AP37-1899-1

SUR

UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE PREMIÈRE ESPÈCE

EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR PRINCIPAL AU CORPS DES MINES

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

AVANT-PROPOS.

On connait plusieurs développements de l'intégrale elliptique de première espèce. Jacobi (*) a donné le suivant :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y + R_1 y^3 + R_2 y^5 + R_3 y^7 + \cdots,$$

où, si l'on fait,

$$r = \frac{1+k^2}{2k},$$

$$(2m+1)\,R_m = \frac{k^m d^m (r^2-1)^m}{2^m.1.2\ldots m dr^m}.$$

Comme on le voit et comme l'a d'ailleurs fait remarquer l'illustre géomètre, les polynômes R sont, à un facteur près, ceux de Legendre. On arrive très simplement à ce résultat en observant que l'on a, identiquement,

$$(1-y^2)(1-k^2y^2) = 1 - 2\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)ky^2 + k^2y^4.$$

Pour toutes les valeurs de y, dont le module est inférieur à l'unité, on a donc, en série uniformément convergente,

$$\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)\,1-k^2y^2)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)k^n y^{2n},$$

X_n désignant, suivant l'usage, les fonctions de Legendre.

(*) Jacobi, *Fundamenta nova*, p. 127.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Par suite,

$$(1) \quad \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) k^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$$

De son côté, M. Catalan (*) a trouvé les développements :

$$(2). \quad . \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi}} = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(\cos\alpha)\frac{\operatorname{tg}^{2n+1}\frac{\varphi}{2}}{2n+1},$$

$$(3) \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = y + \frac{N_1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{N_2}{2.4}\frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{N_p}{2.4\ldots 2p}\frac{y^{2p+1}}{2p+1} + \cdots.$$

N_p est un polynôme entier en k, de degré $2p$, lequel a pour expression, sous forme d'intégrale définie,

$$N_p = \frac{2^{p+1}}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)^p\, d\theta.$$

La comparaison des formules (1) et (3) conduit à l'identité

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \frac{N_p}{2.4\ldots 2p} = k^p X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right),$$

ou

$$X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(k\sin^2\theta + \frac{1}{k}\cos^2\theta\right)^p d\theta.$$

Posons

$$k + \frac{1}{k} = 2z,$$

z étant une quantité supérieure à l'unité.

De cette égalité, on déduit

$$k = z - \sqrt{z^2-1}, \quad \frac{1}{k} = z + \sqrt{z^2-1}.$$

(*) Catalan, *Sur les fonctions* X_n *de Legendre* (deuxième mémoire).

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

En conséquence,

$$X_p(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\omega\right)^p d\omega.$$

Généralement, on écrit la formule de Laplace avec le radical précédé du signe moins. Le signe est d'ailleurs indifférent, puisque les puissances impaires du radical doivent disparaître, X_p étant un polynôme entier en z. Il résulte de cette analyse que les polynômes N ne sont pas distincts, au fond, des fonctions X de Legendre. On peut encore vérifier directement l'identité (4).

D'après une formule de la théorie des fonctions sphériques (*),

$$k^p X_p\left(\frac{1+k^2}{2k}\right) = \frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p} F\left(\frac{1}{2}, -p; \frac{1}{2} - p; k^2\right),$$

la caractéristique $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ désignant une fonction de Gauss. La relation (4) devient

$$N_p = 1.3\ldots(2p-1)\, F\left(\frac{1}{2}, -p; \frac{1}{2} - p;\ k^2\right),$$

c'est-à-dire

$$N_p = \sum_{i=0}^{i=p} C_{p,i}\, 1.3\ldots(2i-1) \times 1.3\ldots(2p-2i-1) k^{2i}.$$

Ce résultat est conforme à celui de M. Catalan (**). Sans parler d'autres développements, en quelque sorte classiques, je citerai encore celui de Heine (***)

Dans cette note, nous nous proposons de chercher pour l'intégrale de première espèce un développement procédant

(*) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 18.

(**) CATALAN, *Sur les fonctions X_n de Legendre*. (MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, in-4°, t. XXXI.)

(***) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. II, p. 100.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

suivant les sinus des multiples d'un arc φ, entre lequel et l'amplitude ψ existe la relation simple

$$\sin \varphi = k \sin \psi.$$

Nous montrerons en outre que l'intégrale complète de première espèce est égale à la somme d'une série trigonométrique, analogue à celle qui représente la valeur du nombre $\frac{\pi}{4}$. Ici les limites de l'angle arbitraire sont $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, au lieu de $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Cependant il est possible d'exprimer la valeur de cette intégrale par une série trigonométrique, dans laquelle les limites de l'angle arbitraire sont moins resserrées. D'impérieux devoirs administratifs nous obligent à ajourner momentanément l'étude complète de cette question.

Avant d'aborder le sujet qui fait l'objet de ce mémoire, il ne sera pas inutile d'étudier une série bien connue dans les éléments et dont la considération m'a suggéré l'idée de ce travail.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

SUR

UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

DE PREMIÈRE ESPÈCE

EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER.

1. Si l'angle θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ exclusivement, on sait que

$$\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

Cette série peut être obtenue par un procédé différent de celui dont il est fait usage dans les éléments.

Soit un contour simple formé par la partie OA de l'axe des x positifs, la droite OB faisant avec cet axe un angle aigu, et l'arc de cercle AB, dont le rayon est quelconque. La fonction $\frac{1}{1+z^2}$ est uniforme dans tout le plan; elle ne devient discontinue qu'aux points M et M', dont les affixes sont $\pm i$.

Ceci posé, en vertu d'un théorème bien connu dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire,

$$(\text{OA}) + (\text{AB}) = (\text{OB}).$$

Si le module de la variable est supérieur à l'unité, le développement de $\frac{1}{1+z^2}$, suivant les puissances entières et décroissantes de z, commence pour un terme en $\frac{1}{z^2}$; il en résulte que

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

l'intégrale AB tend indéfiniment vers zéro quand le rayon OA croît au delà de toute limite.

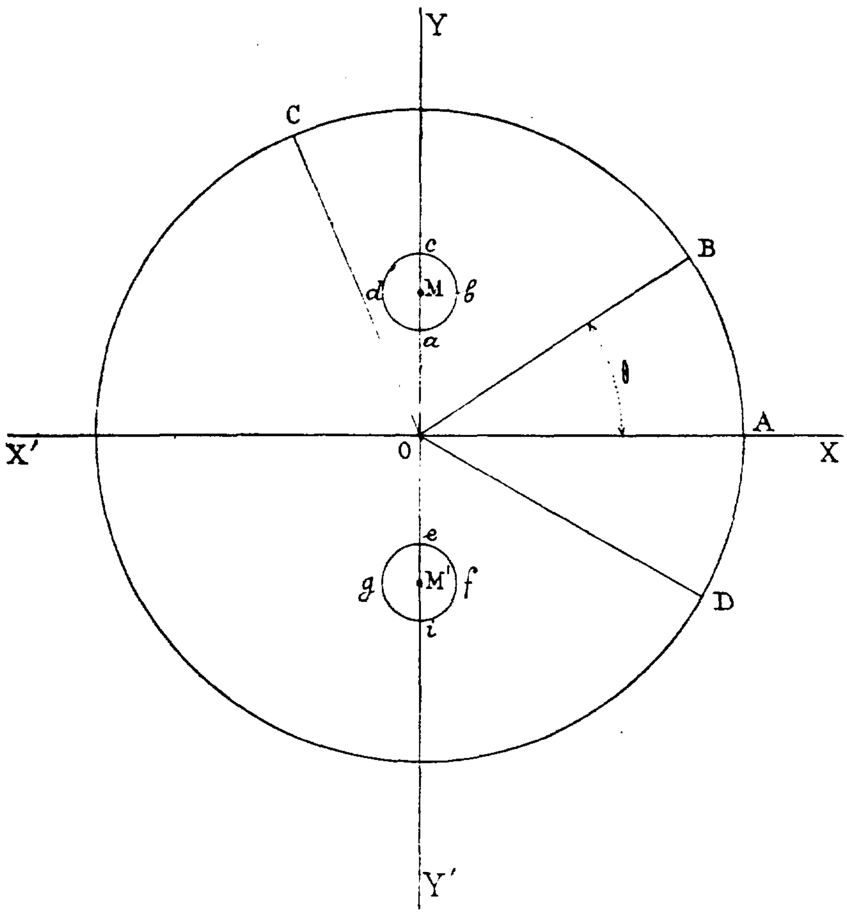
En conséquence,

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^{e^{i\theta}} \frac{dz}{1+z^2} + \int_0^{e^{-i\theta}} \frac{dz}{1+z^2},$$

ou

$$(5). \quad . \quad \frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

En second lieu, supposons que la droite OB, franchissant l'axe



des y, prend la position OC; entourons le point M d'un cercle très petit et considérons l'aire connexe OABC$abcd$. On aura

$$(OA) + (AC) = (OC) + (abcd).$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Si nous appelons ρ le rayon du lacet (M) et que nous posions

$$z = i + \rho e^{i\psi},$$

$$(abcd) = i\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2i + \rho e^{i\psi}} = \pi,$$

quand le rayon ρ décroît indéfiniment.

Par suite,

$$-\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

Ainsi, lorsque la droite OB franchit l'axe des y, la somme de la série change de signe.

Si la ligne OB vient coïncider avec le rayon OD,

$$(OA) + (ACD) + (abcd) + (efig) = (OD).$$

Or,

$$(abcd) + (efig) = 0,$$

puisque le résidu des pôles i et $-i$ sont égaux et de signe contraire ; donc

$$\frac{\pi}{4} = \cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \frac{1}{7}\cos 7\theta + \cdots.$$

La somme de la série change de nouveau de signe et reprend sa valeur initiale. Généralement, pour toutes les valeurs de l'angle θ, comprises dans la formule $2n\pi \pm \theta$, θ étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, la série représente $\frac{\pi}{4}$; et, pour les valeurs de la forme $(4n+1)\cdot\frac{\pi}{2} + \theta$, θ variant de 0 à π, la somme de la série est égale à $-\frac{\pi}{4}$. La fonction définie par cette série trigonométrique admet l'axe des y comme coupure.

Je ne m'arrêterai pas plus longuement à la considération de séries analogues à celle-ci, et j'aborde immédiatement l'étude de l'intégrale elliptique de première espèce.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

2. Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}},$$

x étant une quantité positive, inférieure à l'unité.

Le trinôme sous le radical est égal au produit

$$\left(z^2 + x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(z^2 + x - \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

les points de ramification de la fonction auront pour affixes

$$e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)},\quad e^{-i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)},\quad e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)},\quad e^{-i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)},$$

si

$$x = \cos\theta,$$

θ étant, d'après nos hypothèses, un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Traçons deux axes rectangulaires et décrivons de l'origine, comme centre, un cercle dont le rayon OA est égal à l'unité : les points M, M', N, N' seront les points critiques. Dans le contour simple OAB, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}}$$

est holomorphe, et l'on a

$$(OA) + (AB) = (OB).$$

Si l'on pose

$$z = e^{i\varphi},$$

$$(AB) = i\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2(x + \cos 2\varphi)}}.$$

D'autre part,

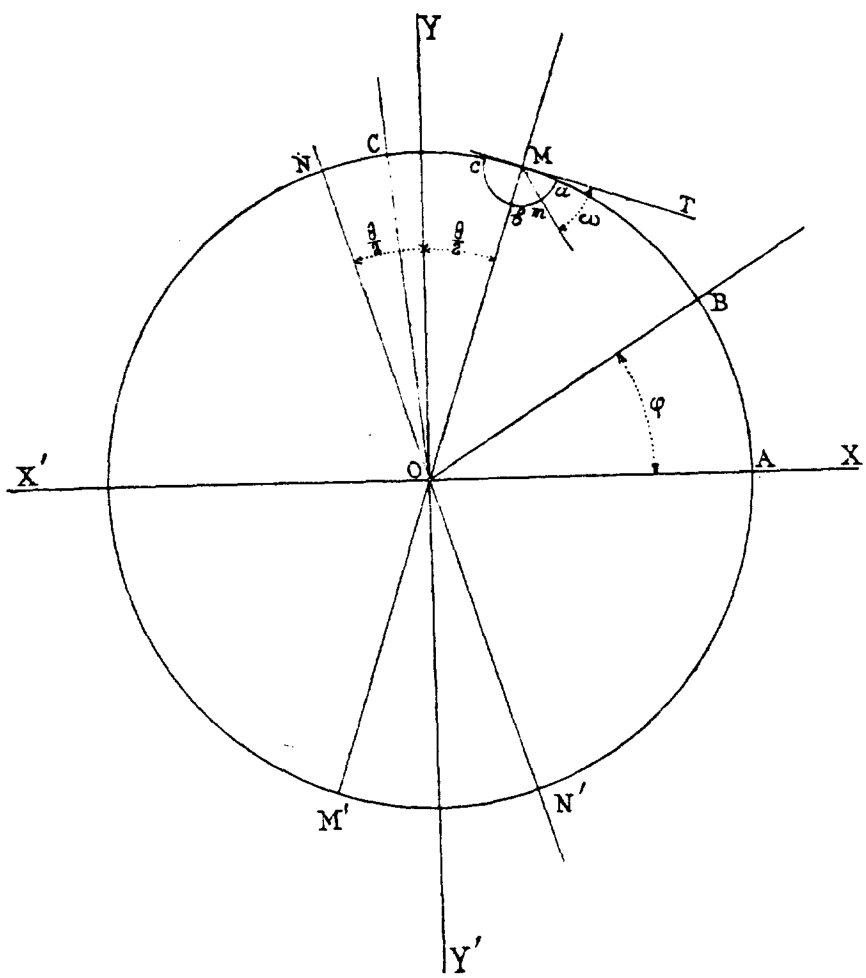
$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\, z^{2n}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

En conséquence, par la séparation de la partie réelle de la partie imaginaire,

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\,\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\,\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}. \end{cases} \qquad \left(\frac{\pi-\theta}{2} > \varphi > -\frac{\pi-\theta}{2}\right).$$

Si la ligne OB, franchissant la coupure MM′, se confond avec la droite OC, nous éviterons le point critique M, dont l'affixe



est α, par exemple, par la partie *abc* du cercle décrit du point M comme centre avec le rayon ρ.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Appelons ω l'angle que la droite Mm fait avec la tangente MT au cercle, dont le rayon est égal à l'unité; il est facile de voir que l'affixe du point m est $\alpha + \rho e^{-i\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)}$.

Donc

$$\sqrt{z-\alpha} = +\sqrt{\rho}\, e^{-i\left(\omega+\frac{\theta}{2}\right)},$$

et, si $\omega = \pi$,

$$\sqrt{z-\alpha} = -i\sqrt{\rho}\, e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Quand on est arrivé au point c, le radical est multiplié par $-i$ et son inverse par i.

Si nous posons encore

$$z = e^{i\psi},$$

l'intégrale aura respectivement, sur l'arc Aa, la forme

$$i\int \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}},$$

et, sur l'arc cC,

$$-\int \frac{d\psi}{\sqrt{2(-x-\cos 2\psi)}}.$$

On sait d'ailleurs que l'intégrale (abc) tend indéfiniment vers zéro avec le rayon ρ. En conséquence, à la limite,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} + i\int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} - \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \int_0^{e^{i\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z}};$$

ou bien,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} - \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1},\\ &\int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1},\end{aligned}\right.$$

les valeurs de φ restant comprises entre $\frac{\pi-\theta}{2}$ et $\frac{\pi+\theta}{2}$.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

3. On aurait pu trouver ces formules par un procédé plus élémentaire, mais moins rigoureux. Si, avec Dirichlet, nous admettons que la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\, z^{2n}$$

subsiste encore pour les valeurs de z dont le module est égal à l'unité, nous aurons

$$\frac{1}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x) \cos(2n+1)\psi,$$

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x) \sin(2n+1)\psi,$$

les valeurs de ψ étant égales ou inférieures à $\frac{\pi-\theta}{2}$.

Par intégration,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x) \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$C = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x) \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

On trouve facilement que

$$C = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}}.$$

Nous retombons ainsi sur les formules précédentes.

Pour les valeurs de ψ, supérieures à $\frac{\pi-\theta}{2}$ mais inférieures à $\frac{\pi+\theta}{2}$, le binôme $x+\cos 2\psi$ est négatif; il devient positif pour les valeurs de ψ comprises entre $\frac{\pi+\theta}{2}$ et $\frac{3\pi-\theta}{2}$; ψ variant de $\frac{3\pi-\theta}{2}$ à $\frac{3\pi+\theta}{2}$, cette quantité change de nouveau de signe et, de $\frac{3\pi+\theta}{2}$ à $\frac{5\pi-\theta}{2}$, elle reprend le signe $+$, qu'elle conserve pendant cet intervalle; et ainsi de suite. Nous retrouvons les deux coupures MM', NN'.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Pour fixer les idées, supposons ψ compris entre $\frac{\pi-\theta}{2}$ et $\frac{\pi+\theta}{2}$; alors

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\psi}{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(-x-\cos 2\psi)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\sin(2n+1)\psi.$$

Nous choisissons le signe + pour le radical, parce que, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, on doit avoir

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} = 1 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots.$$

L'intégration donne

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} C &= \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1},\\ \int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}} &= -\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}\\ &\quad+\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Ici la constante C égale

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}}.$$

Nous montrerons tantôt que les relations (7) et (α) sont identiques.

CHAPITRE II.

Réduction des intégrales elliptiques a la forme canonique.

4. Réduction de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}}$.

Soient

$$z = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - x^2}}{x}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - x^2}}{x};$$

d'où

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2\xi}{x}, \quad z - \frac{1}{z} = \frac{-2\sqrt{\xi^2 - x^2}}{x} \quad \text{et} \quad dz = -\frac{z}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} d\xi.$$

Les limites de z étant 0 et 1, celles de ξ seront respectivement $+\infty$ et x. D'autre part,

$$z^4 + 2xz^2 + 1 = \frac{z^2}{2}\left[(1-x)\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + (1+x)\left(z + \frac{1}{z}\right)\right],$$

et

$$\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4} = \frac{2z}{x}\sqrt{\xi^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)x^2};$$

par suite,

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + 2xz^2 + z^4}} = -\frac{x}{2}\int_\infty^x \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - x^2)\left(\xi^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)x^2\right)}}.$$

Puis, par une transformation simple,

$$(8) \quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+2xz^2+z^4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

Semblablement,

$$(9) \quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-2xz^2+z^4}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

5. Réduction de l'intégrale $\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}}$.

Soit

$$u = \operatorname{tg} \psi,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(\alpha - \beta u^2)}},$$

si, pour abréger, nous faisons

$$\alpha = 1 + x, \quad \beta = 1 - x.$$

Posons maintenant

$$u = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}};$$

u variant de 0 à $\operatorname{tg} \varphi$, ξ variera de ∞ à $\frac{1}{\sin \varphi}$.

Ensuite,

$$du = -\frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - 1)\sqrt{\xi^2 - 1}};$$

en conséquence,

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)\xi^2\right)}}.$$

Par la substitution,

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{1+x}}\,\frac{1}{z},$$

on ramène cette intégrale à

$$(10) \quad \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(x+\cos 2\psi)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{1+x}}\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)z^2\right)}}.$$

De même,

$$(11) \quad \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos 2\psi - x)}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{1-x}}\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)z^2\right)}}.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

CHAPITRE III.

6. Si nous remplaçons par leur transformée les intégrales contenues dans les relations (6), ces formules deviennent

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1-x}{2}\right)z^2\right)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{1+x}}\sin\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{1+x}{2}\right)z^2\right)}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(-x)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

Faisons

$$\frac{1-x}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2} = k^2, \quad \frac{1+x}{2} = k'^2 = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

et désignons avec Legendre par la lettre F l'intégrale de première espèce ; il viendra

$$(12). \quad . \quad . \quad F_1(k) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1},$$

$$(13). \quad . \quad . \quad F\left(k', \frac{\sin\varphi}{k'}\right) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

Dans cette dernière formule, remplaçons k' par k, k par k' et posons

$$\sin\varphi = k\sin\psi;$$

on aura finalement

$$(14) \quad F(k,\psi) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k'^2-k^2)\frac{\sin[(2n+1)\arcsin(k\sin\psi)]}{2n+1}.$$

b

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Nous allons montrer maintenant que les relations (7) et (α) conduisent à des développements qui ne sont pas distincts, au fond, des précédents. On a, identiquement,

$$\int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}=\int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}-\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}.$$

Si l'on pose

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\omega,$$

$$\int_{\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}=\int_{0}^{\frac{\theta}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega-x)}},$$

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{-2(x+\cos 2\psi)}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega-x)}}.$$

Maintenant, en vertu des formules (10), (11) et (14),

$$\int_{0}^{\frac{\pi-\theta}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega+x)}}=\frac{1}{2}F_1(k'),$$

$$\int_{0}^{\frac{\theta}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega-x)}}=\frac{1}{2}F_1(k),$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\frac{d\omega}{\sqrt{2(\cos 2\omega-x)}}=\frac{1}{2}F\left(k,\frac{\cos\varphi}{k}\right),$$

$$F_1(k)=2\sum_{n=0}^{n=\infty}X_n(k'^2-k^2)\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2n+1};$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

la substitution de ces valeurs dans les relations (7) et (α) donne

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} F_1(k') &= \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}, \\ F\left(k, \cos\varphi\right) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(k^2-k'^2)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}. \end{aligned} \right. \quad \left(\frac{\pi+\theta}{2} > \varphi > \frac{\pi-\theta}{2}\right).$$

Si, dans ces formules, on remplace k par k', k' par k et φ par $\frac{\pi}{2}-\varphi$, on retombe sur les équations (12) et (14). Ainsi les conditions d'existence de ces dernières doivent seules nous intéresser.

x variant de 0 à 1, k et k' passeront respectivement par toutes les valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 ; et comme l'angle φ doit rester dans l'intervalle $\left(\frac{\pi-\theta}{2}, -\frac{\pi-\theta}{2}\right)$, la formule (12) est vraie pour toutes les valeurs de la variable, comprises entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$. Si nous donnons à x des valeurs négatives, mais toujours inférieures à l'unité, en valeur absolue, l'angle θ sera supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et la variable φ aura encore pour intervalle $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Mais, x variant de 0 à -1, k et k' varieront de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1, et de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0. En conséquence, cette formule existe pour toutes les valeurs de k et de k' comprises entre 0 et 1, et pour les valeurs de φ, situées dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Maintenant, substituer dans la formule (15) k à k' et vice versa revient à remplacer θ par $\frac{\pi-\theta}{2}$; les limites de φ seront donc $-\frac{\theta}{2}$ et $+\frac{\theta}{2}$ et les valeurs de ψ seront comprises dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

7. On peut mettre sous d'autres formes les formules précédentes. On sait que

$$X_n(\cos\theta) = (-1)^n F\left(n+1, -n; 1; \cos^2\frac{1}{2}\theta\right) \; (*).$$

Changeons successivement $\cos\theta$ en x et x en $2k^2-1$; on a

$$X_n(2k^2-1) = (-1)^n F(n+1, -n; 1; k^2),$$

(*) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 18.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

et

$$(13)\quad F_1(k) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n F(n+1,\ -n;\ 1;\ k^2)\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}.$$

On pourrait encore remplacer la fonction $X_n(2k^2-1)$ par une somme de produits de polynômes X_n, dont la variable serait k. A cet effet, j'observe que l'on a, identiquement,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2(2k^2-1)z^2+z^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-2kz+z^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+2kz+z^2}};$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n(2k^2-1)\, z^{2n} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu X_\mu z^\mu \times \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} X_\nu z^\nu.$$

Identifions les coefficients des mêmes puissances de z :

$$(a)\qquad X_n(2k^2-1) = 2\left[X_{2n}X_0 - X_{2n-1}X_1 + X_{2n-2}X_2 \ldots + (-1)^n \frac{1}{2}X_n^2\right].$$

En particulier,

$$X_2(2k^2-1) = 2\left[X_4X_0 - X_3X_1 + \frac{1}{2}X_2^2\right];$$

ou

$$6k^4-6k^2+1 = 2\left[\frac{35}{8}\left(k^4-\frac{6}{7}k^2+\frac{3}{35}\right)-\frac{5}{2}\left(k^3-\frac{3}{5}\right)k+\frac{9}{8}\left(k^2-\frac{1}{3}\right)^2\right],$$

ce qui est exact.

8. On vérifie très facilement la formule (12), que nous pouvons écrire

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n X_n(\cos\theta)\frac{\cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2n+1},$$

l'angle φ variant maintenant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

D'après une formule de Dirichlet, modifiée par Mehler (*),

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(2n+1)\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}};$$

(*) Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

donc

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\theta \frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{3\psi}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{5\psi}{2}\cdots\right].$$

Mais

$$\frac{\pi}{4}=\cos\omega-\frac{1}{3}\cos 3\omega+\frac{1}{5}\cos 5\omega-\frac{1}{7}\cos 7\omega+\cdots;$$

remplaçons successivement ω par $\frac{\psi+\varphi}{2}$ et $\frac{\psi-\varphi}{2}$ et ajoutons, terme à terme, les deux séries résultantes; il viendra

$$\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{3\psi}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{5\psi}{2}-\cdots,$$

φ et ψ satisfaisant, en valeur absolue, aux inégalités

$$\varphi\pm\psi<\pi$$

φ et ψ sont des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; cette condition est donc constamment remplie. Par suite,

$$F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)=\int_0^\theta\frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\theta)}}.$$

Si l'on remplace, dans la formule (11), x par $\cos\theta$ et 2φ par θ, on trouve que

$$\int_0^\theta\frac{d\psi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}=F_1\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Nous avons donc ainsi vérifié la formule (12).

9. *Cas particuliers.* — L'hypothèse de $k=0$, auquel cas $k'=1$, nous conduit à des formules connues : F_1 est égal à $\frac{\pi}{2}$ et les formules (12) et (13) se réduisent à

$$\frac{\pi}{4}=\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos 3\varphi+\frac{1}{5}\cos 5\varphi-\frac{1}{7}\cos 7\varphi+\cdots,$$

$$\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\frac{1}{5}\sin 5\varphi-\cdots.$$

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1

Par une transformation facile, cette dernière devient

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\frac{1}{5}\sin 5\varphi\ldots,$$

ou encore, par le changement de φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$,

$$\frac{1}{2}\log \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}=\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi+\frac{1}{5}\cos 5\varphi+\cdots,$$

formules connues.

IRIS - LILLIAD - Université Lille 1