiente di a^2 nell'espressione di I_p è positivo o negativo. Nel caso nostro è

$$\frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{2\pi}{p} - \sin \frac{4\pi}{p} = \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \cos \frac{2\pi}{p} \left(\operatorname{tg} \frac{2\pi}{p} - \frac{2\pi}{p} \right) > 0$$

e si ha così il minimo.

Concludiamo, tenendo conto di quanto si è stabilito in fine al numero precedente, che « se è $p > 2$ il segmento dell'asse ω avente per estremi i punti di ascisse 0 e 2π rende l'integrale

$$I_p = \int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2) d\omega$$

minore dello stesso integrale calcolato su una qualsiasi curva, rappresentabile nella forma $\varphi = \varphi(\omega)$, che congiunga un punto arbitrario della retta $\omega = 0$ con un altro pure arbitrario di $\omega = 2\pi$, e che soddisfi alla condizione

$$\int_0^{2\pi} \varphi d\omega = 0.$$

Se è $p = 2$, il segmento detto dà ancora un minimo per I_p , ma *non* rende quest'integrale *sempre minore* dello stesso integrale calcolato su una delle curve menzionate.

Se, infine, è $1 \leq p \leq 2$ non si ha più minimo ed esistono delle curve, del tipo detto, che rendono I_p *negativo*.

18. Da quanto precede, e in base alla uguaglianza (8), si ha che, per $h > \pi R$, la differenza ΔS può esser fatta negativa, mentre, per $h < \pi R$ e per t sufficientemente piccolo la ΔS resta sempre positiva. Ne viene che il cilindro non dà il minimo, nel senso indicato al principio del n. 13, per un'altezza $h > \pi R$; dà, invece, un minimo *debole* (per ora), se è $h < \pi R$.

Vediamo di passare dal minimo *debole* a quello *forte*.

19. Occorre premettere alcune considerazioni, che esponiamo in una forma più generale di quanto qui occorra per potercene servire anche in seguito. Dalla teoria generale dei problemi isoperimetrici si deduce che, se è $h < 2\pi R$, essendo verificate le condizioni di cui si è parlato al n. 11, è possibile determinare un intorno $[\bar{\rho}]$ della curva $y = R$ ($0 \leq x \leq h$) e un numero positivo $\bar{\delta}$, tali che, per ogni terna $\delta_0, \delta_h, \delta$ di numeri in modulo inferiori a $\bar{\delta}$, esista sempre un integrale dell'equazione differenziale di EULERO (3), ed uno solo, il quale giaccia per intero nell'intorno $[\bar{\rho}]$ detto, congiunga i punti $(0, R + \delta_0)$, $(h, R + \delta_h)$, e soddisfi alla condizione

$$\pi \int_{(0, R + \delta_0)}^{(h, R + \delta_h)} y^2 x' ds = \pi R^2 h + \delta. \quad (14)$$

Questa curva poi rende minimo l'integrale

$$\int_{(0, R + \delta_0)}^{(h, R + \delta_h)} y ds,$$

fra tutte quelle che congiungono gli stessi punti $(0, R + \delta_0)$, $(h, R + \delta_h)$, soddisfano alla (14) e giacciono in un suo conveniente intorno. Essa, inoltre, al tender di $\bar{\delta}$ a zero, tende uniformemente, insieme alla sua derivata, alla curva $y = R$. Geometricamente, questo significa che, per piccole modificazioni dei raggi dei cerchi base del nostro cilindro, e per variazioni pure piccole del volume, esiste sempre una superficie di rivoluzione, ed una sola, che risolve il problema di minimo considerato, resta prossima alla superficie cilindrica e che ha piani tangenti che si scostano di poco da quelli corrispondenti della superficie cilindrica detta.

Ad ogni terna $\delta_0, \delta_h, \delta$, soddisfacente alle condizioni sopra fissate, vien dunque a corrispondere, in modo unico, una curva la quale dà un minimo per il nostro problema isoperimetrico, in relazione a tutte le curve di un suo intorno $[\rho(\delta_0, \delta_h, \delta)]$, che indichiamo così appunto perchè esso viene a dipendere dai tre elementi $\delta_0, \delta_h, \delta$. Convenendo di prender sempre il massimo intorno possibile, dal suo variare con continuità, al variare dei tre parametri da cui dipende, abbiamo subito che, se l'intorno $[\bar{\rho}]$ della generatrice $y = R$ ($0 \leq x \leq h$) lo prendiamo convenientemente piccolo e se convenientemente piccolo prendiamo pure il $\bar{\delta}$, questo $[\bar{\rho}]$ vien a far parte di certo di tutti gli intorni $[\rho(\delta_0, \delta_h, \delta)]$. Talchè possiamo dire che tutte le nostre

curve *minimum* sono tali rispetto all'intero campo definito dall'intorno $[\bar{p}]$ di $y = R$ ($0 \leq x \leq h$).

20. Ciò posto, sostituiamo ad ogni curva che soddisfi alle condizioni del nostro problema di minimo, che giaccia nell'intorno $[\bar{p}]$ di $y = R$ ($0 \leq x \leq h$), e che congiunga i punti $(0, R + \delta_0)$, $(h, R + \delta_h)$, dove δ_0 e δ_h sono presi in moduli inferiori al $\bar{\delta}$ del numero precedente, la curva avente i medesimi estremi e che, sotto le stesse condizioni, renda minima l'area della corrispondente superficie di rivoluzione. La funzione rappresentativa di questa curva, al tendere di $\bar{\delta}$ a zero, converge, come si è detto al numero precedente, a $y = R$ uniformemente, e nel contempo converge uniformemente a zero la sua derivata. Essa rientra allora nella famiglia di quelle considerate per il *minimo debole* e ne viene che tal minimo è anche *forte*. Se ne conclude che

« il limite superiore delle altezze del cilindro — per le quali il cilindro stesso dà un'area minima rispetto a quella di tutte le superfici limitate dai piani delle basi del cilindro, giacenti in prossimità della superficie cilindrica e racchiudenti, coi piani detti, il medesimo volume — è πR ».

21. Nell'enunciato precedente, le basi delle superfici prese in considerazione son lasciate libere entrambi di variare comunque nei piani di quelle corrispondenti del cilindro. Convien peraltro, per il seguito, esaminare anche il caso di una base fissa e di una sola variabile.

È subito chiaro che il limite superiore delle altezze del cilindro, per le quali quest'ultimo ammette, nelle condizioni attuali, la solita proprietà di minimo, è maggiore o per lo meno uguale al limite πR , trovato per il caso di entrambi le basi variabili. Il limite che cerchiamo è dunque compreso fra πR e $2\pi R$. Riprendiamo l'integrale I_p del n. 14 e supponiamo

$$1 < p \leq 2 \quad (\pi R \leq h < 2\pi R).$$

L'estremale (10) dello stesso numero, la quale congiunge i due punti dell'asse ω di ascisse 0 e 2π , e che non è altro se non il segmento $(0, 2\pi)$ dell'asse stesso, rende minimo l'integrale I_p fra tutte le curve $\varphi = \varphi(\omega)$ che soddisfano alle condizioni

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$$

e alla (9). Ed invero, se ciò non fosse si potrebbe render I_p minore di zero e quindi, per la (8), minore di zero anche ΔS , contro la proprietà di minimo del cilindro, dimostrata al n. 11. Ne scende che, per ogni p soddisfacente alla doppia limitazione $p_1 \leq p \leq 2$ — dove p_1 è un numero *maggiore* di 1,

che può scegliersi però vicino ad 1 quanto si vuole — la curva (10) che passa per due punti P_0 e P_1 delle rette $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, dà un minimo per I_p , rispetto a tutte le curve $\varphi = \varphi(\omega)$, che congiungono P_0 e P_1 e soddisfano alla (9) ed alla condizione

$$|\varphi(\omega)| < \rho, \quad (0 \leq \omega \leq 2\pi),$$

dove ρ è un numero positivo convenientemente piccolo. Ciò in base alle stesse considerazioni del n. 19.

Prendiamo ora P_0 coincidente con l'origine O delle coordinate, e cerchiamo il minimo di I_p calcolato sull'estremale (10) che congiunge O e P_1 , considerando P_1 variabile, della retta $\omega = 2\pi$, nell'intorno $(-\rho, \rho)$ del punto di ordinata nulla. Basterà riportarsi al n. 17, dove si è fatta la ricerca in generale, per P_0 e P_1 comunque variabili sulle rette dette. Avendo posto, presentemente, il punto P_0 fisso in O , si avrà, fra le costanti a e b , la relazione, dedotta da (10),

$$0 = \left(2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p}\right) a + \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1\right) b, \quad (15)$$

la quale, nel piano (a, b) è rappresentata da una retta passante per l'origine. Avendosi poi qui $1 < p_1 \leq p \leq 2$, il paraboloido che rappresenta $I_p(a, b)$ è (numero ricordato) iperbolico, diventando un cilindro parabolico per $p = 2$. In quest'ultimo caso si ha subito che il segmento $(0, 2\pi)$ dell'asse ω dà il minimo che cerchiamo e che anzi rende I_p sempre *minore* dello stesso integrale calcolato sulle altre curve ammesse, perchè la retta (15), che ora diventa $\pi a = 2b$, non coincide con la generatrice del cilindro che giace sul piano (a, b) , e che è la retta $b = 0$. Veniamo al caso $1 < p_1 \leq p < 2$. Il paraboloido, come abbiamo avvertito, è iperbolico ed è tagliato dal piano (a, b) secondo due rette (generatrici), passanti per l'origine, le cui equazioni si ricavano da

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2p} I_p(a, b) = 2 \sin \frac{\pi}{p} \left\{ a^2 \cos \frac{\pi}{p} \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{2\pi}{p} \right) + \right. \\ \left. + 2b^2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{p} \right) + \right. \\ \left. + 2ab \sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} - 2 \cos \frac{\pi}{p} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right\} (16)$$

Indichiamo con r_1 e r_2 queste due rette e con $\widehat{r_1 r_2}$ quello dei loro an-

goli (considerati completi) che si riduce per continuità a zero al tendere di p a 2.

Nei punti del piano (a, b) interni a $\widehat{r_1 r_2}$, $I_p(a, b)$ è allora negativo; positivo, in quelli esterni. Perciò il segmento $(0, 2\pi)$ dell'asse ω dà il minimo cercato finchè la retta (15) è esterna all'angolo $\widehat{r_1 r_2}$; non dà minimo quando invece è interna. Per $p = 2$ si è già visto che la retta (15) è esterna a $\widehat{r_1 r_2}$. Sia \bar{p} il valore di p per il quale la (15) passa dall'esterno all'interno di $\widehat{r_1 r_2}$. Questo valore si ricava come radice dell'equazione in p che si ottiene eliminando a e b fra le equazioni (15) e (16), e risulta minore di 2 e maggiore di $\frac{4}{3}$, come si verifica facilmente. Allora, per $p \geq \bar{p}$, il segmento detto dell'asse ω dà il minimo voluto, e quindi, tenendo conto di quanto si è detto sopra, dà il minimo per l'integrale I_p in confronto di tutte le curve $\varphi = \varphi(\omega)$ tali che sia $\varphi(0) = 0$, $\int_0^{2\pi} \varphi d\omega = 0$ e $|\varphi(\omega)| < \rho$; non dà, invece, minimo per $p < \bar{p}$.

Il minimo, che si ha per $p \geq \bar{p}$, sarebbe minimo relativo, perchè le funzioni φ le abbiamo considerate soddisfacenti alla condizione $|\varphi| < \rho$. Ma si ha subito che da tale condizione può prescindersi. Sia, infatti, $\psi(\omega)$ una funzione sottoposta solamente alle condizioni: $\psi(0) = 0$, $\int_0^{2\pi} \psi(\omega) d\omega = 0$. Posto $\varphi(\omega) = t\psi(\omega)$, si ha che, per ogni t , è pure $\varphi(0) = 0$, $\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) d\omega = 0$. Per t sufficientemente piccolo, è $|\varphi(\omega)| < \rho$ e quindi, per l'esistenza del minimo relativo,

$$\int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2) d\omega > 0.$$

Ed essendo

$$\int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2) d\omega = t^2 \int_0^{2\pi} (p^2 \psi'^2 - \psi^2) d\omega,$$

è anche

$$\int_0^{2\pi} (p^2 \psi'^2 - \psi^2) d\omega > 0.$$

Si tratta dunque di un minimo, non solo relativo, ma *assoluto*, e resta dimostrato che, « per ogni funzione φ , non identicamente nulla, soddisfacente

alle condizioni

$$\varphi(0) = 0, \int_0^{2\pi} \varphi d\omega = 0$$

è

$$\int_0^{2\pi} (p^2 \varphi'^2 - \varphi^2) d\omega \geq 0$$

per ogni $p \geq \bar{p}$, il segno di uguaglianza valendo solo se è $p = \bar{p}$.

Si osservi che per $p < \bar{p}$ il segmento $(0, 2\pi)$ dell'asse ω , invece di un minimo dà un massimo per I_p esteso alle estremali (10) che partono dall'origine e finiscono sulla retta $\omega = 2\pi$, per modo tale che sulle estremali dette è $I_p < 0$.

22. Da quanto si è ottenuto or ora circa l'integrale I_p , e in base all'uguaglianza (8), deduciamo che per $p > \bar{p}$, vale a dire per $h < \bar{h}$ — dove è $\bar{h} = \frac{2\pi R}{p}$ (questo \bar{h} risultando così compreso fra πR e $\frac{3\pi R}{2}$) — il cilindro dà un minimo debole, nel senso indicato al principio del numero precedente; non lo dà per $h > \bar{h}$. Ripetendo qui le considerazioni del n. 20, si passa dal minimo debole a quello *forte*, ed è possibile concludere che

« il limite superiore delle altezze del cilindro — per le quali il cilindro stesso dà un'area minima rispetto a quella di tutte le superficie limitate dai piani delle basi del cilindro, giacenti in prossimità della superficie cilindrica, racchiudenti coi piani detti il medesimo volume, ed aventi colla superficie cilindrica una base a comune — è \bar{h} di cui si è parlato più sopra, il quale \bar{h} è compreso fra πR e $\frac{3}{2}\pi R$ ».

« Se è $h > \bar{h}$, esistono delle superficie, della famiglia di quelle dell'enunciato precedente, le quali, avendo, a piacere, la base distinta dalla corrispondente del cilindro, più grande o più piccola di quella, hanno area inferiore all'area del cilindro ».

23. A quanto si è finora mostrato può aggiungersi qualcosa di più, che permette di assicurare l'esistenza del minimo, per ogni $h < \bar{h}$, anche se quella base che dovrebbe restar fissa, la si lascia variare in certe determinate condizioni.

Si risolva il sistema (11), rispetto ad a e b , e si faccia il rapporto dei valori trovati:

$$\frac{b}{a} = \frac{\varphi_1 \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{2\pi}{p} \right) + \varphi_2 \left(2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right)}{\varphi_1 \left\{ 2 \sin \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right) \right\} - \varphi_2 \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right)} \quad (17)$$

Si supponga φ_2 positivo, fisso, e si consideri il rapporto qui scritto come funzione di φ_1 .

Derivando si ha

$$D_{\varphi_1} \frac{b}{a} = \varphi_2 \frac{\left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{2\pi}{p} \right) \frac{p}{\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{p} \right) - \left(2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right) \left\{ 2 \sin \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right) \right\}}{\left\{ \dots \dots \dots \right\}^2}$$

Il numeratore di questa derivata non è altro che il determinante del sistema (11) cambiato di segno: esso quindi si riduce a

$$4 \left(2 \frac{p}{\pi} \sin^3 \frac{\pi}{p} - \sin \frac{2\pi}{p} \right),$$

espressione che è sempre maggiore di zero per $1 < p \leq 2$. Dunque $\frac{b}{a}$ al variare di φ_1 da 0 a φ_2 cresce sempre. In quest'intervallo il denominatore di $\frac{b}{a}$ si annulla; e $\frac{b}{a}$ passando attraverso lo zero del suo denominatore salta bruscamente da $+\infty$ a $-\infty$. Per $\varphi_1 = 0$ abbiamo il coefficiente angolare della retta (15); e per $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{p}}{\sin \frac{2\pi}{p}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}. \tag{18}$$

Dunque, quando φ_1 varia da 0 a φ_2 , il punto di coordinate a e b si trova in quello degli angoli formati dalle rette (15) e (18) che comprende l'asse b . Delle rette dette (per i valori di p che consideriamo) la prima attraversa il 1.^o e il 3.^o quadrante, la seconda gli altri due.

Verifichiamo che quest'angolo è esterno all'angolo $\widehat{r_1 r_2}$, per ogni $p > \bar{p}$. Sappiamo già che la retta (15) è, in tale ipotesi, esterna a $\widehat{r_1 r_2}$. Verifichiamo che tale è anche la (18). L'equazione da cui si ricavano i coefficienti angolari di r_1 e r_2 , si ottiene dividendo per a^2 la (16), ed è, sopprimendo il fattore $2 \sin \frac{\pi}{p}$,

$$\left. \begin{aligned} & 2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \sin^3 \frac{\pi}{p} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \\ & + 2 \sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} - 2 \cos \frac{\pi}{p} \right) \frac{b}{a} + \cos \frac{\pi}{p} \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{2\pi}{p} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Se qui, al posto di $\frac{b}{a}$, poniamo $\operatorname{tg} \frac{\pi}{p}$, otteniamo

$$\begin{aligned} 2 \frac{p}{\pi} \sin^5 \frac{\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \sin^2 \frac{2\pi}{p} \sin \frac{\pi}{p} - 2 \sin^2 \frac{2\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} + \\ + \frac{p}{\pi} \cos^3 \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{2\pi}{p}, \end{aligned}$$

la quale espressione per ogni p compreso fra 1 e 2 è sempre *positiva*, perchè tali sono tutti i suoi termini. Se ne deduce che il rapporto $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}$ è esterno alle radici di (19) finchè il coefficiente di $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ nella stessa (19) è positivo. Questo coefficiente è positivo, per $p=2$, e cambia segno sol quando passa a traverso lo zero. Ma, quando tende allo zero, (avendosi che il coefficiente di $\frac{b}{a}$ è sempre negativo per $1 < p < 2$) la radice positiva maggiore diventa infinita e p deve essere maggiore di \bar{p} , perchè il coefficiente angolare di r_1 ha già oltrepassato quello di (15), che è sempre finito e positivo per $1 < p \leq 2$. Siamo dunque sicuri che, per ogni p tale che sia $\bar{p} \leq p \leq 2$, il coefficiente di $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ in (19) è sempre positivo e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{p}$ è esterna alle radici dell'equazione stessa;

inoltre, per gli stessi p , l'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ non contiene mai l'asse b . Si ha così che l'angolo indicato delle rette (15) e (18) è, per ogni p soddisfacente alla doppia limitazione $\bar{p} < p \leq 2$, esterno all'angolo $\widehat{r_1 r_2}$ e che, di conseguenza, per questi stessi valori di p , al variare di φ_1 da 0 a φ_2 , il punto (a, b) si trova sempre al di fuori dell'angolo $\widehat{r_1 r_2}$, e l'integrale I_2 , corrispondente, è sempre *positivo* (sarebbe nullo solo se $\varphi_1 = \varphi_2 = a = b = 0$).

Qui si è supposto φ_2 positivo; ma l'espressione (17) indica che nulla cambia mutando segno a φ_1 e φ_2 contemporaneamente. Quanto si è stabilito vale perciò senza limitazione alcuna sul segno di φ_2 .

24. Vediamo se si può aggiungere nulla per il caso che φ_1 e φ_2 abbiano segni contrari. Si dividano numeratore e denominatore della frazione del secondo membro di (17) per φ_2 , supposto quindi $\neq 0$. Si ottiene

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \left(\frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} - 2 \cos \frac{2\pi}{p} \right) + \left(2 - \frac{p}{\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right)}{\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \left(2 \sin \frac{2\pi}{p} + \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right) \right) - \frac{p}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi}{p} - 1 \right)}.$$

Per $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0$, quest'uguaglianza si riduce alla (15), vale a dire, per ogni p tale che sia $\bar{p} < p \leq 2$ e per $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0$, il punto di coordinate a e b è esterno all'angolo $\widehat{r_1 r_2}$. Il rapporto $\frac{b}{a}$ è funzione finita e continua della variabile $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ nell'intorno del punto zero, e se \bar{p} è un numero maggiore di \bar{p} (vicino peraltro a \bar{p} quanto si vuole), per ogni p tale che si abbia $\bar{p} \leq p \leq 2$ e per ogni $\left| \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right| < \eta$, dove η è un numero positivo convenientemente scelto, il punto di coordinate a e b risulta *sempre esterno* all'angolo $\widehat{r_1 r_2}$, e l'integrale corrispondente I_p *sempre positivo*.

25. Dalla relazione

$$\varphi = U^2 + 2R U,$$

del n. 13, e dalle altre $U(0) = u(0)$, $U(2\pi) = u(h)$, si ricava

$$\varphi_1 = \varphi(0) = u^2(0) + 2R u(0) = \left\{ R + u(0) \right\}^2 - R^2 = \frac{\Delta_1}{\pi}$$

$$\varphi_2 = \varphi(2\pi) = u^2(h) + 2R u(h) = \left\{ R + u(h) \right\}^2 - R^2 = \frac{\Delta_2}{\pi},$$

dove Δ_1 , Δ_2 indicano le variazioni delle basi del cilindro, quando dal cilindro stesso si passa alla superficie che corrisponde alla funzione u . Si può affermare pertanto, per la formola (8) del n. 13 e pei risultati dei nn. 23 e 24, che, per ogni $h < \bar{h}$, dove \bar{h} è un qualunque numero positivo inferiore a \bar{h} , il segmento $y = R (0 \leq x \leq h)$ dà il minimo di cui si tratta al n. 13, rispetto a tutte le altre curve rappresentabili dall'equazione $y = R + u(x)$, ($0 \leq x \leq h$), dove $u(x)$ è sufficientemente piccolo in modulo, insieme alla sua derivata, e soddisfa alla condizione

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right| < \eta,$$

oppure all'altra che Δ_1 sia compreso fra 0 e Δ_2 (estremi inclusi).

Qui si tratterebbe di un minimo debole; ma se ne deduce subito l'esistenza del minimo forte procedendo come al n. 20. Si osservi, inoltre, che, potendosi scambiare, senza inconveniente alcuno, una base del cilindro con

l'altra, la condizione che Δ_1 sia compreso fra 0 e Δ_2 può sostituirsi con l'altra che Δ_2 sia compreso fra 0 e Δ_1 ; per modo tale che la condizione detta si riduce semplicemente a questo: che Δ_1 e Δ_2 abbiano lo stesso segno. Si conclude quindi che

« per ogni $h < \bar{h}$ (con \bar{h} positivo, qualunque, $< \bar{h}$) il cilindro di altezza h ha area minore di quella di qualsiasi altra superficie limitata dai piani delle basi del cilindro stesso, racchiudente, con questi piani, ugual volume, abbastanza prossima alla superficie cilindrica, e tale da soddisfare alla condizione

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right| < \tau$$

(dove τ è un numero positivo scelto in modo conveniente (n. 24)) oppure all'altra che Δ_1 e Δ_2 abbiano lo stesso segno ».

IV.

26. Per giungere alla proprietà di minimo relativa al potenziale W , occorre stabilire una disuguaglianza che limiti inferiormente la differenza fra l'area di una superficie di rivoluzione e quella del cilindro solito, quando la superficie detta sia di rivoluzione attorno all'asse del cilindro e abbia i cerchi estremi nei piani delle basi del cilindro stesso, ma non coincidenti necessariamente con tali basi.

Si considerino, a tal uopo, i punti $(0, R + \delta_0)$, $(h, R + \delta_h)$ del piano (x, y) , e una curva che li congiunga e per la quale sia

$$\int_{(0, R + \delta_0)}^{(h, R + \delta_h)} y^2 x' ds = R^2 \cdot h.$$

Quest'uguaglianza porta che, ruotando la curva considerata attorno all'asse x , la superficie che si viene a generare, assieme ai cerchi estremi, racchiude un volume uguale a quello del cilindro di generatrice

$$y = R \quad (0 \leq x \leq h).$$

Indichiamo con S l'area della superficie ora detta. Supponendo che δ_0 e δ_h siano in modulo inferiore al $\bar{\delta}$ di cui si è parlato al n. 19, esiste (nu-

mero detto) una determinata curva, integrale dell'equazione differenziale (3), che congiunge i punti $(0, R + \delta_0)$ $(h, R + \delta_h)$, e che, ruotata attorno all'asse x , genera una superficie la quale racchiude, coi cerchi estremi, un volume uguale a quello del cilindro detto, ed ha un'area S' minore di S . È dunque

$$S - 2\pi R h > S' - 2\pi R h; \quad (20)$$

e quello che importa ancora di rilevare si è che la funzione rappresentatrice della curva corrispondente ad S' tende, al tendere di δ a zero, uniformemente alla $y = R$, mentre, dal canto suo, la derivata di tale funzione tende, pure uniformemente, a zero.

Ritorniamo ora al n. 10 e osserviamo, innanzi tutto, che il ragionamento ivi fatto per la famiglia di funzioni $u(x, t)$, dipendenti dal parametro t , si può ripetere in generale per una varietà qualsiasi di funzioni $u(x)$, continue insieme alla loro derivata, ottenendo la validità della disuguaglianza (7) per tutte le funzioni $u(x)$ che soddisfano oltre alle condizioni 3.^a e 4.^a del numero detto alla doppia condizione: $|u(x)| < \varepsilon$, $|u'(x)| < \varepsilon$, dove ε è scelto convenientemente. Rilevato questo, vediamo che se la curva che genera S' la rappresentiamo con l'equazione $y = y(x)$, $y(x) - R$ differisce dalle funzioni $u(x)$, cui ora abbiamo accennato, solo perchè qui non è verificata la condizione (3.^a) $u(0) = u(h)$. Non potremo perciò, facendo $u(x) = y(x) - R$, giungere alla disuguaglianza (7), ma potremo tuttavia scrivere la formula (5)

$$\frac{2R}{h} (S' - 2\pi R h) = \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta \int_0^{2\pi} U'^2(\omega) d\omega - \int_0^{2\pi} U^2(\omega) d\omega \quad (21)$$

ed avere soddisfatta la condizione

$$\int_0^{2\pi} U^2(\omega) d\omega + 2R \int_0^{2\pi} U(\omega) d\omega = 0, \quad (22)$$

perchè solo a questo punto entra in gioco l'uguaglianza $u(0) = u(h)$; inoltre osserviamo che la (21), con la condizione (22), vale per tutte le nostre funzioni $u(x) = y(x) - R$, senza tener conto alcuno dell'ordine di piccolezza loro e della loro derivata. Facciamo qui la trasformazione definita dall'uguaglianza

$$U^2(\omega) + 2R U(\omega) = V^2(\omega) + 2R V(\omega) + c(\omega - \pi), \quad (23)$$

dove è

$$c = \frac{(R + \delta_h)^2 - (R + \delta_0)^2}{2\pi}.$$

Dalla (23) si ricava, ritenendo solo il segno + davanti al radicale (se si prendesse il segno -, al tendere a zero di $U(\omega)$, $V(\omega)$ tenderebbe a $-2R$ e non a zero),

$$V(\omega) = -R + \sqrt{(R + U(\omega))^2 - c(\omega - \pi)},$$

donde

$$V(0) = V(2\pi).$$

È poi, per la (22)

$$\int_0^{2\pi} V^2(\omega) d\omega + 2R \int_0^{2\pi} V(\omega) d\omega = 0.$$

Dalla (23) si ricava anche (tenendo conto dell'osservazione fatta sopra circa il segno da scegliersi davanti al radicale)

$$U = -R + \sqrt{(R + V(\omega))^2 + c(\omega - \pi)} = \frac{V(2R + V) + c(\omega - \pi)}{R + \sqrt{(R + V)^2 + c(\omega - \pi)}}$$

$$U' = \frac{2(R + V)V' + c}{2\sqrt{(R + V)^2 + c(\omega - \pi)}},$$

e sostituendo in (21) si ha

$$\left. \begin{aligned} \frac{2R}{h} (S' - 2\pi R h) &= \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta \int_0^{2\pi} \frac{(R + V)^2 V'^2}{(R + V)^2 + c(\omega - \pi)} d\omega - \\ &- \int_0^{2\pi} \frac{(2R + V)^2 V^2}{(R + \sqrt{(R + V)^2 + c(\omega - \pi)})^2} d\omega + \\ &+ c \left\{ \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta \int_0^{2\pi} \frac{4(R + V)V' + c}{4[(R + V)^2 + c(\omega - \pi)]} d\omega - \right. \\ &\left. - \int_0^{2\pi} \frac{2V(2R + V)(\omega - \pi) + c(\omega - \pi)^2}{(R + \sqrt{(R + V)^2 + c(\omega - \pi)})^2} d\omega \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Al tendere uniformemente a zero di $u(x) = y(x) - R$ e $u'(x)$, tendono uniformemente a zero anche $U(\omega)$, $U'(\omega)$, $V(\omega)$, $V'(\omega)$; e se i due primi integrali che figurano nella precedente uguaglianza li scriviamo rispettivamente

$$\theta' \int_0^{2\pi} V'^2 d\omega, \quad \theta'' \int_0^{2\pi} V^2 d\omega,$$

θ' e θ'' tendono entrambi all'unità. Se allora osserviamo che la nostra funzione $V(\omega)$ soddisfa a tutte le condizioni a cui soggiace la $U(\omega, t)$ del n. 10,

vediamo che la differenza

$$\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta \int_0^{2\pi} \frac{(R+V)^2 V'^2}{(R+V)^2 + c(\omega-\pi)} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{(2R+V)^2 V^2}{(R+\sqrt{(R+V)^2 + c(\omega-\pi)})^2} d\omega = \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2 \theta \cdot \theta' \int_0^{2\pi} V'^2 d\omega - \theta'' \int_0^{2\pi} V^2 d\omega,$$

per quanto si è stabilito allo stesso numero, e per ogni $u(x)$ soddisfacente alla doppia condizione $|u(x)| < \varepsilon$, $|u'(x)| < \varepsilon$, con ε scelto in modo opportuno, resta maggiore di

$$\frac{\pi}{h} (2\pi R - h) \Sigma (a_p^2 + b_p^2) > 0,$$

dove a_p e b_p sono i coefficienti dello sviluppo di FOURIER di $V(\omega)$.

Al convergere di ε a zero, il coefficiente di c nel secondo membro di (24) tende a zero; e se indichiamo con α la differenza fra le aree delle sezioni estreme della superficie che ha l'area S' (sezioni normali all'asse x), cioè se poniamo

$$\alpha = |\pi(R + \delta_0)^2 - \pi(R + \delta_h)^2| = 2\pi^2 |c|,$$

possiamo concludere che, ogni qualvolta sia $|u(x)| < \varepsilon$, $|u'(x)| < \varepsilon$, è

$$S' - 2\pi R h > g \alpha,$$

dove g tende a zero con ε . Se ora osserviamo che, al tendere a zero del $\bar{\delta}$ di cui rimangono inferiori in modulo δ_0 e δ_h , $u(x) = y(x) - R$ e $u'(x) = y'(x)$ tendono necessariamente e uniformemente a zero, possiamo affermare che, per $\bar{\delta}$ abbastanza piccolo, è sempre verificata la disuguaglianza precedente e quindi, a fortiori, l'altra

$$S - 2\pi R h > g \alpha, \tag{25}$$

dove g tende a zero con $\bar{\delta}$.

Di più, dal modo col quale il raggio R entra in tutte le espressioni precedenti e per quanto si è detto al n. 19, si deduce che la disuguaglianza (25) vale anche relativamente a tutti i cilindri sufficientemente prossimi al nostro.

27. Si consideri ora una superficie abbastanza prossima a quella del nostro cilindro e limitata dai due piani a cui appartengono le basi del cilindro stesso. Sia σ l'area di tale superficie, α la differenza tra le aree delle sue sezioni estreme normali all'asse del cilindro, $-w$ la differenza tra il vo-

lume che essa racchiude coi piani delle sezioni estreme e quello del cilindro. Alla superficie detta sostituiamo, col procedimento già indicato (n. 8), la superficie di rotazione, attorno all'asse del cilindro, che racchiude, con le sezioni estreme normali a quest'asse, ugual volume e che ha necessariamente un'area S uguale o minore. È allora

$$\sigma - 2\pi R h > S - 2\pi R h.$$

Se R' indica il raggio della base del cilindro di altezza h , il cui volume è uguale a quello racchiuso dalla superficie di rivoluzione ora costruita insieme alle sue sezioni estreme dette, avremo per la (25), in seguito all'osservazione fatta alla fine del numero precedente,

$$S - 2\pi R' h > g a$$

e quindi

$$\sigma - 2\pi R h > 2\pi h (R' - R) + g a$$

ed anche, per essere

$$\pi h (R' - R) = \frac{\pi h (R'^2 - R^2)}{R' + R} = - \frac{w}{R' + R},$$

$$\sigma - 2\pi R h > - \frac{2}{R' + R} w + g a. \quad (26)$$

Questa formola fondamentale, che sussiste per un qualsiasi $h < 2\pi R$, è quella a cui alludevamo al principio del n. 26, ed è anche quella alla quale giunse l'ALMANSI: qui però risulta stabilita, con maggior generalità, *per tutte le superficie, come quelle di area σ , senza riguardo alcuno al comportamento dei loro piani tangenti.*

28. Come si è già detto, la formola (26) vale per un qualunque $h < 2\pi R$. Se però h è anche minore di πR possiamo a tal formola sostituirne un'altra che dice qualcosa di più, e che non è se non la stessa (26) in cui dal secondo membro venga tolto il termine $g a$.

Ed invero, quando si abbia $h < \pi R$, alla disuguaglianza (25) può sostituirsi la

$$S - 2\pi R h > 0$$

in forza della proposizione del n. 20. Ed allora ne viene senz'altro

$$\sigma - 2\pi R h > - \frac{2}{R' + R} w. \quad (27)$$

Osserviamo, inoltre, che, per la proposizione del n. 25, la differenza $S - 2\pi R h > 0$ vale anche per tutti gli $h < \bar{h} < \bar{h} -$ dove l' \bar{h} è un numero positivo qualsiasi minore di quell' \bar{h} di cui si è parlato al n. 22 — purchè si abbia $\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right| < \eta$, con η convenientemente piccolo, oppure $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \geq 0$ essendo Δ_1 e Δ_2 le variazioni delle aree delle basi del cilindro. E ciò deve ritenersi valido non solo per il nostro cilindro, ma anche per cilindri sufficientemente prossimi a quello. Ne consegue che, per gli stessi h qui considerati e per Δ_1 e Δ_2 soggetti alle condizioni dette sopra, vale anche la (27).

V.

29. Prima di dedurre dalle formole (26) e (27) la proprietà di minimo del potenziale W , osserviamo che le costanti m ed n , che entrano nell'espressione (1) di W , e delle quali, come già si è avvertito, la prima è positiva, devono soddisfare ad alcune condizioni affinché si abbia effettivamente il minimo, affinché cioè l'equilibrio del cilindro sia proprio stabile.

Tra le deformazioni ammissibili della massa d'olio vi sono quelle che vengono a ricoprire una parte della superficie laterale dei dischi, pur seguendo a ricoprire completamente le faccie interne dei dischi stessi (basi del cilindro). Consideriamo una di tali deformazioni, e indichiamo con γ la parte di superficie laterale dei dischi ricoperta dalla massa oleosa. Avremo, come differenza ΔW fra il potenziale W dovuto alla massa deformata e quello spettante al cilindro,

$$\Delta W = m \Delta S - n \Delta \Sigma.$$

Teniamo fissa la parte γ , e facciamo tendere la superficie deformata a quella del cilindro aumentata della porzione γ . Al limite si ha

$$\lim \Delta W = m \gamma - n \gamma = (m - n) \gamma.$$

Si vede dunque che, se non è $m \geq n$, il cilindro non può dare il minimo per W ; e ciò vale qualunque sia $h < 2\pi R$.

Si consideri un'altra deformazione della massa d'olio in modo che la superficie di tal massa sia di rotazione attorno all'asse del cilindro e che i suoi cerchi estremi poggino sulle basi del cilindro, siano uguali fra loro ed ab-

biano il raggio uguale a $R - d$, con $d > 0$. Sia $y = R + u(x)$ l'equazione della linea meridiana della superficie: dovrà essere $u(0) = u(h) = -d$.

Fatta la solita trasformazione $x = \frac{h}{2\pi} \omega$, che cambia $u(x)$ in $U(\omega)$, con $U(0) = U(\omega) = -d$, si determini questa $U(\omega)$ mediante l'equazione

$$U^2 + 2RU = \varphi$$

del n. 13, dove prendiamo per φ quella estrema (10) che, per $\omega = 0$ e $\omega = 2\pi$, assume il valore $d^2 - 2Rd = d(d - 2R)$. Le costanti a e b , che figurano nell'espressione di φ , sono funzioni lineari dei valori assunti da φ nei punti $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$; dunque sono infinitesime del 1.^o ordine, almeno, rispetto a d . Ne viene allora, per la formula (8) dello stesso n. 13, che ΔS è infinitesimo del 2.^o ordine, almeno, rispetto a d . Ora è

$$\Delta W = m \Delta S - n \Delta \Sigma$$

con

$$\Delta \Sigma = 2\pi ((R - d)^2 - R^2) = 2\pi d(d - 2R).$$

È dunque

$$\Delta W = d \left\{ m \frac{\Delta S}{d} - 2\pi n(d - 2R) \right\},$$

e poichè $\frac{\Delta S}{d}$ è infinitesimo con d , ne viene

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{d} = 4\pi R n.$$

Di qui si trae che, se è $n < 0$, il cilindro non dà il minimo per W : conclusione questa che vale per ogni $h < 2\pi R$.

Siamo così giunti alle limitazioni

$$0 \leq n \leq m. \tag{28}$$

Queste condizioni furono trovate dall'ALMANZI con un metodo che, in sostanza, è quello stesso seguito sopra.

30. È possibile, però, giungere alle limitazioni scritte con un procedimento del tutto diverso, il quale pone ben in luce il significato fisico delle limitazioni stesse.

Lo spigolo circolare di uno dei dischi, spigolo che segna la linea di attacco della superficie cilindrica al disco stesso, è, in realtà, più o meno smussato, talchè il passaggio dalla base del cilindro alla superficie laterale

del disco non avviene in fatto con una discontinuità del piano tangente. Data allora l'esistenza del piano tangente per la superficie del disco lungo la linea d'attacco, e detto φ l'angolo di raccordo, dalla teoria di GAUSS si ha

$$\cos \varphi = \frac{n}{m}.$$

Di qui si trae una prima condizione: $|n| \leq m$.

In secondo luogo, poichè l'angolo di raccordo non può variare, nel nostro caso, che fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, deve essere $\cos \varphi \geq 0$ e quindi $n \geq 0$. Deve dunque aversi

$$0 \leq n \leq m.$$

Osserviamo ora che, con un passaggio al limite, le disuguaglianze stabilite si possono rigorosamente dimostrare anche per lo spigolo del disco per nulla smussato, il quale disco presenta dunque una variazione brusca di 90° nella giacitura del piano tangente. Basta, infatti, far tendere a zero lo smussamento dello spigolo del disco.

31. Veniamo infine a stabilire la proprietà di minimo per il potenziale W , supponendo valide le disuguaglianze (28) e supponendo $h < 2\pi R$. Supponiamo, anzi, dapprima, che si abbia

$$0 < n < m,$$

che è il caso considerato dall'ALMANZI, e procediamo seguendo codesto Autore. Sia una deformazione della nostra massa d'olio che venga a lasciare scoperta una parte delle basi del cilindro (faccie interne dei dischi) — parte la cui area l'indicheremo con α — e che copra una certa porzione della superficie laterale dei dischi, della quale porzione indicheremo l'area con γ .

La superficie libera S dell'olio la separeremo in due parti: quella compresa fra i piani delle basi del cilindro, e la rimanente. Della prima indicheremo l'area con σ , della seconda, con λ . Dalla formula $W = mS - n\Sigma$ ricaviamo allora che la variazione di W , relativa al cilindro e alla deformazione considerata, è data da

$$\Delta W = m(\sigma + \lambda - 2\pi R h) - n(\gamma - \alpha).$$

Di qui, osservando che è $\lambda \geq \gamma$, deduciamo

$$\Delta W \geq m(\sigma - 2\pi R h) + (m - n)\lambda + n\alpha.$$

Se indichiamo con β la proiezione normale di λ sui piani delle basi del cilindro, avendosi $\beta < \lambda$, si ha anche

$$\Delta W \geq m(\sigma - 2\pi R h) + \frac{m-n}{2}\lambda + \frac{m-n}{2}\beta + n\alpha,$$

e, per la (26),

$$\Delta W > \left(-\frac{2m}{R'+R}w + \frac{m-n}{2}\lambda\right) + \left(mga + \frac{m-n}{2}\beta + n\alpha\right).$$

Ora qui è facile vedere che, per deformazioni sufficientemente piccole, le due parentesi del 2.^o membro sono entrambi positive. Ed invero, se indichiamo con d la massima distanza dei punti della superficie deformata dalla superficie del cilindro, il volume w — il quale non è altro che quello racchiuso dalle superficie misurate da λ , γ e da una parte di β (appunto per l'invariabilità del volume della massa oleosa) — risulta minore di $\beta d < \lambda d$. È dunque

$$-\frac{2m}{R'+R}w + \frac{m-n}{2}\lambda > \lambda \left(-\frac{2m d}{R+R'} + \frac{m-n}{2}\right);$$

e per d sufficientemente piccolo si vede bene che questa espressione è positiva.

In quanto alla seconda parentesi, osserviamo che, indicando con q il minore dei due numeri $\frac{m-n}{2}$ e n , si ha

$$mga + \frac{m-n}{2}\beta + n\alpha \geq mga + q(z + \beta);$$

e poichè a dà la differenza fra le sezioni estreme di σ , normali all'asse del cilindro, sezioni le cui oscillazioni attorno alle basi del cilindro non possono mai raggiungere $\alpha + \beta$, ne viene che questo a è inferiore a $2(\alpha + \beta)$, ed è perciò

$$mga + \frac{m-n}{2}\beta + n\alpha > (z + \beta)(-2m|g| + q).$$

Ma g tende a zero con d , mentre m e q sono fissi; quindi per d sufficientemente piccolo è

$$mga + \frac{m-n}{2}\beta + n\alpha > 0,$$

e finalmente

$$\Delta W > 0.$$

32. Passiamo al caso $m = n$, nel quale la variazione del potenziale W vien data da

$$\Delta W = m (\Delta S - \Delta \Sigma).$$

Consideriamo la superficie deformata del numero precedente e, insieme: a) il cilindro C' di minima altezza h' , le cui basi siano delle sezioni circolari dei dischi e comprendano fra loro tutta la massa oleosa deformata; b) la superficie S' limitata dalle stesse basi di C' e composta della superficie libera della massa deformata, della superficie laterale μ dei dischi che appartiene a C' ed è esterna alla massa detta, e infine delle porzioni α delle faccie interne dei dischi che sono esterne anch'esse alla massa oleosa. I volumi racchiusi dalle due basi circolari di C' e, rispettivamente, da C' e da S' , sono identici, perchè, tolte le medesime porzioni dei dischi, restano i volumi del cilindro primitivo e della massa d'olio deformata. E siccome si è supposto $h < 2\pi R$, si può anche supporre $h' < 2\pi R$. Allora, per la proprietà di minimo del cilindro dimostrata al n. 11, abbiamo, per d sufficientemente piccolo,

$$S' - 2\pi R h' > 0.$$

Essendo poi

$$S' = S + \mu + \alpha \quad 2\pi R h' = 2\pi R h + \mu + \gamma,$$

otteniamo

$$S' - 2\pi R h' = (S - 2\pi R h) + (\alpha - \gamma)$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{m} \cdot \Delta W = \Delta S - \Delta \Sigma = (S' - 2\pi R h') - (\alpha - \gamma) - (\gamma - \alpha),$$

$$\frac{1}{m} \cdot \Delta W = S' - 2\pi R h' > 0.$$

33. Esaminiamo l'ultimo caso, $n = 0$, per il quale si ha

$$W = m S.$$

a) Supponiamo, dapprima, $h < \pi R$.

Considerando ancora la superficie deformata del n. 31 avremo

$$\Delta W = m (\sigma + \lambda - 2\pi R h)$$

ed anche, applicando la (27),

$$\Delta W > m \left(\lambda - \frac{2w}{R + R'} \right).$$

Qui, come al n. 31, è $w < \lambda \cdot d$, essendo d la massima distanza dei punti della superficie deformata da quella del cilindro e può scriversi

$$\Delta W > m \lambda \left(1 - \frac{2d}{R+R'} \right).$$

Al tendere di d a zero, risulta ancora

$$\Delta W > 0.$$

b) Sia ora $\pi R \leq h < \bar{h}$, dove \bar{h} è quello di cui si è parlato al n. 22.

Consideriamo sempre la stessa superficie deformata. Avremo per la (26) e per essere sempre $w < \lambda d$,

$$\Delta W = m \Delta S = m (\sigma + \tau - 2\pi R h) > m \left(\lambda - \frac{2w}{R+R'} + g a \right),$$

e, se è $\lambda \neq 0$,

$$\Delta W > m \lambda \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2d}{R+R'} \right) + \left(\frac{1}{2} + g \frac{a}{\lambda} \right) \right\}.$$

Abbiamo dunque, per quelle deformazioni per le quali si ha

$$\frac{a}{\lambda} \leq \frac{1}{\eta} + 2$$

— dove η è quello di cui si parla in fine al n. 28 — e se d è sufficientemente piccolo, $\Delta W > 0$ (perchè per queste deformazioni $g \frac{a}{\lambda}$ tende a zero con d).

Supponiamo che si abbia $\frac{a}{\lambda} > \frac{1}{\eta} + 2$ e quindi $\lambda < \frac{\eta a}{1 + 2\eta}$.

Indichiamo rispettivamente con β'_1 e β'_2 le porzioni dei piani delle basi del cilindro esterne al cilindro ma interne alla superficie deformata; con α_1 e α_2 quelle corrispondenti di α (parte delle basi del cilindro che resta scoperta). Abbiamo, ricordando i significati di a , Δ_1 , Δ_2 ,

$$\Delta_1 = \beta'_1 - \alpha_1, \quad \Delta_2 = \beta'_2 - \alpha_2$$

$$a = |\Delta_1 - \Delta_2| = |(\beta'_1 - \alpha_1) - (\beta'_2 - \alpha_2)| = |(\beta'_1 - \beta'_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)|$$

e perciò avendosi $|\beta'_1 - \beta'_2| < \beta'_1 + \beta'_2 < \lambda < \frac{\eta a}{1 + 2\eta}$,

$$|\alpha_2 - \alpha_1| > a - \frac{\eta a}{1 + 2\eta} = a \frac{\eta + 1}{1 + 2\eta}.$$

Delle due parti α_1 e α_2 , sia α_2 la maggiore. È allora

$$\alpha_2 > a \frac{\eta + 1}{2\eta + 1}$$

$$-\Delta_2 = \alpha_2 - \beta'_2 \geq \alpha_2 - \lambda > a \frac{\eta + 1}{2\eta + 1} - \frac{\eta a}{2\eta + 1} = a \frac{1}{2\eta + 1}.$$

E se $\Delta_1 = \beta'_1 - \alpha_1$ fosse positivo, avendosi $\beta'_1 - \alpha_1 < \beta'_1 < \lambda < \frac{\eta a}{2\eta + 1}$, si avrebbe

$$\left| \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right| < \eta.$$

Dunque, avendo supposto $\frac{a}{\lambda} > \frac{1}{\eta} + 2$ i casi che possono presentarsi sono due: o il rapporto fra Δ_1 e Δ_2 resta in modulo minore di η , oppure Δ_1 e Δ_2 hanno ugual segno. In ambedue i casi, per quanto si è detto al n. 28, vale la disuguaglianza (27) e si ha

$$\Delta W = m \Delta S = m(\sigma + \lambda - 2\pi R h) > m\left(\lambda - \frac{2w}{R + R'}\right)$$

e ($w < \lambda d$)

$$\Delta W > m\lambda\left(1 - \frac{2d}{R + R'}\right),$$

e per d abbastanza piccolo, $\Delta W > 0$.

Possiamo dunque dire che, per ogni h tale che sia $\pi R \leq h < \bar{h}$, e per d convenientemente piccolo (questa piccolezza dipenderà dall' h scelto) è sempre

$$\Delta W > 0.$$

c) Veniamo, infine, al caso $\bar{h} < h < 2\pi R$.

L'ultima proposizione del n. 22 ci dà immediatamente che per $W = mS$ manca il minimo, appunto perchè tale proposizione afferma l'esistenza di superfici di rivoluzione di ugual volume del cilindro, aventi una base a comune col cilindro e l'altra base interna alla base corrispondente, prossime alla superficie cilindrica quanto vuolsi, ma aventi area minore.

Concludiamo dunque che, se è $n = 0$, il potenziale W è minimo sul cilindro finchè l'altezza di quest'ultimo è minore di \bar{h} ; non è più minimo quando l'altezza ha superato tal limite.

34. Riassumendo abbiamo (tenuto anche conto del n. 12):

« Affinchè il cilindro dia una configurazione di equilibrio stabile per una massa liquida soggetta alle sole forze molecolari è necessario che sia

$$0 \leq n \leq m,$$

dove n ed m hanno i significati ben noti (vedi uguaglianza (1)).

La stabilità manca per tutte le altezze del cilindro superiori alla circonferenza $2\pi R$ delle basi del cilindro medesimo.

Se è $0 < n \leq m$ c'è stabilità per tutte le altezze inferiori a $2\pi R$.

Se poi è $n = 0$, si ha stabilità o instabilità a seconda che l'altezza è minore o maggiore di un certo limite $\frac{2\pi R}{p}$ — compreso fra πR e $\frac{3}{2}\pi R$, e nel quale \bar{p} si determina come è detto al n. 21 — e che è il limite superiore di quelle altezze per le quali il cilindro dà un'area minima rispetto all'area di tutte le superficie limitate dai piani delle basi del cilindro medesimo, giacenti in prossimità della superficie cilindrica, racchiudenti coi piani detti il medesimo volume, ed aventi con la superficie cilindrica una base a comune ».

35. Terminando, vogliamo richiamare l'attenzione del lettore sul fatto, rilevato dall'ALMANZI, del passaggio dalla stabilità all'instabilità, con l'inversione dei liquidi considerati, passaggio dipendente da ciò che con l'inversione si viene a cambiare il coefficiente n in $-n$, il quale dunque da positivo diventa negativo. La stabilità si conserva solo nel caso di $n = 0$ e di un'altezza del cilindro inferiore a $\frac{2\pi R}{p}$.

Ueber eine Transformation von Luigi Bianchi.

(Von A. V. BÄCKLUND, in *Lund*.)

In einer von der Französischen Academie der Wissenschaften gekrönten Preisschrift, die in *Mémoires des Savants étrangers*, t. 34 (1909) unter dem Titel « Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales » veröffentlicht wurde, hat BIANCHI eine äusserst bemerkenswerte Flächentransformation aufgestellt. Auch wenn man von der grossen Wichtigkeit der erzielten Ergebnisse absehen wollte, würde auf jeden Fall seine dort befolgte Beweisführung ihrer ansehnlichen Tragweite wegen die grösste Aufmerksamkeit auf sich lenken. Sie ladet nicht nur zu Verallgemeinerungen ein, sondern eröffnet recht eigentlich Wege dazu, wodurch viele Punkte des Auseinandergesetzten in noch hellerem Lichte hervortreten. Das Folgende enthält einige Betrachtungen in dieser Richtung. Vornehmlich habe ich mich jedoch auf die Frage beschränkt, inwieweit für die Flächen zweiter Ordnung BIANCHIS Transformation erweitert werden könnte, und dabei gefunden, dass sie gewissermassen in jenem Bereiche den Charakter grösster Allgemeinheit besitzt.

I.

BEMERKUNGEN ÜBER W -KONGRUENZEN.

1. Wenn die gemeinsame Tangentenschar zweier Flächen S und S' eine W -Kongruenz ausmacht, korrespondieren, wie bekannt, diese S und S' hinsichtlich der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten so mit einander, dass jede eine infinitesimale Verbiegung gestattet, die als Verschiebung ihrer Punkte betrachtet an jedem Punkte parallel zur Normalen der anderen Fläche im korrespondierenden Punkte erfolgt. Um dies analy-

tisch zu formulieren, denke ich mir die eine Fläche, es sei S , von zwei Kurvenscharen $u = C, v = C'$ derart durchzogen, dass sie jeden Punkt dieser Fläche als Schnittpunkt zweier Kurven, und zwar einer von jeder Schar, unzweideutig darstellen, und denke mir nachher die korrespondierenden Punkte auf S' und damit auch die zu $u = C, v = C'$ korrespondierenden Kurven derselben S' gezeichnet und analytisch durch dieselben Gleichungen $u = C, v = C'$ wie jene von S gegeben. Irgend ein Paar korrespondierende Punkte auf S und S' sind dann als Punkte $(u v)$ zu bezeichnen, dieselben u - und v -Werte für beide Punkte angenommen. Es seien ferner $x, y, z; x', y', z'$ ihre Koordinaten in einem festen rechtwinkligen Cartesischen Axensysteme; dann haben wir offenbar x, y, \dots, z' als ganz bestimmte nur von der Gestalt und der Lage von S und S' abhängige Funktionen von u, v zu betrachten, und es gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x' - x &= l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v}, \\ y' - y &= l \frac{\partial y}{\partial u} + m \frac{\partial y}{\partial v}, \\ z' - z &= l \frac{\partial z}{\partial u} + m \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

die überdies l, m als Funktionen von u, v definieren. Aus diesen Gleichungen im Verein mit denen für die zweiten Differentialquotienten von x, y, z , die lauten:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ & 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D X,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D' X,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 1 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ & 2 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial v} + D'' X, \text{ usw., --}$$

d. h. den Gleichungen (I), S. 88 der *Vorlesungen über Differentialgeometrie* von LUIGI BIANCHI, zweite Auflage, 1910, mit den Christoffelschen Symbolen $\left\{ \begin{array}{cc} i & k \\ & l \end{array} \right\}$ und den Koeffizienten D, D', D'' der zweiten Fundamentalform der Fläche S , — leiten wir, wie es BIANCHI zuerst getan hat, für die ersten

Differentialquotienten von x', y', z' die folgenden Formeln her:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= L \frac{\partial x}{\partial u} + M \frac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D'm) X, \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D''m) X, \text{ usw.,} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\partial l}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} m + 1, & M &= \frac{\partial m}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} m, \\ P &= \frac{\partial l}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} m, & Q &= \frac{\partial m}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} m + 1 \text{ (*).} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dies war eine Folge der Berührung der Verbindungslinie der beiden Punkte $(u v)$ mit S ; aus ihrer Berührung mit S' folgt:

$$x - x' = l' \frac{\partial x'}{\partial u} + m' \frac{\partial x'}{\partial v}, \text{ usw.,}$$

woraus nach Einführung der Werte (2) von $\partial x' / \partial u, \partial x' / \partial v$ und nach Vergleichung mit (1) sich sofort ergibt:

$$\left. \begin{aligned} l'(LQ - MP) &= -lQ + mP, \\ m'(\quad) &= lM - mL, \\ l'(D'l + D'm) + m'(D'l + D''m) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

also auch:

$$(D'l + D'm)(mP - lQ) = (D'l + D''m)(mL - lM) (**). \quad (5)$$

Diese Gleichung dürfen wir dann als Bedingungsgleichung der Berührung der Tangente (l, m) von S im Punkte $(u v)$ mit noch einer zweiten Fläche S' im korrespondierenden Punkte $(u v)$ auffassen, und zwar ist dies ganz unabhängig von der Natur letzterer Fläche und davon ob ihre mit S gemeinsame Tangentenschar eine W -Kongruenz ist oder nicht.

2. Nunmehr mag aber vorausgesetzt sein, dass die Tangentenschar $(S S')$ eine W -Kongruenz ausmacht, dass also die Fläche S' eine infinitesimale

(*) BIANCHI's oben zitierte *Differentialgeometrie*, § 284.

(**) Das ist die Gleichung (10) in BIANCHIS *Théorie des Transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales*. Mém. des Sav. étrang., t. 34, p. 24.

Transformation

$$\left. \begin{aligned} \delta x' = \varepsilon' X, \quad \delta y' = \varepsilon' Y, \quad \delta z' = \varepsilon' Z, \\ (\varepsilon' \text{ Funktion von } u, v), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

zulässt, die zugleich eine Verbiegung wird, also für jedes vom Punkte (u, v) aus gerechnete infinitesimale Bogenelement $(dx' dy' dz')$ von S' die Bedingung erfüllt:

$$\delta(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = 0,$$

oder

$$dx' d\delta dx' + dy' d\delta dy' + dz' d\delta dz' = 0.$$

Durch Einführung der Werte (6) von $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ finden wir hieraus:

$$\varepsilon' (dx' dX + dy' dY + dz' dZ) + d\varepsilon' (X dx' + Y dy' + Z dz') = 0,$$

oder mit Bezug auf (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon' \left\{ \left[\left(L \frac{\partial x}{\partial u} + M \frac{\partial x}{\partial v} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv \right] \left[\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right] + \dots \right\} + \\ + \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial u} du + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial v} dv \right) \left[(Dl + D'm) du + (D'l + D''m) dv \right] = 0, \end{aligned}$$

oder nach wiederholter Einführung der Koeffizienten D, D', D'' der zweiten Fundamentalform von S :

$$-\Sigma dx dX = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

(BIANCHI a. a. O., § 46):

$$\begin{aligned} -\varepsilon' \left\{ (DL + D'M) du^2 + (DP + D'(L + Q) + D''M) du dv + \right. \\ \left. + (D'P + D''Q) dv^2 \right\} + \\ + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial u} \left\{ (Dl + D'm) du^2 + (D'l + D''m) du dv \right\} + \\ + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial v} \left\{ (Dl + D'm) dv du + (D'l + D''m) dv^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Es soll aber, wie eben in anderen Worten gesagt wurde, diese Gleichung für beliebige Werte von du, dv gültig sein, daher auch jeder der Koeffi-

zienten von du^2 , dv^2 , $du dv$ verschwinden, also :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial u} &= \frac{DL + D'M}{Dl + D'm}, \\ \frac{1}{\varepsilon'} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial v} &= \frac{D'P + D''Q}{D'l + D''m}, \end{aligned} \right\} (7)$$

$$(Dl + D'm)^2 (D'P + D''Q) + (D'l + D''m)^2 (DL + D'M) -$$

$$- (Dl + D'm)(D'l + D''m) (DP + D'(L + Q) + D''M) = 0.$$

Nach Potenzen von l und m geordnet und nach Unterdrückung eines Faktors $DD'' - D'^2$ nimmt letztere Gleichung die Form an :

$$l^2 (DQ - D'M) - lm \left(DP - D'(L + Q) + D''M \right) + m^2 (D''L - D'P) = 0,$$

und diese Gleichung deckt sich völlig mit der obigen Gleichung (5).

Es kommt aber noch die oben auf ε' gestellte Forderung hinzu, dass ε' nur u, v als Variablen enthalten soll, was nach (7) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{DL + D'M}{Dl + D'm} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'P + D''Q}{D'l + D''m} \right). \quad (8)$$

Durch diese Gleichung und die Gleichung (5) sind folglich l, m zu bestimmen, um von S zu einer Fläche S' der verlangten Art zu führen. Aus den Gleichungen (1) erhält man dann offenbar durch Elimination von u und v die Gleichung derjenigen Fläche S' in x', y', z' -Koordinaten, der eine gefundene Lösung l, m angehört.

3. Die weitere Rechnung gestaltet sich verhältnismässig einfach, wenn die Haupttangentenkurven von S als Parameterkurven u, v ausgewählt werden. Dann kommt nämlich

$$D = 0, \quad D'' = 0,$$

und die Gleichungen (5) und (8) ergeben

$$m(mP - lQ) = l(mL - lM), \quad (5')$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{M}{m} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{P}{l} \right). \quad (8')$$

Bemerken wir noch, dass jetzt, wo $D = D' = 0$, sich notwendig ergibt

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} &= \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}}, & \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\} &= \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} &= \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\rho}, & \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} &= \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(die absolute Krümmung $= -1/\rho^2$ gesetzt),

und führen wir $m\zeta$ statt l als unbekannte Grösse ein, so bekommen wir (5') in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{m} &= \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}} - \\ &\quad - \zeta \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}} + \zeta^2 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} (*), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und mit Berücksichtigung der Werte (3) von M und P statt (8') die Gleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \zeta = \frac{\partial}{\partial v} \left(\zeta \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} \right). \quad (11)$$

4. Zu einer jeden Lösung $\zeta \left(\equiv \frac{l}{m} \right) = F(u, v)$ letzterer Gleichung gehört nach (10) ein Wert $f(u, v)$ von m , und daraus ist, nach dem am Ende von Nr. 2 Gesagten, eine ganz bestimmte Fläche S' zu erhalten. Die Bestimmung aller zu der Fläche S gehörigen Flächen S' hängt somit wesentlich von der Integration der partiellen Differentialgleichung 2. O. (11) ab. Von ihren verschiedenen Lösungen gilt indessen, wie, nach CAUCHY, von den Lösungen jeder partiellen Differentialgleichung 2. O. mit zwei unabhängigen Variablen (u, v) und einer unbekanntem Funktion (ζ) überhaupt, dass im allgemeinen eine beliebig genommene einfach unendliche Reihe von Werten von ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$, u, v , etwa:

$$u = f(v), \quad \zeta = \varphi(v), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \psi(v) \quad (**)$$

(*) Oder $\frac{2}{m} = -\zeta \frac{\partial}{\partial u} \log \zeta \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}} - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}} + \zeta^2 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} + \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$.

(**) Zu ihnen kommt eine Wertreihe für $\partial \zeta / \partial v$ aus der Gleichung:

$$\varphi'(v) = \psi(v) f'(v) + \frac{\partial \zeta}{\partial v}.$$

nur in einem Integrale $\zeta = F(u, v)$ der Gleichung enthalten sein kann. Die Wertreihen ähnlicher Art, die hiervon eine Ausnahme bilden, werden als *Charakteristiken* der Gleichung bezeichnet. Nun enthält die vorliegende partielle Differentialgleichung 2. O. (11) von zweiten Derivierten von ζ nur $\partial^2 \zeta / \partial u \partial v$, und daher muss, nach den allgemeinen Regeln, für eine Schar der Charakteristiken $du = 0$, für die anderen $dv = 0$ sein. Der Kürze wegen denke ich mir jetzt (11) unter die Form gebracht:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = A \left(\zeta, u, v, \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \quad (a)$$

und rede nur von denjenigen Charakteristiken, für die $du = 0$, also $u = \text{Konst.} = C$. Mit der Gleichung $u = C^0$ dürfen wir eine beliebige Wertreihe $\zeta = f(v)$ zusammenstellen, aber keine Reihe $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$ gleich einer beliebig angenommenen Funktion von v , wenn die Wertreihen von ζ , $\partial \zeta / \partial u$ mit $u = C^0$ zusammen eine ordinäre Stellung zu einer sie enthaltenden Lösung $\zeta = F(u, v)$ von (a), also mit endlichen Werten der Derivierten von F , einnehmen sollen. Es muss deswegen $\partial \zeta / \partial u$ vielmehr durch angemessene Integration bestimmt werden, nämlich durch Integration der Gleichung:

$$d \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) = A \, dv, \quad (b)$$

wobei wir in A zuvor

$$u = C^0, \quad \zeta = f(v), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = f'(v) \quad (c)$$

einzutragen hätten. Und diejenigen Werte der zweiten Derivierten von ζ , die zu einer Lösung $\zeta = F(u, v)$ von (a) gehören und sich der folgenden Wertreihe anschliessen könnten:

$$u = C^0, \quad \zeta = f(v), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \varphi(v, C^0, C'), \quad \left[\frac{\partial \zeta}{\partial v} = f'(v) \right], \quad (d)$$

wobei φ die allgemeine Lösung von (b) mit C' als Integrationskonstante ist, werden folgende:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = f''(v), \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = A, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} = \psi(v, C^0, C', C''), \quad (e)$$

wobei ψ mit C'' als willkürlicher Konstante das Integral der Gleichung

$$d\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial A}{\partial \zeta} + A \frac{\partial A}{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \frac{\partial A}{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)}\right) dv$$

bedeutet; vorab müssen jedoch die Werte (d) in diese Gleichung eingeführt werden. Wir fahren mit den Differentiationen fort, so dass wir in dieser Weise zu einem beliebigen Punkte ($u = C^0, v = v^0$) einer Charakteristik (c) Werte der Derivierten noch höher, sogar beliebiger Ordnung von ζ erhalten und schliesslich so durch eine nach Potenzen von $u - C^0, v - v^0$ fortschreitende Taylorsche Reihe eine Lösung $\zeta = F(u, v)$ der gesuchten Art finden. Nach dem Vorangehenden treten aber in den Koeffizienten dieser Taylorschen Reihe Integrationskonstanten C', C'', C''', \dots in zunehmender Anzahl auf: *es gibt darum ∞^∞ Lösungen von (a), die sämtlich die Reihe (c) enthalten, unter diesen ∞^∞ , denen eine beliebige der ∞^1 Reihen (d) gemeinsam ist, ∞^∞ , denen eine beliebige der ∞^2 Reihen (d), (e) gemeinsam angehört, usw. (*)*

Diese Sätze, auf (11) angewandt, führen offenbar zu Schlüssen über die Flächen S' :

Durch jeden Streifen des dreidimensionalen Raumes ausserhalb S geht im allgemeinen eine Fläche S' , aber auch nur eine. Wir können nämlich immer durch einen solchen Streifen eine Linienfläche legen, die S längs einer ganzen Kurve berührt; sie ergibt zugleich für die Punkte der letzteren Kurve bestimmte Werte von l, m , also auch Werte von $\zeta, \partial \zeta / \partial u$, — woraus eben der Satz folgt. Nur in dem Falle dass die besprochene Kurve auf S eine Haupttangenteurve wird, erleidet der Satz eine Ausnahme. Denn denken wir an irgend eine Linienfläche, die der Fläche S längs einer Haupttangenteurve umschrieben ist. Wir finden auf dieser Linienfläche nur eine einzige Schar von Kurven, längs deren dieselbe Linienfläche von Flächen S' berührt werden kann, also ausserhalb S , aber auf der Linienfläche ∞^1 und nur ∞^1 Streifen, die auch zu Flächen S' als ordinäre Streifen gehören können. *Es gilt von diesen Streifen ausserdem, dass jeder zugleich zu ∞^∞ Flächen S' gehört, und dass je zwei dieser Flächen, die an einer Stelle eines dieser Streifen eine Be-*

(*) Man vergleiche hierzu § 2 meiner Abhandlung: *Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen, etc.*, in B. 40 der Math. Annalen, wo die entsprechenden Sätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung allgemeiner Art entwickelt worden sind.

rührung k :ter Ordnung mit einander eingehen, auch an allen anderen Stellen desselben Streifens dasselbe tun.

Aus dem ersten Satze folgt, dass die Flächen S' durch eine partielle Differentialgleichung 2. O. in x', y', z' -Koordinaten darzustellen sind. Die Streifen, von denen der zweite Satz handelt, müssen Charakteristiken derselben sein. Nun ist uns diese Gleichung aus einer anderen Theorie wohlbekannt. Man bekommt sie nämlich einfach durch Elimination von x, y, z aus der Gleichung der Fläche S :

$$z = F(x, y)$$

und den drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p(x' - x) + q(y' - y) &= z' - z, \\ p'(x' - x) + q'(y' - y) &= z' - z, \\ (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 &= \rho \rho' \left(1 - \frac{(1 + p p' + q q')^2}{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)} \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei gesetzt ist

$$p \text{ statt } \frac{\partial z}{\partial x} = F'(x), \quad q = F'(y), \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dots, \quad p' = \frac{\partial z'}{\partial x'}, \dots, \quad t' = \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{r' t' - s'^2}{1 + p'^2 + q'^2} = -\frac{1}{\rho'^2} \quad (*).$$

Die fragliche Gleichung erhält damit die Form:

$$r' t' - s'^2 = F(z', x', y', p', q'),$$

und ihre Charakteristiken werden Haupttangentialkurven der Integralflächen.

Aus dem oben Auseinandergesetzten geht dann hervor, wie die Haupttangentialkurven auf S eindeutig dergleichen Kurven auf S' entsprechen, — was für die Brennflächen der W -Kongruenzen völlig kennzeichnend ist.

5. S sei nun eine Linienfläche. Dann ist eine Schar ihrer Haupttangentialkurven als bekannt anzusehen, nämlich die geraden Erzeugenden der Fläche. Nehmen wir sie zu Parameterkurven $v = C$, so haben wir nicht nur $D = 0$, sondern auch

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} = 0 \quad (12)$$

(*) Siehe BIANCHIS *Differentialgeometrie*, § 174.

zu setzen, letzteres weil jetzt die Kurven $v = C$ geodätisch sind. Ueberdies folgt aus der ersten der drei Codazzischen Gleichungen, die ich hier sämtlich aufzeichne, da ich auch im folgenden auf sie hinweisen muss:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} - \\ - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} - \\ - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\} \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

es folgt, sage ich, dass wegen (12) und weil $D = 0$:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\rho}. \quad (14)$$

Hieraus ersehen wir aber sofort, dass, falls S eine Linienfläche ist, die Gleichung (8), von der nach Nr. 2 die Bestimmung von S' wesentlich abhängt, ein vollständiges erstes Integral besitzt. Im vorliegenden Falle folgt nämlich aus (3), dass wegen (12) und (14):

$$\frac{M}{m} = \frac{\partial}{\partial u} \log m \sqrt{\rho},$$

weswegen offenbar die Gleichung (8) durch die folgende zu ersetzen ist:

$$\frac{\partial}{\partial v} \log m \sqrt{\rho} = \frac{D'P + D''Q}{D'l + D''m} + F(v), \quad F \text{ arbiträr.} \quad (15)$$

Wenn wir hierin m und $\zeta (\equiv l/m)$ als unbekannte Grössen einführen und m mittelst (5) aus (15) eliminieren, bekommen wir eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für ζ , jedoch mit $F(v)$ als arbiträrer Funktion, die jetzt statt (8) die gesuchten S' liefert. Dass sich die Lösung derselben durch eine Riccatische Gleichung und nachfolgende Quadraturen erzielen lassen muss (*), geht einfach aus der Bemerkung hervor, dass die krummen Haupttan-

(*) BIANCHI, a. a. O., § 169, S. 316.

gentenkurven der Linienfläche eben durch eine Riccatische Gleichung darzustellen sind, und dass man, wenn letztere Kurven zu Parameterkurven $u = C$ genommen werden, statt (8) die Gleichung (11) anwenden darf, die aber jetzt wegen (12) ergibt

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta F(v) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad F \text{ arbiträr,}$$

und zur vollständigen Lösung dieser Gleichung reichen bekanntlich Quadraturen hin.

6. Auf Flächen zweiter Ordnung angewandt nimmt die Gleichung (11) ihre einfachste Form an:

$$\frac{\partial^2 \log \zeta}{\partial u \partial v} = 0,$$

da hierbei sowohl $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ als $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ verschwinden. Die Flächen S' sind daher in diesem Falle aus der Formel

$$\frac{l}{m} = \frac{U(u)}{V(v)} \tag{16}$$

abzuleiten, wenn U, V arbiträre Funktionen von u bez. v bedeuten.

Die Gleichung (10) ergibt ferner

$$\frac{2}{m} = -\frac{V'(v)}{V(v)} - \frac{U'(u)}{V(v)} - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}} - \frac{U(u)}{V(v)} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\rho}} (*). \tag{17}$$

Ist also insbesondere die Fläche S durch die folgende Gleichung in x, y, z gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und gelten damit für die Cartesischen Koordinaten ihrer Punkte die Formeln:

$$x = a \frac{1 + uv}{u + v}, \quad y = b \frac{u - v}{u + v}, \quad z = c \frac{1 - uv}{u + v}, \tag{18}$$

(*) Oder $\frac{2}{m} = -\frac{U}{V} \frac{\partial}{\partial u} \log U \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}} - \frac{\partial}{\partial v} \log V \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}}$.

so findet man

$$\frac{EG - F^2}{\rho} = \frac{4abc}{(u+v)^4}$$

(BIANCHI, a. a. O. § 303, oder siehe nachfolgende Nr. 15 dieser Abhandlung), und wenn wir dann in Uebereinstimmung mit (16) schreiben

$$l = (u+v) \frac{U}{W}, \quad m = (u+v) \frac{V}{W}, \tag{19}$$

erkennen wir sogleich aus (17), dass (*):

$$2W = 2(U+V) - (u+v)(U'+V'). \tag{20}$$

Hierzu wollen wir noch bemerken, dass die Gleichungen (7) mit u, v als Parametern der Haupttangentialkurven auf S im allgemeinen von der infinitesimalen Verbiegung ε' der Fläche S' lehren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{R'}{m} &= \zeta \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{R'}{l} &= \zeta \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon' = R' \sqrt{\rho}, \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

und deshalb für das Hyperboloid (18) als Fläche S einfach ergeben:

$$R' = lf(u) = m\varphi(v),$$

oder wegen (19):

$$\varepsilon' = z \sqrt{\rho} \frac{u+v}{W}, \tag{22}$$

wobei z eine infinitesimale Konstante ist.

II.

MIT VORSTEHENDEM ZUSAMMENGEHÖRENDE R SATZ ÜBER ABWICKELBARE FLÄCHEN.

7. Wie in Nr. 1 seien S und S' zwei beliebige Flächen, deren Berührungspunkte mit den gemeinsamen Tangenten als einander korrespondierend betrachtet werden. S' mag sich auf eine Kurve reduzieren: jedes Flächen-

(*) Identität (14) bei BIANCHI, a. a. O., § 304.

element, das ein Bogenelement der Kurve enthält, fungiert dabei als Flächenelement dieser Fläche S' , und jede Gerade, welche die Kurve trifft, ist als Tangente derselben S' anzusehen. Gelten dann für die Bogenelemente der Kurve (S') die Gleichungen:

$$d x' = \alpha (x', y', z') d z', \quad d y' = \beta (x', y', z') d z', \quad (23)$$

und werden $p', q', -1$ proportional den Richtungscosinus des Lotes gerechnet, das auf irgend einem am Bogenelemente ($d x', d y', d z'$) haftenden Flächenelement ($x' y' z' p' q'$) errichtet werden kann, so ergibt sich

$$p' d x' + q' d y' - d z' = 0, \text{ also:} \\ p' \alpha + q' \beta = 1. \quad (24)$$

Aber wenn dieses Flächenelement ($x' y' z' p' q'$), als der Fläche S' angehörig betrachtet, eben mit dem Flächenelemente ($x y z p q$) von S (*) korrespondieren soll, muss die Verbindungsgerade der Punkte ($x y z$) und ($x' y' z'$) die Fläche S im ersten Punkte berühren und in die Ebene des Flächenelementes ($x' y' z' p' q'$) fallen, weshalb also

$$\left. \begin{aligned} p (x' - x) + q (y' - y) &= z' - z, \\ p' (\quad) + q' (\quad) &= z' - z. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Korrespondenz der Flächenelemente von S und S' ist im allgemeinen eindeutig; nur wenn jene Gerade ($x' - x, y' - y, z' - z$) das Bogenelement (23) enthält, also im Punkte (x', y', z') die Kurve (S') berührt, ist an dieser Stelle die Korrespondenz unendlich vieldeutig, indem hier das ganze Büschel der Flächenelemente durch ($d x', d y', d z'$) dem Flächenelemente ($x y z p q$) entspricht.

8. Anstatt bloss einer Kurve (23) können wir diese Kurven sämtlich, oder, was auf eins herauskommt, ∞^1 beliebige Kurven

$$\left. \begin{aligned} f (x', y', z', \mu) &= 0, \\ \varphi (\quad) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

μ eine arbiträre Konstante, als reduzierte Flächen S' der gegebenen Fläche S zuordnen. In diesem Falle entspricht jedem Flächenelemente von S eine ganze

(*) $p = F'(x), q = F'(y)$, wenn $z = F(x, y)$ die Gleichung von S ist.

Schar von ∞^1 Flächenelementen, die an denjenigen Bogenelementen der Kurven (26) haften, die von den Schnittpunkten dieser Kurven mit der Ebene des Flächenelementes von S ausgehen. Diese Korrespondenz zwischen S und einfach unendlich vielen in Kurven ausgearteten Flächen S' ist dann in keiner Weise von der Korrespondenz obiger Art zwischen S und irgend welchen ∞^1 Flächen S' verschieden. Die Anwendung, die im Nächstfolgenden von dieser Korrespondenz gemacht wird, ist von BIANCHI in seiner *Differentialgeometrie* von 1910 teils am Ende des § 282 in etwas weiterem Umfange vorgeschlagen und teils auch in Kap. 19-21 im Einzelnen ausgeführt worden.

9. Ist nun S eine beliebige Fläche und ist mit ihr eine beliebige Schar von ∞^1 Flächen S' in feste Verbindung gebracht, und rollt S mit ihrer Schar von S' in Gefolge auf einer auf sie abwickelbaren Fläche Σ , und fixiert man jedesmal im Raume $(x' y' z')$ die Lagen derjenigen ∞^1 Flächenelemente jener S' , die nach dem Vorgehenden dem momentanen Berührungselemente $(x y z p q)$ von S und Σ entsprechen, so bekommt man dadurch ∞^3 Flächenelemente im Raume $(x' y' z')$, die gewissermassen dort ein Bild von Σ abgeben können. Dasselbe wäre offenbar durch zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung analytisch zu definieren, und in erster Linie hatte man danach zu untersuchen, *ob diese Gleichungen ∞^1 gemeinsame Integralflächen gestatten, oder nicht*. Eine Darstellung der Gleichungen in Cartesischen x', y', z' -Koordinaten würde kein übersichtliches Resultat ergeben, während dagegen der von BIANCHI zur Erledigung einer speziellen Frage dieser Art in Kap. 19 seiner *Differentialgeometrie* eingeschlagene Weg schnell zum Ziele führt.

Wie in Nr. 1 denken wir uns S von zwei Kurvenscharen $u = C, v = C'$ durchzogen und damit durch jedes Wertepaar u, v je einen Punkt auf S zusammen mit allen ∞^1 mit ihm korrespondierenden Punkten auf S' eindeutig bestimmt. Für die Cartesischen Koordinaten x', y', z' dieser dem Punkte (x, y, z) von S entsprechenden Punkte der $\infty^1 S'$ können wir die Gleichungen (1) und (2) verwenden. Wir wollen nun auch die Punkte auf Σ durch dieselben u, v -Parameter und die Kurven auf Σ durch ganz dieselben Gleichungen $u = C, v = C'$ ausdrücken, die von den Kurven $u = C, v = C'$ auf S beim Rollen von S auf Σ dort als Spuren hinterlassen werden. Dann werden die in (1) und (2) vorkommenden $\partial x/\partial u, \partial x/\partial v$ sowohl zu S als auch zu Σ gehören, da jetzt am Berührungspunkte (x, y, z) dieser Flächen die Linienelemente $\sqrt{E} du, \sqrt{G} dv$ für beide von derselben Grösse und Richtung sind. Auch X ist für beide Flächen dasselbe. Die zu den Flächen S und Σ gehörigen

Gleichungen (2) werden folglich nur in Bezug auf die Werte von L, M, P, Q, D, D', D'' verschieden.

Was p', q' anbetrifft, haben wir für sie die folgenden Gleichungen [24, 25] schon entwickelt:

$$\left. \begin{aligned} p' \alpha + q' \beta &= 1, \\ p'(x' - x) + q'(y' - y) &= z' - z. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Hierzu kommt nun auch sowohl für S' wie für das erwähnte Bild von Σ :

$$p' \frac{\partial x'}{\partial u} + q' \frac{\partial y'}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial u}, \quad (28)$$

$$p' \frac{\partial x'}{\partial v} + q' \frac{\partial y'}{\partial v} = \frac{\partial z'}{\partial v}. \quad (29)$$

Auf diese Gleichungen, einmal auf S , das andere Mal auf Σ angewandt, bezieht sich die nachfolgende Rechnung, bei der selbstverständlich auch auf die Eigenschaft der Grössen α, β , irgendwie Funktionen von x', y', z' zu sein, Rücksicht genommen werden musste. Weil aber die Punkte (x', y', z') und (x, y, z) als korrespondierende Punkte dastehen und die ersteren der Flächenschar S' angehören, ihre Koordinaten also der Gleichung dieser Flächenschar und ev. den Gleichungen (26) genügen, weil aber dagegen x, y, z Koordinaten der Punkte von S , mithin determinierte Funktionen von u, v sind, haben wir zunächst α, β als gegebene Funktionen von u, v, μ zu betrachten und demnach für S zu setzen:

$$\alpha = f(u, v, \mu), \quad \beta = \varphi(u, v, \mu), \quad (30)$$

μ ein var. Parameter.

Von der Beziehung von Σ zu den in Frage gestellten Integralflächen, die aus denjenigen ∞^3 Flächenelementen $(x' y' z' p' q')$ zusammengesetzt wären, die beim Rollen von S auf Σ als den Elementen letzterer Fläche entsprechend herauskommen würden, gilt es, dass jede dieser Integralflächen von je einer S' der ∞^2 beim Rollen von S im Raume $(x' y' z')$ erzeugten S' -Scharen berührt wird, und zwar in einem Punkte, der mit dem momentanen Berührungspunkte von S und Σ in genau derselben für beide in Nr. 1 angegebenen Weise korrespondiert. Die Werte der zu diesem Punkte gehörenden α und β wären offenbar aus (30) nach Einführung des der betreffenden S' zukommenden Wertes von μ zu erhalten. Dieser Wert von μ wäre von der Form

$F(u, v)$. Die Existenz von ∞^1 Integralflächen erwähnter Art setzt einen Wert von $\mu = F(u, v, \lambda)$, λ eine arb. Konstante voraus. Die oben vorgelegte Frage ist einfach eine Frage nach der Möglichkeit eines solchen Wertes von μ .

10. Aus den Gleichungen (27), (28) folgt nach Elimination von p', q' :

$$\left| \alpha, \quad y' - y, \quad \frac{\partial z'}{\partial u} \right| = 0,$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\left| \alpha, \quad l \frac{\partial y}{\partial u} + m \frac{\partial y}{\partial v}, \quad L \frac{\partial z}{\partial u} + M \frac{\partial z}{\partial v} + (Dl + D'm)Z \right| = 0,$$

oder nach angemessener Reduktion und Anwendung der Gleichungen

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 = E, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = F, \quad \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = G:$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} & lE + mF & LE + MF \\ \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} & lF + mG & LF + MG \\ \alpha X + \beta Y + Z & 0 & Dl + D'm \end{array} \right| = 0.$$

Ich schreibe diese Gleichung kürzer so:

$$(Dl + D'm)A = (X\alpha + Y\beta + Z) \left| \begin{array}{cc} LE + MF & lE + mF \\ LF + MG & lF + mG \end{array} \right|, \quad (31)$$

wo die Determinante rechts $= (EG - F^2)(mL - lM)$ ist, und bemerke, dass $l, m, A, X\alpha + Y\beta + Z, E, F, G$ im Berührungspunkte von S und Σ für beide Flächen dieselben Werte besitzen; dagegen muss, mit Rücksicht auf die Formeln (3), wenn man für S L, M, \dots, D'' gleich L_0, M_0, \dots, D''_0 setzt, für Σ gesetzt werden

$$L = L_0 + \frac{\partial l}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u}, \quad M = M_0 + \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u}, \quad (32)$$

sowie

$$P = P_0 + \frac{\partial l}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \quad Q = Q_0 + \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \quad (33)$$

Wenn dann für Σ die Zeichen D, D', D'' reserviert werden, können wir aus (31)

schliessen :

$$\frac{D'l + D'm}{D_0'l + D_0'm} = \frac{mL - lM}{mL_0 - lM_0} = 1 + \frac{m \frac{\partial l}{\partial \mu} - l \frac{\partial m}{\partial \mu}}{mL_0 - lM_0} \frac{\partial \mu}{\partial u}. \quad (34)$$

In ganz derselben Weise ist aus (27) und (29) und mit Berücksichtigung von (33) zu schliessen :

$$\frac{D'l + D'm}{D_0'l + D_0'm} = \frac{mP - lQ}{mP_0 - lQ_0} = 1 + \frac{m \frac{\partial l}{\partial \mu} - l \frac{\partial m}{\partial \mu}}{mP_0 - lQ_0} \frac{\partial \mu}{\partial v}. \quad (34')$$

Wir wissen aber aus (5), dass

$$mP_0 - lQ_0 = \frac{D_0'l + D_0'm}{D_0'l + D_0'm} (mL_0 - lM_0)$$

und dürfen daher letztere Gleichung durch die folgende ersetzen :

$$\frac{(D' - D_0)l + (D'' - D_0'')m}{D_0'l + D_0'm} = \frac{m \frac{\partial l}{\partial \mu} - l \frac{\partial m}{\partial \mu}}{mL_0 - lM_0} \frac{\partial \mu}{\partial v}, \quad (35)$$

die also im Verein mit (34) zur Bestimmung von μ dienen würde.

Wenn insbesondere die Haupttangentenkurven auf S zu u, v Kurven genommen werden, bekommen diese Gleichungen die einfachere Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{D'l + (D' - D_0)m}{D_0'm}, \\ \Omega \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{(D' - D_0)l + D''m}{D_0'm}, \quad \Omega = m^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{l}{m} \right)}{mL_0 - lM_0}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

doch, wann werden sie unbeschränkt integrierbar? So ist denn jetzt die oben aufgeworfene Frage nach μ als $F(u, v, \lambda)$ zu formulieren.

11. Wenn, wie früher, ζ statt l/m geschrieben und m durch (10) in $\zeta, u, v, \partial \zeta / \partial u, \partial \zeta / \partial v$ ausgedrückt wird, μ bei diesen Differentiationen konstant gehalten, bekommen wir

$$\left. \begin{aligned} \Omega = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} : \zeta \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\zeta \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) - \zeta^2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

und fassen hernach die Gleichungen (36) als Gleichungen für ζ und μ auf. Wir schreiben sie in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{D}{D'_0} \zeta + \frac{D'}{D'_0} - 1, \\ \Omega \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \left(\frac{D'}{D'_0} - 1 \right) \zeta + \frac{D''}{D'_0} \end{aligned} \right\} \quad (36')$$

und suchen sodann durch Differentiation die Existenzbedingungen für Lösungen der Form:

$$\zeta = f(u, v, \mu), \quad \mu = F(u, v, \lambda), \quad \lambda \text{ eine arb. Konstante,}$$

zu erhalten. Zunächst kommt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \zeta \frac{\sqrt{EG - F^2}}{D'_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \right. \\ &- \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{D}{D'_0} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'_0}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{D'}{D'_0} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'_0}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \left. \right\} + \\ &+ \frac{D}{D'_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) - \frac{D' - D'_0}{D'_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{EG - F^2}}{D'_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{D'}{D'_0} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'_0}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{D''}{D'_0} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'_0}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei die vorstehenden Differentiationen von Ω und ζ in Bezug auf u, v, μ so auszuführen sind, als ob diese Variablen von einander unabhängig wären.

Zufolge der zwei ersten der Gleichungen (13), der Gleichung

$$D D'' - D'^2 = - D_0^2 = - \frac{EG - F^2}{\rho^2},$$

der Gleichungen (36'), der Werte (9) der in (13) auftretenden Symbole $\begin{Bmatrix} i & k \\ l \end{Bmatrix}$ und endlich des Wertes (37) von Ω finden wir für die obige Bedingungsgleichung

die expliziertere Form :

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D'_0} \zeta \left\{ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \log \zeta - \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) \right\} - \\ & \quad - \frac{D''}{D'_0} \left\{ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \zeta \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) \right\} + \\ & + \frac{D' - D'_0}{D'_0} \left\{ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial v} - \zeta \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \log \zeta - \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) + \zeta^2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} - \zeta \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

oder in leichtverständlicher Abkürzung :

$$A \zeta D + (A - B \zeta) (D' - D'_0) - B D'' = 0. \tag{37'}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung 2. O. für ζ . Sie gibt diejenigen S' -Scharen $\zeta = f(u, v, \mu)$, die im Stande sind, einer gegebenen auf S abwickelbaren, des Näheren durch D, D', D'' bestimmten Fläche (Σ) eine ähnliche Flächenschar ($\mu = F(u, v, \lambda)$) zuzuordnen.

Beiläufig bemerke ich, dass, wenn S eine Linienfläche ist, und $v = C$ die Gleichung ihrer geraden Erzeugenden, finden wir für alle auf S abwickelbare Linienflächen : $D = 0, D' = D'_0, \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} = 0$, und werden dann in jedem Integrale $\zeta = f(u, v, \mu)$ der partiellen Differentialgleichung 1. O.

$$\Omega \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} = \Phi(v, \mu), \quad \Phi \text{ arbiträr,}$$

die Gleichung einer Flächenschar S' erkennen, die für sämtlich jene Linienflächen je eine Flächenschar $\mu = F(v, \lambda)$ liefert.

12. Wenn für eine jede auf S abwickelbare Fläche das bezügliche Gleichungspaar (36') unbeschränkt integrierbar sein soll, müssen sowohl A als B verschwinden, weshalb :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho \sqrt{\rho}} \right) &= \zeta \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\right) &= \frac{\partial}{\partial v} \log \zeta + \frac{1}{\zeta} \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Aber das kann unmöglich so sein, wofern nicht erstens

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \zeta = \frac{\partial}{\partial v} \left(\zeta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{vmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\zeta} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} \right) \quad (39)$$

und zweitens, wie aus der Zusammenstellung von (38) mit den Formeln (21) der Nr. 6 sofort einleuchtet:

$$\Omega = \frac{\varepsilon'}{m} \frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (40)$$

Vorausgesetzt also, dass die Bedingungen (39) und (40) erfüllt sind, dann muss die der Fläche S zugeordnete und mit ihr fest vereinigte Flächenschar S' beim Rollen von S auf Σ eine besondere Schar von ∞^1 Flächen in der am Anfange von N. 7 näher erklärten Weise umhüllen. Diese umhüllten Flächen will ich mit Σ' bezeichnen und bemerke, dass jene Flächen S' , wenn umgekehrt S in Ruhe bleibt und Σ in fester Verbindung mit der Flächenschar Σ' auf S rollt, in derselben Weise aus Σ' als eine besondere Art von Enveloppen zu erhalten sind. Es sei nun Σ_1 irgend eine zweite auf S abwickelbare Fläche, Σ'_1 eine der von S' in der oben erklärten Weise beim Rollen von S auf Σ_1 umhüllten ∞^1 Flächen, M ein auf Σ_1 beliebig angenommener Punkt und b_1 der hiermit korrespondierende Punkt auf Σ'_1 . Beim Rollen von S auf Σ_1 wird mit b_1 der Punkt auf S' — a nenne ich ihn — zusammenfallen, der bei der gegenseitigen Berührung jener Flächen S und Σ_1 in M mit eben diesem Punkte als zu der Fläche S gehörig korrespondiert. Σ'_1 wird dann in diesem Punkte a (b_1) von S' berührt. Aber auch Σ kann, ebensowie S , auf Σ_1 rollen, und bei der einmal eintretenden gegenseitigen Berührung dieser Flächen in M wird Σ' die Fläche S' im korrespondierenden Punkte a und also auch Σ'_1 in demselben Punkte a berühren. Hieraus folgt, dass die Flächen Σ' , ebensowie sie beim Rollen von Σ auf S die Flächen S' umhüllen, beim Rollen von Σ auf Σ_1 die Flächen Σ'_1 umhüllen. Die Schar der Σ' wird sich also ganz so zu Σ , Σ_1 , S und allen anderen auf Σ abwickelbaren Flächen verhalten, wie sich die Schar der S' zu S , Σ , Σ_1 und allen anderen auf sie abwickelbaren Flächen verhält. Nun zeigt die Bedingungsgleichung (39), weil sie sich mit der Gleichung (11) deckt, dass eine jede jener ∞^1 Flächen S' mit S die Brennfläche einer W -Kongruenz ausmacht. Σ war eine beliebige der auf S abwickelbaren Flächen: ein und dieselbe Flächenschar S' wird für jede Σ in der erwähnten Weise, oder durch Integration eines Gleichungspaares (36'), eine ähnliche Flächenschar Σ' ergeben.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken. Ganz so wie beim Rollen von S auf Σ im gemeinsamen Berührungspunkte beider Flächen ihre absolute Krümmung dieselbe ist, *ist auch*, der dritten der Gleichungen (11') in Nr. 4 zufolge, *im Berührungspunkte von S' und Σ' ihre absolute Krümmung dieselbe.*

13. Als eine Folge der gegenseitigen Korrespondenz der Haupttangentialkurven von Σ und Σ' (Nr. 4) — den Fall (39), (40) stets vorausgesetzt — ist zu erkennen, dass, wenn eine Σ' -Schar aus Flächen bestände, die sämtlich zu Kurven (26) ausgeartet wären, *diese Kurven eben Gerade sein müssten.* Denn jede muss Leitkurve ∞^1 oskulierender Streifen sein, die denjenigen Streifen von Σ entsprechen würden, die sich an die eine Schar der Haupttangentialkurven dieser Fläche anschliessen.

14. Bei einer anderen Gelegenheit werde ich beweisen, *dass sämtliche Flächen einer S' -Schar, die den Forderungen (39) und (40) genügt, aus einer beliebigen Fläche der Schar durch wiederholte Verbiegungen parallel den Normalen von S herauskommen müssen.*

III.

ANWENDUNG AUF FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

15. Wenn die Fläche S beim Rollen auf einer auf sie abwickelbaren Fläche Σ nur ∞^1 Lagen einnimmt und dennoch mit Σ in allen Punkten in Berührung kommt, muss diese Berührung zwischen S und Σ in jeder Lage der ersteren Fläche längs einer ganzen Kurve erfolgen, und ausserdem muss in jedem Punkte dieser Kurve die absolute Krümmung beider Flächen gleich ausfallen. Nach einem für die Theorie der Verbiegung der Flächen fundamentalen Satze muss jede solche Berührungskurve notwendig Haupttangentialkurve sein. Es würde folglich Σ derart auf S abgewickelt werden können, dass sich dabei eine Schar Haupttangentialkurven beider Flächen decken. Und nach einem Satze von BONNET sind dann diese Haupttangentialkurven geradlinig: *die Flächen S und Σ müssen Linienflächen sein.*

Setzen wir dann voraus, dass es für eine Linienfläche S eine Flächenschar S' obiger Art gibt, die zu *einer jeden* auf S abwickelbaren Fläche Σ

eine Flächenschar Σ' liefert, so würde u. a. jede Σ' derjenigen Schar dieser Art, die zu einer *Linienfläche* Σ gehört, von jeder S' längs einer Haupttangente berührt. Wenn aber die $\infty^1 S'$ Linienflächen sind, deren gerade Erzeugenden mit denen von S korrespondieren, so müssen auch die letzt-erwähnten Σ' Linienflächen derselben Art sein. Dies wird offenbar auch gelten, wenn die Flächen S' zu Kurven und dann notwendig zu Geraden (Nr. 13) ausgeartet wären. *Diesen Fall werde ich für das einschalige Hyperboloid als Fläche S vollständig behandeln.*

Wir haben also jetzt die Fläche S in gewöhnlichen mit ihr fest verbundenen Cartesischen Axenkoordinaten durch folgende Gleichung darzustellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und die ihr zugeordnete S' -Schar in denselben Koordinaten durch die zwei Gleichungen (26):

$$x' = \alpha z' + \gamma, \quad y' = \beta z' + \delta, \quad (41)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in noch unbestimmt gelassener Weise einen variablen Parameter μ enthaltend. Die hierzu gehörenden Werte von l und m ergeben sich aus den Gleichungen (1), die zunächst liefern:

$$x - \alpha z - \gamma + l \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \alpha \frac{\partial z}{\partial u} \right) + m \left(\frac{\partial x}{\partial v} - \alpha \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0,$$

$$y - \beta z - \delta + l \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \beta \frac{\partial z}{\partial u} \right) + m \left(\frac{\partial y}{\partial v} - \beta \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0,$$

weshalb, wie nach Einführung der Werte (18) von x, y, z leicht ersichtlich:

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{u+v}{2} \frac{(bc\alpha - a\delta)(u^2 - 1) + (ab - c(\alpha\delta - \beta\gamma))(u^2 + 1) - 2(ac\beta + b\gamma)u}{ab(1 - uv) - bcx(1 + uv) - ac\beta(u - v)}, \\ m &= \frac{u+v}{2} \frac{(bcx + a\delta)(v^2 - 1) + (ab + c(\alpha\delta - \beta\gamma))(v^2 + 1) + 2(ac\beta - b\gamma)v}{ab(1 - uv) - bcx(1 + uv) - ac\beta(u - v)}. \end{aligned} \right\} (42)$$

Es erhält damit $\zeta (\equiv l/m)$ die schon aus Nr. 6 zu erwartende Form $U:V$, wobei besonders:

$$\left. \begin{aligned} U &= (bc\alpha - a\delta)(u^2 - 1) + (ab - c(\alpha\delta - \beta\gamma))(u^2 + 1) - 2(ac\beta + b\gamma)u, \\ V &= (bcx + a\delta)(v^2 - 1) + (ab + c(\alpha\delta - \beta\gamma))(v^2 + 1) + 2(ac\beta - b\gamma)v. \end{aligned} \right\} (43)$$

Hierdurch ist auch, wie in Nr. 6 als Folge der Identitäten

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = 0$$

bemerkt wurde, der Bedingung (39) Genüge geleistet. Dass dagegen die zweite Bedingung, die Bedingung (40), nicht durch beliebige Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu erfüllen ist, sehen wir bald. Wir können nämlich wegen der Formeln (19), (22) diese Bedingung so schreiben:

$$\Omega = \alpha \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{u + v}{m W} = \frac{\alpha}{V} \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (44)$$

α eine arb. Konstante, oder unter Beachtung dessen, dass wir nach (37) zu setzen haben:

$$\begin{aligned} \Omega = 2 \frac{V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu}}{V} : U'(u) - V'(v) - U \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}} + \\ + V \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}}; \\ V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{\alpha}{2} \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} - \right. \\ \left. - U \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}} + V \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\rho \sqrt{\rho}}{\sqrt{EG - F^2}} \right]. \end{aligned} \quad (44')$$

Was die Werte der hierin steckenden $\rho, \sqrt{EG - F^2}$ anbetrifft, so sind sie bekanntlich durch blosse Differentiationen der Gleichungen (18) folgendermassen zu gewinnen. Man berechnet

$$\begin{aligned} E &= \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad F = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2, \\ D'_0 &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \right| = - \\ &= - 4 \frac{abc}{(u + v)^4 \sqrt{EG - F^2}} = - \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho} \end{aligned}$$

und bekommt dann

$$\frac{\rho\sqrt{\rho}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(u+v)^6 (EG-F^2)}{8(abc)^{3/2}} = \frac{a^2 b^2 (1-uv)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + c^2 a^2 (u-v)^2}{2(abc)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\rho\sqrt{\rho}}{\sqrt{EG-F^2}} = 2 \frac{b^2 c^2 v (1+uv) - a^2 b^2 v (1-uv) + a^2 c^2 (u-v)}{b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\rho\sqrt{\rho}}{\sqrt{EG-F^2}} = 2 \frac{b^2 c^2 u (1+uv) - a^2 b^2 u (1-uv) - a^2 c^2 (u-v)}{b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2}.$$

Die Gleichung (44') nimmt hierdurch die Form an:

$$V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu} = C \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} \right) \left(b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 \right) - \right. \\ \left. - U \left(b^2 c^2 v (1+uv) - a^2 b^2 v (1-uv) + a^2 c^2 (u-v) \right) + \right. \\ \left. + V \left(b^2 c^2 u (1+uv) - a^2 b^2 u (1-uv) - a^2 c^2 (u-v) \right) \right\},$$

die sich nach Einführung der Werte (43) von U und V noch bedeutend vereinfacht und sich folgendermassen schreiben lässt:

$$V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu} = C \left\{ -2b\beta(a^2+c^2)(1-u^2v^2) + 2ac\gamma(u^2-v^2) + \right. \\ \left. + 2a\alpha(b^2+c^2)(u-v)(1-uv) - 2c(a^2-b^2)(u-v)(1+uv) - \right. \\ \left. - 2ab(\alpha\delta - \beta\gamma)(u+v)(1-uv) - 2bc\delta(u+v)(1+uv) \right\}. \quad (45)$$

Das linke Glied dieser Gleichung wird den Gleichungen (43) zufolge gleich

$$V \left(\left(bc\alpha' - a\delta' - c(\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) u^2 - 2(ac\beta' + b\gamma')u - \right. \\ \left. - \left(bc\alpha' - a\delta' + c(\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) \right) - \\ - U \left(\left(bc\alpha' + a\delta' + c(\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) v^2 + 2(ac\beta' - b\gamma')v - \right. \\ \left. - \left(bc\alpha' + a\delta' - c(\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) \right),$$

wobei abkürzungsweise α', β', \dots , statt $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \frac{\partial \beta}{\partial \mu}, \dots$, gesetzt ist. Unter nochmaliger Anwendung der Werte (43) von U und V ergibt sich ferner hieraus :

$$\begin{aligned}
 V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu} = & 2(u+v)(1-uv)ab \left[c^2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) - (\gamma\delta' - \gamma'\delta) \right] - \\
 & - 2(u+v)(1+uv)bc \left[a^2\beta' - \left(\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma)' - \gamma'(\alpha\delta - \beta\gamma) \right) \right] - \\
 & - 2(u-v)(1-uv)a \left[b^2\gamma' - c^2 \left(\beta(\alpha\delta - \beta\gamma)' - \beta'(\alpha\delta - \beta\gamma) \right) \right] + \\
 & + 2(u-v)(1+uv)c \left[b^2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) - a^2(\beta\delta' - \beta'\delta) \right] + \\
 & + 2u^2v^2b \left[ac \left(\alpha'\delta - \alpha\delta' - (\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - c^2 \left(\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma)' - \alpha'(\alpha\delta - \beta\gamma) \right) - a^2\delta' \right] + \\
 & + 2(u^2+v^2)abc \left(\alpha\delta' - \alpha'\delta - (\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) - \\
 & - 2(u^2-v^2)ac \left[(\alpha\delta - \beta\gamma)\delta' - \delta(\alpha\delta - \beta\gamma)' - b^2\alpha' \right] - \\
 & - 8abcuv(\beta\gamma' - \gamma\beta') + 2ab \left(a\delta' - c(\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2bc^2 \left[\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma)' - \alpha'(\alpha\delta - \beta\gamma) \right] - \\
 & - 2abc(\alpha\delta' - \alpha'\delta).
 \end{aligned} \tag{46}$$

Der Forderung (40) gemäss müssen (45), (46) denselben Wert von $V \frac{\partial U}{\partial \mu} - U \frac{\partial V}{\partial \mu}$ liefern; m. a. W. die Koeffizienten derselben Kombinationen von u und v in den beiden Ausdrücken müssen einander gleich werden. Wir schliessen dann

aus den Koeffizienten für uv : $\beta\gamma' - \beta'\gamma = 0$,

aus denen für u^2v^2 : $ac \left(\alpha'\delta - \alpha\delta' - (\alpha\delta - \beta\gamma)' \right) -$

$$- c^2 \alpha(\alpha\delta - \beta\gamma)' + c^2 \alpha'(\alpha\delta - \beta\gamma) - a^2\delta' = C(a^2 + c^2)\beta,$$

für

$$1 : a c \left(\alpha' \delta - \alpha \delta' - (\alpha \delta - \beta \gamma)' \right) +$$

$$+ c^2 \alpha (\alpha \delta - \beta \gamma)' - c^2 \alpha' (\alpha \delta - \beta \gamma) + a^2 \delta' = - C (a^2 + c^2) \beta,$$

$$u^2 + v^2 : \alpha' \delta - \alpha \delta' + (\alpha \delta - \beta \gamma)' = 0,$$

$$u^2 - v^2 : (\alpha \delta - \beta \gamma) \delta' - \delta (\alpha \delta - \beta \gamma)' - b^2 \alpha' = - C \gamma,$$

$$(u + v) (1 - u v) : c^2 (\alpha \beta' - \alpha' \beta) - \gamma \delta' + \gamma' \delta = - C (\alpha \delta - \beta \gamma),$$

$$(u + v) (1 + u v) : \alpha^2 \beta' - \gamma (\alpha \delta - \beta \gamma)' + \gamma' (\alpha \delta - \beta \gamma) = C \delta,$$

$$(u - v) (1 + u v) : b^2 (\alpha \gamma' - \alpha' \gamma) - \alpha^2 (\beta \delta' - \beta' \delta) = - C (a^2 - b^2),$$

$$(u - v) (1 - u v) : b^2 \gamma' - c^2 \beta (\alpha \delta - \beta \gamma)' + c^2 \beta' (\alpha \delta - \beta \gamma) = - C \alpha (b^2 + c^2).$$

Aus den vier ersten Gleichungen folgt:

$$\gamma = K \beta, \quad K \text{ konst.}, \quad [1]$$

$$\alpha \delta - \beta \gamma = C', \quad C' \text{ konst.}, \quad [2]$$

$$\delta = K' \alpha, \quad K' \text{ konst.}, \quad [3]$$

$$(C' c^2 - K' a^2) \alpha' = C (a^2 + c^2) \beta; \quad [4]$$

ferner aus den übrigen Gleichungen:

$$(C' K' - b^2) \alpha' = - C K \beta, \quad [5]$$

$$(K K' + c^2) (\alpha \beta' - \alpha' \beta) = - C C', \quad [6]$$

$$(C' K + a^2) \beta' = C K' \alpha, \quad [7]$$

$$(K b^2 + K' a^2) (\alpha \beta' - \alpha' \beta) = - C (a^2 - b^2), \quad [8]$$

$$(C' c^2 + K b^2) \beta' = - C (b^2 + c^2) \alpha. \quad [9]$$

Die sechs letzten Gleichungen reduzieren sich auf die folgenden vier:

$$K K' + c^2 + C' K + a^2 = 0, \quad [4']$$

$$K K' + c^2 - C' K' + b^2 = 0, \quad [5']$$

$$(K K' + c^2) \alpha' + C K \beta = 0, \quad [6']$$

$$(K K' + c^2) \beta' + C K' \alpha = 0, \quad [7']$$

wenn wir eine fünfte Gleichung beiseite lassen, weil sie sich in die Form $K' \alpha^2 - K \beta^2 = C'$ bringen lässt und folglich in den Gleichungen [1] — [3] enthalten ist.

Durch die sieben Gleichungen [1] — [3], [4'] — [7'] wird unsere Frage nach

der Möglichkeit einer Geradenschar (41) als S' - Schar des Hyperboloides (18) leicht erledigt.

Die Gleichungen [6'], [7'] liefern uns α, β als Integrale der Gleichung

$$(KK' + c^2)^2 \alpha'' - C^2 KK' \alpha = 0,$$

und weil für μ keine besondere Voraussetzung gegeben ist, können wir dann annehmen

$$\alpha = A \sin \mu, \quad A \text{ konst.}, \tag{a}$$

aber dann auch

$$C^2 KK' + (KK' + c^2)^2 = 0. \tag{a'}$$

Aus [6'] kommt nun

$$\beta = -A \sqrt{-\frac{K'}{K}} \cos \mu, \tag{b}$$

und wenn wir hernach C, K, K' durch drei konstante Grössen α', b', c' ersetzen mittelst der Formeln

$$K = -\frac{\alpha' b' c'}{b'^2}, \quad K' = \frac{\alpha' b' c'}{\alpha'^2}, \quad C = \frac{c^2 - c'^2}{c'}, \tag{b'}$$

die letztere eine Folge der zwei vorangehenden und der Formel (a'), so können wir aus [1] und [3] schliessen:

$$\gamma = A c' \cos \mu, \quad \delta = A \frac{b' c'}{\alpha'} \sin \mu, \tag{c}$$

und aus [2]:

$$C' = A^2 \frac{b' c'}{\alpha'}. \tag{c'}$$

Nun bleibt nur noch übrig, auch die Gleichungen [4'], [5'] zu befriedigen. Sie ergeben

$$c^2 - c'^2 + a^2 - A^2 c'^2 = 0, \quad c^2 - c'^2 + b^2 - A^2 c'^2 \frac{b'^2}{\alpha'^2} = 0,$$

weshalb:

$$A c' = \sqrt{a^2 + c^2 - c'^2}, \quad A \frac{b'}{\alpha'} c' = \sqrt{b^2 + c^2 - c'^2}. \tag{c''}$$

Unsere Untersuchung ist hiermit zu Ende geführt. Mit den Ausdrücken (a), (b), (c) für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dabei A, α', b', c' Konstante bezeichnend, die nur den Bedingungen (c'') unterliegen, und mit der in (b) steckenden Quadrat-

wurzel $\sqrt{-K'/K}$ gleich b'/a' haben wir für die vorliegende Fläche S den Forderungen (39) und (40) genügt. Wir sind nun zu folgender Geradenschar gelangt:

$$\left. \begin{aligned} x' &= z' \sin \mu \cdot \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - c'^2}}{c'} + \sqrt{a^2 + c^2 - c'^2} \cos \mu, \\ y' &= -z' \cos \mu \cdot \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - c'^2}}{c'} + \sqrt{b^2 + c^2 - c'^2} \sin \mu, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

als zu der einzigen möglichen S' -Schar von der Form (26). Als Fläche S hatten wir das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gewählt. Die Geradenschar (47) stellt eine Schar von Erzeugenden des konfokalen Hyperboloides

$$\frac{x^2}{a^2 + (c^2 - c'^2)} + \frac{y^2}{b^2 + (c^2 - c'^2)} - \frac{z^2}{c^2 - (c^2 - c'^2)} = 1$$

dar; wir sind deshalb durch das Vorgehende zu keiner anderen Transformation der auf das Hyperboloid abwickelbaren Flächen gekommen als der von Bianchi, die von irgend einer auf eine Fläche zweiter Ordnung abwickelbaren Fläche zu unendlich vielen neuen ebenfalls darauf abwickelbaren Flächen führt.

Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.

MEMORIA I.

(di LUIGI BIANCHI a Pisa)

PREFAZIONE.

La teoria delle superficie applicabili sulle quadriche generali ha acquistato ormai un assetto definitivo: essa fornisce invero l'estensione più naturale e completa della teoria delle superficie applicabili sulla sfera (reale od immaginaria), e delle loro trasformazioni (*). Ma se passiamo dalle superficie isolate a considerare famiglie di tali superficie, troviamo nella teoria delle superficie a curvatura costante un importante capitolo, quello che tratta delle famiglie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (famiglie di LAMÉ), al quale finora non ne corrispondeva uno analogo per le deformate delle quadriche generali. Colla presente Memoria vogliamo iniziare appunto, per le deformate delle quadriche generali, lo studio degli enti da riguardarsi come analoghi ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie a curvatura costante (**).

La prima questione che si presenta è di riconoscere in quale senso una tale estensione è possibile. Si vedrà che conviene per questo abbandonare la condizione dell'ortogonalità e ricorrere alla teoria generale dei sistemi

(*) Vedi le mie *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. III (Pisa, Spörri, 1909).

(**) Una prima notizia sulle presenti ricerche ho dato nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Vol. XXIII (serie 5^a) (marzo 1914).

tripli coniugati costruita dal DARBOUX (*). Di tale opportunità ci si persuade ricordando le proprietà dei sistemi tripli ortogonali (u, v, w) colla serie $w = \text{cost.}$ formata di superficie a curvatura costante, fra le quali la fondamentale seguente:

Le traiettorie ortogonali (w) della famiglia di superficie a curvatura costante segnano su queste una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati di linee, in particolare alle linee di curvatura (che formano un sistema isoterma-coniugato) fa corrispondere le linee di curvatura.

Ora sopra ogni superficie a curvatura costante il sistema delle linee di curvatura può caratterizzarsi come il *sistema coniugato-permanente*, cioè come quel sistema coniugato che si conserva coniugato applicando la superficie sulla sfera (reale od immaginaria). D'altra parte sulle deformate delle quadriche generali il sistema coniugato permanente, pur conservando la proprietà di costituire un sistema isoterma-coniugato, non è più ortogonale ma obliquo. Dopo queste osservazioni apparirà naturale se, nella teoria delle deformate delle quadriche generali, consideriamo quali enti analoghi ai sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura costante i sistemi tripli coniugati (u, v, w) , che godono delle seguenti proprietà:

a) *Le superficie della serie $w = \text{cost.}$ sono applicabili sopra quadriche;*
 b) *Il sistema coniugato (u, v) intercettato sopra una qualunque superficie $w = \text{cost.}$ dalle superficie delle altre due serie è il sistema coniugato permanente;*

c) *Le traiettorie (w), intersezioni delle superficie delle due prime famiglie $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, segnano sulle deformate $w = \text{cost.}$ delle quadriche una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.*

In riguardo alla proprietà a), è da dirsi che la quadrica su cui è applicabile la $w = \text{cost.}$ può variare con questa superficie, e in particolare rimanere sempre la stessa. Il primo caso corrisponde alle famiglie generali di LAMÉ composte di superficie a curvatura costante (**), il secondo al caso particolare dei sistemi di WEINGARTEN.

È poi da osservarsi che l'ultima proprietà c), come pure l'altra che sopra ciascuna $w = \text{cost.}$ il sistema (u, v) è *isoterma-coniugato*, sono di loro natura proprietà *proiettive*. E infatti se un sistema triplo coniugato possiede la pro-

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IV.ème Partie, n.º 1047 a 1052; cf. anche *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, Livre III, Chap. III (2.ème édition, 1910).

(**) Vedi il Cap. XXVII, Vol. II delle mie *Lezioni*.

prietà c), ed eventualmente l'altra ora ricordata, una qualunque trasformazione *omografica* lo cangia in un altro sistema triplo coniugato colle medesime proprietà. In particolare ciò accade applicando una qualunque trasformazione omografica ad un sistema di WEINGARTEN, colla ulteriore particolarità, in quest'ultimo caso, che i sistemi tripli coniugati così ottenuti ammettono *trasformazioni asintotiche* (*), le quali risultano dall'applicare l'omografia stessa alle trasformazioni di BÄCKLUND B_σ dei sistemi di WEINGARTEN.

Ritornando ai nostri sistemi tripli coniugati (u, v, w) , colle superficie S della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sopra quadriche, si vedrà che essi ammettono pure trasformazioni asintotiche, e queste, considerate per le singole superficie S , non sono altro che le trasformazioni B_n della teoria generale. Inoltre vale qui ancora, come per le superficie isolate, il *teorema di permutabilità*, con tutte le sue conseguenze per la semplificazione del procedimento di trasformazione.

L'esistenza dei nostri sistemi tripli coniugati, per le deformede delle quadriche generali, può stabilirsi mediante considerazioni infinitesimali che tengono qui il posto della costruzione infinitesimale di WEINGARTEN per le relative famiglie di LAMÉ. Ma il passaggio dalle trasformazioni infinitesime generatrici ai sistemi di equazioni alle derivate parziali, che permettono di costruire la teoria generale in modo analitico rigoroso, richiede più ampi sviluppi che mi riservo di dare in seguito.

In questa prima Memoria mi limito a trattare estese classi di siffatti sistemi che si deducono dalle formole già costruite per le famiglie di LAMÉ a curvatura costante, alcune in termini finiti, altre con quadrature, altre infine integrando equazioni differenziali ordinarie. In particolare bastano questi mezzi analitici per costruire classi di siffatti sistemi: 1.º per le deformede delle quadriche rotonde, 2.º per quelle dei *generali* paraboloidi, reali od immaginari, 3.º per le deformede delle quadriche (immaginarie) a centro di DARBOUX, tangenti all'assoluto. In questi ultimi due casi però ci limiteremo, per semplificare la ricerca, a supporre che le superficie $w = \text{cost.}$ siano applicabili sulla medesima quadrica; le formole così ottenute si estenderanno facilmente al caso più generale.

(*) Diremo che due sistemi tripli coniugati (u, v, w) sono trasformati asintotici l'uno dell'altro, quando si corrispondono biunivocamente, punto a punto, in guisa che le congiungenti le coppie (P, P') di punti corrispondenti, per ciascuna coppia (S, S') di superficie corrispondenti nel sistema $w = \text{cost.}$, formano una congruenza W .

I risultati che otteniamo per queste classi di sistemi tripli coniugati, e le considerazioni geometriche che vi si collegano, indicano già la via che sarà da tenersi in seguito per la costruzione della teoria generale.

Alla ricerca dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) con superficie $w = \text{cost.}$ applicabili sopra effettive quadriche è premesso lo studio (§ 3) di sistemi tripli coniugati contenenti una serie di superficie applicabili sul catenoide, ovvero sulle evolute delle superficie a curvatura costante positiva. Questi sistemi hanno proprietà molto affini a quelle dei sistemi tripli coniugati con una serie di superficie applicabili su quadriche.

PARTE PRIMA.

§ 1.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI IN GENERALE.

Per maggior chiarezza delle ricerche seguenti riportiamo qui le considerazioni fondamentali, relative ai sistemi tripli coniugati, secondo DARBOUX (l. c.).

Supponiamo che le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di un punto mobile nello spazio siano espresse per le coordinate curvilinee u, v, w colle formole

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (1)$$

e che il sistema curvilineo coordinato (u, v, w) sia un *sistema triplo coniugato*, che cioè su ciascuna superficie di una qualunque delle tre serie le superficie delle altre due serie traccino un sistema coniugato di linee. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti consistono nell'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

e degli altri due analoghi dedotti da questo con permutazione circolare delle lettere u, v, w . Queste condizioni possono esprimersi in altro modo dicendo che x, y, z debbono essere soluzioni di un sistema di equazioni simultanee di LAPLACE della forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= \alpha_{21} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \alpha_{12} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \alpha_{32} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \alpha_{23} \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial w \partial u} &= \alpha_{13} \frac{\partial \theta}{\partial w} + \alpha_{31} \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dove i coefficienti α_{ik} sono funzioni di u, v, w . Ora se si forma, nei tre modi possibili dalle (2), la derivata terza $\frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v \partial w}$, facendo uso delle (2) stesse, le relazioni lineari omogenee nelle derivate prime $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}, \frac{\partial \theta}{\partial w}$ debbono ridursi ad *identità*. Nel caso contrario infatti da una qualunque di esse, applicata ad x, y, z , seguirebbe l'annullarsi del determinante funzionale $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$, ciò che contraddice alle nostre ipotesi.

Se si scrivono effettivamente le dette condizioni di illimitata integrabilità per le (2), si trova (DARBOUX, IV^{ème} partie, p. 268) che al sistema (2) si può dare la forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \log H_1}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log H_2}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \frac{\partial \log H_2}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial w \partial u} &= \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial w} + \frac{\partial \log H_1}{\partial w} \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove le funzioni H_1, H_2, H_3 di u, v, w soddisfano al sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Viceversa, se H_1, H_2, H_3 soddisfano le (β) , le (α) formano un sistema completamente integrabile ed ammettono una soluzione generale θ con tre funzioni arbitrarie di u, v, w rispettivamente.

Scegliendo una terna qualunque (x, y, z) di tali soluzioni *indipendenti*, si ha un corrispondente sistema triplo coniugato.

Si osservi subito un caso particolare di immediata evidenza geometrica, che può dirsi il caso dei sistemi *di traslazione*. Se si prende una superficie qualunque S_0 , data dalle formole

$$x_0 = x_0(u, v), \quad y_0 = y_0(u, v), \quad z_0 = z_0(u, v),$$

che sia riferita ad un sistema coniugato (u, v) , indi si assoggetta la S_0 ad un movimento continuo traslatorio, per modo che un punto di S_0 descriva una curva arbitrariamente prescritta, la S_0 verrà appunto a descrivere un tale sistema triplo coniugato, corrispondente alle formole

$$x = x_0 + W_1, \quad y = y_0 + W_2, \quad z = z_0 + W_3,$$

dove W_1, W_2, W_3 sono funzioni arbitrarie di w . Manifestamente qui si ha

$$\frac{\partial \log H_1}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial \log H_2}{\partial w} = 0; \quad \frac{\partial \log H_3}{\partial u} = \frac{\partial \log H_3}{\partial v} = 0,$$

sicchè si può prendere $H_3 = 1$ ed H_1, H_2 indipendenti da w . Viceversa, con tali valori di H_1, H_2, H_3 , le (β) sono soddisfatte ed i corrispondenti sistemi tripli coniugati sono di traslazione.

In particolare se per S_0 prendiamo una deformata di una quadrica, e per sistema coniugato (u, v) quello coniugato permanente, il sistema triplo coniugato (u, v, w) verrà manifestamente a soddisfare alle nostre condizioni a), b), c) (Prefazione); ma questi ovvii sistemi tripli coniugati s'intenderanno naturalmente nel seguito sempre esclusi.

§ 2.

SPAZI CURVI NORMALI.

Facciamo una breve digressione dall'argomento principale per osservare un'interpretazione geometrica delle equazioni (β) . Si consideri lo spazio curvo a tre dimensioni il cui ds^2 è dato dalla forma differenziale quadratica ter-

narìa

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2. \quad (3)$$

Le tre equazioni (β) esprimono che per questa forma differenziale sono nulli ordinatamente i tre simboli Riemanniani: (31, 12), (12, 23), (23, 31) [cfr. Vol. I, pag. 344] (*). Ne segue che, in questo spazio curvo, le linee coordinate (u), (v), (w) segnano, in ogni punto, le tre *direzioni principali* (Vol. I, § 163); alle giaciture ortogonali, cioè a quelle delle tre superficie coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$, corrispondono le tre curvatures principali K_1 , K_2 , K_3 date dalle formole:

$$K_1 = -\frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} \right) \right\} - \frac{1}{H_1^2 H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial u}$$

$$K_2 = -\frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} \right) \right\} - \frac{1}{H_2^2 H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial v}$$

$$K_3 = -\frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) \right\} - \frac{1}{H_3^2 H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial w}.$$

Si sa che, per qualunque spazio curvo a tre dimensioni, le tre direzioni principali in un punto costituiscono un triedro trirettangolo ed esistono tre congruenze principali formate dalle linee che seguono in ogni loro punto una delle tre direzioni principali. Ma in generale queste congruenze non sono *normali*, e non avviene che colle tre congruenze principali si possa costituire un sistema triplo ortogonale. Quando questa circostanza si presenta si dirà che lo spazio curvo è *normale*; l'elemento lineare di un tale spazio assumerà la forma (3), soddisfacendo H_1 , H_2 , H_3 alle equazioni (β).

Così ogni sistema triplo coniugato dello spazio euclideo dà luogo ad infiniti spazi curvi normali, poichè i coefficienti H_1 , H_2 , H_3 possono alterarsi ciascuno per un fattore funzione arbitraria di u , v , w rispettivamente. E viceversa ad ogni spazio curvo normale sono associati infiniti sistemi tripli coniugati, dipendenti da tre funzioni arbitrarie.

(*) Qui come in seguito i richiami alle: *Lezioni di geometria differenziale* si faranno colla indicazione del volume e del paragrafo, o pagina.

§ 3.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DEL CATENOIDE.

Il DARBOUX ha dimostrato (l. c. n. 1042) che ai sistemi differenziali completamente integrabili del tipo (α) sono applicabili le sostituzioni di LAPLACE. Interpretando geometricamente questo risultato si ha una costruzione geometrica che permette di dedurre da ogni sistema triplo coniugato noto (u, v, w) sei nuovi sistemi, in termini finiti (l. c. n. 1052). Basta per questo, per ciascuna superficie S di una delle tre serie, p. e. delle $w = \text{cost.}$, condurre le tangenti alle linee (v) (o alle (u)); queste formano una congruenza rettilinea di cui la S è una delle due falde focali, mentre la seconda falda focale S_1 descrive, al variare di S , una famiglia (S_1) appartenente ad un nuovo sistema triplo coniugato (u, v, w) .

Se applichiamo in particolare questa costruzione ad un sistema triplo *ortogonale* (u, v, w) , le seconde falde focali S_1 diventano manifestamente il luogo dei centri di curvatura (di un sistema) per le superficie $w = \text{cost.}$ e si ha quindi il teorema: *Da ogni sistema triplo ortogonale si ottengono sei sistemi tripli coniugati assumendo, delle superficie di una qualunque delle tre serie le prime, ovvero le seconde falde dell'evoluta.* È da osservare altresì che per questi sistemi tripli coniugati le linee (v) del sistema coniugato sulle S_1 sono linee geodetiche.

Particolarizziamo ancora questo risultato e supponiamo che nel sistema triplo ortogonale (u, v, w) le superficie $w = \text{cost.}$ siano a curvatura costante $K = \pm \frac{1}{R^2}$, dove R sarà in generale una funzione di $w : R = R(w)$, e diventerà una costante nel caso dei *sistemi di Weingarten*. Supponiamo p. es., per fissare le idee, che K sia negativa e le $w = \text{cost.}$ siano quindi superficie pseudosferiche Σ . Applichiamo il teorema precedente alle prime e seconde falde delle evolute delle superficie pseudosferiche. Queste sono tutte superficie S applicabili sul catenoide; di più sulla S e sulla Σ si corrispondono i sistemi coniugati, e in particolare alle linee di curvatura (u, v) di Σ corrisponde sopra S un sistema isoterma coniugato. Pertanto i sistemi tripli coniugati (u, v, w) , che così si ottengono, godono delle proprietà seguenti:

- 1.^a ciascuna superficie S della serie $w = \text{cost.}$ è applicabile sul catenoide,
 2.^a le traiettorie (w) segnano sulla S una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.

Per queste proprietà gli attuali sistemi tripli coniugati si avvicinano evidentemente a quelli con una serie di deformati di quadriche (vedi Prefazione), come già in riguardo alla teoria dell'applicabilità le singole deformate del catenoide si comportano analogamente alle deformate delle quadriche.

L'analogia si spinge ancora più in là per la teoria delle *trasformazioni*. E invero del sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w) si prenda un altro tale sistema derivato per una trasformazione qualunque B_* di BÄCKLUND (Vol. II, § 433). Se delle superficie $w = \text{cost.}$ dei due sistemi prendiamo le falde omonime della evoluta, queste sono superficie applicabili sul catenoide, legate fra loro da una corrispondente trasformazione asintotica (Vol. II, § 397); dunque: *I sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformati del catenoide ammettono trasformazioni asintotiche in (∞^2) sistemi della medesima specie.*

Abbiamo qui supposto $K < 0$. Nell'altro caso $K > 0$ il risultato è perfettamente analogo, le superficie S essendo allora applicabili sulle evolute delle superficie a curvatura costante positiva. Però in questo caso le corrispondenti trasformazioni asintotiche diventano immaginarie.

§ 4.

RICHIAMO DELLE FORMOLE

PEI SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI A CURVATURA COSTANTE.

Per il seguito delle nostre ricerche dobbiamo sempre riferirci alle formole fondamentali, relative ai sistemi tripli ortogonali (u, v, w) , nei quali le $w = \text{cost.}$ siano superficie a curvatura costante $K = \pm \frac{1}{R^2}$, con $R = R(w)$, che qui torniamo per comodità a trascrivere, distinguendo i due casi di $K = -\frac{1}{R^2}$, $K = +\frac{1}{R^2}$.

1.° caso: $K = -\frac{1}{R^2}$. L'elemento lineare ds dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale pseudosferico (u, v, w) , assume la forma caratteristica

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \sin^2 \theta dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2, \quad (4)$$

dove la funzione $\theta = \theta(u, v, w)$, e le due funzioni

$$A = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}, \quad B = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}$$

sono legate fra loro dal sistema differenziale seguente (che rappresenta le condizioni di LAMÉ per l'appartenenza dell'elemento (4) allo spazio euclideo):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{R^2} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= A \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = B \sin \theta \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} B + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\sin \theta}{R} \right), \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} B \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} A - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\cos \theta}{R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Indicando poi con x, y, z le coordinate di un punto mobile nello spazio espresse per u, v, w e con $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)$ i coseni di direzione delle normali alle superficie $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}, w = \text{cost.}$, sussistono le formole del quadro seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos \theta X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sin \theta X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = R \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 + \frac{\sin \theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = R A \cdot X_3 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \frac{\cos \theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = R B \cdot X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{\sin \theta}{R} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\cos \theta}{R} X_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -R(A X_1 + B X_2), \end{aligned} \right\} \quad (I^*)$$

colle analoghe rispetto agli assi y, z .

2.° caso: $K = +\frac{1}{R^2}$. In questo caso l'elemento lineare dello spazio può scriversi

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta du^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 \quad (R = R(u)); \quad (5)$$

le equazioni (I) sono sostituite dalle altre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= -\frac{\operatorname{senh} \theta \operatorname{cosh} \theta}{R^2} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} &= A \operatorname{senh} \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = B \operatorname{cosh} \theta \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} B - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\operatorname{cosh} \theta}{R}\right), \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} B \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} A - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\operatorname{senh} \theta}{R}\right). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

mentre le corrispondenti alle (I*) si scrivono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \operatorname{senh} \theta X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{cosh} \theta X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = R \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \frac{\operatorname{cosh} \theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial w} = R A \cdot X_3 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \frac{\operatorname{senh} \theta}{R} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = R B \cdot X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} &= \frac{\operatorname{cosh} \theta}{R} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh} \theta}{R} X_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -R(A X_1 + B X_2). \end{aligned} \right\} \quad (II^*)$$

Rispetto ai sistemi di equazioni a derivate parziali (I) e (II) per la terna di funzioni θ, A, B , è da osservarsi che basta introdurre le due nuove funzioni incognite $\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}$, $\theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial v}$ per dar loro la forma di sistemi lineari canonici completamente integrabili (Cf. più oltre § 16). Ne risulta l'esistenza e l'arbitrarietà del sistema integrale come dipendente da *cinque* funzioni arbitrarie (Vol. II, § 430).

§ 5.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DELLA QUADRICA :

$$y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \text{cost.}$$

Cominciamo ora le nostre ricerche sui sistemi tripli coniugati contenenti una serie effettiva di deformate di quadriche, considerando una classe di tali sistemi, le cui superficie S di una serie sono applicabili sulla quadrica immaginaria a centro

$$y^2 + z^2 + (x - y + z\sqrt{-1})^2 = \frac{1}{K} (\text{cost.}), \quad (6)$$

che oscula l'assoluto (Vol. II, §§ 308, 447). Si sa che le deformate (reali) di questa quadrica si ottengono dalle superficie Σ a curvatura costante di una famiglia di LAMÉ colla seguente costruzione in termini finiti:

In ogni famiglia (Σ) di LAMÉ di superficie Σ a curvatura costante K i piani osculatori delle traiettorie ortogonali della famiglia nei punti di una Σ involuppano una superficie S applicabile sulla quadrica (6) (l. c. § 447).

Di più si sa che ai sistemi coniugati di Σ corrispondono i sistemi di S , in particolare alle linee (u, v) di curvatura di Σ il sistema coniugato permanente sopra S . Ora completiamo questa proposizione dimostrando l'ulteriore teorema:

Se alla superficie Σ a curvatura costante si fa descrivere la famiglia (Σ) di LAMÉ, corrispondentemente la S descrive una serie (S) appartenente ad un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Tale sistema godrà allora evidentemente delle proprietà a), b), c) enumerate nella prefazione.

Per dimostrare il teorema riferiamoci alle formole riportate nel paragrafo precedente e supponiamo p. es. di trovarci nel primo caso $K = -\frac{1}{R^2}$, sicchè valgono le formole (I), (I*). Per una superficie pseudosferica Σ del sistema $w = \text{cost.}$ indichiamo con S la corrispondente superficie ottenuta colla costruzione descritta e siano ξ, η, ζ le coordinate del punto di S che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ ; si trova allora facilmente:

$$\xi = x - \frac{R^2}{\partial \theta}{\left(A X_1 + B X_2 - \frac{R'}{R^2} X_3 \right)} \left(R' = \frac{dR}{dw} \right) \quad (7)$$

e le analoghe per η , ζ . Dobbiamo provare (§ 1) che le tre derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial w}$$

si esprimono linearmente ed omogeneamente per le rispettive coppie di derivate prime

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v} \right), \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial w} \right), \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial w} \right)$$

con coefficienti identici pei tre casi. Ora se poniamo per abbreviare

$$\Omega_x = A X_1 + B X_2 - \frac{R'}{R^2} X_3, \tag{8}$$

con significato analogo per Ω_y , Ω_z , le (7) si scrivono

$$\xi = x - \frac{R^2}{\partial \theta} \Omega_x. \tag{7*}$$

Formando le derivate rapporto ad u , v di Ω_x , coll'osservare le (I), (I*), otteniamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_x}{\partial u} &= \frac{\cos \theta}{R^2} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_1 + \frac{A \operatorname{sen} \theta}{R} X_3 \\ \frac{\partial \Omega_x}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{R^2} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_2 - \frac{B \cos \theta}{R} X_3, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

indi dalla (7*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{R^2 A \cos \theta}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{R^2 B \operatorname{sen} \theta}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2} \left(\Omega_x + \frac{\operatorname{cot} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= R \frac{\partial \theta}{\partial u} X_3 - \frac{R^2}{\partial \theta} \frac{\partial \Omega_x}{\partial w} + \frac{R^2}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2} \Omega_x - \frac{2 R R'}{\frac{\partial \theta}{\partial w}} \Omega_x. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Ora dalle formole (I), (I*) si deducono le identità seguenti:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) = - \frac{1}{R \cos \theta} \left(B + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial w} \right) X_3$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) = \frac{\partial}{\partial w} \log \left(\frac{\frac{\partial \theta}{\partial w}}{R^2 \cos \theta} \right) \cdot \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial w}}{R^2} \frac{\partial \xi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\Omega_x + \frac{\operatorname{cot} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) = \frac{\partial}{\partial w} \log \left(\frac{\frac{\partial \theta}{\partial w}}{R^2 \operatorname{sen} \theta} \right) \cdot \left(\Omega_x + \frac{\operatorname{cot} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) - \frac{\frac{\partial \theta}{\partial w}}{R^2} \frac{\partial \xi}{\partial w},$$

dalle quali segue che $\frac{\partial}{\partial v} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right)$ si compone linearmente con $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial v}$; similmente $\frac{\partial}{\partial w} \left(\Omega_x - \frac{\operatorname{tg} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right)$ con $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial w}$, e infine

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\Omega_x + \frac{\operatorname{cot} \theta}{R} \frac{\partial \theta}{\partial w} X_3 \right) \text{ con } \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial w}.$$

La proposizione è così stabilita e risulta inoltre dai nostri calcoli che i valori di H_1 , H_2 , H_3 corrispondenti, secondo il § 1, a questo sistema triplo coniugato sono dati dalle formole

$$H_1 = \frac{A}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}, \quad H_2 = \frac{B}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}, \quad H_3 = \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}. \quad (11)$$

Se ricordiamo poi (Vol. III, § 104) che le trasformazioni B_* di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche Σ si traducono, per le deformate S della quadrica (6), nelle trasformazioni B_* della teoria generale, ne deduciamo: *Gli attuali sistemi tripli coniugati ammettono trasformazioni asintotiche B_* in altri sistemi della medesima specie.*

Un caso particolare notevole di questi sistemi tripli coniugati si ha quando la curvatura K delle superficie Σ è una costante assoluta. Allora il sistema triplo ortogonale è un sistema di WEINGARTEN e le superficie S sono le *complementari* delle Σ rispetto alle geodetiche ortogonali ai cerchi di livello (Vol. II, § 440); la quadrica (6) è da sostituire con una quadrica che iperoscula l'assoluto. Dunque: *Se in un sistema triplo ortogonale di WEINGARTEN di ciascuna superficie Σ a curvatura costante si assume la complementare S rispetto*

al fascio di geodetiche ortogonali alle linee di livello, la serie (S) appartiene ad un sistema triplo coniugato della nostra specie.

Ancora più in particolare, se il sistema di WEINGARTEN è pseudosferico ed a flessione costante (Vol. II, § 441), il sistema (S) diventa alla sua volta il sistema pseudosferico complementare.

§ 6.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DEL PARABOLOIDE:

$$(x + y \sqrt{-1})^2 \pm \frac{z^2}{R^2} = x - y \sqrt{-1}.$$

La costruzione del paragrafo precedente, come quella del § 3, conduce dalle famiglie di LAMÉ a curvatura costante ai corrispondenti sistemi tripli coniugati senza alcun calcolo d'integrazione. Qui trattiamo altre classi di tali sistemi tripli coniugati che si deducono dalle famiglie stesse di LAMÉ per quadrature. Sono questi i sistemi tripli coniugati contenenti una famiglia di superficie applicabili sul paraboloido immaginario

$$(x + y \sqrt{-1})^2 \pm \frac{z^2}{R^2} = x - y \sqrt{-1},$$

tangente nel centro all'assoluto (Vol. III, § 100).

Partiamo p. es. da una famiglia pseudosferica (Σ) di LAMÉ, e da ciascuna superficie Σ deduciamo, nel noto modo (l. c.), una superficie S applicabile sul paraboloido:

$$\left(x + y \sqrt{-1}\right)^2 + \frac{z^2}{R^2} = x - y \sqrt{-1}, \quad (\alpha)$$

procedendo come segue. Introduciamo le tre distanze

$$W_1 = S x X_1, \quad W_2 = S x X_2, \quad W_3 = S x X_3$$

dell'origine dalle tre facce del triedro principale nel sistema triplo ortogonale (u, v, w), e per le formole (I*), § 4, avremo per W_1, W_2, W_3 il seguente

sistema lineare

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} W_2 + \frac{\operatorname{sen} \theta}{R} W_3 + \cos \theta, & \frac{\partial W_1}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} W_2, & \frac{\partial W_1}{\partial w} &= R A \cdot W_3 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} W_1, & \frac{\partial W_2}{\partial v} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} W_1 - \frac{\cos \theta}{R} W_3 + \operatorname{sen} \theta, & \frac{\partial W_2}{\partial w} &= R B \cdot W_3 \\ \frac{\partial W_3}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{R} W_1, & \frac{\partial W_3}{\partial v} &= \frac{\cos \theta}{R} W_2, & \frac{\partial W_3}{\partial w} &= -R(A W_1 + B W_2) + R \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Se indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate del punto della superficie S (applicabile sul detto paraboloido), che corrisponde al punto (x, y, z) di Σ , avremo ξ, η, ζ per quadrature dalle formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= (x \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta X_3) \cdot W_1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= (x \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta X_3) W_2, \end{aligned} \right\} (13)$$

e dalle analoghe per η, ζ . La condizione d'integrabilità per queste equazioni è identicamente soddisfatta, perchè, calcolando dall'una o dall'altra delle (13)

il valore di $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}$, si trova concordemente:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log W_1}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \log W_2}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}. \quad (14)$$

La superficie S , corrispondente ad un dato valore di w , è determinata dalle (13) a meno di una traslazione nello spazio; essa corrisponde alla superficie pseudosferica Σ per sistemi coniugati, in particolare il sistema (u, v) è sopra S il sistema coniugato permanente nell'applicabilità sul paraboloido (a) (cfr. Vol. III, § 100). Ora, se facciamo variare w , la S descriverà una famiglia (S) di deformate del paraboloido (a) , e noi, *determinando convenientemente le tre rispettive funzioni arbitrarie di w , additive in ξ, η, ζ secondo le (13)*, vogliamo cercare di costituire una famiglia (S) appartenente ad un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Per questo confrontiamo la (14) colla (α_1) , § 1 ed identifichiamole ponendo

$$H_1 = W_1, \quad H_2 = W_2;$$

successivamente dalle $(\beta_1), (\beta_2)$, § 1 deduciamo

$$\frac{\partial \log H_3}{\partial u} = \frac{\partial \log W_3}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log H_3}{\partial v} = \frac{\partial \log W_3}{\partial v},$$

onde ponendo: $H_1 = W_1$, $H_2 = W_2$, $H_3 = W_3$ veniamo a soddisfare anche alla (β_3) . Ed ora dalle due seconde equazioni (α) si trae

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[(x \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta X_3) W_2 \right] = \frac{\partial \log W_2}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \log W_3}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[(x \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta X_3) W_1 \right] = \frac{\partial \log W_1}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \log W_3}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}, \end{aligned}$$

e dall'una o dall'altra di queste segue per $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ il valore

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} - R^2 (A X_1 + B X_2) + R' X_3 \right\} R W_3.$$

D'altra parte le due condizioni d'integrabilità per quest'ultima, confrontata colle (13), si trovano soddisfatte. Possiamo dunque concludere: La nuova classe di sistemi tripli coniugati (u, v, w) , con superficie $w = \text{cost.}$ applicabili sul paraboloido (a) , è definita per quadrature dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= W_1 (x \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta X_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= W_2 (x \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta X_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= R W_3 \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} - R^2 (A X_1 + B X_2) + R' X_3 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Segue poi anche facilmente, dai risultati stabiliti al Vol. III, § 101: *Gli attuali sistemi tripli coniugati ammettono trasformazioni asintotiche B_x in sistemi della medesima specie.*

Abbiamo supposto fin qui la famiglia (Σ) di LAMÉ pseudosferica. Se fosse invece nel secondo caso $K = + \frac{1}{R^2}$ del § 4, valendo le (II), (II*), alle (15) si sostituirebbero le altre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= W_1 (x \operatorname{senh} \theta - R \cosh \theta X_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= W_2 (x \cosh \theta - R \operatorname{senh} \theta X_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= R W_3 \left\{ x \frac{\partial \theta}{\partial w} + R^2 (A X_1 + B X_2) - R' X_3 \right\}, \end{aligned}$$

le quali definiscono, a meno di una traslazione nello spazio, un sistema triplo coniugato (u, v, w) colle superficie della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sul paraboloido

$$(x + y\sqrt{-1})^2 - \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1}.$$

§ 7.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DI QUADRICHE A CENTRO ROTONDE.

Nelle mie ricerche del 1899 sulla inversione dei teoremi di GUICHARD relativi alle deformate delle quadriche rotonde (*) ho stabilito il sistema di equazioni differenziali dalla cui integrazione dipende la ricerca delle superficie applicabili sulle quadriche, di rotazione attorno all'asse focale, *associate ad una data superficie Σ a curvatura costante.* Ogni soluzione nota di questo sistema conduce ad una nuova superficie Σ' , colla medesima curvatura costante, e legata a Σ da una trasformazione *reale* composta di due trasformazioni opposte di BÄCKLUND, reali ovvero puramente immaginarie. Sussistono inoltre le proprietà geometriche seguenti: Le normali alle superficie Σ, Σ' in coppie (P, P') di punti corrispondenti si incontrano in un punto P_0 (equidistante da P, P'), il quale descrive una superficie S_0 deformata di una quadrica a centro rotonda; sulla S_0 i sistemi coniugati corrispondono a quelli di (Σ, Σ') , in particolare quello coniugato permanente alle linee di curvatura.

Passando dalle superficie a curvatura costante isolate alle loro famiglie (Σ) di LAMÉ, ho anche dimostrato (negli ultimi capitoli della Memoria citata) che le dette trasformazioni reali sono pure applicabili a queste famiglie (Σ) di LAMÉ (cfr. Vol. II, § 438); ed è appunto di questi risultati che ci serviremo ora per costruire sistemi tripli coniugati con una famiglia (S_0) di deformate di quadriche a centro rotonde. Dimostreremo per ciò che sussiste l'ulteriore proprietà: *Se nella costruzione precedente si fa percorrere a Σ, Σ' le coppie di*

(*) Vedi la Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di matematica, T. III della Serie 3^a).

superficie corrispondenti in due famiglie di LAMÉ (Σ) , (Σ') a curvatura costante, legate da una delle dette trasformazioni, la deformata S_0 della quadrica rotonda descrive una famiglia (S_0) appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.

Si ricordi poi che, nel caso della curvatura K negativa, le coppie (Σ) , (Σ') di famiglie pseudosferiche di LAMÉ ammettono trasformazioni reali B_0 di BÄCKLUND in altre tali coppie, onde segue che le famiglie (S_0) di deformate di quadriche rotonde ammettono trasformazioni reali asintotiche B_k in altre famiglie della medesima specie.

Descritta così la generazione geometrica dei nuovi sistemi tripli coniugati con deformate di quadriche rotonde dalle famiglie (Σ) di LAMÉ a curvatura costante K , andiamo a stabilire le formole effettive, separando i due casi di $K < 0$, o $K > 0$.

§ 8.

CASO DI K NEGATIVA.

Partiamo da una famiglia (Σ) di LAMÉ a curvatura costante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$, definita dalle formole (I), (I*) § 4. Al sistema di equazioni differenziali fondamentali per le ricordate trasformazioni si può dare la forma lineare omogenea seguente, dove \mathcal{A} , M , Φ , W indicano quattro funzioni incognite di u , v , w e c una costante arbitraria:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \cos \theta \mathcal{A}, & \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \sin \theta M, & \frac{\partial \Phi}{\partial w} &= R \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} &= c \cos \theta \cdot \Phi + \frac{1 - c R^2}{R} \sin \theta \cdot W + \frac{\partial \theta}{\partial v} M, & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} M, & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial w} &= R \mathcal{A} \cdot W \\ \frac{\partial M}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} \mathcal{A}, & \frac{\partial M}{\partial v} &= c \sin \theta \cdot \Phi - \frac{1 - c R^2}{R} \cos \theta W - \frac{\partial \theta}{\partial u} \mathcal{A}, & \frac{\partial M}{\partial w} &= R B \cdot W \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= -\frac{\sin \theta}{R} \mathcal{A}, & \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{\cos \theta}{R} M, & (1 - c R^2) \frac{\partial W}{\partial w} &= \\ & & & & = c R R' \cdot W + c R \frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi - R \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} - R B \cdot M. \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

In forza delle (1) § 4, questo è un sistema completamente integrabile: esso

possiede l'integrale quadratico

$$\mathcal{A}^2 + M^2 - c \Phi^2 + (1 - c R^2) W^2 = \text{cost.}, \quad (16)$$

poichè le derivate rapporto ad u, v, w del primo membro sono nulle per le (III).

Per dedurre dalle superficie pseudosferiche Σ le superficie S_0 deformate di quadriche rotonde, occorre scegliere una qualunque quaderna $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$ di soluzioni delle (III) per la quale la costante del secondo membro nelle (16) sia nulla, onde avremo

$$\mathcal{A}^2 + M^2 - c \Phi^2 + (1 - c R^2) W^2 = 0. \quad (16^*)$$

Dopo di ciò le formole

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \quad y_0 = y - \frac{\Phi}{W} Y_3, \quad z_0 = z - \frac{\Phi}{W} Z_3 \quad (17)$$

definiranno una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche a centro rotonde (immaginarie). Noi vogliamo ora verificare che queste formole (17) definiscono appunto un sistema triplo coniugato (u, v, w) , che apparterrà per ciò alla classe del paragrafo precedente. Per dimostrarlo cominciamo dal calcolare le derivate prime $\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}, \frac{\partial x_0}{\partial w}$, ciò che dà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{R W \cos \theta + \Phi \sin \theta}{R W^2} (W X_1 - \mathcal{A} X_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{R W \sin \theta - \Phi \cos \theta}{R W^2} (W X_2 - M X_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{W} \left\{ R (\mathcal{A} X_1 + B X_2) + \frac{\partial \log W}{\partial w} X_3 \right\}. \end{aligned}$$

D'altra parte sussistono le identità seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (W X_1 - \mathcal{A} X_3) &= \frac{M \cos \theta}{R W} (W X_1 - \mathcal{A} X_3) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\mathcal{A} \cos \theta}{R W} \right) (W X_2 - M X_3) \\ \frac{\partial}{\partial w} (W X_1 - \mathcal{A} X_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w} (W X_1 - \mathcal{A} X_3) + \frac{\mathcal{A} W}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial w} (W X_2 - M X_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w} (W X_2 - M X_3) + \frac{M W}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w}, \end{aligned}$$

le quali dimostrano che $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v}$ si compone linearmente ed omogeneamente

con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}\right)$, similmente $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v}$ con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}\right)$, e infine $\frac{\partial^2 x_0}{\partial v \partial w}$ con $\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}, \frac{\partial x_0}{\partial w}\right)$. Il sistema (u, v, w) definito dalle (17) è dunque in effetto un sistema triplo coniugato. Dai calcoli stessi eseguiti si deduce poi che i valori corrispondenti di H_1, H_2, H_3 (§ 1) sono dati qui dalle formole

$$H_1 = \cos \theta + \frac{\Phi \operatorname{sen} \theta}{R W}, \quad H_2 = \operatorname{sen} \theta - \frac{\Phi \cos \theta}{R W}, \quad H_3 = \frac{\Phi}{W}.$$

Si è già detto che le superficie S_0 della serie $w = \text{cost.}$ sono applicabili sopra quadriche rotonde, che nel caso attuale ($K < 0$) sono però immaginarie. Ma si può anche assumere come superficie tipica su cui la S_0 è applicabile una superficie rotonda reale, precisamente (Vol. II, § 259):

un catenoide accorciato se $1 - c R^2 < 0$

un sinusoido iperbolico se $1 - c R^2 > 0$

la superficie logaritmica se $1 - c R^2 = 0$.

In quest'ultimo caso R è costante ed il sistema triplo ortogonale è un sistema pseudosferico di WEINGARTEN. È notevole il caso in cui questo sistema (Σ) dà luogo ad una serie infinita di sistemi contigui complementari (Vol. II, § 445):

$$\dots (\Sigma_{-2}), (\Sigma_{-1}), (\Sigma), (\Sigma_1), (\Sigma_2) \dots,$$

estendenti all'infinito nei due sensi. In tal caso, possiamo dedurne, *senza alcun calcolo d'integrazione*, una catena corrispondente di sistemi tripli coniugati con una serie (S_0) di deformate della superficie logaritmica di rotazione. E invero due sistemi come $(\Sigma_1), (\Sigma_{-1})$ contigui a destra ed a sinistra ad un medesimo (Σ) si trovano nelle condizioni geometriche descritte al paragrafo precedente, e le normali in punti corrispondenti a due superficie Σ_1, Σ_{-1} si incontrano in un punto P_0 che descrive una tale superficie. La famiglia (S_0) appartiene al sistema triplo coniugato.

§ 9.

CASO DI K POSITIVA.

Supponiamo ora $K > 0$ e riferiamoci alle formole (II), (II*) § 4. In questo caso al sistema (III) è da sostituirsi il seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \sinh \theta \cdot \mathcal{A}, & \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \cosh \theta \cdot M, & \frac{\partial \Phi}{\partial w} &= R \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot W \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} M + c \sinh \theta \cdot \Phi - \frac{c R^2 + 1}{R} \cosh \theta W, & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} M, & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial w} &= R \mathcal{A} \cdot W \\ \frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \mathcal{A}, & \frac{\partial M}{\partial v} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} \mathcal{A} + c \cosh \theta \Phi - \frac{c R^2 + 1}{R} \sinh \theta \cdot W, & \frac{\partial M}{\partial w} &= R B \cdot W \\ \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{\cosh \theta}{R} \mathcal{A}, & \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{\sinh \theta}{R} M, & (c R^2 + 1) \frac{\partial W}{\partial w} &= - \\ & & & & = -c R R' W + c R \frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi - R \mathcal{A} \Lambda - R B M, \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

dove c indica nuovamente una costante arbitraria. Il sistema (IV) è completamente integrabile, a causa delle (II), e possiede l'integrale quadratico

$$\mathcal{A}^2 + M^2 - c \Phi^2 + (c R^2 + 1) W^2 = \text{cost.} \quad (18)$$

Prendiamo anche qui una quaderna $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$ di soluzioni delle (IV) per la quale la costante del secondo membro sia nulla:

$$\mathcal{A}^2 + M^2 - c \Phi^2 + (c R^2 + 1) W^2 = 0, \quad (18^*)$$

e le formole stesse (17)

$$x_0 = x - \frac{\Phi}{W} X_3, \text{ ecc.}$$

daranno, per ogni valore di w , una superficie S_0 applicata sopra una quadrica reale di rotazione attorno all'asse focale. Precisamente la quadrica sarà un *ellissoide allungato* se la costante c è negativa, un *iperboloide a due falde* se c è positiva; questa quadrica resterà la stessa se R è costante, in generale varierà con w .

Ora andiamo a verificare che, al variare di w , la S_0 descrive un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Per questo calcoliamo le derivate prime di x_0 colle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{RW \sinh \theta - \Phi \cosh \theta}{RW^2} (WX_1 - AX_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= \frac{RW \cosh \theta - \Phi \sinh \theta}{RW^2} (WX_2 - MX_3) \\ \frac{\partial x_0}{\partial w} &= \frac{\Phi}{W} \left\{ R(AX_1 + BX_2) + \frac{\partial \log W}{\partial w} X_3 \right\}, \end{aligned}$$

ed osserviamo le identità

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (WX_1 - AX_3) &= \frac{M \sinh \theta}{RW} (WX_1 - AX_3) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{A \sinh \theta}{RW} \right) (WX_2 - MX_3) \\ \frac{\partial}{\partial w} (WX_1 - AX_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w} (WX_1 - AX_3) + \frac{AW}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial w} (WX_2 - MX_3) &= \frac{\partial \log W}{\partial w} (WX_2 - MX_3) + \frac{MW}{\Phi} \frac{\partial x_0}{\partial w}. \end{aligned}$$

Da queste segue che le formole (17) definiscono nuovamente un sistema (u, v, w) triplo coniugato, e pei corrispondenti coefficienti H_1, H_2, H_3 del § 1 si trovano i valori

$$H_1 = \sinh \theta - \frac{\Phi \cosh \theta}{RW}, \quad H_2 = \cosh \theta - \frac{\Phi \sinh \theta}{RW}, \quad H_3 = \frac{\Phi}{W}.$$

§ 10.

QUADERNE ARMONICHE DI SOLUZIONI DEL SISTEMA (IV). TETRAEDRI CONIUGATI.

L'integrazione del sistema differenziale (III) o (IV), associato ad una famiglia (Σ) di LAMÉ a curvatura costante, ci ha condotto a sistemi tripli coniugati contenenti una famiglia (S_0) di superficie applicabili sopra quadriche

rotonde; ma ora vogliamo provare che se ne può dedurre ancora classi di sistemi tripli coniugati con superficie S_0 applicabili sui *generali* paraboloidi a parametri puramente immaginari:

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 2z\sqrt{-1}.$$

Per semplicità supporremo R costante, e faremo senz'altro $R = 1$, per modo che le superficie S_0 nella serie $w = \text{cost.}$ risulteranno applicabili sul *medesimo* paraboloide. Premettiamo alcune osservazioni sulle quaderne di soluzioni $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$ p. e. del sistema differenziale (IV) (nel quale si farà $R = 1$), che varranno pure nei casi analoghi che incontreremo in seguito.

Si è già detto che per ogni tale quaderna di soluzioni è costante l'espressione

$$\mathcal{A}^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1)W^2,$$

onde segue, poichè il sistema è lineare omogeneo, che per due quaderne qualunque di soluzioni $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$, $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{M}, \bar{\Phi}, \bar{W})$ è costante l'espressione

$$\Omega = \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + M\bar{M} - c\Phi\bar{\Phi} + (c+1)W\bar{W}.$$

[La stessa cosa si può verificare direttamente dalle (IV) ed analoghe per $\bar{\mathcal{A}}, \bar{M}, \bar{\Phi}, \bar{W}$, provando che le tre derivate di Ω si annullano].

Ora diremo che le due quaderne $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$, $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{M}, \bar{\Phi}, \bar{W})$ sono *armoniche* quando sia

$$\mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} + M\bar{M} - c\Phi\bar{\Phi} + (c+1)W\bar{W} = 0.$$

Manifestamente per ottenere due quaderne armoniche di soluzioni basta legare i valori iniziali delle due quaderne, per un sistema iniziale di valori u_0, v_0, w_0 delle variabili, in guisa che si annulli *inizialmente* l'espressione Ω sopra scritta.

La denominazione di quaderne armoniche risponde alle considerazioni geometriche seguenti. Riguardiamo \mathcal{A}, M, Φ, W quali coordinate *omogenee* di un punto nello spazio e consideriamo la quadrica (Q) di equazione

$$(Q) \mathcal{A}^2 + M^2 - c\Phi^2 + (c+1)W^2 = 0.$$

Ad ogni quaderna $(\mathcal{A}, M, \Phi, W)$ di soluzioni corrisponde, per ciascun sistema (u, v, w) di valori delle variabili, un punto dello spazio; a due qua-

derne armoniche corrispondono sempre due punti *coniugati armonici* rispetto alla quadrica (Q).

Ora prendiamo uu qualunque tetraedro coniugato (autoconiugato) $P_0 P_1 P_2 P_3$ rispetto alla quadrica (Q) e, corrispondentemente a ciascun vertice P_r ($r=0, 1, 2, 3$), consideriamo una quaderna di soluzioni del sistema (IV)

$$(\mathcal{A}_r, M_r, \Phi_r, W_r) \quad r=0, 1, 2, 3,$$

che si riduca alle coordinate di P_r quando vi si fa $u = u_0, v = v_0, w = w_0$. Queste quattro quaderne saranno due a due armoniche, e noi diremo brevemente per ciò che esse formano un *tetraedro coniugato di soluzioni*.

Le considerazioni ora svolte si applicano sia al sistema (IV), sia al sistema (III), e più oltre saranno invocate pei sistemi differenziali analoghi che si presenteranno nel caso delle deformate dei paraboloidi reali. Qui, ritornando al caso particolare del sistema (IV), diamo alla costante c un valore negativo, tale però che $c+1$ riesca positivo, e poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2}, \quad 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} \quad (a, b, \text{ reali}). \quad (19)$$

La quadrica (Q) diventa allora la quadrica immaginaria

$$\mathcal{A}^2 + M^2 + \frac{\Phi^2}{a^2} + \frac{W^2}{b^2} = 0,$$

e, disponendo per ogni quaderna di soluzioni del fattore costante arbitrario di omogeneità, noi *normalizzeremo* la quaderna di soluzioni col rendere

$$\mathcal{A}^2 + M^2 + \frac{\Phi^2}{a^2} + \frac{W^2}{b^2} = 1.$$

Per tal modo ad un tetraedro coniugato di soluzioni $(\mathcal{A}_r, M_r, W_r, \Phi_r)$ $r=0, 1, 2, 3$ corrisponderà un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A}_0 & M_0 & \frac{\Phi_0}{a} & \frac{W_0}{b} \\ \mathcal{A}_1 & M_1 & \frac{\Phi_1}{a} & \frac{W_1}{b} \\ \mathcal{A}_2 & M_2 & \frac{\Phi_2}{a} & \frac{W_2}{b} \\ \mathcal{A}_3 & M_3 & \frac{\Phi_3}{a} & \frac{W_3}{b} \end{vmatrix};$$

in particolare avremo le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 &= a^2 - \Phi_0^2 \\ W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 &= b^2 - W_0^2 \\ \Phi_1 W_1 + \Phi_2 W_2 + \Phi_3 W_3 &= -\Phi_0 W_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

§ 11.

DEFORMATE DEL PARABOLOIDE IMMAGINARIO:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}.$$

Le costanti a, b avendo il significato dato dalle (19), prendiamo come sopra un tetraedro coniugato di soluzioni del sistema (IV). *Diamo alla variabile w un valore fisso* lasciando u, v variabili e verifichiamo che le tre espressioni

$$\Phi_i d\Phi_0 - W_i dW_0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono *differenziali esatti*. E infatti, esprimendole in coordinate u, v , abbiamo per le (IV) (ove si faccia $R = 1$)

$$\Phi_i d\Phi_0 - W_i dW_0 = \mathcal{A}_0 (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) du + M_0 (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta) dv,$$

e basta verificare la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\mathcal{A}_0 (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left[M_0 (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta) \right].$$

Ma dalle (IV) segue subito che il primo ed il secondo membro di questa hanno il valor comune

$$\frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial v} (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) + \frac{\partial M_0}{\partial u} (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta),$$

ciò che prova l'asserzione. Dopo ciò, se introduciamo le tre funzioni y_1, y_2, y_3 di u, v, w , i cui differenziali (rapporto ad u, v) sono le tre dette espressioni, avremo

$$dy_i = \Phi_i d\Phi_0 - W_i dW_0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (21)$$

indi le formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \Lambda_0 (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0 (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta), \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

mentre dal calcolo sopra eseguito risulterà

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \Lambda_0}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\partial \log M_0}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ora riguardiamo y_1, y_2, y_3 quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto P nello spazio, e consideriamo la superficie S descritta dal punto P al variare di u, v (rimanendo fissa w). L'elemento lineare di S sarà dato per le (21) da

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=3} (\Phi_i d\Phi_0 - W_i dW_0)^2,$$

ossia, per le (20), da

$$ds^2 = (a^2 - \Phi_0^2) d\Phi_0^2 + 2\Phi_0 W_0 d\Phi_0 dW_0 + (b^2 - W_0^2) dW_0^2.$$

Se poniamo

$$X = a\Phi_0, \quad Y = bW_0, \quad 2Z\sqrt{-1} = \Phi_0^2 - W_0^2, \quad (24)$$

risulta

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2;$$

dunque: la nostra superficie S è applicabile sulla quadrica (24), cioè sul paraboloido

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}$$

a parametri puramente immaginari (di segno contrario).

Dimostriamo ora di più che: nella corrispondenza stabilita fra i punti di S e della superficie a curvatura costante Σ i sistemi coniugati si corrispondono, ed alle linee (u, v) di curvatura di Σ corrisponde sopra S il sistema coniugato permanente.

Per questo cominciamo dal calcolare per la S i coseni di direzione della

normale Y_1, Y_2, Y_3 , e troveremo subito dalle (22)

$$Y_i = \frac{\Lambda_0 M_i - M_0 \mathcal{A}_i}{\sqrt{\mathcal{A}_0^2 + M_0^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dopo ciò calcoliamo i coefficienti D, D', D'' della seconda forma quadratica fondamentale di S :

$$D = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u^2}, \quad D' = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum_i Y_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial v^2}.$$

Se si osservano le identità:

$$\frac{\partial}{\partial u} (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) = (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta) \frac{\partial \theta}{\partial u} - \mathcal{A}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) = (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (\Phi_i \cosh \theta - W_i \sinh \theta) = (\Phi_i \sinh \theta - W_i \cosh \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v} + M_i,$$

si trovano per D, D', D'' i valori

$$D = D'' = \frac{\mathcal{A}_0 M_0}{\sqrt{\mathcal{A}_0^2 + M_0^2}}, \quad D' = 0.$$

Il sistema (u, v) è dunque isoterma-coniugato sulla S come sulla Σ , e di più ridotto in ambedue i casi a parametri isometrici, ciò che dimostra la prima parte della proposizione enunciata. Che poi sopra S questo sistema (u, v) sia il sistema coniugato permanente, nell'applicabilità di S sul paraboloido (24), risulta da ciò che la seconda forma fondamentale di questo paraboloido è proporzionale, in coordinate Φ_0, W_0 , alla espressione $d\Phi_0^2 - dW_0^2$, la quale, espressa in coordinate u, v , manca del termine in $du dv$, avendosi per le (IV) (ove $R = 1$):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v}.$$

Facciamo da ultimo l'osservazione, senza più ripeterla nei seguenti casi analoghi, che la deformata S del paraboloido è già intrinsecamente determinata dalla prima quaderna di soluzioni $(\mathcal{A}_0, M_0, \Phi_0, W_0)$, poichè dai calcoli eseguiti risulta che i coefficienti delle sue due forme fondamentali dipendono solo da questa. La stessa cosa appare evidente dalle formole (21), poichè se, conservando la quaderna $(\mathcal{A}_0, M_0, W_0, \Phi_0)$, si mutano le altre tre $(\mathcal{A}_i, M_i,$

Φ_i, W_i) nelle nuove $(\bar{A}_i, \bar{M}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}_i)$, avremo

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} A_k, & \bar{M}_i &= \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} M_k, \\ \bar{\Phi}_i &= \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} \Phi_k, & \bar{W}_i &= \sum_{k=1}^{k=3} c_{ik} W_k \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

dove le c_{ik} sono i nove coefficienti di una sostituzione ortogonale. Le (21) provano allora che i differenziali dy_i subiscono corrispondentemente la medesima sostituzione ortogonale, e perciò: *la superficie S si muove rigidamente nello spazio.*

§ 12.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DEL PARABOLOIDE

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}.$$

Nei risultati del paragrafo precedente rendiamo ora a v la sua variabilità, e la superficie S acquisterà una semplice infinità di configurazioni, ciascuna determinata dalle (22) *a meno di una traslazione* nello spazio. Precisamente come al § 6, vogliamo dimostrare che si possono fissare queste ∞^1 configurazioni S nello spazio in guisa che la famiglia (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato, per la qual cosa basterà fissare in modo conveniente le tre funzioni di v che le (22) lasciano arbitrarie additive in y_1, y_2, y_3 . Intanto dal confronto della (23) colle formole generali del § 1, siamo condotti a porre

$$H_1 = A_0, \quad H_2 = M_0,$$

e successivamente, confrontando le (β) § 1 colle (IV), vediamo che basta porre ancora

$$H_3 = W_0,$$

affinchè le (β) siano soddisfatte. Dopo ciò le due ultime formole (α) § 1, nelle

quali si ponga y , per θ , danno

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[M_0 (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta) \right] = \frac{\partial M_0}{\partial w} (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta) + \frac{\partial \log W_0}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial w},$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[A_0 (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) \right] = \frac{\partial A_0}{\partial w} (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) + \frac{\partial \log W_0}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial w},$$

ovvero

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log W_0}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial w} &= A_0 \frac{\partial}{\partial w} (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta), \\ \frac{\partial \log W_0}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial w} &= M_0 \frac{\partial}{\partial w} (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Eseguendo le derivazioni colle (IV), queste forniscono concordemente

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i - \frac{\partial W_i}{\partial w} \right),$$

e dall'ultima delle (IV), osservando le (19), risulta

$$\frac{\partial W_i}{\partial w} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i - b^2 (A A_i + B M_i),$$

e quindi in definitiva

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = b^2 W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A A_i + B M_i \right).$$

Associando quest'ultima alle (22), veniamo a definire per quadratura le tre funzioni

$$y_1 = y_1(u, v, w), \quad y_2 = y_2(u, v, w), \quad y_3 = y_3(u, v, w)$$

colle formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A_0 (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0 (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= b^2 W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A A_i + B M_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Resta soltanto da dimostrare che sono soddisfatte le ulteriori condizioni d'integrabilità :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} \left[\mathcal{A}_0 (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) \right] &= b^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial w} \left[\mathcal{M}_0 (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta) \right] &= b^2 \frac{\partial}{\partial v} \left[W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ma dalle (25) risultano le identità

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) &= b^2 \cosh \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial w} (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta) &= b^2 \sinh \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) \end{aligned}$$

e si trova d'altronde direttamente dalle (II) § 4, e dalle (IV) § 9

$$\begin{aligned} b^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) &= A (\Phi, \sinh \theta - W, \cosh \theta) \\ b^2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i + A \mathcal{A}_i + B M_i \right) &= B (\Phi, \cosh \theta - W, \sinh \theta); \end{aligned}$$

con queste formole le (27) sono immediatamente verificate.

Da tutto ciò si conclude che le (26) definiscono per quadrature, a meno di una traslazione, un sistema triplo (u, v, w) coniugato il quale gode delle proprietà seguenti:

1.^a Le superficie S della serie $w = \text{cost.}$ sono tutte applicabili l'una sull'altra e sul paraboloido (24);

2.^a Sopra ciascuna S il sistema (u, v) è il sistema coniugato permanente;

3.^a Le traiettorie (w) segnano sopra le S una corrispondenza che conserva i sistemi coniugati.

Queste proprietà corrispondono precisamente alle a), b), c) della prefazione.

§ 13.

CASO DELLE DEFORMATE DEL PARABOLOIDE:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}.$$

L'analisi esposta nei due paragrafi precedenti può ripetersi per le famiglie pseudosferiche di WEINGARTEN e per il sistema differenziale (III) § 8, nelle quali formole faremo ancora $R = 1$.

Si dia alla costante c un valore negativo $c = -\frac{1}{a^2}$, e si ponga

$$1 - c = 1 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}, \quad (28)$$

talchè la relazione quadratica (16) § 8 potrà nuovamente normalizzarsi nella:

$$\mathcal{A}^2 + M^2 + \frac{\Phi^2}{a^2} + \frac{W^2}{b^2} = 1.$$

Prendiamo ancora qui un tetraedro coniugato di soluzioni $(\mathcal{A}_r, M_r, \Phi_r, W_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$, ed osserviamo che, *tenendo fissa la variabile w* , le tre espressioni:

$$d y_i = \Phi_i d \Phi_0 + W_i d W_0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (29)$$

sono differenziali esatti. Si ha invero

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \mathcal{A}_0 (\Phi_i \cos \theta - W_i \sin \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0 (\Phi_i \sin \theta + W_i \cos \theta), \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3) \quad (29^*)$$

e di qui concordemente

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \mathcal{A}_0}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\partial \log M_0}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v}.$$

Il punto di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3 descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie S il cui elemento lineare ds calcolato

dalle (29), coll'osservare le (20) § 10, ha il valore

$$d s^2 = (a^2 - \Phi_0^2) d \Phi_0^2 - 2 \Phi_0 W_0 d \Phi_0 d W_0 + (b^2 - W_0^2) d W_0^2.$$

Questo appartiene alla quadrica di equazioni parametriche

$$X = a \Phi_0, \quad Y = b W_0, \quad 2\sqrt{-1} Z = \Phi_0^2 + W_0^2,$$

vale a dire al paraboloido

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2\sqrt{-1} Z, \tag{24*}$$

di parametri puramente immaginari positivi a^2, b^2 . Si osservi che, essendo per le (28) $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 1$, è sempre $b^2 < a^2$, onde viene qui escluso il caso del paraboloido rotondo ($b^2 = a^2$); ma, eccettuato questo caso, basta sostituire un paraboloido omotetico per avere il più generale paraboloido a parametri puramente immaginari (positivi).

Ed ora, come al paragrafo precedente, facciamo variare w , ed otterremo ∞^1 configurazioni della deformata S del paraboloido (24*), ciascuna determinata dalle (29*) a meno di una traslazione. Possiamo fissare i parametri di questa traslazione in guisa che la famiglia (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato; e invero il procedimento stesso del § 12 conduce qui alle formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A_0 (\Phi_i \cos \theta - W_i \sin \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= M_0 (\Phi_i \sin \theta + W_i \cos \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= b^2 W_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \Phi_i - A A_i - B M_i \right), \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

che definisce per quadrature il sistema triplo coniugato richiesto, le condizioni d'integrabilità trovandosi identicamente soddisfatte.

Anche qui, come al § 11, si prova che la corrispondenza fra Σ, S conserva i sistemi coniugati ed alle linee (u, v) di curvatura di Σ fa corrispondere sopra S il sistema coniugato permanente.

Aggiungiamo infine che dalle trasformazioni B_* di BÄCKLUND pei sistemi pseudosferici di WEINGARTEN si possono dedurre corrispondenti trasformazioni B_* degli attuali sistemi tripli coniugati. Ma noi tralasciamo qui di scrivere le formole corrispondenti, i calcoli a ciò necessarii essendo affatto simili a quelli che eseguiremo più oltre nel caso dei paraboloidi reali (V. § 24).

§ 14.

CASO DEL PARABOLOIDE IMMAGINARIO ROTONDO :

$$X^2 + Y^2 = 2Z\sqrt{-1}.$$

Il modo che abbiamo tenuto sopra per dedurre dai sistemi pseudosferici di WEINGARTEN i sistemi tripli coniugati (u, v, w) con superficie S della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sul paraboloido (24*) escludeva il caso del paraboloido rotondo ($a^2 = b^2$). Diciamo però subito che anche in questo caso limite esistono i corrispondenti sistemi tripli coniugati; li avremmo trovati inclusi nel caso generale se invece che dai sistemi di WEINGARTEN nello spazio euclideo fossimo partiti da quelli nello spazio *ellittico*, il caso limite corrispondendo allora a quello dei sistemi di WEINGARTEN con *superficie a curvatura totale nulla* in geometria ellittica (*). Dalla Memoria sottocitata prenderemo ora le formole che occorrono al nostro scopo, prescindendo dal loro significato geometrico per lo spazio ellittico.

I sistemi tripli coniugati con una serie di deformate del paraboloido rotondo immaginario dipendono dal seguente sistema differenziale per due funzioni incognite θ, ω delle variabili u, v, w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial v}, & \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= \cos \theta \sin \omega, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \sin \theta \cos \omega. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

I teoremi generali sulle equazioni a derivate parziali (cf. più oltre § 16) mostrano che le soluzioni (θ, ω) del sistema (V) dipendono da *quattro* funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna. Come ho dimostrato al § 15 della Memoria ora citata, le coppie (θ, ω) di soluzioni delle (V) dipendono biunivocamente dalle coppie di superficie pseudosferiche *arbitrariamente scelte* nello spazio euclideo; così anche ad ogni tale coppia di superficie pseudosferiche verrà a corrispondere un sistema triplo coniugato con deformate del

(*) Vedi la Memoria: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (Annali di matematica, T. XXIV, della Serie II [1896]).

paraboloide rotondo immaginario. Supposto che (θ, ω) sia una coppia di soluzioni delle (V), si consideri nelle quattro funzioni incognite (x, ξ, η, ζ) il seguente sistema lineare omogeneo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos \theta \cdot \eta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \sin \theta \cdot \zeta, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w} \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\sin \theta \cdot \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \cos \theta \cdot \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial w} &= -\frac{\partial \theta}{\partial w} x - \sin \omega \cdot \eta - \cos \omega \cdot \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\cos \theta \cdot x + \sin \theta \xi + \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial w} &= \sin \omega \cdot \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= -\sin \theta \cdot x - \cos \theta \cdot \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \cos \omega \cdot \xi. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Questo è, in forza delle (V), un sistema completamente integrabile e di più *ortogonale*. Se ne consideri una quaderna di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ ($r=0, 1, 2, 3$), appartenenti ad un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} x_0 & \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ x_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ x_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ x_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

e si determinino per quadrature le tre funzioni y_1, y_2, y_3 di u, v, w dalle formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (x_i \cos \theta - \xi_i \sin \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (x_i \sin \theta + \xi_i \cos \theta) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= -\xi_0 (\eta_i \sin \omega + \zeta_i \cos \omega), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

che tengono qui il luogo delle (30). Le condizioni d'integrabilità risultano identicamente soddisfatte e le formole precedenti definiscono un sistema triplo coniugato (u, v, w) pel quale si ha

$$H_1 = \eta_0, \quad H_2 = \zeta_0, \quad H_3 = \xi_0.$$

Ora consideriamo una superficie S della serie $w = \text{cost.}$; lungo la S abbiamo

$$d y_i = x_i d x_0 + \xi_i d \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

onde per l'elemento lineare ds della S

$$ds^2 = (1 - x_0^2) dx_0^2 - 2x_0 \xi_0 dx_0 d\xi_0 + (1 - \xi_0^2) d\xi_0^2,$$

ciò che corrisponde a porre $a^2 = b^2 = 1$ nelle formole del § 11. Le superficie S sono dunque tutte applicabili sul paraboloido rotondo immaginario

$$X = x_0, \quad Y = \xi_0, \quad 2\sqrt{-1}Z = x_0^2 + \xi_0^2, \quad \text{ossia} \quad X^2 + Y^2 = 2\sqrt{-1} \cdot Z.$$

Inoltre, procedendo come al § 11, si dimostra che il sistema (u, v) è sulle S il sistema coniugato permanente; esso è isotermo-coniugato ed i parametri u, v sono isometrici, onde le proprietà a), b), c) della prefazione si trovano anche qui verificate.

§ 15.

PROPRIETÀ GEOMETRICHE DI QUESTI SISTEMI.

Consideriamo in uno dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) ora trovati le tangenti alle traiettorie (w) nei punti di una superficie S ($w = \text{cost.}$) deformata del paraboloido rotondo, e dimostriamo che ha luogo la seguente proprietà: *Le tangenti a queste traiettorie (w) sono normali alle deformate dei paralleli del paraboloido.*

Questa proprietà, che si ripete nel caso delle deformate del paraboloido rotondo *reale* (vedi § 29), merita di essere rilevata perchè appartiene in generale a classi di sistemi tripli coniugati con una serie di deformate di quadriche rotonde *qualunque*.

Per verificarla nel caso nostro, osserviamo che sulla S le deformate dei paralleli (linee di egual curvatura) sono quelle di equazione $x_0^2 + \xi_0^2 = \text{cost.}$, e quindi di equazione differenziale:

$$du : dv = \zeta_0 (x_0 \sin \theta + \xi_0 \cos \theta) : -\eta_0 (x_0 \cos \theta - \xi_0 \sin \theta).$$

Se indichiamo adunque con Z_1, Z_2, Z_3 i coseni di direzione della tangente a queste linee, abbiamo

$$Z_i = \frac{\xi_0 x_i - x_0 \xi_i}{\sqrt{x_0^2 + \xi_0^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ora si hanno le identità

$$\sum_i \eta_i Z_i = 0, \quad \sum_i \zeta_i Z_i = 0,$$

e per ciò anche dalla (32₃)

$$\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial w} Z_i = 0,$$

ciò che dimostra la nostra proposizione.

Un'altra interessante proprietà degli attuali sistemi tripli coniugati consiste in questo, che essi si presentano a *coppie di sistemi complementari*, secondo il teorema:

Se di ciascuna superficie S nella serie w = cost. del sistema triplo coniugato si prende la complementare S̄, rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani del paraboloido, queste superficie S̄ (che sono applicabili sul paraboloido stesso) appartengono ad un nuovo sistema triplo coniugato della medesima specie.

Analiticamente è la simmetria delle equazioni fondamentali (V) in θ, ω che pone in evidenza il sistema complementare, poichè dalle (V) si deduce

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \cos \omega \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} = \sin \omega \cos \theta,$$

sicchè possiamo scambiare nei nostri risultati θ con ω . Ora se indichiamo con $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ i valori di x, ξ, η, ζ corrispondenti ad ω , questi sono dati dalle formole di sostituzione ortogonale

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \eta \cos \omega - \zeta \sin \omega & \bar{\eta} &= -x \cos \theta + \xi \sin \theta \\ \bar{\xi} &= -\eta \sin \omega - \zeta \cos \omega & \bar{\zeta} &= x \sin \theta + \xi \cos \theta. \end{aligned}$$

Le coordinate \bar{y}_0 di un punto che descrive il nuovo sistema sono date, a meno di costanti additive, dalle formole corrispondenti alle (32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} &= \bar{\eta}_0 (\bar{x}_i \cos \omega - \bar{\xi}_i \sin \omega) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} &= \bar{\zeta}_0 (\bar{x}_i \sin \omega + \bar{\xi}_i \cos \omega) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial w} &= -\bar{\xi}_0 (\eta_i \sin \theta + \xi_i \cos \theta), \end{aligned}$$

che possono anche scriversi per le precedenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} &= \tau_i (\xi_0 \operatorname{sen} \theta - x_0 \operatorname{cos} \theta) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} &= -\zeta_j (\xi_0 \operatorname{cos} \theta + x_0 \operatorname{sen} \theta) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial w} &= \xi_i (\tau_0 \operatorname{sen} \omega + \zeta_0 \operatorname{cos} \omega). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

D'altra parte, se si calcolano direttamente le coordinate \bar{y}_i di un punto della superficie complementare \bar{S} delle S , si trova semplicemente

$$\bar{y}_i = y_i - x_0 x_i - \xi_0 \xi_i, \quad (34)$$

e queste, derivate rapporto ad u , v , w , dànno in effetto le (33).

La trasformazione (involutoria) ora considerata dei nostri sistemi tripli coniugati corrisponde alla trasformazione complementare dei sistemi di WEINGARTEN a curvatura nulla nello spazio ellittico (cfr. m. c. § 16). Più in generale, esistono per questi sistemi tripli coniugati trasformazioni B_k , ciò che vale del resto, come già abbiamo osservato al § 13, nel caso delle deformate del paraboloido generale (24*) a parametri immaginari.

Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.

MEMORIA I.

(Di LUIGI BIANCHI, a Pisa.)

PARTE SECONDA.

§ 16.

SISTEMA DIFFERENZIALE PEL CASO DEL PARABOLOIDE REALE ELLITTICO.

Il metodo che abbiamo sviluppato, dal § 11 in poi, per la ricerca dei sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloido a parametri puramente immaginari, può applicarsi egualmente nel caso dei paraboloidi *reali*. Soltanto qui i sistemi di WEINGARTEN di partenza dovrebbero assumersi negli spazî di curvatura costante, secondo le formole che ho stabilito in una Memoria del 1887 (*). Per brevità, sopprimendo qui la deduzione geometrica, si daranno senz'altro le equazioni differenziali da cui dipende il nostro problema.

Cominciamo dal caso del paraboloido reale ellittico

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 1,$$

fra i cui parametri p , q (positivi) porremo, come al § 87 Vol. III delle *Le-*

(*) *Sui sistemi di Weingarten negli spazî a curvatura costante* (Memorie dei Lincei, Serie 4.^a, vol. 4.^o).

zioni, la relazione

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1, \quad (35)$$

ciò che può sempre ottenersi, *intendendo per ora escluso il caso del paraboloido rotondo*, col sostituire al paraboloido generale dato un paraboloido simile.

Si sa che la ricerca delle superficie S applicabili sulla *regione reale* di questo paraboloido dipende dalla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \text{sen } \omega \cos \omega,$$

dove le linee (u, v) tracciano sulla S il sistema coniugato permanente, ridotto ai parametri isometrici u, v . Ora introduciamo una terza variabile w , e scriviamo per la funzione incognita $\omega = \omega(u, v, w)$ e per le due

$$A = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w}, \quad B = \frac{1}{\text{sen } \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w}$$

il seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} &= \text{sen } \omega \cos \omega \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w} &= A \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} = B \text{sen } \omega \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} B + \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} B \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} A - \text{sen } \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

In primo luogo ci conviene esaminare il grado di arbitrarietà nelle soluzioni di questo sistema. Per ciò (applicando il metodo generale che vale pure pei sistemi di tipo analogo già incontrati (I), (II) § 4, (III) § 8, ecc.) lo riduciamo alla forma lineare canonica, completamente integrabile del BOURLET (*), colla introduzione delle due nuove funzioni incognite

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial v};$$

(*) Vedi BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*. Annales de l'École Normale Supérieure, t. VIII, 3^{ème} Serie, Supplément 1891. I risultati stabiliti dal BOURLET

esso si scrive allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \omega_1, & \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \omega_2, & * \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega_2}{\partial v} + \operatorname{sen} \omega \cos \omega, & * & , & \frac{\partial \omega_1}{\partial w} = A \cos \omega \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial u} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial v}, & * & , & \frac{\partial \omega_2}{\partial w} = B \operatorname{sen} \omega \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= -B \omega_2 + \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}, & \frac{\partial A}{\partial v} &= B \omega_1, & * \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= -A \omega_2, & \frac{\partial B}{\partial v} &= A \omega_1 - \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial w}, & * \end{aligned}$$

ed ha appunto la forma lineare canonica. Per le funzioni ω, A, B la variabile w è parametrica, le u, v principali; per le due altre invece ω_1, ω_2 la v è parametrica e le u, w principali; inoltre le due espressioni delle derivate seconde miste doppiamente principali tratte dal sistema stesso coincidono, e però il sistema è completamente integrabile. Applicando il teorema fondamentale d'esistenza del BOURLET (l. c.), si vede dunque che esiste uno ed un solo sistema integrale $(\omega, A, B, \omega_1, \omega_2)$ tale che, essendo (u_0, v_0, w_0) un sistema iniziale di valori delle variabili, le tre funzioni ω, A, B si riducano per $u = u_0, v = v_0$ a funzioni prefissate arbitrarie (olomorfe) di w , e similmente ω_1, ω_2 si riducano per $u = u_0, w = w_0$ a due funzioni arbitrarie (olomorfe) di v . Il sistema (VI) ammette dunque una soluzione generale con cinque funzioni arbitrarie. Ma è da osservarsi che, siccome il sistema (VI) non cangia di forma cangiando comunque il parametro w , in realtà una delle tre funzioni arbitrarie di w è solo apparente, e così: *La soluzione generale del sistema (VI) dipende da quattro funzioni arbitrarie essenziali.*

Quanto alla integrazione effettiva del sistema (VI), nulla insegnano i metodi generali; ma qui appunto, come negli altri casi analoghi, i metodi di trasformazione, che svilupperemo fra poco, permettono di costruirne soluzioni con un numero qualunque di costanti arbitrarie.

in questa Memoria, in particolare il teorema fondamentale VIII a pag. 35, bastano per la maggior parte dei sistemi di equazioni alle derivate parziali che si presentano in problemi di geometria infinitesimale, senza ricorrere ai teoremi più generali, ma anche molto più complessi, dovuti a MÉRAY et RIQUIER (Vedi RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Paris, G. Villars, 1910).

Si osservi ancora che, se si pone per un momento

$$\Omega = B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2,$$

segue subito dalle (VI): $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial v} = 0$, e per ciò Ω è funzione della sola w , ma disponendo del parametro w si può senz'altro supporre $\Omega = \text{cost.}$ Dunque: *Per ogni terna (ω, A, B) di soluzioni del sistema (VI) possiamo porre la relazione quadratica*

$$B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w}\right)^2 = \text{cost.} \quad (36)$$

§ 17.

SISTEMA LINEARE OMOGENEO IN (x, ξ, η, ζ) .

Ad ogni terna (ω, A, B) di soluzioni delle (VI), fissate le costanti positive p, q che soddisfino la (35), si associa il seguente sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite (x, ξ, η, ζ) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\cos \omega}{\sqrt{q}} \cdot \eta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\sin \omega}{\sqrt{q}} \cdot \zeta, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \omega}{\partial w} \cdot \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\frac{\sin \omega}{\sqrt{p}} \cdot \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\cos \omega}{\sqrt{p}} \cdot \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial w} &= -\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \omega}{\partial w} x - \sqrt{p} A \cdot \eta + \sqrt{p} B \cdot \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\frac{\cos \omega}{\sqrt{q}} x + \frac{\sin \omega}{\sqrt{p}} \xi - \frac{\partial \omega}{\partial v} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial w} &= \sqrt{p} A \cdot \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= \frac{\sin \omega}{\sqrt{q}} x + \frac{\cos \omega}{\sqrt{p}} \xi + \frac{\partial \omega}{\partial u} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \sqrt{p} B \cdot \xi \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Questo è un sistema completamente integrabile, a causa delle (VI) e della relazione (35) fra p e q ; esso possiede l'integrale quadratico

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}, \quad (38)$$

onde segue più in generale che fra due quaderne qualunque (x, ξ, η, ζ) , $(x', \xi', \eta', \zeta')$ di soluzioni sussiste la relazione

$$x x' + \xi \xi' + \eta \eta' - \zeta \zeta' = \text{cost.} \quad (38^*)$$

Interpretando, analogamente al § 10, x, ξ, η, ζ quali coordinate omogenee di punto nello spazio, introduciamo la quadrica

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0, \quad (Q)$$

che è qui reale ed a punti ellittici. Se un punto (x, ξ, η, ζ) non giace sopra (Q), esso sarà esterno od interno a Q secondo che la costante del secondo membro in (38) è positiva, ovvero negativa. Normalizziamo anche qui le coordinate x, ξ, η, ζ col rendere

$$\begin{aligned} x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 &= 1 && \text{pei punti esterni a (Q)} \\ x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 &= -1 && \text{pei punti interni.} \end{aligned}$$

Ora, se consideriamo nuovamente un tetraedro coniugato $P_0 P_1 P_2 P_3$ rispetto alla quadrica (Q), essendo questa a punti ellittici, un vertice, supponiamo P_0 , sarà interno alla quadrica, gli altri tre esterni. Corrispondentemente ai quattro vertici, assumiamo quattro quaderne di soluzioni normalizzate

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \quad r = 0, 1, 2, 3$$

del sistema (37), che si riducano inizialmente (per $u = u_0, v = v_0, w = w_0$) alle rispettive coordinate dei quattro vertici P_r . Ne risulta che il determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 \sqrt{-1} & \xi_0 \sqrt{-1} & \eta_0 \sqrt{-1} & \zeta_0 \\ x_1 & \xi_1 & \eta_1 & -\zeta_1 \sqrt{-1} \\ x_2 & \xi_2 & \eta_2 & -\zeta_2 \sqrt{-1} \\ x_3 & \xi_3 & \eta_3 & -\zeta_3 \sqrt{-1} \end{vmatrix} \quad (39)$$

sarà ortogonale per linee, quindi anche per colonne, e sussisteranno in particolare le relazioni:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 + x_0^2 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= 1 + \xi_0^2 \\ x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= x_0 \xi_0. \end{aligned} \right\} \quad (39^*)$$

§ 18.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE PROPRIE
DEL PARABOLOIDE ELLITTICO.

Dopo questi preliminari, imitiamo l'analisi del § 11, e *tenendo dapprima fissa w* , consideriamo le tre espressioni differenziali

$$d y_i = q x_i d x_0 + p \xi_i d \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (40)$$

che constatiamo essere differenziali esatti. Esprimendoli invero per le variabili u, v , abbiamo dalle (37)

$$d y_i = \eta_0 (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \operatorname{sen} \omega \xi_i) d u + \zeta_0 (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i) d v,$$

e dalle (37) stesse risulta identicamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left[\eta_0 (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \operatorname{sen} \omega \xi_i) \right] &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\zeta_0 (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i) \right] = \\ &= \frac{\partial \eta_0}{\partial v} (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \operatorname{sen} \omega \xi_i) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i). \end{aligned}$$

Con quadrature si hanno dunque dalle (40) le tre funzioni y_1, y_2, y_3 che soddisfano alle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \operatorname{sen} \omega \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (40^*)$$

ed all'altra

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \eta_0}{\partial v} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\partial \log \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial y_i}{\partial v}. \quad (41)$$

Interpretando y_1, y_2, y_3 come coordinate ortogonali di un punto P , questo descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie S il cui elemento lineare, secondo le (40 e (39*)), ha l'espressione

$$d s^2 = q^2 (1 + x_0^2) d x_0^2 + 2 p q x_0 \xi_0 d x_0 d \xi_0 + p^2 (1 + \xi_0^2) d \xi_0^2. \quad (41^*)$$

Questa appartiene alla quadrica di equazioni parametriche

$$X = p \xi_0, \quad Y = q x_0, \quad Z = \frac{q x_0^2 + p \xi_0^2}{2},$$

vale a dire alla *regione reale* del paraboloido ellittico

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

Con calcoli analoghi a quelli eseguiti al § 11, si prova che sulla S il sistema (u, v) è isotermo-coniugato a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente della S .

Se ora facciamo variare w , le y_1, y_2, y_3 sono determinate dalle (40*) a meno di funzioni additive di w , e noi cerchiamo di determinarle in guisa che la famiglia (S) di deformate (proprie) del paraboloido ellittico appartenga ad un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Procedendo per questo come al § 12, dal confronto della (41) colla (α_1) § 1, siamo condotti a porre $H_1 = \eta_0, H_2 = \zeta_0$, poi dalle $(\beta_2), (\beta_3)$ § 1, confrontate colle (37), $H_3 = \xi_0$. Se ora nelle $(\alpha_2), (\alpha_3)$ § 1 poniamo $\theta = y_i$, e ricordiamo che, per la (35), $q - p = pq$, ne risulta concordemente

$$\frac{\partial y_i}{\partial w} = p^{\frac{3}{2}} \xi_0 \left(\sqrt{q} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A y_i + B \zeta_i \right),$$

e, riunendo questa alle (40*), si hanno le formole definitive:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \sin \omega \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\sqrt{q} \sin \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= p^{\frac{3}{2}} \xi_0 \left(\sqrt{q} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A \eta_i + B \zeta_i \right), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

dove non resta più altro che verificare le residue condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial y_i}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y_i}{\partial w} \right), \quad \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial y_i}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y_i}{\partial w} \right).$$

Per ciò basta tener conto delle identità seguenti, conseguenze delle (37):

$$\frac{\partial}{\partial w} (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \sin \omega \xi_i) = -p \sin \omega \left(\sqrt{p} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A \eta_i + B \zeta_i \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \operatorname{cos} \omega \xi_i) &= p \operatorname{cos} \omega \left(\sqrt{p} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A \eta_i + B \zeta_i \right) \\ p \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{q} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A \eta_i + B \zeta_i \right) &= A (\sqrt{q} \operatorname{cos} \omega x_i - \sqrt{p} \operatorname{sen} \omega \xi_i) \\ p \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{q} \frac{\partial \omega}{\partial w} x_i - A \eta_i + B \zeta_i \right) &= B (\sqrt{q} \operatorname{sen} \omega x_i + \sqrt{p} \operatorname{cos} \omega \xi_i). \end{aligned}$$

Le (42) definiscono dunque, per quadrature, un sistema triplo coniugato (u, v, w) , nel quale le $w = \text{cost.}$ sono tutte applicabili sulla regione reale del paraboloido ellittico, trovandosi d'altronde verificate le altre due proprietà caratteristiche b) c) della prefazione.

§ 19.

CLASSE PARTICOLARE DI QUESTI SISTEMI TRIPLI CONIUGATI.

Si ottiene una classe notevole degli attuali sistemi tripli coniugati, supponendo che nell'integrale quadratico (36) del sistema (VI) sia nulla la costante del secondo membro, che si abbia cioè:

$$A^2 - B^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial w} \right)^2.$$

In tal caso possiamo ridurre il sistema (VI) a forma più semplice, introducendo una nuova funzione incognita θ col porre p. e:

$$A = \operatorname{cosh} \theta \frac{\partial \omega}{\partial w}, \quad B = \operatorname{senh} \theta \frac{\partial \omega}{\partial w};$$

così il sistema (VI) diventa

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{cos} \omega \operatorname{senh} \theta, & \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \operatorname{sen} \omega \operatorname{cosh} \theta \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} &= \operatorname{cos} \omega \operatorname{cosh} \theta \frac{\partial \omega}{\partial w}, & \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} &= \operatorname{sen} \omega \operatorname{senh} \theta \frac{\partial \omega}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

Procedendo come al § 16, l'applicazione del teorema generale del BOURLET

(l. c.) dimostra che nella soluzione generale (ω, θ) del sistema (VII) entrano tre funzioni arbitrarie essenziali.

I particolari sistemi tripli coniugati, con deformate proprie del paraboloido ellittico, di cui ora ci occupiamo, godono di una proprietà geometrica tanto più interessante in quanto che questa si riproduce per classi di sistemi tripli coniugati con deformate delle quadriche *generali*. Per descrivere questa proprietà, si consideri nel sistema triplo coniugato una qualunque superficie S della serie $w = \text{cost.}$ (applicabile sul paraboloido) e la congruenza (C) formata dalle tangenti alle traiettorie (w) nei punti di S , e si osservi che le sviluppabili di questa congruenza tagliano S secondo il sistema coniugato permanente (u, v) . Ora si suppongano i raggi della congruenza (C) invariabilmente legati (al modo di BELTRAMI) alla superficie S nelle sue flessioni, e si avrà la proprietà in discorso:

Quando la S si distende sul paraboloido, i raggi della congruenza (C) vanno tutti ad appoggiarsi, dopo la deformazione, alla parabola focale del piano yz :

$$X = 0, \quad Y^2 = (q - p)(2Z - p).$$

Per dimostrarlo osserviamo, in primo luogo, che i coseni di direzione Y_1, Y_2, Y_3 della normale alla S , nella sua configurazione attuale, sono dati, per le (42), da

$$Y_i = \frac{\zeta_0 \eta_i - \eta_0 \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

D'altronde i coseni di direzione Z_1, Z_2, Z_3 delle tangenti alle traiettorie (w) sono *proporzionali*, per la (42₃), alle espressioni

$$Z_i \equiv \sqrt{q} x_i - \cosh \theta \eta_i + \sinh \theta \zeta_i.$$

Trattandosi ora di considerare la S deformabile, insieme alla congruenza (C) , conviene riferirsi ad elementi invariabili per flessione, e così sostituiremo alle variabili u, v le variabili x_0, ξ_0 , onde per le (40) avremo

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0} = q y_i \quad \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0} = p \xi_i.$$

Ed ora poniamo Z_1, Z_2, Z_3 sotto la forma

$$Z_i = l \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + m \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0} + n Y_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (43)$$

dove i coefficienti l, m, n , indipendenti dalle flessioni, saranno da calcolarsi dalle formole

$$\sqrt{q} x_i - \cosh \theta \eta_i + \sinh \theta \zeta_i = l q x_i + m p \xi_i + n \frac{\zeta_0 \eta_i - \eta_0 \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}},$$

ossia dalle altre

$$(l q - \sqrt{q}) x_i + m p \xi_i + \left(\frac{n \zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \cosh \theta \right) \eta_i - \\ - \left(\frac{n \eta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \sinh \theta \right) \zeta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Queste sono tre equazioni lineari omogenee nelle quattro quantità

$$l q - \sqrt{q}, \quad m p, \quad \frac{n \zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \cosh \theta, \quad \frac{n \eta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} + \sinh \theta,$$

e a queste tre equazioni soddisfano pure $x_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, a causa della ortogonalità del determinante (39), § 17. Dunque le quattro quantità scritte sono proporzionali a $x_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, dopo di che risultano subito le formole:

$$\left. \begin{aligned} l q &= \sqrt{q} + \frac{\zeta_0 \sinh \theta - \eta_0 \cosh \theta}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot x_0 \\ m p &= \frac{\zeta_0 \sinh \theta - \eta_0 \cosh \theta}{\zeta_0^2 - \eta_0^2} \cdot \xi_0 \\ n &= \frac{\eta_0 \sinh \theta - \zeta_0 \cosh \theta}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Ora, se facciamo assumere, per flessione, alla S la forma del paraboloido, possiamo porre nella configurazione finale:

$$y_1 = p \xi_0, \quad y_2 = q x_0, \quad y_3 = \frac{q x_0^2 + p \xi_0^2}{2} \\ Y_1 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_2 = \frac{x_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}}, \quad Y_3 = \frac{-1}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}},$$

e calcolando colle (43), (44) i valori di Z_1, Z_2, Z_3 , coll'omettere un fattore di proporzionalità, risulta:

$$Z_1 \equiv e^{-\theta} \xi_0, \quad Z_2 \equiv e^{-\theta} x_0 - \sqrt{q} (\zeta_0 - \eta_0), \\ Z_3 \equiv (\eta_0 \cosh \theta - \zeta_0 \sinh \theta) (\zeta_0 - \eta_0) - \sqrt{q} x_0 (\zeta_0 - \eta_0) - e^{-\theta}.$$

Le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque, preso sopra il raggio (x_0, ζ_0) della nostra congruenza, sono date da

$$X = y_1 + T Z_1, \quad Y = y_2 + T Z_2, \quad Z = y_3 + T Z_3,$$

dove T è un parametro. Volendo considerare il punto ove il raggio incontra il piano yz , bisogna dare a T il valore $T = -\frac{y_1}{Z_1} = -p e^\theta$, onde avremo per Y, Z

$$Y = (q - p) x_0 + p \sqrt{q} e^\theta (\zeta_0 - \eta_0),$$

$$Z = \frac{q x_0^2 + p \zeta_0^2}{2} + p \sqrt{q} e^\theta x_0 (\zeta_0 - \eta_0) + p e^\theta (\zeta_0 \sinh \theta - \eta_0 \cosh \theta) (\zeta_0 - \eta_0) + p.$$

Resta a verificare che questi valori di Y, Z soddisfano alla equazione della parabola focale

$$Y^2 = (q - p) (2Z - p).$$

Ora, essendo per la (35): $q - p = pq$, la identità da verificarsi risulta

$$p \left[\sqrt{q} x_0 + e^\theta (\zeta_0 - \eta_0) \right]^2 = q x_0^2 + p \zeta_0^2 + 2 p \sqrt{q} e^\theta x_0 (\zeta_0 - \eta_0) + 2 p e^\theta (\zeta_0 \sinh \theta - \eta_0 \cosh \theta) (\zeta_0 - \eta_0) + p,$$

e si risolve nell'altra

$$x_0^2 + \zeta_0^2 + \eta_0^2 - \zeta_0^2 = -1,$$

che effettivamente sussiste per l'ortogonalità del determinante (39). La proprietà enunciata resta così stabilita.

§ 20.

SISTEMA DIFFERENZIALE PER LE DEFORMATE IMPROPRIE DEL PARABOLOIDE ELLITTICO.

Si sa che, accanto alle superficie effettivamente applicabili sul paraboloido ellittico (regione reale), conviene anche considerare superficie *reali* applicabili sulla regione *ideale* del paraboloido stesso (Vedi Vol. III, §§ 42, 87).

Le prime diciamo deformate *proprie*, le seconde deformate *improprie* del paraboloido. Ora noi vogliamo dimostrare che anche colle deformate improprie del paraboloido ellittico possono costruirsi famiglie (S) appartenenti a sistemi tripli coniugati.

Sappiamo che la determinazione di queste deformate improprie dipende dalla equazione a derivate parziali (l. c. § 47):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sinh \theta \cosh \theta,$$

dove le linee (u, v) tracciano sopra S il sistema coniugato permanente. Introducendo ora una terza variabile w , il sistema differenziale da cui dipendono i nuovi sistemi tripli coniugati, si scriverà nella terna di funzioni incognite

$$\theta = \theta(u, v, w), \quad \bar{A} = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}, \quad \bar{B} = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w},$$

sotto la forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= \sinh \theta \cosh \theta \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= \bar{A} \cosh \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = \bar{B} \sinh \theta \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u} \bar{B} + \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \cdot \bar{B} \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{A}, \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{A} + \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII)}$$

Esso tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16, e le sue soluzioni $(\theta, \bar{A}, \bar{B})$ dipendono ancora da *quattro* funzioni arbitrarie essenziali (cf. § 16).

Il sistema (VIII) possiede l'integrale quadratico

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 = f(w),$$

che possiamo scrivere, disponendo del parametro w

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 = \text{cost.} \quad (45)$$

Ad ogni terna $(\theta, \bar{A}, \bar{B})$ di soluzioni delle (VIII) si coordina un sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, che corrisponde al sistema (37) § 17, e si scrive :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \bar{\eta}, & \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= \frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \bar{\zeta}, & \frac{\partial \bar{x}}{\partial w} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \theta}{\partial w} \bar{\xi} \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} &= \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \bar{\eta}, & \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} &= \frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} \bar{\zeta}, \\ & & \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial w} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \theta}{\partial w} \bar{x} + \sqrt{p} (\bar{A} \bar{\eta} + \bar{B} \bar{\zeta}) \\ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u} &= -\frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \bar{x} + \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \bar{\xi} - \frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{\zeta}, & \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \bar{\zeta}, & \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial w} &= \sqrt{p} \bar{A} \bar{\xi} \\ \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \bar{\eta}, & \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial v} &= -\frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \bar{x} + \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \bar{\xi} - \frac{\partial \theta}{\partial u} \bar{\eta}, & \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial w} &= \sqrt{p} \bar{B} \bar{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Questo è un sistema completamente integrabile, a causa delle (VIII), e possiede l'integrale quadratico

$$\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = \text{cost.}$$

Come al § 17, noi normalizziamo le quaderne $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ di soluzioni, per le quali non sia nulla la costante del secondo membro, col rendere

$$\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = \pm 1;$$

e se, interpretando nuovamente $\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ quali coordinate omogenee di punto, introduciamo la quadrica a punti ellittici

$$\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = 0, \quad (Q)$$

si presenterà il primo ovvero il secondo caso, secondo che il punto $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ è esterno ovvero interno alla quadrica (Q).

§ 21.

I CORRISPONDENTI SISTEMI TRIPLI CONIUGATI.

Consideriamo quattro quaderne $(\bar{x}_r, \bar{\xi}_r, \bar{\eta}_r, \bar{\zeta}_r)$ $r=0, 1, 2, 3$, integrali delle (46), i cui valori iniziali corrispondano ai quattro vertici $P_0 P_1 P_2 P_3$ di un tetraedro coniugato rispetto alla quadrica (Q), il vertice P_0 essendo interno e gli altri tre esterni (cf. § 17); avremo in conseguenza che il determinante:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_0 \sqrt{-1}, & \bar{\xi}_0, & \bar{\eta}_0 \sqrt{-1}, & \bar{\zeta}_0 \sqrt{-1} \\ \bar{x}_1, & -\bar{\xi}_1 \sqrt{-1}, & \bar{\eta}_1, & -\bar{\zeta}_1 \\ \bar{x}_2, & -\bar{\xi}_2 \sqrt{-1}, & \bar{\eta}_2, & \bar{\zeta}_2 \\ \bar{x}_3, & -\bar{\xi}_3 \sqrt{-1}, & \bar{\eta}_3, & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix} \quad (47)$$

sarà ortogonale, e sussisteranno in particolare le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 &= \bar{x}_0^2 + 1 \\ \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 &= \bar{\xi}_0^2 - 1 \\ \bar{x}_1 \bar{\xi}_1 + \bar{x}_2 \bar{\xi}_2 + \bar{x}_3 \bar{\xi}_3 &= \bar{x}_0 \bar{\xi}_0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Se resta fissa v , le tre espressioni

$$d\bar{y}_i = q \bar{x}_i d\bar{x}_0 - p \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (49)$$

sono differenziali esatti, poichè, calcolandole nelle variabili u, v , abbiamo

$$d\bar{y}_i = \bar{\eta}_0 (\sqrt{q} \cosh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \sinh \theta \bar{\xi}_i) du + \bar{\zeta}_0 (\sqrt{q} \sinh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \cosh \theta \bar{\xi}_i) dv,$$

ed è identicamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left[\bar{\eta}_0 (\sqrt{q} \cosh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \sinh \theta \bar{\xi}_i) \right] &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\bar{\zeta}_0 (\sqrt{q} \sinh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \cosh \theta \bar{\xi}_i) \right] = \\ &= \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} (\sqrt{q} \cosh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \sinh \theta \bar{\xi}_i) + \frac{\partial \bar{\zeta}_0}{\partial u} (\sqrt{q} \sinh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \cosh \theta \bar{\xi}_i). \end{aligned}$$

Le funzioni $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$, determinate per quadrature dalle (49), soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} = \bar{n}_0 (\sqrt{q} \cosh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \sinh \theta \bar{\xi}_i)$$

$$\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} = \bar{\zeta}_0 (\sqrt{q} \sinh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \cosh \theta \bar{\xi}_i),$$

ed all'altra

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \bar{n}_0}{\partial v} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} + \frac{\partial \log \bar{\zeta}_0}{\partial u} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v}.$$

Il punto \bar{P} di coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ descrive, al variare di u, v (restando fissa w), una superficie \bar{S} , il cui elemento è dato, per le (48), (49), da

$$d\bar{s}^2 = q^2 (1 + \bar{x}_0^2) d\bar{x}_0^2 - 2pq \bar{x}_0 \bar{\xi}_0 d\bar{x}_0 d\bar{\xi}_0 + p^2 (\bar{\xi}_0^2 - 1) d\bar{\xi}_0^2,$$

e si identifica col ds^2 del paraboloide ellittico calcolato dalla (41*) § 18 col porre

$$x_0 = \bar{x}_0, \quad \xi_0 = \bar{\xi}_0 \sqrt{-1};$$

dunque le nostre superficie \bar{S} sono applicabili sulla *regione ideale* del paraboloide ellittico

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

E nuovamente si ha che sulla \bar{S} il sistema (u, v) è isotermo-coniugato, a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente.

Dopo questi risultati, i rimanenti calcoli per costruire il sistema triplo coniugato procedono come al § 18, e si trovano così le formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} &= \bar{n}_0 (\sqrt{q} \cosh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \sinh \theta \bar{\xi}_i) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} &= \bar{\zeta}_0 (\sqrt{q} \sinh \theta \bar{x}_i - \sqrt{p} \cosh \theta \bar{\xi}_i) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial w} &= p^{\frac{3}{2}} \bar{\xi}_0 \left(\sqrt{q} \frac{\partial \theta}{\partial w} \bar{x}_i - \bar{A} \bar{n}_i - \bar{B} \bar{\zeta}_i \right), \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (50)$$

le quali definiscono per quadrature i sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle $w = \text{cost.}$ deformate improprie del paraboloide ellittico.

Merita qui ancora speciale attenzione il caso che, nell'integrale quadratico (45) del sistema (VIII), sia nulla la costante del secondo membro, cioè si abbia

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2.$$

La particolare classe di sistemi tripli coniugati così ottenuta corrisponde a quella del § 19, e la congruenza (C) delle tangenti alle traiettorie (w) nei punti di una deformata \bar{S} impropria del paraboloido, trasportata dalla \bar{S} sul paraboloido, viene a constare di raggi che si appoggiano alla parabola focale.

§ 22.

LE TRASFORMAZIONI B_σ PER LE SOLUZIONI DEI SISTEMI (VI), (VIII) (§§ 16, 20).

I sistemi differenziali (VI), (VIII), dalla cui integrazione dipende rispettivamente la ricerca dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle superficie $w = \text{cost.}$ applicabili sulla regione reale, ovvero sulla regione ideale, del paraboloido ellittico, possono legarsi fra loro mediante formole di trasformazione di BÄCKLUND B_σ nel modo seguente (*). Indicando con σ un angolo costante qualunque, *tale però che $\cos \sigma$ non sia nullo*, introduciamo le quattro espressioni

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \sigma \cos \omega \sinh \theta - \sin \sigma \sin \omega \cosh \theta \\ \beta &= \cos \sigma \sin \omega \cosh \theta + \sin \sigma \cos \omega \sinh \theta \\ \gamma &= \cos \sigma \cos \omega \cosh \theta - \sin \sigma \sin \omega \sinh \theta \\ \delta &= \cos \sigma \sin \omega \sinh \theta + \sin \sigma \cos \omega \cosh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Supposto ora che la terna di funzioni

$$\omega, \quad A = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w}, \quad B = \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w}$$

(*) I teoremi che sviluppiamo in questo paragrafo sono già contenuti nella mia Memoria del 1887, citata al § 16 (Vedi n.º 18 della detta Memoria). Nuova ne è qui l'interpretazione geometrica riguardo alle deformate del paraboloido ellittico.

soddisfi alle (VI) § 16, consideriamo per la funzione incognita $\theta = \theta(u, v, w)$ il seguente sistema di equazioni differenziali simultanee :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \beta - \frac{\partial \omega}{\partial v}, & \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} - \alpha \\ \cos \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} &= \sin \sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} + A \cosh \theta - B \sinh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Tenendo conto delle (VI), si vede che queste formano, rispetto a θ , un sistema completamente integrabile, sicchè la soluzione generale θ contiene (oltre σ) una costante arbitraria. Ora, se poniamo

$$\bar{A} = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w}, \quad \bar{B} = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w},$$

dalla (52), derivando rapporto ad u, v , seguono le formole:

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma \bar{A} &= \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial w} + \delta A - \beta B \\ \cos \sigma \bar{B} &= \sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial w} - \alpha A + \gamma B. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Con queste formole (52), (53) si constata subito che la terna $(\theta, \bar{A}, \bar{B})$ viene sempre a soddisfare al sistema (VIII) § 20. Inoltre, sommando i quadrati della (53) e sottraendovi il quadrato della (52), si trova la formola importante :

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 = B^2 - A^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial w} \right)^2. \quad (54)$$

Notiamo poi che, se si risolvono rispetto ad $A, B, \frac{\partial \omega}{\partial w}$ le tre equazioni lineari (53) e (52), risultano le altre :

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma A &= \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} - \delta \bar{A} + \alpha \bar{B} \\ \cos \sigma B &= \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} - \beta \bar{A} + \gamma \bar{B} \\ \cos \sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} &= -\sin \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} + \bar{A} \cos \omega + \bar{B} \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Dopo ciò, se supponiamo ora data la terna di funzioni $(\theta, \bar{A}, \bar{B})$ che

soddisfi alle (VIII), il sistema simultaneo per ω

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \alpha + \frac{\partial \theta}{\partial v}, & \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \beta - \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \cos \sigma \frac{\partial \omega}{\partial w} &= -\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} + \bar{A} \cos \omega + \bar{B} \operatorname{sen} \omega \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

risulta illimitatamente integrabile, e le tre funzioni

$$\omega, \quad A = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w}, \quad B = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w}$$

vengono a soddisfare alle (VI) § 16.

In fine si osservi che i sistemi differenziali (52) per θ , o (56) per ω , ove si assumano rispettivamente per funzioni incognite $\operatorname{tgh} \frac{\theta}{2}$, o $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, prendono la forma di equazioni ai differenziali totali del tipo di RICCATI (completamente integrabili). Per la ricerca delle soluzioni dei sistemi (VI) e (VIII), possono quindi applicarsi i metodi di *integrazione alternata*, dove, appena integrata la prima equazione di RICCATI, l'applicazione indefinitamente ripetuta del processo richiede sole quadrature. Ma anche le quadrature possono risparmiarsi, facendo uso del *teorema di permutabilità* le cui formole sono facili a stabilirsi (*).

§ 23.

LE TRASFORMAZIONI B_{σ} PER LE QUADERNE (x, ξ, η, ζ) , $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$.

Abbiasi una qualunque coppia (ω, θ) di soluzioni dei rispettivi sistemi differenziali (VI), (VIII), legate fra loro dalle formole (52) di una trasformazione B_{σ} . Supponiamo inoltre che, corrispondentemente ad ω , sia nota una quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni delle equazioni differenziali (37) § 17, e mostriamo come ne risulti determinata biunivocamente una corrispondente quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ di soluzioni delle (46) § 20. Per questo introduciamo la co-

(*) Le formole in questione sono date al § 8 della mia Memoria: *Sulla deformazione dei paraboloidi*, Annali di matematica, t. IX, Serie 3^a, 1903.

stante k definita dalla formola

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} - \cos^2 \sigma = \frac{1}{q} + \sin^2 \sigma, \quad (57)$$

e poniamo

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{k} \left(-\sin \sigma x - \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \eta + \frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \zeta \right) \\ \bar{\xi} &= \sqrt{k} \left(-\cos \sigma \xi - \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \eta + \frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} \zeta \right) \\ \bar{\eta} &= \sqrt{k} \left(\frac{\cos \omega}{\sqrt{q}} x - \frac{\sin \omega}{\sqrt{p}} \xi - \delta \eta + \beta \zeta \right) \\ \bar{\zeta} &= \sqrt{k} \left(\frac{\sin \omega}{\sqrt{q}} x + \frac{\cos \omega}{\sqrt{p}} \xi + \alpha \eta - \gamma \zeta \right). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

La nuova quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ soddisfa, come subito si verifica, alle (46) § 20; inoltre fra le due quaderne corrispondenti sussiste l'identità

$$\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2 = x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2. \quad (59)$$

Risolviendo le equazioni lineari (58) rispetto alla quaderna x, ξ, η, ζ , si hanno le formole inverse

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{k} \left(-\sin \sigma \bar{x} + \frac{\cos \omega}{\sqrt{q}} \bar{\eta} + \frac{\sin \omega}{\sqrt{q}} \bar{\zeta} \right) \\ \xi &= \sqrt{k} \left(\cos \sigma \bar{\xi} - \frac{\sin \omega}{\sqrt{p}} \bar{\eta} + \frac{\cos \omega}{\sqrt{p}} \bar{\zeta} \right) \\ \eta &= \sqrt{k} \left(-\frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \bar{x} + \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \bar{\xi} - \delta \bar{\eta} + \alpha \bar{\zeta} \right) \\ \zeta &= \sqrt{k} \left(-\frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \bar{x} + \frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} \bar{\xi} - \beta \bar{\eta} + \gamma \bar{\zeta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

e queste dimostrano reciprocamente che ad una quaderna $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ di soluzioni delle (46) corrisponde una ed una sola quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni delle (37).

Dalla identità (59) segue poi che se (x, ξ, η, ζ) , $(x', \xi', \eta', \zeta')$ sono due quaderne qualunque di soluzioni delle (37), e con $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, $(\bar{x}', \bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}')$ si indicano le corrispondenti delle (46), si ha identicamente

$$\bar{x} \bar{x}' - \bar{\xi} \bar{\xi}' + \bar{\eta} \bar{\eta}' + \bar{\zeta} \bar{\zeta}' = x x' + \xi \xi' + \eta \eta' - \zeta \zeta';$$

dunque: *Un tetraedro coniugato di soluzioni delle (37) $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ si muta, colle formole (58), in un tetraedro coniugato di soluzioni $(\bar{x}_r, \bar{\xi}_r, \bar{\eta}_r, \bar{\zeta}_r)$ delle (46).*

§ 24.

LE TRASFORMAZIONI B_k PEI SISTEMI TRIPLI CONIUGATI.

Dopo tutti questi preparativi, possiamo venire all'oggetto finale della nostra ricerca e dimostrare il teorema: *Le trasformazioni B_k del § 22, per le soluzioni ω, θ dei sistemi differenziali (VI), (VIII), si traducono geometricamente in trasformazioni asintotiche B_k pei sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformate del paraboloido ellittico; esse conducono dai sistemi con deformate proprie a sistemi con deformate improprie, e viceversa. Le coppie di deformate corrispondenti S, \bar{S} sono legate fra loro da una B_k della teoria generale, la costante k avendo il valore assegnato dalla formola (57).*

Il primo sistema (S), con deformate proprie, sia definito (a meno di una traslazione nello spazio) dalle formole (42) § 18, corrispondentemente ad una soluzione ω delle (VI) e ad un tetraedro coniugato di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ delle (37). Colle formole (58) del paragrafo precedente, calcoliamo un corrispondente tetraedro coniugato di soluzioni $(\bar{x}_r, \bar{\xi}_r, \bar{\eta}_r, \bar{\zeta}_r)$ delle (46), essendo θ legato dalle formole della trasformazione B_k del § 22. Colle formole (50) del § 21, noi determiniamo (a meno di una traslazione) il corrispondente sistema triplo coniugato con una serie (\bar{S}) di deformate improprie del paraboloido ellittico. Dimostriamo che, supposta fissata la posizione di (S) nello spazio, si può determinare in uno ed in un sol modo quella di (\bar{S}) in guisa che sia soddisfatta la condizione seguente: *Le congiungenti coppie di punti corrispondenti di due superficie corrispondenti S, \bar{S} formino una congruenza W , di guisa che appunto S, \bar{S} risulteranno legate fra loro da una B_k della teoria generale.*

Intanto si osservi che, sostituendo nelle due prime (50) per $\bar{x}_i, \bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i$ i valori tratti dalle (58), abbiamo le formole:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} &= \sqrt{k} \bar{\eta}_i \left(-\sqrt{q} \operatorname{sen} \sigma \cosh \theta x_i + \sqrt{p} \cos \sigma \operatorname{senh} \theta \xi_i - \eta_i \right) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} &= \sqrt{k} \bar{\zeta}_i \left(-\sqrt{q} \operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \theta x_i + \sqrt{p} \cos \sigma \cosh \theta \xi_i + \zeta_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Se la proprietà indicata sussiste, deve essere possibile determinare due incognite l, m per modo che sussistano le relazioni

$$\bar{y}_i = y_i + l \frac{\partial y_i}{\partial u} + m \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ovvero per le (42)

$$\bar{y}_i = y_i + l \eta_0 (\sqrt{q} \cos \omega x_i - \sqrt{p} \sin \omega \xi_i) + m \zeta_0 (\sqrt{q} \sin \omega x_i + \sqrt{p} \cos \omega \xi_i).$$

Se deriviamo queste rapporto ad u, v (colle (37) § 17 e le (42) § 18), dal confronto dei coefficienti di η_i, ζ_i con quelli corrispondenti nelle (61) deduciamo

$$l = -\sqrt{k} \frac{\bar{\eta}_0}{\eta_0}, \quad m = -\sqrt{k} \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0},$$

e così per le formole richieste

$$\bar{y}_i = y_i - \sqrt{k} \left(\frac{\bar{\eta}_0}{\eta_0} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta_0} \frac{\partial y_i}{\partial v} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (62)$$

ovvero, esprimendo tutto per gli elementi relativi al primo sistema (S):

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_i = y_i - k x_i \left[x_0 - \sqrt{q} \sin \sigma (\eta_0 \cosh \theta - \zeta_0 \sinh \theta) \right] \\ - k \zeta_i \left[\zeta_0 + \sqrt{p} \cos \sigma (\eta_0 \sinh \theta - \zeta_0 \cosh \theta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Se si formano le derivate rapporto ad u, v, w di queste tre espressioni si verifica che esse riescono identiche alle derivate delle \bar{y}_i , calcolate dalle (50) § 21. Concludiamo che, mediante le formole (62) o (63), il sistema triplo coniugato (\bar{S}) viene collocato nello spazio nella posizione voluta rispetto al sistema (S).

§ 25.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE PROPRIE
DEL PARABOLOIDE IPERBOLICO:

Passiamo ora a trattare dei sistemi tripli coniugati contenenti una serie di deformate proprie, ovvero improprie, del paraboloido iperbolico

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 1,$$

fra i cui parametri p, q positivi porremo (Vol. III, § 87) la relazione

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1. \quad (64)$$

L'analogia della ricerca con quella già eseguita pel caso del paraboloido ellittico ci permette qui di limitarci soltanto ad indicare i punti principali della ricerca.

Cominciando dal caso delle deformate *proprie*, ricordiamo (Vol. III, § 87) che la loro determinazione dipende dalla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sinh \theta \cosh \theta.$$

Introducendo ora una terza variabile w , la determinazione dei sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle $w = \text{cost.}$ applicabili sulla regione reale del detto paraboloido dipenderà dal seguente sistema differenziale nella terna (θ, A, B) di funzioni incognite:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} &= \sinh \theta \cosh \theta \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= A \cosh \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = B \sinh \theta \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} B - \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} B \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} A + \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w}. \end{aligned} \right\} \quad (IX)$$

Esso tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16 ed ammette soluzioni (θ, A, B) dipendenti da quattro funzioni arbitrarie essenziali; inoltre possiede l'integrale quadratico

$$A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = F(w),$$

che al solito, disponendo del parametro w , può scriversi più semplicemente

$$A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 = \text{cost.} \tag{65}$$

Al sistema (IX), supposto soddisfatto da θ, A, B , si coordina il seguente sistema lineare omogeneo in quattro funzioni incognite x, ξ, η, ζ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} \eta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} \zeta, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \frac{\partial \theta}{\partial w} \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial w} &= -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \frac{\partial \theta}{\partial w} x - \sqrt{q} A \eta + \sqrt{q} B \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} x - \frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \xi + \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial w} &= \sqrt{q} A \cdot \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= \frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} x + \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \xi + \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \sqrt{q} B \cdot \xi, \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

che è un sistema completamente integrabile, per le (IX), e possiede l'integrale quadratico:

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}$$

Normalizziamo, come al § 17, ogni quaderna (x, ξ, η, ζ) , per la quale non sia nulla la costante del secondo membro, col rendere

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1, \quad \text{ovvero} \quad x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1,$$

secondo che il punto di coordinate omogenee (x, ξ, η, ζ) è esterno o interno alla quadrica a punti ellittici

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

In fine prendiamo anche qui una quaderna di soluzioni

$$(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r) \quad r = 0, 1, 2, 3$$

corrispondente ad un tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ coniugato rispetto a questa quadrica, di cui sia P_0 il vertice interno.

Se teniamo fissa w , le tre espressioni

$$d y_i = p x_i d x_0 - q \xi_i d \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono tre differenziali esatti e la superficie S , descritta dal punto P di coordinate y_1, y_2, y_3 al variare di u, v , ha l'elemento lineare

$$d s^2 = p^2 (1 + x_0^2) d x_0^2 - 2 p q x_0 \xi_0 d x_0 d \xi_0 + q^2 (1 + \xi_0^2) d \xi_0^2,$$

che appartiene alla quadrica

$$X = p x_0 \quad Y = q \xi_0 \quad Z = \frac{p x_0^2 - q \xi_0^2}{2},$$

cioè alla regione reale del paraboloide iperbolico

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2 Z.$$

Inoltre sulla S il sistema (u, v) è isotermo-coniugato, a parametri isometrici, e coincide col sistema coniugato permanente.

Facendo ora variare w , si possono situare le deformate S del paraboloide iperbolico nello spazio in guisa che la serie (S) appartenga ad un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Per questo basta procedere come al § 18, e si ottengono le formole definitive:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\sqrt{p} \cosh \theta x_i - \sqrt{q} \sinh \theta \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\sqrt{p} \sinh \theta x_i - \sqrt{q} \cosh \theta \xi_i) \quad (i = 1, 2, 3). \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= q^{\frac{3}{2}} \zeta_0 \left(\sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial w} x_i + A \eta_i - B \zeta_i \right) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Le condizioni d'integrabilità per le (67) sono identicamente soddisfatte, ed abbiamo così determinato per quadrature il sistema triplo coniugato richiesto (u, v, w) , nel quale le superficie S della serie $w = \text{cost.}$ sono deformate proprie del paraboloide iperbolico.

§ 26.

CLASSE PARTICOLARE ASSOCIATA AD UNA PARABOLA FOCALE.

Consideriamo quella classe particolare degli attuali sistemi tripli coniugati, per la quale è nulla la costante del secondo membro nell'integrale quadratico (65), cioè

$$B^2 - A^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2.$$

Indicando allora con φ una nuova funzione incognita, potremo porre p. es.

$$B = \cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad A = \sinh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w},$$

(l'altra ipotesi $B = -\cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}$, $A = \sinh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial v}$ conducendo a formole del tutto simili), dopo di che le equazioni (IX) si riducono semplicemente al seguente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \sinh \theta \sinh \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \cosh \theta \cosh \varphi \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= \cosh \theta \sinh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= \sinh \theta \cosh \varphi \frac{\partial \theta}{\partial w}, \end{aligned} \right\} \text{(IX*)}$$

che possiede soluzioni dipendenti da tre funzioni arbitrarie essenziali.

Come al § 19, consideriamo la congruenza (C), formata dalle tangenti alle traiettorie (w) nei punti di una superficie S , come invariabilmente legata alle flessioni di S e dimostriamo: *Se la superficie S si applica sul paraboloide iperbolico, i raggi della congruenza (C) vengono tutti ad appoggiarsi alla parabola focale:*

$$Y = 0, \quad X^2 = (p + q)(2Z + q).$$

Cominciamo dall'osservare che, secondo le (67), i coseni di direzione Y_1, Y_2, Y_3 della normale alla S sono dati da

$$Y_i = \frac{\zeta_0 \eta_i - \eta_0 \zeta_i}{\sqrt{\zeta_0^2 - \eta_0^2}} \quad (i = 1, 2, 3),$$

mentre i coseni di direzione Z_1, Z_2, Z_3 delle tangenti alle traiettorie (n) sono proporzionali, per la (67₃), alle espressioni

$$Z_i \equiv \sqrt{p} x_i + r_i \sinh \varphi - \zeta_i \cosh \varphi.$$

Poniamo questi valori sotto la forma invariabile per flessione (cf. § 19)

$$Z_i = l \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + m \frac{\partial y_i}{\partial \xi_0} + n Y_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

e troveremo, procedendo nello stesso modo come al § 19:

$$\begin{aligned} lp &= \sqrt{p} + \frac{r_0 \sinh \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi}{\zeta_0^2 - r_0^2} \cdot x_0 \\ -mq &= \frac{r_0 \sinh \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi}{\zeta_0^2 - r_0^2} \cdot \xi_0 \\ n &= \frac{r_0 \cosh \varphi + \zeta_0 \sinh \varphi}{\sqrt{\zeta_0^2 - r_0^2}}. \end{aligned}$$

Se diamo alla S la forma del paraboloide iperbolico, ponendo

$$y_1 = p x_0, \quad y_2 = q \xi_0, \quad y_3 = \frac{p x_0^2 - q \xi_0^2}{2},$$

avremo

$$Y_1 = -\frac{x_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - r_0^2}}, \quad Y_2 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\zeta_0^2 - r_0^2}}, \quad Y_3 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_0^2 - r_0^2}},$$

ed omettendo in Z_1, Z_2, Z_3 un fattore di proporzionalità si trova

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv \sqrt{p} (\zeta_0 + r_0) + e^{-\varphi} x_0, \quad Z_2 \equiv -e^{-\varphi} \xi_0 \\ Z_3 &\equiv \sqrt{p} x_0 (\zeta_0 + r_0) + (r_0 \sinh \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi) (\zeta_0 + r_0) - e^{-\varphi}. \end{aligned}$$

Le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque del raggio (x_0, ξ_0) della nostra congruenza si scrivono

$$X = y_1 + T Z_1, \quad Y = y_2 + T Z_2, \quad Z = y_3 + T Z_3,$$

ed al punto d'incontro del raggio col piano XZ corrisponde pel parametro T il valore

$$T = -\frac{y_2}{Z_2} = q e^{\varphi}.$$

Dopo ciò i valori di X, Z diventano

$$X = (p + q) x_0 + q \sqrt{p} e^{\varphi} (\zeta_0 + \tau_0)$$

$$Z = \frac{p x_0^2 - q \zeta_0^2}{2} + q \sqrt{p} e^{\varphi} x_0 (\zeta_0 + \tau_0) + q e^{\varphi} (\tau_0 \sinh \varphi + \zeta_0 \cosh \varphi) (\zeta_0 + \tau_0) - q,$$

e resta solo da verificare che questi soddisfano alla equazione della parabola focale

$$X^2 = (p + q) (2Z + q).$$

Tenendo conto della relazione (64) fra $p, q : p + q = pq$, la relazione ora scritta si cangia nella identità

$$x_0^2 + \zeta_0^2 + \tau_0^2 - \zeta_0^2 = -1$$

e la proposizione è dimostrata.

§ 27.

LE TRASFORMAZIONI B_k DEI NUOVI SISTEMI TRIPLI CONIUGATI.

Indicando con σ una costante arbitraria, con θ' una nuova funzione di (u, v, w) , pongasi

$$\begin{aligned} \alpha &= \cosh \sigma \sinh \theta \sinh \theta' + \sinh \sigma \cosh \theta \cosh \theta' \\ \beta &= \cosh \sigma \sinh \theta \cosh \theta' + \sinh \sigma \cosh \theta \sinh \theta' \\ \gamma &= \cosh \sigma \cosh \theta \sinh \theta' + \sinh \sigma \sinh \theta \cosh \theta' \\ \delta &= \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \theta' + \sinh \sigma \sinh \theta \sinh \theta', \end{aligned}$$

e si consideri il sistema di equazioni simultanee per θ' :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\beta, & \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial w} &= \gamma \\ \frac{\partial \theta'}{\partial w} + \operatorname{tgh} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} &= \frac{1}{\cosh \sigma} (A \cosh \theta' + B \sinh \theta'). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

A causa delle (IX), questo è un sistema completamente integrabile per θ' , e la soluzione generale contiene (oltre σ) una seconda costante arbitraria.

Ora se poniamo

$$A' = \frac{1}{\cosh \theta'} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial w}, \quad B' = \frac{1}{\sinh \theta'} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial v \partial w},$$

troviamo facilmente dalle (68)

$$\left. \begin{aligned} \cosh \sigma \cdot A' &= -\alpha A - \beta B - \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \cosh \sigma \cdot B' &= \gamma A + \delta B + \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Da queste formole risulta, con breve calcolo, che la terna di funzioni (θ', A', B') soddisfa nuovamente alle (IX). Anche è da osservarsi che, quando e sottraendo le (69), risulta

$$A'^2 - B'^2 + \left(\frac{\partial \theta'}{\partial w}\right)^2 = A^2 - B^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2, \quad (70)$$

cioè, nel passaggio da una terna (θ, A, B) di soluzioni delle (IX) ad una terna trasformata, la costante del secondo membro nell'integrale quadratico (65) resta invariata.

Siano ora θ, θ' due tali soluzioni delle (IX), legate fra loro dalle (68), che diremo le formole della trasformazione B_σ , e sia nota, in corrispondenza alla θ , una quaderna (x, ξ, η, ζ) di soluzioni delle (66). In analogia ai risultati del § 23, ne dedurremo una quaderna *corrispondente* $(x', \xi', \eta', \zeta')$ relativa alla funzione θ' , colle seguenti formole di sostituzione lineare. Posto

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \sinh^2 \sigma = \cosh^2 \sigma - \frac{1}{q}, \quad (71)$$

avremo

$$\left. \begin{aligned} x' &= \sqrt{k} \left(-\sinh \sigma \cdot x + \frac{\cosh \theta'}{\sqrt{p}} \eta + \frac{\sinh \theta'}{\sqrt{p}} \zeta \right) \\ \xi' &= \sqrt{k} \left(\cosh \sigma \cdot \xi + \frac{\sinh \theta'}{\sqrt{q}} \eta + \frac{\cosh \theta'}{\sqrt{q}} \zeta \right) \\ \eta' &= -\sqrt{k} \left(\frac{\cosh \theta}{\sqrt{p}} x + \frac{\sinh \theta}{\sqrt{q}} \xi + \alpha \eta + \beta \zeta \right) \\ \zeta' &= \sqrt{k} \left(\frac{\sinh \theta}{\sqrt{p}} x + \frac{\cosh \theta}{\sqrt{q}} \xi + \gamma \eta + \delta \zeta \right), \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

e sarà identicamente

$$x'^2 + \xi'^2 + \eta'^2 - \zeta'^2 = x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2.$$

Ne segue che quattro quaderne $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$, appartenenti ad un tetraedro coniugato si cangiano, colle (72), in altre quattro quaderne $(x'_r, \xi'_r, \eta'_r, \zeta'_r)$ della medesima specie. Ora siano $(S), (S')$ le corrispondenti famiglie di deformate proprie del paraboloido iperbolico appartenenti a sistemi tripli coniugati (u, v, w) , dei quali il primo è definito, a meno di una traslazione nello spazio, dalle formole (67), ed il secondo dalle formole analoghe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y'_i}{\partial u} &= \eta'_0 (\sqrt{p} \cosh \theta' x'_i - \sqrt{q} \sinh \theta' \zeta'_i) \\ \frac{\partial y'_i}{\partial v} &= \zeta'_0 (\sqrt{p} \sinh \theta' x'_i - \sqrt{q} \cosh \theta' \zeta'_i) \quad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial y'_i}{\partial w} &= q^{\frac{3}{2}} \zeta'_0 \left(\sqrt{p} \frac{\partial \theta'}{\partial w} x'_i + A' \eta'_i - B' \zeta'_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Si tratta anche qui di dimostrare che le famiglie $(S), (S')$ possono collocarsi nello spazio in tale posizione relativa che due superficie corrispondenti qualunque S, S' risultino legate fra loro da una trasformazione asintotica B_* . Per questo, procedendo come al § 24, cerchiamo di soddisfare alle (73) ponendo

$$y'_i = y_i + l \frac{\partial y_i}{\partial u} + m \frac{\partial y_i}{\partial v} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (74)$$

con valori convenienti di l, m . Le due prime (73), introducendovi i valori (72) si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{\partial y'_i}{\partial u} &= \sqrt{k} \eta'_0 (-\sqrt{p} \sinh \sigma \cosh \theta' x_i - \sqrt{q} \cosh \sigma \sinh \theta' \zeta_i + \eta_i) \\ \frac{\partial y'_i}{\partial v} &= -\sqrt{k} \zeta'_0 (\sqrt{p} \sinh \sigma \sinh \theta' x_i + \sqrt{q} \cosh \sigma \cosh \theta' \xi_i + \zeta_i), \end{aligned}$$

e paragonando i coefficienti di η_i, ζ_i in queste coi corrispondenti che risultano dalla derivazione diretta delle (74), si trova

$$l = \sqrt{k} \frac{\eta'_0}{\eta_0}, \quad m = \sqrt{k} \frac{\zeta'_0}{\zeta_0},$$

e quindi

$$y'_i = y_i + \sqrt{k} \left(\frac{\eta'_0}{\eta_0} \frac{\partial y_i}{\partial u} + \frac{\zeta'_0}{\zeta_0} \frac{\partial y_i}{\partial v} \right),$$

le quali formole si mutano nelle definitive :

$$\left. \begin{aligned} y'_i &= y_i - k x_i \left[x_0 + \sqrt{p} \operatorname{senh} \sigma (\eta_0 \cosh \theta' + \zeta_0 \operatorname{senh} \theta') \right] \\ &- k \zeta_i \left[\zeta_0 + \sqrt{q} \cosh \sigma (\eta_0 \operatorname{senh} \theta' + \zeta_0 \cosh \theta') \right]. \end{aligned} \right\} \quad (74^*)$$

È facile constatare che, mediante queste formole, le due famiglie (S), (S') vengono ad acquistare effettivamente nello spazio la posizione voluta.

§ 28.

§ SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE IMPROPRIE DEL PARABOLOIDE IPERBOLICO.

Si sa che le deformate improprie del paraboloido iperbolico dipendono dalla equazione stessa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

che si presenta per le superficie pseudosferiche ordinarie (cfr. Vol. III, § 87); dimostreremo ora che i sistemi tripli coniugati con una serie di tali deformate dipendono dalle equazioni che caratterizzano i sistemi pseudosferici di WEINGARTEN. Queste sono le (I) § 4, ove essendo R costante, prenderemo $R=1$. Indichino, come prima, p, q due costanti positive legate fra loro dalla relazione (64), e si consideri nella quaderna (x, ξ, η, ζ) di funzioni incognite il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{p}} \eta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{p}} \zeta, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \theta}{\partial w} \xi - \sqrt{p} A \eta - \sqrt{p} B \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{q}} \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{q}} \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial w} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \frac{\partial \theta}{\partial w} x \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{p}} x + \frac{\cos \theta}{\sqrt{q}} \xi + \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial w} &= \sqrt{p} A \cdot x \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= -\frac{\cos \theta}{\sqrt{p}} x + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{q}} \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \sqrt{p} B \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Il sistema è illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{cost.}$$

Normalizziamo le quaderne (x, ξ, η, ζ) di soluzioni (per le quali non è nulla la costante del secondo membro) col rendere al solito

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \pm 1,$$

ed assumiamo quattro quaderne $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ di soluzioni delle (75) corrispondenti ad un tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ coniugato rispetto alla quadrica

$$x^2 - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

dei cui quattro vertici P_0 sia l'interno; avremo in particolare (cf. § 21)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= x_0^2 + 1 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= \xi_0^2 - 1 \\ x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= x_0 \xi_0. \end{aligned}$$

Ora, se manteniamo fissa v , le tre espressioni

$$\dot{d} y_i = p x_i d x_0 + q \xi_i d \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono differenziali esatti, ed il punto P di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3 descrive, al variare di u, v , una superficie S il cui ds^2 è dato da

$$ds^2 = p^2 (x_0^2 + 1) dx_0^2 + 2pqx_0 \xi_0 dx_0 d\xi_0 + q^2 (\xi_0^2 - 1) d\xi_0^2,$$

ed appartiene alla quadrica di equazioni parametriche

$$X = p x_0, \quad Y = q \xi_0, \quad Z = \frac{p x_0^2 + q \xi_0^2}{2},$$

cioè alla regione *ideale* del paraboloido iperbolico (reale)

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

Infine, facendo variare v , otteniamo una famiglia (S) appartenente ad un sistema triplo coniugato, purchè si determini convenientemente, col so-

lito processo, $\frac{\partial y_i}{\partial v}$; così troviamo le formole definitive

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \eta_0 (\sqrt{q} \cos \theta \xi_i - \sqrt{p} \sin \theta x_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\sqrt{q} \sin \theta \xi_i + \sqrt{p} \cos \theta x_i) \quad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= p^{\frac{3}{2}} x_0 \left(\sqrt{q} \frac{\partial \eta}{\partial u} \xi_i - A \eta_i - B \zeta_i \right). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Queste definiscono, a meno di una traslazione, gli attuali sistemi tripli coniugati (u, v, w) colle superficie S della serie $w = \text{cost.}$ applicabili sulla regione ideale del paraboloido iperbolico.

Aggiungiamo infine, senza sviluppare i calcoli relativi, che le trasformazioni B_* di BÄCKLUND dei sistemi pseudosferici di WEINGARTEN si traducono in corrispondenti trasformazioni asintotiche B_k degli attuali sistemi tripli coniugati.

§ 29.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DEL PARABOLOIDE ROTONDO REALE.

Ritorniamo sui risultati dei §§ 16-21, relativi ai sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloido ellittico generale, e completiamoli colla considerazione del caso del paraboloido rotondo che sfugge all'analisi ivi sviluppata.

Le deformate (proprie) di quest'ultimo paraboloido dipendono dall'equazione a derivate parziali: $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$, e la ricerca dei corrispondenti sistemi tripli coniugati dal seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} &= A \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial v} = B \sin \omega \\ \frac{\partial A}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} B, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} B \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} A, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} A. \end{aligned} \right\} \quad (X)$$

che tiene qui il luogo del sistema (VI) § 16 e verrà ridotto più oltre a forme più semplici (§ 30); esso possiede l'integrale quadratico

$$A^2 - B^2 = f(w),$$

che si può anche scrivere, disponendo del parametro w :

$$A^2 - B^2 = c \quad (\text{costante}). \tag{77}$$

Supposte soddisfatte le (X), consideriamo nella quaderna (x, ξ, η, ζ) di funzioni incognite il sistema lineare omogeneo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos \omega \eta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \sin \omega \zeta, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\partial \omega}{\partial w} \xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\sin \omega \eta, & \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \cos \omega \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial w} &= -\frac{\partial \omega}{\partial w} x - A \eta + B \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\cos \omega x + \sin \omega \xi - \frac{\partial \omega}{\partial v} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \zeta, & \frac{\partial \eta}{\partial w} &= A \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= \sin \omega x + \cos \omega \xi + \frac{\partial \omega}{\partial u} \eta, & \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= B \xi, \end{aligned} \right\} \tag{78}$$

che si ottiene dalle (37) § 17 col porvi $p = q = 1$. Il sistema è completamente integrabile per le (X), e possiede l'integrale quadratico

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = \text{cost.}$$

Normalizziamo le coordinate omogenee x, ξ, η, ζ nel solito modo, e prendiamo quattro quaderne di soluzioni $(x_r, \xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ $r = 0, 1, 2, 3$ appartenenti ad un tetraedro $P_0 P_1 P_2 P_3$ coniugato rispetto alla quadrica

$$x^2 + \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0,$$

con P_0 vertice interno. *Rimanendo fissa w* , le tre espressioni

$$d y_i = x_i d x_0 + \xi_i d \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono differenziali esatti, e la superficie S descritta dal punto P di coordinate ortogonali y_1, y_2, y_3 , al variare di u, v , ha l'elemento lineare

$$d s^2 = (1 + x_0^2) d x_0^2 + 2 x_0 \xi_0 d x_0 d \xi_0 + (1 + \xi_0^2) d \xi_0^2,$$

cioè quello della regione reale del paraboloido rotondo

$$X = x_0, \quad Y = \xi_0, \quad Z = \frac{x_0^2 + \xi_0^2}{2} \quad (\text{ovvero } X^2 + Y^2 = 2Z).$$

Dopo ciò, se facciamo variare w , le ∞^1 superficie S possono collocarsi nello spazio in guisa che ne risulti un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Questo si ottiene determinando per quadrature y_1, y_2, y_3 dalle formole (cf. § 18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= \tau_0 (\cos \omega x_i - \operatorname{sen} \omega \xi_i) \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= \zeta_0 (\operatorname{sen} \omega x_i + \cos \omega \xi_i) \quad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial y_i}{\partial w} &= \xi_0 (-A \tau_i + B \zeta_i), \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

le condizioni d'integrabilità trovandosi identicamente soddisfatte.

Precisamente come nel caso del paraboloido rotondo immaginario (§ 15) si dimostra che: *Per ciascuna deformata S del paraboloido rotondo nel sistema $w = \text{cost.}$ le tangenti alle traiettorie (w) nei punti di S sono normali alle trasformate dei paralleli $x_0^2 + \xi_0^2 = \text{cost.}$*

Ne segue che se la congruenza (C) formata da queste tangenti si immagina invariabilmente legata alle flessioni della S , quando S si applica sul paraboloido tutti i raggi della congruenza vanno ad appoggiarsi all'asse. Questa proprietà deve ravvicinarsi all'altra riscontrata nelle classi di sistemi tripli coniugati con deformate del generale paraboloido ellittico od iperbolico di cui ai §§ 19, 26, poichè nel caso del paraboloido rotondo le parabole focali vengono appunto a ridursi all'asse di rotazione.

Accanto a questi sistemi tripli coniugati con deformate *proprie* S del paraboloido rotondo sono da considerarsi quelli contenenti deformate *improprie* S ; questi si ottengono semplicemente dai primi, sussistendo la proprietà:

Le superficie \bar{S} complementari delle S (rispetto alle deformate dei meridiani) in uno dei nostri sistemi tripli coniugati formano un nuovo sistema triplo coniugato.

Questo si verifica colle formole seguenti, di cui è facile la deduzione. Indicando con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ le coordinate del punto della complementare \bar{S} corrispondente al punto (y_1, y_2, y_3) sopra S , le \bar{y}_i sono date dalle formole

$$\bar{y}_i = y_i - x_i x_0 - \xi_i \xi_0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (80)$$

dalle quali, derivando, seguono le altre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial u} &= \eta_i (\text{sen } \omega \xi_0 - \text{cos } \omega x_0) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial v} &= -\zeta_i (\text{cos } \omega \xi_0 + \text{sen } \omega x_0) \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial w} &= \zeta_i (A \eta_0 - B \zeta_0) \end{aligned} \right\} \quad (80^*)$$

D'altronde la complementare \bar{S} di una deformata propria S del paraboloido rotondo è una deformata impropria.

§ 30.

SISTEMI DI SUPERFICIE D'AREA MINIMA CORRISPONDENTI.

Ciascuna deformata propria S del paraboloido rotondo determina, secondo il primo teorema di GUICHARD (Vol. II, § 257), due superficie Σ, Σ' d'area minima corrispondenti. Queste sono le due falde dell'involuppo di sfere descritte coi centri nei punti P di S ed aventi ciascuna raggio eguale alla distanza del punto corrispondente P_0 sul paraboloido dal fuoco. Alle famiglie (S) dei nostri sistemi tripli coniugati si coordinano quindi due sistemi di superficie d'area minima che vogliamo ora esaminare più da vicino. Per questo osserviamo che, nella configurazione paraboloidica, la distanza T del punto $P_0 \equiv (x_0, \xi_0)$ dal fuoco è data da

$$T = \frac{1 + x_0^2 + \xi_0^2}{2} = \frac{1}{2} (\zeta_0^2 - \eta_0^2). \quad (81)$$

Se indichiamo poi con $(Z_1, Z_2, Z_3), (Z'_1, Z'_2, Z'_3)$ i rispettivi coseni di direzione dei raggi che vanno dal punto $P \equiv (x_0, \xi_0)$ di S ai due punti di contatto della sfera con Σ, Σ' , dalle formole relative agli involuppi di sfere ricaviamo facilmente per Z_i, Z'_i i valori seguenti :

$$Z_i = \frac{\zeta_i - \eta_i}{\zeta_0 - \eta_0}, \quad Z'_i = \frac{\zeta_i + \eta_i}{\zeta_0 + \eta_0}. \quad (82)$$

Ed ora andiamo a verificare in effetto, senza nemmeno ricorrere al teorema di GUICHARD, che le congruenze rettilinee formate dai raggi che escono dai punti di una S ($w = \text{cost.}$) coi coseni di direzione Z_i , ovvero Z'_i , sono normali a due superficie minime. [Con ciò il teorema di GUICHARD resta nuovamente dimostrato.]

Se poniamo

$$U = \sum_i^{1-3} Z_i \frac{\partial y_i}{\partial u}, \quad V = \sum_i^{1-3} Z_i \frac{\partial y_i}{\partial v},$$

dall'osservare che si ha

$$\sum_i x_i Z_i = x_0, \quad \sum_i \xi_i Z_i = \xi_0,$$

segue per le (79)

$$U = r_0 (x_0 \cos \omega - \xi_0 \sin \omega), \quad V = \zeta_0 (x_0 \sin \omega + \xi_0 \cos \omega),$$

e quindi dalle (78) che $U du + V dv$ è un differenziale esatto, precisamente $= dT$.

La congruenza è dunque in effetto normale (Vol. I, § 143) e le coordinate z_1, z_2, z_3 dei punti di una delle superficie normali sono date da

$$z_i = y_i - T Z_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

ossia

$$z_i = y_i - \frac{1}{2} (\zeta_0 + r_0) (\zeta_i - z_i). \quad (83)$$

Verifichiamo che la superficie Σ definita da queste formole è ad area minima e le linee (u, v) corrispondenti al sistema coniugato permanente di S sono le linee di curvatura.

Se deriviamo infatti le (82), (83) rapporto ad u, v , troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial u} &= - \frac{(\zeta_0 - r_0)^2}{2} \frac{\partial Z_i}{\partial u} \\ \frac{\partial z_i}{\partial v} &= \frac{(\zeta_0 - r_0)^2}{2} \frac{\partial Z_i}{\partial v}, \end{aligned}$$

e queste formole dimostrano appunto che sulla Σ le linee u, v sono quelle di curvatura, ed i raggi principali di curvatura r_1, r_2 hanno i valori eguali ed opposti

$$r_1 = \frac{1}{2} (\zeta_0 - r_0)^2, \quad r_2 = - \frac{1}{2} (\zeta_0 - r_0)^2.$$

Similmente per l'altra superficie Σ' si trovano le formole

$$z'_i = y_i - \frac{1}{2} (\zeta_0 - \eta_0) (\zeta_i + \eta_i), \quad (83^*)$$

con

$$r'_1 = \frac{1}{2} (\zeta_0 + \eta_0)^2, \quad r'_2 = -\frac{1}{2} (\zeta_0 + \eta_0)^2.$$

Osserviamo ancora che, derivando le (83), (83*) rapporto a w , risulta

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial w} &= \frac{1}{2} (B - A) \left[\xi_0 (\zeta_i + \eta_i) - \zeta_i (\zeta_0 + \eta_0) \right] \\ \frac{\partial z'_i}{\partial w} &= \frac{1}{2} (B + A) \left[\zeta_0 (\zeta_i - \eta_i) - \xi_i (\zeta_0 - \eta_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Merita attenzione quella classe particolare dei nostri sistemi tripli coniugati per la quale la costante c nell'integrale quadratico (77) è nulla; allora è $A^2 = B^2$, o $A = \pm B$, poniamo p. es. $A = B$. In tal caso si vede che le Z_i coincidono coi coseni di direzione delle tangenti alle traiettorie (w) e sono indipendenti da w , come le z_i stesse. Dunque:

Se per la famiglia (S) di deformate del paraboloide rotondo la costante c è nulla, le traiettorie (w) sono linee rette e coincidono colle normali all'unica superficie minima Σ . Questa è il luogo descritto dal fuoco del paraboloide rotondo nel rotolamento sopra una qualunque delle superficie applicabili S .

Nel caso $c = 0$, ora considerato, le equazioni del sistema (X) possono scriversi più semplicemente, ponendo p. es. $A = B = e^\theta$, con che diventano

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w} &= e^\theta \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} = e^\theta \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Ma anche nel caso generale $c \neq 0$ si può introdurre nel sistema (X) una semplificazione analoga. Supponendo, come è lecito, $c = 1$, possiamo porre p. es.

$$A = \cosh \theta, \quad B = \sinh \theta,$$

e le (X) diventano

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial w} &= \cos \omega \cosh \theta, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial v \partial w} = \sin \omega \sinh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Si osservi che, in ambedue i casi (85 o (86), le due prime equazioni del sistema dicono che $\omega + i\theta$ è una *funzione* della variabile complessa $\tau = u + iv$, diciamo

$$\omega + i\theta = F(\tau, w),$$

dove w è un parametro *reale*, da cui dipende la F . Manifestamente le due seconde equazioni del sistema (85) si compendiano nella equazione (di LIOUVILLE):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial w} = e^{-iF},$$

e quelle del sistema (86) nell'altra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial w} = \cos F.$$

§ 31.

SISTEMI TRIPLI CONIUGATI CON DEFORMATE DELLE QUADRICHE A CENTRO TANGENTI ALL'ASSOLUTO.

Trattiamo in fine di quei sistemi tripli coniugati nei quali la famiglia (S) è costituita di superficie applicabili sulle quadriche a centro di DARBOUX tangenti all'assoluto (*).

Il caso limite di quadriche *osculanti* l'assoluto è già stato trattato al § 5; ivi i corrispondenti sistemi tripli coniugati furono dedotti con una costruzione in termini finiti dalle famiglie di LAMÉ a curvatura costante. Qui pel caso di quadriche semplicemente tangenti all'assoluto occorrerà ancora l'integrazione dei sistemi differenziali (III) § 8, o (IV) § 9, precisamente come pel caso delle quadriche rotonde (bitangenti all'assoluto).

Per non complicare la ricerca supporremo che il sistema triplo ortogonale (u, v, w) sia un sistema di WEINGARTEN, p. e. a curvatura positiva, e porremo nelle formole del § 9 $R = 1$.

(*) *Lezioni*, Vol. II, § 308, e più particolarmente la Memoria: *Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili* (Annali di matematica, t. VI della Serie III, 1900).

Sia (A, M, Φ, W) una qualunque quaderna di soluzioni del sistema differenziale (IV), onde avremo per le (18) ibid.

$$A^2 + M^2 - c \Phi^2 + (c + 1) W^2 = a \quad (\text{costante}). \quad (87)$$

Per una qualunque superficie Σ , a curvatura $K = +1$, del sistema di WEINGARTEN, consideriamo la superficie \bar{S} inviluppo dei piani normali alle linee $\Phi = \text{cost.}$ sulla Σ . Denotando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del punto \bar{P} di \bar{S} , che corrisponde al punto $P \equiv (x, y, z)$ di Σ , troviamo

$$\bar{x} = x - \frac{1}{c \Phi} \left\{ A X_1 + M X_2 + (c + 1) W X_3 \right\}, \quad (88)$$

colle formole analoghe per \bar{y}, \bar{z} , e l'elemento lineare della \bar{S} ha la forma

$$d\bar{s}^2 = \frac{c^2 \Phi^2 dW^2 - 2c(c+1)\Phi W d\Phi dW + \left[c(c+1)W^2 + c\Phi^2 + a \right] d\Phi^2}{c^2 \Phi^4}, \quad (89)$$

che dipende solo dalle costanti c, a , ed appartiene alla quadrica immaginaria di DARBOUX

$$c(y^2 + z^2) + 1 = x^2 + a c (y - z \sqrt{-1})^2. \quad (90)$$

Sulle superficie Σ, \bar{S} i sistemi coniugati si corrispondono, in particolare alle linee (u, v) di curvatura di Σ corrisponde sopra \bar{S} il sistema coniugato permanente.

Ora, se facciamo variare w , la \bar{S} descrive una famiglia (\bar{S}) , che vogliamo dimostrare appartenere ad un sistema triplo coniugato (u, v, w) . Per ciò, derivando le (88) col por mente alle formole dei §§ 4, 9, troviamo

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{A}{c \Phi^2} \Omega_x, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{M}{c \Phi^2} \Omega'_x, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial w} = \frac{W}{c \Phi^2} \Omega''_x,$$

dove si è posto per brevità:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \sinh \theta \left[A X_1 + M X_2 + (c + 1) W X_3 \right] - c \Phi \cosh \theta X_3 \\ \Omega'_x &= \cosh \theta \left[A X_1 + M X_2 + (c + 1) W X_3 \right] - c \Phi \sinh \theta X_3 \\ \Omega''_x &= \frac{\partial \theta}{\partial w} \left[A X_1 + M X_2 + (c + 1) W X_3 \right] + c \Phi (A X_1 + B X_2). \end{aligned}$$

con significato analogo per Ω_y, Ω_z , ecc.

Sarà provato il teorema se dimostriamo che $\frac{\partial \Omega_x}{\partial v}$ si esprime linearmente ed omogeneamente per (Ω_x, Ω'_x) con coefficienti, che rimangono gli stessi per tre assi, similmente $\frac{\partial \Omega_x}{\partial w}$ per (Ω_x, Ω''_x) , e in fine $\frac{\partial \Omega'_x}{\partial w}$ per (Ω'_x, Ω''_x) . Questo risulta dalle identità seguenti, di facile verifica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_x}{\partial v} &= \frac{M \cosh \theta}{\Phi} \Omega_x + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{M \sinh \theta}{\Phi} \right) \Omega'_x \\ \frac{\partial \Omega_x}{\partial w} &= \frac{W}{\Phi} \frac{\partial \theta}{\partial w} \Omega_x + \left(\cosh \theta - \frac{W \sinh \theta}{\Phi} \right) \Omega''_x \\ \frac{\partial \Omega'_x}{\partial w} &= \frac{W}{\Phi} \frac{\partial \theta}{\partial w} \Omega'_x + \left(\sinh \theta - \frac{W \cosh \theta}{\Phi} \right) \Omega''_x.\end{aligned}$$

Dal calcolo eseguito risulta altresì che i valori dei coefficienti H_1, H_2, H_3 per il sistema triplo coniugato (88) sono dati semplicemente da

$$H_1 = \frac{A}{\Phi}, \quad H_2 = \frac{M}{\Phi}, \quad H_3 = \frac{W}{\Phi}.$$

Si avverta che, ove la costante α nella (87) sia nulla, la superficie \bar{S} è la complementare di quella deformata S_0 di una quadrica a centro rotonda che è data dalle formole (17), § 8. In tal caso adunque la famiglia (\bar{S}) è la complementare delle famiglie (S_0) determinate ai §§ 8, 9. Ma anche nel caso $\alpha \neq 0$ si possono porre i nuovi sistemi tripli coniugati in semplice dipendenza geometrica da quelli con deformate di quadriche rotonde, mediante il seguente teorema che qui ci limitiamo ad enunciare:

Fissato un sistema triplo ortogonale di Weingarten (u, v, w), si costruiscono colle formole dei §§ 8, 9, tre diversi sistemi tripli coniugati colle famiglie (S), (S'), (S'') di deformate di quadriche rotonde. I piani tangenti in una terna qualunque P, P', P'' di punti corrispondenti su tre superficie S, S', S'' s'incontrano in un punto \bar{P} che descrive, al variare della terna (P, P', P'') sulle tre superficie (S, S', S'') una deformata \bar{S} di una quadrica di Darboux. E quando la terna (S, S', S'') varia, la superficie \bar{S} descrive una famiglia (\bar{S}) appartenente ad uno dei nuovi sistemi tripli coniugati.

Viareggio, Agosto 1914.

INDICE

PREFAZIONE -----	Pag. 135
------------------	-------------

PARTE PRIMA.

§ 1. Sistemi tripli coniugati in generale -----	138
§ 2. Spazi curvi normali -----	140
§ 3. Sistemi tripli coniugati con deformate del catenoide -----	142
§ 4. Richiamo delle formole pei sistemi tripli ortogonali a curvatura costante -----	143
§ 5. Sistemi tripli coniugati con deformate della quadrica: $y^2 + z^2 + (x - y + iz)^2 = \text{cost.}$ -----	146
§ 6. Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloido: $(x + y\sqrt{-1})^2 \pm \frac{z^2}{R^2} = x - y\sqrt{-1}$ -----	149
§ 7. Sistemi tripli coniugati con deformate di quadriche a centro rotonde -----	152
§ 8. Caso di K negativa -----	153
§ 9. Caso di K positiva -----	156
§ 10. Quaderne armoniche di soluzioni del sistema (IV). Tetraedri coniugati -----	157
§ 11. Deformate del paraboloido immaginario: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}$ -----	160
§ 12. Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloido $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}$ -----	163
§ 13. Caso delle deformate del paraboloido: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z\sqrt{-1}$ -----	166
§ 14. Caso del paraboloido immaginario rotondo: $X^2 + Y^2 = 2Z\sqrt{-1}$ -----	168
§ 15. Proprietà geometriche di questi sistemi -----	170

PARTE SECONDA.

§ 16. Sistema differenziale pel caso del paraboloido reale ellittico -----	173
§ 17. Sistema lineare omogeneo in (x, ξ, η, ζ) -----	176
§ 18. Sistemi tripli coniugati con deformate proprie del paraboloido ellittico -----	178
§ 19. Classe particolare di questi sistemi tripli coniugati -----	180
§ 20. Sistema differenziale per le deformate improprie del paraboloido ellittico -----	183
§ 21. I corrispondenti sistemi tripli coniugati -----	186
§ 22. Le trasformazioni B_σ per le soluzioni dei sistemi (VI), (VIII) (§§ 16, 20) -----	188
§ 23. Le trasformazioni B_σ per le quaderne (x, ξ, η, ζ) , $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ -----	190

§ 24. Le trasformazioni B_k pei sistemi tripli coniugati	192
§ 25. Sistemi tripli coniugati con deformate proprie del paraboloido iperbolico	194
§ 26. Classe particolare associata ad una parabola focale	197
§ 27. Le trasformazioni B_k dei nuovi sistemi tripli coniugati	199
§ 28. Sistemi tripli coniugati con deformate improprie del paraboloido iperbolico	202
§ 29. Sistemi tripli coniugati con deformate del paraboloido rotondo reale	204
§ 30. Sistemi di superficie d'area minima corrispondenti	207
§ 31. Sistemi tripli coniugati con deformate delle quadriche a centro tangenti all'assoluto	210

Sulla connessione delle superficie razionali reali.

(Di ANNIBALE COMESSATTI, a Padova.)

INTRODUZIONE.

In questa Memoria, intesa a continuare e completare una mia precedente ricerca (*), mi propongo di stabilire dei metodi i quali servano a determinare la connessione di tutte le superficie razionali reali, collegandone le proprietà, sia a quelle della rappresentazione piana, sia ai caratteri invarianti (relativi) della superficie.

Prima di accennare alla via percorsa ed ai risultati ottenuti, non credo fuor di luogo dare alcune spiegazioni circa la natura e la posizione del problema, lasciando al testo del lavoro il compito di giustificare più ampiamente i criterî adottati.

Ogni indagine la quale si riferisca a proprietà di connessione d'una superficie algebrica reale, richiede che sia ben precisato il punto di vista dal quale le proprietà stesse si considerano. Perciò occorre prima d'ogni cosa stabilire :

1.^o) Quale influenza esercitino sulle proprietà in questione le eventuali singolarità reali della superficie ;

2.^o) Quale significato si debba attribuire alla frase *superficie equivalenti dal punto di vista della connessione*; in altre parole, ponendoci dal punto di vista del classico *Programma* di KLEIN, quale sia il *gruppo di trasformazioni* da cui è caratterizzata la geometria che studia le proprietà di connessione delle superficie.

(*) *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Mathematische Annalen, LXIII (1912), pp. 1-72]. Questa Memoria verrà nel seguito indicata con F.

Dai criteri adottati per stabilire la definizione di equivalenza nel senso suddetto, dipende in certo modo anche la convenzione che si adotta per precisare l'influenza delle singolarità. Nell'ordine di idee che sotto sarà chiarito, torna conveniente attribuire ad esse la stessa influenza che avrebbero *se fossero risolte*, cioè considerare ogni superficie razionale reale F come equivalente ad un *modello* F_0 privo di singolarità la cui costruzione sia definita senza ambiguità per ogni caso. La risoluzione delle singolarità, mediante un ben determinato tipo di trasformazioni (birazionali) reali (che rientrano perciò nel *gruppo della connessione*) collegate alla rappresentazione piana di F , si trova stabilita al § 4, n.º 13; tuttavia lo studio delle proprietà di connessione di F si fa direttamente su quella rappresentazione, senza ricorrere al modello F_0 il quale interviene soltanto per chiarire il *senso* che deve darsi a quelle proprietà in quanto su esse influiscono le singolarità di F .

Quanto alla 2.^a delle due questioni suddette, volendo liberarmi da tutto ciò che non ha essenzialmente carattere invariante nella considerazione d'una superficie (spazio in cui è contenuta, elementi impropri, ecc.), cioè volendo dare al concetto di connessione la sua più ampia generalità — ch'è poi richiesta dalla natura dei risultati a cui mi son proposto di pervenire — ho acceduto al criterio di considerare come proprietà di connessione solo quelle che KLEIN ha chiamato *assolute* (*), in relazione alle quali l'*equivalenza* di due superficie dipende dalla possibilità di stabilire fra esse una *corrispondenza* (reale) *biunivoca, continua, priva di eccezioni* (nel campo reale), la quale non soddisfi in più ad alcuna necessaria restrizione dipendente da speciali proprietà (ad es. *proiettive* o *metriche*) delle superficie (**). La definizione rigorosa delle trasformazioni suddette (che nel caso di superficie *finite* son poi *deformazioni con estensione*) si trova stabilita, per superficie prive di singolarità, al § 2, nel quale, in vista delle esigenze del lavoro, della necessità di evitare in questioni delicate interpretazioni ambigue, ho esposto (senza tuttavia mai perder di vista lo scopo della Memoria) i risultati fondamentali inerenti alla connessione delle superficie, corredando l'esposizione di alcune note in cui, col sussidio di un'ampia bibliografia (***), espongo e brevemente discuto i vari punti di vista e le ragioni di alcune mie preferenze.

(*) Ometto qui citazioni dettagliate, riservandole al testo. Cfr. la nota (17).

(**) Nel campo algebrico può dirsi che le proprietà di connessione sono invarianti di fronte alle trasformazioni *birazionali reali* che son prive di *punti fondamentali reali*, cioè non introducono *curve eccezionali reali*.

(***) Ho cercato, per quanto possibile, ch'essa sia completa (in relazione ai punti di vista discussi) e atta a guidare il lettore ad uno studio più approfondito.

Fissato il campo delle proprietà che in questo lavoro si considerano come inerenti alla connessione, risulta da un teorema fondamentale di quella teoria, che esse sono univocamente collegate a due caratteri:

- a) Un carattere *qualitativo*: l'*unilateralità* o *bilateralità* della superficie;
- b) Un carattere *numerico*: l'*ordine di connessione* Z , che si può, con vari Autori, definire anche per superficie dotate d'un numero qualunque (finito) di falde.

La determinazione dei due caratteri a), b) per ogni superficie razionale reale, di cui si conosca la rappresentazione piana, è il problema intorno a cui si raggruppano tutti i risultati di questa Memoria.

Il procedimento di cui mi giovo per giungere alla soluzione di esso, si fonda su due possibilità:

1.^a) Quella di associare ad ogni superficie razionale reale F una sua trasformata reale Φ la cui connessione si sappia determinare direttamente (valendosi p. es. della rappresentazione piana doppia di Φ);

2.^a) Quella di desumere la connessione di F da quella di Φ valutando l'influenza che ha su essa la trasformazione reale intercedente tra F e Φ .

La ricerca, per ogni F , d'una Φ la cui connessione sia determinabile direttamente (sopra un modello concreto), non è di per sè semplice; ma la difficoltà diviene più seria se si vuol scegliere Φ in modo che dalla sua connessione si possa desumere quella di F , perchè a tale scopo conviene che la trasformazione reale che lega F a Φ presenti certi caratteri di semplicità. Così ad es. se F ha una sola falda, si può scegliere come Φ un piano, ma la presenza su questo di curve fondamentali (semplici) ostacola gravemente la ricerca del carattere di bilateralità od unilateralità di F (*). La difficoltà si rimuove facendo sparire quelle curve fondamentali *in modo che la rappresentazione piana di F rimanga ancora reale*; tuttavia la possibilità di tal rappresentazione (limitata da due determinate eccezioni), e più in generale d'una speciale rappresentazione piana di tutte le superficie razionali reali, che ho chiamato *normale*, si prova mediante una indagine assai delicata, a cui è dedicato l'intero § 1. Tenendo conto delle proprietà di quella rappresentazione, si riesce in generale a costruire la superficie Φ in modo che la trasformazione (birazionale) reale fra F e Φ sia dotata su Φ d'un numero finito di punti fondamentali, e priva affatto di punti fondamentali su F .

(*) Cfr. il lavoro di ENRIQUES, citato alla nota (1).

Allora, un teorema dovuto a KLEIN, completato da qualche osservazione ulteriore, permette di dedurre la connessione di F da quella di Φ .

Il teorema a cui s'allude, precisa l'alterazione che si produce nella connessione d'una superficie, quando ad essa si applica una trasformazione reale dotata di eccezioni in punti e curve fondamentali. Data la sua ampia portata, specialmente per quanto riguarda lo studio delle superficie unilateri, ho dedicato alle relative applicazioni tutto il § 3, presentando ivi sotto nuova forma alcuni importanti risultati che concernono la teoria di quelle superficie, e assegnando alcuni *modelli*, atti a dare un'idea sulla *forma* delle superficie razionali. Lo studio delle superficie unilateri, mediante una loro particolare rappresentazione, conduce inoltre a considerare quelle fra le proprietà dei circuiti chiusi su esse tracciati, che hanno relazione col concetto (e colla definizione) d'*omologia*, e a porre in proposito interessanti problemi. Di alcuni fra essi, che presentano analogia con quelli relativi alla ricerca d'una *base minima* per le curve appartenenti ad una superficie algebrica, ho dato la soluzione in fine del § 3.

Ecco ora, in breve, le principali conclusioni della Memoria.

Per quanto riguarda il carattere di unilaterità o bilateralità enuncierò anzitutto il risultato seguente :

Tutte le superficie razionali con una falda (rappresentabili realmente sul piano) sono unilateri, fatta eccezione per quelle equivalenti ad una sfera ($Z=0$) o ad un toro ($Z=2$) (§ 4).

Negli altri casi si ha invece :

In ogni *classe* di superficie (definita in relazione alle trasformazioni birazionali reali) appartenenti alla I^a o II^a *famiglia* (della classificazione stabilita in F. n.º 40, Teor. V) esistono superficie, aventi l'ordine di connessione *minimo* le cui falde son tutte bilateri e *del tipo sfera*. Appena l'ordine di connessione supera quel minimo almeno una falda è unilatera (§ 5);

Fra le cinque falde che appartengono ad una superficie della III^a *famiglia* ve n'ha una — denominata *falda singolare* — che non si può ridurre bilatera mediante una trasformazione birazionale reale. Sicchè le superficie di quella famiglia hanno sempre almeno una falda unilatera, ch'è la falda singolare, il cui ordine di connessione ha per valor minimo *l'unità*. Invece le altre quattro falde possono simultaneamente ridursi bilateri e *del tipo sfera* (§ 5, e, per lo studio della falda singolare, § 7).

I risultati di carattere *numerico* si aggruppano tutti intorno alle espressioni — dipendenti dalla famiglia e, per le superficie con una falda, anche

da due casi eccezionali di rappresentazione — dell'ordine di connessione Z mediante i caratteri inerenti alla rappresentazione piana normale della superficie F . In modo essenziale contribuisce all'espressione di Z , il numero r di quei punti che son base per il sistema lineare Σ imagine — nella rappresentazione normale — delle sezioni piane (od iperpiane) di F , e che sono uniti nella trasformazione antibirazionale involutoria τ corrispondente al coniugio di F (§ 5).

Siccome anche l'espressione dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I relativo ad F dipende in modo essenziale da r e, in più, dal numero i delle coppie di punti, base per Σ , e corrispondenti in τ , così si ottengono senza difficoltà importanti disuguaglianze.

Esse esprimono, che, dato I , il numero Z relativo ad una superficie di una determinata famiglia, con un certo numero m di falde, varia fra due limiti di cui l'inferiore è fisso (per quel dato m e per quella famiglia) e il superiore dipende da I . Io provo che, compatibilmente colla relazione

$$I \equiv Z \pmod{2},$$

la quale è soddisfatta da *tutte* le superficie razionali reali, tutti i valori compresi fra i due limiti sono *effettivamente raggiunti* in ogni *classe* appartenente a quella famiglia e relativa a quel dato numero di falde. Si trova così risolto un problema posto in fine dell'Introduzione di F. (pag. 6).

Le espressioni di I e Z dipendono, come si è detto, dai due interi r ed i e variano diversamente al variare di essi; in tal guisa che l'eliminazione di r ed i non può compiersi se non introducendo un *terzo carattere* della superficie che si esprima anch'esso mediante quegli'interi. È questo il *numero base reale* $\bar{\rho}$, cioè il numero delle curve *reali* linearmente indipendenti a cui è *linearmente legata* ogni curva reale della superficie. Le espressioni di $\bar{\rho}$ mediante r ed i (stabilite al § 6) confrontate con quelle di I e Z conducono alla relazione seguente

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1),$$

la quale ci sembra degna di nota, oltre che per la sua semplicità anche per il fatto ch'essa vale per *tutte* le superficie razionali, indipendentemente dalla famiglia e dal numero delle falde; in quanto l'influenza di tali elementi sparisce nell'eliminazione di r ed i . Si potrà forse in avvenire considerarla come caso particolare, d'una relazione analoga *valida per tutte le superficie algebriche*?

§ 1.

RAPPRESENTAZIONE PIANA NORMALE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI REALI.

1. Le proprietà di connessione d'una superficie razionale reale F si collegano, come vedremo, intimamente, a quelle della sua rappresentazione piana. E tanto più semplice ed espressiva ne riesce la deduzione quanto meglio quella rappresentazione risponde a certe condizioni di semplicità imposte dalle speciali esigenze del problema.

Per renderci conto, almeno in via approssimata, di tali esigenze, prendiamo le mosse da un esempio.

Imaginiamo che F abbia *una sola falda*, cioè sia rappresentabile *realmente* sopra un piano (reale) π (F. § 6). Sia S il sistema lineare *reale* di π , che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane di F . Questo sistema sarà dotato di un certo numero di *punti base* e di *curve fondamentali semplici* (eccezionali); anzi possiamo supporre che, all'infuori di queste, non vi siano altre curve fondamentali per S , immaginando, per maggior semplicità, che F sia priva di punti multipli.

Possiamo allora calcolare subito l'*ordine di connessione* di F , giacchè esso si esprime in modo semplicissimo mediante il numero dei punti base e delle curve fondamentali di S ; mentre invece ci troveremmo di fronte ad una certa difficoltà qualora volessimo decidere circa l'unilateralità o bilateralità di F . Tale difficoltà, che divien più seria quando non si tratti d'una superficie particolare, ma si vogliano stabilire condizioni generali, proviene dalla presenza delle curve fondamentali (¹).

Si potrà pensar di rimuovere siffatta difficoltà facendo sparire le curve fondamentali di S mediante una conveniente trasformazione di π in un altro piano π' . Invero, salvo determinate eccezioni, che possono venir considerate a parte, tale operazione è possibile (F. n.º 18, Teor. I).

Ma dopo ciò la rappresentazione di F su π' sarà ancora *reale*?

(¹) Una condizione, avente carattere generale, intesa a stabilire quando si possa affermare che F è unilatera, fu data da ENRIQUES: *Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali* [Rendiconti della R. Accademia di Bologna, XVI (1912), pp. 70-73]. Trattasi però d'una condizione *sufficiente*, utile tuttavia in casi speciali.

In altre parole sarà reale il sistema S' trasformato di S ? Ecco una questione di cui è assai importante che ci occupiamo senz'altro per spianare la via alle nostre ricerche.

Anzitutto, riportandoci dal suddetto esempio al caso generale, poniamo i termini del problema.

Sia F una superficie razionale reale *qualunque*, rappresentata sopra un piano (reale) π in tal guisa che al sistema delle sue sezioni piane od iperpiane risponda un sistema lineare S , appartenente a π . Questo sistema sarà unito in una trasformazione antibirazionale involutoria T , immagine del coniugio di F (se F ha una falda T si può trasformare nel coniugio e quindi S in un sistema reale).

Circa S e T possiamo affermare quanto segue:

a) Il sistema S è riducibile, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema Σ privo di curve fondamentali semplici, ovvero dotato di particolarità su cui non è per ora il caso di insistere (F. n.º 18, Teor. I);

b) La trasformazione T è riducibile, mediante trasformazione cremoniana, ad un determinato tipo che chiameremo *normale* avente (in relazione a tutte le trasformate di T) il minimo numero di punti fondamentali (vedi F. § 6, Teor. IV).

Ora proponiamoci la questione seguente: Le due riduzioni di cui si parla in a), b) possono effettuarsi insieme? In altre parole si può trasformare il sistema S come in a) in tal guisa che la T si muti *contemporaneamente* in una trasformazione di tipo normale?

Vedremo che la risposta, salvo una lieve restrizione, sarà affermativa. In modo preciso dimostreremo, nel seguito di questo paragrafo, il seguente

TEOREMA. *Ogni sistema lineare semplice S, ∞^r , ($r \geq 3$) di curve piane irriducibili, unito in una trasformazione antibirazionale involutoria T , e dotato di curve unite ⁽²⁾, si può ridurre, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema analogo, unito in una trasformazione τ di tipo normale (trasformata di T) e inoltre*

a) privo di curve fondamentali semplici;
ovvero anche, se τ è il coniugio

(2) Queste condizioni sono necessarie e sufficienti perchè S si possa considerare come immagine del sistema delle sezioni piane od iperpiane d'una superficie F di S_r (cfr. F. § 2, n.º 6, 12).

β) dotato di una sola retta fondamentale contenente due punti base distinti e privo d'altri punti base reali ⁽³⁾;

γ) avente per curve fondamentali semplici in rette uscenti da un punto base O , e contenenti ciascuna un altro punto base infinitamente vicino ad O .

Quando il sistema lineare che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane d'una superficie razionale reale F sia ridotto a soddisfare alle condizioni del Teorema suddetto diremo che la rappresentazione piana di F è normale.

2. Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema enunciato.

Sia F la superficie razionale considerata, S il sistema lineare appartenente al piano π , che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane di F e che supponiamo già ridotto a soddisfare alla condizione a) del numero precedente, cioè ad esser privo di curve fondamentali semplici, ovvero a presentare le particolarità contemplate nei casi II), III) del Teor. I (F.). I punti base di F potranno eventualmente esser propri (F. n.º 13), ma non saranno in tal caso equivalenti a curve fondamentali semplici (F. nota a pag. 27).

Incominciamo dal liberare il terreno dai due casi eccezionali esaminandoli separatamente.

Caso II). S possiede una retta fondamentale r con due punti base distinti R_1, R_2 ed è privo di altri punti base. Allora la trasformazione T ⁽⁴⁾ in cui è unito S è antiproiettiva od antiquadratica (F. n.º 19). Nel 1.º caso essa si lascia ridurre al coniugio, cioè a tipo normale, mediante una trasformazione proiettiva (F. n.º 8) che non modifica la natura di S ; nel 2.º se la T non è priva di punti uniti, cioè se non è di tipo normale (F. n.º 9 e § 6, Teor. IV b)), si lascia ridurre ad un'antiproiettività mediante una trasformazione quadratica ω avente i punti fondamentali (su π) in R_1, R_2 ed in un

⁽³⁾ E, s'intende, d'altre curve fondamentali semplici. Conviene osservare che in tal caso qualora esistano punti base non appartenenti alla retta fondamentale essa si può far sparire mediante una trasformazione quadratica; tanto è vero che nel Caso II) contemplato nei F. Teor. I si esclude l'esistenza di tali punti. Qui invece essi non si possono escludere perchè la trasformazione quadratica che fa sparire la retta fondamentale muta il coniugio in una trasformazione antiquadratica che non è più di tipo normale. Ecco la lieve restrizione a cui si era sopra accennato.

⁽⁴⁾ Qui e nel seguito useremo per brevità la locuzione « trasformazione T » in luogo di « trasformazione antibirazionale involutoria T ».

punto R unito in T (F. n.º 9). La ω fa sparire la retta fondamentale r , e ne introduce un'altra s , per il sistema S' trasformato di S , la quale proviene dal punto R e si comporta come r . Dunque ci possiamo ridurre sempre al caso β) del teorema enunciato.

Caso III). S ha per curve fondamentali semplici m rette uscenti da un punto base O e contenenti ciascuna un altro punto base infinitamente vicino ad O . Sappiamo allora (F. n.º 19) che S si può ridurre, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema Σ avente per curve fondamentali semplici solo rette appartenenti ad un fascio unito nella trasformazione τ (trasformata della T in cui è unito S), la quale è di tipo normale. Anzi, se τ non è il coniugio, si possono far sparire successivamente le rette fondamentali di Σ , mutando Σ e τ in enti analoghi.

Sicchè, qualora non si finisca per cadere sopra un sistema privo di curve fondamentali semplici, potremo supporre d'aver ridotto τ al coniugio, e quindi Σ ad un sistema *reale* avente per curve fondamentali semplici solo rette appartenenti ad un fascio reale di centro U . Ora proveremo che, se Σ non appartiene ai tipi β), γ), esiste una trasformazione birazionale *reale* ω del piano π di Σ in un altro piano π' , la quale muta Σ in un sistema Σ' analogo, con qualche retta fondamentale di meno.

Invero, non verificandosi i casi β), γ), esisteranno *almeno* due rette r, s , fondamentali per Σ , contenenti rispettivamente oltre U i punti base R, S di cui *almeno* uno, ad es. R , è *distinto* da U . Allora:

1.º) Se R, S son reali, ω è la trasformazione quadratica avente su π il triangolo fondamentale URS . Σ' ha due rette fondamentali meno di Σ ;

2.º) Se R è immaginario, la retta \bar{r} coniugata di r è pure fondamentale e contiene il punto base \bar{R} coniugato di R : ω è ancora una trasformazione quadratica avente, su π , il triangolo fondamentale $UR\bar{R}$. Σ' ha due rette fondamentali meno di Σ ;

3.º) Se infine R è reale ed S immaginario anche la retta s coniugata di r sarà fondamentale e conterrà il punto base \bar{S} coniugato di S . Allora ω è una trasformazione cubica di DE JONQUIÈRES avente su π il punto fondamentale doppio U ed i punti fondamentali semplici R, S, \bar{S}, P , ove P è un punto reale generico di π . Essa fa sparire tre rette fondamentali e ne introduce una (proveniente da P); in tal guisa che Σ' ha ancora due rette fondamentali meno di Σ .

Così procedendo, o tutte le rette fondamentali spariscono, ovvero si ricade ancora nei casi β), γ).

3. Ed ora occupiamoci del caso generale in cui S è privo di curve fondamentali semplici. Allora la trasformazione T ha tutti i suoi punti fondamentali in punti base di S (F. n.º 23); si tratta di far vedere che la T si può ridurre a tipo normale senza introdurre curve fondamentali per il sistema Σ trasformato di S ; in altre parole che tale riduzione si può compiere mediante una trasformazione cremoniana ω avente, su π , tutti i suoi punti fondamentali in punti base di S ; ovvero che ci si può ricondurre ai casi β), γ).

Perciò si parta da un sistema lineare L , ∞^r , irriducibile, semplice, dotato di punti base tutti impropri, privo affatto di curve fondamentali e unito in T . Costruendo questo sistema come in F. n.º 24 possiamo supporre che i punti base di L cadano tutti in punti fondamentali di T , cioè in punti base di S , e che inoltre la curva generica di L passante per un punto *qualunque* P di π distinto dai punti base di L non abbia di conseguenza un punto multiplo ivi.

Applicando ad L il procedimento di successiva aggiunta arriveremo necessariamente ad un sistema lineare Λ , unito in T , e appartenente ad uno dei seguenti tipi:

1.º) *Sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali determinato dal gruppo base;*

2.º) *Sistema lineare irriducibile, semplice (∞^3 almeno) di curve ellittiche, privo di curve fondamentali proprie, determinato dal gruppo base;*

3.º) *Rete di curve ellittiche riducibile (per trasformazione birazionale) alla rete delle cubiche passanti per 7 punti base;*

4.º) *Sistema lineare ∞^3 di curve di genere 2 riducibile al sistema delle sestiche con 8 punti base doppi (*)*.

Esponiamo ora le linee generali della dimostrazione la quale si comporrà delle tre parti seguenti:

A) Proveremo che, durante il procedimento di successiva aggiunta non si introducono nuovi punti base, in tal guisa che i punti base di Λ cadranno tutti fra quelli di L , cioè fra quelli di S .

B) Ridurremo, mediante una trasformazione cremoniana μ del piano π

(*) CASTELNUOVO, Appendice alla Memoria di ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3), 10 (1896), pp. 201-224], p. 222. L'enunciato qui riprodotto trovasi al n.º 7, p. 208 della Memoria. Cfr. F. n.º 24.

in un altro piano π' , il sistema Λ ad un sistema M d'ordine minimo, il quale apparterrà necessariamente ad uno dei tipi seguenti:

- a) fascio di rette;
- b) rete delle rette di π' ;
- c) sistema di tutte le coniche di π' ;
- d) sistema delle curve d'ordine n con un punto base $n-1$ -plo ed l ($0 \leq l \leq n-1$) tangenti fisse, distinte, comuni a tutte le curve del sistema;
- e) sistema delle curve d'ordine n con un punto base $n-1$ -plo ed un punto base semplice a distanza finita da quello;
- f) sistema di cubiche con 0, 1, 2, ..., 7 punti base distinti od infinitamente vicini;
- g) sistema di quartiche con 2 punti base doppi distinti od infinitamente vicini;
- h) sistema di sestiche con 8 punti base doppi distinti od infinitamente vicini⁽⁶⁾;

provando che la trasformazione μ non introduce curve fondamentali per il sistema S' trasformato di S , in quanto i suoi punti fondamentali, su π , cadono tutti in punti base di Λ , cioè di S . Farà eccezione solo il caso g) che ci condurrà al β).

C) Dopo ciò la trasformazione T' , trasformata di T mediante μ , dovendo lasciare unito uno dei sistemi a), b), ..., h) si lascerà ricondurre a tipo normale mediante una trasformazione cremoniana ν del piano π' in un altro piano σ , senza introdurre curve fondamentali semplici per il sistema Σ trasformato di S' (cioè di S mediante la $\omega = \mu \cdot \nu$), ovvero introducendo delle rette fondamentali che ci ricondurranno ai casi β), γ).

4. Ed ora veniamo al dettaglio.

A) Riprendendo in modo più diffuso e completo un ragionamento svolto per un caso particolare in F. n.º 39, indichiamo con $|C|$ un sistema lineare ∞^r dedotto da L col procedimento di successiva aggiunta, che non abbia punti base fuori di quelli di L , e tale che il suo aggiunto $|C'|$ acquisti un punto base P diverso da quelli di L .

Poichè supponiamo che il procedimento di successiva aggiunta non termini con $|C|$, quel sistema e tutti i precedenti saranno *irriducibili*, sem-

(6) Cfr. FERRETTI, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XVI (1912), pp. 236-279], Teor. VII, X, XII.

plici, privi di curve fondamentali proprie, e avranno la serie caratteristica non speciale (CASTELNUOVO, loco cit. (5)), fatta eccezione per il caso su cui fra poco ci intratterremo, che $|C|$ sia un sistema di curve iperellittiche di genere $r - 1$ due a due secantisi in coppie della g_2^1 che ciascuna sostiene.

Data l'ipotesi fatta sulle C' , le C per P , se sono irriducibili, non possono avere lo stesso genere della C generica perchè altrimenti le C' dovrebbero segare su quelle C la serie canonica *completa* e questa avrebbe in P un punto fisso. Dunque, o le C per P saranno riducibili, ovvero avranno il genere minore di quello p della generica C .

Incominciamo col mostrare assurda l'ipotesi che le C per P siano spezzate in una parte fissa D e in una parte ulteriore E variabile in un sistema lineare $\infty^{r-1} |E|$. Invero una tal curva D risulterebbe fondamentale *impropria* per $|C|$ e perciò la generica E avrebbe lo stesso genere p della generica C . Ma allora il sistema $|C'|$ dovrebbe segare la serie canonica *completa* sulla generica E (7), e ciò è inconciliabile coll'ipotesi che P sia un punto base per il sistema $|C'|$. Infatti poichè una C' non taglia D fuori dei punti base di $|C|$ — chè altrimenti essa segherebbe una E fuori dei punti base in meno di $2p - 2$ punti — il punto P sarà un punto base di $|E|$ distinto da quelli di $|C|$ e non appartenente a D . Ma ciò è assurdo perchè allora la serie canonica della generica E avrebbe un punto fisso in P .

Adunque o le C per P saranno composte colle curve d'un fascio avente un punto base in P , ovvero saranno irriducibili e avranno il genere minore di p . Siccome entro $|C|$ non esiste alcun sistema lineare ∞^{r-1} avente molteplicità superiore alla generica in qualche punto base di $|C|$ — chè altrimenti un tal punto base R sarebbe *proprio* per $|C|$, e quindi avrebbe la stessa influenza d'una curva fondamentale *propria* — così tutte le C per P avranno di conseguenza un punto multiplo Q non coincidente con alcuno dei punti base di $|C|$; il quale coinciderà con P se le C per P sono composte colle curve d'un fascio.

Esiste dunque — nelle ipotesi fatte su $|C'|$ — un punto Q non base per $|C|$, tale che le $\infty^{r-1} C$ per esso formano un sistema lineare $|\bar{C}|$ con un punto multiplo ivi.

(7) Convien tener presente che $|C'|$ è il sistema *aggiunto puro* a $|C|$ e che in tal caso esso coincide col sistema aggiunto puro ad $|E|$. Il sistema lineare che soddisfa rispetto a $|C|$ alle condizioni d'aggiunzione, contiene come parte *fissa* la curva D ; togliendola (un certo numero di volte) rimane il sistema $|C'|$.

Consideriamo ora il sistema $|C_0|, \infty^s$, precedente a $|C|$ nella serie dei successivi aggiunti ad L . Possiamo supporre che la curva generica del sistema lineare $\infty^{s-1}|\bar{C}_0|$ formato dalle C_0 per Q , abbia lo stesso genere della generica C_0 [incluso il caso che le C_0 per Q contengano come parte fissa una curva fondamentale D_0 di $|C_0|$], giacchè in caso contrario le \bar{C}_0 si comporterebbero come le \bar{C} e nulla ci vieterebbe di risalire nella serie dei sistemi aggiunti fino a trovarne due consecutivi di cui il secondo si comporti come $|C|$ (in relazione ad un certo punto Q) ed il primo nel modo prescritto a C_0 . Invero, come abbiamo inizialmente osservato, almeno le curve di L soddisfano alle condizioni volute per $|C_0|$ in relazione a qualunque punto del piano distinto dai punti base.

Poichè Q è punto multiplo di tutte le $|\bar{C}|$, sarà anche punto multiplo di tutti i gruppi canonici appartenenti alle \bar{C}_0 e passanti per esso. Da ciò si trae, mediante il teorema di CLIFFORD, che $|\bar{C}_0|$ è un sistema di curve iperellittiche.

Siccome in tali condizioni non si può trovare $|C_0|$ perchè allora $|C|$ risulterebbe composto con un fascio di curve razionali^(*), e quindi, contro l'ipotesi, il procedimento di aggiunzione si estinguerebbe con $|C|$, così soltanto le $\infty^{s-1}\bar{C}_0$ saranno iperellittiche e perciò $|C|$ sarà un sistema di curve iperellittiche di genere $s-2$ due a due segantisi in $s-2$ coppie delle g_2^s che ciascuna C sostiene; cioè apparterrà (CASTELNUOVO, loco cit.⁽⁵⁾) ad uno dei tipi seguenti:

Rete di grado 2 di curve ellittiche: questo caso è da escludersi perchè la successione degli aggiunti terminerebbe con $|C|$;

Sistema ∞^3 di grado 4 e genere 2 riferibile al sistema delle sestiche per 8 punti base doppi: questo caso è pure da escludersi perchè, quantunque esista il sistema $|C'|$ — ch'è un fascio di curve ellittiche avente un nuovo punto base in più di quelli di $|C|$ — noi, seguendo l'elenco dato al n.º 3, dobbiamo considerare la serie degli aggiunti terminata con $|C|$;

Sistema il cui aggiunto $|C'|$ è composto con un fascio di curve razionali $|D|$ bisecanti le curve di $|C|$ in tal guisa che ogni C' si compone di $p-1D$ ⁽⁶⁾. Se $|D|$ avesse punti base diversi da quelli di $|C|$, togliendo alle curve di $|D|$ l'obbligo di passare per quei punti si otterrebbe un sistema lineare $|E$ cer-

(*) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), X (1896), pp. 103-123], p. 109.

(6) Non è certa l'esistenza d'un tal sistema $|C|$. Cfr. CASTELNUOVO, loco cit.⁽⁵⁾.

tamente più ampio di $|D|$ perchè questo sistema, essendo un fascio di curve razionali, non può essere sovrabbondante. Ma allora ogni curva formata da $p - 1$ E sarebbe aggiunta a $|C|$ in tal guisa che $|C'|$ non potrebbe essere il sistema completo aggiunto a $|C|$. Adunque il sistema $|D|$ col quale in questo caso termina la successione degli aggiunti, non può avere punti base diversi da quelli di $|C|$.

In definitiva l'ipotesi fatta su $|C'|$ risulta incompatibile coll'altra, che la successione degli aggiunti non abbia termine con $|C|$.

B) Proviamo ora che la trasformazione μ la quale riduce Λ ad un sistema M d'ordine minimo non introduce, salvo il caso che Λ sia riducibile al tipo g), alcuna curva fondamentale per il sistema S' trasformato di S , cioè che essa ha tutti i suoi punti fondamentali in punti base di Λ .

Infatti, come risulta dalle dimostrazioni del FERRETTI⁽¹⁰⁾, le successive trasformazioni che abbassano fino al minimo l'ordine di Λ hanno tutti i loro punti fondamentali in punti base di Λ e dei successivi suoi trasformati, se Λ è un sistema di curve razionali, cioè se è riducibile ai tipi $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, $e)$; negli altri casi invece quelle trasformazioni possono avere degli ulteriori punti fondamentali che diremo eccezionali in punti generici del piano.

Ora si osservi che ognuno di tali punti produce una curva fondamentale semplice (che si può supporre isolata) per il sistema M , e che i sistemi $f)$, $h)$ sono privi di siffatte curve fondamentali, mentre $g)$ ha una sola retta fondamentale r contenente due punti base P , Q .

Ne segue che nei casi $f)$, $h)$ i punti fondamentali eccezionali non possono presentarsi, e che nel caso $g)$ esiste al più uno di questi punti da cui proviene la retta r . Dunque S' non può avere curve fondamentali semplici, eccetto che nel caso $g)$, in cui la retta r potrà essere fondamentale per S' ; e siccome essa è semplice ed isolata, così su essa vi saranno solo i due punti P , Q , base per S' ⁽¹¹⁾.

Siccome la trasformazione T' deve lasciare unito il sistema $g)$ che ha i soli punti base P , Q e la curva fondamentale r , così essa sarà necessariamente antiproiettiva od antiquadratica (F. n.º 19) e perciò come al n.º 2 si

⁽¹⁰⁾ Loco cit. (6). Cfr. i teoremi III, IV, V e le relative dimostrazioni, da cui dipendono i risultati dei teoremi VII, X, XII.

⁽¹¹⁾ Ogni punto base di M è base per S' , altrimenti proverrebbe da una curva fondamentale semplice di S .

potrà ridurre a tipo normale, conducendo al caso α) se T' è antiproiettiva ed r non è fondamentale per S' , al caso β) nelle altre ipotesi.

C) Riduciamo ora la trasformazione T' in cui è unito M (ed S') ad un tipo normale τ senza introdurre curve fondamentali semplici per il sistema Σ trasformato di S' .

Se M appartiene ad uno dei tipi a), b), la T' è certo antiproiettiva, e quindi si riduce immediatamente al coniugio.

Se M è uno dei sistemi d), e), T' dovrà lasciare unito l'unico sistema lineare di curve secanti in un sol punto variabile quelle di M , ch'è il fascio di rette col centro nel punto base $n-1$ -plo per M , il quale è anche punto base per S' . Ci troviamo quindi ricondotti al caso c).

Rimangono dunque da trattare le ipotesi corrispondenti ai casi c), f), h).

Se T' lascia unito un sistema c) essa si può, mediante successive trasformazioni quadratiche, ridurre ad una trasformazione antiquadratica priva di punti uniti⁽¹²⁾, ovvero ad una trasformazione d'ordine $m (\geq 1)$ con un punto fondamentale $m-1$ -plo O e $2(m-1)$ punti fondamentali semplici $P_1, \dots, P_{2(m-1)}$ distinti od infinitamente vicini ad O in direzioni distinte e aventi ordinatamente, per omologhe le rette $p_1, \dots, p_{2(m-1)}$ ($p_i = OP_i$) (F. n.º 11). Una siffatta trasformazione T'' è di tipo normale, eccettuato se $m=2$; e il sistema S'' trasformato di S' acquista solo delle rette fondamentali (semplici) uscenti da O (F. n.º 10, 11, 19).

Dopo ciò, se $m=1$, cioè se T'' è antiproiettiva si potrà ragionare come al n.º 3 (Caso III); se invece $m > 1$ le rette fondamentali di S'' si potranno far sparire operando come in F. n.º 19. Poichè mediante il procedimento di riduzione, la T'' si muta in una trasformazione perfettamente analoga, lo scopo sarà raggiunto, salvo nel caso $m=2$ in cui per ridurre la trasformazione a tipo normale bisognerà, dopo aver fatto sparire le rette fondamentali di S'' , operare con una trasformazione quadratica la quale ci condurrà al caso β) (cfr. n.º 3, caso II).

Infine immaginiamo che M appartenga ad uno dei tipi h), f). Si può allora supporre che i punti base di M siano tutti *distinti e generici* nel senso che non siano atti ad individuare curve fondamentali (non semplici) per M . Invero nell'ipotesi contraria, se M appartiene al tipo f) si trova subito un

⁽¹²⁾ Questo caso non ha alcun interesse per il seguito corrispondendo a superficie *prive di punti reali*. Ci dispensiamo dal trattarlo a parte, perchè il ragionamento che segue vale, con qualche avvertenza, anche per esso.

sistema di curve razionali unito in T' e avente tutti i suoi punti base in quelli di M , e quindi ci si può ricondurre ai casi già studiati; se invece M appartiene al tipo h) si può trovare un sistema di curve razionali o ellittiche unito in T' e quindi si ricade nei casi precedenti ovvero nel caso f). Ad esempio se M è una rete di curve ellittiche con tre punti base allineati risulta unito in T' il fascio di coniche individuato dagli altri quattro; e se tre fra questi sono pure allineati risulta unito il fascio di rette passante per il rimanente, ecc.

Le trasformazioni T' che lasciano unito uno dei sistemi h), f) hanno al più 8 punti fondamentali e perciò *sono in numero finito*; una qualunque fra esse, se non è di tipo normale, si lascia ricondurre a tale mediante successive trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in punti base di M e che lo mutano in un sistema perfettamente analogo, fatta eccezione per il caso che T' o qualcuna delle sue trasformate sia antiquadratica; allora la riduzione di essa a tipo normale introduce una retta fondamentale per il sistema Σ trasformato di S' e riporta al caso β).

Non crediamo opportuno intrattenerci sull'elenco delle possibili trasformazioni e sulla loro riduzione a tipo normale perchè ognuno potrà con facilità rendersi conto, caso per caso, della verità di quanto abbiamo asserito. Solo osserviamo in proposito che mai potrà sorgere dubbio circa la non esistenza di trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in tre qualunque fra i punti base di M o dei suoi trasformati, perchè, in virtù dell'ipotesi fatta sopra, tali punti sono sempre distinti e mai allineati⁽¹³⁾.

La possibilità d'una rappresentazione piana normale per ogni superficie razionale reale, enunciata dal teorema del n.º 1, risulta in definitiva dimostrata; ne vedremo chiaramente più tardi l'importanza fondamentale per lo studio delle proprietà di connessione di quelle superficie.

⁽¹³⁾ Un elenco delle trasformazioni che possono lasciar unito un sistema f) trovasi in F . al n.º 33. Da esso si può desumere senza gran difficoltà, operando p. es. col procedimento di successiva aggiunta sul sistema lineare unito ch'è determinato da una retta e dalla curva omologa, l'esistenza di sistemi di curve razionali uniti in quelle trasformazioni che non sono di tipo normale. Mediante la considerazione di quei sistemi la riduzione si effettua rapidamente.

§ 2.

GENERALITÀ SULLA CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE.

5. In questo paragrafo e nel seguente ci proponiamo di precisare il campo delle proprietà di cui intendiamo occuparci, stabilendo per esse e per gli enti a cui si riferiscono, alcune definizioni ed osservazioni fondamentali intese a chiarire il punto di vista delle nostre ricerche: ed inoltre enunciando o provando per via diversa alcune fra le più importanti proposizioni appartenenti alla teoria della connessione, di cui poi dovremo fare uso corrente.

Considereremo sempre *superficie reali, finite od infinite, appartenenti ad uno spazio (euclideo) dotato d'un numero qualunque (≥ 3) di dimensioni e composte d'una o più falde distinte.*

Benchè il significato di tali locuzioni sia di per sè abbastanza chiaro, crediamo opportuno, anche in vista degli ulteriori sviluppi, di determinarlo più nettamente.

Perciò, indicando con x_1, x_2, \dots, x_n coordinate non omogenee di punto in un S_n , partiamo dalle formole

$$x_1 = \mathfrak{S}_1(u, v), \quad x_2 = \mathfrak{S}_2(u, v), \dots, x_n = \mathfrak{S}_n(u, v), \quad (1)$$

nelle quali $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n$ sono funzioni reali delle variabili reali u, v , uniformi, finite, e derivabili nei punti d'una certa regione R del piano u, v . Assunta entro R un'area A *semplicemente connessa* (cioè racchiusa da un contorno c finito, chiuso, e privo di nodi) entro la quale la matrice funzionale delle x rispetto alle u, v non si annulli mai, indichiamo con E l'insieme dei punti di S_n che, mediante le (1), corrispondono ai punti di A contorno incluso, con C quelli che rispondono ai punti di c .

Diremo allora che E è una *falda* ovvero un *pezzo, elementare*, appartenente ad S_n e *limitato dal contorno* C .

Possiamo estendere tale definizione, convenendo di considerare come falda elementare di S_n l'insieme dei punti — propri od impropri — che corrispondono in un'omografia reale non degenera a quelli d'una falda elementare E' , definita nel modo anzidetto ed appartenente ad uno spazio S'_n di

coordinate non omogenee y_1, y_2, \dots, y_n . Ciò equivale a sostituire, nella definizione di E , in luogo delle (1) le formole più generali

$$\eta_1 = \mathfrak{S}_1(u, v), \quad \eta_2 = \mathfrak{S}_2(u, v), \dots, \eta_n = \mathfrak{S}_n(u, v), \quad (2)$$

in cui le $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ son funzioni lineari fratte, collo stesso denominatore, delle x_1, x_2, \dots, x_n , tali che l'omografia fra S_n ed S'_n , ch'è definita dalle formole

$$y_1 = \eta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n = \eta_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

non risulti degenere.

Due falde elementari E, E_1 , appartenenti entrambe ad S_n ed aventi una parte superficiale in comune il cui contorno sia tutto formato da parti dei contorni di E, E_1 , si diranno una il *prolungamento analitico* dell'altra ⁽¹⁴⁾. L'insieme di un numero *finito* di falde elementari E_1, E_2, \dots, E_m appartenenti ad S_n e tali che da ciascuna di esse si possa passare mediante una catena di prolungamenti analitici ad una qualunque delle altre, si dirà una *falda superficiale* o, più brevemente, una *falda F* appartenente ad S_n ⁽¹⁵⁾. Col nome di *superficie* denoteremo, più in generale, l'insieme di un numero finito di falde appartenenti allo stesso spazio.

È ben chiaro cosa si debba intendere per *intorno* di un punto P sopra una falda elementare E di cui P sia punto interno; ed è pure ovvio come un punto P di una falda F possa avere su essa più intorni distinti appartenenti a distinte falde elementari per P .

Se invece P si trova sul contorno d'una falda elementare, ad esempio di E_1 , e non appartiene contemporaneamente a qualche altra falda elementare che sia prolungamento analitico di E_1 , si dirà che esso, in quanto appartiene ad E_1 , è un *punto di frontiera* della falda F .

Una curva chiusa, tutta composta di punti di frontiera si dirà un *orlo*

⁽¹⁴⁾ Cfr. POINCARÉ, *Analysis Situs* [Journal de l'École Polytechnique (2), I (1895), pp. 1-123], p. 10. L'illustre A. suppone però che le funzioni \mathfrak{S}_i delle (1) siano *analitiche*. Le condizioni da noi imposte al contorno della parte comune ad E, E_1 introdotte per evitare che nelle falde considerate si presentino punti o linee di *biforcazione*, risultano in tal caso superflue.

⁽¹⁵⁾ L'ipotesi che F sia composta d'un numero *finito* di pezzi elementari esclude dalle nostre considerazioni falde del tipo di quella che si otterrebbe p. es. congiungendo due fogli piani mediante un'infinità numerabile di tubi. Tale esclusione trovasi fatta (più o meno esplicitamente) in quasi tutte le ricerche sulla connessione delle superficie.

di F . Si dimostra senza difficoltà che la frontiera totale di F si compone d'un numero finito r di orli; se $r = 0$ la falda si dirà *chiusa*.

Le superficie algebriche *prive di punti multipli* sono composte d'un numero finito di falde chiuse, ciascuna delle quali rientra nella nostra definizione (¹⁶).

6. Consideriamo ora due falde elementari E, E' appartenenti rispettivamente ad S_n, S'_n , e definite, nella maniera più generale, dalle equazioni

$$\eta_i = \mathcal{S}_i(u, v), \quad \eta'_i = \mathcal{S}'_i(u' v'), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(le η, η' essendo funzioni lineari fratte, collo stesso denominatore per ciascun gruppo, delle coordinate non omogenee di S_n, S'_n), in corrispondenza a due aree A, A' , semplicemente connesse, appartenenti ai piani $uv, u'v'$. Se le u', v' si possono considerare come funzioni reali, uniformi, finite e derivabili delle u, v in tal guisa che mentre il punto (u, v) descrive A il punto corrispondente (u', v') descriva *tutta* l'area A' e il determinante funzionale delle u', v' rispetto alle u, v non si annulli mai (cioè le funzioni u', v' delle u, v siano invertibili), diremo che *tra* E, E' (in quanto si considerano omologhi due punti che provengono da valori corrispondenti dei parametri) *intercede una corrispondenza biunivoca, continua, priva di eccezioni*.

Lo stesso si dirà di due falde F, F' se esse sono riferite in modo che ai punti di un pezzo elementare scelto ad arbitrio entro la prima, corrispondano, nel modo suddetto, i punti di un analogo pezzo della seconda. *Due tali falde si considereranno come equivalenti dal punto di vista della connessione*, e si chiameranno brevemente *equivalenti*.

Le proprietà che noi considereremo come *inerenti alla connessione sa-*

(¹⁶) Ciò si può p. es. ricavare, con qualche lieve aggiunta, dalla dimostrazione di POINCARÉ, loco cit. (¹⁴), p. 11, 14. Si potrebbe dimostrare che nella definizione data sopra rientrano anche le falde delle superficie algebriche dotate di *linee multiple ordinarie*, ma per ora ciò a noi non preme perchè ci riserviamo di precisare in seguito, mediante la risoluzione delle singolarità per le superficie razionali, il comportamento di esse di fronte alle proprietà di connessione. Se si volesse estendere la definizione anche alle falde con singolarità isolate, bisognerebbe considerare anche il caso che, nelle (1), la matrice funzionale delle x rispetto alle u, v fosse nulla in qualche punto dell'area A . Cfr. H. v. MANGOLDT, *Die Begriffe « Linie » und « Fläche »* [Encyclopädie der Math. Wiss., ecc., Leipzig, Teubner (1907), III, , pp. 130-152], p. 150.

ranno dunque quelle che sono *invarianti* di fronte alle trasformazioni biunivoche suddette ⁽¹⁷⁾.

7. Una prima distinzione fondamentale che ha valore di fronte alle trasformazioni considerate ed è perciò inerente alla connessione, è quella delle falde in *bilatere* ed *unilatera*. Tale distinzione si può stabilire, seguendo POINCARÉ ⁽¹⁸⁾, mediante considerazioni analitiche connesse alla definizione di falda

⁽¹⁷⁾ La considerazione delle proprietà inerenti alla connessione, sotto questo punto di vista — ch'è il più generale — trovasi, almeno per superficie finite, in MÖBIUS, *Theorie der elementaren Verwandtschaft* [Gesammelte Werke, Leipzig, Hirzel (1886)], Bd. II, p. 435, e successivamente in vari Autori, fra cui crediamo di dover citare JORDAN, *Sur la déformation des surfaces* [Journal de Mathématiques pures et appliquées (2), XI (1866), pp. 105-109] che considera le trasformazioni biunivoche, ecc. (nel campo finito) come equivalenti (per definizione) alle deformazioni (con estensione), e POINCARÉ, loco cit. ⁽¹⁴⁾, p. 7-9, che introduce la denominazione di « *homéomorphes* » per due superficie o varietà equivalenti nel senso suddetto. Per il caso di superficie infinite — ch'è poi il nostro, — la distinzione fra il punto di vista più generale, ed altri punti di vista particolari, fu messa in luce da KLEIN, *Ueber den Zusammenhang der Flächen* [Mathematische Annalen, XI (1876), pp. 476-482], pp. 478, 479, che introdusse la denominazione di *assolute* per quelle proprietà di connessione che rimangono invariate di fronte alle trasformazioni più generali, e di *relative* per quelle che non si alterano, soltanto se si opera con un gruppo particolare di trasformazioni aventi ad es. relazione collo spazio o con qualche varietà collegata alla data. Cfr. DYCK, *Beiträge zur Analysis Situs* [Mathematische Annalen, XXXII (1888), pp. 457-512], p. 457. Sono ad esempio *proprietà relative* quelle che si riferiscono al punto di vista *proiettivo* della connessione, cioè che rimangono invariate per *deformazioni nel campo finito e collineazioni reali* e che sono state considerate dallo stesso KLEIN nei lavori *Ueber Flächen dritter Ordnung* [Mathematische Annalen, VI (1873), pp. 551-581] da p. 578 a 581, *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* [Mathematische Annalen, VII (1874), pp. 549-557]. In relazione a tale punto di vista le falde si possono distinguere in *dispari*, *pari con curve dispari* e *pari senza curve dispari*. Così ad esempio l'*iperboloido ad una falda* ed il *toro* sono due falde pari, di cui la prima contiene curve dispari (generatrici) e la seconda no; e pertanto esse *sono distinte* dal punto di vista proiettivo, mentre, come vedremo, *non lo sono* dal punto di vista assoluto. Un altro punto di vista, che si potrebbe dir *metrico*, è quello nel quale i punti impropri delle falde si considerano come *frontiere*, pur rimanendo la possibilità di poter deformare le falde nel campo finito: ad esso possono ascrivere i lavori di SEVERI, *Sulla forma delle rigate cubiche* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXII (1903), pp. 863-879] e TORELLI (R.), *Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali* [Atti della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli (2), XIV (1910)]. Nel primo di questi lavori si trovano alcuni tipi metrici di rigate cubiche *bilatere*, mentre, come si vedrà, tali rigate sono, dal punto di vista assoluto, *tutte unilatera*.

⁽¹⁸⁾ Loco cit. ⁽¹⁴⁾, § 8.

data al n.º 5; però crediamo ch'essa si renda più chiara — almeno nel caso delle superficie — seguendo una via geometrica.

Perciò, partendo da un punto P appartenente ad una falda F , immaginiamo di fissare un verso nel fascio degli elementi lineari che escono da P ed appartengono ad un determinato intorno di esso; segnandolo per esempio sopra una piccola curva chiusa — che, seguendo KLEIN, denomineremo *indicatrice* — assimilabile ad un cerchietto che racchiuda nel suo interno P ed appartenga all'intorno considerato. Al muoversi di P sopra F potremo immaginare che esso si trascini seco l'indicatrice, e che il verso relativo si deduca per continuità da quello di partenza.

Supponiamo ora che P si muova lungo una curva chiusa σ appartenente ad F descrivendola tutta una sola volta partendo da una posizione iniziale e ritornandovi (nel medesimo intorno)⁽¹⁹⁾. Il verso dell'indicatrice potrà, a operazione compiuta, *coincidere* con quello iniziale, ovvero *essere invertito*.

Se la prima circostanza si presenta per *tutte* le curve chiuse che si possono tracciare su F , si dirà che tale falda è *bilatera*; se invece per qualche curva si presenta la seconda circostanza la falda F si dirà *unilatera*⁽²⁰⁾.

Sono importanti alcune proprietà *caratteristiche* delle falde unilateri, che si deducono senza difficoltà dalla definizione, e che ci limitiamo ad enunciare:

È unilatera ogni falda F sulla quale esista una curva chiusa σ dotata della proprietà di invertire un verso fissato inizialmente sulla normale ad F (o una faccia del piano tangente), quando, dopo aver descritta interamente σ , si ritorni alla posizione di partenza.

Se σ ha punti impropri, all'atto del passaggio per ognuno di essi conviene scambiare tra loro i due versi della normale, o le due facce del piano tangente.

È pure unilatera ogni falda la quale contenga un sistema *continuo* di

(19) Non crediamo sia il caso di entrare in dettagli sulla definizione di *curva chiusa* tracciata su F , avvertendo però che intendiamo di includervi anche le curve chiuse *infinite*. Volendo, all'atto del passaggio di P per una posizione impropria, seguire il verso dell'indicatrice, basterà riferirsi ad una conveniente trasformata omografica di F .

(20) È noto che tal distinzione si deve a MÖBIUS, *Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* [Werke, Bd. II, pp. 476-512], pp. 483-485, *Zur Theorie der Polyeder und Elementarverwandschaft* [Ibid. Bd. II (Nachlass), pp. 517-559], I. *Einseitige Polyeder*, pp. 519-521, III. *Flächen und Polyeder höherer Classen*, p. 552; però, come abbiamo sopra accennato, l'uso dell'indicatrice fu introdotto da KLEIN nella citata Memoria *Ueber den Zusammenhang*, ecc. dei Math. Ann. XI. Il primo studio completo sulle superficie unilateri fu fatto da DYCK nei citati *Beiträge*.

curve chiuse secantisi due a due in un numero *dispari* di punti; in particolare lo è il *piano illimitato (proiettivo)*, in quanto su esso le rette godono della proprietà anzidetta ⁽²¹⁾.

Se si taglia una falda unilatera lungo una curva chiusa σ dotata della proprietà di invertire l'indicatrice, la falda acquista *un solo orlo* in corrispondenza a quel taglio; e reciprocamente lungo una curva dotata di siffatta proprietà l'indicatrice s'inverte. In tale condizione si trovano ad esempio le rette di un piano in quanto i due bordi (distinti in senso metrico) d'un taglio eseguito lungo una di esse si possono considerare come limiti dei due rami di un'iperbole, e perciò costituiscono un'*unica* curva chiusa.

8. Alle proprietà di connessione delle superficie composte di una o più falde, sono collegati alcuni invarianti numerici (interi) dotati di notevole importanza. Prima di occuparci della loro definizione sarà opportuno spendere qualche parola intorno ad alcune operazioni di uso corrente nella teoria della connessione.

Chiameremo *segmento trasversale* ogni segmento semplicemente connesso (cioè deformabile in un segmento rettilineo), privo di nodi, appartenente ad una falda F e avente gli estremi in due punti di frontiera. Un taglio eseguito lungo un segmento siffatto si dirà *taglio trasversale (Querschnitt)*, di 1.^a o 2.^a specie secondo che gli estremi appartengono ad un medesimo orlo o a due orli diversi di F . Si dirà invece che in F s'è *aperto un buco* quando la si taglia lungo un segmento semplicemente connesso, interno ad essa compresi gli estremi.

Infine chiameremo *taglio chiuso (Rückerschnitt)* ogni taglio eseguito in F lungo una curva chiusa ad essa interna; di 1.^a o 2.^a specie secondo che esso dà origine a due oppure ad un solo orlo, cioè secondo che lungo quella curva il verso dell'indicatrice si conserva ovvero s'inverte ⁽²²⁾.

(21) Questa proprietà del piano illimitato fu esplicitamente notata da KLEIN in un'osservazione contenuta nella citata Memoria *Ueber Flächen*, ecc., dei Math. Ann. VI, relativa ad un lavoro di SCHLÄFLI, *Quand'è che dalla superficie generale di terzo ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?* [Annali di Matematica (2), V (1871-73), pp. 289-295]; e chiarita ulteriormente da SCHLÄFLI, *Correzione*, ecc. (alla Memoria precedente) [Annali di Matematica (2), VII (1875-76), pp. 193-196] e dallo stesso KLEIN nella citata Memoria dei Math. Ann. VII a p. 550.

(22) Si badi bene che un taglio chiuso eseguito lungo un circuito riducibile per deformazione continua ad un punto non equivale ad un buco in quanto spezza la falda su cui è eseguito in *due* parti. Cfr. in proposito la Nota ⁽²⁴⁾.

Premesso ciò passiamo a definire tre numeri collegati alle proprietà di connessione delle superficie: il *numero caratteristico* o *caratteristica* K , il *genere* p , l'*ordine di connessione* Z .

Consideriamo dapprima una falda F su cui si sia tracciata una rete di un numero *finito* α_2 di poligoni (curvilinei), ciascuno dei quali si possa considerare come un pezzo elementare di F , aventi complessivamente α_1 lati ed α_0 vertici. Il numero intero

$$K = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad (3)$$

risulta *indipendente* dalla rete considerata e si chiama *numero caratteristico* o *caratteristica* della falda F .

Se una superficie S è composta di m falde distinte F_1, F_2, \dots, F_m aventi le caratteristiche K_1, K_2, \dots, K_m , si dirà caratteristica di S il numero

$$K = \sum_{i=1}^m K_i, \quad (4)$$

somma delle caratteristiche delle sue parti (*principio d'addizione delle caratteristiche*)⁽²³⁾.

La caratteristica d'una superficie S diminuisce di 1 per effetto d'un taglio trasversale, aumenta di 1 per effetto d'un buco, non si altera per effetto d'un taglio chiuso, e inversamente⁽²⁴⁾.

Ritorniamo ancora alla considerazione d'una falda F , dotata di r orli. Diremo *genere* di F il numero intero p che si ricava dalle formole

$$\left. \begin{aligned} K &= 2p + r - 2, && \text{per le falde bilatere,} \\ K &= p + r - 2, && \text{per le falde unilatera}^{(25)}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

⁽²³⁾ Per la definizione stabilita dalla (3) cfr. DEHN ed HEEGAARD, *Analysis Situs* [Encyclopädie der Math. Wissenschaften, ecc. (Leipzig, Teubner, 1907), III₁, pp. 153-220], pp. 195-196. Il numero caratteristico fu definito in altro modo e studiato da DYCK nei citati *Beiträge*, dove trovasi enunciato e dimostrato il principio d'addizione; va però notato che il numero K'' di DYCK è eguale e di segno contrario al nostro K .

⁽²⁴⁾ Così ad es. la *chiusura* d'un buco diminuisce di 1 la caratteristica. Non sarà inopportuno osservare che se il taglio eseguito stacca da S un pezzo, questo va contato come parte della superficie S' ottenuta. Così se si taglia una sfera S lungo un cerchio massimo dividendola in due pezzi elementari (per ciascuno dei quali è $K = -1$) la caratteristica non si altera a patto che si consideri come superficie S' l'insieme dei due pezzi. Per la sfera si ha dunque $K = -2$, cioè $\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$ (formola di EULERO).

⁽²⁵⁾ Cfr. DEHN ed HEEGAARD, loco cit. ⁽²³⁾, p. 199, DYCK, loco cit. ⁽¹⁷⁾, pp. 477-479, DE PAOLIS, *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire fra i loro elementi*

esso risulta eguale al massimo numero dei tagli chiusi non segantisi due a due che si possono eseguire su F senza spezzarla. Sostituendo nelle (5) il valore di K dato dalle (3) si avranno le *formole di EULERO generalizzate*.

Chiameremo infine *ordine di connessione* d'una superficie S composta di m falde il numero

$$Z = K + 2, \quad (6)$$

di guisa che indicando con K_1, \dots, K_m le caratteristiche delle singole falde, con Z_1, \dots, Z_m i relativi ordini di connessione si avranno le importanti formole

$$Z = \sum_{i=1}^m K_i + 2, \quad (7)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m Z_i - 2m + 2, \quad (8)$$

e, in particolare per $m = 1$, $r = 0$ (falde chiuse), tenendo conto delle (5), le relazioni

$$Z = 2p, \quad \text{per le falde bilatere}$$

$$Z = p, \quad \text{per le falde unilatere}^{(26)}.$$

Inoltre dalle proprietà del numero K e dalle formole scritte segue su-

[Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), VII (1890), pp. 82-84]. In questa Memoria non si trovano le formole (5), ma formole analoghe nelle quali, in luogo di K compare quello che l'Autore chiama *numero fondamentale*, ch'è poi il nostro ordine di connessione.

⁽²⁶⁾ È noto che il concetto e la definizione di ordine di connessione per le falde bilatere risalgono a RIEMANN che nella *Inauguraldissertation* (Göttingen, 1851) dal titolo *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grössen* [Gesammelte Mathematische Werke (Leipzig, Teubner, 1876), pp. 3-47] chiama $n - m + 2$ volte connessa una falda bilatere *aperta* che sia divisa in m pezzi da n tagli trasversali. Per le falde *chiuse* lo stesso Autore nella *Theorie der Abel'schen Functionen* [Werke, pp. 81-135], p. 87, conviene di considerare come ordine di connessione il numero $2p + 1$, cioè quello della falda aperta che si ottiene dalla data praticandovi un piccolo buco. Cfr. APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* [Paris, Gauthier Villars, 1895], Cap. V. Una tale convenzione è da molti punti di vista impropria ed incomoda, e per primo SCHLÄFLI la modificò nella Memoria *Ueber die Relationen zwischen den $2p$ Kreiswegen erster Art und den $2p$ zweiter Art in der Theorie der Abel'schen Functionen der Herren Clebsch und Gordan* [Journal für reine und angewandte Mathematik, LXI (1873), pp. 149-155], Nota a p. 152, assumendo come ordine di connessione d'una falda chiusa il numero Riemanniano *diminuito di una*

bito che: L'ordine di connessione d'una superficie non si altera per effetto di un taglio chiuso, diminuisce di un'unità per ogni taglio trasversale, ed aumenta di un'unità per ogni buco aperto in una falda della superficie.

Sussiste poi la proprietà fondamentale seguente:

Sopra una falda chiusa F , d'ordine di connessione Z , si possono trovare Z e non meno circuiti chiusi tali che ogni altro circuito chiuso di F sia omologo ad una loro combinazione lineare a coefficienti interi⁽²⁷⁾.

La dimostrazione di essa, per il caso delle falde bilatere, si conduce a termine facendo uso del noto modello costituito da una sfera con $\frac{Z}{2} = p$ manichi⁽²⁸⁾; per il caso delle falde unilateri, avremo occasione di occuparcene al paragrafo seguente in una discussione che metterà in rilievo alcune singolari differenze fra le falde bilatere e quelle unilateri.

Enunciamo infine il *teorema fondamentale della connessione*: *Condizione necessaria e sufficiente affinché due falde, entrambe bilatere od unilateri, siano equivalenti, è che abbiano lo stesso numero di orli e lo stesso ordine di connessione⁽²⁹⁾.*

unità. Tale modificazione fu accettata e ulteriormente giustificata da KLEIN, *Bemerkungen*, ecc. (citata), Nota a p. 550, che chiamò « *ungerwöhnlich* » il nuovo ordine di connessione, DYCK, *Beiträge*, ecc. (citata), pp. 483-485, NEUMANN C., *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'sche Integrale* [Leipzig, Teubner, 1884], Cap. VII, § 6 e 15. Differisce invece dalle precedenti la definizione di DE PAOLIS, loco cit.⁽²⁵⁾, p. 84, benchè il suo *numero fondamentale* coincida col nostro ordine di connessione; invero questo Autore assume come ordine di connessione per le falde chiuse il numero fondamentale *aumentato di due unità*. Per il caso delle falde unilateri l'ordine di connessione fu per la prima volta definito (in modo esplicito) da DYCK nella Memoria più volte citata, p. 485, in relazione al punto di vista di KLEIN-SCHLÄFLI (cfr. le citazioni della nota⁽²¹⁾) ch'è quello di ridurre bilatera ogni falda unilatera considerandola come *doppia*, cioè contando ogni punto una volta come appartenente ad una faccia, e una seconda come appartenente all'altra. Tale ordine di connessione Z' è legato dalla relazione $Z' = 2Z - 2$ (che avremo occasione di considerare in una ulteriore Nota) a quello da noi definito in accordo colle citate opere di NEUMANN, DE PAOLIS. La formola (8) trovasi per la prima volta nella citata Memoria di SCHLÄFLI, *Ueber*, ecc., Nota a p. 152; dimostrazioni di essa (relative a differenti punti di partenza per la definizione di Z) si trovano nel trattato di NEUMANN a p. 160, teor. VIII e nella Memoria di DE PAOLIS a p. 78-79.

⁽²⁷⁾ Per il significato delle locuzioni qui usate rimandiamo al § 3, n.º 11.

⁽²⁸⁾ Vedi p. es. SEVERI, *Lezioni di Geometria Algebrica* [Padova, Draghi (1908)], n.º 79, pp. 272-277.

⁽²⁹⁾ Questo teorema fu stabilito, per le falde bilatere da JORDAN, loco cit.⁽¹⁷⁾, per quelle unilateri da DYCK, loco cit.⁽¹⁷⁾. Una dimostrazione indipendente dall'assegnare « a priori » i modelli delle falde unilateri (come ha fatto il DYCK) può leggersi nel citato Articolo dell'Enciclopedia di DEHN ed HEEGAARD.

OSSERVAZIONE. Non può sorgere dubbio circa la validità di questo teorema anche per le falde infinite. Invero ogni falda F di S_n può trasformarsi in una falda *finita* F' ad essa equivalente. Basta perciò trasformare F mediante il sistema di tutte le quadriche di S_n , riferendole, mediante una proiettività *reale*, agli iperpiani di un $S_{n'}$ ($n' = \binom{n+2}{2} - 1$) in modo che allo $S_{n'-1}$ improprio di $S_{n'}$ risponda in S_n una ipersfera col centro in un punto esterno ad F e raggio minore della minima distanza di questo punto da F . La F' si può poi proiettare in una falda F'' *finita* appartenente allo spazio ordinario; e non è difficile far vedere che se il centro di proiezione è scelto genericamente la falda F'' rientra anch'essa (come F' ed F) nella definizione del n.º 5 ed è equivalente ad F' .

§ 3.

LE PROPRIETÀ DI CONNESSIONE CONSIDERATE DI FRONTE ALLE TRASFORMAZIONI CHE INTRODUCONO PUNTI FONDAMENTALI.

TEOREMA DI KLEIN. MODELLI. OMOLOGIE SULLE FALDE UNILATERE.

9. Veniamo ora a studiare l'influenza che hanno sulla connessione delle falde quelle trasformazioni che, pur essendo biunivoche senza eccezione fra gl'intorni di due punti generici, presentano in punti particolari determinate eccezioni. Per semplicità di trattazione supporremo, in tutto questo paragrafo, che si tratti di falde affatto prive di punti multipli, in modo che in ogni loro punto esista un unico intorno ben determinato.

Si trasformi una falda F , appartenente ad uno spazio qualunque, mediante il sistema di tutte le forme d'ordine sufficientemente elevato appartenenti a quello spazio, e passanti per un punto P di F . Si otterrà così una falda F' i punti della quale saranno in corrispondenza biunivoca continua con quelli di F ; anzi all'intorno di ogni punto Q di F *distinto da* P corrisponderà senza eccezioni l'intorno d'un punto Q' di F' , mentre ai punti di F infinitamente vicini a P nelle diverse direzioni risponderanno su F' punti d'una *curva chiusa* C' . E ciò in virtù di note proprietà sulle quali non ci sembra sia il caso d'insistere⁽³⁰⁾.

⁽³⁰⁾ Come pure sul fatto che F' rientra nella definizione del n.º 5. Se F è algebrica e priva di punti multipli, lo è anche F' , e in tal caso la cosa è evidente. Cfr. la nota (16).

Lo stesso accadrà della corrispondenza tra F ed una falda F_1 equivalente ad F' , e ciò si esprimerà dicendo che tra F ed F_1 ha luogo una corrispondenza biunivoca continua, dotata (su F) del punto fondamentale (ordinario) P a cui risponde su F_1 la curva fondamentale C (omologa di C' nella corrispondenza tra F' ed F_1); ovvero più brevemente dicendo che la falda F_1 è rappresentata sulla falda F dotata del punto fondamentale P .

Si costruisca ora una falda F_2 rappresentata sulla F_1 dotata del punto fondamentale P'_2 a cui corrisponda su F un punto P_2 che sarà infinitamente vicino a P'_1 se P_2 cade sulla curva fondamentale C di F_1 . Si avrà tra F ed F_2 una corrispondenza biunivoca continua dotata, su F , dei due punti fondamentali (distinti od infinitamente vicini) P_1, P_2 a cui corrisponderanno due curve distinte C_1, C_2 di F_2 .

Così procedendo arriveremo a costruire una falda F_m rappresentata sulla falda F dotata di m arbitrari punti fondamentali P_1, P_2, \dots, P_m distinti od infinitamente vicini, a cui corrispondono su F_m , m curve chiuse distinte C_1, C_2, \dots, C_m .

Ciò premesso diremo che tra due falde F, Φ intercede una corrispondenza biunivoca continua dotata, su F , dei punti fondamentali P_1, P_2, \dots, P_m e su Φ dei punti fondamentali Q_1, Q_2, \dots, Q_n , se due falde F_m, Φ_n , la prima delle quali sia rappresentata su F dotata dei punti fondamentali P_1, P_2, \dots, P_m , la seconda su Φ dotata dei punti fondamentali Q_1, Q_2, \dots, Q_n , risultano equivalenti.

Ora ci domandiamo: quale relazione intercede tra gli ordini di connessione di F, Φ ?

Per rispondere alla questione proposta consideriamo il caso più semplice di due falde F, F_1 legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata su F del punto fondamentale P a cui corrisponda la curva C_1 di F_1 . Siano Z, Z_1 gli ordini di connessione di F, F_1 .

Eseguiamo su F , nel punto P , un forellino infinitesimo, ed indichiamo con F' la falda così ottenuta. Ad ogni direzione m uscente da P corrisponderanno su F' due punti A, B situati sull'orlo Ω generato dal forellino (che si può supporre allargato riducendolo ad un circolo finito), e diametralmente opposti. Tagliamo inoltre F_1 lungo C_1 generando uno o due (nuovi) orli Ω_1 , e indichiamo con F'_1 la falda così ottenuta: Ogni punto M di C_1 si scinderà in due punti affacciati A_1, B_1 appartenenti ad Ω_1 .

Si supponga ora che la direzione m ed il punto M siano omologhi nella corrispondenza che intercede fra F ed F_1 ; allora ad un punto di F' che si

muove tendendo ad A corrisponderà un punto di F'_1 che si muoverà tendendo ad uno dei due punti A_1, B_1 , per esempio ad A_1 .

Movendosi con continuità il punto A lungo l'orlo Ω , anche A_1 varierà con continuità lungo Ω_1 , e poichè A, B , e analogamente A_1, B_1 non coincidono *mai*, così mentre A descriverà Ω ritornando alla posizione di partenza, A_1 descriverà l'intera curva Ω_1 che risulterà dunque *un* (solo) *orlo* in corrispondenza biunivoca con Ω .

Poichè la corrispondenza biunivoca tra F' ed F'_1 (dedotta da quella tra F ed F_1) non ha eccezioni fuori di Ω ed Ω_1 e di più, come abbiamo ora provato, questi orli si possono porre in corrispondenza biunivoca collegata con continuità a quella fra F' ed F'_1 , così F' ed F'_1 saranno *equivalenti*.

D'altronde l'ordine di connessione di F'_1 è eguale a quello di F_1 (n.º 8) mentre quello di F' è (per effetto del forellino) eguale a quello di F aumentato di una unità; si ha dunque

$$Z_1 = Z + 1.$$

Per passare da questa formola a quella relativa al caso più generale, basta osservare che due falde F e Φ legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata di un numero qualunque di punti fondamentali su F e su Φ , si possono sempre considerare come estremi d'una successione di falde $F, F_1, \dots, F_m, \Phi_n, \Phi_{n-1}, \dots, \Phi$ tali che a due consecutive fra esse si può applicare la relazione ora trovata (fatta eccezione per F_m e Φ_n che sono equivalenti). Si giunge allora senza difficoltà al seguente *teorema* (di KLEIN⁽³¹⁾).

Fra gli ordini di connessione Z, Z_1 di due falde F, Φ legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata di m punti fondamentali su F e di n su Φ ha luogo la relazione

$$Z + m = Z_1 + n. \quad (9)$$

⁽³¹⁾ *Bemerkungen*, ecc. (citata), pp. 556-557. La dimostrazione qui esposta è una semplificazione di quella di KLEIN, il quale tratta senz'altro il caso generale, lasciando però qualche dubbio per la validità del ragionamento nel caso che esistano punti fondamentali infinitamente vicini. Si badi che, volendosi porre dal punto di vista del suddetto Autore, se Φ è unilatera ed F bilatera, bisogna considerare quest'ultima come insieme di due falde distinte e contare Φ come doppia, cioè porre nella (9) $2Z - 2$ in luogo di $Z, 2m, 2n$ invece di m, n , e sostituire a Z_1 l'ordine di connessione Z'_1 di (SCHLÄFLI) KLEIN-DICK. Si ha allora

$$Z'_1 + 2n = 2Z - 2 + 2m,$$

cioè $Z'_1 = 2Z_1 - 2$ (cfr. la Nota⁽²⁶⁾).

Ritornando ora al caso delle due falde F, F_1 sopra considerate, osserviamo, che, siccome il taglio di F_1 lungo C_1 produce un solo orlo Ω_1 , così F_1 è certo unilatera, il che d'altronde è confermato dal fatto che a piccoli circoletti di F passanti per P rispondono su F_1 curve d'un medesimo sistema continuo segantisi in un punto. Procedendo analogamente si prova che:

Se tra due falde F, Φ intercede una corrispondenza biunivoca continua dotata di punti fondamentali sulla sola F , la falda Φ è unilatera.

La stessa conclusione vale se F contiene qualche punto fondamentale che non appartenga alle curve fondamentali omologhe dei punti fondamentali di Φ .

10. Stabiliamo ora qualche conseguenza ed applicazione interessante del teorema dimostrato.

Mediante una proiezione stereografica si può rappresentare il piano sopra una sfera dotata di un punto fondamentale. Poichè la sfera è una falda (bilatera) d'ordine di connessione 0 ($K = -2$, cfr. la nota⁽²⁴⁾), ne segue che il piano ha l'ordine di connessione 1.

Sia ora Φ una falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z , F una falda chiusa qualunque d'ordine di connessione $Z - m$. Segnati su F m punti arbitrari (p. es. distinti) P_1, P_2, \dots, P_m si potrà costruire una falda F_1 rappresentata sulla F dotata di quegli m punti fondamentali. In virtù del teorema precedente e dell'osservazione che lo segue, si conclude che F_1 è una falda chiusa unilatera d'ordine di connessione Z , cioè, per il teorema fondamentale, ch'essa è equivalente a Φ . Dunque:

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z si può rappresentare sopra un'arbitraria falda chiusa d'ordine di connessione $Z - m$ dotata di m punti fondamentali.

In particolare se $m = 0$, oppure $m = 1$ si ha che:

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z si può rappresentare sopra una sfera dotata di Z punti fondamentali, ovvero sopra un piano dotato di $Z - 1$ punti fondamentali.

Se il numero m ha la stessa parità di Z , in tal guisa che $Z - m$ sia pari, si può assumere come F una falda bilatera d'ordine di connessione $Z - m$, cioè una sfera con $\frac{Z - m}{2}$ manichi. Il minimo valore possibile per m è 1 se Z è dispari, 2 se Z è pari, e quindi:

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z dispari si può rappresentare sopra una sfera con $\frac{Z - 1}{2}$ manichi dotata di un punto fondamentale.

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z pari si può rappresentare sopra una sfera con $\frac{Z-2}{2}$ manichi dotata di due punti fondamentali.

Sia P un punto fondamentale (isolato) della falda F a cui risponda su Φ una curva chiusa C . Si immagini forata F nel punto P e allargato il foro in modo da ridurne il contorno ad un piccolo orlo circolare Ω sul quale due punti diametralmente opposti corrispondono ad un unico punto di C . Si supponga poi che ogni punto di Ω venga portato a coincidere col suo diametralmente opposto in tal guisa che due punti non diametralmente opposti si riguardino come distinti (altrimenti si ricadrebbe di nuovo nel punto fondamentale P); con tale operazione si sarà sostituito a P un sistema di punti in corrispondenza biunivoca continua con C , mediante il quale si viene a togliere l'eccezione prodotta dal punto fondamentale P nella corrispondenza tra F e Φ . Si dirà in tal caso che F ha, in corrispondenza a P , un *intreccio di 1.^a specie* ⁽³²⁾.

Possiamo formarci un'idea concreta di esso, immaginando incurvato il circoletto Ω come se lo si adattasse sopra una superficie cilindrica, e congiungendo le coppie di punti che su Ω erano diametralmente opposti, mediante segmenti rettilinei ciascuno dei quali si consideri come una *linea di passaggio*, avendo l'avvertenza di riguardare come distinti i punti eventualmente comuni a due linee siffatte ⁽³³⁾.

Da quanto ora si è esposto risulta chiaramente che:

Le falde F precedentemente considerate diventano equivalenti a Φ se ai punti fondamentali si immaginano sostituiti altrettanti intrecci di 1.^a specie.

Si possono però ottenere dei *modelli* più espressivi per le falde unilatera facendo sparire l'eccezione alla corrispondenza tra F e Φ prodotta dal punto fondamentale P a cui corrisponde la curva C di Φ mediante il seguente procedimento:

Si deformi con continuità l'intorno di P riducendolo ad una mezza sferetta riunita ad F per il suo circolo massimo D , il quale abbia P come polo;

⁽³²⁾ La denominazione è di DE PAOLIS, loco cit. ⁽²⁵⁾, n.° 117, p. 69, ma la considerazione di tali intrecci, e di altri, detti da DE PAOLIS *intrecci di 2.^a specie*, è dovuta a ДУСК, loco cit. ⁽¹⁷⁾, p. 473.

⁽³³⁾ Questi punti costituiscono una *linea doppia* che si può considerare come *asse* dell'intreccio. La presenza d'una qualche singolarità non si può evitare perchè *non esistono falde unilatera chiuse finite, prive di singolarità*.

indi, mediante proiezione da P sul piano di D si trasformi la mezza sfera nella parte di quel piano esterna a D . Si sarà così sostituito all'intorno del punto fondamentale un foglio piano π che, dopo conveniente deformazione, si potrà immaginare riunito ad F mediante un tubo. Al punto fondamentale P , cioè alla curva C di Φ corrisponderà la retta impropria di π . Dunque:

Sostituendo ai punti fondamentali delle falde F precedentemente considerate, altrettanti fogli piani, ciascuno dei quali sia riunito ad F mediante un tubo, si ottengono delle falde equivalenti a Φ .

In particolare se Φ ha l'ordine di connessione Z dispari, si può, come abbiám visto, supporre, che F sia una sfera con $\frac{Z-1}{2}$ manichi ed un punto fondamentale; operando su questo come precedentemente si giunge, dopo facili deformazioni, ai modelli seguenti:

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione Z dispari è equivalente ad un foglio piano con $\frac{Z-1}{2}$ manichi, ovvero allo stesso foglio riunito ad una sfera per mezzo di $\frac{Z+1}{2}$ tubi, oppure ancora ad un piano sormontato da un ponte a $\frac{Z-1}{2}$ archi.

Se invece Z è pari partendo dalla falda bilatera F , d'ordine di connessione $\frac{Z-2}{2}$ dotata di due punti fondamentali, si arriva, in modo analogo, al risultato seguente:

Ogni falda unilatera chiusa, d'ordine di connessione Z pari, è equivalente all'insieme di due fogli piani, riuniti per mezzo di $\frac{Z}{2}$ tubi.

Risultati simili si possono stabilire per le falde unilatera dotate di orli. Così ad es. la nota *superficie di MÖBIUS* si può rappresentare sopra una sfera dotata di un foro e di un punto fondamentale, cioè sopra un elemento piano (ad es. l'area interna ad una circonferenza) con un punto fondamentale.

11. Ed ora occupiamoci di alcune importanti proprietà dei circuiti chiusi tracciati sopra una falda unilatera chiusa F , aventi relazione col concetto d'*omologia*. Queste proprietà, come parecchie fra quelle già studiate finora, non troveranno diretta applicazione nel seguito; però, siccome le crediamo nuove, e d'altronde servono a completare l'esposizione dei principali risultati inerenti alla connessione delle superficie, non ci è parso inutile dar loro posto in questa Memoria.

Per lo studio delle proprietà in questione, è assai utile valersi della rappresentazione d'una falda unilatera F , d'ordine di connessione Z , sopra una sfera S dotata di Z punti fondamentali P_1, P_2, \dots, P_Z , e tener conto dell'osservazione seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché un cammino chiuso tracciato su F inverta l'indicatrice, è che il suo corrispondente su S passi un numero dispari di volte per i punti fondamentali, la cui verità consegue subito dal fatto che quel cammino appartiene ad una famiglia di circuiti chiusi (i cui corrispondenti su S hanno lo stesso comportamento nei punti fondamentali), due a due segantisi in un numero dispari di punti.

Se ne deduce p. es. che:

Ogni falda chiusa unilatera F si può ridurre bilatera mediante un sol taglio chiuso. Esso produce un solo orlo se l'ordine di connessione di F è dispari, due se esso è pari⁽³⁴⁾.

Basta invero eseguire il taglio lungo un circuito il cui corrispondente su S passi una volta per tutti i punti fondamentali, ed osservare che ogni altro circuito chiuso di S il quale non incontra quello già segnato fuori dei punti fondamentali, deve passare un numero *pari* di volte per quei punti.

Rivolgiamoci ora allo studio delle *omologie* fra circuiti chiusi appartenenti alla nostra falda unilatera F . E anzitutto precisiamo, perchè ne vale la pena, cosa si debba intendere per circuiti omologhi su F .

Limitiamoci a considerare, ciò che del resto non è restrittivo, soltanto circuiti *omologhi a zero*. Secondo POINCARÉ⁽³⁵⁾ si definisce come tale un circuito C il quale costituisca la frontiera completa d'una falda Φ che sia parte di F , e si scrive $C \sim 0$.

Nel caso delle *falde bilatere* si può anche definire come omologo a zero un circuito C il quale sia riducibile ad un punto per deformazione continua operata su F ⁽³⁶⁾, giacchè si prova che tal definizione è equivalente alla pre-

⁽³⁴⁾ Cfr. DEHN ed HEEGAARD, loco cit. ⁽²³⁾, pp. 199-202.

⁽³⁵⁾ Loco cit. ⁽¹⁴⁾, § 5. Se alle parole *un circuito C il quale* si sostituiscono le altre *un circuito C tale che esso o un suo conveniente multiplo intero* (con che si ammette per definizione che dalla omologia $mC \sim 0$ si tragga $C \sim 0$) si ottiene un'altra definizione dovuta allo stesso POINCARÉ, *Complément à l'Analysis Situs* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XIII (1899), pp. 285-343], pp. 285-287.

⁽³⁶⁾ Cfr. p. es. SEVERI, loco cit. ⁽²⁸⁾, p. 273. S'intende che durante la deformazione il circuito si potrà spezzare in più parti. Riterremo lecito nel seguito aggiungere a C delle linee percorse una volta in un senso e una volta nell'altro, giacchè si prova subito che, con ambedue le definizioni, se è $C \sim 0$, lo è anche il circuito C' dedotto, e reciprocamente.

cedente. Per amore di brevità, non ci tratteniamo sulla dimostrazione, che del resto è semplice.

Non ci sembra invece privo di interesse dimostrare *che le due definizioni non sono equivalenti se la falda F è unilatera.*

Allo scopo, premettiamo due osservazioni.

Quando mediante una deformazione continua si vuol ridurre un circuito C (ovvero un circuito ottenuto da C coll'aggiunta di linee percorse una volta in un senso e una nell'altro) ad un punto, le sue intersezioni con un altro circuito chiuso D debbono, durante la deformazione, sparire due a due. Perciò se il numero delle intersezioni di C e D è *dispari* nè C nè D possono ridursi per deformazione continua ad un punto.

Supponiamo che il circuito D non inverta l'indicatrice, cioè che tagliando F lungo D si producano *due* orli. Rispetto a D si potranno distinguere allora due *lati* di F (destro e sinistro), attribuendo ad uno di essi quei punti vicini a D che stanno alla destra di un osservatore il quale disposto lungo la normale ad F (sopra una determinata faccia) guardando un verso segnato su D , la percorra in quel verso; all'altro lato quelli che stanno alla sinistra dell'osservatore medesimo.

Sia ora C un circuito chiuso di F , P un punto comune a C e D .

Fissato su C un verso di percorrenza, indichiamo con $S(P)$ l'unità positiva o negativa secondo che descrivendo C nel verso fissato si passa in P dal lato sinistro al lato destro di F rispetto a D , ovvero viceversa; indi poniamo con POINCARÉ $N(C, D) = \sum S(P)$, la sommatoria essendo estesa a tutti i punti comuni a C e D .

Ora è evidente che $N(C, D)$ non si altera aggiungendo a C delle linee percorse una volta in un senso e una nell'altro, ed è facilmente dimostrabile che esso non si altera neppure per una deformazione continua di C . Invero è ovvio che $N(C, D)$ non muta finchè qualcuno dei punti comuni a C e D non viene a sparire; e d'altronde la scomparsa di un punto P siffatto non può effettuarsi se prima esso non coincide con un analogo punto Q tale che $S(P) = -S(Q)$.

Da ciò segue subito che:

Condizione necessaria affinchè il circuito C sia riducibile ad un punto per deformazione continua è che sia $N(C, D) = 0$ ⁽³⁷⁾.

⁽³⁷⁾ POINCARÉ, loco cit. ⁽¹⁴⁾, § 9, dimostra, per le falde bilatere, la sufficienza di tal condizione; però il ragionamento dell'Autore (inteso a provare che se è $N(C, D) = 0$ è $C \sim 0$ nel senso sopra riportato) non è rigoroso. Vedi la Memoria dello stesso Autore citata ⁽³⁵⁾.

Consideriamo ora una falda unilatera F , d'ordine di connessione 2, rappresentata sopra una sfera S dotata di due punti fondamentali P_1, P_2 (Fig. 1) e su essa un circuito C il cui corrispondente su S , che indicheremo ancora con C , passi due volte per il punto fondamentale P_1 .

Tagliando F lungo C essa si spezza in due parti F', F'' corrispondenti alla regione non tratteggiata S' ed a quella tratteggiata S'' , su ciascuna delle quali, come si vede dalla figura, C costituisce la frontiera completa. Dunque secondo la definizione di POINCARÉ è $C \sim 0$.

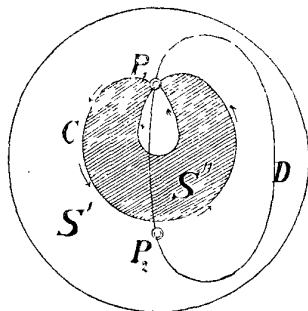


Fig. 1.

Si consideri ora un circuito D di F il cui corrispondente, D , di S passi semplicemente per P_1, P_2 . In virtù d'un'osservazione precedente possiamo affermare che lungo D l'indicatrice non s'inverterà, e dalla figura si trarrà subito $N(C, D) = 2$. Perciò il circuito C non è riducibile ad un punto per deformazione continua.

Constatata in tal guisa la non equivalenza delle due definizioni, sceglieremo per le nostre ricerche la seconda fra esse, chiamando omologhi due circuiti d'una falda unilatera quando siano riducibili uno all'altro per deformazione continua operata sulla falda stessa. Riterremo lecito, quando ci tornerà comodo, aggiungere o togliere all'uno o all'altro dei due circuiti delle linee percorse nei due sensi.

Consideriamo ora una falda unilatera F , d'ordine di connessione Z , rappresentata sopra una sfera S dotata di Z punti fondamentali P_1, P_2, \dots, P_Z . Indichiamo con K_i un piccolo circolo di S non racchiudente nell'interno alcuno dei punti fondamentali e passante per P_i , con C_i il circuito corrispondente di F . Fissiamo su ciascuno dei K_i un verso (in modo p. es. che tutti i versi siano concordanti su S) a cui corrisponderà su C_i un verso che assumeremo come positivo; e proviamo che ogni circuito chiuso C di F è omologo ad una *combinazione lineare* a coefficienti interi⁽³⁸⁾ di C_1, C_2, \dots, C_Z .

Infatti il circuito K di S corrispondente a C si può facilmente ridurre, mediante convenienti linee percorse una volta in un senso e una nell'altro, ad una somma di m_1 cicli del tipo K_1 , più m_2 cicli del tipo K_2, \dots , più m_Z cicli del tipo K_Z , più infine m cicli H riducibili su S ad un punto senza traversare P_1, P_2, \dots, P_Z a cui corrispondono su F cicli omologhi a zero. Poichè

(38) Per il significato di questa locuzione cfr. SEVERI, loco cit. (28), p. 273.

tutti i cicli del tipo K_i formano evidentemente un sistema continuo, così i loro corrispondenti su F saranno omologhi (a C_i), e quindi si avrà

$$C \sim m_1 C_1 + m_2 C_2 + \dots + m_Z C_Z, \tag{10}$$

c. d. d.

Ora domandiamoci: I cicli C_1, C_2, \dots, C_Z sono *indipendenti* nel senso che non siano legati da alcuna omologia a coefficienti interi? Per rispondere a questa domanda consideriamo su S un ciclo H riducibile ad un punto per deformazione continua senza attraversare P_1, P_2, \dots, P_Z e osserviamo che, mediante $2Z - 1$ linee percorse nei due sensi, esso si può ridurre alla somma di due circuiti K_1 , più due circuiti K_2, \dots , più due circuiti K_Z (cfr. la Fig. 2 per $Z = 2$). Dunque su F si ha l'omologia

$$2 C_1 + 2 C_2 + \dots + 2 C_Z \sim 0, \tag{11}$$

la quale prova che *i circuiti C_1, C_2, \dots, C_Z non sono indipendenti*. Invece $Z - 1$ fra essi, ad esempio C_2, \dots, C_Z , sono indipendenti perchè posto

$$C \sim n_2 C_2 + n_3 C_3 + \dots + n_Z C_Z$$

(n_2, n_3, \dots, n_Z interi ed $n_2 \neq 0$), indicando con D il ciclo di F che corrisponde ad un circuito chiuso di S passante semplicemente per P_1, P_2 (come nella Fig. 1), cioè un circuito omologo a $C_1 + C_2$, si ha $N(C, D) = n_2 > 0$.

Moltiplichiamo ora per 2 i due membri della (10) e sostituiamo nel 2.^o membro in luogo di $2 C_1$ il circuito ad esso omologo che si ricava dalla (11); otterremo l'omologia

$$2 C \sim 2 \lambda_2 C_2 + 2 \lambda_3 C_3 + \dots + 2 \lambda_Z C_Z \tag{12}$$

(in cui si è posto $\lambda_i = m_i - m_1$), la quale ne dice che il doppio d'ogni circuito chiuso di F è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti *pari* dei $Z - 1$ circuiti indipendenti C_2, C_3, \dots, C_Z . Facendo uso di un linguaggio tolto alla teoria delle superficie algebriche possiamo dire che *sulla falda unilatera F i $Z - 1$ circuiti indipendenti C_2, \dots, C_Z formano una base intermedia*ria⁽³⁹⁾.

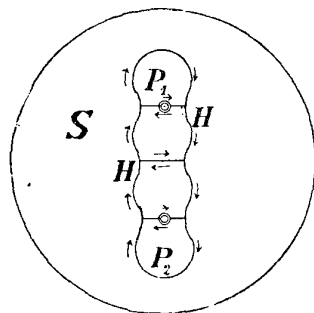


Fig. 2.

(39) SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* [Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, XXV (1908), pp. 449-468]. Se la falda F si

Possiamo ora domandarci se dalla (12) sia lecito ricavare

$$C \sim \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \dots + \lambda_Z C_Z, \tag{13}$$

cioè se i circuiti C_2, C_3, \dots, C_Z costituiscano su F una *base minima*. Ciò sarebbe possibile qualora su F la divisione per 2 di un circuito chiuso fosse un'operazione univoca (rispetto alle relazioni d'omologia); ma noi proveremo che ciò in generale non si verifica.

Invero se il coefficiente m_1 della (10) è dispari, la (13), tenuto conto della (11) condurrebbe alla

$$C_1 + C_2 + \dots + C_Z \sim 0;$$

mentre fra i circuiti C_1, C_2, \dots, C_Z non può esistere nessuna omologia

$$\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \dots + \mu_Z C_Z \sim 0, \tag{14}$$

in cui qualcuno dei coefficienti μ sia dispari, perchè, se ad es. lo fosse μ_1 , il circuito del primo membro di (14) si potrebbe ridurre, mediante una deformazione, a segare in un numero *dispari* μ_1 di punti il ciclo C_1 .

Se ne deducono le seguenti conseguenze:

Anzitutto: *Sopra una falda unilatera F la divisione di un circuito per un intero non è operazione univoca.* Precisamente si può provare che, se l'intero è pari, la divisione può dar luogo a due circuiti distinti. Così ad. es., se F è un piano ($Z=1$) il ciclo C_1 sopra considerato è una retta, e il suo doppio $2 C_1$ è omologo ad una conica, la quale si può anche dividere in due circuiti omologhi a zero. In tal caso per la (11) si ha $2 C_1 \sim 0$, cioè $C_1 \sim -C_1$; e invero una retta, mediante una rotazione, può sovrapporsi a se stessa invertita di senso.

Inoltre: *Nessuno dei circuiti C_1, C_2, \dots, C_Z può esprimersi come combinazione lineare dei rimanenti;* da cui segue che, in generale, nel secondo membro della (10) non si può diminuire il numero dei termini e quindi che:

Sulla falda unilatera F i Z circuiti C_1, C_2, \dots, C_Z costituiscono una base minima.

considera come doppia, con che, come si è già osservato, bisogna assumerne l'ordine di connessione eguale a $2(Z-1)$, si prova che ogni circuito chiuso di essa è omologo ad una combinazione lineare dei $2(Z-1)$ circuiti $2 C_2, \dots, 2 C_Z, C_1 + C_2, \dots, C_1 + C_Z$ che, su F doppia, sono indipendenti.

Sopra una falda bilatera ogni circuito chiuso è notoriamente omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle $Z = 2p$ retrosezioni Riemanniane, le quali sono indipendenti. Ne segue subito che su quelle falde la divisione è univoca, ecc.

12. Terminiamo il presente paragrafo coll'esame di un caso particolare. Sia Φ una falda chiusa in corrispondenza biunivoca con una sfera S che presenti eccezioni (nel campo reale) in tre punti fondamentali P_1, P_2, P_3 di S a cui corrispondono tre curve chiuse C_1, C_2, C_3 di Φ passanti per un punto fondamentale P corrispondente ad una curva chiusa C di S che passa (semplicemente) per P_1, P_2, P_3 .

Se p. es. si proiettano un iperboloido ad una falda I e la sfera S da un loro punto generico sopra un piano π , indi si assumono come corrispondenti due punti di I, S che siano proiezioni d'uno stesso punto di π , si viene ad ottenere, fra I ed S , una corrispondenza che presenta le eccezioni suddette.

Sopra S non si possono tracciare circuiti chiusi passanti un numero dispari di volte per i punti fondamentali e non seganti, fuori di essi, la curva C ; perciò Φ è bilatera e inoltre, come segue dal teorema di KLEIN, ha l'ordine di connessione 2.

Si potrà dunque assumere come modello di Φ un toro; perciò un iperboloido ad una falda ed un toro sono equivalenti.

Ma si può andare più avanti realizzando una trasformazione birazionale senza eccezioni (nel campo reale) che muti una nell'altra le due superficie.

Si rappresenti invero realmente un toro T sopra un piano π in tal guisa che alle sezioni piane di T corrisponda il sistema ∞^3 delle quartiche con due punti base doppi R_1, R_2 reali e quattro punti base semplici imaginari (coniugati due a due). La trasformazione ω fra T e π avrà come elementi eccezionali, nel campo reale, i punti fondamentali R_1, R_2 e la retta fondamentale $r \equiv R_1 R_2$ a cui corrisponde un punto (semplice) di T ⁽⁴⁰⁾.

(40) La rappresentazione piana del toro

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

generato dalla rotazione intorno all'asse z d'un circolo di raggio r col piano passante per l'asse z e col centro sul piano $z=0$ a distanza R dall'origine, è data dalle formole

$$x = \rho \frac{u^2 - \rho^2}{u^2 + \rho^2} \frac{\rho^2 + v^2 - 2\rho r}{v^2 + \rho^2}, \quad y = \frac{2u\rho^2}{u^2 + \rho^2} \frac{\rho^2 + v^2 - 2\rho r}{v^2 + \rho^2}, \quad z = \frac{2\rho r v}{v^2 + \rho^2},$$

in cui si è posto $\rho = R + r$. I punti R_1, R_2 sono impropri sugli assi u, v e i punti fondamentali imaginari sono $u = \pm i\rho, v = \pm i\sqrt{\rho^2 - 2\rho r}$.

Colle stesse eccezioni nel campo reale si potrà evidentemente rappresentare su π un iperboloide ad una falda I , mediante una proiezione σ da un suo punto; e la trasformazione birazionale $\tau \equiv \omega \sigma^{-1}$ adempierà all'ufficio richiesto ⁽⁴¹⁾.

§ 4.

CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI CON UNA FALDA CIOÈ RAPPRESENTABILI REALMENTE SUL PIANO.

13. Veniamo ora a trar profitto dai risultati dei paragrafi precedenti applicandoli a studiare la connessione delle superficie razionali.

Anzitutto, poichè le superficie che considereremo potranno esser dotate di singolarità arbitrarie, converrà stabilire quale sia la loro influenza sulle proprietà di connessione.

La convenzione che appar più naturale ed alla quale noi ci atterremo (salvo in una breve discussione finale nella quale esamineremo un altro punto di vista) sarà quella di attribuire alle singolarità la stessa influenza che avrebbero se fossero risolte, cioè di considerare ogni superficie F come equivalente (dal punto di vista della connessione) ad un'altra F_0 nella quale le singolarità siano risolte, che si considererà come *modello* di F .

Tuttavia per costruire questo modello — cioè per risolvere le singolarità di F — la strada non è univocamente determinata, e sorgono in proposito varî dubbî, a dissipare i quali non sembra sufficiente tener conto dell'avvertenza di *non introdurre eccezioni estranee alle singolarità* durante la loro risoluzione.

Sarà dunque utile, per evitare al seguito interpretazioni erronee o discutibili, precisare senza ambiguità la costruzione del modello F_0 .

Partiremo perciò dalla rappresentazione piana *normale* della superficie F , supponendo che essa presenti il caso α) del Teorema enunciato al n.º 1, e riservandoci di trattare in seguito brevemente i casi β) γ). Indichiamo con Σ

⁽⁴¹⁾ Il confronto fra l'iperboloide ad una falda ed il toro, dal punto di vista della connessione, istituito in modo erroneo da SCHLÄFLI nella citata Memoria *Quand'è*, ecc., fu ripreso da KLEIN nei citati lavori dei Math. Ann. VI (pp. 578-581) e VII, p. 552. In quest'ultima Memoria l'Autore si pone dal nostro punto di vista e trova gli stessi risultati.

il sistema lineare (privo di curve fondamentali semplici) imagine, sul piano π , di quello delle sezioni piane od iperpiane di F , con A_1, A_2, \dots, A_m i suoi punti base (punti fondamentali della rappresentazione), con τ la trasformazione (di tipo normale) imagine del coniugio di F , in cui è unito Σ .

Denominiamo *sistema* L un sistema lineare ∞^r ($r \geq 3$) unito in τ , privo di curve fondamentali, avente per punti base impropri A_1, A_2, \dots, A_m e tale che le curve di esso passanti per un punto *qualunque* di π (anche infinitamente vicino ai punti base) non passino di conseguenza per altri punti nè abbiano genere inferiore a quello della generica L . Se $|C$ è il sistema delle curve d'ordine abbastanza elevato che passano, con qualche direzione variabile, per A_1, A_2, \dots, A_m , e $|C'|$ il suo corrispondente in τ , si può ad es. soddisfare alle condizioni imposte ad L mediante il sistema completo $C + C'$.

Stabilendo una proiettività fra le curve di L e gl'iperpiani di un S_r in modo che all'antiproiettività subordinata entro L da τ corrisponda il coniugio di S_r (cfr. F. n.º 12), il piano π si muterà in una superficie razionale reale F_0 , priva di singolarità che assumeremo come modello di F .

Tale definizione di F_0 è priva di ambiguità perchè un altro modello F'_0 costruito cogli stessi criteri è, come ora proveremo, equivalente ad F_0 .

Invero F'_0 si costruirà come F_0 , a partire da un sistema L' , analogo ad L , relativo ad un'altra rappresentazione normale di F sopra un piano π' , per cui conserveremo le stesse notazioni della precedente, munite di apice. È da notarsi che i punti base di Σ' saranno ancora m (F. pag. 31); li indicheremo con A'_1, A'_2, \dots, A'_m .

L'identità di F induce fra π e π' una trasformazione birazionale σ che muta π in π' . Gli h punti fondamentali di σ su π e π' cadranno tutti in punti base di Σ e Σ' (F. pag. 31), p. es. in $A_1, A_2, \dots, A_h; A'_1, A'_2, \dots, A'_h$, e ad essi corrisponderanno, rispettivamente, su π', π le curve (non fondamentali per Σ', Σ) $C'_1, C'_2, \dots, C'_h; C_1, C_2, \dots, C_h$.

Alla trasformazione σ , cioè all'identità di F corrisponde una trasformazione birazionale reale ω fra F_0 ed F'_0 ; e si prova subito che essa è priva di eccezioni (anche nel campo complesso).

Invero, se P è un punto qualunque di F_0 , il suo corrispondente Q di π potrà:

- a) esser generico (nel senso che non abbia le posizioni eccezionali suddette);
- b) cadere su qualcuna delle curve C_1, \dots, C_h ;
- c) appartenere — in una determinata direzione — all'intorno d'uno dei punti A_1, \dots, A_m .

Nel caso α) il punto Q' di π' omologo di Q in σ sarà pure generico, e perciò gli corrisponderà un punto P' di F'_0 ; nei casi b) c), Q' potrà cadere o nell'intorno d'uno dei punti A_1, \dots, A_m , ovvero su una delle curve C'_1, \dots, C'_n . Dunque il suo corrispondente P' sarà sempre *un punto* di F'_0 .

Se il sistema Σ presenta le eccezioni contemplate nei casi β) γ) del Teorema enunciato al n.º 1, la superficie F_0 si costruisce a partire da un sistema L soddisfacente alle condizioni precedenti modificate nel senso che L abbia per sole curve fondamentali (semplici) le rette che così si comportano rispetto a Σ .

La costruzione d'un sistema L siffatto non offre alcuna difficoltà.

OSSERVAZIONE. Le condizioni imposte ad L non sono tutte in generale strettamente necessarie; se p. es. alcuni fra i punti A_1, \dots, A_m si corrispondono in τ (cioè le curve omologhe su F sono immaginarie coniugate) si può togliere ad L l'imposizione di averli come punti base, giacchè a noi importa che su F_0 sian risolte le singularità *reali* di F senza che si introducano *nel campo reale* eccezioni estranee a quelle singularità. Si possono analogamente imporre ad L tante quante si vogliono coppie di punti base corrispondenti in τ .

Così, se F è un cono quadrico di S_3 , cioè se Σ è il sistema reale ∞^3 delle coniche con due punti base P_1, P_2 infinitamente vicini, si può assumere come L il sistema reale ∞^3 delle cubiche con un punto doppio in P_1 , un punto semplice in P_2 e due ulteriori punti base immaginari coniugati. F_0 è allora una *quadrica rigata*.

Dunque, per noi, un cono dovrà considerarsi come una falda *bilatera* d'ordine di connessione 2. Si osservi in proposito che se si considera un osservatore eretto sul piano tangente e mobile lungo una generatrice, esso dovrà *capovolgersi* all'atto del passaggio per il vertice, altrimenti il cono risulterebbe unilatero. E ciò corrisponde alla circostanza che se si sposta sul cono l'indicatrice facendone scorrere i punti di eguali segmenti sulle generatrici che li contengono, il verso di essa si inverte, all'atto del passaggio per il vertice, se l'osservatore guarda sempre la medesima faccia del piano tangente; come pure all'altra che se sopra un iperboloido ad una falda si considerano due punti M, N d'una medesima generatrice, equidistanti dall'intersezione di essa coll'ellisse di gola, l'angolo α di cui ruota il piano tangente nel passaggio da M ad N , ha per limite π quando l'ellisse di gola si restringe indefinitamente in modo da tendere al vertice d'un cono.

14. D'ora in poi parlando d'una superficie F , intenderemo di considerarla sempre come equivalente al modello F_0 .

Trattiamo, per primo, del caso in cui F ha una falda, cioè, nella rappresentazione normale, τ è il coniugio e quindi Σ (ed L) un sistema reale. Distinguiamo, secondo il Teorema del n.º 1, tre casi:

α) Σ è privo di curve fondamentali semplici ed ha m punti base, di cui r reali e $2i$ a coppie imaginari coniugati. Le eccezioni (nel campo reale) alla corrispondenza tra il piano π ed F cadono soltanto negli r punti base reali di Σ che sono fondamentali per essa, mancando affatto su F punti siffatti perchè alle curve fondamentali di Σ (non semplici) rispondono su F intorno di punti multipli che si mutano in curve sul modello F_0 . Perciò (n.º 9) F è unilatera ed ha l'ordine di connessione $Z = r + 1$. Poichè inoltre (F. n.º 21) l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I relativo ad F è eguale ad $r + 2i - 1$, così si hanno le relazioni

$$I - Z = 2(i - 1), \quad I + Z = 2(r + i), \quad (15)$$

da cui seguono le

$$I \equiv Z \pmod{2}, \quad Z \leq I + 2, \quad (16)$$

il segno $=$ valendo solo quando $i = 0$. È da notarsi che, dato I , esistono superficie F con una falda, relative a qualunque valore di Z compatibile colle (16); esse si ottengono assumendo come sistema Σ quello delle curve d'ordine abbastanza elevato che passano per $r = Z - 1$ punti reali e per $2i = I + 2 - Z$ coppie di punti imaginari coniugati, generici, del piano π .

β) Ci sono due sottocasi:

1.º) I due punti fondamentali P_1, P_2 appartenenti alla retta r ch'è fondamentale (semplice) per Σ sono imaginari coniugati, e inoltre Σ ha altri $2i$ punti base pure imaginari coniugati. Il modello F_0 (costruito mediante le coniche per P_1, P_2) è una sfera, e perciò F ha $Z = 0$ e $I = 2i$ (cfr. F., nota ***) a pag. 30).

2.º) P_1, P_2 son reali, e inoltre Σ ha altri $2i$ punti base a coppie imaginari coniugati; F_0 è un iperboloide ad una falda od un toro e quindi F ha $Z = 2, I = 2i$.

In definitiva valgono sempre le relazioni (16), e di più si ha

$$\left. \begin{array}{ll} I - Z = 2i, & I + Z = 2i, & \text{se } F \text{ è del tipo sfera,} \\ I - Z = 2(i - 1), & I + Z = 2(i + 1), & \text{se } F \text{ è del tipo toro.} \end{array} \right\} (15')$$

γ) Siano p_1, p_2, \dots, p_m le rette fondamentali (semplici) di Σ uscenti dal

punto base reale O , e contenenti rispettivamente i punti base P_1, P_2, \dots, P_m infinitamente vicini ad O ; fra questi, ν , colle relative rette, siano reali, e 2ν a coppie imaginari coniugati. Inoltre Σ abbia altri r punti base reali, e $2i$ imaginari coniugati.

Si ha allora subito $I = r + 2i$, e siccome le eccezioni (nel campo reale) alla corrispondenza tra π ed F (o F_0) cadono, su π , nei $\nu + r + 1$ punti base reali, e su F in μ punti semplici omologhi delle rette fondamentali, così dal teorema di KLEIN si deduce $Z = r + 2$. Valgono quindi anche in questo caso le (16) e si hanno inoltre le

$$I - Z = 2(i - 1), \quad I + Z = 2(r + i + 1). \quad (15'')$$

Proviamo ora che se $r > 0$, cioè se $Z > 2$, la superficie F è unilatera. Invero, mediante il sistema delle curve d'ordine n abbastanza elevato che hanno in O un punto $n - 1$ -plo, e in P_1, \dots, P_m punti base semplici, si costruisca una superficie reale (rigata) Φ (d'ordine di connessione 2); indi si osservi che nella corrispondenza reale che resta subordinata tra Φ ed F dal fatto che ambedue son rappresentate realmente su π , le eccezioni dipendenti dai punti O, P_i e dalle rette p_i sono scomparse, mentre rimangono (nel campo reale) solo quelle dipendenti da r punti fondamentali reali che esistono su Φ . Dunque (n.º 9) F è unilatera.

Sia ora $r = 0$, cioè $Z = 2$; mostriamo che F è bilatera od unilatera secondo che ν è dispari o pari. Perciò eseguiamo dapprima una trasformazione quadratica reale del piano π in un altro piano σ , assumendo, su π , come punti fondamentali, O e due punti imaginari coniugati sopra una retta reale α , non passante per O . Le eccezioni, nel campo reale, alla corrispondenza fra σ ed F cadranno su σ :

In un punto Ω corrispondente ad α ;

In ν punti (distinti fra loro e da Ω) Q_1, Q_2, \dots, Q_μ situati sulla retta reale u omologa di O e congiunti ad O da ν rette fondamentali (semplici) q_1, q_2, \dots, q_ν (corrispondenti a p_1, p_2, \dots, p_μ). Non vi sono altre curve fondamentali semplici, perchè se u è retta fondamentale — il che accade quando O è punto base proprio per Σ — essa non è semplice (F. pag. 26, Oss. II e nota *) a pag. 27).

Trasformando mediante proiezione stereografica il piano σ in una sfera S si avranno su questa μ cerchi massimi fondamentali $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\mu$ segantisi in due punti fondamentali A, B , e contenenti rispettivamente i punti R_1, R_2, \dots, R_μ pure fondamentali.

Sia ora C un ciclo chiuso di F che si potrà supporre — dopo una eventuale deformazione — non passi per i punti (semplici) che corrispondono ad $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\mu$. Il ciclo corrispondente K di S taglierà i cerchi ω_i solo nei punti fondamentali, passando α volte per A , β volte per B , ed r_1, r_2, \dots, r_μ volte rispettivamente per R_1, R_2, \dots, R_μ .

Siccome K è chiuso, il numero $k_i = \alpha + \beta + r_i$ dei suoi incontri con ω_i sarà *pari*, e perciò, se μ è dispari, risulterà pari anche il numero complessivo N dei passaggi di K per i punti fondamentali, che è espresso dalla formola

$$N = \alpha + \beta + \sum_{i=1}^{\mu} r_i = \sum_{i=1}^{\mu} k_i - (\mu - 1)(\alpha + \beta).$$

Se ne dedurrà, in base ad una osservazione del n.º 11, che in tal caso nessun circuito chiuso di F invertirà l'indicatrice, e quindi che F sarà *bilatera* (e perciò, avendo $Z = 2$ apparterrà al tipo *toro*). Invece, se μ è pari, assumendo, come è lecito, K in guisa che $\alpha + \beta$ sia dispari (ad es. $\alpha = 1, \beta = r_1 = r_2 = \dots = r_\mu = 0$), N risulterà dispari e quindi F sarà *unilatera*.

La conclusione definitiva è che:

L'ordine di connessione Z d'una superficie razionale reale con una falda (rappresentabile realmente sul piano) è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad 0 \leq Z \leq I + 2; \quad (I)$$

e, per ogni dato valore di I esistono superficie del tipo suddetto corrispondenti a tutti i valori di Z che son compatibili colle relazioni stesse.

Inoltre:

Tutte le superficie razionali reali con una falda, aventi l'ordine di connessione $Z > 2$ sono unilatere. I tipi bilateri si hanno solo per $Z = 0, 2$ e i rispettivi modelli sono la sfera ed il toro..

Per i modelli delle falde unilatere rimandiamo al paragrafo precedente, e per qualche esempio all'ultimo paragrafo di questa Memoria.

Qui termineremo facendo notare che dall'ultimo enunciato si deduce la seguente:

OSSERVAZIONE. *Fra le superficie razionali reali non esistono modelli di Riemanniane aventi il genere superiore ad 1.*

§ 5.

CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI CON PIÙ FALDE
APPARTENENTI ALLA I^a, II^a e III^a FAMIGLIA.

15. Per studiare la connessione d'una superficie razionale reale F , dotata di più falde, ci atterremo costantemente al criterio di confrontarla con una superficie Φ della sua classe (cioè trasformata birazionale reale di F), la cui connessione si sappia determinare direttamente, valendosi p. es. dell'equazione di Φ . La superficie Φ si sceglierà in modo che i punti base del sistema Σ , relativo alla rappresentazione normale di Φ , che non sono fondamentali per la trasformazione τ , non siano uniti in τ , cioè siano due a due corrispondenti ovvero manchino affatto. La ragione di tal scelta della superficie Φ sta principalmente in alcune importanti proprietà che ora ci proponiamo di stabilire.

Anzitutto: *Due superficie Φ appartenenti alla stessa classe sono equivalenti dal punto di vista della connessione.*

Siano Φ, Φ' quelle due superficie, $\Sigma, \tau, \Sigma', \tau'$ rispettivamente i sistemi lineari e le trasformazioni relativi alle loro rappresentazioni normali su π, π' . Possiamo addirittura, per maggior chiarezza, supporre che Φ, Φ' sian due modelli privi di singolarità relativi alle superficie stesse, in modo che Σ, Σ' siano affatto privi di curve fondamentali e dotati di punti base tutti impropri. Fra i punti base di Σ ci saranno tutti i punti fondamentali di τ , a ciascuno dei quali corrisponderà una curva (non reale) di Φ ; gli ulteriori punti base saranno due a due corrispondenti in τ . Analogamente per Σ', Φ' .

Poichè Φ, Φ' appartengono alla stessa classe, esisterà una trasformazione birazionale ω che muterà τ in τ' ; ed essa indurrà fra Φ e Φ' una trasformazione birazionale reale Ω .

Se ω è l'identità, cioè se τ, τ' coincidono, Ω è priva di eccezioni nel campo reale. Invero ad ogni punto reale di Φ corrisponde su π un punto unito in τ che non è base per Σ e Σ' (e che eventualmente potrà cadere, in una direzione unita, nell'intorno di qualcuno dei punti fondamentali di τ), il cui omologo su Φ' è quindi *un punto* reale.

La stessa cosa si può affermare, nè vale la pena di entrare nei dettagli d'un ragionamento analogo al precedente, se i punti fondamentali di ω su π e π' cadono in punti base di Σ e Σ' .

Da ciò segue subito la verità del teorema enunciato, per le superficie della II^a e III^a famiglia. Invero, riferendosi p. es. al primo caso, se Φ e Φ' appartengono alla II^a famiglia, τ e τ' sono trasformazioni di 8.^o ordine con 7 punti tripli, ciascuna delle quali lascia unita una rete di cubiche coi 7 punti base generici (F. n.^o 37) e quindi priva di curve fondamentali. Poichè si può supporre che ω muti l'una nell'altra quelle due reti (F. § 7, n.^o 49), i suoi punti fondamentali su ciascuno dei due piani cadranno tutti in punti base delle reti stesse, che son fondamentali per τ, τ' , e quindi base per Σ, Σ' .

Il caso delle superficie appartenenti alla I^a famiglia domanda una discussione più accurata. Ricordiamo (F. § 6, 7) che allora τ è una trasformazione d'ordine $m + 1$ con un punto fondamentale m -plo O e $2m$ punti fondamentali semplici P_i ($i = 1, 2, \dots, 2m$) aventi ordinatamente per omologhe le rette $p_i = OP_i$. Su ciascuna delle rette reali (supposto, come è lecito, che lo sia O) del fascio O la τ subordina un'antiproiettività involutoria, che può esser dotata di (infiniti) punti uniti, oppure no; e le rette per cui vale la prima delle due proprietà son tutte quelle che cadono entro m angoli completi non adiacenti, ciascuno dei quali è determinato da due rette fondamentali consecutive; per esempio negli angoli $\alpha_i = p_{2i-1} p_{2i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). All'insieme dei punti uniti che cadono entro l'angolo α_i , rispondono i punti (reali) di una fra le m falde di Φ , che denoteremo con A_i . Adotteremo le stesse lettere, munite di apice, per la trasformazione τ' e la superficie Φ' , tenendo conto del fatto che i due gruppi di rette p_i, p'_i son proiettivi (F. n.^o 47), e attribuendo lo stesso indice a due rette corrispondenti in tale proiettività σ .

Ricordiamo ancora che si può sempre costruire una trasformazione birazionale ω , la quale muti τ in τ' subordinando fra i fasci O, O' la proiettività σ . Se P è un punto fondamentale di ω , su π , la retta p' del fascio O' corrispondente ad OP in σ sarà fondamentale (per ω) su π' , e conterrà un punto fondamentale Q' a cui corrisponderà la retta $q = OP$ (⁴²).

(⁴²) I punti e le rette fondamentali di ω si possono supporre *distinti*. Se le equazioni di τ, τ' su $\pi(x, y), \pi'(X, Y)$ sono (F. n.^o 48)

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \frac{a(\bar{x})\bar{y} + B(\bar{x})}{C(\bar{x})\bar{y} - \bar{a}(\bar{x})}; \quad X' = \bar{X}, \quad Y' = \frac{a'(\bar{X})\bar{Y} + B'(\bar{X})}{C'(\bar{X})\bar{Y} - \bar{a}'(\bar{X})},$$

con $a\bar{a} + BC \equiv a'\bar{a}' + B'C'$, si può prendere come ω la trasformazione

$$X = x, \quad Y = \frac{B'(x)y}{(a'(x) - \bar{a}(x))y + B(x)},$$

Consideriamo ora la trasformazione reale Ω indotta fra Φ e Φ' da ω . Essa non avrà eccezioni fra quei punti di Φ e Φ' a cui corrispondono, su π e π' , punti non fondamentali per ω e non appartenenti alle rette fondamentali; ma ne presenterà invece in corrispondenza ai punti e alle rette fondamentali di ω .

Se p. e. entro l'angolo α_1 esiste il solo punto fondamentale *unito* P (e quindi entro α'_1 il punto Q'), la Ω trasformerà biunivocamente la falda A_1 nella falda A'_1 e le eccezioni alla biunivocità della corrispondenza (fra A_1 ed A'_1) cadranno solo in due punti M, M' di A_1, A'_1 a cui corrisponderanno due curve chiuse m', m , passanti rispettivamente per M', M .

Se ne deduce immediatamente, per il teorema di KLEIN, che A_1, A'_1 hanno lo stesso ordine di connessione. Inoltre poichè il circuito m è omologo a zero su A_1 in quanto, facendo variare la retta q entro l'angolo α_1 tendendo a p_1 , m si deforma tendendo ad un punto, corrispondente all'unica direzione unita uscente da P_1 (ch'è quella di p_1), così ogni ciclo chiuso di A_1 taglierà m in un numero *pari* di punti.

Ne segue che, se A_1 è bilatera, non potrà essere A'_1 unilatera, perchè ad un circuito chiuso c' di A'_1 che invertisse l'indicatrice, e non passasse, come si può supporre, per M'_1 , dovrebbe rispondere su m un ciclo chiuso c non secante m fuori di M e passante ivi un numero dispari di volte. Dunque A_1, A'_1 saranno entrambe unilatera o bilatera e perciò equivalenti.

Dal teorema ora dimostrato si trae, con agevoli deduzioni, l'importante conseguenza:

Ogni superficie razionale reale F con più falde si può rappresentare sopra una qualunque superficie Φ della sua classe dotata di un numero r di punti fondamentali (reali), eguale a quello dei punti base del sistema Σ relativo alla rappresentazione piana normale di F , che sono uniti nella trasformazione τ .

Infatti, partendo dalla rappresentazione normale di F sopra un piano π , si costruisca, mediante un sistema lineare L privo di curve fondamentali, unito nella τ relativa ad F e avente i punti base solo in punti fondamentali di τ , una superficie Φ . La trasformazione birazionale reale fra F e Φ in cui si corrispondono due punti rappresentati dallo stesso punto di π , non ha eccezioni (nel campo reale) altro che in corrispondenza agli r punti base

le cui rette fondamentali su π sono $B(x)B'(x)=0$. Se le radici di questa equazione non sono distinte basterà prima trasformare τ (ed eventualmente τ') mediante una proiettività del tipo $x'=\alpha x, y'_i=\lambda y_i+\mu$, e si raggiungerà lo scopo.

di Σ (non fondamentali per τ) che sono uniti in τ ; a questi punti rispondono su Φ altrettanti punti fondamentali reali aventi per omologhe r curve chiuse di F .

Poichè d'altronde tutte le superficie Φ d'una classe sono equivalenti, ne segue che la stessa relazione si può porre tra F e una qualunque Φ .

Supponiamo ora che le falde di F siano tutte bilatere: dovrà allora essere $r = 0$, perchè la presenza di punti fondamentali reali su qualche falda di Φ porterebbe di conseguenza l'unilateralità della falda corrispondente di F . Perciò sarà F equivalente a Φ ; donde il notevole criterio:

Se fra le superficie d'una classe ve n'è una le cui falde sono tutte bilatere, essa è una superficie Φ .

Ed ora passiamo a studiare separatamente la connessione delle superficie appartenenti alle tre famiglie.

16. *I.^a famiglia.* Partendo da una qualunque superficie F , con m falde, costruiamone una trasformata reale le cui falde siano tutte bilatere. Perciò deduciamo anzitutto da F , mediante trasformazione birazionale reale, una superficie F' , avente equazione del tipo

$$z^2 = f(xy), \tag{17}$$

$f = 0$ essendo una curva d'ordine $2n$ dotata di un punto $2n - 2$ -plo O e di $2m$ tangenti reali di 1.^a specie (cioè tali che lungo esse f è negativa) uscenti da O (F. n.¹ 27, 31, 32). Indi osserviamo che se

$$x = \frac{\alpha(x'y')}{\gamma(x'y')}, \quad y = \frac{\beta(x'y')}{\gamma(x'y')},$$

sono le equazioni d'una trasformazione birazionale reale fra il piano xy ed il piano $x'y'$, la superficie

$$z'^2 = f(\alpha(x'y'), \beta(x'y')),$$

si ottiene dalla (17) mediante la trasformazione birazionale reale

$$x = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad y = \frac{\beta}{\gamma}, \quad z = \frac{z'}{\gamma^n};$$

e che perciò sarà lecito, per il nostro scopo, sostituire nella (17) in luogo di $f(xy)$ il 1.^o membro $\varphi(xy)$ dell'equazione d'una curva che si ottenga da

$f=0$ mediante una trasformazione cremoniana reale, preso con un segno determinato ⁽⁴³⁾.

Ora, mandando con una proiettività reale il punto O all'infinito sull'asse y , si otterrà da $f=0$ la curva

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0, \quad (18)$$

e da essa mediante la trasformazione reale

$$X = x, \quad Y = 2ay + b,$$

si passerà alla

$$Y^2 = D(X) \quad [D = b^2 - 4ac]. \quad (19)$$

Poichè possiamo supporre (F. n.º 27) che la curva $f=0$ e quindi anche la (18) sia priva di punti doppi (tal supposizione non è però qui strettamente necessaria), le radici di $D(X)=0$ saran distinte e fra esse alcune saranno certo reali perchè esistono tangenti reali di $f=0$ uscenti da O . Ne segue che per qualche valore α di X sarà $D(\alpha) < 0$, e quindi, se ν è l'ordine di D , mediante la trasformazione reale

$$X = \frac{ax + 1}{x} \quad Y = \frac{y}{x^\mu}$$

($2\mu = \nu$ se ν è pari, $= \nu - 1$ se ν è dispari), si passerà in definitiva alla curva

$$y^2 = \Delta(x), \quad (20)$$

Δ essendo un polinomio d'ordine pari, a radici distinte (fra cui alcune reali) tale che $\Delta(\infty) < 0$.

Ogni superficie F della Iª famiglia con $m > 1$ falde sarà quindi trasformabile realmente in una superficie avente equazione del tipo

$$z^2 = \pm (y^2 - \Delta(x)), \quad (21)$$

in cui il segno è ancora da determinarsi.

Per studiare la forma della curva $y^2 = \Delta(x)$, consideriamo, come è lecito, due radici reali consecutive a, b di $\Delta(x) = 0$ tali che sia $a < b$ e inoltre, per ε

⁽⁴³⁾ Insomma delle due superficie $z^2 = \varphi(xy)$, $z^2 = -\varphi(xy)$ che non si equivalgono per trasformazioni birazionali reali (cfr. F. nota **) a p. 36) una sola è equivalente in quel senso alla (17).

positivo e convenientemente piccolo $\Delta(a-\varepsilon) < 0$, $\Delta(b+\varepsilon) > 0$. Il polinomio Δ sarà positivo in tutto il segmento a, b dell'asse x e perciò ai punti di esso corrisponderanno due valori *reali e finiti* di y eguali e di segno opposto, in tal guisa che al variare di x nel segmento a, b il punto xy descriverà un *ramo* (reale) della curva $y^2 = \Delta(x)$ chiuso, privo di singolarità, tangente in a e b alle rette $x = a$, $x = b$ e racchiudente un'area A semplicemente connessa (Fig. 3). La curva $y^2 = \Delta(x)$ risulterà composta da un certo numero h di rami siffatti, distinti, e situati tutti al finito perchè è $\Delta(\infty) < 0$.

Ora osserviamo che il polinomio $y^2 - \Delta(x)$ è *negativo* entro tutte le aree A , *positivo* nell'unica regione piana R esterna a quelle aree. Perciò se nella (21) si scegliesse il segno $+$ ad ogni punto di R risponderebbero due punti *reali* della superficie rappresentata, che verrebbero a coincidere quando il punto cade sul contorno di R . Quindi la superficie stessa avrebbe una sola falda.

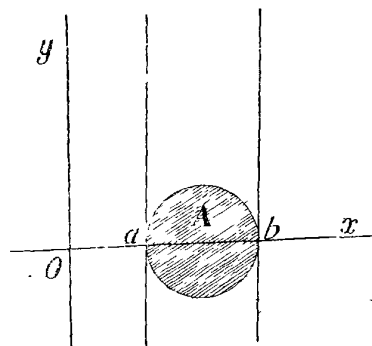


Fig 3.

Siccome F , e quindi anche la superficie trasformata che si ottiene dalla (21) per una conveniente scelta del segno, ha $m > 1$ falde, così nella (21) bisognerà scegliere il segno $-$; ed allora ad ogni punto di una delle aree A risponderanno due punti reali della superficie che in corrispondenza ad A descriveranno una falda chiusa, priva di singolarità, bilatera e del tipo sfera. Sarà dunque $h = m$, e si concluderà che:

In ogni classe di superficie della I^a famiglia con m falde, esiste una superficie Φ di equazione

$$z^2 + y^2 = \Delta(x),$$

colle falde tutte bilatere e d'ordine di connessione 0.

L'ordine di connessione di Φ sarà dunque per la (8) eguale a $-2m + 2$.

Ritorniamo ora a considerare una qualunque superficie F della I^a famiglia con m falde A_1, A_2, \dots, A_m ; il sistema Σ relativo alla sua rappresentazione piana normale abbia $2m + 1 + r + 2i$ punti base, di cui $2m + 1$ nei punti fondamentali di τ , r uniti in τ e $2i$ due a due corrispondenti. Sarà $I = 2m + r + 2i$, e siccome in virtù d'un teorema del numero precedente si può stabilire, tra F e la superficie Φ (della sua classe) ora costruita, una corrispondenza biunivoca continua, ecc., dotata di eccezioni solo in r punti

fondamentali su Φ , così l'ordine di connessione Z di F risulterà per il teorema di KLEIN ⁽⁴⁴⁾, eguale ad $r - 2m + 2$. Dunque avremo

$$I - Z = 2(2m + i - 1), \quad I + Z = 2(r + i + 1), \quad (22)$$

da cui segue

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 4m + 2, \quad (23)$$

il segno \equiv valendo soltanto se $i = 0$. Se son dati i valori di m, I, Z , compatibili colle (23) e colla condizione che I, Z non siano inferiori ai rispettivi valori minimi $2m$ (F. Teor. VI), $-2m + 2$, esistono, in ogni classe di superficie della 1^a famiglia con m falde, delle superficie a cui competono quei valori di I e Z . Esse si costruiscono partendo da un sistema Σ , privo di curve fondamentali, ecc., unito in una trasformazione τ di tipo normale relativa a quella classe, e dotato di punti base nei punti fondamentali di τ , in r punti uniti, e in i coppie di punti corrispondenti in τ ; i valori di i ed r essendo dati dalle formole

$$r = Z + 2m - 2, \quad i = \frac{I + Z}{2} - (r + 1),$$

che si traggono dalle (22). Anzi, distribuendo convenientemente gli r punti base uniti negli m angoli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (cfr. num. prec.) a cui corrispondono le m falde d'ogni superficie di quella classe (in particolare di Φ), possiamo fare in modo che gli ordini di connessione z_1, z_2, \dots, z_m delle falde appartenenti alla costruenda superficie assumano qualunque valore (≥ 0) compatibile col dato Z e colla formola $Z = \sum_{i=1}^m z_i - 2m + 2$. Dunque, in definitiva si ha il teorema:

L'ordine di connessione $Z = \sum_{i=1}^m z_i - 2m + 2$ d'una superficie razionale reale della 1^a famiglia, dotata di m falde A_1, A_2, \dots, A_m aventi gli ordini di connessione rispettivamente eguali a z_1, z_2, \dots, z_m , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE $I (\geq 2m)$ dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -2m + 2 \leq Z \leq I - 4m + 2; \quad (II)$$

e, per un dato valore di m ed $I (\geq 2m)$, esistono in ogni classe, superficie

⁽⁴⁴⁾ Che, come si ricava subito dalle (9), (8) vale anche per superficie con più falde.

corrispondenti a tutti i valori di z_1, z_2, \dots, z_m tali che il relativo Z sia compatibile colle relazioni stesse.

Si osservi ora che se $r > 0$, cioè $Z > -2m + 2$, esistono certo su qualche falda di Φ punti fondamentali per la corrispondenza tra Φ ed F , e che perciò le falde corrispondenti di F sono unilateri. Se ne dedurrà facilmente che:

Le superficie della I^a famiglia con m falde aventi l'ordine di connessione $Z > -2m + 2$ possiedono almeno una falda unilatera e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a $Z + 2m - 2$. Al valor minimo $Z = -2m + 2$ corrispondono invece superficie con tutte le falde bilatere (d'ordine di connessione 0).

In particolare, poichè in virtù delle (II) il valor minimo di Z è raggiunto solo se I è pari si ha che:

Tutte le superficie della I^a famiglia con più falde ed invariante I dispari hanno almeno una falda unilatera.

17. II^a famiglia. Ogni superficie F di essa è trasformabile realmente nella superficie

$$z^2 = f(xy), \tag{24}$$

$f=0$ essendo una quartica di genere 3, dotata di 4 rami reali racchiudenti ciascuno un'area semplicemente connessa nell'interno della quale f è positivo (F. n.º 33). Dunque, ragionando come al numero precedente, si vede che la superficie (24) ha quattro falde bilatere d'ordine di connessione 0, cioè che essa è una superficie Φ . Il suo ordine di connessione risulta, per la (8), eguale a -6 .

Se dunque il sistema Σ relativo alla rappresentazione piana normale di F ha dei punti base, oltrechè nei 7 punti fondamentali di τ , anche in r punti uniti e in $2i$ punti corrispondenti in τ , si avrà, ragionando come precedentemente, $I = r + 2i + 6$, $Z = r - 6$, e quindi

$$I - Z = 2(i + 6), \quad I + Z = 2(r + i), \tag{25}$$

da cui segue

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 12. \tag{26}$$

Di qui, come al num. prec., si dedurrà senza difficoltà che:

L'ordine di connessione $Z = \sum_{i=1}^4 z_i - 6$ d'una superficie razionale reale della II^a famiglia, dotata di 4 falde A_1, \dots, A_4 aventi gli ordini di connessione

rispettivamente eguali a z_1, \dots, z_4 , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE $I (\geq 6)$ dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -6 \leq Z \leq I - 12, \quad (\text{III})$$

e, per un dato valore di I , esistono, in ogni classe di quella famiglia, superficie corrispondenti a tutti i valori di z_1, \dots, z_4 tali che Z risulti compatibile colle relazioni stesse.

Le superficie della II^a famiglia aventi l'ordine di connessione $Z > -6$ possiedono almeno una falda unilatera e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a $Z + 6$. Al valor minimo $Z = -6$ corrispondono invece superficie con tutte le falde bilatere (d'ordine di connessione 0).

Tutte le superficie della II^a famiglia con invariante I dispari hanno almeno una falda unilatera.

18. III^a famiglia. Ogni superficie F di essa si può rappresentare doppiamente sopra un cono quadrico reale Γ , con sestica di diramazione dotata di cinque rami reali. Di questi rami uno è dispari (rispetto alle generatrici) e gli altri quattro pari; e questi stanno tutti in una fra le due regioni determinate dal ramo dispari e dal vertice. Alle quattro aree semplicemente connesse racchiuse dai rami pari, e a quella fra le regioni determinate dal ramo dispari e dal vertice che non contiene i rami pari rispondono le cinque falde di F (F. n.^o 34, 35, 36).

Proiettando il cono Γ da un suo punto sopra un piano xy , si ricava che F può rappresentarsi doppiamente su quel piano, con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Scegliendo il centro di proiezione nella regione in cui stanno i rami pari, sopra una generatrice

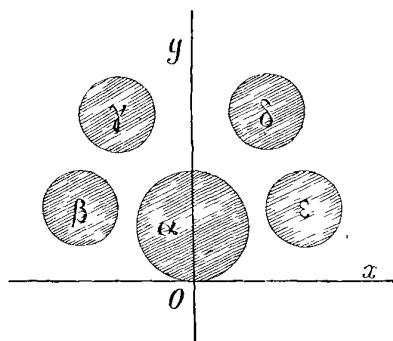


Fig 4.

che non li incontri, si vede che la sestica del piano xy ha cinque rami pari a, b, c, d, e racchiudenti ciascuno un'area semplicemente connessa ed esterni uno all'altro (Fig. 4); alle cinque aree $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ (trattenute nella Fig. 4) corrispondono le cinque falde di F e di qualunque sua trasformata reale.

Sicchè detta $f(xy) = 0$ l'equazione della sestica potremo, col solito procedimento, trasformare realmente F nella superficie

$$z^2 = f(xy), \quad (27)$$

e in tale equazione il segno del 2.^o membro risulterà determinato in modo che f sia positivo nelle cinque regioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, a cui corrisponderanno le cinque falde A, B, C, D, E della superficie (27).

Sia ora α il ramo di $f=0$ ch'è proiezione del ramo dispari appartenente a Γ , O la traccia della generatrice di Γ che passa per il centro di proiezione. Il punto O sarà semplice, come singolarità *reale* del ramo α , ma sarà invece triplo, con un analogo punto infinitamente vicino, come singolarità (complessa) di $f=0$. La superficie (27) ha in O un *punto doppio uniplanare* speciale ed è priva di altre singolarità, sia reali che complesse, situate al *finito* (mentre in $z = \infty$ ha un punto singolare *reale* isolato).

Sicchè le quattro falde B, C, D, E saranno finite, chiuse, prive di singolarità, bilatere e del tipo sfera; ma lo stesso non si potrà affermare della falda A pure finita e chiusa finchè non si determini l'influenza che ha sulla sua connessione la singolarità esistente in O .

Nel seguito sarà provato che la falda A è *unilatera ed ha l'ordine di connessione 1*, cioè che così si comporta in un qualunque modello della superficie (27) nel quale la singolarità sia risolta. Trattandosi di un'interessante applicazione dei metodi di questa Memoria ci riserviamo di trattarla in un apposito paragrafo in cui, mediante la rappresentazione piana normale, proveremo ancora che *la (27) è una superficie Φ* . Essa ha l'ordine di connessione $0 + 0 + 0 + 0 + 1 - 10 + 2 = -7$.

Ammissa per ora come vera la proprietà enunciata, ne seguirà che ogni superficie F della stessa classe di quella Φ si può rappresentare sulla Φ dotata di un certo numero $r (\geq 0)$ di punti fondamentali, e quindi che:

Ogni superficie della III^a famiglia possiede una ed una sola falda (unilatera) che non si può ridurre bilatera mediante una trasformazione reale.

Essa si chiamerà la *falda singolare* della superficie.

Consideriamo ora la rappresentazione piana normale della superficie F , e supponiamo che il relativo sistema Σ abbia $8 + r + 2i$ punti base, di cui 8 nei punti fondamentali di τ , r uniti e $2i$ a coppie corrispondenti in τ . Si avrà $I = r + 2i + 7$, e, tenendo conto della rappresentazione di F su Φ , $Z = r - 7$; quindi

$$I - Z = 2(i + 7), \quad I + Z = 2(r + i), \quad (28)$$

cioè

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 14. \quad (29)$$

Ragionando nel solito modo e tenendo presente che, se si vuol costruire

una superficie F corrispondente a valori dati di I e Z compatibili colle (29), si possono disporre arbitrariamente gli r punti base uniti di Σ in tal guisa che i corrispondenti punti fondamentali di Φ sian distribuiti su ciascuna delle falde in numero prefissato, ma che però, comunque si operi, l'ordine di connessione della falda singolare rimane sempre > 1 , si giunge alla conclusione seguente:

L'ordine di connessione $Z = \sum_{i=1}^5 z_i - 8$ d'una superficie razionale reale della III^a famiglia, dotata di 5 falde A_1, \dots, A_5 aventi gli ordini di connessione rispettivamente eguali a z_1, \dots, z_5 , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE $I (\geq 7)$ dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -7 \leq Z \leq I - 14, \quad (\text{IV})$$

e, per un dato valore di I , esistono, in ogni classe di quella famiglia, superficie corrispondenti a tutti i valori di z_1, \dots, z_5 tali che Z risulti compatibile colle relazioni suddette, e, se A_1 è la falda singolare, sia $z_1 \geq 1$.

Tutte le superficie della III^a famiglia hanno qualche falda unilatera, e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a $Z + 8$. Al valor minimo $Z = -7$ corrispondono superficie con 4 falde bilatere (d'ordine di connessione 0) ed una unilatera (d'ordine di connessione 1).

Osserviamo infine che i due caratteri Z ed I relativi ad una superficie razionale reale F variano in modo diverso al variare di r ed i , come consegue dalle formole assegnate; tanto che la loro variazione, purchè compatibile colle disuguaglianze assegnate, si conserva *indipendente*. Vedremo nel prossimo paragrafo come si possa trovare un *terzo carattere* dipendente dalle proprietà *reali* della superficie F , che si esprime mediante r ed i , e che varia con essi in modo diverso da I e Z . L'eliminazione di r ed i ci condurrà allora ad una importante relazione.

§ 6.

IL NUMERO BASE REALE \bar{p} . RELAZIONE FRA I CARATTERI I , Z e \bar{p} .

19. Diremo che \bar{p} curve *reali* $C_1, C_2, \dots, C_{\bar{p}}$, appartenenti ad una superficie algebrica *reale* F costituiscono su essa una base per le curve reali, o, più semplicemente, una *base reale*, se:

1.º Esse sono algebricamente indipendenti;

2.º Ogni altra curva *reale* di F è algebricamente legata ad esse ⁽⁴⁵⁾.

Il numero $\bar{\rho}$, che risulta ovviamente indipendente dalle curve che costituiscono la base, si dirà il *numero base reale* della superficie F .

Nel caso delle superficie regolari — in particolare razionali — due o più curve algebricamente dipendenti o indipendenti, lo sono, come è ben noto, anche linearmente. È questo il caso in cui noi ci troveremo.

Incominciamo collo studiare qual relazione interceda fra i numeri base reali $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}$, di due superficie algebriche reali Φ, F fra cui interceda una trasformazione birazionale reale, priva di punti fondamentali su F e dotata su Φ di $m = r + 2i$ punti fondamentali. Fra questi, i punti P_1, P_2, \dots, P_r sian reali, e i punti $Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2, \dots, Q_i, Q'_i$ due a due immaginari coniugati. Indichiamo con $C_1, C_2, \dots, C_r, D_1, D'_1, D_2, D'_2, \dots, D_i, D'_i$ le curve corrispondenti di F , con $B_1, B_2, \dots, B_{\bar{\rho}_0}$ le curve reali che costituiscono una base su Φ , con $E_1, E_2, \dots, E_{\bar{\rho}_0}$ le corrispondenti su F .

Ogni curva reale K di F , essendo la trasformata d'una curva reale di Φ passante con certe molteplicità per i punti fondamentali, sarà linearmente legata alle curve *indipendenti* ⁽⁴⁶⁾ $E_1, E_2, \dots, E_{\bar{\rho}_0}, C_1, C_2, \dots, C_r, D_1, D'_1, \dots, D_i, D'_i$ da una relazione del tipo

$$m K \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \dots + e_{\bar{\rho}_0} E_{\bar{\rho}_0} + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_r C_r + \\ + d_1 D_1 + d'_1 D'_1 + \dots + d_i D_i + d'_i D'_i;$$

e quindi anche dalla relazione

$$m K \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \dots + e_{\bar{\rho}_0} E_{\bar{\rho}_0} + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_r C_r + \\ + d_1 D_1 + d'_1 D'_1 + \dots + d_i D'_i + d'_i D_i,$$

che si ottiene operando sui due membri della precedente colla trasformazione di coniugio di F .

Si avrà dunque sottraendo membro a membro

$$(d_1 - d'_1) (D_1 - D'_1) + \dots + (d_i - d'_i) (D_i - D'_i) \equiv 0,$$

e quindi, per l'indipendenza delle curve D ,

$$d_1 = d'_1, \dots, d_i = d'_i;$$

⁽⁴⁵⁾ Per il significato delle locuzioni qui usate cfr. SEVERI, *Sulla totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), pp. 194-225].

⁽⁴⁶⁾ SEVERI, loco cit. ⁽³⁹⁾, § 7.

e perciò la prima relazione scritta diverrà

$$m K \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \dots + e_{\bar{\rho}_0}^- E_{\bar{\rho}_0}^- + c_1 C_1 + \dots + c_r C_r + \\ + d_1 (D_1 + D'_1) + \dots + d_i (D_i + D'_i),$$

da cui segue che le curve reali linearmente indipendenti

$$E_1, E_2, \dots, E_{\bar{\rho}_0}^-, C_1, C_2, \dots, C_r, D_1 + D'_1, D_2 + D'_2, \dots, D_i + D'_i,$$

costituiscono una *base reale* su F . Se ne deduce la cercata relazione

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + r + i. \tag{30}$$

Nulla importa per la validità di essa che i punti fondamentali di Φ sian distinti o infinitamente vicini; per persuadersene basta osservare che la corrispondenza tra Φ ed F può, coll'introduzione di superficie ausiliarie, esser decomposta in una successione di corrispondenze in ciascuna delle quali si introduca un sol punto fondamentale.

Applichiamo ora la formola (30) a determinare il numero $\bar{\rho}$ per tutte le superficie razionali reali, dando ai numeri r ed i , caso per caso, i significati loro attribuiti nei due paragrafi precedenti.

Superficie con una falda.

Caso α . Assumendo come Φ un piano reale ($\bar{\rho} = 1$), si ha subito

$$\bar{\rho} = r + i + 1. \tag{31}$$

Caso β . F è rappresentabile sopra una quadrica reale Φ , ellittica o iperbolica, secondo che F è del tipo sfera o del tipo toro, dotata di $2i$ punti fondamentali due a due imaginari coniugati. Detto $\bar{\rho}_0$ il numero base di Φ si ha dunque $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + i$.

Ora su Φ la base dal punto di vista complesso è costituita da due generatrici g_1, g_2 appartenenti a schiere diverse, e per ogni curva D di Φ (trattandosi di base *minima*) si ha

$$D \equiv a g_1 + b g_2 \quad (a, b \text{ interi}). \tag{32}$$

Se Φ è iperbolica g_1 e g_2 son reali, e perciò $\bar{\rho}_0 = 2$; invece, se Φ è ellittica g_1 e g_2 si possono supporre immaginarie coniugate, e allora, operando sui due membri della (32) colla trasformazione di coniugio di Φ si trae subito che $a = b$, cioè che su Φ la base è costituita dall'*unica* curva reale (sezione

piana) $g_1 + g_2$. Dunque in tal caso $\rho_0 = 1$, e quindi in definitiva

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= i + 1 && \text{se } F \text{ è del tipo sfera;} \\ \bar{\rho} &= i + 2 && \text{se } F \text{ è del tipo toro.} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Caso γ). Sia Φ una superficie corrispondente ad $r = i = 0$, cioè tale che il sistema lineare reale imagine, sul piano π , di quello delle sezioni piane od iperpiane di Φ abbia i punti base solo in O, P_1, P_2, \dots, P_m e per curve fondamentali (semplici) solo le rette p_1, p_2, \dots, p_m (cfr. n.º 14 γ). Il suo numero base (complesso) ρ_0 è eguale a 2, come si ricava subito confrontando π e Φ colla superficie rigata le cui sezioni piane od iperpiane hanno per imagine su π le curve d'ordine n abbastanza elevato con un punto $n - 1$ -plo in O e punti base semplici in P_1, P_2, \dots, P_m . Tale è anche il relativo numero base reale $\bar{\rho}_0$, perchè, se esso risultasse minore di 2, le due curve reali di Φ corrispondenti ad una retta reale di π e all'intorno di O sarebbero dipendenti, il che è assurdo. Tenendo conto che ogni superficie F la cui rappresentazione piana normale presenti il caso γ (in relazione ai punti fondamentali O, P_i e alle rette fondamentali p_i) si rappresenta sulla Φ dotata di $r + 2i$ punti fondamentali, ecc., si ricava per F

$$\bar{\rho} = r + i + 2. \quad (34)$$

Passiamo ora alle superficie *con più falde*. Mantenendo ad F e Φ i significati del paragrafo precedente, detti $\bar{\rho}, \bar{\rho}_0$ i rispettivi numeri base reali, ricordando la rappresentazione di F su Φ stabilita al n.º 15, avremo $\bar{\rho} = \rho_0 + r + i$; e quindi tutto si ridurrà a determinare ρ_0 . Supposto, come è lecito, che i punti base del sistema Σ relativo alla rappresentazione piana normale di Φ cadano soltanto nei punti fondamentali di τ e che Σ sia privo di curve fondamentali semplici (anzi si può supporre addirittura privo di curve fondamentali), si conclude che su Φ la base (minima) dal punto di vista complesso è costituita dalla curva corrispondente ad una retta del piano π (su cui è rappresentata Φ) e dalle curve corrispondenti dei punti fondamentali di τ .

Esaminiamo ora separatamente i varî casi.

Iª famiglia. Riferendoci, per i punti fondamentali di τ , alle notazioni dei n.º 15, 16, indichiamo con R la curva di Φ , corrispondente ad una retta di π , con $C, D_1, D_2, \dots, D_{2m}$ le curve corrispondenti ai punti fondamentali $O, P_1, P_2, \dots, P_{2m}$, con L una curva reale (irriducibile) appartenente al fascio di curve razionali che corrisponde al fascio di rette di centro O , con K una

qualunque curva *reale* di Φ . Si avrà l'equivalenza

$$K \equiv \alpha R + b C + d_1 D_1 + d_2 D_2 + \cdots + d_{2m} D_{2m},$$

da cui, tenendo conto che si ha ovviamente

$$L + C \equiv R,$$

seguirà

$$K \equiv \alpha L + \beta C + d_1 D_1 + d_2 D_2 + \cdots + d_{2m} D_{2m}, \quad (\alpha = a, \beta = b + 1). \quad (35)$$

Sia ora C' la curva complessa coniugata di C , e siano $D'_1, D'_2, \dots, D'_{2m}$ le curve complesse coniugate di D_1, D_2, \dots, D_{2m} , cioè quelle che corrispondono alle rette fondamentali p_1, p_2, \dots, p_{2m} di τ : operando sui due membri della (35) colla trasformazione di coniugio di Φ otterremo

$$K \equiv \alpha L + \beta C' + d_1 D'_1 + d_2 D'_2 + \cdots + d_{2m} D'_{2m},$$

e quindi sommando

$$2K \equiv 2\alpha L + \beta(C + C') + d_1(D_1 + D'_1) + \cdots + d_{2m}(D_{2m} + D'_{2m}).$$

Ma le curve $D_i + D'_i$ sono componenti totali del fascio L perchè quando una retta del fascio O tende a p_i la curva L corrispondente tende alla curva spezzata $D_i + D'_i$, e perciò si ha

$$L \equiv D_1 + D'_1 \equiv D_2 + D'_2 \equiv \cdots \equiv D_{2m} + D'_{2m},$$

e quindi in definitiva si conclude

$$2K \equiv \beta(C + C') + \gamma L, \quad (\gamma = 2\alpha + d_1 + \cdots + d_{2m}). \quad (36)$$

D'altronde le due curve *reali* $C + C'$ ed L sono indipendenti perchè in caso contrario dalla (36) si potrebbe trarre un'equivalenza del tipo

$$\mu K \equiv \nu L,$$

e quindi *ogni* curva reale di Φ risulterebbe composta con curve del fascio L , il che è manifestamente assurdo. Dunque sarà $\bar{\rho}_0 = 2$ e quindi:

$$\bar{\rho} = r + i + 2. \quad (37)$$

II^a famiglia. Sia R la curva di Φ corrispondente ad una retta s di π , C_1, C_2, \dots, C_7 le curve corrispondenti ai punti P_1, P_2, \dots, P_7 fondamentali

per τ , R' la curva complessa coniugata di R , C'_1, C'_2, \dots, C'_7 le complesse coniugate di C_1, C_2, \dots, C_7 , che corrisponderanno ordinatamente alle cubiche K_1, K_2, \dots, K_7 (passanti semplicemente per sei dei punti fondamentali, e doppiamente per l'ulteriore punto a cui corrispondono in τ) (F. n.º 37). Detta K una qualunque curva reale di Φ avremo l'equivalenza:

$$K \equiv a R + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_7 C_7,$$

da cui, operando mediante il coniugio di Φ , dedurremo

$$K \equiv a R' + c_1 C'_1 + c_2 C'_2 + \dots + c_7 C'_7,$$

e quindi sommando

$$2K \equiv a(R + R') + c_1(C_1 + C'_1) + \dots + c_7(C_7 + C'_7). \quad (38)$$

Ora si osservi che R' è la trasformata della curva corrispondente ad s in τ , cioè d'una curva d'ottavo ordine coi punti tripli P_1, P_2, \dots, P_7 e che quindi $R + R'$ appartiene al sistema lineare di Φ trasformato di quello delle curve di 9.º ordine coi punti tripli P_1, P_2, \dots, P_7 . Ne segue che se si indica con L una curva *reale* di Φ che corrisponda ad una cubica della rete individuata da P_1, P_2, \dots, P_7 , la quale sia unita in τ , si ha

$$R + R' \equiv 3L,$$

e siccome è ancora ovviamente

$$C_1 + C'_1 \equiv C_2 + C'_2 \equiv \dots \equiv C_7 + C'_7 \equiv L,$$

così, dalla (38) si trae in definitiva

$$2K \equiv \alpha L \quad (47), \quad (\alpha = 3a + c_1 + \dots + c_7)$$

e quindi $\bar{p}_0 = 1$, e

$$\bar{p} = r + i + 1. \quad (39)$$

IIIª famiglia. Ragionando come precedentemente si conclude che per qualunque curva reale K di Φ vale la relazione d'equivalenza

$$2K \equiv \alpha L,$$

(47) Questa relazione si può interpretare dicendo che tutte le curve unite in τ sono d'ordine $3n \left(n = \frac{\alpha}{2} \right)$ coi 7 punti P_1, P_2, \dots, P_7 n -pli. Ciò si può anche ricavare direttamente, come in F. n.º 37.

L essendo la curva corrispondente ad una cubica del fascio individuato dagli 8 punti P_1, P_2, \dots, P_8 fondamentali in τ . Dunque $\bar{\rho}_0 = 1$, e

$$\bar{\rho} = r + i + 1. \tag{40}$$

Confrontiamo ora i risultati delle formole (15) (15') (15'') (22) (25) (28) con quelli delle (31) (33) (34) (37) (39) (40) nella seguente tabella:

		$I + Z$	$\bar{\rho}$
<i>Superficie con una falda. Caso</i>	α	$2(r + i)$	$r + i + 1$
	β	$2i$	$i + 1$
	γ	$2(i + 1)$	$i + 2$
<i>Superficie con più falde. Famiglia . . .</i>	I ^a	$2(r + i + 1)$	$r + i + 2$
	II ^a	$2(r + i)$	$r + i + 1$
	III ^a	$2(r + i)$	$r + i + 1$

dal confronto si dedurrà il seguente teorema:

Fra l'ordine di connessione Z , l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I e il numero base reale $\bar{\rho}$ di qualunque superficie razionale reale intercede la relazione

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1). \tag{V}$$

§ 7.

APPLICAZIONI ED ESEMPLI.

STUDIO APPROFONDITO DELLA FALDA SINGOLARE APPARTENENTE ALLE SUPERFICIE DELLA III^a FAMIGLIA.

20. I risultati dei paragrafi precedenti danno modo di determinare la connessione d'una superficie razionale reale partendo dalla sua rappresentazione piana, e quindi di assegnare dei modelli atti a rendere intuitive le

proprietà inerenti alla forma delle falde reali appartenenti alla superficie considerata. Converrà in proposito osservare che non è sempre strettamente necessario, quando si tratta d'un caso particolare, ricorrere alla rappresentazione piana normale della superficie. Così ad es. se si tratta d'una superficie rappresentabile realmente sul piano, l'ordine di connessione si potrà determinare aggiungendo 1 alla differenza fra il numero dei punti fondamentali reali e quello delle curve fondamentali semplici pure reali inerenti ad una rappresentazione piana reale della superficie ⁽⁴⁸⁾. Dopo ciò dagli enunciati del n.º 14 si ricaverà subito, salvo nel caso $Z=2$ che richiede una discussione più accurata, se la superficie sia bilatera o unilatera.

Diamo ora qualche esempio e sviluppiamo qualche applicazione, scelta fra quelle che, mentre consentono in modo semplice d'illustrare i risultati ottenuti, si prestano anche ad ulteriori brevi indagini, non prive d'interesse.

Rigate cubiche di S_3 . Se si proiettano da un punto reale della direttrice doppia sopra un piano reale π , si ottiene ivi, come immagine delle sezioni piane della data superficie un sistema (reale) ∞^3 di cubiche con un punto base doppio reale, e due punti base semplici che si posson supporre reali assumendo il centro di proiezione in un punto per cui passano due generatrici reali della rigata. Tale sistema ha due rette fondamentali (semplici) che son le congiungenti il punto base doppio P ai punti base semplici A, B , e però *la rappresentazione su π non è normale*. Per ridurla a quel tipo basta trasformare quadraticamente π in un altro piano reale σ , assumendo su π come triangolo fondamentale quello che ha per vertici i punti P, A, B ; si ottiene allora sopra σ , come immagine delle sezioni piane della superficie data, un sistema ∞^3 di coniche aventi *un* punto base reale M (e soddisfacenti di più alla condizione di segare sulla retta p omologa di P le coppie d'una certa involuzione); e perciò *le rigate cubiche di S_3 sono superficie unilatera d'ordine di connessione 2*.

Superficie cubiche generali di S_3 . Si possono, come è noto, rappresentare sopra un piano (reale) π in guisa che alle loro sezioni piane risponda un sistema lineare S, ∞^3 , di cubiche con 6 punti base A_1, A_2, \dots, A_6 che (escludendo le rigate e le superficie con punti doppi) si posson supporre distinti e generici nel senso da non individuare curve (rette o coniche) fondamentali per S . La trasformazione T , immagine del coniugio della superficie data, dovendo lasciare unito S , non avrà punti fondamentali fuori di $A_1,$

⁽⁴⁸⁾ Cfr. ENRIQUES, loco cit. (!).

A_2, \dots, A_6 ; e perciò, come si ricava subito dalla considerazione dei casi possibili, o dall'elenco dei tipi normali con al più 6 punti fondamentali (F. n.º 37), si può ridurre (mediante successive trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in punti base di S o dei suoi trasformati, che mutano in definitiva S in un sistema Σ perfettamente analogo) al coniugio, ovvero ad una trasformazione di 3.º ordine con un punto fondamentale doppio e quattro semplici (⁴⁹); e in quest'ultimo caso la superficie cubica apparterrà alla Iª famiglia e avrà *due* falde (F. n.º 41). Ridotta così la T a tipo normale τ , poichè il sistema Σ si comporta come S , la rappresentazione piana della superficie sarà normale.

Se τ è il coniugio, ci troviamo nel caso α) del n.º 14; dalle formole ivi assegnate, unite alla (31), col solito significato delle notazioni, tenendo conto che $r + 2i = 6$, siamo condotti allora ai casi elencati nella seguente tabella:

r	i	I	Z	\bar{p}	ν
0	3	5	1	4	3
2	2	5	3	5	7
4	1	5	5	6	15
6	0	5	7	7	27

in cui ν indica il numero delle rette reali appartenenti alla superficie, che si determina subito in corrispondenza a dati valori di r ed i tenendo conto della nota rappresentazione piana di quelle rette. Le superficie considerate sono poi tutte unilateri (⁵⁰).

Se invece τ è una trasformazione di 3.º ordine col punto fondamentale doppio A_1 ed i punti fondamentali semplici A_2, A_3, A_4, A_5 , l'ulteriore punto

(⁴⁹) Le trasformazioni antiquadratiche prive di punti uniti non si presentano trattandosi di superficie che hanno sempre punti reali.

(⁵⁰) I valori ottenuti per Z coincidono con quelli assegnati da SCHLÄFLI nel lavoro *Correzione*, ecc. (citato (²¹)), non con quelli di KLEIN, *Ueber*, ecc. (citata (¹⁷)), in quanto ivi l'Autore parte dall'assegnare all'ordine di connessione del piano il valore 2, e neppure con quelli dell'altra Memoria di KLEIN, *Bemerkungen*, ecc., che si riferiscono all'ordine di connessione $Z' = 2Z - 2$ delle superficie unilateri considerate come doppie.

base A_6 di Σ sarà unito in τ , e, dalle formole del n.º 16, per $m=2$, $r=1$ si avrà $I=5$, $Z=-1$; delle due falde, una sarà unilatera ($z_1=1$), l'altra bilatera ($z_2=0$). Inoltre dalla (37) si ricava $\bar{p}=3$, e infine facilmente si trova $v=3$.

Per avere un controllo dei risultati sopra elencati consideriamo una superficie cubica reale F , per cui sia $v=27$. Essa sarà unilatera e avrà l'ordine di connessione 7; onde (n.º 10) si potrà considerare equivalente ad un foglio piano congiunto ad una sfera per mezzo di quattro tubi, ovvero a quel foglio sormontato da un ponte a tre archi. Cerchiamo di ritrovare per via completamente diversa questi modelli.

Perciò detto O un punto *ellittico* di F , σ il relativo piano tangente, D l'ulteriore intersezione di σ con F , che sarà composta d'un sol ramo chiuso, non passante per O , e dispari perchè segato in un punto da ogni retta di σ per O , proiettiamo doppiamente F da O su un piano reale π parallelo a σ . La curva di diramazione della corrispondenza (1, 2) così stabilita fra π ed F sarà, come è noto, una quartica C_4 di genere 3, reale, e avente tutte le 28 bitangenti reali. Fra esse 27 son proiezioni delle rette di F , l'altra è la retta impropria di π ; e su essa i contatti sono immaginari coniugati in corrispondenza alle tangenti principali che escono da O . Perciò ⁽⁵¹⁾ C_4 avrà *quattro rami reali* r_1, r_2, r_3, r_4 *pari* (ciascuno dei quali racchiude un'area semplicemente connessa) *tutti situati al finito*.

Ad ogni punto P di π esterno alle regioni racchiuse dai rami di C_4 rispondono due punti reali e distinti di F i quali tendono a coincidere quando P tende ad un punto situato su uno dei rami. Se invece P si allontana indefinitamente, uno dei due punti corrispondenti tende ad O , l'altro ad un punto della curva D .

Per cui se il piano π si imagina sdoppiato in due fogli α, β forati in corrispondenza alle aree racchiuse da r_1, r_2, r_3, r_4 e connessi lungo il loro contorno, l'insieme di tali due fogli così preparati si può porre in corrispondenza biunivoca continua con F , dotata su F del punto fondamentale O a cui corrisponde la retta impropria d'uno dei due piani, per es. di β ; mentre alla retta impropria del piano α risponde, punto per punto, la curva D . Sicchè per avere un *modello* di F basterà far sparire l'eccezione esistente in corrispondenza alla retta impropria di β .

⁽⁵¹⁾ ZEUTHEN, *Sur les courbes du quatrième ordre* [Mathematische Annalen, VII (1873), pp. 410-432].

Lo scopo si raggiunge mediante una proiezione stereografica che trasformi la parte del piano β esterna ad un circolo k il quale racchiuda nel suo interno r_1, r_2, r_3, r_4 , in una mezza sfera avente k per circolo massimo. Dopo ciò il foglio β , mediante evidente deformazione, potrà ridursi ad una sfera riunita ad α mediante quattro tubi corrispondenti ai giunti lungo i rami r_1, r_2, r_3, r_4 ; e così si ritroverà per altra via il modello sopra assegnato.

21. *Connessione della falda singolare appartenente alle superficie della III^a famiglia.*

Incominciamo col determinare la rappresentazione piana normale della superficie reale Φ rappresentata dall'equazione

$$z^2 = f(x, y),$$

nella quale $f = 0$ è una sestica reale dotata di due punti tripli infinitamente vicini, risiedenti nell'origine O delle coordinate e disposti lungo l'asse delle x . Per i rami di $f = 0$, e le falde di Φ manterremo le notazioni del n.º 18, e per quanto riguarda quelle proprietà della rappresentazione piana che qui vengono enunciate senza dimostrazione, rimandiamo ai n.º 29, 36 di F.

Il sistema Σ relativo alla rappresentazione piana normale di Φ sarà unito in una trasformazione τ di 17.º ordine con 8 punti (fondamentali) P_1, P_2, \dots, P_8 sestupli (che si posson supporre reali (cfr. F. n.º 49)) i quali son doppi per un sistema S, ∞^3 , di sestiche dotato delle proprietà che tutte le sue curve le quali passano per un punto del piano π (che lo sostiene), passano di conseguenza per un altro punto, coniugato del primo in una involuzione I , unita in τ , a cui risponde l'involuzione reale $x' = x, y' = y, z' = -z$ di Φ .

Entro S esiste una rete R , dotata di due (ulteriori) punti base semplici M, N coniugati in I , legata alla rete delle rette appartenenti al piano xy da una proiettività λ che permette di rappresentare doppiamente il piano π sul piano xy in modo che ai punti di xy rispondano coppie di I ; e in tale rappresentazione alla C_6 unita in I (per cui i punti P_i sono tripli) risponde la sestica $f = 0$. Alla retta impropria di xy che taglia $f = 0$ in sei punti, due a due imaginari coniugati, corrisponde una curva K di R che taglia C ($\equiv C_3$) in sei punti Q_1, Q_2, \dots, Q_6 (fuori dei punti base di R) due a due corrispondenti in τ .

Sia X la cubica del fascio individuato da P_1, P_2, \dots, P_8 , che passa per M , e quindi per N (in quanto ogni cubica di quel fascio è unita in I) e si consideri il sistema Λ, ∞^3 , delle curve di 18.º ordine individuato dalla rete $2K + R$, colla curva $2K$ fissa e dalla curva $3X = C$, cioè quello che ha come

punti base

$$\begin{array}{ll} P_1, P_2, \dots, P_8 & \text{sestupli,} \\ M, N & \text{tripli,} \end{array}$$

Q_1, Q_2, \dots, Q_6 ciascuno con un analogo punto infinitamente vicino su C , *semplici*. Ci proponiamo di provare che tal sistema Λ coincide col sistema Σ relativo alla rappresentazione piana normale di Φ .

Invero detta ω la proiettività che intercede fra R e la stella dei piani paralleli all'asse z quando si chiami omologo d'una curva ρ di R quel piano della stella anzidetta che passa per la retta di xy corrispondente a ρ in λ , si pongano le curve di Λ in corrispondenza proiettiva coi piani dello spazio x, y, z in modo che all'antiproiettività subordinata entro Λ da τ risponda il coniugio, e che inoltre sian soddisfatte le seguenti condizioni compatibili colla precedente:

Alla rete $2K + R$ risponda, mediante ω , la stella dei piani paralleli all'asse z ;

Alla curva $3X + C$ risponda il piano $z = 0$.

A siffatte condizioni si può soddisfare in ∞^1 modi, ciascuno dei quali conduce ad una superficie di 6.^o ordine a sezioni piane di genere 10, rappresentata su π mediante Λ e τ . Un'analisi ulteriore, non difficile, che per brevità omettiamo, prova che si cade sopra una delle ∞^1 superficie

$$z^2 = c f(xy),$$

c essendo una costante reale. Sarà dunque lecito supporre scelta la proiettività anzidetta in modo che sia $c = 1$, e allora si cadrà sulla superficie Φ . Siccome $\Lambda = \Sigma$ è un sistema privo di curve fondamentali semplici, così la rappresentazione piana stabilita per Φ risulterà normale ⁽⁵²⁾.

Si avranno inoltre le relazioni seguenti, che ci limitiamo ad enunciare:

Al fascio delle curve $2K +$ *corrisponde* Il fascio delle sezioni coi
 $X + U$ la cui parte variabile U *su Φ* piani passanti per l'asse z ;
 è una cubica per P_1, P_2, \dots, P_8 ;

Alla curva X ;

L'intorno del punto singolare O ;

⁽⁵²⁾ Nelle ultime righe del n.º 41 (fine del § 6) di F. è affermato che la superficie $z^2 = f(xy)$ può ottenersi come *proiezione* particolare d'una F_9 di S_3 per cui Σ è un sistema di curve di 9.^o ordine. Si tratta d'una svista senza conseguenze.

Alla curva K ;	<i>corrisponde</i>	L'intorno del punto quadru-
	su Φ	plo improprio;
Alla curva $2X + 2K$;		La sezione col piano $y=0$;
Ai punti M, N ;		Le due cubiche μ, ν sezioni
		di Φ col piano $y=0$;
Ai punti Q_1, Q_2, \dots, Q_6 cia-		Le sei rette sezioni di Φ col
scuno preso assieme coll'analogo		piano improprio ciascuna delle
punto infinitamente vicino;		quali contiene un punto doppio
		di Φ infinitamente vicino al punto
		quadruplo.

Da esse si trae anzitutto che, siccome le due cubiche μ, ν sono immaginarie coniugate, così i due punti M, N saran corrispondenti in τ , e perciò il sistema Σ si troverà nelle condizioni assegnate in principio del n.º 15 per la costruzione delle superficie che là s'indicavano con Φ . Cerchiamo poi di servirci di quelle relazioni per studiare la connessione della falda singolare A appartenente a Φ .

Sia Φ_0 una superficie priva di punti multipli, equivalente a Φ , costruita a partire da un sistema lineare Σ_0 di π , unito in τ , privo di curve fondamentali, e avente punti base solo in P_1, P_2, \dots, P_8 ; A_0 la falda di Φ_0 corrispondente ad A .

Supponiamo, come è evidentemente lecito (cfr. Fig. 5), che il piano $x=0$ tagli soltanto la falda A , e sia φ un angolo diedro (di cui nella Fig. 5 è segnata la sezione normale) contenente quel piano e tutto costituito da piani analoghi. Alle sezioni di essi colla falda A corrisponderanno su π (tolta la parte fissa che proviene dagl'intorni dai punti multipli di Φ situati sull'asse z) cubiche del fascio $|U|$, e su A_0 certe curve V formanti un sistema continuo. Siccome due cubiche U si tagliano, fuori di P_1, P_2, \dots, P_8 in un punto P_g unito in τ (F. n.º 29), così due curve V si taglieranno in *un sol* punto reale, e perciò A_0 — e quindi A — sarà unilatera (n.º 7).

Proviamo ora che A ha l'ordine di connessione 1. Perciò immaginiamo di asportare da A la singolarità esistente in O , tagliando A lungo una piccola curva m (di cui nella Fig. 5 è segnata la proiezione) sezione di A con un piano $y=\varepsilon$ (ε essendo convenientemente piccolo) in tal guisa da dividere A in due pezzi P, Q , di cui il secondo contenga la singolarità. Il taglio m_0 corrispondente su A_0 la spezzerà in due parti P_0, Q_0 di cui la seconda conterrà la curva reale ξ corrispondente all'intorno di O , cioè ad X . Ad m_0 cor-

risponderà su π (tolta la parte fissa $2S$) una curva di R la quale al tendere di ε a zero, cioè di m ad O , tenderà alla curva $2X$. Una tal proprietà si rende assai chiara osservando che, siccome lungo ξ l'indicatrice si inverte — in quanto ξ appartiene ad un sistema continuo analogo a quello delle curve V — così la curva m_0 , infinitamente vicina a ξ , dovrà passare due volte nell'intorno di ogni punto di ξ , da bande opposte, giacchè m_0 e ξ non hanno punti comuni perchè m non passa per O . Dunque al tendere di ε a zero, m_0 tenderà a 2ξ .

Se ne deduce che la falda Q_0 è formata da una sottile striscia aderente a ξ e avente l'unico orlo m_0 , cioè è del tipo della superficie di MÖBIUS.

Il suo ordine di connessione $Z_{Q_0} = Z_Q$ sarà dunque eguale a 2. Invece la falda P_0 equivalente a P è, come P , del tipo d'una calotta sferica, cioè ha l'ordine di connessione $Z_{P_0} = Z_P = 1$.

Se ora dal n.º 8 ricordiamo che l'ordine di connessione d'una falda non si altera per effetto d'un taglio chiuso, anche se questo la spezza, e teniam presente la formola (8) avremo

$$Z_A = Z_P + Z_Q - 2 = 1. \quad \text{c. d. d. } (^{53}).$$

22. L'indagine precedente ci offre l'esempio d'una falda A l'ordine di connessione della quale non si altera asportando da A l'intorno Q d'un suo punto multiplo isolato. Ci si può domandare se un'analogha operazione si possa fare per qualunque punto multiplo isolato V d'una superficie razionale reale F , conducendo allo stesso risultato.

Evidentemente la risposta a tale questione dipende dalle convenzioni che si adottano sul modo di eseguire i tagli atti a staccare la singolarità. Ci occuperemo qui di stabilirne in modo preciso l'esecuzione e l'influenza, nel caso semplice in cui il cono Γ tangente ad F in V non abbia parti nè generatrici multiple reali, cioè sia composto d'una o più falde chiuse, pari

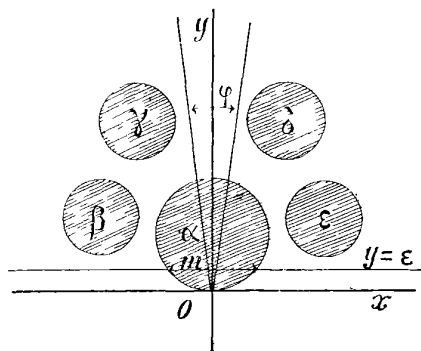


Fig 5.

(⁵³) Dai ragionamenti precedenti si rileva che il punto singolare O produce sulla falda A lo stesso effetto d'un punto fondamentale o d'un intreccio di 1.^a specie.

o dispari (nel senso di STAUDT), aventi in comune solo il vertice. Escludiamo che fra esse vi siano dei fasci di raggi.

Fissiamo l'attenzione sopra una di quelle falde, che indicheremo con A_1 , e segniamo, sopra ognuna delle generatrici che le appartengono, i due punti distanti dal vertice d'un segmento piccolissimo ε . Otterremo in tal modo una curva reale D_1 , composta di uno o due rami, secondo che A_1 è dispari o pari; e tal curva potrà suppersi trasportata in un'analogha curva C_1 di F mediante una piccola deformazione che adatti la falda A_1 su quella parte di F che le è aderente. Imaginiamo ripetuta la stessa operazione per tutte le falde A_1, A_2, \dots, A_m di r , indi tagliamo F lungo le curve C_1, C_2, \dots, C_m così ottenute, asportando l'intorno di V . Vogliam provare

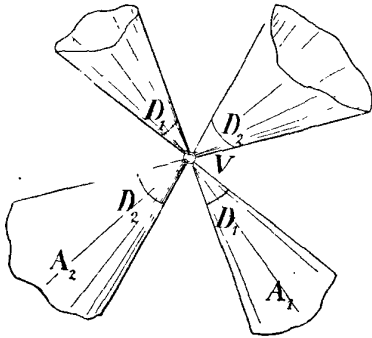


Fig 6.

che l'ordine di connessione Z_1 della superficie F_1 rimanente (che può eventualmente esser composta d'un numero di falde superiore a quello relativo ad F) è eguale all'ordine di connessione Z di F .

Poichè la singolarità di F in V è *ordinaria* dal punto di vista reale (cioè non ha altre singolarità reali infinitamente vicine) potremo risolverla mediante il sistema delle forme d'ordine abbastanza elevato passanti per V , mutando F in una superficie Φ ad essa equivalente⁽⁵⁴⁾; e poichè a due punti reali infinitamente vicini a V in direzioni distinte rispondono due punti distinti di Φ , così al punto V risponderà su Φ una curva composta di m rami reali V_1, V_2, \dots, V_m (chiusi) privi di punti doppi e di punti comuni.

Indichiamo ora con $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ le curve di Φ corrispondenti a C_1, C_2, \dots, C_m . La curva Δ_i sarà infinitamente vicina a V_i e tenderà ad essa col tendere di ε a zero; anzi ad ogni punto di V_i si potranno associare due punti di Δ_i situati da bande opposte rispetto a V_i , i quali provengono da due punti situati sopra una medesima generatrice del cono A_i . In particolare se Δ_i ha un sol ramo (cioè se A_i è una falda dispari) si potrà, descrivendolo, passare da uno all'altro di quei due punti, e quindi lungo V_i , l'indicatrice s'invertirà sopra Φ .

Tagliando Φ lungo Δ_i se ne staccherà un pezzo π_i formato da una sot-

(54) Tale affermazione domanderebbe una breve indagine che crediamo lecito risparmiarci.

tile striscia aderente a V_i e avente per orlo Δ_i , che sarà assimilabile ad una superficie di MÖBIUS o ad una corona circolare secondo che Δ_i avrà uno o due rami; in ogni caso avrà ordine di connessione 2. Immaginando eseguita la stessa operazione per tutte le curve Δ , rimarrà, dopo asportati i pezzi π_i , una superficie Φ_1 che sarà evidentemente equivalente ad F_1 . Poichè d'altronde i tagli chiusi non alterano l'ordine di connessione d'una superficie, così, tenendo conto della (8), con ovvio significato dei simboli, avremo

$$Z_\Phi = Z_{\Phi_1} + \sum_{i=1}^m Z_{\pi_i} - 2(m+1) + 2,$$

cioè, perchè $Z_{\pi_i} = 2$,

$$Z_\Phi = Z_{\Phi_1},$$

da cui, per l'equivalenza di F , Φ e di F_1 , Φ_1 , segue

$$Z_F = Z_{F_1}, \quad \text{c. d. d.}$$

Se il cono Γ avesse delle generatrici multiple o delle parti multiple reali, la costruzione delle curve D può cadere in difetto, e le cose possono ancora complicarsi per la presenza di punti multipli o di punti comuni alle curve V . Lo studio di quei casi esigerebbe un'analisi assai delicata, che ci risparmiamo, bastandoci d'aver trattato esaurientemente il caso più espressivo ⁽⁵⁵⁾.

15 aprile 1914.

⁽⁵⁵⁾ Nota aggiunta durante la correzione delle bozze (26 novembre 1914). A proposito della costruzione del sistema $L \equiv |C + C'|$ di cui si parla al n.º 13 — sui dettagli della quale abbiamo per brevità sorvolato — vogliam qui osservare che le condizioni imposte a quel sistema son soddisfatte appena lo siano per $|C|$. La possibilità di costruire un sistema $|C|$ che così si comporti in relazione ad un dato gruppo base A_1, A_2, \dots, A_m trovasi stabilita in un recentissimo lavoro di SEVERI, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in una priva di punti multipli*, di prossima pubblicazione.

INDICE

	PAG.
INTRODUZIONE	215
§ 1. Rappresentazione piana normale delle superficie razionali reali	220
§ 2. Generalità sulla connessione delle superficie	231
§ 3. Le proprietà di connessione considerate di fronte alle trasformazioni che introducono punti fondamentali. Teorema di KLEIN. Modelli. Omologie sulle falde unilaterale	240
§ 4. Connessione delle superficie razionali con una falda, cioè rappresentabili realmente sul piano	252
§ 5. Connessione delle superficie razionali con più falde appartenenti alla I ^a , II ^a e III ^a famiglia	258
§ 6. Il numero base reale ρ . Relazione fra i caratteri I , Z e ρ	268
§ 7. Applicazioni ed esempi. Studio approfondito della falda singolare appartenente alle superficie della III ^a famiglia	274

Vene confluenti.

(Di U. CISOTTI, a Milano.)

PARTE PRIMA.

Confluenza di due vene.

§ 1.

INTRODUZIONE.

Ebbi a chiamare *correnti spontanee* ⁽¹⁾ quelle che avvengono, fra due peli liberi, in seno ad un liquido in riposo, in assenza di forze di massa. Esse possono sia estendersi indefinitamente tanto a monte quanto a valle (Fig. 1), oppure rientrare in se stesse (Fig. 2).

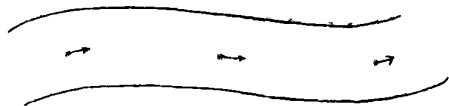


Fig. 1.

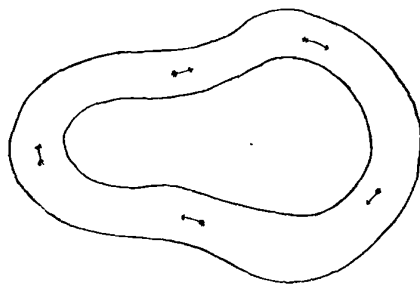


Fig. 2.

AmMESSO il moto piano, ovunque continuo e regolare, constatatai la loro esistenza quando le linee di flusso, e in particolare i peli liberi, sono cir-

(1) U. CISOTTI, *Sopra le correnti liquide spontanee* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie V, Vol. XIX (1910); Nota I, pp. 10-14; Nota II, pp. 81-83].

conferenze concentriche, oppure sono rette parallele ⁽²⁾. Se il moto della corrente si suppone *irrotazionale* sono anzi queste le uniche soluzioni possibili ⁽²⁾.

Ma esistono altri casi notevoli, oltre quelli già studiati, di moti piani di liquidi non soggetti a forze, che hanno sede fra soli peli liberi ed ai quali si potrebbe — appunto per queste circostanze — applicare ancora la denominazione di *correnti spontanee*.

Ciò accade quando due o più getti liquidi confluiscono.

Per fissare le idee si pensi a due getti G e G' eguali e concorrenti, come mostra la Fig. 3.

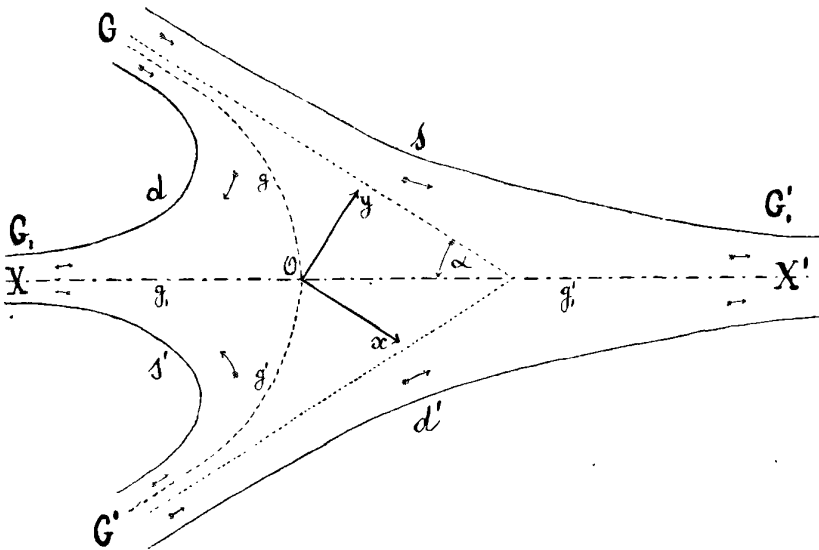


Fig. 3.

Urtrandosi essi si compenetrano dando luogo a due correnti opposte G_1 e G'_1 , aventi per asse comune la bisettrice XX' dell'angolo delle direzioni (asintotiche a monte) degli assi dei getti G e G' .

Il fenomeno venne già intravvisto da Lord RAYLEIGH ⁽³⁾, che fece anche istituire delle esperienze.

Che le cose vadano qualitativamente nel modo indicato, si può del resto rendersi conto in modo esauriente colle seguenti considerazioni.

⁽²⁾ Loc. cit. ⁽¹⁾, Nota II.

⁽³⁾ *Scientific Papers* [Cambridge; University Press (1899); Vol. I, pag. 302].

Anzitutto dovendosi avere simmetria rispetto a XX' (*), in coppie di punti corrispondenti le velocità (in senso vettoriale) sono simmetriche e in particolare nei punti appartenenti all'asse XX' (corrispondenti a se stessi) le velocità non possono essere che dirette secondo l'asse stesso, il quale pertanto *si comporta come una parete rigida*. Allora se si considerano separatamente le due metà del campo in cui si svolge il fenomeno, determinate dall'asse XX' , in ciascuna di esse il moto non ha mutato, ma per ognuna il problema è del tipo seguente: un getto G va a battere contro una parete rigida rettilinea indefinita XX' e rimane da questa biforcato, dando luogo a due correnti opposte che lambiscono le pareti stesse (Fig. 4).

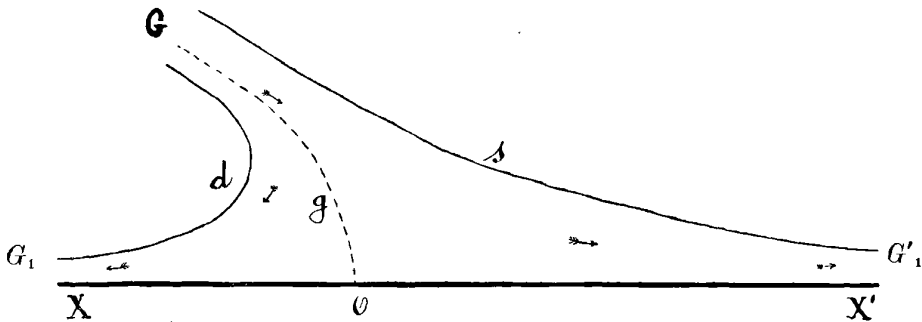


Fig. 4.

Questo problema è stato posto ed esaurientemente discusso da parecchi anni (**).

Oltre che la forma delle linee di flusso è stata determinata la distribuzione delle acque, una volta stabilito il regime permanente: il rapporto delle portate delle correnti G'_1 e G_1 (vedi Fig. 4) è

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

α essendo l'inclinazione del getto sulla parete indefinita (**).

(*) Vedi il § 14.

(**) Cfr. MICHELL, *On the Theory of Free Stream Lines* [Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A, Vol. CLXXXI (1890), pag. 389], oppure il più recente rapporto di Sir G. GREENHILL, *Report of the Theory of a Stream Line past a Plane Barrier and of the Discontinuity Arising at the Edge, with an Application of the Theory to an Aeroplane* [London, Darling e Son, 1910, pag. 11].

(**) Cfr. ad es. GREENHILL, loc. cit. (**), pag. 12.

Una volta assodato il comportamento del moto in questo problema, rimane accertato — ripassando da questo a quello originario dell'urto delle due vene simmetriche, mediante *riflessione* rispetto all'asse XX' — che due getti identici convergendo mantenendosi simmetrici rispetto a XX' si compenetrano dando luogo a due correnti opposte, come qualitativamente è messo in rilievo nella Fig. 3.

Mi propongo di porre il problema più in generale ancora: di studiare cioè la confluenza di due getti convergenti G e G' qualsivisiano (con portate anche diseguali).

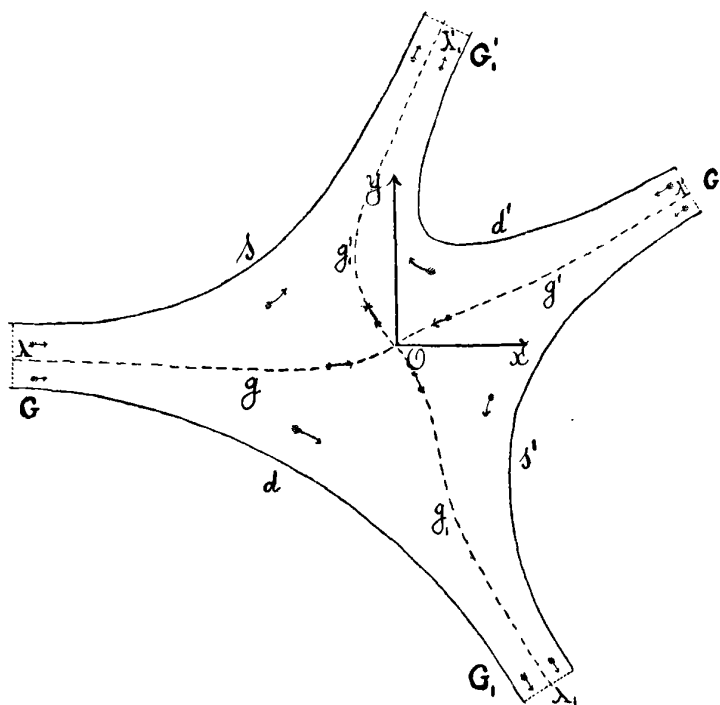


Fig. 5.

Si stabiliranno ancora qui due correnti G_1 e G'_1 (V. Fig. 5), soltanto in generale non solo le loro portate sono a priori incognite, ma ancora le loro direzioni asintotiche. Si può solo ragionevolmente presumere che dipenderanno dalle portate, dalle direzioni dei due getti G e G' che l'hanno generate, nonchè dalle condizioni iniziali (Cfr. § 14).

La inesistenza (in generale) di un asse di simmetria non rende più pos-

sibile (in generale) il ricorso all'artificio della *riflessione*, utilmente invocato poc'anzi e che permette di ricondurre il problema ad altro già risoluto, come abbiamo accennato.

Nella questione attuale converrà prendere in esame il fenomeno diretto, scrutarne l'intima natura, mettere in rilievo gli attributi essenziali, tradurli in forma analiticamente precisa e trarne in fine le logiche conseguenze.

Cominciamo ad analizzare il fenomeno nel caso simmetrico già noto. Convieni a tal uopo prendere le mosse dal problema dell'urto di un getto contro una parete rigida, rettilinea, indefinita (Fig. 4).

Supponiamo raggiunto il regime permanente. A distanza sufficientemente rilevante dalla parete XX' la vena G scorre coi filetti sensibilmente paralleli fra di loro ed ai peli liberi s e d , comportamento questo che va alquanto modificandosi mano mano che i filetti si avvicinano alla parete XX' . Un filetto g va a battere contro detta parete in un punto O , ivi momentaneamente si arresta, indi si bipartisce e i due rami, scorrendo in senso opposto sui tratti OX e OX' della parete rigida, si allontanano indefinitamente; tutti gli altri filetti vengono deviati, ma nessuno si arresta: quelli compresi tra d e g vanno a formare la corrente G_1 , gli altri compresi tra g ed s generano la corrente G'_1 . Operando la solita riflessione rispetto all'asse XX' si passa al problema dell'urto simmetrico di due vene eguali G e G' (V. Fig. 3). Lo schema precedentemente descritto autorizza a ritenere che il fenomeno si presenta nel seguente modo. A distanza abbastanza grande dalla regione in cui avviene l'urto e la susseguente compenetrazione dei getti G e G' , i filetti scorrono in esse paralleli fra loro ed ai peli liberi (d e s per G ; d' e s' per G'). Tale andamento si modifica quanto più i filetti delle due correnti convergendo vanno avvicinandosi. Un filetto g di G ed il filetto simmetrico g' di G' si scontrano in un punto O dell'asse di simmetria, si arrestano momentaneamente, indi ciascuno si bipartisce: i quattro filetti che ne risultano si compenetrano due a due dando luogo a due unici filetti distinti g_1 e g'_1 , scorrenti sull'asse XX' ed in senso opposto l'uno all'altro a partire da O . Tutti gli altri filetti subiscono deviazioni, ma nessuno si arresta: quelli che appartengono a G e che scorrono tra d e g e quelli di G' che scorrono fra s' e g' vanno a formare la corrente G_1 ; invece i filetti di G compresi tra g ed s e quelli di G' compresi tra g' e d' generano la corrente G'_1 .

Qualitativamente il fenomeno deve presentarsi nello stesso modo nel caso generale dell'urto asimmetrico di due getti qualsiasi G e G' (V. Fig. 5). Avremo ancor qui due filetti g e g' , appartenenti a G e G' rispettivamente,

che scontrandosi in un punto O generano due altri filetti g_1 e g'_1 , direttori di due correnti G_1 e G'_1 . Soltanto, in generale, non sono più cognite a priori — come invece avviene nel caso simmetrico — le direzioni asintotiche di g_1 e g'_1 (7).

Il punto O sarà a dirsi *spartiacque*.

§ 2.

IMPOSTAZIONE ANALITICA.

Sia O, xy una coppia di assi cartesiani ortogonali coll'origine in O , l'asse Ox avente la direzione asintotica di G e l'asse Oy rivolto verso il pelo libero sinistro s di G .

Designando u e v le componenti della velocità di un punto generico P , l'ipotesi della permanenza ed irrotazionalità del moto del liquido permette notoriamente di introdurre due funzioni armoniche associate

$$\begin{aligned} \varphi(x, y), & \quad \text{potenziale di velocità,} \\ \psi(x, y), & \quad \text{funzione di corrente,} \end{aligned}$$

definite ciascuna, a meno di una inessenziale costante additiva, dalle seguenti equazioni ai differenziali totali:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= u dx + v dy, \\ d\psi &= -v dx + u dy. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Introducendo la variabile complessa

$$z = x + iy, \quad (2)$$

(7) Secondo l'uso correntemente adottato dagli idraulici, si chiama *sponda sinistra* di un corso d'acqua, quella che sta alla sinistra di un osservatore che immagini di percorrere il corso d'acqua nel senso della corrente, cioè da monte a valle. L'altra naturalmente dicesi *sponda destra*. È per questa ragione che ho reputato conveniente indicare con s e d rispettivamente i peli liberi sinistro e destro di G e parimenti con s' e d' quelli di G' . È da notarsi che in tal guisa s e s' comprendono anche i peli liberi di sinistra di G'_1 e G_1 , mentre d e d' contribuiscono a formare i peli liberi di destra di G_1 e G'_1 .

le espressioni

$$\left. \begin{aligned} f &= \varphi + i\psi, \\ w &= u - iv, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

si presentano, per le (1), funzioni della variabile complessa z , e le (1) stesse si possono compendiare nell'unica relazione

$$\frac{df}{dz} = w. \quad (4)$$

Trattandosi di moti irrotazionali, permanenti, non soggetti all'azione di forze, le equazioni idrodinamiche di EULERO si riassumono in un'unica relazione tra il valore assoluto p della pressione specifica, la densità — trattandosi di un liquido essa è a ritenersi costante, e la si può pertanto assumere $= 1$ — e il valore assoluto

$$V = |w| = |\sqrt{u^2 + v^2}|, \quad (5)$$

della velocità. Tale relazione è la seguente :

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}. \quad (6)$$

Poichè lungo i peli liberi s, d, s', d' il liquido in moto confina col liquido in quiete, e poichè quivi regna una pressione costante di valore assoluto p_0 , si dovrà avere

$$p = p_0, \quad \text{sopra } s, d, s', d'. \quad (7)$$

Da questa e dalla (6) scende che

$$V = \text{costante},$$

sopra i peli liberi stessi. Se si assume tale costante $= 1$, avremo allora:

$$V = 1, \quad \text{sopra } s, d, s', d'. \quad (8)$$

Risulta in tal modo definito il valore della costante che compare nel secondo membro di (6). Infatti la (6) dovendo essere valida in tutto il campo del moto, si potrà, in particolare, applicare ad un punto P di uno qualsiasi dei peli liberi s, d, s', d' ; ma su essi per la (7) e la (8) è $p = p_0$ e $V = 1$, pertanto da (6) scende

$$p_0 = -\frac{1}{2} + \text{costante},$$

la quale definisce per la costante il valore

$$p_0 + \frac{1}{2}.$$

La (6) diviene dunque

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2); \quad (9)$$

formula che definisce in ogni punto la pressione quando sia nota la velocità.

Per quanto si è detto nel § 1, dovrà essere $V=0$ in O e $V>0$ in ogni altro punto del campo del moto; più precisamente escluso un intorno (comunque piccolo) di O , V ammette un limite inferiore positivo.

§ 3.

COMPORAMENTO DI $f = \varphi + i\psi$ NEL CAMPO DEL MOTO.

Sopra ogni linea di flusso la ψ deve assumere — è notorio — valore costante, diverso da linea a linea; fissate in particolare due linee di flusso qualsiansi

$$\psi = \psi_s, \quad \psi = \psi_d,$$

è altresì noto che la differenza

$$\psi_s - \psi_d$$

rappresenta la *portata* della corrente che scorre fra quelle due linee, qualora si intenda naturalmente che gli indici s e d si riferiscano rispettivamente alla sponda sinistra e a quella destra della corrente stessa.

Se si pone:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0, & \text{sopra } d; \\ \psi &= q, & \text{sopra } s; \\ \psi &= q_1, & \text{sopra } s'; \\ \psi &= q_2, & \text{sopra } d'; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

saranno, dopo ciò:

$$q; \quad q' = q_1 - q_2; \quad q_1; \quad q'_1 = q - q_2, \quad (11)$$

le portate dei getti

$$G; G'; G_1; G'_1.$$

Da (11) si ricava:

$$q + q' = q_1 + q'_1, \quad (12)$$

come era da prevedersi data la permanenza del fenomeno.

Concludendo, la funzione $\psi(x, y)$, armonica e regolare nel campo circoscritto dalle quattro linee libere s, d, s', d' , deve assumere sopra le linee stesse i valori messi in evidenza in (10).

Vediamo ora qual'è il comportamento del potenziale di velocità $\varphi(x, y)$.

Per essere $V > 0$, eccettuato in O in cui $V = 0$ [Cfr. la fine del § 2], potremo scrivere, indicando con ds l'elemento d'arco di una generica linea di flusso preso positivamente nel senso del flusso:

$$\frac{d\varphi}{ds} = V > 0,$$

in ogni punto della linea di flusso, eccettuato il solo punto O , quando la linea di flusso considerata lo contenga. Anzi, siccome escluso un intorno (comunque piccolo) di O , il limite inferiore dei valori di V è una costante $\varepsilon > 0$ [Cfr. la fine del § 2], potremo dire che in tutti i punti di una generica linea di flusso, esterni all'intorno suddetto è

$$\frac{d\varphi}{ds} = V \geq \varepsilon > 0.$$

Da questa diseuguaglianza discende che φ cresce costantemente e indefinitamente sopra ogni linea di flusso, assumendo tutti i valori crescenti da $-\infty$ fino a $+\infty$, quando si procede nel senso del moto.

Dopo quanto si è detto circa il comportamento di φ e di ψ nel campo del moto si raccoglie quanto segue:

La funzione $f = \varphi + i\psi$ è regolare nei punti del campo del moto situati a distanza finita, diviene infinita all'infinito, e sopra il contorno costituito dalle linee s, d, s', d' la sua parte immaginaria si comporta nel modo precisato dalle (10).

In tal guisa, una volta che fosse assegnato il campo del moto, la funzione $f(z)$ risulterebbe definita a meno di una inessenziale costante reale additiva.

§ 4.

COMPORAMENTO DI $w = u - i v$ NEL CAMPO DEL MOTO.

La funzione

$$w = u - i v$$

è funzione di z , uniforme e regolare nel campo del moto, e di più deve essere [Cfr. § 2]

$$|w| = V = \begin{cases} 1 & \text{sopra } s, d, s', d'; \\ > 0 & \text{in ogni punto } P \neq O; \\ 0 & \text{in } O. \end{cases} \quad (13)$$

Si è già indicato con V il modulo di w , chiamiamo ϑ il suo argomento, poniamo cioè

$$w = V e^{-i\vartheta}, \quad (14)$$

allora essendo

$$\frac{u}{V} = \cos \vartheta, \quad \frac{v}{V} = \sin \vartheta,$$

ϑ rappresenta l'angolo, contato positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto, che la velocità (vettore) forma colla direzione positiva dell'asse x . Pel modo con cui si sono scelti gli assi cartesiani [Cfr. § 2] è $\vartheta = 0$ all' ∞ a monte di G ; ciò posto si vede facilmente che, partendo dall' ∞ a monte di G , ϑ va contato tra 0 e 2π nel verso $x \rightarrow y$ e fra 0 e -2π nel verso opposto. Così ad esempio se si immagina di seguire il contorno del campo a partire da G a monte e seguendo le linee d, s', d', s , cioè lasciando il campo alla sinistra di un osservatore che cammina secondo il percorso indicato, ϑ varierà tra 0 e -2π ; se invece l'accennato osservatore percorre successivamente s, d', s', d , lasciando in tal modo il campo del moto alla sua destra, ϑ varierà tra 0 e 2π . A partire da un punto qualsiasi interno al campo basterà prendere per ϑ il valore che proviene dal criterio di continuità.

Notiamo [Cfr. § 1] che il comportamento asintotico a monte di G e G' e quello a valle di G_1 e G'_1 è il regime uniforme.

Ne segue che:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{OP=\infty} V = 1, \\ \lim_{OP=\infty} \mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{llll} 0 & \text{quando } P \text{ si allontana in } G, \\ \mathfrak{S}' & \text{» } P \text{ » » } G', \\ \mathfrak{S}_1 & \text{» } P \text{ » » } G_1, \\ \mathfrak{S}'_1 & \text{» } P \text{ » » } G'_1, \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (15)$$

avendo indicato con \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}'_1 gli angoli che le direzioni asintotiche dei flussi di G' , G_1 , G'_1 formano colla direzione positiva dell'asse x .

In conclusione la funzione $w = u - iv = Ve^{-i\theta}$ dev'essere uniforme finita e continua, inoltre il suo modulo V deve soddisfare alle condizioni (13).

Osservazione. — Ho avuto poco fa occasione di rilevare che il comportamento asintotico a monte di G e G' e quello a valle di G_1 e G'_1 è il regime uniforme con velocità unitaria. Per ciò e per il fatto che la densità del liquido si è assunta $= 1$, si deduce che q , q' , q_1 , q'_1 che abbiamo visto (Cfr. § 3) essere le portate di G , G' , G_1 e G'_1 rispettivamente, rappresentano numericamente anche le rispettive larghezze asintotiche.

§ 5.

RICORSO AD UNA VARIABILE AUSILIARIA $\zeta = \xi + i\eta$.

La forma delle quattro linee libere s , d , s' , d' è a priori incognita. I dati della questione (ammesso raggiunto il regime permanente) sono soltanto le larghezze asintotiche q e q' dei getti G e G' e l'angolo \mathfrak{S}' che il verso asintotico del flusso di G' forma coll'asse x , ossia col verso asintotico del flusso di G . Si tratta appunto di caratterizzare il moto dati: q , q' e \mathfrak{S}' , cioè di determinare i quattro peli liberi s , d , s' e d' in guisa che nel campo da essi limitato le funzioni $f(z)$ e $w(z)$ abbiano il comportamento messo in evidenza nei paragrafi precedenti.

Gioverà a tale scopo immaginare di passare dalla variabile naturale $z = x + iy$ ad una variabile ausiliaria $\zeta = \xi + i\eta$ nel modo che ora andrò a descrivere.

Il campo del moto è semplicemente connesso. Sarà sempre possibile in generale rappresentarlo conformemente su un cerchio di raggio unitario.

Sia

$$\zeta = \zeta(z),$$

la relazione *a priori incognita* (incognito essendo il campo della variabile z) che deve permettere di rappresentare in modo conforme il campo nel moto sul cerchio

$$|\zeta| \leq 1,$$

in guisa che al contorno del campo della variabile z venga a corrispondere nel nuovo piano la circonferenza

$$|\zeta| = 1,$$

al punto $O (z = 0)$ corrisponda nel piano $\zeta = \xi + i \eta$ il punto $\zeta = 0$ ed infine al punto all'∞ cui tendono asintoticamente (a monte) i peli liberi s e d , tra i quali scorre il getto G , corrisponda il punto $\zeta = +1$.

Detti allora:

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= e^{i\sigma_1}, & (0 < \sigma_1 < 2\pi), \\ j' &= e^{i\sigma'}, & (\sigma_1 < \sigma' < 2\pi), \\ j'_1 &= e^{i\sigma'_1}, & (\sigma' < \sigma'_1 < 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Piano $z = \xi + i \eta$

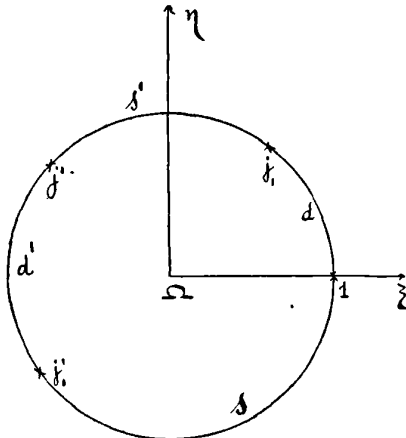


Fig. 6.

i punti della circonferenza $|\zeta| = 1$ che corrispondono ai punti all'infinito di G_1, G', G'_1 , agli archi

$$(1, j_1), (j_1, j'), (j', j'_1), (j'_1, +1),$$

dovranno fare riscontro nel piano del moto rispettivamente le linee libere d, s', d', s .

La teoria delle funzioni di variabile complessa ci assicura la esistenza di una relazione tra le variabili z e ζ , la quale realizza l'accennato cambiamento. Prima di determinare tale relazione è lecito quindi sfruttarne l'esistenza.

Si considerino allora f e v come funzioni della nuova variabile ζ nel cerchio $|\zeta| \leq 1$. Per quanto si è visto nei §§ 3 e 4 esse sono regolari per $|\zeta| < 1$; inoltre, per

le (10) e le (13), si dovrà avere:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{sopra l'arco } (1, j_1), \\ \psi &= q_1 && \text{» } \text{» } (j_1, j'), \\ \psi &= q_2 && \text{» } \text{» } (j', j'_1), \\ \psi &= q' && \text{» } \text{» } (j'_1, 1), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$|w| = V = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{per } |\zeta| = 1, \\ > 0 & \text{per } 0 < |\zeta| < 1, \\ 0 & \text{per } \zeta = 0. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Si deve inoltre tener presente che [Vedi la (15)]:

$$w = 1 \quad \text{per } \zeta = 1.$$

§ 6.

LA FUNZIONE $f(\zeta)$.

Si tratta ora di costruire la funzione $f(\zeta)$ soddisfacente a tutte le condizioni ora specificate.

Partiamo a tal uopo dalle seguenti funzioni:

$$\left. \begin{aligned} g_1(\zeta) &= \log \left(1 - \frac{\zeta}{j_1} \right), \\ g'_1(\zeta) &= \log \left(1 - \frac{\zeta}{j'_1} \right), \\ g'(\zeta) &= \log \left(1 - \frac{\zeta}{j'} \right), \\ g(\zeta) &= \log(1 - \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

dove

$$j_1, j'_1, j',$$

sono le (16); e prendiamo a considerare per ciascuna di esse quel ramo uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$ che si riduce a 0 per $\zeta = 0$.

Poichè per $|\zeta|=1$, si può porre $\zeta = e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$), si ha

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\zeta}{j_1} &= 1 - e^{i(\sigma-\sigma_1)} = e^{i\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} \left\{ e^{-i\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} - e^{i\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} \right\} \\ &= 2i e^{i\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$g_1(\zeta) = \log \left(1 - \frac{\zeta}{j_1} \right) = \log 2 + \frac{i}{2} (\pi + \sigma - \sigma_1) + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}. \quad (20)$$

Parimenti per $|\zeta|=1$ si avranno le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} g'_1(\zeta) &= \log 2 + \frac{i}{2} (\pi + \sigma - \sigma'_1) + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2}, \\ g'(\zeta) &= \log 2 + \frac{i}{2} (\pi + \sigma - \sigma') + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma' - \sigma}{2}, \\ g(\zeta) &= \log 2 + \frac{i}{2} (\pi + \sigma - 2\pi) + \log \operatorname{sen} \frac{2\pi - \sigma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

Introduciamo ora quattro costanti reali

$$\alpha_1, \alpha'_1, \alpha', \alpha,$$

da determinarsi in modo opportuno, e poniamo

$$G(\zeta) = \alpha_1 g_1 + \alpha'_1 g'_1 + \alpha' g' + \alpha g. \quad (21)$$

La funzione $G(\zeta)$ è uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$ e si annulla per $\zeta = 0$; se inoltre è:

$$\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha' + \alpha = 0, \quad (22)$$

sulla circonferenza $|\zeta|=1$ si ha per le (20), (20') e (21):

$$\left. \begin{aligned} G(\zeta) = G(e^{i\sigma}) &= -\frac{i}{2} (\alpha_1 \sigma_1 + \alpha'_1 \sigma'_1 + \alpha' \sigma' + 2\pi \alpha) + \\ &+ \alpha_1 \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} + \alpha'_1 \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2} + \\ &+ \alpha' \log \operatorname{sen} \frac{\sigma' - \sigma}{2} + \alpha \log \operatorname{sen} \frac{2\pi - \sigma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Posto ancora

$$F(\zeta) = G(\zeta) + \frac{i}{2} (\alpha_1 \sigma_1 + \alpha'_1 \sigma'_1 + \alpha' \sigma' + 2\pi \alpha), \quad (24)$$

anche la $F(\zeta)$ è funzione uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$, mentre per $|\zeta| = 1$, si ha a norma della (23):

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) = F(e^{i\sigma}) = \alpha_1 \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} + \alpha'_1 \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2} + \\ + \alpha' \log \operatorname{sen} \frac{\sigma' - \sigma}{2} + \alpha \log \operatorname{sen} \frac{2\pi - \sigma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Come è indicato in (16) è:

$$0 < \sigma_1 < \sigma' < \sigma'_1 < 2\pi;$$

ne segue che per $0 < \sigma < \sigma_1$ tutte le semidifferenze

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}, \quad \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2}, \quad \frac{\sigma' - \sigma}{2}, \quad \frac{2\pi - \sigma}{2}$$

sono comprese tra 0 e π , i rispettivi seni sono positivi, per cui posto

$$F = \Phi + i\Psi \quad (26)$$

è

$$\Psi = 0.$$

Per $\sigma_1 < \sigma < \sigma'$ è:

$-\pi < \frac{\sigma_1 - \sigma}{2} < 0$, mentre le rimanenti semidifferenze sono comprese tra 0 e π . Ne segue, tenendo presenti (25) e (26), che

$$\Psi = -\pi \alpha_1.$$

Per $\sigma' < \sigma < \sigma'_1$ sono comprese tra 0 e $-\pi$ le semidifferenze $\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}$ e $\frac{\sigma'_1 - \sigma}{2}$, mentre sono comprese tra 0 e π le rimanenti. Ne segue, sempre dalle (25) e (26), che

$$\Psi = -\pi (\alpha_1 + \alpha').$$

Per $\sigma'_1 < \sigma < 2\pi$ soltanto $\frac{2\pi - \sigma}{2}$ è compresa tra 0 e π , le rimanenti semidifferenze sono comprese tra 0 e $-\pi$.

Ne segue che

$$\Psi = -\pi (\alpha_1 + \alpha' + \alpha'_1).$$

Riassumendo: la funzione $F(\zeta) = \Phi + i\Psi$ è uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$ e sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ il coefficiente della sua parte immaginaria ha il seguente comportamento:

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{sopra l'arco} & (+1, j_1), \\ -\pi \alpha_1 & \text{»} & \text{»} & (j_1, j'), \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha') & \text{»} & \text{»} & (j', j'_1), \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha' + \alpha'_1) & \text{»} & \text{»} & (j'_1, +1). \end{array} \right\} \quad (27)$$

Ciò posto, rammentiamo le condizioni cui deve soddisfare nel cerchio $|\zeta| \leq 1$ la funzione $f(\zeta)$ di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente, e confrontiamo le (17) colle (27).

Dal confronto risulta che la $f(\zeta)$ altro non è che la $F(\zeta)$ purchè le costanti $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha'$ vengano determinate nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{q_1}{\pi}, \\ \alpha_1 + \alpha' &= -\frac{q_2}{\pi}, \\ \alpha_1 + \alpha' + \alpha'_1 &= -\frac{q}{\pi}. \end{aligned}$$

Queste e la (22) risolte danno, quando si tengano presenti le (11):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{q_1}{\pi}, \\ \alpha' &= \frac{q'}{\pi}, \\ \alpha'_1 &= -\frac{q'_1}{\pi}, \\ \alpha &= \frac{q}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Per questi valori delle α la $F(\zeta)$ coincide colla $f(\zeta)$.

Avremo dunque per le (24), (21), (19) e (28):

$$f(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \left\{ 2\pi q + \sigma' q' - \sigma_1 q_1 - \sigma'_1 q'_1 \right\} + \left. + \frac{1}{\pi} \left\{ q \log(1 - \zeta) + q' \log\left(1 - \frac{\zeta}{j}\right) - q_1 \log\left(1 - \frac{\zeta}{j_1}\right) - q'_1 \log\left(1 - \frac{\zeta}{j'_1}\right) \right\} \right\} \quad (29)$$

Questa relazione definisce la voluta funzione $f(\zeta)$ a meno di una inessenziale costante reale additiva.

§ 7.

LA FUNZIONE $w(\zeta)$.

La funzione $w(\zeta)$ dev'essere regolare per $|\zeta| < 1$ e deve annullarsi soltanto per $\zeta = 0$ [Cfr. § 5]. Essa sarà quindi sviluppabile in una serie di TAYLOR:

$$w(\zeta) = \sum_n c_n \zeta^n,$$

essendo c_h ($h \geq 1$) il primo dei coefficienti non nulli dello sviluppo.

Si può allora porre

$$b_n = \frac{c_n}{c_h},$$

con che la serie precedente può scriversi nel modo seguente:

$$w(\zeta) = c_h \zeta^h \left\{ 1 + \sum_{n=h+1}^{\infty} b_n \zeta^{n-h} \right\}. \quad (30)$$

È da notarsi che la funzione $w(\zeta)$ deve annullarsi solamente per $\zeta = 0$, per cui l'espressione entro $\left\{ \right\}$ non si annulla per $|\zeta| < 1$, ove del resto si mantiene regolare.

Ne segue che, posto

$$w^*(\zeta) = \log c_h + \log \left\{ 1 + \sum_{n=h+1}^{\infty} b_n \zeta^{n-h} \right\}, \quad (31)$$

la funzione $w^*(\zeta)$ è regolare per $|\zeta| < 1$.

D'altra parte prendendo i logaritmi di entrambi i membri della (30) si ha, per la (31):

$$\log \frac{w(\zeta)}{\zeta^h} = w^*(\zeta). \quad (32)$$

Poniamo ora

$$\left. \begin{aligned} w &= V e^{-i\vartheta}, \\ \zeta &= \rho e^{i\sigma}, \\ w^* &= u^* - i v^*, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

con che la (32) si scinde nelle due relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \log \frac{V}{\rho^h}, \\ v^* &= \vartheta + h \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Poichè per $|\zeta| = \rho = 1$ dev'essere $|w| = V = 1$ [Cfr. § 5], la prima delle (34) dà:

$$u^* = 0 \quad \text{per} \quad |\zeta| = 1.$$

Ora u^* è funzione armonica e regolare per $|\zeta| < 1$, si annulla per $|\zeta| = 1$: essa è quindi identicamente nulla, cioè:

$$u^* = 0 \quad \text{per} \quad |\zeta| \leq 1. \quad (35)$$

La sua coniugata v^* sarà una costante, indicandola con σ_0 , avremo dopo ciò per l'ultima delle (33):

$$v^* = -i \sigma_0. \quad (36)$$

Per questa, dalla (32) si ricava:

$$w(\zeta) = \zeta^h e^{-i\sigma_0}. \quad (37)$$

La funzione $w(\zeta)$ definita dalla precedente è regolare per $|\zeta| < 1$, si annulla per $\zeta = 0$ ed inoltre $|w| = V = 1$ sulla circonferenza $|\zeta| = 1$.

Ponendo, al solito,

$$w = V e^{-i\vartheta}, \quad \zeta = \rho e^{i\sigma},$$

la (37) si scinde nelle seguenti due relazioni:

$$V = \rho^h, \quad \vartheta = -h \sigma + \sigma_0, \quad (37')$$

le quali definiscono rispettivamente il valore assoluto ed il senso della velocità in un generico punto ζ del cerchio $|\zeta| \leq 1$.

Ora al punto $\zeta = 1$ ($\rho = 1$, $\sigma = 0$) corrisponde nel piano del moto il punto all' ∞ (a monte) del getto G , ove sappiamo [Cfr. § 4, formule (15)] essere $V = 1$ e $\mathfrak{S} = 0$; queste condizioni esigono — ciò scende dalle (37') — che sia

$$\sigma_0 = 0. \quad (38)$$

Si immagini di percorrere la circonferenza $|\zeta| = 1$, a partire dal punto $\zeta = 1$, nel senso $1, j_1, j', j'_1, 1$: si ha $\rho = 1$, mentre σ varia crescendo e assumendo tutti i valori da 0 fino a 2π . Ciò corrisponde a far percorrere nel piano del moto successivamente le linee libere d, s', d', s , ovvero a porre $V = 1$ e a far variare \mathfrak{S} da 0 fino a -2π [Cfr. §§ 4 e 5].

Viceversa, facendo percorrere all'affissa ζ la circonferenza $|\zeta| = 1$, a partire dal punto $\zeta = 1$, nel senso opposto $1, j'_1, j', j_1, 1$, con che si viene a far percorrere a z , nel campo del moto, successivamente le linee libere s, d', s', d , si fa variare σ da 0 fino a -2π , mentre \mathfrak{S} varia da 0 fino a 2π .

Dopo ciò, la seconda delle (37') che per la (38) diviene:

$$\mathfrak{S} = -h\sigma,$$

esige che sia

$$h = 1. \quad (39)$$

Portando i valori di h e σ_0 , definiti dalle (39) e (38), in (37) avremo in definitiva

$$w(\zeta) = \zeta; \quad (40)$$

questa definisce la funzione w di ζ in modo da soddisfare a tutte le condizioni volute.

Dalla (40) scendono le relazioni:

$$V = \rho, \quad \mathfrak{S} = -\sigma, \quad (41)$$

le quali danno un significato alquanto semplice ed espressivo al *modulo* ed all'*argomento*, cambiato di segno, della *nuova variabile* ζ ; essi cioè *non sono altro che il valore assoluto della velocità e l'inclinazione della stessa sull'asse x , nel punto z corrispondente del piano del moto.*

§ 8.

SIGNIFICATO DELLE COSTANTI.

Abbiamo già visto il significato delle costanti q, q', q_1, q'_1 ; esse sono le portate dei getti G, G', G_1, G'_1 [Cfr. § 3], e misurano nello stesso tempo le larghezze asintotiche dei getti stessi [Cfr. la *Osservazione* a § 4].

Per la seconda delle (41):

$$\vartheta = -\sigma,$$

avremo, tenuto conto del significato delle costanti $\vartheta', \vartheta_1, \vartheta'_1$ [Cfr. § 4] e delle (16):

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= -\vartheta', \\ \sigma_1 &= -\vartheta_1, \\ \sigma'_1 &= -\vartheta'_1. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Con che le (16) stesse diventano

$$\left. \begin{aligned} j' &= e^{-i\vartheta'}, \\ j_1 &= e^{-i\vartheta_1}, \\ j'_1 &= e^{-i\vartheta'_1}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

In questo modo i punti j', j_1, j'_1 della circonferenza $|\zeta| = 1$, che corrispondono ai punti all'infinito dei getti G', G_1, G'_1 , si esprimono analiticamente mediante le rispettive inclinazioni asintotiche sull'asse x (nel senso dei rispettivi flussi).

Com'è noto il punto $\zeta = 1$ corrisponde al punto all'infinito di G , la cui inclinazione asintotica sull'asse x è 0.

§ 9.

RELAZIONI NOTEVOLI FRA LE COSTANTI.

Possiamo stabilire due notevoli relazioni che legano tra loro le costanti q, q', q_1, q'_1 e $\vartheta', \vartheta_1, \vartheta'_1$.

Esse scaturiscono immediatamente dal seguente teorema dovuto a LEVI-

CIVITA⁽⁸⁾, che ho avuto occasione di applicare parecchie volte⁽⁹⁾, e che è stato oggetto di notevoli generalizzazioni, assai utili in questioni idrodinamiche⁽¹⁰⁾.

Se $\varphi(x, y)$ è una funzione uniforme, armonica e regolare in un campo limitato da una linea chiusa l , e si pone

$$V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

si ha

$$\int_l \frac{d\varphi}{dn} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dl = \frac{1}{2} \int_l V^2 e^{i\theta} dl, \quad (44)$$

rappresentando n la normale in un generico punto ad l , volta verso l'interno del campo e θ l'angolo che n forma colla direzione positiva dell'asse x .

Interpreto φ come potenziale della velocità delle molecole liquide nel campo limitato dal contorno costituito dalle linee libere d, s', d', s e dalle sezioni normali $\lambda, \lambda_1, \lambda', \lambda'_1$ dei getti G, G_1, G', G'_1 , fatte in località abbastanza lontane (teoricamente all' ∞) dal sito ove avviene l'urto e la confluenza delle vene stesse (V. Fig. 5).

Allora V non è altro che il valore assoluto della velocità.

Ciò posto, notiamo che:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \begin{cases} 0 & \text{sopra } d, s', d', s, \\ 1 & \text{» } \lambda, \\ -1 & \text{» } \lambda_1, \\ +1 & \text{» } \lambda', \\ -1 & \text{» } \lambda'_1; \end{cases}$$

⁽⁸⁾ LEVI-CIVITA, *Sulla contrazione delle vene liquide* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXIV (1905), pp. 1466-1467].

⁽⁹⁾ CISOTTI, *Vene fluenti* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1908), pp. 145-179]; *Sul moto di un solido in un canale* [Ibidem, t. XXVIII (1909), pp. 307-352]; *Sulla biforcazione di una vena liquida* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie V, Vol. XX (1911), pag. 495].

⁽¹⁰⁾ Cfr. ad es. BOGGIO, *Sulla trasformazione di alcuni integrali che si presentano nell'idrodinamica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie V, Vol. XXIII (1914), pag. 923].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{sopra } \lambda, \\ e^{i\vartheta_1} & \text{» } \lambda_1, \\ e^{i\vartheta'} & \text{» } \lambda', \\ e^{i\vartheta'_1} & \text{» } \lambda'_1; \end{cases}$$

$$V = 1 \quad \text{sopra } l;$$

e infine che

$$\int_l e^{i\theta} dl = 0.$$

Ora, per queste, dalla (44) si ricava:

$$\lambda - \lambda_1 e^{i\vartheta_1} + \lambda' e^{i\vartheta'} - \lambda'_1 e^{i\vartheta'_1} = 0;$$

e poichè si è già rilevato essere le larghezze asintotiche λ , λ_1 , λ' , λ'_1 dei getti G , G_1 , G' , G'_1 misurate dagli stessi numeri che rappresentano le rispettive portate q , q_1 , q' , q'_1 [Cfr. l'Osservazione a § 4], potremo scrivere senz'altro:

$$q - q_1 e^{i\vartheta_1} + q' e^{i\vartheta'} - q'_1 e^{i\vartheta'_1} = 0; \quad (45)$$

questa, se si vuole, può scindersi nelle due seguenti notevoli relazioni tra quantità reali:

$$\left. \begin{aligned} q - q_1 \cos \vartheta_1 + q' \cos \vartheta' - q'_1 \cos \vartheta'_1 &= 0, \\ q_1 \sin \vartheta_1 - q' \sin \vartheta' + q'_1 \sin \vartheta'_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

§ 10.

CORRISPONDENZA FRA I PIANI $z = x + iy$ E $\zeta = \xi + i\eta$.
INTEGRALE GENERALE.

La (4)

$$\frac{df}{dz} = w,$$

può scriversi

$$dz = \frac{1}{w} df = \frac{1}{w} \frac{df}{d\zeta} d\zeta;$$

ma dalla (29) derivando si ha:

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{q_1}{j_1 - \zeta} + \frac{q'_1}{j'_1 - \zeta} - \frac{q}{1 - \zeta} - \frac{q'}{j - \zeta} \right\},$$

avremo dunque, tenendo presente la (40):

$$dz = \frac{1}{\pi \zeta} \left\{ \frac{q_1}{j_1 - \zeta} + \frac{q'_1}{j'_1 - \zeta} - \frac{q}{1 - \zeta} - \frac{q'}{j - \zeta} \right\} d\zeta.$$

Se si nota che

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta(a - \zeta)} = \frac{1}{a} \log \frac{\zeta}{a - \zeta} + \text{costante},$$

qualunque sia la costante a , dalla precedente integrando si ottiene

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{q_1}{j_1} + \frac{q'_1}{j'_1} - \frac{q'}{j} - q \right\} \log \zeta + \frac{1}{\pi} \left\{ q \log(1 - \zeta) + \right. \\ \left. + \frac{q'}{j} \log(j - \zeta) - \frac{q_1}{j_1} \log(j_1 - \zeta) - \frac{q'_1}{j'_1} \log(j'_1 - \zeta) \right\} + \text{costante},$$

ma per le (43) e (45) il coefficiente di $\log \zeta$ è nullo, rimane quindi

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ q \log(1 - \zeta) + \frac{q'}{j} \log(j - \zeta) - \frac{q_1}{j_1} \log(j_1 - \zeta) - \right. \\ \left. - \frac{q'_1}{j'_1} \log(j'_1 - \zeta) \right\} + \text{costante};$$

dovendo essere $z = 0$ per $\zeta = 0$ [Cfr. § 5] alla costante del secondo membro spetta il valore seguente:

$$- \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{q'}{j} \log j' - \frac{q_1}{j_1} \log j_1 - \frac{q'_1}{j'_1} \log j'_1 \right\},$$

con che la precedente espressione di z diviene in definitiva:

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ q \log(1 - \zeta) + \frac{q'}{j} \log\left(1 - \frac{\zeta}{j}\right) - \frac{q_1}{j_1} \log\left(1 - \frac{\zeta}{j_1}\right) - \right. \\ \left. - \frac{q'_1}{j'_1} \log\left(1 - \frac{\zeta}{j'_1}\right) \right\}. \quad (47)$$

Questa formula stabilisce la cercata corrispondenza fra i piani

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad \zeta = \xi + i\eta \quad [\text{Cfr. § 5}].$$

Eliminando la variabile ausiliaria ζ tra la (40) e la (47) si ottiene la relazione che lega w a z :

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ q \log \left(1 - w \right) + \frac{q'}{j'} \log \left(1 - \frac{w}{j'} \right) - \frac{q_1}{j_1} \log \left(1 - \frac{w}{j_1} \right) - \frac{q'_1}{j'_1} \log \left(1 - \frac{w}{j'_1} \right) \right\}, \quad (48)$$

e che costituisce l'integrale generale dei moti in questione.

§ 11.

REVERSIBILITÀ DEL FENOMENO.

Posto per un momento

$$j = 1,$$

l'integrale generale (48) può scriversi, con maggiore omogeneità di scrittura,

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{q}{j} \log \left(1 - \frac{w}{j} \right) + \frac{q'}{j'} \log \left(1 - \frac{w}{j'} \right) - \frac{q_1}{j_1} \log \left(1 - \frac{w}{j_1} \right) - \frac{q'_1}{j'_1} \log \left(1 - \frac{w}{j'_1} \right) \right\}. \quad (48')$$

Se w soddisfa alla precedente, facilmente si vede che anche $-w$ soddisfa alla relazione che si ricava da (48') cambiando il segno sia a j, j', j_1, j'_1 che a q, q', q_1, q'_1 .

Atteso il significato di queste costanti [Cfr. § 8] possiamo concludere che quest'ultimo integrale corrisponde ad un moto che si ottiene dal primo invertendo in ogni punto il senso della velocità, senza alterare il suo valore assoluto.

Il fenomeno è dunque reversibile. E precisamente se l'urto dei due getti G e G' determina, a regime raggiunto, due correnti G_1 e G'_1 ed il fenomeno si svolge in un campo ben determinato, lo stesso campo può essere sede del processo inverso, cioè della generazione delle due correnti G e G' (di senso opposto a quello di prima) dovuto all'urto delle due vene G_1 e G'_1 (con flusso opposto a quello di prima).

§ 12.

EQUAZIONI PARAMETRICHE DEI PELI LIBERI.

Se si fa percorrere all'affissa ζ la circonferenza $|\zeta| = 1$ il corrispondente punto z del piano del moto descrive i peli liberi che circoscrivono il campo ove si svolge il fenomeno [Cfr. § 5].

Basta quindi porre nella (47)

$$\zeta = e^{i\sigma}$$

e far variare σ da 0 fino a 2π , oppure — ciò che è lo stesso [Cfr. la (40) e il § 8] — porre nella (48)

$$w = e^{-i\vartheta},$$

e far variare ϑ fra 0 e -2π .

Riferendoci a quest'ultima posizione, la quale consente la introduzione del parametro ϑ , che ha un diretto significato cinematico [Cfr. § 4] si ottiene, tenendo presenti le (43):

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ q \log \left[1 - e^{-i\vartheta} \right] + q' e^{i\vartheta'} \log \left[1 - e^{i(\vartheta' - \vartheta)} \right] - \right. \\ \left. - q_1 e^{i\vartheta_1} \log \left[1 - e^{i(\vartheta_1 - \vartheta)} \right] - q'_1 e^{i\vartheta'_1} \log \left[1 - e^{i(\vartheta'_1 - \vartheta)} \right] \right\}. \quad (49)$$

Si noti che

$$\log \left[1 - e^{-i\vartheta} \right] = \log \left\{ e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \left[e^{i\frac{\vartheta}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \right] \right\} = \log \left\{ 2i e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \right\} = \\ = \log 2 + \frac{i}{2} \left[\pi - \vartheta \right] + \log \sin \frac{\vartheta}{2};$$

e parimenti

$$\log \left[1 - e^{-i(\vartheta - \vartheta')} \right] = \log 2 + \frac{i}{2} \left[\pi - \vartheta + \vartheta' \right] + \log \sin \frac{\vartheta - \vartheta'}{2},$$

$$\log \left[1 - e^{-i(\vartheta - \vartheta_1)} \right] = \log 2 + \frac{i}{2} \left[\pi - \vartheta + \vartheta_1 \right] + \log \sin \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2},$$

$$\log \left[1 - e^{-i(\vartheta - \vartheta'_1)} \right] = \log 2 + \frac{i}{2} \left[\pi - \vartheta + \vartheta'_1 \right] + \log \sin \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2};$$

perciò, tenendo presente la (45), la (49) può scriversi:

$$z = x + iy = \frac{i}{2\pi} \left\{ q' \vartheta' e^{i\vartheta'} - q_1 \vartheta_1 e^{i\vartheta_1} - q'_1 \vartheta'_1 e^{i\vartheta'_1} \right\} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \left\{ q \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} + q' e^{i\vartheta'} \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} - \right. \\ &\left. - q_1 e^{i\vartheta_1} \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} - q'_1 e^{i\vartheta'_1} \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} \right\} . \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Equazioni del pelo libero d. Se si fa variare ϑ da 0 fino a ϑ_1 si viene a far percorrere all'affissa z il pelo libero d dall'infinito a monte di \mathcal{G} fino all' ∞ a valle in \mathcal{G}_1 . Da (16) e (42) si ha

$$-2\pi < \vartheta'_1 < \vartheta' < \vartheta_1 < 0. \quad (51)$$

Ne segue che per $\vartheta_1 < \vartheta < 0$, è

$$-\pi \leq \frac{\vartheta}{2} \leq 0, \quad 0 < \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} < \pi, \quad 0 \leq \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} < \pi, \quad 0 < \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} < \pi,$$

sarà quindi

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta}{2} \right|, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} &= \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \right|, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} &= \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} \right|, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} &= \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} \right|; \end{aligned}$$

e sostituendo in (50), separando la parte reale dalla immaginaria, e indicando con x_a , y_a le coordinate di un punto generico del pelo libero d , si ottengono per questo le seguenti equazioni parametriche:

$$x_a = \frac{1}{2\pi} \left\{ q_1 \vartheta_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 + q'_1 \vartheta'_1 \operatorname{sen} \vartheta'_1 - q' \vartheta' \operatorname{sen} \vartheta' \right\} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \left\{ q \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta}{2} \right| + q' \cos \vartheta' \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \right| - \right. \\ &\left. - q_1 \cos \vartheta_1 \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} \right| - q'_1 \cos \vartheta'_1 \log \operatorname{sen} \left| \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} \right| \right\} , \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned}
 y_a = \frac{1}{2\pi} \left\{ q' \vartheta' \cos \vartheta' - q_1 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - q'_1 \vartheta'_1 \cos \vartheta'_1 - 2\pi q \right\} + \\
 + \frac{1}{\pi} \left\{ q' \operatorname{sen} \vartheta' \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta'|}{2} - q_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta_1|}{2} - \right. \\
 \left. - q'_1 \operatorname{sen} \vartheta'_1 \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta'_1|}{2} \right\}, \\
 (\vartheta_1 \leq \vartheta \leq 0).
 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Equazioni del pelo libero s'. Per avere le equazioni parametriche del pelo libero s' basta far variare nella (50) il parametro ϑ da ϑ_1 fino a ϑ' . Tenendo presenti le disequaglianze (51) si vede che per

$$\vartheta' \leq \vartheta \leq \vartheta_1$$

è

$$-\pi < \frac{\vartheta}{2} < 0, \quad 0 \leq \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} < \pi, \quad -\pi < \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} \leq 0, \quad 0 < \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} < \pi;$$

sarà dunque

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta|}{2}, \\
 \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} &= \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta'|}{2}, \\
 \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta_1|}{2}, \\
 \log \operatorname{sen} \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} &= \log \operatorname{sen} \frac{|\vartheta - \vartheta'_1|}{2}.
 \end{aligned}$$

Portando in (50), separando la parte reale dalla immaginaria e avendo presenti le (52), si ottengono per le coordinate x_s, y_s dei punti di s' le seguenti espressioni parametriche:

$$\left. \begin{aligned}
 x_s &= x_a - q_1 \operatorname{sen} \vartheta_1, \\
 y_s &= y_a + q_1 \cos \vartheta_1,
 \end{aligned} \right\} \quad (\vartheta' \leq \vartheta \leq \vartheta_1). \quad (53)$$

Equazioni del pelo libero d'. Per ricavarle basta far variare, nella (50), ϑ da ϑ' fino a ϑ_1 . Tenendo presenti (51) si ha per

$$\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta':$$

$$-\pi < \frac{\vartheta}{2} < 0, \quad -\pi < \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \leq 0, \quad -\pi < \frac{\vartheta - \vartheta_1}{2} < 0, \quad 0 \leq \frac{\vartheta - \vartheta'_1}{2} < \pi,$$

per cui

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S}}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}'|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_1}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}_1|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'_1}{2} &= \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}'_1|}{2}. \end{aligned}$$

Portando in (50), separando la parte reale dalla immaginaria, e tenendo presenti (52) e (53) si hanno le seguenti equazioni parametriche del pelo libero d' :

$$\left. \begin{aligned} x_{a'} &= x_{s'} + q' \operatorname{sen} \mathcal{S}' = x_a - q_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}_1 + q' \operatorname{sen} \mathcal{S}', \\ y_{a'} &= y_{s'} - q' \cos \mathcal{S}' = y_a + q_1 \cos \mathcal{S}_1 - q' \cos \mathcal{S}', \\ &(\mathcal{S}'_1 \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Equazioni del pelo libero s. Facciamo infine variare \mathcal{S} da \mathcal{S}'_1 fino a -2π . Allora per (51) si ha, quando

$$\begin{aligned} -2\pi \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'_1, \\ -\pi < \frac{\mathcal{S}}{2} < 0, \quad -\pi < \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'}{2} < 0, \quad -\pi < \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_1}{2} < 0, \quad -\pi < \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'_1}{2} \leq 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S}}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}'|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_1}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}_1|}{2}, \\ \log \operatorname{sen} \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}'_1}{2} &= -i\pi + \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S} - \mathcal{S}'_1|}{2}. \end{aligned}$$

Sostituendo in (50), separando la parte reale dalla parte immaginaria, e tenendo presenti (52), (53), (54), nonchè le (46), avremo le equazioni pa-

rametriche del pelo libero s :

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x_{a'} - q'_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}'_1 = x_a - q_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}_1 + q' \operatorname{sen} \mathcal{S}' - q'_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}'_1 = x_a, \\ y_s &= y_{a'} + q'_1 \cos \mathcal{S}'_1 = y_a + q_1 \cos \mathcal{S}_1 - q' \cos \mathcal{S}' + q'_1 \cos \mathcal{S}'_1 = y_a + q \end{aligned} \right\} (55)$$

($-2\pi \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{S}'_1$).

§ 13.

UBICAZIONE DELLO SPARTIACQUE.

Ho denominato *spartiacque* il punto O , in cui è $V=0$, perchè dalla sua ubicazione rispetto ai getti G e G' dipende la distribuzione del liquido che va a formare le due correnti G_1 e G'_1 [Cfr. § 1].

Il punto O si è già assunto come origine delle coordinate [Cfr. § 2], sarà tuttavia interessante assegnare direttamente il suo posto una volta dati i due getti G e G' .

La posizione di O sarà determinata in generale, quando siano note le distanze Δ e Δ' di O dagli asintoti delle sponde sinistre s , s' di G e G' , contate positivamente nei sensi $s \rightarrow d$, $s' \rightarrow d'$.

L'equazione dell'asintoto (a monte) del pelo libero s è manifestamente

$$y = y_{s_\infty},$$

avendo indicato con y_{s_∞} l'ordinata del punto all'infinito di s , a monte. Il valore di y_{s_∞} si ricava dalle (55) e (52), ponendo in esse $\mathcal{S} = -2\pi$. Si ottiene così:

$$\Delta = y_{s_\infty} = \frac{1}{2\pi} \left\{ q' \mathcal{S}' \cos \mathcal{S}' - q_1 \mathcal{S}_1 \cos \mathcal{S}_1 - q'_1 \mathcal{S}'_1 \cos \mathcal{S}'_1 \right\} +$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \left\{ q' \operatorname{sen} \mathcal{S}' \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}'|}{2} - q_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}_1 \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}_1|}{2} - \right. \\ &\left. - q'_1 \operatorname{sen} \mathcal{S}'_1 \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}'_1|}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} (56)$$

L'equazione dell'asintoto al pelo libero s' , a monte, è:

$$\frac{x - x_{s'_\infty}}{\cos \mathcal{S}'} = \frac{y - y_{s'_\infty}}{\operatorname{sen} \mathcal{S}'},$$

cioè

$$x \operatorname{sen} \mathcal{S}' - y \operatorname{cos} \mathcal{S}' + y_{s'_\infty} \operatorname{cos} \mathcal{S}' - x_{s'_\infty} \operatorname{sen} \mathcal{S}' = 0,$$

avendo indicato con $x_{s'_\infty}$ e $y_{s'_\infty}$ le coordinate del punto all'infinito a monte di s' ; avremo dunque

$$\Delta' = y_{s'_\infty} \operatorname{cos} \mathcal{S}' - x_{s'_\infty} \operatorname{sen} \mathcal{S}'.$$

Tenendo presenti (53) e (52) e calcolando il secondo membro della precedente per $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ si ottiene in definitiva:

$$\Delta' = \frac{1}{2\pi} \left\{ q' \mathcal{S}' - q_1 \mathcal{S}_1 \operatorname{cos}(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}') - q'_1 \mathcal{S}'_1 \operatorname{cos}(\mathcal{S}'_1 - \mathcal{S}') - 2\pi q \operatorname{cos} \mathcal{S}' \right\} - \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \left\{ q \operatorname{sen} \mathcal{S}' \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}'|}{2} + q_1 \operatorname{sen}(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}') \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}'|}{2} + \right. \\ & \left. + q'_1 \operatorname{sen}(\mathcal{S}'_1 - \mathcal{S}') \log \operatorname{sen} \frac{|\mathcal{S}'_1 - \mathcal{S}'|}{2} \right\} + q_1 \operatorname{cos}(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}') \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Una volta assegnati i getti G e G' , cioè in particolare le parti asintotiche (a monte) di s e s' , lo spartiacque O risulta il punto comune alle parallele ad esse che ne distano di Δ e Δ' rispettivamente, nel senso accennato.

Fa naturalmente eccezione il caso dell'urto diretto dei due getti G e G' ($\mathcal{S}' = -\pi$) in cui anche le parti asintotiche (a monte) di s ed s' risultano parallele.

Di questo caso ci occuperemo diffusamente nel § 16; possiamo però fino da ora accennare che possono essere punti di spartiacque tutti i punti di una parallela ai getti G e G' (all'infinito a monte).

§ 14.

CONSIDERAZIONI SULLA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI CARATTERISTICHE DEL PROBLEMA.

L'integrale generale (48) del moto, da cui discendono, in particolare, le equazioni parametriche dei peli liberi (§ 12) e la ubicazione dello spartiacque (§ 13), risolve in modo completo il problema propostoci.

Come si vede nella questione intervengono le sette quantità:

$$q, q', q_1, q'_1; \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_1,$$

delle quali è ben noto il significato [Cfr. § 8].

Si sono già stabilite tre relazioni fra le costanti stesse: la (12) e le due (46). È facile constatare che esse sono condizioni necessarie e sufficienti affinché la w definita implicitamente dalla (48) in termini di z , corrisponda alla velocità di due vene confluenti.

Che la (12) e le (46), o ciò che è lo stesso la (45), siano condizioni *necessarie*, si può ricavarlo dall'integrale generale (48) esprimendo che i peli liberi, ove $|w| = 1$ e quindi $w = e^{-i\vartheta}$ ($-2\pi \leq \vartheta \leq 0$), sono linee di flusso, e perciò su essi la parte immaginaria ψ di $f = \varphi + i\psi$ deve assumere valori costanti.

Ora da (48) derivando si ha:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{q}{w-1} + \frac{q'}{j'} \frac{1}{w-j'} - \frac{q_1}{j_1} \frac{1}{w-j_1} - \frac{q'_1}{j'_1} \frac{1}{w-j'_1} \right\};$$

e poichè la (4) può scriversi:

$$df = w \frac{dz}{dw} dw,$$

tenendo conto della precedente, si ha integrando:

$$f = \frac{1}{\pi} \left(q + \frac{q'}{j'} - \frac{q_1}{j_1} - \frac{q'_1}{j'_1} \right) w + \frac{1}{\pi} \left\{ q \log(w-1) + q' \log(w-j') - \right. \\ \left. - q_1 \log(w-j_1) - q'_1 \log(w-j'_1) \right\} + \text{costante.}$$

Posto in questa

$$f = \varphi + i\psi \quad \text{e} \quad w = e^{-i\vartheta},$$

scende immediatamente che affinché ψ risulti indipendente da ϑ è necessario che

$$q + \frac{q'}{j'} - \frac{q_1}{j_1} - \frac{q'_1}{j'_1} = 0,$$

e

$$q + q' - q_1 - q'_1 = 0;$$

le quali non sono altro che la (45) e la (12),

c. d. d.

Le condizioni (12 e (46) sono *sufficienti*.

Per vedere bene la cosa giova richiamare le condizioni atte ad assicurare un possibile regime dovuto all'urto di due vene.

Esse sono le seguenti:

- a) permanenza del fenomeno;
- b) l'origine $z = 0$ dev'essere punto di *spartiacque*, cioè in esso $w = 0$;
- c) devono esistere quattro linee libere s, d, s', d' estendentisi indefinitamente, sia a monte che a valle, aventi due a due identico comportamento asintotico, e sulle quali $|w| = 1$;
- d) la velocità w dev'essere ovunque finita e continua nel campo definito dalle quattro linee libere suaccennate.

La condizione a) implica che w sia funzione soltanto di z (e non del tempo t), ciò che scende dalla (48), qualunque siano le costanti $q, q', q_1, q'_1; \mathcal{S}', \mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_1$; così pure è soddisfatta la condizione b) inquantochè dalle (48) si ha $z = 0$ per $w = 0$.

In quanto alle rimanenti condizioni c) e d) si considerino le equazioni (52), (53), (54), (55) del § 12, che definiscono parametricamente quattro linee d, s', d', s . Su esse e nel campo da esse determinato sono manifestamente verificate le condizioni c) e d), qualunque siano le costanti $q, q', q_1, q'_1; \mathcal{S}', \mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_1$, purchè naturalmente soddisfacenti alla (12) e alle (46). Dunque una volta soddisfatte la (12) e le (46) l'integrale generale (48) è atto a rappresentare un possibile andamento di regime nella confluenza di due vene, c. d. d.

Si noti ora che alcune fra le costanti in questione sono destinate naturalmente a figurare tra i dati della questione, cioè le portate q e q' dei getti G e G' , nonchè l'angolo \mathcal{S}' che determina l'inclinazione asintotica di G' rispetto a G .

Dunque una volta assegnati q, q' e \mathcal{S}' le rimanenti quattro quantità $q_1, q'_1; \mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_1$, che caratterizzano rispettivamente le portate e le direzioni asintotiche delle correnti G_1 e G'_1 , generate dall'urto di G e G' , risultano legate tra loro ed alle rimanenti tre da tre sole relazioni.

Vi è quindi indeterminatezza dal punto di vista del numero delle condizioni necessarie a individuare le accennate quattro quantità.

Questa circostanza può giustificarsi nel modo seguente.

Riportiamoci col pensiero a quanto si è detto nel § 1, e in particolar modo soffermiamoci a considerare lo spartiacque O .

In realtà la posizione acquisita stabilmente da O , una volta raggiunto il regime, dipende dalle circostanze iniziali.

È manifesto che il fenomeno deve presentarsi diversamente, secondochè,

a partire da posizioni prefissate, i due getti G e G' vengono lanciati contemporaneamente oppure in istanti differenti.

In quest'ultimo caso ha certamente influenza, nello stabilirsi l'andamento di regime, l'intervallo di tempo trascorso fra il lancio di un getto e quello dell'altro getto.

L'esame completo della questione esigerebbe lo studio del fenomeno dall'istante iniziale fino allo stabilirsi del regime permanente.

Ma il problema, posto in questi termini, presenta gravi difficoltà e non si intravede la speranza di arrivare in modo rigoroso a una soddisfacente risoluzione.

Tuttavia anche lo studio del regime permanente, oltre mettere in rilievo quali possano essere i possibili regimi, come si è fatto noi, può servire allo scopo, purchè si ricorra ad un dato sperimentale. Così una volta raggiunto il regime non è difficile valutare sperimentalmente p. es. il q_1 che rappresenta la portata (ed anche la larghezza asintotica) della corrente G_1 , oppure assegnare la sua direzione asintotica, il che è quanto dire \mathfrak{S}_1 . Restano allora solamente tre quantità da determinarsi e la (12) e le (46) sono sufficienti allo scopo.

Vi sono alcuni casi particolari notevoli che tratteremo nei paragrafi che seguono in cui tutte le costanti risultano determinate dalle sole relazioni (12) e (46): quando il fenomeno si svolge in modo simmetrico rispetto ad un asse e quando l'urto dei due getti G e G' è diretto.

§ 15.

SIMMETRIA RISPETTO AD UN ASSE.

Esiste un asse di simmetria quando i due getti G e G' essendo uguali, vengono lanciati contemporaneamente (V. Fig. 3). Si stabilirà allora, dopo un certo tempo, il regime che abbiamo già illustrato a § 1 e precisamente si avranno due correnti G_1 e G'_1 aventi per direzione comune l'asse XX' e versi opposti.

Chiamando 2α l'inclinazione reciproca (delle direzioni asintotiche) dei due getti G e G' , con che α rappresenta l'inclinazione comune sull'asse di

simmetria, si ha:

$$\left. \begin{aligned} q' &= q, \\ \vartheta_1 &= \alpha - \pi, \\ \vartheta' &= 2\alpha - 2\pi, \\ \vartheta'_1 &= \alpha - 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Per queste, la (12) e le (46), divengono:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q'_1 &= 2q, \\ q + q \cos 2\alpha + q_1 \cos \alpha - q'_1 \cos \alpha &= 0, \\ q \sin 2\alpha + q_1 \sin \alpha - q'_1 \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Come facilmente si può constatare, le (59) sono soddisfatte da

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q(1 - \cos \alpha) = 2q \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ q'_1 &= q(1 + \cos \alpha) = 2q \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

formule che determinano le portate q_1 e q'_1 di G_1 e G'_1 .

Dalle precedenti, dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{q_1}{q'_1} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

come si è accennato al § 1.

Per le (58), le (43) divengono:

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= e^{i(\pi-\alpha)} = -e^{-i\alpha}, \\ j' &= e^{2i(\pi-\alpha)} = e^{2i\alpha}, \\ j'_1 &= e^{i(2\pi-\alpha)} = e^{-i\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

L'integrale generale (48), per (60) e (61), diviene

$$z = \frac{q}{\pi} \left\{ \log(1-w) + e^{2i\alpha} \log(1-w e^{2i\alpha}) + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha} \log(1+w e^{i\alpha}) - \right. \\ \left. - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha} \log(1-w e^{i\alpha}) \right\}. \quad (62)$$

Le equazioni parametriche dei peli liberi si ricavano facilmente dalle (52), (53), (54), (55), tenendo presenti le (58) e (60).

Così pure può determinarsi la posizione dello spartiacque sull'asse di simmetria mediante le formule del § 13.

§ 16.

URTO DIRETTO.

I due getti G e G' siano paralleli e diretti per verso opposto (V. Fig. 7).

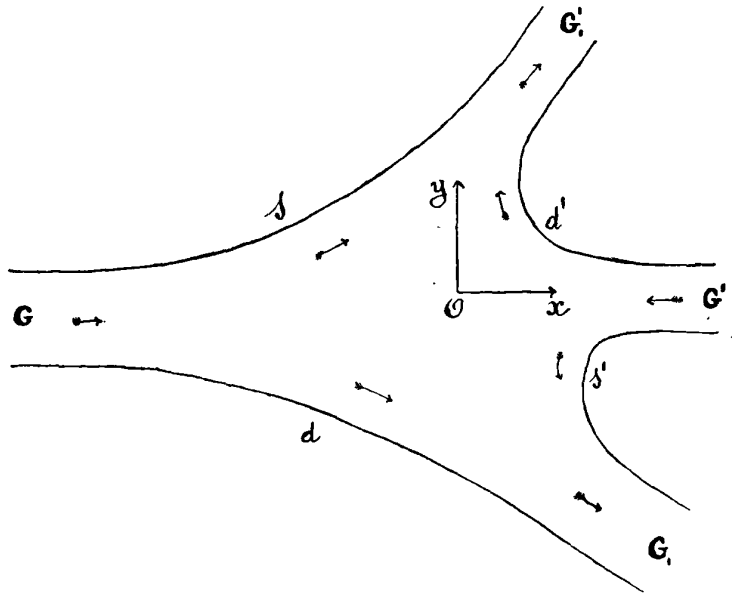


Fig. 7.

Naturalmente si ammette che G e G' effettivamente si incontrino, non presentando il problema nessun interesse nel caso opposto.

Volendo precisare, in forma analitica, le condizioni di urto diretto delle due vene G e G' , giova introdurre la differenza

$$\delta = y_{d'\infty} - y_{s\infty}, \quad (63)$$

tra le ordinate dei punti all'infinito a monte di d' e di s .

Rammentando che q e q' misurano le larghezze asintotiche di G e di G' [Cfr. § 4] si vede immediatamente che condizione necessaria e sufficiente per l'urto delle due vene è la seguente diseuguaglianza:

$$-q < \delta < q'. \quad (64)$$

Ciò posto, poichè il δ che denominerò *spostamento di G' rispetto a G*, è a ritenersi un dato della questione, si può senz'altro ammettere verificata la (64).

L'ipotesi che si tratta di urto diretto, implica che sia

$$\vartheta' = -\pi. \quad (65)$$

In tal caso le (46) divengono:

$$\left. \begin{aligned} q - q' - q_1 \cos \vartheta_1 - q'_1 \cos \vartheta'_1 &= 0, \\ q_1 \sin \vartheta_1 + q'_1 \sin \vartheta'_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

D'altra parte, avuto riguardo a quanto si disse a § 13, facilmente si vede che è:

$$\delta = q' - (\Delta + \Delta');$$

e poichè per le (56) e (57), tenuto conto di (65), si ha

$$\Delta + \Delta' = q - q_1 \cos \vartheta_1 - \frac{1}{\pi} \left\{ q_1 \sin \vartheta_1 \log \operatorname{tg} \frac{|\vartheta_1|}{2} + q'_1 \sin \vartheta'_1 \log \operatorname{tg} \frac{|\vartheta'_1|}{2} \right\},$$

sarà

$$\left. \begin{aligned} \delta = q' - q + q_1 \cos \vartheta_1 + \frac{1}{\pi} \left\{ q_1 \sin \vartheta_1 \log \operatorname{tg} \frac{|\vartheta_1|}{2} + \right. \\ \left. + q'_1 \sin \vartheta'_1 \log \operatorname{tg} \frac{|\vartheta'_1|}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

La (12):

$$q + q' = q_1 + q'_1,$$

unitamente alle (66) e alla (67), determina q_1 , q'_1 , ϑ_1 , ϑ'_1 in funzione di q , q' , δ .

Basta allora ricorrere all'integrale generale (48); si ottiene la soluzione completa dell'urto diretto di due vene.

§ 17.

ALCUNI CASI PARTICOLARI DI URTO DIRETTO.

Nell'urto diretto si può avere un asse di simmetria XX' (Fig. 8).

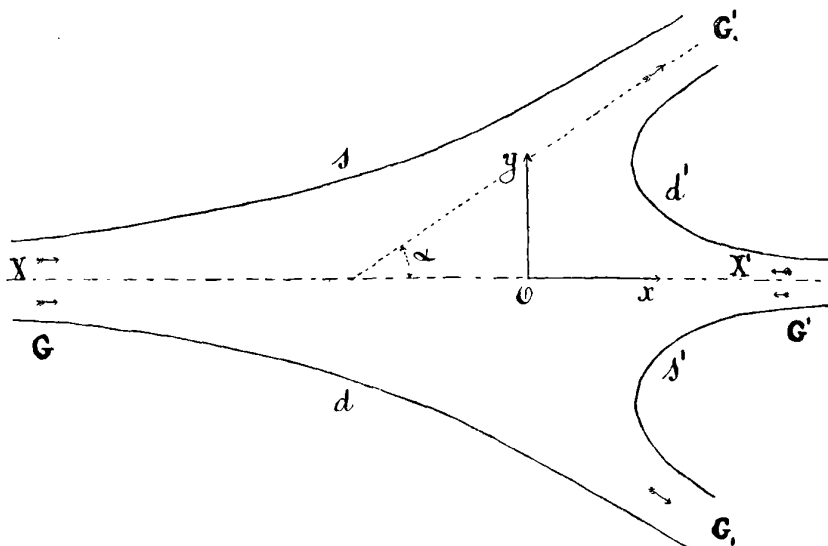


Fig. 8.

Un tal caso si presenta quando, essendo p. es. $q' \leq q$, è

$$\delta = \frac{q' - q}{2}. \quad (68)$$

Allora, chiamando 2α l'inclinazione reciproca delle direzioni asintotiche delle due correnti G_1 e G'_1 , si dovrà avere ancora :

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= -\alpha, \\ \vartheta'_1 &= \alpha - 2\pi, \\ q'_1 &= q_1. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Dopo ciò è facile verificare che la (12), le (66) e la (67) sono soddisfatte

ponendo :

$$\left. \begin{aligned} q_1 = q'_1 &= \frac{1}{2} (q + q'), \\ \cos \alpha &= \frac{q - q'}{q + q'}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Manifestamente il caso attuale e quello trattato al § 15 possono dedursi uno dall'altro applicando il principio di *reversibilità* [Cfr. § 11].

Consideriamo infine l'urto diretto (anche non simmetrico) di due getti eguali.

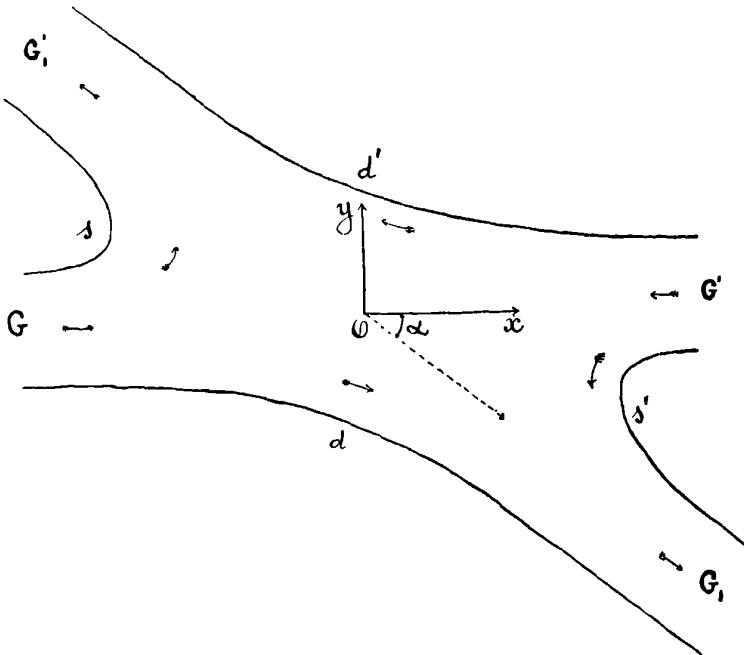


Fig. 9.

In tal caso (Fig. 9) è:

$$q' = q, \quad (71)$$

e il getto G' viene a trovarsi rispetto a G nelle stesse condizioni di G rispetto a G' . Ne segue che anche le correnti G_1 e G'_1 si devono trovare nelle stesse condizioni sia rispetto a G che rispetto a G' , considerate beninteso nei rispettivi versi.

Ciò implica in sostanza la simmetria rispetto allo spartiacque O .

Che il fenomeno si presenti in questo modo, rimane confermato dalla circostanza che la (12) e le (66) sono identicamente soddisfatte per:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q'_1 = q' = q, \\ \vartheta_1 &= -\alpha, \\ \vartheta'_1 &= -\pi - \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

qualunque sia α .

L'angolo α viene determinato dallo spostamento δ mediante la (67). Per le (72) la (67) diviene infatti

$$\delta = q \cos \alpha + \frac{q}{\pi} \operatorname{sen} \alpha \log \cot^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (73)$$

In tal guisa tutte le costanti caratteristiche del fenomeno sono determinate.

PARTE SECONDA.

Confluenza di quantesivogliano vene.

§ 18.

IL PROBLEMA GENERALE.

Vale la pena di estendere la teoria precedente al problema più generale della confluenza (in regime permanente) di n getti liquidi G_1, G_2, \dots, G_n . Si suppone che questi n getti confluiscono tutti in una medesima località [V. la Fig. 10, in cui $n = 4$].

Ciò corrisponde alla esistenza di un unico punto di spartiacque O .

L'urto delle n vene G_1, G_2, \dots, G_n , dà luogo ad altrettante correnti G'_1, G'_2, \dots, G'_n .

Ci siamo già resi conto di ciò per $n = 2$ [Cfr. § 1].

Per rendersene conto in generale prendiamo in esame due getti consecutivi G_h e G_{h+1} , essendo h uno dei numeri $1, 2, \dots, n$, ed intendendo equi-

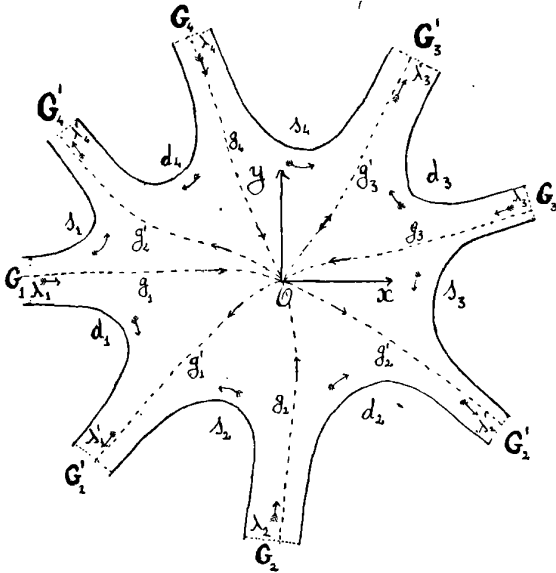


Fig. 10.

valenti due indici h e k quando differiscono per un multiplo di n , con che, in particolare, $n + 1$ equivale ad 1 . Diciamo s_h e d_h le rispettive sponde, sinistra e destra, di G_h ; saranno s_{h+1} , d_{h+1} quelle di G_{h+1} . Se il verso con cui si susseguono le correnti G_1, G_2, \dots, G_n è *destrorso* le due sponde contigue di G_h e G_{h+1} sono d_h e s_{h+1} . Ora, tanto d_h quanto s_{h+1} sono peli liberi e su ciascuno di essi il valore assoluto V della velocità dev'essere costante ed eguale a 1 [Cfr. § 2]; dovendo per ipotesi i due getti G_h e G_{h+1} confluire i peli liberi d_h e s_{h+1} non possono essere rette

parallele [escluso naturalmente il caso $n = 2$ considerato nei §§ 16 e 17]; d'altra parte d_h e s_{h+1} non possono avere alcun punto comune *al finito*, perchè se si incontrassero in un punto ivi la velocità dovrebbe annullarsi [Cfr. § 1], mentre come si è detto deve avere dappertutto valore assoluto $= 1$. Dunque d_h e s_{h+1} non possono essere rette parallele, nè avere alcun punto comune al finito, devono invece avere per ipotesi ciascuno una direzione asintotica sia a monte che a valle [Cfr. § 4].

Poichè d_h e s_{h+1} non si toccano mai il liquido tra esse compreso va a formare una corrente G'_h , ed è ragionevole ammettere [come già per $n = 2$] che essa debba avere una direzione asintotica, cioè che le due direzioni asintotiche a valle di d_h e s_{h+1} debbano coincidere.

Tra ogni coppia G_h, G_{h+1} di getti consecutivi deve così trovarsi almeno una corrente G'_h , ne segue che il numero delle correnti G'_h generate dalla confluenza degli n getti G_h è almeno n .

Questo numero poi non può essere superato; basta pensare che ogni corrente libera deve essere limitata da due peli liberi e quindi n correnti da $2n$ peli liberi, ora tanti sono appunto per ipotesi i peli liberi d_h e s_h .

Il numero delle correnti G'_h è dunque n , come si aveva asserito.

Il fenomeno può schematizzarsi nel modo seguente:

A distanza abbastanza grande (teoricamente all' ∞) dalla località ove avviene la confluenza delle n vene G_h in ciascuna di esse i filetti scorrono paralleli fra loro ed ai peli liberi d_h e s_h , avvicinandosi alla località anzidetta l'andamento si modifica alquanto: n filetti g_1, g_2, \dots, g_n appartenenti rispettivamente a G_1, G_2, \dots, G_n urtandosi in un punto O (spartiacque) si arrestano momentaneamente, indi proseguono generando altri n filetti g'_1, g'_2, \dots, g'_n direttori delle n correnti G'_1, G'_2, \dots, G'_n ; gli altri filetti liquidi vengono più o meno deviati, ma nessuno si arresta.

§ 19.

TRADUZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA.

Gioverà assumere una coppia di assi cartesiani ortogonali, coll'origine in O e cogli assi Ox, Oy orientati in modo che il verso di rotazione $Ox \rightarrow Oy$ sia *sinistrorso*.

Ciò posto per la traduzione analitica del problema basta riportarsi senz'altro a quanto è stato detto nei §§ 2, 3, 4 relativamente all'urto di due vene, introducendo le ovvie modificazioni suggerite dalla nuova circostanza che l'urto ha ora luogo fra n vene, invece che fra due soltanto.

Così circa il comportamento di

$$f = \varphi + i\psi,$$

nel campo in cui si svolge il fenomeno, si deduce senza nessuna difficoltà [Cfr. § 3] che $f(z)$ è *funzione regolare nei punti $z = x + iy$ del campo del moto situati a distanza finita, diviene infinita all'infinito, e sopra ciascuna delle $2n$ linee d_h e s_h , costituenti il contorno del campo, il coefficiente ψ della sua parte immaginaria deve assumere valori costanti differenti, che indicherò rispettivamente con $\varphi_{d_h}, \psi_{s_h}$, per cui:*

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{d_h} \text{ sopra } d_h, \\ \psi_{s_h} \text{ sopra } s_h, \\ (h = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (74)$$

Saranno quindi

$$q_h = \psi_{s_h} - \psi_{d_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (75)$$

le portate dei getti G_h ; e

$$q'_h = \psi_{s_{h+1}} - \psi_{d_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (76)$$

le portate delle n correnti G'_h .

Dalle (75) e (76), sommando, scende la relazione:

$$\sum_1^n q_h = \sum_1^n q'_h, \quad (77)$$

come era da attendersi per la permanenza del fenomeno.

In quanto al comportamento di

$$w(z) = u - iv = V e^{-i\vartheta},$$

riferendoci al § 4, si può dire che essa *dev'essere funzione uniforme, finita e continua nel campo $z = x + iy$ del moto; inoltre:*

$$|w| = V = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{sopra } d_h \text{ e } s_h, \\ > 0 \quad \text{in ogni punto } P \equiv O, \\ = 0 \quad \text{in } O. \end{array} \right\} \quad (78)$$

Indico con ϑ_h e ϑ'_h gli angoli che le direzioni asintotiche dei flussi di G_h e G'_h rispettivamente formano colla direzione positiva dell'asse Ox . Poichè, per ipotesi, il comportamento asintotico a monte di G_h e quello a valle di G'_h è il regime uniforme, si deve avere ulteriormente:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{OP \rightarrow \infty} V = 1, \\ \lim_{OP \rightarrow \infty} \vartheta = \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_h \quad \text{quando } P \text{ si allontana in } G_h, \\ \vartheta'_h \quad \text{quando } P \text{ si allontana in } G'_h, \end{array} \right\} \\ \quad \quad \quad (h = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right\} \quad (79)$$

Per le considerazioni svolte nel § 4, circa il modo di variare di ϑ' , e che si possono applicare al caso attuale, si vede che ϑ_h e ϑ'_h sono soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\vartheta_1 > \vartheta'_1 > \vartheta_2 > \vartheta'_2 > \vartheta_3 > \dots > \vartheta_n > \vartheta'_n > \vartheta_1 - 2\pi. \quad (80)$$

Ancor qui si può applicare l'osservazione alla fine del § 4 e dire che q_h e q'_h misurano oltre che le portate di G_h e di G'_h , anche le loro larghezze asintotiche, a monte per le prime, a valle per le seconde.

§ 20.

CAMBIAMENTO DI VARIABILE.

Come già si fece a § 5, converrà immaginare di fare un cambiamento di variabile che permetta di rappresentare in modo conforme il campo del moto $z = x + iy$, che è semplicemente connesso, sopra un cerchio di raggio unitario nel piano ausiliario $\zeta = \xi + i\eta$, in modo che al contorno del campo della variabile z venga a corrispondere nel secondo piano la circonferenza

$$|\zeta| = 1,$$

al punto O ($z = 0$) il punto $\zeta = 0$, ed infine al punto all' ∞ cui tendono asintoticamente a monte i peli liberi s_1 e d_1 , tra i quali scorre G_1 , corrisponda il punto

$$\zeta = j_1 = e^{i\sigma_1}, \quad (81)$$

della circonferenza $|\zeta| = 1$ ⁽¹¹⁾.

Detti allora

$$\left. \begin{aligned} j'_1 &= e^{i\sigma'_1}, \\ j_2 &= e^{i\sigma_2}, \\ j'_2 &= e^{i\sigma'_2}, \quad (\sigma_2 < \sigma'_1 < \sigma_2 < \sigma'_2 < \dots < \sigma_n < \sigma'_n < \sigma_1 + 2\pi) \\ \dots &\dots \\ j_n &= e^{i\sigma_n}, \\ j'_n &= e^{i\sigma'_n}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

⁽¹¹⁾ Si avrebbe potuto assumere addirittura $\sigma_1 = 0$, come pure si avrebbe potuto supporre $\sigma_1 = 0$, intendendo in tal modo scelta la direzione positiva dell'asse x coincidente col verso del flusso asintotico a monte di G_1 . È ciò che abbiamo fatto nella prima parte trattando dell'urto di due vene. Nel caso attuale giova non prefissare i valori di σ_1 e σ_1 , allo scopo di ottenere delle formole omogenee.

§. 21.

LE FUNZIONI $w(\zeta)$ E $f(\zeta)$.

È facile constatare, mediante confronto delle (84) colle (18), che la funzione $w(\zeta)$ soddisfacente alle condizioni volute è quella stessa che serve al caso $n=2$ e che abbiamo determinato al § 7, e cioè la (40):

$$w(\zeta) = \zeta.$$

Si tratta ora di costruire la $f(\zeta)$.

A tal uopo conviene partire dalla funzione:

$$g_h(\zeta) = \log \left(1 - \frac{\zeta}{j_h} \right), \quad (86)$$

e considerare quel ramo di essa uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$ che si riduce a zero per $\zeta = 0$.

Poichè per $|\zeta| = 1$ si può porre

$$\zeta = e^{i\sigma}$$

con

$$0 \leq \sigma \leq 2\pi,$$

si ha

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\zeta}{j_h} &= 1 - e^{i(\sigma - \sigma_h)} = e^{i \frac{\sigma - \sigma_h}{2}} \left\{ e^{-i \frac{\sigma - \sigma_h}{2}} - e^{i \frac{\sigma - \sigma_h}{2}} \right\}, \\ &= 2i e^{i \frac{\sigma - \sigma_h}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sigma_h - \sigma}{2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$g_h(\zeta) = g_h(e^{i\sigma}) = \log 2 + \frac{i}{2} (\pi + \sigma - \sigma_h) + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_h - \sigma}{2}. \quad (87)$$

Parimenti, se si considera la funzione

$$g'_h(\zeta) = \log \left(1 - \frac{\zeta}{j'_h} \right), \quad (88)$$

colla determinazione zero per $\zeta = 0$, essa è uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$,

mentre sulla circonferenza $|\zeta| = 1$, cioè per $\zeta = e^{i\sigma}$, si ha:

$$g'_h(\zeta) = g'_h(e^{i\sigma}) = \log 2 + \frac{i}{2}(\pi + \sigma - \sigma'_h) + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_h - \sigma}{2}. \quad (89)$$

Si introducano ora $2n$ costanti reali

$$\alpha_h, \alpha'_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

che mi riservo di determinare in modo opportuno, e si ponga

$$G(\zeta) = \sum_1^n \left\{ \alpha_h g_h(\zeta) + \alpha'_h g'_h(\zeta) \right\} \quad (90)$$

La funzione $G(\zeta)$ è uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$, si annulla per $\zeta = 0$; se si suppone inoltre che le costanti α_h e α'_h siano legate dalla relazione:

$$\sum_1^n (\alpha_h + \alpha'_h) = 0, \quad (91)$$

allora sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ si ha, per le (87) e (89):

$$G(\zeta) = G(e^{i\sigma}) = -\frac{i}{2} \sum_1^n (\alpha_h \sigma_h + \alpha'_h \sigma'_h) + \left. \begin{aligned} &+ \sum_1^n \left\{ \alpha_h \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_h - \sigma}{2} + \alpha'_h \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_h - \sigma}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Posto ancora

$$F(\zeta) = G(\zeta) + \frac{i}{2} \sum_1^n (\alpha_h \sigma_h + \alpha'_h \sigma'_h), \quad (93)$$

anche la $F(\zeta)$ risulta funzione di ζ uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$, mentre per $|\zeta| = 1$ si ha, per la (92):

$$F(\zeta) = F(e^{i\sigma}) = \sum_1^n \left\{ \alpha_h \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_h - \sigma}{2} + \alpha'_h \log \operatorname{sen} \frac{\sigma'_h - \sigma}{2} \right\}. \quad (94)$$

Si è già visto [Cfr. la (82)] che:

$$\sigma_1 < \sigma'_1 < \sigma_2 < \sigma'_2 < \dots < \sigma_n < \sigma'_n < \sigma_1 + 2\pi,$$

ne segue che per

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma'_1,$$

la semidifferenza $\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}$ è compresa tra 0 e $-\pi$, mentre tutte le altre semi-

differenze, che appaiono nel secondo membro della (94), sono comprese tra 0 e $+\pi$; posto perciò

$$F = \Phi + i\Psi, \tag{95}$$

sarà

$$\Psi = -\pi \alpha_1.$$

Per

$$\sigma'_1 < \sigma < \sigma_2,$$

le semidifferenze

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2}$$

sono comprese tra 0 e $-\pi$ e tutte le altre tra 0 e $+\pi$; ne segue che

$$\Psi = -\pi (\alpha_1 + \alpha'_1).$$

Per

$$\sigma_2 < \sigma < \sigma'_2,$$

le semidifferenze

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}, \quad \frac{\sigma'_1 - \sigma}{2}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma}{2}$$

sono comprese tra 0 e $-\pi$, mentre le altre sono tutte comprese tra 0 e $+\pi$; è quindi:

$$\Psi = -\pi (\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha_2).$$

E così via.

Per

$$\sigma'_n < \sigma < \sigma_1 + 2\pi,$$

tutte le semidifferenze accennate sono comprese tra 0 e $-\pi$, e quindi [tenendo conto della (91)]:

$$\Psi = -\pi (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n) = 0.$$

Riassumendo: la funzione $F = \Phi + i\Psi$ è uniforme e regolare per $|\zeta| < 1$ e sulla circonferenza $|\zeta| = 1$ il coefficiente Ψ della sua parte immaginaria assume i valori costanti seguenti:

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{ll} -\pi \alpha_1 & \text{sopra l'arco } (j_1, j'_1), \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha'_1) & \text{» » } (j'_1, j_2), \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) & \text{» » } (j_2, j'_2), \\ \dots & \dots \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_{n-1}) & \text{» » } (j_n, j'_n), \\ -\pi (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n) = 0 & \text{» » } (j'_n, j_1). \end{array} \right\} \tag{96}$$

§ 22.

RELAZIONI NOTEVOLI FRA LE COSTANTI.

Si è già visto [Cfr. § 19] che q_h e q'_h rappresentano le portate delle correnti G_h e G'_h rispettivamente, e che esprimono nello stesso tempo la misura delle larghezze asintotiche delle correnti stesse.

Si noti ora che, essendo per la (40)

$$w = \zeta,$$

si ha, ponendo al solito,

$$w = V e^{-i\vartheta} \quad \text{e} \quad \zeta = \rho e^{i\sigma}:$$

$$\left. \begin{aligned} V &= \rho. \\ \vartheta &= -\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

La seconda di queste, atteso il significato di ϑ_h e ϑ'_h [Cfr. § 19], tenuto conto della (81) e delle (82), permette di stabilire le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_h &= -\sigma_h, \\ \vartheta'_h &= -\sigma'_h, \\ (h &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

con che la (81) e le (82) stesse si possono scrivere:

$$\left. \begin{aligned} j_h &= e^{-i\vartheta_h}, \\ j'_h &= e^{-i\vartheta'_h}, \\ (h &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Come già a § 9 possiamo anche qui stabilire due notevoli relazioni che legano tra di loro le costanti q_h , q'_h , ϑ_h , ϑ'_h . Basta a tal uopo sfruttare lo stesso teorema enunciato a § 9.

Interpretiamo nella formula (44) la funzione φ come potenziale di velocità delle molecole liquide nel campo limitato dal contorno l costituito dalle linee libere d_h , s_h e dalle sezioni normali γ_h e λ'_h dei getti G_h , G'_h , fatte in

località abbastanza lontane (teoricamente all' ∞) dal sito ove le vene confluiscono (V. Fig. 10). Allora V non è altro che il valore assoluto della velocità.

Ciò posto, si noti che:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \begin{cases} 0 & \text{sopra } d_h, s_h, \\ 1 & \text{» } \lambda_h, \\ -1 & \text{» } \lambda'_h, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{cases} e^{i\vartheta_h} & \text{sopra } \lambda_h, \\ e^{i\vartheta'_h} & \text{» } \lambda'_h; \end{cases}$$

$$(h = 1, 2, \dots, n);$$

$$V = 1 \text{ sopra } l;$$

e infine che

$$\int_i e^{i\theta} dl = 0.$$

Allora dalla formula (44) scende

$$\sum_1^n \left\{ \lambda_h e^{i\vartheta_h} - \lambda'_h e^{i\vartheta'_h} \right\} = 0;$$

e poichè si è già notato [Cfr. § 19] che le larghezze asintotiche λ_h e λ'_h delle correnti G_h e G'_h sono misurate dagli stessi numeri che rappresentano le rispettive portate q_h, q'_h , la precedente può scriversi senz'altro:

$$\sum_1^n \left(q_h e^{i\vartheta_h} - q'_h e^{i\vartheta'_h} \right) = 0. \quad (103)$$

Questa relazione si scinde manifestamente nelle due relazioni seguenti tra elementi reali:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n \left(q_h \cos \vartheta_h - q'_h \cos \vartheta'_h \right) &= 0, \\ \sum_1^n \left(q_h \sin \vartheta_h - q'_h \sin \vartheta'_h \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Tanto la (103) quanto le (104) costituiscono le naturali generalizzazioni della (45) e delle (46).

§ 23.

INTEGRALE GENERALE.

Dalla (99), derivando si ha

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \left\{ \frac{q'_h}{j'_h - \zeta} - \frac{q_h}{j_h - \zeta} \right\}. \quad (105)$$

La (4)

$$\frac{df}{dz} = w,$$

può scriversi:

$$dz = \frac{1}{w} df = \frac{1}{w} \frac{df}{d\zeta} d\zeta.$$

Per la (40) e la (105) si avrà dunque

$$dz = \frac{1}{\pi} \frac{d\zeta}{\zeta} \sum_1^n \left\{ \frac{q'_h}{j'_h - \zeta} - \frac{q_h}{j_h - \zeta} \right\}.$$

Se si nota che

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta(\alpha - \zeta)} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\zeta}{\alpha - \zeta} + \text{costante},$$

qualunque sia la costante α , avremo integrando:

$$z = \frac{\log \zeta}{\pi} \sum_1^n \left(\frac{q'_h}{j'_h} - \frac{q_h}{j_h} \right) + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_1^n \left\{ \frac{q_h}{j_h} \log(j_h - \zeta) - \frac{q'_h}{j'_h} \log(j'_h - \zeta) \right\} + \text{costante};$$

ma per le (102) e (103) è

$$\sum_1^n \left(\frac{q'_h}{j'_h} - \frac{q_h}{j_h} \right) = 0;$$

d'altra parte per $\zeta = 0$ dev'essere $z = 0$ [Cfr. § 20], per cui alla costante del secondo membro spetta il valore

$$- \frac{1}{\pi} \sum_1^n \left(\frac{q_h}{j_h} \log j_h - \frac{q'_h}{j'_h} \log j'_h \right);$$

dopo ciò si ha in definitiva:

$$z = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \left\{ \frac{q_h}{j_h} \log \left(1 - \frac{\zeta}{j_h} \right) - \frac{q'_h}{j'_h} \log \left(1 - \frac{\zeta}{j'_h} \right) \right\}. \quad (106)$$

Questa formola stabilisce la voluta [Cfr. § 20] corrispondenza fra i piani $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$.

Eliminando l'ausiliaria ζ tra la (106) e la (40), si ottiene la seguente relazione che lega la velocità w al posto z :

$$z = \frac{1}{\pi} \sum_1^n \left\{ \frac{q_h}{j_h} \log \left(1 - \frac{w}{j_h} \right) - \frac{q'_h}{j'_h} \log \left(1 - \frac{w}{j'_h} \right) \right\}, \quad (107)$$

che costituisce l'integrale generale del problema della confluenza di n getti liquidi.

§ 24.

REVERSIBILITÀ.

Il secondo membro della (107) non muta se si cangia il segno a w , j_h , j'_h , q_h , q'_h .

Atteso il significato di queste lettere si può concludere che *il fenomeno è reversibile*, cioè se l'urto degli n getti G_h determina, una volta raggiunto il regime, le n correnti G'_h ed il fenomeno si svolge in un campo ben definito, lo stesso campo può essere sede del processo inverso: della generazione delle correnti G_h (con flusso opposto) dovuto all'urto delle n correnti G'_h (con flusso opposto).

§ 25.

CONSIDERAZIONI SULLA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI.

Una volta in possesso dell'integrale generale del moto, cioè delle (106) e (107), sarebbe facile dedurre da queste formole tutti gli elementi salienti del fenomeno, in particolare le equazioni parametriche dei peli liberi s_h , d_h

e la ubicazione dello spartiacque, seguendo una via del tutto analoga a quella che ho tenuto, pel caso $n = 2$, nei §§ 12 e 13.

Convieni piuttosto fermarsi un momento per esaminare come si estendono per la confluenza di n vene le considerazioni, svolte nel § 14, circa la determinazione delle costanti che compariscono sia nella (106) che nell'integrale generale (107).

Si tratta delle costanti q_n , q'_n , \mathfrak{J}_n e \mathfrak{J}'_n , potendosi sostituire quest'ultime alle j_n e j'_n , a norma delle (102).

Tra le $4n$ costanti summenzionate le

$$q_n \text{ e } \mathfrak{J}_n$$

sono destinate a figurare naturalmente fra i dati del problema, inquantochè le prime (q_n) definiscono le portate dei getti assegnati G_n e le seconde (\mathfrak{J}_n) ne caratterizzano le direzioni asintotiche a monte.

Le rimanenti $2n$ quantità

$$q'_n \text{ e } \mathfrak{J}'_n,$$

che come si sa individuano portate e direzioni asintotiche a valle delle correnti G'_n generate dall'urto delle G , sono a priori incognite.

Le considerazioni istituite finora ci hanno fornito tre relazioni tra le $4n$ quantità q_n , q'_n , \mathfrak{J}_n e \mathfrak{J}'_n ; la (77) e le (104). Si può vedere, come si è fatto a § 14, che esse sono tutte e le sole affinché l'integrale (107) corrisponda ad una confluenza di n vene; ma poichè $2n$ sono le quantità incognite (le q'_n e le \mathfrak{J}'_n) ci occorrerebbero altresì $2n - 3$ relazioni affinché esse risultassero determinate.

Come si vede la indeterminatezza già rilevata nel § 14 pel caso di $n = 2$, aumenta alquanto per $n > 2$.

Attesa la giustificazione data nel citato paragrafo per $n = 2$, si capisce che la cosa debba complicarsi maggiormente per l'urto di $n > 2$ vene.

Un determinato regime dipende manifestamente dalla posizione acquisita stabilmente dallo spartiacque O .

Ora tale posizione dipende dalle circostanze iniziali.

L'intuizione fisica ci avverte che il fenomeno debba presentare delle caratteristiche differenti a seconda che gli n getti G_n vengono lanciati, a partire da località assegnate, contemporaneamente oppure in istanti differenti. Ancor qui, come già nel caso $n = 2$, l'esame completo della questione esigerebbe lo studio del fenomeno dall'istante iniziale fino allo stabilirsi del regime permanente.

Tuttavia non è priva di interesse la ricerca dei possibili andamenti di regime per la confluenza di n getti assegnati. A ciò risponde in modo esauriente la presente ricerca.

D'altra parte non è difficile assegnare sperimentalmente i valori di $2n-3$ delle quantità q'_h e \mathcal{F}'_h , le rimanenti 3 risultano allora definite dalle 3 relazioni (77) e (104). Una volta note tutte le costanti le formule (106) e (107) caratterizzano in modo completo tutti gli elementi del moto.

§ 26.

UN CASO PARTICOLARE.

Prendo in esame un caso particolare, in cui la determinazione delle costanti è immediata.

Si abbiano n vene eguali i cui assi siano concorrenti ad uno stesso punto O

e tali di più che l'inclinazione (asintotica) reciproca di due getti consecutivi sia costante ed eguale a $\frac{2\pi}{n}$. Se gli n getti G_h vengono

lanciati contemporaneamente e a una medesima distanza da O è evidente che le n correnti G'_h che si stabiliranno, una volta raggiunto il regime, saranno eguali tra di loro e alle vene G_h , inoltre la vena G'_h avrà per asse la bisettrice degli assi di G_h e di G_{h+1} .

In tali circostanze, detta q la portata comune ai getti G_h e G'_h , avremo

$$q_h = q'_h = q. \quad (108)$$

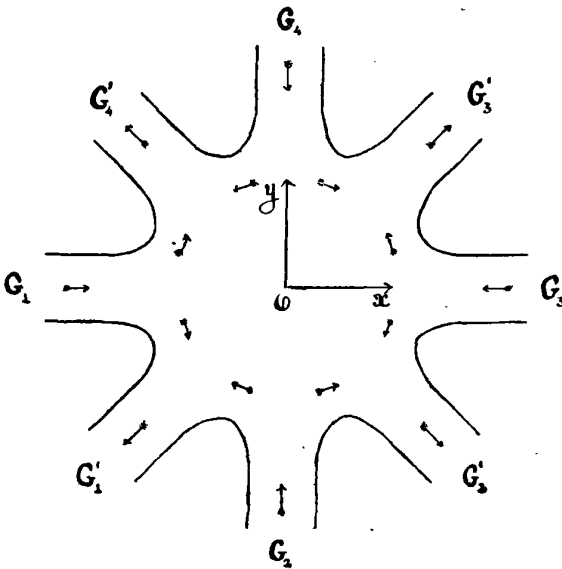


Fig. 12.

Inoltre assunta come direzione positiva dell'asse Ox quella del flusso

a monte di G_1 , si avrà:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_h &= (1-h) \frac{2\pi}{n}, \\ \vartheta'_h &= \left(\frac{1}{2}-h\right) \frac{2\pi}{n}, \\ (h &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Avremo quindi

$$\left. \begin{aligned} j_h &= e^{-i\vartheta_h} = e^{i(h-1) \frac{2\pi}{n}}, \\ j'_h &= e^{-i\vartheta'_h} = e^{i\left(h-\frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{n}}; \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

mentre l'integrale generale (107) diviene:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{q}{\pi} \sum_1^n e^{i(1-h) \frac{2\pi}{n}} \log \left[1 - w e^{i(1-h) \frac{2\pi}{n}} \right] - \\ &\quad - e^{i\left(\frac{1}{2}-h\right) \frac{2\pi}{n}} \log \left[1 - w e^{i\left(\frac{1}{2}-h\right) \frac{2\pi}{n}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

E' la questione propostaci è completamente risolta.

INDICE

PARTE PRIMA.

Confluenza di due vene.

	PAG.
§ 1. Introduzione	285
§ 2. Impostazione analitica	290
§ 3. Comportamento di $f = \varphi + i\psi$ nel campo del moto	292
§ 4. Comportamento di $w = u - iv$ nel campo del moto	294
§ 5. Ricorso ad una variabile ausiliaria $\zeta = \xi + i\eta$	295
§ 6. La funzione $f(\zeta)$	297
§ 7. La funzione $w(\zeta)$	301
§ 8. Significato delle costanti	304
§ 9. Relazioni notevoli fra le costanti	ivi
§ 10. Corrispondenza fra i piani $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$. Integrale generale	306
§ 11. Reversibilità del fenomeno	308
§ 12. Equazioni parametriche dei peli liberi	309
§ 13. Ubicazione dello spartiacque	313
§ 14. Considerazioni sulla determinazione delle costanti caratteristiche del problema	314
§ 15. Simmetria rispetto ad un asse	317
§ 16. Urto diretto	319
§ 17. Alcuni casi particolari di urto diretto	321

PARTE SECONDA.

Confluenza di quantesivogliano vene.

§ 18. Il problema generale	323
§ 19. Traduzione analitica del problema	325
§ 20. Cambiamento di variabile	327
§ 21. Le funzioni $w(\zeta)$ e $f(\zeta)$	329
§ 22. Relazioni notevoli fra le costanti	333
§ 23. Integrale generale	335
§ 24. Reversibilità	336
§ 25. Considerazioni sulla determinazione delle costanti	ivi
§ 26. Un caso particolare	338
