ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*	**Ulisse Dini** *in Pisa*
Luigi Cremona *in Roma*	**Giuseppe Jung** *in Milano*

SERIE III.ª - TOMO VII.°

MILANO,

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1902.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VII.º (SERIE III.ª)

Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di second'ordine.

(*Memoria I di* Ernesto Pascal, *a Milano.*)

Già in alcuni lavori pubblicati recentemente (*) io mi sono occupato delle equazioni ai differenziali totali di second'ordine, cercando di estendere molte delle importanti ed eleganti proprietà relative ai sistemi di primo ordine, o, altrimenti detti, sistemi pfaffiani, teoria che, come è noto, ha il più intimo legame con quella delle equazioni a derivate parziali di primo ordine.

Le equazioni da me però considerate nei suddetti lavori sono di un tipo speciale, considerandovi come zero i differenziali secondi di alcune delle variabili.

Mi sono allora proposto di prendere la quistione da un punto di vista diverso, di considerare cioè delle equazioni contenenti i differenziali secondi di *tutte* le variabili, e di vedere in qual maniera si poteva fondare la teoria di espressioni formate in siffatto modo generale.

Il primo problema che si presenta è quello della *completa integrabilità,* ed è questo l'oggetto del primo e secondo paragrafo di questa Memoria; alcune delle formole che qui ottengo, hanno analogia con quelle altre da me ottenute nei precedenti lavori.

Come si sa, la teoria delle equazioni pfaffiane ordinarie ha acquistato negli ultimi tempi la più grande eleganza, coll'introduzione dei concetti re-

(*) *Sur une théorie des systèmes d'équations aux différentielles totales de second ordre*; Comptes rendus de l'Acad. de Paris, vol. CXXX, 5 Mars 1900.

Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter Ordnung; Math. Ann., vol. 54.

Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second'ordine. Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901.

Altri miei lavori connessi intimamente a questi sono anche i seguenti:

Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque. Rend. Ist. Lomb. (2), t. 33, 1900;

La teoria delle equazioni ai differenziali totali di 3° ordine. Ibid.

lativi alla teoria delle trasformazioni di Lie, e in tale ordine di studi si sono succeduti i lavori di Lie, Mayer, Frobenius, Engel, Eduard v. Weber, ecc.

Ora è specialmente questo nuovo punto di vista che ha attirato la mia attenzione, ed è quindi dei concetti nuovi che esso introduce, che io ho cercato di fare l'estensione al caso delle equazioni di second'ordine, e sono così riuscito a stabilire una serie di risultati che mi sembrano notevoli, e fra gli altri, quello relativo all'invariante simultaneo di una forma differenziale di second'ordine e di una equazione a derivate parziali anche di second'ordine, e la conseguente estensione della definizione di *sistema aggiunto*, quello relativo alla estensione del concetto *di sistema completo* per le equazioni a derivate parziali di second'ordine, e infine quello relativo alla estensione del teorema che stabilisce, nella teoria ordinaria, la perfetta corrispondenza che esiste fra la completa integrabilità del sistema dato, e la sua invariantività rispetto alle trasformazioni infinitesimali rappresentate dal cosiddetto *sistema aggiunto.*

Questa Memoria sarà seguita da altre, nelle quali esporrò i risultati, da me già ottenuti, relativi alla estensione della teoria invariantiva di *una sola* equazione ai differenziali totali di second'ordine, ricerca incominciata nell'intento di vedere fino a che punto potea farsi una estensione del conosciuto problema cosiddetto di Pfaff.

Le ricerche sulle equazioni ai differenziali totali di primo ordine furono iniziate da Pfaff fin dal 1815, e lo scopo principale era allora di ricavarne luce per il problema importantissimo delle equazioni a derivate parziali di primo ordine. Col progredire del tempo quelle ricerche acquistarono poi anche importanza a sè, indipendentemente dallo scopo per il quale erano state incominciate.

Le ricerche analoghe per le equazioni ai differenziali di second'ordine non sono state mai intraprese, ed io non son lontano dal credere che la loro teoria possa gettare una nuova luce su quella delle equazioni a derivate parziali di second'ordine, su cui fin ora non è stato ancora possibile creare qualcosa che possa gareggiare in semplicità ed eleganza colle splendide teorie ideate specialmente dal grande Jacobi per le equazioni a derivate parziali di primo ordine (*).

Milano, Settembre del 1901.

(*) Per una esposizione completa della teoria delle equazioni pfaffiane ordinarie, si può vedere con profitto il recente libro di Eduard v. Weber: *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Leipzig, 1900.

§ 1. Completa integrabilità di una sola equazione di tipo generale ai differenziali totali di 2^o ordine.

Sia data una sola equazione del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} X_k\, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, d\, x_i\, d\, x_j = 0 \qquad (X_{ij} = X_{ji}) \tag{1}$$

dove le X sono funzioni di tutte le x; vogliamo in questo primo paragrafo ricercare quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la (1) sia integrabile con una *sola* equazione, perchè cioè esista una funzione φ di tutte le x tale che, fatto di essa il differenziale secondo generale considerandovi le x come funzioni di altre variabili indeterminate, si abbia una espressione che, a meno di un fattore μ, coincida col primo membro delle (1).

Formando il differenziale secondo di φ, e paragonandolo, nel modo indicato, col primo membro della (1) si hanno le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \mu\, X_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ \mu\, X_{ij} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_j}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde:

$$\frac{\partial (\mu\, X_i)}{\partial x_j} = \mu\, X_{ij}$$

cioè:

$$X_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij}\right) = 0. \tag{3}$$

Moltiplicando per $d\, x_j$ e sommando rispetto a j, si ha:

$$X_i\, d\, \mu + \mu \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij}\right) d\, x_j = 0. \tag{4}$$

Variando l'indice i, si hanno tante equazioni di questa specie cui deve soddisfare sempre la medesima funzione μ; quindi, prima di tutto, bisogna che tutte queste equazioni sieno identiche, e poi che la espressione:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_{ij} - \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}}{X_i}\, d\, x_j$$

sia un differenziale esatto. Ciò porta le condizioni:

$$\frac{\left(X_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)}{X_i} = \frac{X_{hj} - \frac{\partial X_h}{\partial x_j}}{X_h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\left(X_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)}{X_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\left(X_{ik} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)}{X_i},$$

le quali sviluppate, e ridotte, danno luogo alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &(X_h X_{ij} - X_i X_{hj}) + \left(X_i \frac{\partial X_h}{\partial x_j} - X_h \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) = 0 \\ &X_i \left(\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_j}\right) + \left(X_{ik} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

di cui la seconda può scriversi anche più brevemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{X_{ij}}{X_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{X_{ik}}{X_i} = 0. \tag{6}$$

Queste condizioni ci si presentano qui come necessarie; faremo vedere di qui a poco che esse sono anche sufficienti, e quando esse sono soddisfatte noi diremo che l'equazione data è *completamente integrabile.* Sarà utile intanto, specialmente in vista di una teoria generale delle equazioni della forma (1), che abbiamo in animo di sviluppare in seguito, e che è analoga alla ordinaria teoria delle equazioni pfaffiane, di introdurre alcune opportune notazioni, mediante le quali le relazioni (5) e (6) acquistano forma più semplice, insieme ad altre molteplici che da esse possono ricavarsi.

Poniamo, come si usa nella ordinaria teoria delle equazioni pfaffiane (di primo ordine):

$$(j\, i) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \tag{7}$$

e poniamo poi ancora

$$((j\, i)) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - X_{ij} \tag{8}$$

$$[i\, j\, k] = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_j}\,. \tag{9}$$

Fra questi simboli sussistono le relazioni identiche

$$\left.\begin{aligned}(j\,i) &= ((j\,i)) - ((i\,j)),\\ [i\,j\,j] = 0, &\quad [i\,j\,k] = -[i\,k\,j],\\ [i\,j\,k] + [j\,k\,i] &+ [k\,i\,j] = 0,\\ [j\,k\,i] &= \frac{\partial((j\,i))}{\partial x_k} - \frac{\partial((j\,k))}{\partial x_i}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Le relazioni (5) diventano:

$$X_i((h\,j)) - X_h((i\,j)) = 0 \tag{11}$$

$$X_i[i\,j\,k] + X_{ik}((i\,j)) - X_{ij}((i\,k)) = 0 \tag{12}$$

di cui la seconda può anche scriversi:

$$X_i\left(\frac{\partial((i\,k))}{\partial x_j} - \frac{\partial((i\,j))}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial X_i}{\partial x_k}((i\,j)) - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}((i\,k)) = 0$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{((i\,k))}{X_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{((i\,j))}{X_i}. \tag{13}$$

Da queste relazioni possono ricavarsene delle altre: dalle (11) permutando circolarmente gli indici i, h, j, sommando, e tenendo conto della prima delle (10), si ha:

$$X_i(h\,j) + X_h(j\,i) + X_j(i\,h) = 0, \tag{14}$$

che è una nota condizione relativa ad una equazione ai differenziali totali di primo ordine, di cui i coefficienti sieno rappresentati dalle $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Dalle medesime (11) si ottengono le altre:

$$((i\,k))((h\,j)) = ((h\,k))((i\,j)), \tag{15}$$

e combinando poi la (11) colla (13) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{((i\,k))}{X_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{((h\,j))}{X_h}, \tag{16}$$

la quale comprende come caso particolare la (13) per $h = i$, e che per $k = j$ è una diretta conseguenza della (11).

Dimostriamo ora quanto abbiamo sopra asserito, che cioè le precedenti condizioni, oltrecchè necessarie, sono anche sufficienti perchè l'equazione (1) sia completamente integrabile.

Consideriamo la equazione (di primo ordine):

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \, d\, x_k = 0; \tag{17}$$

sussistendo le relazioni (14), questa è completamente integrabile, e può trovarsi una funzione φ il cui differenziale primo, a meno di un fattore, coincida col primo membro di (17).

Intanto le relazioni (5), per il modo stesso con cui sono state ricavate, sono evidentemente sufficienti perchè tutte le (4), o, ciò che è lo stesso, tutte le (3) sieno soddisfatte da una medesima funzione μ, cioè perchè esse sieno fra loro compatibili; quando esse sono soddisfatte esisterà perciò una funzione μ di cui le prime derivate logaritmiche sono date dalle relazioni (3), tale cioè che:

$$\frac{\partial\,(\mu\, X_i)}{\partial\, x_j} = \mu\, X_{ij}, \tag{18}$$

e quindi anche:

$$\frac{\partial\,(\mu\, X_i)}{\partial\, x_j} = \frac{\partial\,(\mu\, X_j)}{\partial\, x_i}.$$

Per tale μ si avrà dunque che il primo membro della (17) moltiplicato per μ stesso, riuscirà il differenziale esatto di una funzione φ; con tale μ e tale φ resterà soddisfatta la prima delle (2), e quindi poi per effetto della (18), anche la seconda delle (2) stesse. Con ciò è dimostrata la sufficienza delle condizioni.

§ 2. Completa integrabilità di un sistema di equazioni di tipo generale ai differenziali totali di 2° ordine.

Consideriamo ora, anzichè una sola, un sistema di m equazioni come quelle considerate nel paragrafo precedente; immaginiamole risolute rispetto ai differenziali secondi di m delle x, e scriviamole quindi come segue:

$$\left.\begin{array}{l} d^2 x_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{n-m} X_{i,1}\, d^2 x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij1}\, d\, x_i\, d\, x_j = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^2 x_n - \sum_{i=1}^{n-m} X_{i,m}\, d^2 x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ijm}\, d\, x_i\, d\, x_j = 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

dove sia

$$X_{ijr} = X_{jir}.$$

Diremo che il sistema (1) è *completamente integrabile*, quando esso si può integrare con m equazioni finite fra le x, contenenti altrettante costanti, e risolubili rispetto a queste, cioè quando si possono trovare m funzioni delle x, di cui il sistema dei differenziali totali secondi eguagliati a zero, rappresenti un sistema equivalente al dato (1); in tal caso eguagliando a costanti le m supposte funzioni si hanno le m relazioni di cui si è parlato di sopra.

Secondo questa definizione, perchè il sistema (1) sia completamente integrabile, bisogna e basta, che si possano trovare m sistemi indipendenti di m funzioni $\mu_1 \dots \mu_m$ tali che moltiplicando rispettivamente i primi membri delle (1) per le μ di ciascun sistema, e sommando, si abbia un differenziale secondo totale esatto; vogliamo trovare le condizioni necessarie e sufficienti a ciò.

Moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente per $\mu_1 \dots \mu_m$, sommiamo, ed esprimiamo le condizioni perchè tal somma sia il differenziale totale secondo di una funzione φ di tutte le variabili; si hanno allora le relazioni:

$$\mu_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

$$-\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ir} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-m)$$

$$-\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ijr} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

dalle quali otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{n-m+i} \, \partial x_{n-m+j}} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_{n-m+j}} = -\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{n-m+j\;n-m+i,r}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_{n-m+j}} = \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{i,r}}{\partial x_{n-m+j}} = -\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{i,n-m+j,r}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} = -\frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{i,r}}{\partial x_j} = -\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{i,j,r},$$

donde:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} = -\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{j,n-m+i,r} \quad \text{per qualunque } j, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ir}}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{j,i,r} \quad \text{per qualunque } j \text{ e solo per } i = 1, 2, \ldots n - m. \tag{3}$$

Dalle (2) si ha inoltre:

$$d\mu_i + \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_r \, X_{j,n-m+i,r} \, dx_j = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{4}$$

mentre, sviluppando la (3), sostituendo in luogo delle derivate delle μ i loro valori dati dalle (2), e scambiando opportunamente alcuni indici, si ottiene l'altra relazione

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r \left[\frac{\partial X_{ir}}{\partial x_j} - X_{jir} - \sum_{s=1}^{m} X_{is} X_{j,n-m+s,r} \right] = 0 \tag{5}$$

la quale vale per qualunque j, e per $i = 1, 2, \ldots, n - m$, e che dà luogo quindi ad $n(n-m)$ equazioni lineari omogenee fra le m quantità $\mu_1 \ldots \mu_m$.

Dalle equazioni (4) e (5) ricaviamo le condizioni richieste. Ammesso che esistano gli m sistemi di funzioni μ, e sieno

$$\left. \begin{matrix} \mu_{11} \ldots \mu_{m1} \\ \cdots\cdots \\ \mu_{1m} \ldots \mu_{mm} \end{matrix} \right\} \tag{6}$$

il determinante di queste deve essere diverso da zero, giacchè chiamando rispettivamente $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ quelle m funzioni corrispondenti a ciascuno degli m sistemi di μ rappresentati dalle varie linee della tabella (6), e di cui, giusta la definizione, il sistema dei differenziali secondi eguagliati a zero:

$$d^2 \varphi_1 = 0 \ldots d^2 \varphi_m = 0 \tag{7}$$

coincide col sistema (1), ne risulta che le (7) devono essere, come le (1), risolubili rispetto ai

$$d^2 x_{n-m+1} \ldots d^2 x_n,$$

i cui coefficienti sono le derivate prime delle φ rispetto alle $x_{n-m+1} \ldots x_n$; perciò il determinante funzionale delle φ rispetto a tali variabili deve essere diverso da zero. Ma avendosi per le formole di sopra

$$\mu_{ri} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-m+r}},$$

il suddetto determinante funzionale non è altro che quello delle μ, e perciò questo è diverso da zero.

Di qui ricaviamo subito una conseguenza importante relativa alla formola (5), giacchè fissando una determinata coppia di $i\, j$, e scrivendo tutte le equazioni come le (5), facendo però solo variare le μ da quelle di un sistema a quelle di un'altro, si ha un sistema di m equazioni lineari omogenee, di cui i coefficienti sono tutte le μ della tabella (6), e poichè il determinante di queste è diverso da zero, si deduce che ciascuna delle quantità contenute nelle parentesi quadre deve essere zero, cioè si ha, come condizione necessaria:

$$((i\,j\,r)) \equiv \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_j} - X_{jir} - \sum_{s=1}^{m} X_{is}\, X_{j,n-m+s,r} = 0 \text{ (*)} \quad \begin{pmatrix} j = 1,\ 2, \ldots,\ n \\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n-m \end{pmatrix} \quad (8)$$

Queste sono alcune delle condizioni richieste e sono di un tipo del quale l'analogo non interveniva nell'altra ricerca da me fatta, e citata in principio, relativa all'altro tipo di differenziali totali secondi. Le altre condizioni che adesso troveremo sono invece del medesimo tipo di quelle trovate nella citata ricerca.

Le equazioni (4), formano un sistema di m equazioni ai differenziali totali fra le variabili μ ed x. Perchè esistano m sistemi *indipendenti* delle μ le quali soddisfino alle equazioni (4), è necessario e sufficiente che queste si possano integrare con m equazioni con altrettante costanti arbitrarie, cioè che esse formino un sistema di primo ordine completamente integrabile. Eseguendo allora il medesimo calcolo già sviluppato nel § 3 del mio lavoro nei *Math. Ann.* (Vol. 54, pag. 411), mutando opportunamente alcuni indici, e ponendo come nel caso ivi trattato (**),

$$[j,\ h,\ k,\ r] = \left(\frac{\partial X_{jkr}}{\partial x_h} = \frac{\partial X_{hkr}}{\partial X_j}\right) + \sum_{s=1}^{m} (X_{j,n-m+s,h}\, X_{kks} - X_{h,n-m+s,r}\, X_{jks}) \quad (9)$$

(*) Indicando con $((i\,j\,r))$ il primo membro di (8) si ha l'estensione del simbolo analogo introdotto colla formola (8) del § 1.

(**) I simboli che qui si introducono sono la estensione dei simboli (9) del § 1.

si hanno le condizioni:

$$[j,\ h,\ n-m+t,\ r]=0 \tag{10}$$

per j, $h=1, 2,\ldots n$, $t=1, 2\ldots m$, $r=1, 2\ldots m$. Si ha dunque che devono essere zero tutti i simboli (9), nei quali il terzo indice è maggiore di $n-m$; può mostrarsi però, seguendo anche qui una via analoga a quella tenuta a pag. 412 del lavoro citato, che devono essere zero anche tutti gli altri nei quali il terzo indice abbia valore qualunque. È da notarsi peraltro che, mentre nell'altro caso queste nuove condizioni erano indipendenti dalle precedenti, e quindi necessarie ad aggiungersi per ottenere il sistema totale delle condizioni, in questo caso invece ciò non è necessario perchè, come faremo vedere di qui a poco, le indicate nuove condizioni sono conseguenze delle (8) e (10).

Mostriamo intanto come possa dedursi direttamente l'annullarsi dei simboli (9) in cui il terzo indice sia minore o uguale a $n-m$.

Basterà osservare che dalle relazioni indicate al principio di questo paragrafo, possono ricavarsi le:

$$\frac{\partial \Sigma \mu_r X_{ijr}}{\partial x_h}=\frac{\partial \Sigma \mu_r X_{hjr}}{\partial x_i}$$

dalle quali, tenendo conto delle (2), si ricavano delle relazioni lineari omogenee nelle μ, i cui coefficienti sono precisamente i simboli (9); facendo allora un ragionamento analogo a quello già fatto di sopra, e per il quale dalla sussistenza delle (5) si ricavava l'annullarsi di ciascun coefficiente delle medesime, si deduce, come abbiamo già annunziato, l'annullarsi identico di tutti i simboli (9).

Ma, come abbiamo già detto, fra tutte le condizioni rappresentate dall'annullarsi delle parentesi (9), basta limitarsi a considerare solo quelle nel cui simbolo il terzo indice è sempre maggiore di $n-m$.

E in effetti deriviamo (8) rispetto ad x_h, indi scambiamo j con h, e poi sottragghiamo i due risultati. Si ottiene:

$$\frac{\partial X_{jir}}{\partial x_h}-\frac{\partial X_{hir}}{\partial x_j}+\sum_{s=1}^{m} X_{is}\left(\frac{\partial X_{j,n-m+s,r}}{\partial x_h}-\frac{\partial X_{h,n-m+s,r}}{\partial x_j}\right)+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial X_{is}}{\partial x_h}X_{j,n-m+s,r}-\frac{\partial X_{is}}{\partial x_j}X_{h,n-m+s,r}\right)=0.$$

In queste in luogo delle derivate delle X_{is} poniamo i loro valori ricavati dalle (8), e raccogliendo allora opportunamente i termini, si ha la relazione:

$$[j,\ h,\ i,\ r] + \sum_{s=1}^{m} X_{is}\,[j,\ h,\ n-m+s,\ r] = 0,$$

donde si vede appunto che, se sono soddisfatte le (8), l'annullarsi di quelli fra i simboli (9), nei quali il terzo indice è maggiore di $n-m$, porta con se l'annullarsi di tutti i rimanenti.

A proposito della introduzione dei simboli (9), è utile ricordare che fra essi sussiste la relazione identica, facile a verificare:

$$[j\,h\,k\,r] + [h\,k\,j\,r] + [k\,j\,h\,r] = 0.$$

Le condizioni così trovate *necessarie* per la completa integrabilità del sistema (1), sono le (8) e le (10). A completare la ricerca, resta naturalmente a far vedere che esse sono anche *sufficienti.*

Consideriamo per ciò il sistema di equazioni lineari ai differenziali totali di primo ordine:

$$\left.\begin{array}{l} d\,x_{n-m+1} - \sum\limits_{i=1}^{n-m} X_{i1}\,d\,x_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ d\,x_n - \sum\limits_{i=1}^{n-m} X_{im}\,d\,x_i = 0. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Colle poste condizioni, questo *è un ordinario sistema di 1.º ordine completamente integrabile.*

Infatti, perchè ciò sia, posto:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial\,x_i} + \sum_{h=1}^{m} X_{ih}\,\frac{\partial}{\partial\,x_{n-m+h}},$$

dovrà aversi:

$$F_i\,X_{jr} - F_j\,X_{ir} = 0, \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\dots\ n-m)$$

cioè:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} X_{jr} - \frac{\partial}{\partial x_j} X_{ir}\right) + \sum_{h=1}^{m} \left(X_{ih} \frac{\partial X_{jr}}{\partial x_{n-m+h}} - X_{jh} \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_{n-m+h}}\right) = 0. \tag{12}$$

Ora ciò si ha infatti, giacchè mutando nella (8) i con j, e sottraendo si ha:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} X_{jr} - \frac{\partial}{\partial x_j} X_{ir}\right) - \sum_{s=1}^{m} (X_{js} X_{i,n-m+s,r} - X_{is} X_{j,n-m+s,r}) = ((j\,i\,r)) - ((i\,j\,r));$$

ponendo poi in (8) $j = n - m + h$, moltiplicando per $X_{j,h}$, indi scambiando j con i, sottraendo i due risultati, e facendo la somma rispetto ad h da 1 ad m, si ha:

$$\sum_{h=1}^{m} X_{jh}((i,\ n-m+h,\ r)) - \sum_{h=1}^{m} X_{ih}((j,\ n-m+h,\ r)) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \left(X_{ih} \frac{\partial X_{jr}}{\partial x_{n-m+h}} - X_{jh} \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_{n-m+h}}\right) + \sum_{s=1}^{m} \left(X_{js} X_{i,n-m+s,r} - X_{is} X_{j,n-m+s,r}\right),$$

che combinata colla precedente e tenendo conto che le (( )) sono zero, dà luogo esattamente alla (12); quindi il sistema (11) è, come si diceva, completamente integrabile.

Quando sono soddisfatte le condizioni (10), per il modo stesso col quale le abbiamo ricavate, si ha che il sistema (4) di equazioni lineari ai differenziali totali di primo ordine fra le variabili μ e x, è completamente integrabile, e quindi esistono m sistemi indipendenti delle μ, che lo soddisfano. Per le μ di ciascuno di tali sistemi sono soddisfatte tutte le (2), e ammesso poi che sieno soddisfatte le (8), e quindi le (5), resteranno identicamente soddisfatte anche le (3).

Ora io dico che moltiplicando le (11) rispettivamente per ciascuna delle μ di uno dei trovati sistemi, e sommando, si ha il differenziale primo *esatto* di una funzione φ; in tal maniera da ogni sistema di μ si ha una φ e quindi si hanno in tutto gli m integrali di (11).

E infatti, essendo verificate le (2) e le (3), ponendo nelle (2)

$$j = n - m + h,$$

indi scambiando i con h, e sottraendo le due formole, e inoltre scambiando nelle (3) i con j e sottraendo anche le due relative formole, si ottengono le due altre:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_{n-m+h}} &= \frac{\partial \mu_h}{\partial x_{n-m+i}} \\ \frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ir}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{jr}}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

le quali dimostrano senz'altro quanto abbiamo asserito in riguardo al sistema (11).

Con i trovati m sistemi di μ si hanno dunque m funzioni φ, tali che

$$\left.\begin{aligned} \mu_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} \\ -\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ir} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

donde, derivando la seconda di queste rispetto a j,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} = -\frac{\partial \sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ir}}{\partial x_j},$$

e quindi per effetto delle (3), si ha poi infine

$$-\sum_{r=1}^{m} \mu_r X_{ijr} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j}. \tag{15}$$

La sussistenza delle (14) e (15), dimostra senz'altro che il sistema (1) è, giusta la definizione, completamente integrabile, o quindi resta dimostrato che le condizioni (8) e (10) sono a ciò sufficienti.

Prima di terminare questo paragrafo, vogliamo ancora notare un risultato di cui ci serviremo in seguito, avendo esso un'importanza notevole per le cose che avremo poi a dire.

Come dalle equazioni stabilite sul principio di questo paragrafo, eliminando la funzione φ, ne abbiamo ricavate le (2) e le (3), e quindi tutte le seguenti, così eliminando invece fra le medesime, le $\mu_1 \ldots \mu_m$, si ottiene il seguente sistema di equazioni a derivate parziali, lineari omogenee di primo e di secondo ordine cui devono soddisfare le funzioni φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{m} X_{ir} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} X_{ijr} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Torneremo, come abbiamo detto, sullo studio di questo sistema, che noi, a simiglianza di quanto si usa fare nella ordinaria teoria dei sistemi di equazioni pfaffiane, chiameremo *sistema aggiunto del sistema* (1). Per ora ci limitiamo a osservare che il sistema rappresentato solo dalle (16) è l'ordinario e noto *sistema aggiunto* delle equazioni (di primo ordine) (11), e che quindi esso è un *sistema completo* (o meglio detto, tenuto conto della forma che hanno le sue equazioni, un *sistema Jacobiano*, secondo la nota denominazione di Clebsch), quando il sistema (1) è completamente integrabile; infatti in tal caso è, come abbiamo sopra dimostrato, anche il sistema (11) completamente integrabile.

Osserviamo inoltre che il sistema (17) è della medesima forma di quello da me già introdotto nel § 1, di un lavoro pubblicato recentemente nei *Rend. dell'Ist. Lomb.* (*), e da me denominato *completo*, quando, appunto come si verifica nel nostro caso, sono zero tutte le parentesi quadrate $[j, h, k, r]$.

Dalle cose sviluppate in questo paragrafo risulta che *le condizioni per la completa integrabilità del sistema* (1), *cioè le condizioni* (8), (10), *bastano perchè tutte le equazioni* (17) *abbiano m integrali indipendenti comuni, e questi sieno precisamente quelli relativi al sistema completo* (16); si ha così la risoluzione di un sistema completo di second'ordine, mediante uno ordinario di primo ordine.

(*) *Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second'ordine.* Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901.

§ 3. Trasformazione di una forma ai differenziali totali di second'ordine. Invariante simultaneo di una siffatta forma e di un'altra a derivate parziali lineare omogenea di second'ordine.

Sia data una espressione U del tipo

$$U \equiv \sum_{k=1}^{n} X_k \, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \, d x_i \, d x_j \, , \quad (X_{ij} = X_{ji}) \tag{1}$$

cioè il primo membro di una equazione come quelle considerate nel § 1, e che noi, per brevità, vogliamo chiamare una *forma ai differenziali totali di second'ordine*, e immaginiamo operata una trasformazione delle variabili x in altre variabili y:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

La forma trasformata sia:

$$\sum_{h=1}^{n} Y_h \, d^2 y_h + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} Y_{r,s} \, d y_r \, d y_s \quad (Y_{r,s} = Y_{s,r}).$$

Essendo

$$d x_i = \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} d y_r \, ,$$

$$d^2 x_k = \sum_r \sum_s \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_r \, \partial y_s} d y_r \, d y_s + \sum_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} d^2 y_h \, ,$$

si hanno evidentemente le formole

$$\left. \begin{aligned} Y_h &= \sum_k X_k \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \, , \\ Y_{r,s} &= \sum_k X_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_r \, \partial y_s} + \sum_i \sum_j X_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial x_j}{\partial y_s} \, . \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Consideriamo ora una espressione del tipo:

$$\Xi F \equiv \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} \, , \quad (\xi_{ij} = \xi_{ji}) \tag{3}$$

(cioè come il primo membro di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea di second'ordine) intendendo colle ξ delle funzioni delle x, e con F una funzione indeterminata; per brevità noi chiameremo una espressione come (3), una *forma alle derivate parziali* di second'ordine.

Operando sulla (3) la medesima traformazione adoperata di sopra, essa diventa

$$\Upsilon F \equiv \sum_{h=1}^{n} \eta_h \frac{\partial F}{\partial y_h} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \eta_{r,s} \frac{\partial^2 F}{\partial y_r \partial y_s}, \quad (\eta_{rs} = \eta_{sr})$$

dove i coefficienti hanno evidentemente i seguenti valori

$$\left.\begin{aligned} \eta_h &= \sum_k \xi_k \frac{\partial y_h}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \xi_{ij} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \eta_{r,s} &= \sum_i \sum_j \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Con queste formole è facile dimostrare il seguente importante risultato: *la espressione*

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{n} X_k \xi_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \xi_{ij} \tag{5}$$

è un invariante simultaneo delle due forme (1), (3), *esso cioè resta inalterato per qualunque trasformazione di variabili.*

Come si vede, si ha così la precisa estensione di una proprietà ben nota della teoria invariantiva delle ordinarie forme pfaffiane.

Infatti formiamo mediante le formole (2), (4) la espressione

$$\sum_{h=1}^{n} Y_h \eta_h + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} Y_{r,s} \eta_{r,s},$$

e otteniamo:

$$\sum_h \sum_k \sum_i X_k \xi_i \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} + \sum_h \sum_k \sum_i \sum_j X_k \xi_{i,j} \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_r \sum_s \sum_k \sum_i \sum_j X_k \xi_{i,j} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_r \partial y_s} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_r \sum_s \sum_h \sum_k \sum_i \sum_j X_{hk} \xi_{ij} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \frac{\partial x_k}{\partial y_s}.$$

Ora si ha identicamente

$$\sum_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_i} = 0, \quad \text{se } k \text{ è diverso da } i$$

$$= 1, \quad \text{se } k \text{ è uguale a } i,$$

donde si ricava l'altra formola identica

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_r \partial y_s} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} + \sum_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_j} = 0;$$

di qui si vede che la somma del secondo e terzo termine nella formola superiore, si annulla identicamente, ed inoltre i termini, compresi nel triplo sommatorio della prima parte della medesima formola, nei quali è k diverso da i sono anch'essi zero, e così similmente sono zero quei termini dell'ultima parte (il sommatorio sestuplo), nei quali la coppia di indici h, k è diversa dalla coppia i, j. La formola precedente si riduce così esattamente alla espressione di Λ, che è quanto si voleva dimostrare.

Se in luogo di una forma alle derivate parziali del tipo generale (3), ne consideriamo in particolare una in cui le $\xi_{i,j}$ sieno tutte zero, la forma Ξ diventa semplicemente di primo ordine, e propriamente essa potrebbe interpretarsi allora come il simbolo di un'ordinaria trasformazione infinitesimale. Ponendo nell'invariante Λ, le $\xi_{i,j}$ eguali a zero, si ottiene

$$\lambda = \sum_{h=1}^{n} X_h \xi_h$$

come invariante simultaneo della forma differenziale data, e di una trasformazione infinitesimale; questo invariante è il *medesimo* che quello relativo alla stessa trasformazione infinitesimale e alla *forma differenziale lineare di primo ordine*

$$V \equiv \sum_{h=1}^{n} X_h \, d x_h, \tag{6}$$

la quale ha per coefficienti quelli che nella forma di secondo ordine U, sono i coefficienti dei differenziali secondi delle variabili, e che ha il più intimo rapporto colla forma U.

A questo proposito notiamo infatti che *la forma differenziale U, può sempre esprimersi come somma del differenziale totale della forma V, e di una ordinaria forma differenziale quadratica di primo ordine*; giacchè avendo presenti i simboli introdotti colla formola (8) del § 1, *può sempre scriversi identicamente*:

$$U = d V + \sum_i \sum_j ((i j)) \, d x_i \, d x_j, \tag{7}$$

formola della quale avremo occasione di servirci.

§ 4. Sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni ai differenziali totali di second'ordine.

Sia dato un sistema di $m\,(<n)$ equazioni ai differenziali totali di second'ordine:

$$\sum_{k=1}^{n} X_{kr}\, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j,r}\, d\,x_i\, d\,x_j = 0, \quad (X_{i,j,r} = X_{j,i,r})\ (r = 1,\ldots, m). \qquad (1)$$

Formiamo con coefficienti ξ indeterminati gli invarianti Λ, e eguagliamoli *a zero*, cioè formiamo le m equazioni lineari:

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k,r}\, \xi_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j,r}\, \xi_{ij} = 0 \qquad (r = 1,\ldots, m) \qquad (2)$$

colle incognite ξ in numero di $\nu = \frac{n\,(n+3)}{2}$, e immaginiamo ricavati tutti i possibili sistemi di valori per le incognite. Facendo l'ipotesi *che il sistema* (1) *sia formato di equazioni linearmente indipendenti, cioè che non sia zero la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} X_{11} \ldots & X_{n1} & X_{111} \ldots & X_{nn1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{1m} \ldots & X_{nm} & X_{11m} \ldots & X_{nnm} \end{matrix} \right\|, \qquad (3)$$

vi saranno esattamente $\nu - m$ sistemi *indipendenti* di soluzioni per le incognite ξ, cioè sistemi dei quali non è zero la matrice. Contrassegniamo con un indice s, variabile da 1 a $\nu - m$, e messo in ultimo posto a ciascuna delle ξ, i vari sistemi, per modo che la matrice delle ξ di tutti i sistemi così trovati, assume la seguente forma:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11} \ldots & \xi_{n1} & \xi_{111} \ldots & \xi_{nn1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1,\nu-m} \ldots & \xi_{n,\nu-m} & \xi_{11\nu-m} \ldots & \xi_{n,n,\nu-m} \end{matrix} \right\|. \qquad (4)$$

Gli elementi ξ soddisfano alle relazioni:

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k,r}\, \xi_{k,s} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ijr}\, \xi_{ijs} = 0 \qquad (5)$$

e la matrice (4) è diversa da zero.

Formiamo ora il sistema di $\nu - m$ equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine, di cui il primo membro sia del tipo di quelli considerati nel § precedente, e di cui i coefficienti sieno precisamente le ξ ora trovate:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{ks} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{i,j,s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (\xi_{i,j,s} = \xi_{j,i,s}),\ (s = 1, \ldots, \nu - m). \quad (6)$$

Diremo che il sistema (5) è il *sistema aggiunto* del sistema dato (1), e ciò, com'è evidente, estendendo una nota definizione riguardante i sistemi ordinari di equazioni pfaffiane. Come si vede il sistema aggiunto (6) è *unito invariantivamente* al sistema dato, essendo zero gli invarianti simultanei (5).

Le equazioni del sistema dato e del sistema aggiunto possono porsi sotto una forma caratteristica.

Infatti consideriamo la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} d^2 x_1 \ldots & d^2 x_n & d x_1^2 \ldots & d x_n^2 \\ \xi_{11} \ldots & \xi_{n1} & \xi_{111} \ldots & \xi_{nn1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{1,\nu-m} \ldots & \xi_{n,\nu-m} & \xi_{11\nu-m} \ldots & \xi_{n,n,\nu-m} \end{matrix} \right\| . \quad (7)$$

Se moltiplichiamo gli elementi della prima colonna per X_{1r}, quelli della seconda per $X_{2,r}$, ecc., quelli della n^{ma} per $X_{n,r}$, quelli della $(n+1)^{ma}$ per X_{11r}, e così di seguito, e facciamo la somma dei prodotti così ottenuti, tenendo conto dell'annullarsi dei primi membri delle (1), e delle (5), si ha su ciascuna linea identicamente zero; il che mostra che *coll'eguagliare a zero tutti i determinanti di ordine* $\nu - m + 1$ *della matrice* (7), *si ha un sistema di equazioni equivalente al sistema* (1).

In modo simile si riconosce che il sistema (6) può essere rappresentato eguagliando a zero tutti i determinanti di ordine $m + 1$ della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \ldots & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \\ X_{11} \ldots & X_{n1} & X_{111} \ldots & X_{nn1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_{1m} \ldots & X_{nm} & X_{11m} \ldots & X_{nnm} \end{matrix} \right\| . \quad (8)$$

È evidente che se ad una (o più) equazioni del sistema (1) sostituiamo una combinazione lineare di tutte, il sistema delle (2) resta inalterato, e quindi il sistema aggiunto non muta; possiamo perciò dire: *il sistema aggiunto resta inalterato sostituendo al sistema dato un altro equivalente.*

Inoltre è chiaro che *la relazione fra i due sistemi* (1), (6) *è reciproca,* perchè reciproche sono le equazioni (2).

Supponiamo che il sistema (1) sia sotto la forma ad esso data nel principio del § 2, cioè risoluto rispetto ai differenziali secondi di m delle variabili, ed esaminiamo quale forma possiamo assegnare al sistema aggiunto.

Dobbiamo naturalmente qui ammettere che tale risoluzione sia possibile e quindi che *la matrice rappresentata dalle prime n colonne di* (3) *sia diversa da zero.*

I coefficienti della r^{ma} equazione sono allora rispettivamente i seguenti:

$$-X_{1r}, \ldots, -X_{n-m,r}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{r-1}, 1, 0, \ldots, 0, -X_{11r}, \ldots, -X_{ijr}, \ldots, -X_{nnr}$$

e quindi le equazioni (2) diventano:

$$\xi_{n-m+r} - \sum_{k=1}^{n-m} X_{k,r}\,\xi_k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j,r}\,\xi_{ij} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m). \tag{9}$$

Dovendo scegliere $\nu - m$ sistemi indipendenti di soluzioni per le incognite ξ, scegliamo arbitrariamente, in $\nu - m$ modi diversi e indipendenti, i valori delle $\nu - m$ incognite:

$$\xi_1 \ldots \xi_{n-m}\ \xi_{11} \ldots \xi_{i,j} \ldots \xi_{n,n},$$

e propriamente possiamo fare tale scelta, nel modo più semplice, facendo che la matrice quadrata di essi valori abbia tutti gli elementi zero meno quelli della diagonale principale che possiamo porre eguali a 1; il sistema di valori così ottenuto è certamente tale che la matrice (4) è diversa da zero.

Le equazioni (9) danno allora per le rimanenti ξ_{n-m+r}, valori semplicissimi, e propriamente:

X_{1r} per il primo sistema

X_{2r}' per il secondo sistema

. . . .

X_{nnr} per l'ultimo sistema

ossia in generale si avrà, adoperando le notazioni come sopra:

$\xi_{ks} = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n - m$, e s diversa da k

$\xi_{ss} = 1$ per $s = 1, 2, \ldots, n - m$,

$\xi_{n-m+r,s} = X_{s,r}$ per $s = 1, 2, \ldots, n$

$\xi_{n-m+r,s} = X_{ijr}$ per s maggiore di n, e corrispondente propriamente all'indice di quel posto in cui nella matrice (4) è stato classificato il doppio indice i, j.

Le equazioni (6) diventano semplicemente le seguenti:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{m} X_{ir} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n - m) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} X_{ijr} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-m+r}} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

le quali, come si vede, sono precisamente quelle trovate nel § 2 (formole (16), (17)), e che rappresentavano allora quel sistema di equazioni a derivate parziali cui soddisfacevano le m soluzioni comuni del sistema dato, nel caso della *completa integrabilità.*

Abbiamo dunque la precisa estensione di un risultato relativo alle ordinarie equazioni pfaffiane, e cioè *quando il sistema dato di m equazioni ai differenziali totali di second'ordine, è completamente integrabile, allora il sistema aggiunto è soddisfatto da m e non più di m integrali comuni.*

In generale è facile mostrare che *quando la matrice rappresentata dalle prime n colonne di* (3) *è diversa da zero, cioè quando le equazioni*

$$\sum_{k=1}^{n} X_{kr} \, d x_k = 0$$

sono linearmente indipendenti, ovvero anche quando le (1) *sono risolubili rispetto ad m dei differenziali secondi delle x, il sistema aggiunto di* (1) *contiene sempre le equazioni del sistema aggiunto di*

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k,r} \, d x_k = 0,$$

il quale è un sistema di equazioni pfaffiane, avente, come si è visto nel paragrafo precedente, il più intimo rapporto col sistema dato.

Basterà, per riconoscere la verità di quanto si è qui asserito, osservare che, essendo m minore di n, fra i sistemi di soluzioni indipendenti delle equazioni (2), se ne possono scegliere allora sempre $n-m$, pei quali tutte le ξ_{ij} sieno zero.

Nella ricordata teoria dei sistemi di primo ordine, si sa che, nel caso indicato, il sistema aggiunto è un cosiddetto sistema completo, avendo la proprietà che le *parentesi di* Poisson effettuate coi primi membri di due delle sue equazioni, si esprimono linearmente mediante i primi membri medesimi.

Ora è rimarchevole che una proprietà perfettamente analoga sussiste anche per il caso più complesso che noi qui consideriamo, e ciò dimostreremo nel seguente paragrafo.

È utile intanto notare che *le sole equazioni* (10) *formano il sistema aggiunto delle equazioni di primo ordine* (11) *del § 2.*

§ 5. Sistema completo di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali di second'ordine.

Dimostriamo quanto abbiamo asserito alla fine del paragrafo precedente.
Indichiamo con F_h l'operazione:

$$F_h \equiv \frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{m} X_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{1}$$

$$F_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} X_{ijr} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+r}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Io dico che questo sistema di operazioni soddisfa alla proprietà che, *quando il sistema dato di equazioni ai differenziali totali di second'ordine* ((1) *del § 2) è completamente integrabile, allora le operazioni composte*

$$\left.\begin{aligned} F_h\, F_i - F_i\, F_h &\equiv (F_h\ \ F_i) \\ F_h\, F_{ij} - F_{ij}\, F_h &\equiv (F_h\ \ F_{ij}) \\ F_{hk}\, F_{ij} - F_{ij}\, F_{hk} &\equiv (F_{hk}\, F_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

si esprimono in generale linearmente mediante le operazioni primitive medesime.

Per la prima delle (3) la cosa è evidente, giacchè, come abbiamo già osservato nel paragrafo precedente, il sistema delle F_h è precisamente quello che corrisponde al sistema aggiunto del sistema (11) del § 2, il quale, come abbiamo a suo tempo dimostrato, è appunto un sistema completamente integrabile quando lo è il dato, e quindi, per una proprietà conosciuta dei sistemi di primo ordine, e propriamente per quella stessa proprietà che vogliamo qui estendere al caso del second'ordine, il sistema delle F_h è *completo*, cioè le parentesi

$$(F_h\, F_i)$$

si esprimono come combinazioni lineari delle F_h; anzi nel nostro caso per la speciale forma che hanno le F, tali parentesi sono zero.

Calcolando la parentesi $(F_h\, F_{i,j})$ si trova:

$$\begin{aligned}(F_h\, F_{i,j}) = -\sum_{s=1}^{m}\Big\{&\frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_{n-m+s}} + \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_{n-m+s}} + \\ &+\frac{\partial^2 X_{hs}}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} + \sum_r X_{ijs}\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}}\frac{\partial}{\partial x_{n-m+r}} - \\ &-\frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} - \sum_r X_{hs}\frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}}\frac{\partial}{\partial x_{n-m+r}}\Big\}\end{aligned}$$

che possiamo scrivere identicamente:

$$\begin{aligned}= &-\sum_s \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i} F_{j,n-m+s} - \sum_s \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_j} F_{i,n-m+s} - \\ &-\sum_s\Big[\frac{\partial^2 X_{hs}}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_h} + \sum_r X_{ijr}\frac{\partial X_{hs}}{\partial x_{n-m+r}} - \sum_r X_{hr}\frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_{n-m+r}} - \\ &-\sum_r X_{i,n-m+r,s}\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_j} - \sum_r X_{j,n-m+r,s}\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_i}\Big]\frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}}\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo il valore della espressione contenuta nell'ultima parentesi quadrata, e facciamo vedere che *essa può esprimersi mediante i due simboli fondamentali introdotti nel § 2.*

Infatti avendosi

$$((h\,i\,s)) = \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i} - X_{his} - \sum_{r=1}^{m} X_{hr}\, X_{i,n-m+r,s}$$

si ha

$$\frac{\partial^2 X_{hs}}{\partial x_i\,\partial x_j} = +\frac{\partial}{\partial x_j}((h\,i\,s)) + \frac{\partial X_{his}}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} X_{hr}\frac{\partial X_{i,n-m+r,s}}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{m} X_{i,n-m+r,s}\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_j}\,;$$

sostituendo questo valore nella sopra indicata espressione, e tenendo conto del valore del simbolo $[h, j, i, s]$ dato dalla formola (9) del § 2, la suddetta espressione può scriversi:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}((h, i, s)) + [h, j, i, s] + \sum_{r=1}^{m} X_{hr}[n-m+r, j, i, s] + \\ &\quad + \sum_{r=1}^{m} X_{ijr}((\bar{h}, n-m+r, s)) - \sum_{r=1}^{m} X_{n-m+r,j,s}((h, i, r))\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

che per brevità indicheremo col simbolo

$$[[h, i, j, s]], \tag{5}$$

per modo che otteniamo infine la formola

$$\left.\begin{aligned}(F_h F_{ij}) = &-\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i} F_{j,n-m+s} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_j} F_{i,n-m+s} - \\ &- \sum_{s=1}^{m} [[h, j, i, s]] \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

la quale formola dimostra il nostro assunto, perchè essendo zero, quando il sistema dato è completamente integrabile tutti i simboli (( )) e [ ], (vedi § 2), e quindi anche i simboli (5), dalla (6) appare subito che la $(F_h F_{ij})$ si esprime in tal caso linearmente mediante le operazioni di second'ordine rappresentate dalle F con due indici.

Calcoliamo ora il valore della terza delle (3).

Si ha:

$$\begin{aligned}(F_{ij} F_{hk}) = &\sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_{n-m+r}} + \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{n-m+r}} - \\ &- \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{n-m+r}} - \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_{n-m+r}} + \\ &+ \sum_s \frac{\partial^2 X_{hks}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} + \sum_r \sum_s X_{ijr} \frac{\partial X_{hks}}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} - \\ &- \sum_s \frac{\partial^2 X_{ijs}}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} - \sum_r \sum_s X_{hkr} \frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}}\end{aligned}$$

che può scriversi:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_i} F_{j,n-m+r} + \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_j} F_{i,n-m+r} - \\
&- \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} F_{k,n-m+r} - \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_k} F_{h,n-m+r} + \\
&+ \sum_t \left\{ \frac{\partial^2 X_{hkt}}{\partial x_i \, \partial x_j} - \frac{\partial^2 X_{ijt}}{\partial x_h \, \partial x_k} + \sum_r X_{ijr} \frac{\partial X_{hkt}}{\partial x_{n-m+r}} - \sum_r X_{hkr} \frac{\partial X_{ijt}}{\partial x_{n-m+r}} - \right. \\
&\qquad - \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_i} X_{j,n-m+r,t} - \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_j} X_{i,n-m+r,t} + \\
&\qquad \left. + \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} X_{k,n-m+r,t} + \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_k} X_{h,n-m+r,t} \right\} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+t}} .
\end{aligned}
$$

Ora si può vedere che l'espressione contenuta nell'ultima parentesi, si può esprimerla tutta mediante i soliti due simboli (8), (9) del § 2; infatti essa è:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i} [h, j, k, t] + \frac{\partial}{\partial x_h} [k, i, j, t] + \sum_r X_{hkr} [n-m+r, i, j, t] + \\
&\qquad + \sum_r X_{ijr} [h, n-m+r, k, t] + \\
&\qquad + \sum_r X_{kjr} [i, h, n-m+r, t] + \\
&+ \sum_r X_{i,n-m+r,t} [j, h, k, r] + \sum_r X_{h,n-m+r,t} [i, k, j, r]
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

che indicheremo col simbolo *a cinque indici*:

$$
[[i, j, h, k, t]], \tag{8}
$$

per modo che si ha:

$$
\left.
\begin{aligned}
(F_{ij}, F_{hk}) = &\sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_i} F_{j,n-m+r} + \sum_r \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_j} F_{i,n-m+r} \\
&- \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} F_{k,n-m+r} - \sum_r \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_k} F_{h,n-m+r} \\
&+ \sum_t [[i, j, h, k, t]] \frac{\partial}{\partial x_{n-m+t}} .
\end{aligned}
\right\} \tag{9}
$$

Questa formola dimostra appunto quanto abbiamo asserito in principio, che cioè, quando il sistema dato è completamente integrabile, allora, essendo zero i simboli (8), perchè formati mediante i simboli [ ], che in tal caso sono zero, la operazione (F_{ij}, F_{hk}) si esprime linearmente mediante le operazioni rappresentate dalle F con doppio indice.

L'analogia con i sistemi di primo ordine resta così completamente stabilita.

Quando le operazioni F_h, F_{ij} soddisfano alla proprietà qui indicata, noi diremo che il sistema delle $\nu - m$ equazioni lineari omogenee alle derivate parziali di primo e di second'ordine

$$\left.\begin{array}{ll} F_h \varphi = 0\,, & (h = 1,\, 2, \ldots,\, n - m) \\ F_{ij} \varphi = 0\,, & (i, j = 1\,,\, 2, \ldots,\, n) \end{array}\right\} \tag{10}$$

formano un *sistema completo.*

Nel caso in cui si abbia un sistema di forma generale di $\nu - m$ $\left(\nu = \frac{n(n+3)}{2}\right)$ equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second'ordine (v. formole (6) del § 4), la definizione di *sistema completo* si riduce alla seguente: si immagini risoluto il sistema rispetto alle $\frac{n(n+1)}{2}$ derivate seconde, e rispetto ad $n - m$ delle derivate prime; esso sarà così ridotto alla forma (10), e il primitivo si dirà *completo,* quando ridotto a tal forma soddisfa alla sopra indicata definizione. Naturalmente bisogna presupporre le solite condizioni, perchè sia possibile la detta risoluzione, e queste condizioni sono: che nella matrice (4) del § 4 (matrice di tutti i coefficienti delle equazioni date), almeno uno dei determinanti di ordine $\nu - m$ formati con tutte le $\frac{n(n+1)}{2}$ ultime colonne, e con altre $n - m$ delle rimanenti, sia diverso da zero. Come si vede dunque, la definizione di sistema completo di second'ordine non si può applicare direttamente alle equazioni sotto la forma data, ma bisogna supporre una previa risoluzione di queste, almeno che non si voglia mutare in modo opportuno la definizione stessa.

Ciò costituisce una differenza caratteristica fra questo caso e quello dei sistemi di primo ordine, e la differenza proviene da ciò che mentre, supposto F_h un'operazione di *primo ordine*, e moltiplicandola per una qualunque funzione $\psi(x)$, le parentesi

$$(\psi \,.\, F_h,\ \chi \,.\, F_i)$$

si esprimono anche linearmente mediante le F, se tale proprietà hanno le parentesi

$$(F_h, F_i),$$

il medesimo non accade più invece quando le F sono operazioni di secondo ordine, come è facile verificare.

Si potrebbe, modificando in modo opportuno solo la forma della definizione di sistema completo data di sopra, (senza però alterarne la sostanza,) fare in modo che essa sia applicabile direttamente ad un sistema generale come il (6) del § 4, le cui equazioni non sono che combinazioni lineari delle (10) e (11) del medesimo paragrafo; non crediamo però necessario per ora di far ciò.

Osserviamo infine che la definizione data da me in un altro recente lavoro citato al § 2, è diversa da quella qui data, partendo da un diverso punto di vista.

§ 6. Applicazione delle operazioni di primo e secondo ordine su di una espressione ai differenziali totali di second'ordine.

La teoria invariantiva delle espressioni pfaffiane (di primo ordine) è fondata notoriamente sullo studio dell'applicazione di una trasformazione infinitesimale sui primi membri delle equazioni medesime; partendo dalla teoria dei *gruppi ampliati*, si trova qual' è il risultato della detta applicazione, indi la condizione perchè si possa dire che quelle equazioni *ammettono* una trasformazione infinitesimale, e infine si trova un legame assai intimo ed elegante fra le condizioni della completa integrabilità del sistema dato di equazioni, e la sua invariantività rispetto alle trasformazioni infinitesimali rappresentate dai primi membri del sistema aggiunto; si trova cioè che l'una cosa equivale precisamente all'altra.

Ora noi ci proponiamo di estendere al caso nostro appunto tutto questo assieme di risultati e teoremi, e troveremo, il che ci sembra notevole, che sussistono risultati assai analoghi; in luogo delle operazioni rappresentate dalle solite trasformazioni infinitesimali, interverranno nel nostro caso altre operazioni F, di cui alcune (quelle ad un indice) possono ancora considerarsi come trasformazioni infinitesimali, ma altre sono operazioni di second'ordine.

Sieno date delle operazioni come le (1) e (2) del § 5; per evitare confusioni, noi scriveremo le medesime con altri coefficienti, e porremo:

$$\Phi_h \equiv \frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{m} Y_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{1}$$

$$\Phi_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{s=1}^{m} Y_{ijs} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+s}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

le Φ_h possono intendersi come ordinarie trasformazioni infinitesimali, e le Φ_{ij} sono delle operazioni di second'ordine.

Moltiplichiamo una qualunque delle Φ per una funzione qualunque ψ delle x, e formiamo più generalmente le operazioni:

$$\psi \, \Phi_h \equiv \Psi_h \tag{3}$$

$$\psi \, \Phi_{ij} \equiv \Psi_{ij} \,. \tag{4}$$

Vogliamo prima di tutto *definire* che cosa intendiamo per: *operare una delle* (3) *o* (4) *sul primo membro di una equazione ai differenziali totali di second'ordine*:

$$\Delta_r \equiv \sum_{k=1}^{n} X_{kr} \, d^2 x_k + \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} X_{pqr} \, d\,x_p \, d\,x_q \,. \tag{5}$$

Se Δ_r fosse una funzione *finita* delle variabili, nessuna difficoltà vi sarebbe ad intendere il significato delle operazioni (3) e (4) applicate sopra di essa, ma la necessità della nuova definizione proviene da ciò che Δ_r è una espressione differenziale.

Nella teoria ordinaria delle equazioni pfaffiane per trovare il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesimale (operazione di *primo* ordine) sul primo membro di una di esse, si ricorre alla teoria dei *gruppi ampliati*, riconducendo così la questione a quella dell'applicazione di una trasformazione infinitesimale *ampliata* su di una funzione *finita*; si ottiene in tal modo una formola la quale si potrebbe stabilire fin dal principio come *definizione* (v. p. es. alla pag. 100 dell'opera di E. v. Weber, citata nella prefaz.) e che mostra che *il simbolo di una trasformazione infinitesimale si applica ad una espressione differenziale, perfettamente come un ordinario simbolo di derivazione di primo ordine, il quale sia permutabile col simbolo d che figura nell'espressione differenziale.*

Per trovare ora la richiesta definizione noi cercheremo di conservare inalterato questo principio e quindi, se si tratti dell'operazione di primo ordine Ψ_h, scriveremo senz'altro, *per definizione*:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_h \Delta_r = &\sum_{k=1}^{n} (\Psi_h X_{kr})\, d^2 x_k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} X_{kr}\, d^2 (\Psi_h x_k) + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} (\Psi_h X_{pqr})\, d x_p\, d x_q + \\ &+ \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} X_{pqr}\, d(\Psi_h x_p)\, d x_q + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} X_{pqr}\, d(\Psi_h x_q)\, d x_p .\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Se si tratti invece della operazione di *secondo* ordine Ψ_{ij} dobbiamo osservare quanto segue: la Ψ_{ij} è composta di due parti di cui la prima è

$$\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{7}$$

e l'altra è una operazione di primo ordine, la quale quindi si applica nel modo anzidetto.

Operiamo (7) su di una espressione del tipo:

$$A\, d\, B,$$

e si avrà:

$$\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(A\, d B) = \left(\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A\right) d B + A \left(\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\, d B\right) +$$
$$+ \psi \frac{\partial}{\partial x_i} A \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\, d B + \psi \frac{\partial}{\partial x_j} A \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\, d B$$

e gli ultimi due termini li possiamo identicamente scrivere:

$$\frac{1}{2}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i} A\right) \frac{\partial}{\partial x_j} d B + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A \left(\psi \frac{\partial}{\partial x_j}\, d\, B\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_j} A\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\, d\, B + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A \left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i}\, d\, B\right),$$

e per lo scambio delle operazioni

$$\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \psi \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \psi \frac{\partial}{\partial x_j}$$

col simbolo operativo d, noi scriveremo infine *per definizione*:

$$\left.\begin{aligned}\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(A \,.\, d B) = &\left(\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A\right) d B + A \,.\, d\left(\psi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i} A\right) d\left(\frac{\partial}{\partial x_j} B\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} A\right) d\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_j} B\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_j} A\right) d\left(\frac{\partial}{\partial x_i} B\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} A\right) d\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i} B\right).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Se poi A fosse a sua volta una espressione differenziale dC non si presenterebbe alcuna nuova difficoltà per l'applicazione della operazione (7), perchè basterebbe nella (8) porre $A = dC$, e poi scambiare al solito il simbolo d con quello delle operazioni da effettuarsi su dC, e ciò sempre *per definizione.*

Queste definizioni bastano per potere applicare su di una espressione, come Δ_r, *una operazione rappresentata da una qualunque combinazione lineare delle operazioni* (1) *e* (2).

Colla formola (8) otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{ij}(A\,.\,dB) = (\Psi_{ij}A)\,dB + A\,.\,d\,(\Psi_{ij}B) + \\ +\frac{1}{2}\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)d\left(\frac{\partial}{\partial x_j}B\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)d\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}B\right)+ \\ +\frac{1}{2}\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}A\right)d\left(\frac{\partial}{\partial x_i}B\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}A\right)d\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}B\right)\cdot \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

colla qual formula generale potrebbe facilmente calcolarsi il risultato dell'operazione Ψ_{ij} su Δ_r, e si riconosce subito che tal risultato è naturalmente, come Δ_r, una espressione lineare ai differenziali totali secondi.

Vogliamo solo notare in che modo si modifica tal risultato, quando invece di applicare Ψ_{ij} su Δ_r, la applichiamo al prodotto di una funzione finita A delle variabili x, per Δ_r stessa; possiamo servirci della stessa formola (9) quando in luogo di dB vi si immagini posto Δ_r.

Si vede allora agevolmente che il risultato che si ottiene è il seguente:

$$\left.\begin{aligned} A\,(\Psi\,\Delta_r) + (\Psi_{ij}A)\,\Delta_r + \\ +\frac{1}{2}\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right)+ \\ +\frac{1}{2}\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}A\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_r\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}A\right)\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_r\right)(*), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

cioè, *si ottiene il medesimo risultato di prima moltiplicato per* A, *più un*

(*) È bene notare, ad evitare equivoci in chi non fosse ancora abbastanza addentro nello spirito di questi calcoli, che essendo Δ_r una espressione differenziale, non si può dire che $\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right)$ è eguale a $\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right)$, e ciò per i principi stabiliti di sopra, mentre che, essendo A una espressione finita, si può bensì dire che $\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A\right)$.

termine lineare in Δ_r, e più infine una espressione lineare nelle

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_r\right), \quad \left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_r\right), \quad \left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_r\right). \tag{11}$$

Passiamo ora a definire che cosa vogliamo intendere col dire: *che un sistema di espressioni differenziali, come Δ_r, ammette una operazione come le* (3) *o le* (4). Dobbiamo distinguere secondo che si tratti di una operazione di primo ordine (3), ovvero di una operazione di second'ordine (4).

Diremo che il sistema delle Δ_r *ammette* ovvero è *invariabile* per una operazione Ψ_h, quando il risultato dell'applicazione di questa su ciascuna Δ_r è una combinazione lineare delle Δ_r medesime; potendosi le Ψ_h considerare come rappresentanti trasformazioni infinitesimali, si viene così a definire, in un modo perfettamente analogo a quello noto e relativo agli ordinari sistemi pfaffiani, l'invariabilità di un sistema di Δ_r per una trasformazione infinitesimale.

Diremo poi che il sistema delle Δ_r *ammette* ovvero è *invariabile* per una operazione Ψ_{ij}, quando il risultato dell'applicazione di questa su ciascuna Δ_r è una combinazione lineare delle Δ_r, *a meno dei termini*

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r}\left\{\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right)+\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right)\right\}+ \\ &+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r}\left\{\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right)+\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

i cui coefficienti non dipendono, come si vede, che da quelli della Δ_r su cui si opera, e dalla funzione ψ.

Se in luogo di considerare le operazioni (3), (4) separatamente, consideriamo poi una somma di esse, il che equivale a considerare una combinazione lineare, a coefficienti *variabili* qualunque, delle operazioni (1) e (2), diremo naturalmente che il sistema delle Δ_r *ammette* ovvero è *invariabile* per tale operazione generale, quando ammette ciascuno dei termini di questa.

E dopo ciò passeremo ad operare su di un dato sistema di Δ_r, le operazioni rappresentate dal corrispondente *sistema aggiunto*, per dedurne, come abbiamo detto di sopra, una notevole estensione di un importante teorema.

§ 7. Relazione fra la completa integrabilità di un sistema, e la sua invariabilità per le operazioni rappresentate dal sistema aggiunto.

Assumiamo il sistema dato di m equazioni sotto la solita forma (1) del § 2, per modo che le operazioni rappresentate dal sistema aggiunto sono precisamente le (1) e (2) del § 5.

Operiamo, colle regole stabilite nel paragrafo precedente, la

$$\psi F_h$$

su

$$\Delta_r = d^2 x_{n-m+r} - \sum_{i=1}^{n-m} X_{ir}\, d^2 x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ijr}\, d x_i\, d x_j; \tag{1}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & d^2 (\psi X_{hr}) - \sum_i \psi \left(\frac{\partial X_{ir}}{\partial x_h} + \sum_s X_{hs} \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_{n-m+s}} \right) d^2 x_i - X_{hr}\, d^2 \psi \\ & - \sum_i \sum_j \psi \left(\frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} + \sum_s X_{hs} \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}} \right) d x_i\, d x_j \\ & - \sum_i X_{ihr}\, d\psi \,.\, d x_i - \sum_j X_{jhr}\, d \psi\, d x_j \\ & - \sum_i \sum_s X_{i, n-m+s, r}\, d (\psi X_{hs}) - \sum_j \sum_s X_{j, n-m+s, r}\, d (\psi X_{hs}), \end{aligned}$$

e sviluppando, e raccogliendo opportunamente i termini, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{m} \psi \frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} d^2 x_{n-m+s} + \sum_{i=1}^{n-m} \psi \left[\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{m} X_{hs} \frac{\partial x_{ir}}{\partial x_{n-m+s}} \right] d^2 x_i + \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \psi \left[\frac{\partial^2 X_{hr}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{m} X_{hs} \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}} - \right. \\ & \qquad \left. - \sum_{s=1}^{m} X_{i, n-m+s, r} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{m} X_{j, n-m+s, r} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i} \right] d x_i\, d x_j + \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_j} - X_{hjr} - \sum_{s=1}^{m} X_{hs} X_{j, n-m+s, r} \right] d x_i\, d x_j + \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \left[\frac{\partial X_{hr}}{\partial x_j} - X_{hir} - \sum_{s=1}^{m} X_{hs} X_{i, n-m+s, r} \right] d x_i\, d x_j. \end{aligned}$$

Ora osserviamo che le quantità contenute nelle parentesi quadrate sono espressioni a noi già note, e che possiamo facilmente trasformare mediante i due soliti simboli introdotti nel § 2.

Ed infatti la quantità contenuta nella prima parentesi quadrata, è una parte di quella contenuta al primo membro della formola (12) del § 2, e quindi, a meno di simboli (( )), essa sarà uguale al termine che occupa il terzo posto nella suddetta formola, cioè propriamente a:

$$-\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} X_{is} + (((h,\ i,\ r)))$$

ponendo per brevità:

$$\left.\begin{array}{l} (((h,\ i,\ r))) = ((h,\ i,\ r)) - ((i,\ h,\ r)) + \sum\limits_{s} X_{hs}((i,\ n-m+s,\ r)) - \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{s} X_{is}((h,\ n-m+s,\ r)). \end{array}\right\} \quad (2)$$

La quantità contenuta nella seconda parentesi quadra, è a meno di un termine, simile ad un'altra già trovata nel § 5, e propriamente essa è uguale a:

$$-\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} X_{ijs} + [[h,\ i,\ j,\ r]];$$

ed infine le quantità contenute nelle altre due parentesi sono rispettivamente $((h,\ j,\ r))$ e $((h,\ i,\ r))$.

Il risultato della indicata operazione può dunque scriversi:

$$\left.\begin{array}{l} (\psi F_h \,.\, \Delta_r) = \sum\limits_{s=1}^{m} \psi \dfrac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} \Delta_s + \sum\limits_{i=1}^{n-m} \psi (((h,\ i,\ r)))\, d^2 x_i + \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \psi\, [[h,\ i,\ j,\ r]]\, d x_i\, d x_j + \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left\{ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} ((h j r)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} ((h i r)) \right\} d x_i\, d x_j . \end{array}\right\} \quad (3)$$

Da questa formola appare che, quando il sistema delle equazioni $\Delta_r = 0$ è completamente integrabile, poichè allora sono zero tutti i simboli (( )) e [ ], e quindi anche gli altri [[ ]], e ((( ))), e il secondo membro della (3) resta perciò una combinazione lineare delle Δ_s, il sistema di queste è invariabile per le operazioni ψF_h, ovvero per le trasformazioni infinitesimali, ψF_h, essendo ψ una funzione arbitraria.

Possiamo quindi anche dire che *quando il sistema delle $\Delta_r = 0$ è completamente integrabile, esso ammette tutte le trasformazioni infinitesimali ov-*

vero tutte le operazioni della schiera

$$\psi_1 F_1 + \psi_2 F_2 + \cdots + \psi_{n-m} F_{n-m},$$

dove le $\psi_1 \ldots \psi_{n-m}$ *rappresentano delle arbitrarie funzioni delle* x.

D'altra parte, se poniamo che il sistema delle Δ_r ammetta, o è invariabile, per tutte le operazioni rappresentate da (4), il secondo membro della formola (3), deve per un qualunque sistema di ψ, ridursi ad una combinazione lineare delle Δ_s, e quindi tutti i termini, meno il primo, devono ridursi a zero (*); tenendo poi conto dell'*arbitrarietà* della funzione ψ, e quindi delle sue derivate, dall'ultimo termine di (3) appare che devono essere zero separatamente i simboli (( )), cioè devono sussistere le condizioni (8) del § 2; dunque:

Se il sistema delle Δ_r *è invariabile per tutte le trasformazioni infinitesimali della schiera* (4), *devono essere zero tutte le espressioni rappresentate dai simboli* $((h, i, r))$.

Si potrebbe anche aggiungere che *devono essere zero anche tutte le espressioni* $[[h, i, j, r]]$, risultato che ci servirà di quì a poco; in quanto poi alle altre $(((h, i, r)))$, il loro annullarsi è conseguenza di quello delle $((h, i, r))$.

Operiamo ora ancora, colle regole stabilite nel paragrafo precedente, la

$$\psi F_{ij}$$

sopra Δ_r.

Si ottiene (scambiando per comodità in Δ_r gli indici i, j in h, k)

$$d^2(\psi X_{ijr}) - \sum_h \psi \left(\frac{\partial^2 X_{hr}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_s X_{ijs} \frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} \right) d^2 x_h -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial X_{jr}}{\partial x_i} d^2 \psi - \frac{1}{2} \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_j} d^2 \psi -$$

$$- \sum_h \sum_k \psi \left(\frac{\partial^2 X_{hkr}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_s X_{ijs} \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_{n-m+s}} \right) d x_h \, d x_k -$$

(*) Basta osservare che, posto il secondo membro di (3) eguale identicamente a $\sum_{s=1}^{m} \chi_s \Delta_s$, paragonando i termini in $d^2 x_{n-m+s}$, si ha che le χ_s sono eguali rispettivamente alle $\psi \dfrac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}}$, e quindi tutti gli altri termini della formola (3) devono essere zero. Facendo poi $\psi =$ cost. si deduce l'annullarsi dei simboli [[ ]] e ((( ))) separatamente; e facendo $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = 1$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0$ si ha l'annullarsi di ciascuno dei simboli (( )).

$$- \sum_h \sum_s X_{h,n-m+s,r}\, d(\psi X_{ijs})\, d x_h - \sum_k \sum_s X_{k,n-m+s,r}\, d(\psi X_{ijs})\, d x_k -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_h \frac{\partial X_{hjr}}{\partial x_i}\, d x_h\, d\psi - \frac{1}{2} \sum_h \frac{\partial X_{hir}}{\partial x_j}\, d x_h\, d\psi -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial X_{kjr}}{\partial x_i}\, d x_k\, d\psi - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial X_{kir}}{\partial x_j}\, d x_k\, d\psi.$$

Sviluppando, e raccogliendo opportunamente i termini, possiamo scrivere

$$(\psi F_{ij} \,.\, \Delta_r) = \sum_{s=1}^{m} \psi \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}}\, d^2 x_{n-m+s} +$$
$$+ \sum_{h=1}^{n-m} \psi \left[\frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} - \frac{\partial^2 X_{hr}}{\partial x_i\, \partial x_j} - \sum_{s=1}^{m} X_{ijs} \frac{\partial X_{hr}}{\partial x_{n-m+s}} \right] d^2 x_h +$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \psi \left[\frac{\partial^2 X_{ijr}}{\partial x_h\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 X_{hkr}}{\partial x_i\, \partial x_j} - \sum_{s=1}^{m} X_{ijs} \frac{\partial X_{hkr}}{\partial x_{n-m+s}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{m} X_{h,n-m+s,r} \frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_k} - \sum_{s=1}^{m} X_{kn-m+s,r} \frac{\partial X_{ijs}}{\partial x_h} \right] d x_h\, d x_k +$$
$$+ \left[X_{ijr} - \frac{1}{2} \frac{\partial X_{ir}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial X_{jr}}{\partial x_i} \right] d^2 \psi +$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} \left[2 \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_{hjr}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{hjr}}{\partial x_j} - 2 \sum_{s=1}^{m} X_{h,n-m+s,r} X_{ijs} \right] d x_h\, d\psi.$$

Le quantità contenute nelle varie parentesi quadre, coll'introduzione dei soliti simboli e di quelli del § 5, sono rispett. eguali a:

$$- \sum_{s=1}^{m} X_{hs} \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}} - \sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_j} -$$
$$- \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r} \frac{\partial X_{hs}}{\partial x_i} - [[h,\, i,\, j,\, r]],$$
$$- \sum_{s=1}^{m} X_{hks} \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}} - \sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r} \frac{\partial X_{hks}}{\partial x_j} -$$
$$- \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r} \frac{\partial X_{hks}}{\partial x_i} - [[i,\, j,\, h,\, k,\, r]],$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} X^{i}{}_{,n-m+s,r} X_{js} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r} X_{is} - \frac{1}{2} ((i\, j\, r)) - \frac{1}{2} ((j\, i\, r)),$$
$$- \sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r} X_{hjs} - \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r} X_{his} - [h\, i\, j\, r] - [h\, j\, i\, r];$$

quindi si ha:

$$\left.\begin{aligned}(\psi F_{ij}\,.\,\Delta_r) = \sum_{s=1}^{m} \psi \frac{\partial X_{ijr}}{\partial x_{n-m+s}} \Delta_s + \\ + \frac{1}{2}\psi \sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right) + \frac{1}{2}\psi \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right) - \\ - \sum_{h=1}^{n-m} \psi\,[[h,\, i,\, j,\, r]]\, d^2 x_h - \frac{1}{2}\,\{((i\,j\,r)) + ((j\,i\,r))\}\, d^2\psi - \\ - \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \psi\,[[i, j,\, h,\, k,\, r]]\, dx_h\, dx_k - \sum_{h=1}^{n}\{[h\,i\,j\,r] + [h\,j\,i\,r]\}\, dx_h\, d\psi.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Questa formola fa vedere che *se il sistema delle* Δ_r *è completamente integrabile, allora,* essendo zero tutti i simboli contenuti nelle ultime due linee, *esso ammette, giusta la definizione data nel § 6, tutte le operazioni della schiera*

$$\sum_{ij} \psi_{ij} F_{ij}, \qquad (6)$$

dove le ψ_{ij} *rappresentano delle funzioni arbitrarie delle* x.

Riunendo questo risultato con quello dianzi ottenuto possiamo dire:

Se il sistema delle equazioni $\Delta_r = 0$ *è completamente integrabile, esso ammetterà, ovvero sarà invariabile, per tutte le operazioni della schiera*

$$\sum_{h=1}^{n-m} \psi_h F_h + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij} F_{ij}, \qquad (7)$$

dove le ψ *sono funzioni arbitrarie, e le* F *sono le operazioni indipendenti rappresentate dal sistema aggiunto al dato;* la operazione generale (7) può intendersi come la operazione generica della schiera di operazioni individuate dal sistema aggiunto.

Ma la indicata condizione è anche *sufficiente* per la completa integrabilità del sistema dato, giacchè se questo ammette le operazioni (7), in forza di quanto si è detto di sopra, saranno intanto zero tutti i simboli $((i,\, j,\, r))$, e anche gli altri $[[h,\, i,\, j,\, r]]$. Tenendo allora presente la formola (5) si vede che, essendo già zero i termini della penultima riga, se il secondo membro deve ridursi, per qualunque ψ, ad una combinazione lineare delle Δ_s, a meno dei termini

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} X_{i,n-m+s,r}\left\{\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right)+\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_s\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} X_{j,n-m+s,r}\left\{\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right)+\left(\psi\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_s\right)\right\},$$

devono annullarsi separatamente i due sommatori dell'ultima riga, e a causa poi dell'arbitrarietà della ψ, e quindi delle sue derivate, devono annullarsi separatamente i coefficienti, cioè deve aversi:

$$[h,\ i,\ j,\ r]+[h,\ j,\ i,\ r]=0 \tag{8}$$

e

$$[[i,\ j,\ h,\ k,\ r]]=0. \tag{9}$$

Ora l'annullarsi identico delle (8) porta con sè immediatamente quello di tutti i simboli $[h,\ i,\ j,\ r]$; giacchè sussistendo fra questi la relazione identica

$$[h,\ i,\ j,\ r]+[i,\ j,\ h,\ r]+[j,\ h,\ i,\ r]=0, \tag{10}$$

supposto che (8) sia zero, e quindi che lo sia anche

$$[j\,i\,h\,r]+[j\,h\,i\,r]=0, \tag{11}$$

sommando il doppio di (8) con (10) e (11) si ricava

$$3\,[h,\ i,\ j,\ r]=0.$$

Dall'annullarsi di questi ne viene quello dei simboli (9).

Essendo così zero tutti i simboli (( )) e [ ], per quanto si è detto nel § 2, il sistema dato è completamente integrabile.

Si ha perciò il notevole teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di equazioni ai differenziali totali di second'ordine, sia completamente integrabile, è che esso sia invariabile per tutte le operazioni della schiera generale individuata dal sistema aggiunto al dato.

Abbiamo così l'estensione di uno dei più importanti teoremi della teoria invariantiva delle equazioni pfaffiane.

ERRATA-CORRIGE:

pag. 19, riga 6.ª, invece di: *sistema (5)*, si lègga: *sistema (6)*.

Les transformations de contact entre les éléments fondamentals de l'espace.

(*Par* E.-O. LOVETT, *à Princeton, New Jersey, États-Unis d'Amérique.*)

Le rôle capitale des notions de transformation et groupe dans la géométrie moderne mis en evidence par l'ouvrage de SOPHUS LIE et les Mémoires de MM. BIANCHI, KLEIN, POINCARÉ, et autres, est l'inspiration de ce travail qui s'occupe avec les transformations de contact entre les éléments les plus essentiels de l'espace, savoir multiplicités singulières, sphères, surfaces développables ou applicables, lignes asymptotiques et lignes de courbure, et qui, en ce qui concerne la géométrie de l'espace à plusieurs dimensions, se base sur un Mémoire recent, *Journal de M. Jordan*, 1901, où on trouve une application de la théorie de groupes finis à la construction des éléments de la géométrie euclidienne ordinaire et différentielle de l'espace à n dimensions, et une application de la théorie de groupes infinis à la théorie de la déformation de variétés euclidiennes et non-euclidiennes.

DÉFINITIONS ET MÉTHODES DE DÉTERMINATION DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT DE L'ESPACE À $n+1$ DIMENSIONS.

Un élément de surface est l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point; il a pour coordonnées les coordonnées cartésiennes (z, x_1, $x_2, \ldots, x_n$) du point et les coefficients de direction p_1, $p_2, \ldots, p_n$ du plan

$$Z - z = \sum_1^n {}_i\, p_i (X_i - x_i). \tag{1}$$

Une multiplicité d'éléments est définie par un système d'équations, entre les coordonnées z, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, p_1, $p_2, \ldots, p_n$ de l'un quelconque de ses éléments, satisfaisant à l'équation de Pfaff

$$d z - p_1 d_1 x - \cdots - p_n d x_n = 0. \tag{2}$$

Si ce système se compose de $n+1$ équations distinctes, il définit une multiplicité M_n d'éléments.

Lie dit encore que l'équation de Pfaff (2) exprime que l'élément (z, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, p_1, $p_2, \ldots, p_n$) et l'élément infiniment voisin ($z + dz$, $x_1 + d x_1, \ldots, x_n + d x_n$) sont unis. Une multiplicité est alors une famille d'éléments dans laquelle chaque élément est uni à tout élément infiniment voisin de la famille.

On dit que la transformation

$$\left.\begin{aligned} z' &= Z(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ x'_i &= X_i(z, x, p), \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ p'_i &= P_i(z, x, p), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

est une transformation de contact de l'espace à $n+1$ dimensions (z, x_1, $x_2, \ldots, x_n$) si elle laisse invariante l'équation de Pfaff (2).

Il résulte immédiatement de là que ces transformations forment un groupe et sont deux à deux inverses l'une de l'autre.

La définition des transformations de contact est susceptible de prendre une forme géométrique si l'on employe les notions de multiplicités d'éléments et d'éléments unis. On peut définir une transformation de contact comme une transformation d'éléments qui change toujours des éléments unis en éléments unis, c'est-à-dire qui transforme des multiplicités M_n en multiplicités M_n, et Lie a montré que les transformations de contact sont les seules transformations en z, x, p qui changent tout système de $n+1$ équations, satisfaisant à l'équation de Pfaff (2), en un système jouissant la même propriété.

On peut faire la détermination des formes explicites des équations définissantes d'une transformation de contact des manières suivantes:

1.° Au moyen de l'opération d'intégration en employant le théorème de Lie, Darboux et Mayer. Pour que les équations (3) définissent une transformation de contact il faut et il suffit que l'on ait une identité de la forme

$$d z - p_1 d x_1 - \cdots - p_n d x_n = \frac{1}{\rho} (d Z - P_1 d X_1 - \cdots - P_n d X_n). \tag{4}$$

Lie, Darboux et Mayer en déduisent qu'il faut et il suffit que les fonctions Z, $X_1, \ldots, X_n$, $P_1, \ldots, P_n$ soient liées par des relations identiques de la forme

$$\left.\begin{array}{l}(Z,\ X_i) = (X_i,\ X_k) = (P_i,\ X_k) = 0, \qquad (i \neq k) \\ (P_i,\ X_i) = \rho, \qquad (P_i,\ Z) = \rho\, P_i .\end{array}\right\} \tag{5}$$

2.° Au moyen des opérations de différentiation et élimination en employant le théorème de Lie qui dit en effet qu'on obtient toutes les transformations de contact en z, $x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$ en éliminant les indéterminées λ entre des équations de la forme

$$\Omega_1(z,\ x_1, \ldots,\ x_n,\ z',\ x'_1, \ldots,\ x'_n), \qquad \Omega_2(z,\ x,\ z',\ x') = 0, \ldots,$$
$$\Omega_q(z,\ x,\ z',\ x') = 0$$

$$p_i = -\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z'}},$$

$$p'_i = -\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \cdots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z'}}, \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

Pour les définitions et théorèmes précedents on peut consulter

Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, tome II.

Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, tome I.

Les transformations de contact entre les multiplicités singulières.

Entre les multiplicités des éléments de surface ils existent quelques unes qui ont la propriété que tous ses éléments sont deux à deux des éléments unis. Il est peut-être permissible de nommer telles multiplicités des éléments multiplicités singulières. On trouve trois types de ces multiplicités singulières: la famille de tous les éléments de surface d'un point, l'agrégat de tous les éléments de surface d'une ligne droite, et l'ensemble de tous les éléments de surface d'un plan. Le problème de déterminer toutes les transformations de contact qui changent les multiplicités singulières en multiplicités singulières demande qu'on détermine les catégories suivantes de transformations de contact: 1.° les transformations des points en points; 2.° les transformations qui changent les points en points et les plans en plans; 3.° les transformations qui changent les points en plans et les plans en points; 4.° les transformations des droites en droites; 5.° les transformations entre les plans.

On sait bien que la première catégorie se compose du groupe infini de toutes les transformations ponctuelles prolongées; ils sont définies par $n+1$ équations directrices entre les coordonnées ponctuelles des espaces correspondants. La deuxième catégorie consiste en le groupe fini des transformations projectives; ces transformations sont déterminées au moyen de $n+1$ équations directrices bilinéaires; on établira ces résultats connus dans la suite s'en servant d'une méthode déjà employée dans le plan (Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*). La troisième catégorie se construit de toutes les transformations dualistiques; ces transformations-ci connues se déterminent d'une équation directrice bilinéaire. La quatrième catégorie se compose des transformations des deuxième et troisième catégories, savoir des transformations projectives et dualistiques; ce résultat connue se révèle immédiatement de notre définition de multiplicité singulière. On dérive la forme et quelques propriétés de la cinquième catégorie dans les pages suivantes.

Les transformations de contact qui changent les points en points et les plans en plans.

Employons nous, pour la resolution de ce problème la méthode des transformations infinitésimales. Soit

$$U f \equiv \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1}$$

la transformation infinitésimale, où les fonctions ξ_i et ζ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ qui doivent être déterminées de façon telle que la transformation soit une plan-en-plan transformation; la condition nécessaire et suffisante pour cette détermination est que les équations aux dérivées artielles

$$p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

ne changent pas sous la transformation.

Les variations des x_j sous la transformation infinitésimale ponctuelle Uf sont

$$\delta x_j = \xi_j (x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \delta t, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

où δt est une infinitésimale arbitraire.

Pour déterminer les variations de p_i et p_{ij} il est nécessaire à construire le second prolongement

$$U'' f = Uf + \sum_1^n{}_i \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_1^n{}_i \sum{}_j \pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \tag{4}$$

de la transformation Uf. On fait cette construction de la manière suivante: — En variant l'identité

$$dz - \sum_1^n{}_i p_i \, dx_i = 0 \tag{5}$$

on a

$$d \delta z = \sum_1^n{}_i (dx_i \, \delta p_i + p_i \, d \delta x_i) ; \tag{6}$$

en substituant les valeurs (3) des variations δx_i et en observant que l'équation (6) doit exister identiquement pour toutes les valeurs des dx_i on trouve les n équations suivantes pour la détermination des variations δp_i :

$$\zeta_{x_i} + p_i \zeta_z = \delta p_i + \sum_1^n{}_j p_j (\xi_{j x_i} + p_i \xi_{j z}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

ou

$$\pi_i \equiv \delta p_i = \zeta_{x_i} + p_i \zeta_z - \sum_1^n{}_j p_j (\xi_{j x_i} + p_i \xi_{j z}). \tag{8}$$

De la même façon on varie les identités

$$dp_j = \sum_1^n{}_i p_{ij} \, dx_i \tag{9}$$

et trouve les valeurs suivantes pour les variations des p_{ij}

$$\pi_{ij} \equiv \delta p_{ij} = \tau_{i x_j} + p_j \pi_{i z} + \sum_1^n{}_j p_{ij} \pi_{i p_j} - \sum_1^n{}_j p_{ij} (\xi_{j x_j} + p_i \xi_{j z}). \tag{10}$$

Pour que la famille de tous les ∞^{n+1} plans de l'espace soit invariante sous la transformation Uf il faut que les équations

$$\pi_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

aient lieu en conséquence des équations (2); donc on a les équations de condition suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_{x_i x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \\ &\xi_{i_{zz}} = 0, \quad \xi_{i_{x_j x_j}} = 0, \quad \xi_{i_{x_j z}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad j \neq i; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\zeta_{z x_i} - \xi_{i_{x_i x_i}} = 0, \quad \zeta_{zz} - 2\xi_{i_{x_i z}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ &\zeta_{z x_i} - \xi_{j_{x_i x_j}} = 0, \quad \zeta_{zz} - \xi_{i_{x_i z}} - \xi_{j_{x_j z}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Les équations (12) demandent que la fonction ξ_i soit linéaire dans toutes les x_j avec exception de x_i, contenant aucune produit de la forme $x_j z$, où $j \neq i$. D'ailleurs les mêmes équations disent que la fonction φ est une fonction linéaire des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans termes de la forme $x_i x_j$. Donc on a

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i = \sum_1^n{}_j \varphi_j(x_i) x_j + \psi(x_i) z + \chi(x_i), \quad j \neq i; \\ &\zeta = \sum_1^n{}_j \rho_j(z) x_j + \sigma(z), \qquad j = 1, 2, \ldots, i, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

On voit aussi que l'équation

$$\rho_j = \alpha_j + \beta_j \tag{15}$$

doit avoir lieu en conséquence de l'équation

$$\zeta_{x_j zz} = 0; \tag{16}$$

et encore les équations (13) montrent que

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j(x_i) \equiv \alpha_i x_i + \gamma_i, \qquad \psi(x_i) \equiv A x_i + B, \\ &\chi(x_i) \equiv \alpha_i x_i^2 + \delta_i x_i + \theta_i, \quad \sigma(z) \equiv A z^2 + C z + D; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

donc en changeant commodément les constantes et en écrivant

$$V \equiv \sum_1^n{}_i a_i x_i + b_i, \tag{18}$$

on a enfin

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i = \sum_1^n{}_j \alpha_{ij} x_j + \beta_i z + x_i V + \gamma_i, \\ &\zeta = \sum_1^n{}_j \lambda_j x_j + \mu z + z V + \nu. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

D'après un théorème bien connu de Lie les transformations finies engendrées par la transformation ponctuelle infinitesimale (1) sont données par l'intégration du système

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dz'}{\zeta(x'_1,\, x'_2,\ldots,\, x'_n,\, z')}=\dfrac{dx'_1}{\xi_1(x'_1,\, x'_2,\ldots,\, x'_n,\, z')}=\cdots\\ \cdots=\dfrac{dz'_n}{\xi_n(x'_1,\, x'_2,\ldots,\, x'_n,\, z')}=dt,\end{array}\right\}\qquad(20)$$

avec les conditions initiales

$$x'_1=x_1,\quad x'_2=x_2,\ldots,\quad x'_n=x_n,\quad z'=z,\quad t=0;$$

ce qui donne

$$x'_1=\frac{L_1}{N},\quad x'_2=\frac{L_2}{N},\ldots,\quad x'_n=\frac{L_n}{N},\quad z'=\frac{M}{N},$$

où les fonctions L_1, $L_2,\ldots$, L_n, M, N, sont de la forme

$$\sum_1^n{}_j\, l_j\, x_j+m\, z+n\,;$$

les l_j, m, n étant des constantes quelconques.

Les transformations de contact qui changent les plans en plans ; les transformations entre surfaces développables.

Il est clair qu'on obtient la transformation de contact la plus générale entre tous les plans de l'espace à $n+1$ dimensions en formant tous les produits

$$D\, P\, D \qquad (1)$$

où D est la transformation dualistique générale et P est une transformation ponctuelle tout-à-fait arbitraire.

Pour écrire la forme analytique des transformations on peut prendre pour la transformation dualistique D sans perte de généralité la transformation généralisée de Legendre

$$X_i=p_i,\quad Z=\zeta=\sum_1^n{}_i\, p_i\, x_i-z,\quad P_i=x_i,\quad i=1,\, 2,\ldots,\, n. \qquad (2)$$

De la transformation ponctuelle arbitraire P

$$X'_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, z'), \quad Z' = \varphi_0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, z') \tag{3}$$

on deduit

$$d X'_i = \sum_1^n {}_j (\varphi_{i_{z'}} p'_j + \varphi_{i x'_j})\, d x'_j, \quad d Z' = \sum_1^n {}_j (\varphi_{0_{z'}} p'_j + \varphi_{0 x'_j})\, d x'_j; \tag{4}$$

donc

$$\sum_1^n {}_i P'_i\, d X'_i = \sum_1^n {}_i (\varphi_{0_{z'}} p'_i + \varphi_{0 x'_i})\, d x'_i = \sum_1^n {}_i P'_i \sum_1^n {}_j (\varphi_{i_{z'}} p'_j + \varphi_{i z'_j})\, d x'_j, \tag{5}$$

et encore

$$\sum_1^n {}_i P'_i (\varphi_{i_{z'}} p'_j + \varphi_{i x'_j}) = \varphi_{0_{z'}} p'_j + \varphi_{0 x'_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

La résolution de ce système des équations linéaires pour les quantités P'_i donne

$$\left.\begin{array}{l} P'_i \,|\, \varphi_{1_{z'}} p'_1{}_{x'_1} + \varphi_{1 x'_1}, \quad \varphi_{2_{z'}} p'_2 + \varphi_{2 x'_2}, \ldots, \quad \varphi_{n_{z'}} p'_n + \varphi_{n x'_n} \,| = \\ |\, \varphi_{1_{z'}} p'_1 + \varphi_{1 x'_1}, \quad \varphi_{2_{z'}} p'_2 + \varphi_{2 x'_2}, \ldots, \quad \varphi_{i-1_{z'}} p'_{i-1} + \varphi_{i-1 x'_{i-1}}, \\ \varphi_{0_{z'}} p'_i + \varphi_{0 x'_i}, \quad \varphi_{i+1_{z'}} p'_{i+1} + \varphi_{i+1 x'_{i+1}}, \ldots, \quad \varphi_{n_{z'}} p'_n + \varphi_{n x'_n} \,|. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Enfin en appliquant la transformation de Legendre aux variables originals et aux variables transformés, et en écrivant

$$M_1 \equiv (H_1, H_2, \ldots, H_n)_1, \ldots, \quad M_{n+1} \equiv (H_1, H_2, \ldots, H_n)_{n+1} \tag{8}$$

pour les mineurs de $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ du déterminant

$$\left| \frac{\partial H_1}{\partial \zeta}, \frac{\partial H_2}{\partial p_1}, \frac{\partial H_3}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H_n}{\partial p_{n-1}}, m_{n+1} \right| \tag{9}$$

nous trouvons pour les équations explicites des plan-en-plan transformations de contact

$$\left.\begin{array}{c} X_i \sum_0^n {}_j x_j (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)_{j+1} = \\ = \sum_0^n {}_j x_j (\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_n, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})_{j+1}, \\ x_0 = 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ Z = \sum_1^n {}_i X_i \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n) - \varphi_0(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n); \\ P_i = \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad \zeta = \sum_1^n {}_i p_i x'_i - z, \end{array}\right\} \tag{10}$$

où les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions arbitraires.

On observe en passant que les fonctions P_i satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$P_{ix_j} + p_j P_{i_z} \equiv P_{(ij)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \tag{11}$$

on peut vérifier ce fait soit directement par différentiation ou par la considération suivante.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre

$$p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

sont des invariants sous les transformations de contact entre les plans.

En posant

$$F^{(i)} = F_{x_i} + p_i F_z + \sum_1^n {}_j p_{ij} F_{p_j}, \tag{13}$$

en vertu des identités

$$d Z = \sum_1^n {}_i P_i d X_i, \quad d P_i = \sum_1^n {}_j P_{ij} d X_j, \tag{14}$$

on a

$$P_j^{(i)} = \sum k P_{jk} x_k^{(i)}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n; \tag{15}$$

la résolution de ce système des équations linéaires pour P_{jk} donne

$$P_{ij} = \frac{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, P_j, X_{i+1}, \ldots, X_n)}{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \frac{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{j-1} P_i, X_{j+1}, \ldots, X_n)}{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)}, \tag{16}$$

où

$$\Phi(T_1, T_2, \ldots, T_n) \equiv | T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, \ldots, T_n^{(n)} |. \tag{17}$$

Donc pour l'invariance de la famille de tous les plans de l'espace il faut que

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n) \neq 0, \\ &\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, P_j, X_{i+1}, \ldots, X_n) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \\ &\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{j+1}, P_i, X_{j+1}, \ldots, X_n) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

soient vraies pour toutes les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$; donc on a

$$\Delta \equiv | X_{(11)}, X_{(22)}, \ldots, X_{(nn)} | \neq 0, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &| X_{(11)}, X_{(22)}, \ldots, X_{(i-1\, i-1)}, P_{(jj)}, X_{(i+1\, i+1)}, \ldots, X_{(nn)} | = 0, \\ &| X_{(11)}, X_{(22)}, \ldots, X_{(j-1\, j-1)}, P_{(ii)}, X_{(j+1\, j+1)}, \ldots, X_{nn)} | = 0; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

en observant que les équations (20) sont des n systèmes des équations linéaires dont les déterminants sont le déterminant réciproque de Δ, on a

$$P_{(i1)} = 0, \quad P_{(i2)} = 0, \ldots, \quad P_{(in)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

D'ailleurs l'application de la méthode de M. Mayer à ces systèmes complets donne

$$P_i = \varphi_i(\zeta, p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

où les fonctions φ_i sont des fonctions quelconques.

Enfin on a en même temps la résolution d'un problème plus générale. En effet l'équation

$$| p_{11}, p_{22}, \ldots, p_{nn} | = 0 \tag{23}$$

doit être invariante sous les transformations entre les surfaces développables de l'espace à $n+1$ dimensions. Il est facile de vérifier que les conditions nécessaires et suffisantes sont exprimées par les équations (21); donc la famille de transformations de contact qui transforment une surface développable quelconque en une surface développable est identique à la famille de toutes les transformations de contact entre les plans.

Les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères.

Une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne est la transformation de contact connue sous le nom de transformation de Lie qui établit une liaison entre les droites et les sphères. Proposons-nous de trouver toutes les transformations de l'espace ordinaire qui changent les lignes droites en sphères. Dans le cas de trois variables x, y, z il y aura trois classes de transformation de contact suivant qu'on établit un, deux ou trois rélations entre x, y, z, X, Y, Z. Nous sommes donc conduits à déterminer les formes d'un, deux ou trois équations directrices qui sont capables de représenter droite-en-sphère transformations de contact.

Supposons qu'on parte d'une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \tag{1}$$

La droite

$$x = az + b, \quad y = cz + d \tag{2}$$

sera transformée dans la surface donnée par l'équation

$$\Phi(X,\ Y,\ Z,\ a,\ b,\ c,\ d) = 0 \tag{3}$$

que l'on obtient en éliminant z au moyen des équations

$$\Phi(a\,z + b,\quad c\,z + d,\quad z,\quad X,\ Y,\ Z) = 0,\quad \Phi_z = 0. \tag{4}$$

Pour que la transformation soit unique, il est clair que le degré de la fonction Φ par rapport au variable z doit être égal deux au plus; c'est-à-dire, la fonction Φ doit être de la forme

$$\Phi_1 x^2 + \Phi_2 y^2 + \Phi_3 z^2 + \Phi_4 y\,z + \Phi_5 z x + \Phi_6 x y + \Phi_7 x + \Phi_8 y + \Phi_9 z + \Phi_{10} = 0, \tag{5}$$

où les Φ_i sont des fonctions des variables X, Y, Z. Ainsi, en posant

$$P = a^2\,\Phi_1 + c^2\,\Phi_2 + \Phi_3 + c\,\Phi_4 + a\,\Phi_5 + a\,c\,\Phi_6, \tag{6}$$

$$Q = 2\,a\,b\,\Phi_1 + 2\,c\,d\,\Phi_2 + d\,\Phi_4 + b\,\Phi_5 + (a\,d + b\,c)\,\Phi_6 + a\,\Phi_7 + c\,\Phi_8 + \Phi_9, \tag{7}$$

$$R = b^2\,\Phi_1 + d^2\,\Phi_2 + b\,d\,\Phi_6 + b\,\Phi_7 + d\,\Phi_8 + \Phi_{10}, \tag{8}$$

la transformée de la droite (2) est la surface

$$Q^2 - 4\,P\,R = 0, \tag{9}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
& d^2\,\Phi_4^2 + b)\,\Phi_5^2 + (a\,d - b\,c)^2\,\Phi_6^2 + a^2\,\Phi_7^2 + c^2\,\Phi_8^2 + \Phi_9^2 \\
& - 4\,\Phi_1 \left\{ (a\,d - b\,c)^2\,\Phi_2 + b^2\,\Phi_3 - b\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_4 \right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + a\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_8 - a\,d\,\Phi_9 + a^2\,\Phi_{10} \right\} \\
& - 4\,\Phi_2 \left\{ d^2\,\Phi_3 + d\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_5 - c\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_7 - c\,d\,\Phi_8 + c^2\,\Phi_{10} \right\} \\
& - 4\,\Phi_3 \left\{ b\,d\,\Phi_6 + b\,\Phi_7 + d\,\Phi_8 + \Phi_{10} \right\} \\
& + 2\,\Phi_4 \left\{ b\,d\,\Phi_5 + d\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_6 + (a\,d - 2\,b\,c)\,\Phi_7 \right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - c\,d\,\Phi_8 + d\,\Phi_9 - c\,\Phi_{10} \right\} \\
& - 2\,\Phi_5 \left\{ b\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_6 + a\,b\,\Phi_7 + (2\,a\,d - b\,c)\,\Phi_8 - b\,\Phi_9 + 2\,a\,\Phi_{10} \right. \\
& - 2\,\Phi_6 \left\{ a\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_7 + c\,(a\,d - b\,c)\,\Phi_8 + (a\,d + b\,c)\,\Phi_9 - 2\,a\,c\,\Phi_{19} \right\} \\
& + 2\,\Phi_7 \left\{ a\,c\,\Phi_8 + a\,\Phi_9 \right\} + 2\,c\,\Phi_8\,\Phi_9 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Pour que cette surface soit une quadrique pour toutes les valeurs de a, b, c, d il faut que les fonctions Φ_i aient la forme

$$\Phi_i = l_i\,X + m_i\,Y + n_i\,Z + \mu_i,\quad i = 1,\ 2, \ldots,\ 10, \tag{11}$$

où les l_i, m_i, n_i, μ_i sont des constantes.

Si l'on veut que cette quadrique soit une sphère pour toutes les valeurs, de a, b, c, d, il est nécessaire que les fonctions

$$\Phi_4, \ \Phi_5, \ \Phi_6, \ \Phi_7, \ \Phi_8, \ \Phi_9 \tag{12}$$

se réduisent à des constantes absolues. Donc en introduisant les hypothèses suivantes qui n'imposent aucune restriction

$$\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = \Phi_9 = 0, \tag{13}$$

l'équation de la quadrique devient

$$(ad-bc)^2\Phi_1\Phi_2 + d^2\Phi_2\Phi_3 + b^2\Phi_3\Phi_1 + a^2\Phi_1\Phi_{10} + c^2\Phi_2\Phi_{10} + \Phi_3\Phi_{10} = 0. \tag{14}$$

Pour que cette surface-ci soit une sphère il faut et il suffit qu'on ait les relations suivantes

$$S\,l_1\,l_2 = S\,l_2\,l_3 = S\,l_3\,l_1 = S\,l_1\,l_{10} = S\,l_2\,l_{10} = S\,l_3\,l_{10}, \tag{15}$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = l_1 m_3 - l_3 m_1 = \cdots = l_1 n_2 - l_2 n_1 = \cdots = m_1 n_{10} - m_{10} n_1 = 0. \tag{16}$$

Les équations (16) sont équivalentes aux relations

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_{10} = m_1 : m_2 : m_3 : m_{10} = n_1 : n_2 : n_3 : n_{10}; \tag{17}$$

par conséquent

$$\left.\begin{array}{c} \Psi_1 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \quad \Psi_i = k_i \Psi_1, \quad i = 2, 3, \ldots, 10, \\ \Psi_j = \Phi_j - \mu_j, \quad j = 1, 2, \ldots, 10, \end{array}\right\} \tag{18}$$

et, en vertu des équations (15), on a

$$k_2 = k_3 = k_{10} = 1; \tag{19}$$

c'est-à-dire

$$\Phi_i = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 10. \tag{20}$$

Ainsi, la forme de l'équation directrice devient

$$\Phi = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 x^2 + \mu_4 = 0. \tag{21}$$

Il faudra adjoindre à cette équation pour déterminer X, Y, Z, P, Q les équations suivantes

$$\Phi_x + p\,\Phi_z = 0, \quad \Phi_4 + q\,\Phi_z = 0, \quad \Phi_x + P\,\Phi_z = 0, \quad \Phi_4 + Q\,\Phi_z = 0; \tag{22}$$

donc on trouve la forme explicite de la droite-en-sphère transformation de contact au moyen de la résolution par rapport aux X, Y, Z, P, Q du système :

$$\left.\begin{array}{c}(x + p\,z)(\alpha\,X + \beta\,Y + \gamma\,Z) + \mu_1\,x + \mu_3\,p = 0,\\ (y + q\,z)(\alpha\,X + \beta\,Y + \gamma\,Z) + \mu_2\,y + \mu_3\,q = 0,\\ (x^2 + y^2 + z^2 + 1)(\alpha\,X + \beta\,Y + \gamma\,Z) + \mu_1\,x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3\,z^2 + \mu_4 = 0,\\ \gamma\,P + \alpha = 0, \qquad \gamma\,Q + \beta = 0.\end{array}\right\} \quad (23)$$

Mais il n'est pas possible de résoudre ce système-ci par rapport aux X, Y, Z et ainsi, la fonction Φ (21) n'est pas capable de définir une transformation de contact. On conclut de là qu'il n'y a point de transformations de contact univoques déterminées par une équation directrice, qui changent les lignes droites en sphères.

On remarque, en passant, que toutes les ∞^∞ transformations de contact définies par une équation directrice de la forme

$$x\,\rho_1(X,\ Y,\ Z) + y\,\rho_2(X,\ Y,\ Z) + z\,\rho_3(X,\ Y,\ Z) + \rho_4(X,\ Y,\ Z) = 0, \quad (24)$$

transforment les lignes droites en des lignes courbes; que toutes les ∞^∞ transformations définies par une équation de la forme

$$\sigma_1(x,\ y,\ z)\,X + \sigma_2(x,\ y,\ z)\,Y + \sigma_3(x,\ y,\ z)\,Z + \sigma_4(x,\ y,\ z) = 0 \quad (25)$$

changent les lignes droites en des surfaces développables; et enfin, que les seules transformations de contact définies par une équation qui transforment les lignes droites en des lignes droites sont les ∞^{15} transformations déterminées par l'équation bilinéaire

$$(l_1\,X + m_1\,Y + n_1\,Z + \mu_1)\,x + \cdots = 0. \quad (26)$$

Les transformations (25) sont équivalentes aux transformations ponctuelles arbitraires

$$x_1 = \sigma_1(x,\ y,\ z) \mid \sigma_4(x,\ y,\ z), \ldots,\ z_1 = \sigma_3(x,\ y,\ z) \mid \sigma_4(x,\ y,\ z) \quad (27)$$

suivies de la transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0 \quad (28)$$

déterminée par l'équation directrice

$$X\,x_1 + Y\,y_1 + Z\,z_1 - 1 = 0. \quad (29)$$

Dans le cas des transformations (26) les transformations (27) sont des transformations homographiques.

Supposons maintenant qu'il existe deux relations indépendantes entre x, y, z, X, Y, Z:

$$\Omega_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \tag{30}$$

La transformation la plus générale déterminée par ces deux équations directrices changent la ligne droite

$$y + kx + m = 0, \quad z + lx + n = 0, \tag{31}$$

en la surface donnée par l'équation

$$\Omega(X, Y, Z, k, l, m, n) = 0, \tag{32}$$

que l'on obtient en éliminant x, y, z au moyen des quatre équations (30) et (31).

Pour que la ligne droite soit transformée dans une surface unique il faut que l'une des équations (30) soit linéaire par rapport aux variables x, y, z; pour que la transformée soit une quadrique il est nécessaire que l'autre équation soit linéaire dans x, y, z et que les deux équations soient linéaires par rapport aux variables X, Y, Z.

Considérons donc les ∞^{32} transformations qui sont déterminées par deux équations bilinéaires

$$x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_4 = 0, \quad x\varphi_5 + y\varphi_6 + z\varphi_7 + \varphi_8 = 0, \tag{33}$$

où

$$\varphi_i \equiv a_i X + b_i Y + c_i Z + d_i. \tag{34}$$

La transformée de la ligne droite (31) sera la surface du second degré

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_6 & \varphi_7 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_4 \\ \varphi_6 & \varphi_8 \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_7 & \varphi_8 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_5 & \varphi_6 \end{vmatrix} - \\ &\qquad - n \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_5 & \varphi_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_5 & \varphi_8 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Cette quadrique peut se réduire à une sphère pour toutes les valeurs de k, l, m, n dans les deux cas suivants:

1.° Quand tous les six déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{matrix} \right\| \qquad \psi_i \equiv \varphi_i - d_i, \tag{36}$$

se réduisent à la forme

$$\text{Const.}\,(X^2 + Y^2 + Z^2); \tag{37}$$

2.° Quand un détérminant quelconque de la matrice se réduit à la forme (37) et les fonctions φ_i correspondant aux fonctions ψ_i restant dans la matrice se réduisent à des constantes: par exemple, soient les fonctions φ_2, φ_3, φ_6, φ_7 constantes et le déterminant $\varphi_1 \psi_8 - \varphi_4 \psi_5$ de la forme (37).

Dans le premier cas nous avons deux familles de ∞^{15} droite-en-sphère transformations de contact.

En effet les équations

$$\left.\begin{aligned} & a_i a_\sigma - a_\rho a_j = b_i b_\sigma - b_\rho b_j = c_i c_\sigma - c_\rho c_j \models 0, \\ & a_i b_\sigma + b_i a_\sigma - a_\rho b_j - b_\rho a_j = 0, \\ & b_i c_\sigma + c_i b_\sigma - b_\rho c_j - c_\rho b_j = 0, \\ & c_i a_\sigma + a_i c_\sigma - c_\rho a_j - a_\rho c_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que le déterminant

$$\psi_i \psi_\sigma - \psi_\rho \psi_j \tag{39}$$

soit changé dans la forme (37) possédant les solutions symétriques

$$\left.\begin{aligned} & b_i = a_i \sqrt{-1}, \quad b_\rho = - a_\rho \sqrt{-1}, \quad b_j = \mp a_j \sqrt{-1}, \quad b_\sigma = - a_\sigma \sqrt{-1}, \\ & c_i = \pm a_\rho, \qquad c_\rho = \mp a_i, \qquad c_j = \pm a_\sigma, \qquad c_\sigma = \mp a_j\,; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

ainsi, on trouve que les deux systèmes de fonctions

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j &= a_j X + i a_j Y + c_j Z + d_j, \\ \varphi_{j+4} &= c_j X - i c_j Y - a_j Z + d_{j+4}, \qquad j = 1, 2, 3, 4\,; \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_j &= a_j X + i a_j Y - c_j Z + d_j, \\ \varphi'_{j+4} &= c_j X - i c_j Y + a_j Z + d_{j+4} = 0, \qquad j = 1, 2, 3, 4\,; \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

sont capables de définir deux familles de ∞^{15} transformations qui changent les lignes droites en sphères.

En formant les équations

$$\left.\begin{aligned} & \Omega_1 = \sum_1^4 {}_j (a_{1j} X + i a_{1j} Y + a_{2j} Z + a_{3j}) x_j = 0, \\ & \qquad\qquad x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z, \ x_4 = 1, \ i = \sqrt{-1}, \\ & \Omega_2 = \sum_1^4 {}_j (a_{2j} X - i a_{2j} Y - a_{1j} Z + a_{4j}) x_j = 0, \\ & \frac{\Omega_1^x}{\Omega_2^x} = \frac{\Omega_1^y}{\Omega_2^y} = \frac{\Omega_1^X}{\Omega_2^X} = \frac{\Omega_1^Y}{\Omega_2^Y}, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

et les équations

$$\left.\begin{aligned} \Omega_3 &= \sum_1^4{}_j (a_{1j}\,X - i\,a_{1j}\,Y + a_{2j}\,Z + a_{3j})\,x_j = 0, \\ \Omega_4 &= \sum_1^4{}_j (a_{2j}\,X + i\,a_{2j}\,Y - a_{1j}\,Z + a_{4j})\,x_j = 0, \\ &\frac{\Omega_3^x}{\Omega_4^x} = \frac{\Omega_3^y}{\Omega_4^y} = \frac{\Omega_3^X}{\Omega_4^X} = \frac{\Omega_3^Y}{\Omega_4^Y}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \omega^x &= \omega_x + p\,\omega_z, \quad \omega^y = \omega_y + q\,\omega_z, \\ \omega^X &= \omega_X + P\,\omega_Z, \quad \omega^Y = \omega_Y + Q\,\omega_Z, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

nous vérifions facilement que les transformations définies par les équations dérivées sont des transformations de contact. Nous voyons ensuite que, en particularisant les constantes des équations (43) de la manière suivante

$$\left.\begin{aligned} a_{14} = a_{21} = a_{33} = a_{42} = 1, \\ a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{43} = a_{44} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

ou les constantes des équations (44) de la manière suivante

$$\left.\begin{aligned} a_{11} = -a_{24} = a_{32} = -a_{43} = 1, \\ a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{44} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

nous avons la correspondance célèbre étudiée par Lie

$$Z\,x_1 + z_1 + X + i\,Y = 0, \qquad (X - i\,Y)\,x_1 + y_1 - Z = 0. \tag{48}$$

En combinant la transformation de Lie (48) avec toutes les droite-en-droite transformations ponctuelles du groupe projectif général

$$\left.\begin{aligned} \rho\,x_1 &= \alpha_1\,x + \beta_1\,y + \gamma_1\,z + \delta_1, & \rho\,z_1 &= \alpha_3\,x + \beta_3\,y + \gamma_3\,z + \delta_3, \\ \rho\,y_1 &= \alpha_2\,x + \beta_2\,y + \gamma_2\,z + \delta_2, & \rho\; &= \alpha_4\,x + \beta_4\,y + \gamma_4\,z + \delta_4, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

on obtient ∞^{15} droite-en-sphère transformations de contact déterminées par deux équations

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_4\,X + i\,\alpha_4\,Y + \alpha_1\,Z + \alpha_3)\,x + \cdots = 0, \\ (\alpha_1\,X - i\,\alpha_1\,Y - \alpha_4\,Z + \alpha_2)\,x + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

qui sont de la forme (43).

Donc les transformations (S) de la famille (43) se déduisent de la transformation (Λ) de LIE (48) et des transformations (Π) de groupe projectif général au moyen de l'équation symbolique

$$S = \Pi\,\Lambda. \tag{51}$$

Encore on combine la transformation de LIE avec toutes les droite-en-droite transformations de contact définies par l'équation

$$(\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + \delta_1)\,x + \cdots = 0\,; \tag{52}$$

les ∞^{15} droite-en-sphère transformations (Σ) résultantes sont déterminées par les deux équations

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1 X - i\,\alpha_1 Y + \alpha_4 Z + \alpha_2) + \cdots &= 0,\\ (\alpha_4 X + i\,\alpha_4 Y - \alpha_1 Z + \alpha_3) + \cdots &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

de la forme (44); ainsi pour les transformations (44) on a l'équation symbolique

$$\Sigma = D\,\Lambda, \tag{54}$$

où D est la transformation dualistique générale.

Revenons maintenant au deuxième cas, savoir quand un déterminant quelconque de la matrice (36) se réduit à la forme (37) et les fonctions φ_i correspondant une fonction ψ_i restant dans la matrice se réduisent a des constantes. Nous trouvons six familles de ∞^{13} transformations définies par deux équations bilinéaires de la forme

$$\left.\begin{aligned}\omega_5 = (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1)\,x &+ \\ + d_2 y + d_3 z + a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4 &= 0,\\ \omega_6 = (a_5 X + b_5 Y + c_5 Z + d_5)\,x &+ \\ + d_6 y + d_7 z + a_8 X + b_8 Y + c_8 Z + d_8 &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

où les constantes sont assujetties aux conditions

$$\left.\begin{aligned}a_1 a_8 - a_4 a_5 = b_1 b_8 - b_4 b_5 = c_1 c_8 - c_4 c_8 &\neq 0\,,\\ a_1 b_8 + a_8 b_1 - a_4 b_5 - a_5 b_4 &= 0,\\ b_1 c_8 + b_8 c_1 - b_4 c_5 - b_5 c_4 &= 0,\\ c_1 a_8 + c_8 a_1 - c_4 a_5 - c_5 a_4 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Des équations

$$\left.\begin{array}{c}\omega_5 = 0, \quad \omega_6 = 0,\\ \dfrac{\omega_5^x}{\omega_6^x} = \dfrac{\omega_5^y}{\omega_6^y} = \dfrac{\omega_5^X}{\omega_6^X} = \dfrac{\omega_5^Y}{\omega_6^Y}\end{array}\right\} \tag{57}$$

nous voyons que les transformations sont des transformations de contact.

Les droites se transforment en des points si

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = d_5 : d_6 : d_7 : d_8\,; \tag{58}$$

et en des plans, si

$$a_1 : b_1 : c_1 : a_4 : b_4 : c_4 = a_5 : b_5 : c_5 : a_8 : b_8 : c_8\,. \tag{59}$$

Nous voyons ensuite que, en particularisant les constantes de la manière suivante

$$\left.\begin{array}{l}a_4 = a_5 = c_1 = -c_8 = d_3 = d_6 = 1, \qquad b_4 = -b_5 = \sqrt{-1},\\ a_1 = a_8 = b_1 = b_8 = c_4 = c_5 = d_1 = d_2 = d_5 = d_7 = d_8 = 0\end{array}\right\} \tag{60}$$

nous avons la transformation (48) de Lie.

Enfin les valeurs des constantes

$$\left.\begin{array}{l}a_3 = a_6 = -a_8 = -c_2 = c_7 = d_4 = 1, \qquad b_3 = -b_6 = \sqrt{-1},\\ a_1 = a_4 = a_5 = b_1 = b_4 = b_5 = c_1 = c_4 = c_5 = c_8 =\\ \qquad\qquad = d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0,\end{array}\right\} \tag{61}$$

donnent la transformation de contact définie par les équations

$$(X + iY)z - Zy + 1 = 0, \qquad (X - iY)y + Zz - x = 0\,; \tag{62}$$

cette transformation est équivalente à une transformation par polaires réciproques déterminée par l'équation directrice

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 - 1 = 0 \tag{63}$$

suivie de la transformation de Lie.

Pour obtenir les formes explicites des transformations de cette famille (55) et (56) on fait un changement des constantes arbitraires et on considérait la forme quadratique

$$\begin{vmatrix} 1_1 X + 1_2 Y + 1_3 Z & 4_1 X + 4_2 Y + 4_3 Z \\ 3_1 X + 3_2 Y + 3_3 Z & 2_1 X + 2_2 Y + 2_3 Z \end{vmatrix}, \tag{64}$$

qui se réduit à la forme

$$\text{Const.}\,(X^2+Y^2+Z^2), \tag{65}$$

si les constantes soient assujetties aux conditions:

$$\left.\begin{array}{l} 1_1\,2_1-3_1\,4_1=1_2\,2_2-3_2\,4_2=1_3\,2_3-3_3\,4_2\neq 0,\\ 1_1\,2_2+1_2\,2_1-3_1\,4_2-3_2\,4_1=0,\\ 1_2\,2_3+1_3\,2_2-3_2\,4_3-3_3\,4_3=0,\\ 1_3\,2_1+1_1\,3_2-3_3\,4_1-3_1\,4_3=0. \end{array}\right\} \tag{66}$$

À cause de la symétrie et de l'invariance de ces équations-ci sous les substitutions

$$(1\,2\,3\,4):(2\,1\,4\,3);\quad (1\,2\,3\,4):(4\,3\,2\,1);\quad (1\,2\,3\,4):(3\,4\,1\,2);$$

et sous une permutation cyclique des indices, il est nécessaire à considérer seulement les quarante cinq cas suivants des sept cent quatre-vingt douze manières à choisir sept constantes arbitraires:

1.° cas: Soient les quantités

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 3_1,\ 4_1,\ 4_2,\ 4_3$$

des constantes tout-à-fait arbitraires; les équations de condition sont linéaires et les cinq constantes restantes sont des fonctions suivantes des constantes données

$$2_1=3_1\,4_1\,\Delta,\quad 2_2=3_1\,4_2\,\Delta,\quad 2_3=3_1\,4_3\,\Delta,\quad 3_2=3_1\,1_2\,\Delta,\quad 3_3=3_1\,1_3\,\Delta,$$

où

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 4_1 & -1_3 & 0 & -1 \\ 4_1 & 0 & -1_2 & 1_1 & 0 \\ 4_2 & 0 & 1_1 & -1_2 & 0 \\ 4_2 & -4_3 & 0 & 1_2 & 1_3/1_1 \\ 4_3 & 4_2 & 0 & -1_3 & -1_2/1_1 \end{vmatrix}$$

2.° cas: Supposons que les constantes

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 3_1,\ 3_2,\ 3_3,\ 4_1$$

aient des valeurs arbitraires; on construit immédiatement les formes des inconnues en remarquant que ce cas-ci se déduit du premier cas par la substitution

$$(3_1\,3_2\,3_3\,4_1\,4_2\,4_3):(4_1\,4_2\,4_3\,3_1\,3_2\,3_3).$$

3.° cas: Soient

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 2_1,\ 2_2,\ 2_3,\ 4_1$$

les données; en posant

$$\alpha = 1_1\,2_2 + 1_2\,2_1, \qquad \beta = 1_2\,2_3 + 1_3\,2_2, \qquad \gamma = 1_3\,2_1 + 1_1\,2_3,$$

$$\delta = 1_2\,2_2 - 1_1\,2_1, \qquad \varepsilon = 1_3\,2_2 - 1_3\,2_3, \qquad \zeta = 4_1,$$

on trouve

$$3_1 = \frac{\alpha\xi - \delta\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}, \qquad 3_2 = \frac{\alpha\zeta + \delta\xi}{\xi^2 + \zeta^2},$$

$$3_2 = \frac{\gamma(\alpha\zeta + \delta\xi) - \beta(\alpha\xi - \delta\zeta)}{\zeta(\alpha\zeta + \delta\xi) - \xi(\alpha\xi - \delta\zeta)}, \qquad 4_3 = \frac{(\beta\zeta - \gamma\xi)(\xi^2 + \zeta^2)}{\alpha\zeta^2 + 2\delta\xi\zeta - \alpha\xi^2},$$

où $\xi \equiv 4_2$ est une racine de l'équation du sixième degré

$$\rho_0 x^6 + \zeta\alpha\rho_1 x^5 + \zeta^2\rho_2 x^4 + \zeta^3\alpha\rho_3 x^3 + \zeta^4\rho_4 x^2 + \zeta^5\alpha\rho_5 x + \zeta^6\rho_6 = 0,$$

où

$$\rho_0 = \alpha^2(\delta - \varepsilon) - \gamma(\alpha\beta - \gamma\delta), \qquad \rho_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\,\delta(\delta - \varepsilon),$$

$$\rho_2 = \alpha^2(\varepsilon - 6\,\delta) - 3\,\alpha\beta\gamma - (\beta^2 - 2\,\gamma^2)\,\delta + 4\,\delta^2(\delta - \varepsilon),$$

$$\rho_3 = 2(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + 4\,\delta^2), \qquad \rho_4 = \alpha^2(\varepsilon + 5\,\delta) - 3\,\alpha\beta\gamma - (2\,\beta^2 - \gamma^2)\,\delta - 4\,\delta^2\varepsilon,$$

$$\rho_5 = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - 3\,\delta\varepsilon, \qquad \rho_6 = -\alpha^2\varepsilon - \beta^2\delta - \alpha\beta\gamma.$$

4.° cas: Les données sont

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 2_1,\ 2_2,\ 3_1,\ 3_2;$$

nous avons

$$4_1 = \frac{1_1\,2_1\,3_1 - 1_2\,2_2\,3_1 + 1_1\,2_1\,3_2}{3_1^2 + 3_2^2}, \qquad 4_2 = \frac{1_1\,2_1\,3_1 - 1_1\,2_1\,3_2 + 1_2\,2_2\,3_2}{3_1^2 + 3_2^2},$$

la quantité 4_3 est une racine de l'équation quadratique

$$l\,x^2 + m\,x + n - 0$$

où

$$l = 1_2\,1_3\,(3_1^2 + 3^2)(1_1\,3_2 - 1_2\,3_1),$$

$$m = (3_1^2 + 3_2^2)\,\{1_2^2\,1_3^2\,(3_1^2\,2_1 + 2\,2_2\,3_1\,3_2 + 3_2^2\,2_1) - 2\,1_1\,1_2\,1_3^2\,(2_1\,3_1\,3_2 + 2_2\,3_2)\},$$

$$
\begin{aligned}
n = 1_{113} \{ & (1_{12}\, 2_{11} - 1_{33}\, 2_{12})(3_{111} - 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) \} \\
- 1_{123} \{ & (1_{12}\, 2_{11} - 1_{33}\, 2_{12})(3_{111} + 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) + \\
& + 1_{12}\, 2_{12} (3_{111} - 3\, 3_{112} - 3_{122} - 3_{222}) + \\
& + 2_{22} (1_{22} + 1_{33})\, 3_{112} + 1_{11}\, 2_{11}\, 3_{122} + 1_{22}\, 1_{33}\, 3_{222} \} \\
- 1_{223} \{ & (1_{22}\, 2_{22} - 3\, 1_{12}\, 2_{12} + 1_{33}\, 2_{22})\, 3_{111} + 2\, 1_{11}\, 2_{11}\, 3_{112} + \\
& + (1_{11}\, 2_{11} - 1_{12}\, 2_{12} + 1_{33}\, 2_{22})\, 3_{122} \} \\
- 1_{333} \{ & (1_{12}\, 2_{11} - 1_{11}\, 2_{12})(3_{111} - 3_{112} + 3_{122} - 3_{222}) + \\
& + (1_{22}\, 2_{12} - 1_{12}\, 2_{22})(3_{112} + 3_{222}) \},
\end{aligned}
$$

$$k_{lmn} = k_l\, k_m\, k_n\,;$$

enfin les paramètres

$$2_3 = \theta, \qquad 3_3 = \varphi$$

sont données par les équations

$$(1_{23}\, \xi - 1_{31}\, \eta)\, \varphi = 1_{33} (1_2\, 2_1 - 1_1\, 2_2) + (1_{13}\, 3_2 - 1_{23}\, 3_1)\, \zeta,$$

$$1_1\, \theta = 3_1\, \zeta + \xi\, \varphi + 1_3\, 2_1\,,$$

où

$$\xi = 4_1, \qquad \eta = 4_2, \qquad \zeta = 4_3\,.$$

5.° cas: On cherche les valeurs des constantes

$$2_1,\ 2_2,\ 2_3,\ 3_3,\ 4_3$$

comme fonctions des constantes

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 3_1,\ 3_2,\ 4_1,\ 4_2;$$

on trouve

$$2_1 = \xi = \frac{1_1 (3_1\, 4_1 - 3_2\, 4_2) + 1_2 (3_1\, 4_2 + 3_2\, 4_1)}{1_1^2 + 1_2^2},$$

$$2_2 = \eta = \frac{1_1 (3_1\, 4_2 + 3_2\, 4_1) - 1_2 (3_1\, 4_1 - 3_2\, 4_2)}{1_1^2 + 1_2^2},$$

en substituant ces valeurs dans les équations

$$(3_1\, 4_2 - 3_2\, 4_1)\, \theta = \begin{vmatrix} 1_2\, \zeta + 1_3\, \eta & 3_2 \\ 1_1\, \zeta + 1_3\, \xi & 3_1 \end{vmatrix},$$

$$(3_1\, 4_2 - 3_2\, 4_1)\, \varphi = \begin{vmatrix} 4_2 & 1_2\, \zeta + 1_3\, \eta \\ 4_1 & 1_1\, \zeta + 1_3\, \xi \end{vmatrix},$$

on a $\theta = 3_3$, et $\varphi = 4_3$ en des fonctions de $\zeta = 2_3$; enfin l'équation

$$\varphi\,\theta + 1_2\,\eta - 1_3\,\zeta - 3_2\,4_2 = 0$$

devient une équation quadratique en ζ

$$\lambda\,\zeta^2 + \mu\,\zeta + \nu = 0,$$

où

$$\lambda = (1_2\,3_1 - 1_1\,3_2)(1_1\,4_2 - 1_2\,4_1), \qquad \nu = (1_2\,\eta - 3_2\,4_2)(3_1\,4_2 - 3_2\,4_1)^2,$$

$$\mu = (1_3\,4_2\,\xi - 1_3\,4_1\,\eta)(1_2\,3_1 - 1_1\,3_2) - (1_1\,4_2 - 1_2\,4_1)(1_3\,3_2\,\xi - 1_3\,3_1\,\eta) -$$
$$- 1_3\,(3_1\,4_2 - 3_2\,4_1)^2.$$

6.° cas: Pour déterminer

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 3_3, \quad \theta = 4_3, \quad \varphi = 2_3$$

en fonctions des autres coefficients il suffit d'observer que ce cas-ci se déduit du cas 4.° par la substitution

$$(\theta\,\varphi\,3_1\,3_2) : (\varphi\,\theta\,4_1\,4_2).$$

7.° cas: Il s'agit de trouver

$$\xi = 4_1, \quad \eta = 4_2, \quad \zeta = 4, \quad \theta = 2_3, \quad \varphi = 3_1$$

en termes des autres constantes; il parait que φ est une racine de la cubique

$$a\,\varphi^3 + b\,\varphi^2 + c\,\varphi + d = 0,$$

où

$$a = 2_2\,3_2\,(1_{22} + 1_{33}), \quad b = -3_2\,\{2_1\,3_2\,(1_{22} + 1_{33}) + 2\,1_{12}\,2_2\,3_2 + 2\,1_{13}\,2_2\,3_3\},$$

$$c = 3_{222}\,(1_{11}\,2_2 + 1_1\,2_1) + 3_{22}\,(1_{13}\,2_1\,2_3 - 1_{23}\,2_2\,3_3 - 1_{12}\,2_2 - 1_{22}\,2_1) +$$
$$+ 3_2\,(1_{11}\,2_2\,3_{33} + 1_{22}\,2_2\,3_{33} - 1_{13}\,2_2\,3_3 - 1_{23}\,2_1\,3_3),$$

$$d = 1_3\,2_1\,3_{222}\,(1_2\,3_3 - 1_3\,2_2) + 1_1\,3_{22}\,(3_{22} + 3_{33})\,(1_2\,2_2 - 1_1\,2_1) -$$
$$- 3_{22}\,3_3\,(1_1\,2_2 + 1_2\,2_1)\,(1_2\,3_3 - 1_3\,3_2) -$$
$$- 3_{22}\,(1_2\,2_2 - 1_1\,2_1)\,(1_2\,3_2 + 1_3\,3_3)\,;$$

et que

$$\eta = \frac{3_2\,(1_2\,2_2 - 1_1\,2_1) + (1_1\,2_2 + 1_2\,2_1)\,\varphi}{3_{22} + \varphi^2}, \qquad \xi = \frac{1_1\,2_2 + 1_2\,2_1 - \varphi\,\eta}{3_2},$$

$$\theta = \frac{(3_{22} + 3_{33})\,\eta - 2_2\,(1_2\,3_2 + 1_3\,3_3)}{1_2\,3_3 - 1_3\,3_2}, \qquad \zeta = \frac{(1_2\,3_2 + 1_3\,3_3)\,\eta - 2_2\,(1_{22} + 1_{33})}{1_2\,3_3 - 1_3\,3_2}.$$

8.° cas: Les constantes

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 2_2,\ 2_3,\ 3_1,\ 3_2$$

sont données; la solution de ces cas se construit du cas précédent au moyen de la substitution

$$(1_1\, 2_1\, 3_1\, 1_3\, 2_3\, 3_3) : (1_3\, 2_3\, 3_3\, 1_1\, 1_2\, 1_3).$$

9.° cas: Pour exprimer les constantes

$$\xi = 2_1,\quad \eta = 2_2,\quad \zeta = 2_3,\quad \theta = 3_3,\quad \varphi = 4_1$$

en fonctions des autres coefficients on remarque que les équations

$$1_1\,\xi - 1_2\,\eta = 3_1\,\varphi + 3_2\,4_2,$$
$$1_2\,\xi + 1_1\,\eta = 3_2\,\varphi + 3_1\,4_2,$$

déterminent ξ et η en fonctions linéaires de φ; ensuite les équations

$$1_3\,\zeta - 4_1\,\theta = 1_1\,\xi - 3_1\,\varphi, \qquad 1_2\,\zeta - 4_2\,\theta = 1_3\,\eta - 3_2\,4_3,$$

donnent ζ et θ en fonctions linéaires de φ; enfin l'équation

$$\theta\,\varphi - 1_3\,\xi - 1_1\,\zeta + 3_1\,4_3 = 0$$

devient une quadratique pour φ.

10.° cas: Supposons que

$$1_1,\ 1_2,\ 1_3,\ 3_2,\ 3_3,\ 4_1,\ 4_2$$

soient des constantes arbitraires; les valeurs des coefficients

$$\xi = 2_1,\quad \eta = 2_2,\quad \zeta = 2_3,\quad \theta = 3_1,\quad \varphi = 4_3$$

se trouvent de la solution du cas 9.° par la substitution

$$(\theta\,\varphi\, 3_1\, 3_2\, 4_2\, 4_3) : (\varphi\,\theta\, 4_1\, 4_2\, 3_2\, 3_3).$$

11.° cas: Il faut qu'on trouve les expressions qui expriment les constantes

$$\xi = 3_1,\quad \eta = 3_2,\quad \zeta = 3_3,\quad \theta = 4_3,\quad \varphi = 2_1$$

en fonctions des autres paramètres; les formules cherchées se déduisent de la solution du cas 7.° au moyen de la substitution

$$(\xi\,\zeta\,\theta\,\varphi\, 1_1\, 1_3\, 2_1\, 2_3\, 3_2\, 3_3\, 4_1\, 4_2) : (\zeta\,\xi\,\varphi\,\theta\, 1_3\, 1_1\, 2_3\, 2_1\, 4_2\, 4_1\, 3_3\, 3_2).$$

12.° cas: On demande les formes des paramètres

$$\xi = 3_1,\quad \eta = 3_2,\quad \zeta = 3_3,\quad \theta = 4_1,\quad \varphi = 2_3$$

en fonctions des autres coefficients; la solution se dérive du cas 11.° au moyen de la substitution

$$(\xi\,\zeta\,1_1\,1_3\,2_3\,4_1\,4_2):(\zeta\,\xi\,1_3\,1_1\,2_1\,4_3\,4_2).$$

13.° cas: Des cinq inconnues

$$\xi = 3_2,\quad \eta = 3_3,\quad \zeta = 2_2,\quad \theta = 2_3,\quad \varphi = 4_3,$$

les paramètres ξ et ζ sont déterminées par les équations

$$4_2\,\xi - 1_2\,\zeta = 3_1\,4_1 - 1_1\,2_1,\qquad 4_1\,\xi - 1_1\,\zeta = 3_1\,4_2 - 1_2\,2_1;$$

les constantes φ et η sont données en fonctions linéaires de θ des équations

$$\xi\,\varphi + 4_2\,\eta = 1_2\,\theta + 1_3\,\zeta,\qquad 3_1\,\varphi + 4_1\,\eta = 1_1\,\theta + 1_3\,2_1;$$

enfin l'équation

$$\varphi\,\eta - 4_2\,\xi + 1_2\,\zeta - 1_3\,\theta = 0$$

est une quadratique pour θ.

14.° cas: Il s'agit d'exprimer les coefficients

$$\xi = 3_2,\quad \eta = 3_3,\quad \zeta = 2_1,\quad \theta = 2_3,\quad \varphi = 4_3$$

en termes des autres coefficients; la solution est simple: les équations

$$4_2\,\xi + 1_1\,\zeta - 1_2\,2_2 - 3_1\,4_1 = 0,\qquad 4_1\,\xi + 1_2\,\zeta + 1_1\,2_2 - 3_1\,4_2 = 0,$$

déterminent ξ et ζ; les équations

$$\xi\,\varphi + 4_2\,\eta - 1_2\,\theta - 1_3\,2_2 = 0,\qquad 3_1\,\varphi + 4_1\,\eta - 1_1\,\theta - 1_3\,\zeta = 0,$$

donnent φ et η en fonctions de θ; et l'équation

$$\varphi\,\eta - 4_2\,\xi - 1_3\,\theta + 1_2\,2_2 = 0$$

devient une quadratique pour θ.

15.° cas: Les paramètres ξ et θ des cinq paramètres inconnus

$$\xi = 2_2,\quad \eta = 2_3,\quad \zeta = 3_1,\quad \theta = 3_2,\quad \varphi = 4_3$$

se déterminent en fonctions linéaires de ζ au moyen des équations

$$1_2\,\xi - 4_2\,\theta = 4_1\,\zeta - 1_1\,2_1,\qquad 1_1\,\xi - 4_1\,\theta = 4_2\,\zeta - 1_2\,2_1;$$

les constantes η et φ sont des fonctions linéaires fractionelles des équations

$$1_3\,\eta - 3_3\,\varphi = 1_1\,2_1 - 4_1\,\zeta,\qquad 1_1\,\eta - \zeta\,\varphi = 3_1\,4_1 - 1_3\,2_1;$$

enfin l'équation

$$1_3\,\xi + 1_2\,\eta - \theta\,\varphi - 3_3\,4_2 = 0$$

est une quadratique pour ζ.

16.° cas: La solution de ce cas, savoir

$$\xi = 1_2, \quad \eta = 1_3, \quad \zeta = 3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3,$$

est une conséquence immédiate du cas 13.° et de la substitution

$$(\xi\,\eta\,\zeta\,\theta\,1_1\,1_2\,1_3\,2_1) : (\zeta\,\theta\,\xi\,\eta\,2_1\,2_2\,2_3\,1_1).$$

17.° cas: On cherche

$$\xi = 3_2, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 1_1, \quad \varphi = 4_3$$

en fonctions des autres constantes et on trouve ξ et θ des équations linéaires

$$4_2\,\xi + 2_1\,\theta = 1_2\,2_2 + 3_1\,4_1, \qquad 4_1\,\xi - 2_2\,\theta = 1_2\,2_1 - 3_1\,4_2;$$

les équations

$$4_2\,\eta + \xi\,\varphi = 2_2\,\zeta + 1_2\,2_3, \qquad 4_1\,\eta + 3_1\,\varphi = 2_1\,\zeta + 2_3\,\theta$$

deviennent des équations linéaires par rapport aux ζ, η, φ et elles déterminent η et φ en fonctions linéaires de ζ; enfin l'équation

$$\varphi\,\eta + 4_2\,\xi - 2_3\,\zeta + 1_2\,2_2 = 0$$

est une quadratique pour ζ.

18.° cas: Les équations

$$2_1\,\zeta - 2_2\,\theta = 3_1\,4_1 - 4_2\,\xi, \qquad 2_2\,\zeta + 2_1\,\theta = 3_1\,4_2 + 4_1\,\xi,$$

expriment ζ et θ des cinq quantités

$$\xi = 3_2, \quad \eta = 3_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_2, \quad \varphi = 4_3,$$

en fonctions linéaires de ξ; les paramètres η et φ sont déterminées en fonctions linéaires fractionnelles de ξ par les équations

$$4_2\,\eta + \xi\,\varphi - 2_3\,\theta - 1_3\,2_2 = 0, \qquad 4_1\,\eta + 3_1\,\varphi - 2_3\,\zeta - 1_3\,2_1 = 0;$$

et ξ est une racine de l'équation quadratique

$$\varphi\,\eta + 2_2\,\theta - 4_2\,\xi - 1_3\,2_3 = 0.$$

19.° cas: Les constantes arbitraires sont

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_2, \quad \theta = 1_3, \quad \varphi = 4_3;$$

ζ est une fonction linéaire de ξ donnée par l'équation

$$2_1\zeta + 1_1\xi - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0\,;$$

ξ est une solution de l'équation quadratique

$$\xi\zeta - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 - 3_2 4_2 = 0\,;$$

les équations

$$1_1\eta - 3_1\varphi = 3_3 4_1 - 2_1\theta, \qquad \zeta\eta - 3_2\varphi = 3_3 4_2 - \xi\theta,$$

déterminent η et φ en fonctions linéaires de θ; enfin l'équation

$$\eta\theta - 3_3\varphi - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 = 0$$

est une quadratique en θ.

20.° cas: Les constantes

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_3, \quad \varphi = 4_3$$

s'expriment en fonction des sept autres paramètres en observant que l'équation

$$1_2\xi - 2_1\zeta + 3_1 4_1 - 3_2 4_2 = 0$$

détermine ξ en fonction linéaire de ζ; que l'équation

$$\xi\zeta + 1_2 2_1 - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0$$

est une quadratique en ζ; que les paramètres η et θ sont des fonctions linéaires de φ des équations

$$\xi\theta + 1_2\eta = 3_2\varphi + 3_3 4_2, \qquad \zeta\eta + 2_1\theta = 3_1\varphi + 3_3 4_1,$$

et enfin que l'équation

$$\eta\theta - 1_2\xi - 3_3\varphi + 3_2 4_2 = 0$$

devient une quadratique en φ.

21.° cas: On obtient les formules pour les valeurs de

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_1, \quad \theta = 1_2, \quad \varphi = 4_3$$

de la manière suivante: l'équation

$$2_1\zeta - \xi\theta - 3_1 4_1 + 3_2 4_2 = 0$$

donne ζ en fonction linéaire de $\xi\theta$; de l'équation

$$\xi\zeta + 2_1\theta - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0$$

on voit que θ est une fonction dont le numérateur est une fonction linéaire, et le dénominateur une fonction quadratique, de ξ; maintenant on remarque que ζ devient une fonction de ξ de la même forme que la fonction θ; en substituant ces valeurs de ζ et θ dans les équations

$$1_3\,\eta - 3_3\,\varphi - \xi\,\theta + 3_2\,4_2 = 0, \qquad \theta\,\eta - 3_2\,\varphi + 1_3\,\xi - 3_3\,4_2 = 0$$

on trouve pour η une cubique fonction de ξ sur une fonction quadratique de ξ, et pour φ une quintique en ξ sur une fonction quartique de ξ; enfin ξ est une racine de l'équation du cinquième degré

$$\eta\,\zeta - 3_1\,\varphi + 1_3\,2_1 - 3_3\,4_1 = 0.$$

22.° cas: Des paramètres

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 4_1, \quad \theta = 4_2, \quad \varphi = 2_1,$$

ζ est une fonction linéaire de ξ donnée par l'équation

$$3_3\,\zeta + 4_3\,\xi - 1_3\,2_1 - 1_1\,2_3 = 0;$$

ξ est une racine de l'équation quadratique

$$\xi\,\zeta + 1_3\,2_3 - 1_1\,2_1 - 3_3\,4_3 = 0;$$

η et θ sont des fonctions linéaires de φ données par les équations

$$\zeta\,\eta - 1_1\,\varphi + \xi\,\theta - 1_2\,2_1 = 0, \qquad 4_3\,\eta - 1_3\,\varphi + 3_3\,\theta - 1_2\,2_3 = 0;$$

et φ est une racine de la quadratique

$$\eta\,\theta - 1_2\,\varphi + 1_3\,2_3 - 3_3\,4_3 = 0.$$

23.° cas: Les systèmes des équations pour déterminer les paramètres

$$\xi = 3_1, \quad \eta = 3_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 4_2,$$

est linéaire; ζ est égale

$$\frac{3_1\,4_1 - 3_3\,4_3 + 1_3\,2_3}{1_1};$$

ξ est donnée de l'équation

$$4_3\,\xi = 1_3\,\zeta + 1_1\,2_3 - 3_3\,4_1;$$

enfin η, θ, φ sont des solutions du système linéaire

$$1_1\,\theta - 3_1\,\varphi - 4_1\,\eta + 1_2\,\zeta = 0, \qquad 1_2\,\theta - 3_2\,\varphi - 1_3\,2_3 + 3_3\,4_3 = 0,$$
$$1_3\,\theta - 3_3\,\varphi - 4_3\,\eta + 1_2\,2_3 = 0.$$

24.° cas: On détermine les paramètres

$$\xi = 4_1, \quad \eta = 4_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 3_2$$

de la manière suivante: ξ et ζ sont solutions des équations

$$3_1 \xi - 1_1 \zeta = 3_3 4_3 - 1_3 2_3, \qquad 3_3 \xi - 1_3 \zeta = 1_1 2_3 - 3_1 4_3;$$

φ et η sont fonctions linéaires de θ données par les équations

$$1_1 \theta + 1_2 \zeta - 3_1 \eta - \varphi \xi = 0, \qquad 1_3 \theta - 4_3 \varphi - 3_3 \eta + 1_2 2_3 = 0;$$

et θ est une racine de la quadratique

$$\varphi \eta - 1_2 \theta + 1_3 2_3 - 3_3 4_3 = 0.$$

25.° cas: Il s'agit d'exprimer

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 3_1, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3,$$

en fonction des autres paramètres; les équations

$$1_1 \xi - 4_1 \zeta - 1_2 \eta + 4_2 \theta = 0, \qquad 1_2 \xi + 1_1 \eta - 4_2 \zeta - 4_1 \theta = 0$$

déterminent ξ et ζ en fonctions linéaires de η et θ; on substitue ces valeurs de ξ et ζ dans l'équation

$$\varphi \zeta - 1_3 \xi - 1_1 2_3 + 3_3 4_1 = 0,$$

et on élimine $\varphi \theta$ au moyen de l'équation

$$\varphi \theta - 1_3 \eta - 1_2 2_3 + 3_3 4_2 = 0;$$

l'équation résultante et l'équation

$$1_2 \eta - 4_2 \theta + 3_3 \varphi - 1_3 2_3 = 0$$

donnent φ et θ en fonction de η; enfin l'équation

$$\varphi \theta - 1_3 \eta - 1_2 2_3 + 3_3 4_2 = 0$$

devient une quadratique en η.

26.° cas: Les formes des paramètres

$$\xi = 1_1, \quad \eta = 1_2, \quad \zeta = 3_1, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3$$

en fonction des autres constantes se déduisent du cas 25.° par la substitution

$$(1_1\, 1_2\, 1_3\, 2_3) : (2_1\, 2_2\, 2_3\, 1_3).$$

27.° cas: Pour obtenir les paramètres

$$\xi = 1_1, \quad \eta = 1_2, \quad \zeta = 2_1, \quad \theta = 2_2, \quad \varphi = 4_3,$$

il est nécessaire de résoudre le système des équations

$$\text{(i)}\ \xi\zeta - \eta\theta - 3_1 4_1 + 3_2 4_2 = 0, \qquad \text{(ii)}\ \eta\theta + 3_3\varphi - 1_3 2_3 - 3_2 4_2 = 0,$$

$$\text{(iii)}\ \xi\theta + \eta\zeta - 3_1 4_2 - 3_2 4_1 = 0, \qquad \text{(iv)}\ 2_3\eta + 1_3\theta - 3_2\varphi - 3_3 4_2 = 0,$$

$$\text{(v)}\ 2_3\xi + 1_3\zeta - 3_1\varphi - 3_3 4_1 = 0;$$

des équations (ii) et (iv) on a

$$\eta\theta + a\eta + b\theta - c = 0;$$

des équations (i), (ii) et (iv) on trouve

$$\xi\zeta + e\xi + f\zeta - k = 0;$$

pour l'équation (iii) on peut écrire

$$\xi\theta + \eta\zeta - l = 0;$$

les équations (iv) et (v) donnent

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \rho\theta + \sigma = 0;$$

de ce système il résulte que η et ζ sont déterminées par les équations quartiques

$$(a\eta - c)(f\zeta - k) + (\eta\zeta - l)(\eta + b)(\zeta + e) = 0,$$
$$\lambda(f\zeta - k)(\eta + b) + \rho(a\eta - c)(\zeta + e) - (\mu\eta + \nu\zeta + \sigma)(\eta + b)(\zeta + e) = 0.$$

28.° cas: Les équations pour déterminer

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3$$

demandent que

$$\xi = \frac{1_2 2_2 - 3_2 4_2 + 3_1 4_1}{1_1} = \frac{3_1 4_2 + 3_2 4_1 - 1_1 2_2}{1_2};$$

donc toutes les sept paramètres

$$1_1, \ 1_2, \ 2_2, \ 3_1, \ 3_2, \ 4_1, \ 4_2$$

ne peuvent pas être arbitraires.

29.° cas: Les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_3$$

on trouve de la manière suivante: le système à résoudre est

$$a\xi + b\eta + c\theta - k = 0, \quad b\xi + a\eta + h\theta - l = 0, \quad f\zeta + g\varphi + e\eta - k = 0,$$
$$\eta\zeta + j\varphi - m = 0, \quad \xi\zeta - \varphi\theta - n = 0;$$

la cinquième équation devient la quadratique

$$\begin{aligned} &\{ lj(hb - ac) + e(bk - al) + k(b^2 - a^2) \} \eta^2 \\ &+ \{ (ac - bh)(jk - gm) - ej(hk - cl) + fm(b^2 - a^2) - \\ &\qquad - k(al - bk) + gn(ah - bc) \} \eta \\ &+ (hk - c)(jk - gm) - fm(al - bk) - nj(ah - bc) = 0 \end{aligned}$$

en substituant les fonctions ξ, θ, ζ, et φ de η déduites des autres équations.

30.° cas: Des cinq paramètres

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3,$$

ξ et θ se déterminent par les équations

$$1_2\xi - 4_2\theta - 1_1 2_1 + 3_1 4_1 = 0, \qquad 1_1\xi - 4_1\theta + 1_2 2_1 - 3_1 4_2 = 0;$$

et les trois équations

$$\xi\zeta - \varphi\theta + 1_2\eta - 3_3 4_2 = 0, \qquad 1_1\eta + 2_1\zeta - 3_1\varphi - 3_3 4_1 = 0,$$
$$\zeta\eta - 1_2\xi + 4_2\theta - 3_3\varphi = 0,$$

donnent une quadratique pour φ.

31.° cas: La solution de ce cas, c'est-à-dire la détermination des formes de

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_1,$$

suivit immédiatement du cas précédent au moyen de la substitution

$$(\theta\, \varphi\, 1_1\, 1_2\, 2_1\, 3_1\, 3_3\, 4_1\, 4_2) : (\varphi\, \theta\, 1_2\, 1_1\, 2_3\, 4_2\, 4_3\, 3_2\, 3_1).$$

32.° cas: Le système des équations pour trouver

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_2$$

en fonction des autres paramètres est

$$1_1\xi - 1_2\eta + 3_2\varphi - 3_1 4_1 = 0, \qquad 1_2\xi + 1_1\eta - 3_1\varphi - 3_2 4_1 = 0,$$
$$1_2\eta - 2_3\zeta + 4_3\theta - 3_2\varphi = 0,$$
$$\eta\zeta - \theta\varphi + 1_2 2_3 - 3_2 4_3 = 0, \qquad \xi\zeta - 4_1\theta + 1_1 2_3 - 3_1 4_3 = 0;$$

on voit sans difficulté qu'on a

$$\eta = L_1(\xi), \quad \varphi = L_2(\xi), \quad \zeta = \frac{L_3(\xi)}{L_4(\xi)}, \quad \theta = \frac{Q_1(\xi)}{L_4(\xi)},$$

où L est une abbreviation de fonction linéaire et Q est une abbreviation de fonction quadratique; enfin ξ est déterminée par l'équation cubique:

$$L_1(\xi)\, L_3(\xi) - L_2(\xi)\, Q_1(\xi) - c\, L_4(\xi) = 0.$$

33.° càs: Supposons que les constantes soient

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_1;$$

les équations

$$\zeta\eta + 1_2\, 2_3 - 3_2\, 4_3 - 3_3\, 4_2 = 0, \qquad 2_3\, \zeta - 1_2\, \eta + 3_2\, 4_2 - 3_3\, 4_3 = 0,$$

donnent deux valeurs à chacune des paramètres ζ et η; les quantités θ et φ s'expriment en fonction de ξ par les équations

$$1_1\, \eta + 1_2\, \xi - 4_2\, \theta - 3_2\, \varphi = 0, \qquad \xi\zeta - 4_3\, \theta - 3_3\, \varphi + 1_1\, 2_3 = 0;$$

et l'équation

$$\varphi\theta - 1_1\, \xi + 1_2\, \eta - 3_2\, 4_2 = 0$$

est une quadratique en ξ.

34.° cas: Quelles fonctions des autres paramètres doivent être les constantes

$$\xi = 2_4, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_1?$$

Des équations

$$1_2\, \xi - 4_2\, \theta + 3_1\, \varphi - 1_1\, 2_1 = 0, \qquad 1_1\, \xi - \varphi\theta + 1_2\, 2_1 - 3_1\, 4_2 = 0,$$

on écrit les formes suivantes de ξ et θ:

$$\xi = Q_1(\varphi) \mid L_2(\varphi), \qquad \theta = L_1(\varphi) \mid L_2(\varphi);$$

des équations

$$\xi\zeta + 1_2\, \eta - 4_3\, \theta - 3_3\, 4_2 = 0, \qquad 1_1\, \eta + 2_1\, \zeta - 3_3\, \varphi - 3_1\, 4_3 = 0,$$

on a

$$\eta = C_1(\varphi) \mid Q_3(\varphi), \qquad \zeta = Q_2(\varphi) \mid Q_3(\varphi);$$

enfin l'équation

$$\zeta\eta - 1_2\, \xi + 4_2\, \theta - 3_3\, 4_3 = 0$$

est une sextique

$$L_2(\varphi)\, Q_2(\varphi)\, C_1(\varphi) - 1_2\, Q_1(\varphi)\, Q_3'(\varphi) + 4_2\, L_1(\varphi)\, Q_3(\varphi) -$$
$$- 3_3\, 4_3\, L_2(\varphi)\, Q_3^2(\varphi) = 0.$$

35.° cas: Pour trouver les valeurs des constantes

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_2$$

on remarque que les équations

$$4_1\,\theta + 2_3\,\zeta = 1_1\,\xi + 3_3\,4_3\,, \qquad 4_3\,\theta - \xi\,\zeta = 1_1\,2_3 - 3_3\,4_1\,,$$

donnent

$$\theta = Q_1(\xi) \,|\, L_2(\xi), \qquad \zeta = L_1(\xi) \,|\, L_2(\xi);$$

et les équations

$$3_2\,\varphi - 1_2\,\eta = 4_1\,\theta - 1_1\,\xi\,, \qquad \theta\,\varphi - 1_1\,\eta = 1_2\,\xi - 3_2\,4_1\,,$$

donnent

$$\varphi = Q_2(\xi) \,|\, Q_3(\xi), \quad \eta = \frac{\text{Quartique}\,(\xi)}{L_2(\xi)\,Q_3(\xi)}\,;$$

enfin l'équation

$$\zeta\,\eta - 3_3\,\varphi + 1_2\,2_3 - 3_2\,4_3 = 0$$

devient la quintique

$$\text{Quartique}\,(\xi)\,L_1(\xi) + (1_2\,2_3 - 3_2\,4_3)\,L_2^2(\xi)\,Q_3(\xi) - 3_3\,L_2^2(\xi)\,Q_2(\xi) = 0$$

en ξ.

36.° cas: Les constantes à trouver dans ce cas sont

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_2;$$

les paramètres ξ et ζ se déterminent des équations

$$1_1\,\xi - 2_3\,\zeta = 3_1\,4_1 - 3_3\,4_3\,, \qquad \xi\,\zeta = 3_3\,4_1 + 3_1\,4_3 - 1_1\,2_3\,;$$

η et θ sont des fonctions linéaires de φ des équations

$$1_2\,\xi + 1_1\,\eta - 4_1\,\theta - 3_1\,\varphi = 0, \qquad 1_3\,\xi - 4_3\,\theta - 3_3\,\varphi + 1_2\,2_3 = 0\,;$$

et l'équation

$$\theta\,\varphi - 1_2\,\eta + 2_3\,\zeta - 3_3\,4_3 = 0$$

devient une quadratique en φ.

37.° cas: Il s'agit de déterminer les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_2, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_3\,;$$

en formant les équations de condition on trouve ξ et η immédiatement; θ et φ sont des fonctions linéaires de ζ qui se détermine par la résolution d'une quadratique.

38.° cas: Les inconnues

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_3\,;$$

on construit θ et φ immédiatement; ζ et η sont des fonctions linéaires de φ qui est une racine d'une quadratique.

39.° cas: Supposons que les constantes à déterminer sont

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_2, \quad \varphi = 4_3$$

on trouve ξ et θ sans difficulté; η et ζ sont linéaire en φ, et φ est donnée par une équation quadratique

40.° cas: Des quantités

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_1,$$

on trouve ξ et φ; les paramètres η et ζ sont des fonctions linéaires de θ, et θ est une solution d'une quadratique.

41.° cas: On détermine les formes des paramètres

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_3, \quad \varphi = 4_2$$

au moyen de la résolution du cas 39.° et la substitution

$$(\theta\, \varphi\, 3_1\, 3_3\, 4_1\, 4_2) : (\varphi\, \theta\, 4_1\, 4_3\, 3_1\, 3_2).$$

42.° cas: La construction des formes des constantes

$$\xi = 2_2, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_1$$

n'est pas si simple; des équations

$$1_2\, \xi - \eta\, \zeta = 3_2\, 4_3 - 3_3\, 4_3, \qquad \xi\, \zeta + 1_2\, \eta = 3_2\, 4_3 + 3_3\, 4_2,$$

nous avons

$$\xi = L_1(\zeta) \mid Q_1(\zeta), \qquad \eta = L_2(\zeta) \mid Q_1(\zeta);$$

les équations

$$1_1\, \xi - 4_2\, \theta - 3_2\, \varphi + 1_2\, 2_1 = 0, \qquad 1_1\, \eta + 2_1\, \zeta - 4_3\, \theta - 3_3\, \varphi = 0,$$

donnent

$$\theta = \frac{C_2(\zeta)}{(3_2\, 4_3 - 3_3\, 4_2)\, Q_1(\zeta)}, \quad \varphi = \frac{C_1(\zeta)}{(3_2\, 4_3 - 3_3\, 4_2)\, Q_1(\zeta)};$$

enfin l'équation

$$\theta\, \varphi + 1_2\, \xi - 1_1\, 2_1 - 3_2\, 4_2 = 0$$

devient la sextique

$$C_1(\zeta)\, C_2(\zeta) + (3_2\, 4_3 - 3_3\, 4_2) \{ 1_2\, L_1(\zeta)\, Q_1(\zeta) - (1_1\, 2_1 + 3_2\, 4_2)\, Q_1^2(\zeta) \} = 0.$$

43.° cas: La solution de ce cas, savoir

$$\xi = 2_1, \quad \eta = 2_3, \quad \zeta = 1_3, \quad \theta = 3_1, \quad \varphi = 4_1$$

se déduit du cas 34.° par la substitution

$$(\theta\ \varphi\ 1_1\ 1_2\ 2_1\ 3_3\ 3_1\ 4_2\ 4_3) : (\varphi\ \theta\ 1_2\ 1_1\ 2_2\ 4_3\ 4_2\ 3_1\ 3_3).$$

44.° cas: Ce cas

$$\xi = 2_2,\quad \eta = 2_3,\quad \zeta = 1_3,\quad \theta = 3_1,\quad \varphi = 4_2,$$

est une conséquence directe du cas 34.° et de la substitution

$$(\theta\ \varphi\ 3_3\ 3_1\ 4_2\ 4_3) : (\varphi\ \theta\ 4_3\ 4_1\ 3_2\ 3_3).$$

45.° cas: Les formes des constantes

$$\xi = 2_1,\quad \eta = 2_3,\quad \zeta = 1_3,\quad \theta = 3_2,\quad \varphi = 4_2,$$

se déterminent de la solution du cas 42.° au moyen de la substitution

$$(1_1\ 1_2\ 2_1\ 3_2\ 4_2) : (1_2\ 1_1\ 2_3\ 3_1\ 4_1).$$

En tentant de trouver de semblables transformations dans les espaces à un plus grand nombre de dimensions, on peut chercher à déterminer les formes des fonctions qui définissent la correspondance voulue en exprimant les conditions que le déterminant correspondant sera capable de représenter le premier membre de l'équation d'une hypersphère.

Ainsi, si dans l'espace à n dimensions, la ligne droite

$$\sum_1^n {}_j\, \alpha_{i,j}\, x_j + \alpha_{i,0} = 0, \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$$

doit être transformée en sphère par la correspondance établie par les équations

$$\sum_1^n {}_i\, \varphi_i (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)\, x_i + \varphi_0 (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n) = 0\,,$$

$$\sum_1^n {}_i\, \psi_i (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)\, x_i + \psi_0 (X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n) = 0\,,$$

l'équation

$$|\, \alpha_{1,0},\ \alpha_{2,1}, \ldots,\ \varphi_{n-1},\ \psi_n \,| = 0$$

doit se réduire à la forme

$$\sum_1^n {}_i\, X_i (X_i + \beta_i) + \gamma = 0, \qquad \beta_i,\ \gamma \text{ constantes};$$

mais cette réduction est en général impossible, ce qui est clair et de la géométrie et de la théorie des formes algébriques.

Cependant pour l'espace à quatre dimension on trouve que la transformation curieuse déterminée par les équations directrices

$$x + (Z - i\,W)\,z - (X + i\,Y)\,(w + 1) = 0,$$
$$y - (X - i\,Y)\,z - (Z + i\,W)\,(w + 1) = 0$$

transforme actuellement les droites arbitraires en sphères.

Les propriétés caractéristiques de cette transformation-ci se révèlant sans peine en notant que la droite

$$w + l\,z + a = 0, \quad x + m\,z + b = 0, \quad y + n\,z + c = 0$$

est transformée en la sphère

$$\begin{vmatrix} l & 1 & a - 1 \\ Z - i\,W - m & -(X + i\,Y) & -b \\ X - i\,Y + n & Z + i\,W & c \end{vmatrix} = 0.$$

Parmi ces propriétés on peut remarquer: 1.° que la transformation n'est pas une trasformations de contact, comme le criterium de Lie le montre; 2.° qu'elle dégénère en le transformations de Lie quand la quatrième dimension s'annule; 3.° que la correspondance directe est (1, 1), mais que l'inverse est $(1, \infty^1)$; 4.° que si une droite réelle doit être transformée en une sphère la sphère se réduit à un point, mais qu'autrement le rayon de la sphère est différent de zéro.

Il n'échappera pas à l'observation du lecteur que la méthode dont on s'est servi ci-dessus peut être employée à construire des correspondances entre les lignes, les plans et les hyperplans des ordres divers d'un espace à n dimensions, et les hypersurfaces de cet espace, respectivement, non seulement dans le cas de deux équations directrices de la forme ci-dessus, mais aussi dans le cas de ν telles équations de cette forme, où ν peut avoir une valeur quelconque entre 1 et n; en particulier le cas où $\nu = n$, quand il est possible, donne des transformations ponctuelles. Enfin on voit que ces correspondances forment des léaisons entre les géométries des hyperplans des ordres divers et la géométrie des hypersphères tout-à-fait analogues à la liaison entre la géométrie de droites et la géométrie des sphères de l'espace ordinaire.

Les transformations de contact entre les sphères de l'espace à n dimensions.

Si on désigne par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées du centre, et par ρ le radius de la sphère, il faut que l'équation

$$\sum_1^n{}_i\, d\,\xi_i^2 - d\,\rho^2 = 0$$

soit une équation invariante sous toutes les transformations cherchées, car, de la définition d'une transformation de contact sphères tangentes doivent être changées en sphères tangentes; donc, ce qui on sait bien, le problème se réfère à la détermination des transformations conformes ponctuelles de l'espace $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \rho\sqrt{-1})$ à $n+1$ dimensions; la solution de ce problème-ci Lie a trouvé (Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, tome III), savoir que toutes ces transformations conformes constituent un groupe à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ paramètres, engendré par les transformations infinitésimales

$$p_j,\quad x_j p_k - x_k p_j,\quad \sum_1^n{}_l\, x_l p_l,\quad 2\,x_j \sum_1^n{}_l\, x_l p_l - p_j \sum_1^n{}_l\, x_l^2,\quad j,\, k = 1,\, 2, \ldots, n.$$

De la même manière on traite le problème de trouver les transformations ponctuelles entre les variétés applicables de l'espace à n dimensions; M. Staeckel a donné la solution de ce problème dans l'espace ordinaire (*Comptes Rendus*, 1895); son raisonnement se traduit pour le cas de l'espace à n dimensions par un seul changement des indices.

Soient

$$V_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}),\quad V_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$$

deux variétés applicables. On se propose de déterminer toutes les transformations

$$\begin{aligned} X_{1i} &= \varphi_{1i}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ X_{2i} &= \varphi_{2i}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \end{aligned}$$

qui changent la couple précédente en une couple de variétés

$$V_1(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}), \quad V_2(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n})$$

encore applicables.

On fait le changement de variables

$$x_{2j} = i\, x'_{2j}, \quad X_{2j} = i\, X'_{2j}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

donc il faut ed il suffit que l'équation

$$\sum_1^n{}_j (d\, x_{1j}^2 + d\, x'^2_{2j}) = 0$$

soit une équation invariante sous les transformations

$$X_{1j} = \varphi_{1j}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, i\, x'_{21}, i\, x'_{22}, \ldots, i\, x'_{2n}),$$
$$X_{2j} = \varphi_{2j}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, i\, x'_{21}, i\, x'_{22}, \ldots, i\, x'_{2n});$$

c'est-à-dire que ces équations ci définissent une représentation conforme de la variété $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x'_{21}, x'_{22}, \ldots, x'_{2n})$ sur la variété $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, X'_{21}, X'_{22}, \ldots, X'_{2n})$; mais d'après le théorème de Lie toutes ces représentations conformes constituent un groupe de transformations semblable au groupe à $\frac{1}{2}(2\,n+1)(2\,n+2)$ paramètres de toutes les transformations par rayons vectores réciproques de l'espace à $2\,n$ dimensions.

À une couple réelle de surfaces S_1, S_2 ils correspondent $\infty^{\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)}$ couples réelles Σ_1, Σ_2; si on exclude les couples qui on peut faire coincider par mouvements et par transformations de similitude, on a $\infty^{n(n+2)}$ différentes couples correspondantes.

Les transformations de contact entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure.

Il y a une autre catégorie intéressante de problèmes dans la géométrie des transformations de contact; cette catégorie se compose des questions où on cherche à trouver les transformations qui changent une surface en une surface de la manière que, à une famille des lignes remarquables sur l'une surface corresponde une famille remarquable des lignes sur l'autre surface; par exemple, les transformations de contact entre les lignes asymptotiques, les lignes de courbure, les D-lignes, les cercles géodésiques, et cetera. Toutes les transformations de contact qui transforment les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques sont bien connues; Lie a trouvé par la géométrie que la famille consiste de transformations projectives et dualistiques. Une conséquence la plus importante de la transformation de Lie entre les lignes droites et les sphères est que ses formules font correspondre aux lignes asymtotiques lignes de courbure. Lie a remarqué aussi que toutes les transformations de contact qui transforment les lignes asymptotiques en lignes de courbure font correspondre sphères aux lignes droites. (Voire *Mathematische Annalen,* tome V; Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen,* tome II.) Lie s'est proposé de déterminer toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure; et M. Darboux donne le résultat suivant, qui résume les recherches de Lie: Les transformations de contact les plus générales qui conservent les lignes de courbure sont celles qui soumettent les six coordonnées homogènes d'une sphère à la transformation linéaire la plus générale qui conserve la relation quadratique entre les coordonnées. (*Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* tome I, p. 63.) On se propose ici de faire la détermination analytique de toutes les transformations des deux classes de transformations de contact: 1.° les transformations qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure; 2.° les transformations qui conservent les lignes asymptotiques.

Les transformations de contact qui transforment les lignes asymptotiques en lignes de courbure.

Soit

$$\left.\begin{aligned} X = X(x, y, z, p, q), \quad Y = Y(x, y, z, p, q), \quad Z = Z(x, y, z, p, q) \\ P = P(x, y, z, p, q), \quad Q = Q(x, y, z, p, q) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

la transformation la plus générale cherchée.

On a les relations établies par les théorèmes de Lie, Darboux et

MAYER

$$\left.\begin{aligned}[P\,Q] = [P\,Y] = [Q\,X] = [X\,Y] = [X\,Z] = [Y\,Z] = 0,\\ [P\,X] = [Q\,Y] = \frac{1}{P}\,[P\,Z] = \frac{1}{Q}\,[Q\,Z] = \rho = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où

$$\left.\begin{aligned}[\Phi\,\Psi] = \Phi_p\,\Psi^x - \Phi^x\,\Psi_p + \Phi_q\,\Psi^y - \Phi^y\,\Psi_q,\\ \Phi_p = \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \quad \Phi_q = \frac{\partial\Phi}{\partial q}, \quad \Phi^x = \Phi_x + p\,\Phi_z, \quad \Phi^y = \Phi_y + q\,\Phi_z.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Pour que les lignes asymptotiques se transforment en lignes de courbure il faut que la forme

$$\left.\begin{aligned}\Omega \equiv \{(1 + P^2)\,S - P\,Q\,R\}\,d\,X^2 + \\ + \{(1 + P^2)\,T - (1 + Q^2)\,R\}\,d\,X d\,Y + \{P\,Q\,T - (1 + Q^2)\,S\}\,d\,Y^2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

soit égale à zéro en conséquence de l'équation

$$r\,d\,x^2 + 2\,s\,d\,x\,d\,y + t\,d\,y^2 = 0. \tag{5}$$

Pour développer la forme (4) on observe d'abord qu'on a (Voire la note de M. VIVANTI, *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo,* tome V.)

$$R = \frac{\varphi(P,\ Y)}{\varphi(X,\ Y)}, \quad S = \frac{\varphi(X,\ P)}{\varphi(X,\ Y)} = \frac{\varphi(Q,\ Y)}{\varphi(X,\ Y)}, \quad T = \frac{\varphi(X,\ Q)}{\varphi(X,\ Y)},$$

où

$$\varphi(U,\ V) = U^{(x)}\,V^{(y)} - U^{(y)}\,V^{(x)} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U^y & V^y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_p & V_p \\ U^y & V^y \end{vmatrix} r + \left\{ \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U_p & V_p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_q & V_q \\ U^y & V^y \end{vmatrix} \right\} s +$$

$$+ \begin{vmatrix} U^x & V^x \\ U_q & V_q \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} U_p & V_p \\ U_q & V_q \end{vmatrix} (r\,t - s^2),$$

$$U^{(x)} = U^x + r\,U_p + s\,U_q, \qquad U^{(y)} = U^y + s\,U_p + t\,U_q;$$

et aussi

$$d\,X^2 = \{X^{(x)}\,d\,x + X^{(y)}\,d\,y\}^2,$$

$$d\,X d\,Y = \{X^{(x)}\,d\,x + X^{(y)}\,d\,y\}\,\{Y^{(x)}\,d\,x + Y^{(y)}\,d\,y\},$$

$$d\,Y^2 = \{Y^{(x)}\,d\,x + Y^{(y)}\,d\,y\}^2.$$

En posant

$$\left.\begin{aligned}\varphi(P,\ Y)&=A'+B'r+C's+D't+E'(rt-s^2)\equiv\varphi(X,Y)R,\\ \varphi(X,\ P)&=A''+B''r+C''s+D''t+E''(rt-s^2)\equiv\varphi(X,Y)S,\\ \varphi(X,\ Q)&=A'''+B'''r+C'''s+D'''t+E'''(rt-s^2)\equiv\varphi(X,Y)T,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&K'''PQ-K''(1+Q^2)=K_1,\\ &K'''(1+P^2)-K'(1+Q^2)=K_2,\\ &K''(1+P^2)-K'PQ=K_3,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

et remarquant en passant que on peut avoir les équations simultanées

$$K_1=K_2=K_3=0,\quad(7)$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix}0 & 1+P^2 & -PQ\\ 1+P^2 & 0 & -(1+Q^2)\\ PQ & -(1+Q^2) & 0\end{vmatrix}\quad(8)$$

étant égal à zéro identiquement, on trouve pour la fonction Ω la forme suivante

$$\left.\begin{aligned}\Omega=&\{M_1(Y^{(x)})^2+M_2X^{(x)}Y^{(x)}+M_3(X^{(x)})^2\}\,dx^2\\ &+\{2M_1Y^{(x)}Y^{(y)}+M_2(X^{(x)}Y^{(y)}+X^{(y)}Y^{(x)})+\\ &\qquad+2M_3X^{(x)}X^{(y)}\}\,dx\,dy\\ &+\{M_1(Y^{(y)})^2+M_2Y^{(y)}X^{(y)}+M_3(X^{(y)})^2\}\,dy^2\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

où

$$M_i=A_i+B_ir+C_is+D_it+E_i(rt-s^2).\quad(10)$$

Donc on aura

$$\Omega=(\varphi_1r+\varphi_4)\,dx^2+(2\varphi_2s+\varphi_5)\,dx\,dy+(\varphi_3t+\varphi_6)\,dy^2,\quad(11)$$

où

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1=&\,2X^xX_pA+X^{x^2}B+(X_p^2A+2X^xX_pB_3)r+\\ &+(2X_pX_qA+2X^xX_qB+2X^xX_pC)s+\\ &+(2X^xX_pD+X^{x^2}E)t\\ &+X_p^2Br^2+(2X_pX_qB+X_p^2C)rs+\\ &+(X_p^2D+2X^xX_pE)rt+(2X_pX_qD+2X^xX_qE)st\\ &+(X_q^2B+2X_pX_qC-2X^xX_pE)s^2+\\ &+(X_p^2Er+2X_pX_qEs)(rt-s^2)+X_q^2Es^2t;\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\begin{aligned}
2\,\varphi_2 = {} & (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,A + 2\,X^x X^y C + \\
& + \{2\,X_p^2 A + (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,B + 2\,X^y X_p C\}\,r \\
& + \{2\,X_p X_q A + (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,C - 2\,X^x X^y E\}\,s + \\
& + \{2\,X_q^2 A + 2\,X^x X_q C + (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,D\}\,t \\
& + 2\,X_p^2 B\,r^2 + (2\,X_p X_q B + 2\,X_p^2 C - 2\,X^y X_p E)\,r\,s + \\
& + \{2\,X_q^2 B + 2\,X_p X_q C + 2\,X_p^2 D + \\
& + (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,E\}\,r\,t \\
& + \{2\,X_p X_q C - (2\,X^x X_p + 2\,X^y X_q)\,E\}\,s^2 + \\
& + \{2\,X_q^2 C + 2\,X_p X_q D - 2\,X^x X_q E\}\,s\,t + 2\,X_q^2 D\,t^2 \\
& + \{2\,X_p^2 E\,r + 2\,X_p X_q E\,s + 2\,X_q^2 E\,t\}\,(r\,t - s^2)\,;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 = {} & 2\,X^y X_q A + X^{y^2} D + (2\,X^y X_q B + X^{y^2} E)\,r + \\
& + (2\,X_p X_q A + 2\,X^y X_q C + 2\,X^y X_p D)\,s \\
& + (X_q^2 A + 2\,X^y X_q D)\,t + (2\,X_p X_q B + 2\,X^y X_p E)\,r\,s + \\
& + (2\,X_q^2 B + 2\,X^y X_q E)\,r\,t \\
& + (2\,X_p X_q C + X_p^2 D - 2\,X^y X_q E)\,s^2 + (X_q^2 C + 2\,X_p X_q D)\,s\,t + \\
& + X_q^2 E\,t^2 + X_p^2 E\,r\,s^2 + (2\,X_p X_q\,s + X_q^2\,t)\,E\,(r\,t - s^2)\,;
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4 = {} & X^{x^2} A + (2\,X^x X_q A + X^{x^2} C)\,s + X^{x^2} D\,t + \\
& + (X_q^2 A + 2\,X^x X_q C - X^{x^2} E)\,s^2 + 2\,X^x X_q D\,s\,t \\
& + (X_q^2 C - 2\,X^x X_q)\,s^3 + X_q^2 D\,s^2\,t - X_q^2 E\,s^4\,;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_5 = {} & 2\,X^x X^y A + (2\,X^y X_p A + 2\,X^x X^y B)\,r + \\
& + (2\,X^x X_q A + 2\,X^x X^y D)\,t \\
& + (2\,X_p X_q A + 2\,X^x X_q B + 2\,X^y X_p D + 2\,X^x X^y E)\,r\,t + \\
& + 2\,X^y X_p B\,r^2 + 2\,X^x X_q D\,t^2 \\
& + (2\,X_p X_q D + 2\,X^x X_q E)\,r\,t^2 + (2\,X_p X_q B + 2\,X^y X_p E)\,r^2\,t + \\
& + 2\,X_p X_q E\,r^2\,t^2\,;
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_6 = {} & X^{y^2} A + X^{y^2} B\,r + (2\,X^y X_p A + X^{y^2} C)\,s + 2\,X^y X_p B\,r\,s + \\
& + (X_p^2 A + 2\,X^y X_p C - X^{y^2} E)\,s^2 \\
& + X_p^2 B\,r\,s^2 + (X_p^2 C - 2\,X^y X_p)\,s^3 - X_p^2 E\,s^4\,;
\end{aligned} \tag{17}$$

où

$$\left.\begin{aligned}
&X^{x^2} K \equiv X^{x^2} K_3 + X^x Y^x K_2 + Y^{x^2} K_1, \\
&\qquad\qquad X_p^2 K \equiv X_p^2 K_3 + X_p Y_p K_2 + Y_p^2 K_1, \\
&X^{y^2} K \equiv X^{y^2} K_3 + X^y Y^y K_2 + Y^{y^2} K_1, \\
&\qquad\qquad X_q^2 K \equiv X_q^2 K_3 + X_q Y_q K_2 + Y_q^2 K_1, \\
&2 X^x X^y K \equiv 2 X^x X^y K_3 + (X^x Y^y + X^y Y^x) K_2 + 2 Y^x Y^y K_1, \\
&2 X_p X_q K \equiv 2 X_p X_q K_3 + (X_p Y_q + X_q Y_p) K_2 + 2 Y_p Y_q K_1, \\
&2 X^y X_p K \equiv 2 X^y X_p K_3 + (X^y Y_p + X_p Y^y) K_2 + 2 Y^y Y_p K_1, \\
&2 X^x X_q K \equiv 2 X^x X_q K_3 + (X^x Y_q + X_q Y^x) K_2 + 2 Y^x Y_q K_1, \\
&2 (X^x X_p \pm X^y X_q) K \equiv 2 (X^x X_p \pm X^y X_q) K_3 + \\
&\qquad + (X^x Y_p + X_p Y^x \pm X^y Y_q \pm X_q Y^y) K_2 + \\
&\qquad + 2 (Y^x Y_p \pm Y^y Y_q) K_1.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

En comparant l'équation

$$\Omega = 0 \tag{19}$$

avec l'équation (5) on trouve

$$\varphi(X,\ Y) = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0 \tag{20}$$

pour toutes les valeurs des quantités r, s, t; ce qui donne les équations suivantes pour obtenir les formes des fonctions X, Y, P, Q:

$$\begin{array}{llll}
X^{x^2} A = 0, \ (21) & X_p^2 E = 0, \ (24) & X^{x^2} D = 0, \ (27) & X^{y^2} B = 0, \ (30) \\
2 X^x X^y A = 0, \ (22) & 2 X_p X_q E = 0, \ (25) & 2 X^x X_q D = 0, \ (28) & 2 X^y X_p B = 0, \ (31) \\
X^{y^2} A = 0, \ (23) & X_q^2 E = 0, \ (26) & X_q^2 D = 0, \ (29) & X_p^2 B = 0, \ (32)
\end{array}$$

$$2 X^y X_p A + 2 X^x X^y B = 0, \ (33)$$

$$2 X_p X_q B + 2 X^y X_p E = 0, \ (38)$$

$$2 X^x X_q A + X^{x^2} C = 0, \ (34)$$

$$2 X^x X_q C + 2 (X^x X_p - X^y X_q) D = 0, \ (39)$$

$$2 X^y X_p A + X^{y^2} C = 0, \ (35)$$

$$X_p^2 C - 2 X^y X_p E = 0, \ (40)$$

$$2 X^x X_q A + 2 X^x X^y D = 0, \ (36)$$

$$X_q^2 C - 2 X^x X_q E = 0, \ (41)$$

$$2 (X^x X_p - X^y X_q) B - 2 X^y X_p C = 0, \ (37)$$

$$2 X_p X_q D + 2 X^x X_q E = 0, \ (42)$$

$$2(X^x X_p - X^y X_q) A + 2 X^{x^2} B - 2 X^x X^y C = 0, \tag{43}$$

$$2(X^x X_p - X^y X_q) A + 2 X^x X^y C - 2 X^{y^2} D = 0, \tag{44}$$

$$X_p^2 A + 2 X^y X_p C - X^{y^2} E = 0, \tag{45}$$

$$X_q^2 A + 2 X^x X_q C - X^{x^2} E = 0, \tag{46}$$

$$2 X_q^2 B + 2 X_p X_q C - 2(X^x X_p - X^y X_q) E = 0, \tag{47}$$

$$2 X_p X_q C + 2 X_p^2 D + 2(X^x X_p - X^y X_q) E = 0, \tag{48}$$

$$2 X_p X_q A + 4 X^x X_q B + 2(X^x X_p - X^y X_q) C + 2 X^x X^y E = 0, \tag{49}$$

$$2 X_p X_q A + 2 X^x X_q B + 2 X^y X_p D + 2 X^x X^y E = 0. \tag{50}$$

Il faut observer que les équations (43) et (44) ne peuvent pas être égales à zéro identiquement parce que elles résultent des termes du degré zéro des différences

$$\varphi_1 - \varphi_2, \qquad \varphi_2 - \varphi_3.$$

La détermination des formes des fonctions X, Y, P, Q au moyen de ces équations de condition est assez difficile, cependant on peut résoudre le problème indirectement. Nous avons déterminé dans une Note précédente les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères, et Lie a remarqué que toutes les transformations qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure transforment aussi les lignes droites en sphères, donc pour trouver les transformations entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure il faut employer seulement les operations de différentiation et de substitution. Le procédé est simple mais tres-laborieux, et il faut réserver les résultats de cette computation longue pour une autre communication. On conclut néanmoins facilement au résultat que les fonctions X, Y, P, Q définies par les équations

$$\omega_1 = \sum_1^4 j\,(a_{1j} X + i\, a_{1j}\, Y + a_{2j} Z + a_{3j})\, x_j\,,$$

$$\omega_2 = \sum_1^4 j\,(a_{2j} X - i\, a_{2j}\, Y - a_{1j} Z + a_{4j})\, x_j,$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\frac{\omega_1^x}{\omega_2^x} = \frac{\omega_1^y}{\omega_2^y} = \frac{\omega_1^X}{\omega_2^X} = \frac{\omega_1^Y}{\omega_2^Y},$$

ou par les équations

$$\omega_3 = \sum_1^4 {}_j (a_{1j} X - i\, a_{1j}\, Y + a_{2j} Z + a_{3j})\, x_j\,,$$

$$\omega_4 = \sum_1^4 {}_j (a_{2j} X + i\, a_{2j}\, Y - a_{1j} Z + a_{4j})\, x_j\,,$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\frac{\omega_3^x}{\omega_4^x} = \frac{\omega_3^y}{\omega_4^y} = \frac{\omega_3^X}{\omega_4^X} = \frac{\omega_3^Y}{\omega_4^Y}\,,$$

constituent deux familles de ∞^{15} transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure. Chaque famille contient la transformation de Lie; la première famille la donne pour

$$a_{14} = a_{21} = a_{33} = a_{42} = 1,$$

et toutes les autres constantes égales à zéro; on la trouve dans la deuxième famille en posant

$$a_{11} = -\, a_{24} = a_{32} = -\, a_{43} = 1\,,$$

et toutes les autres constantes égales à zéro.

Dans certains cas on peut réduire les équations de condition et en nombre et en forme. Considérons les déterminants

$$G \equiv \begin{vmatrix} X^{x^2} & X^x\, Y^x & Y^{x^2} \\ 2\, X^x X^y & X^x\, Y^y + X^y\, Y^x & 2\, Y^x\, Y^y \\ X^{y^2} & X^x\, Y^y & Y^{y^2} \end{vmatrix},$$

$$H \equiv \begin{vmatrix} X_p^2 & X_p\, Y_p & Y_p^2 \\ 2\, X_p\, X_q & X_p\, Y_q + X_q\, Y_p & 2\, Y_p\, Y_q \\ X_q^2 & X_q\, Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix},$$

$$I \equiv \begin{vmatrix} X^{x^2} & X^x\, Y^x & Y^{x^2} \\ 2\, X^x\, X_q & X^x\, Y_q + X_q\, Y^x & 2\, Y^x\, Y_q \\ X_q^2 & X_q\, Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix},$$

$$J \equiv \begin{vmatrix} X^{y^2} & X^y\, Y^y & Y^{y^2} \\ 2\, X^y\, X_p & X^y\, Y_p + X_p\, Y^y & 2\, Y^y\, Y_p \\ X_p^2 & X_p\, Y_p & Y_p^2 \end{vmatrix}.$$

Les cas suivants s'excluent

$$\begin{array}{llll}
1.^\circ & G \neq 0, \; H \neq 0, \; I \neq 0, \; J \neq 0\,; \\
2.^\circ & G \neq 0, \; H \neq 0, \; I = 0, \; J \neq 0\,; \\
3.^\circ & G \neq 0, \; H = 0, \; I \neq 0, \; J \neq 0\,; \\
4.^\circ & G = 0, \; H \neq 0, \; I \neq 0, \; J \neq 0\,; \\
5.^\circ & G \neq 0, \; H = 0, \; I = 0, \; J \neq 0\,; \\
6.^\circ & G = 0, \; H \neq 0, \; I = 0, \; J \neq 0\,; \\
7.^\circ & G \neq 0, \; H \neq 0, \; I \neq 0, \; J = 0\,; \\
8.^\circ & G \neq 0, \; H = 0, \; I \neq 0, \; J = 0\,; \\
9.^\circ & G = 0, \; H \neq 0, \; I \neq 0, \; J = 0\,;
\end{array}$$

en effet si on $J \neq 0$, il existaient les trois équations

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0\,;$$

de plus les équations (33), (35), (37), (38) et (40) donnent

$$Xy^2\, C = 2\, Xy\, X_p\, C = X_p^2\, C = 0\,;$$

donc on a

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0\,;$$

de ces équations-ci et des équations (43), (44), (49), (50), (47) et (48) on trouve

$$Xy^2\, D = 2\, Xy\, X_p\, D = X_p^2\, D = 0\,;$$

donc

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0.$$

Mais les équations

$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

et les équations

$$A_1 = A_2 = A_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0$$

ne peuvent pas exister simultanément; car si toutes les formes A_1, A_2, A_3 etaient égales à zéro, les équations (43) et (44) donneraient

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = 0.$$

D'ailleurs si nous avons

$$J \neq 0, \quad E_1 = E_2 = E_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

les équations (23), (33) et (45) donnent

$$X^{y^2} A = 2\, X^y X_p A = X_p^2 A = 0\,;$$

donc

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0\,;$$

ainsi toutes les quantités E_1, E_2, E_3 ne sont égales à zéro et on a

$$G = H = 0\,;$$

donc les cas 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° disparaissent.

Maintenant supposons que $I \neq 0$; ainsi

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0\,;$$

des équations (34), (36), (39), (41) et (42) on trouve

$$X^{x^2} C = 2\, X^x X_q C = X_q^2 C = 0\,;$$

donc

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0\,;$$

encore des équations (43), (44), (49), (50), (47) et (48) on a

$$X^{x^2} B = 2\, X^x X_q B = X_q^2 B = 0,$$

qui demandent que

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Outre cela on observe que, si on a

$$I \neq 0, \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0,$$

on trouvait des équations (21), (34), et (46)

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

ce qui n'est pas possible; ainsi si on a $I \neq 0$, on a aussi les équations

$$G = H = 0,$$

et les cas 7.°, 8.°, 9.° s'excluent. Ils restent les sept cas

10.° $G = 0,\ H = 0,\ I = 0,\ J = 0\,;$

11.° $G \neq 0,\ H = 0,\ I = 0,\ J = 0\,;$

12.° $G = 0,\ H \neq 0,\ I = 0,\ J = 0\,;$

13.° $G = 0,\ H = 0,\ I \neq 0,\ J = 0\,;$

14.° $G = 0,\ H = 0,\ I = 0,\ J \neq 0\,;$

15.° $G = 0,\ H = 0,\ I \neq 0,\ J \neq 0\,;$

16.° $G \neq 0,\ H \neq 0,\ I = 0,\ J = 0.$

Considérons encore les deux cas particuliers suivants

$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0; \tag{i}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = C_1 = C_2 = C_3 = E_1 = E_2 = E_3 = 0; \tag{ii}$$

pour le premier cas on a aussi les équations

$$\left.\begin{aligned} &X^{x^2} A = 2\, X^x X^y A = X^{y^2} A = 2\, X^x X_q\, A = 2\, X^y X_p\, A = \\ &\qquad\qquad = 2\,(X^x X_p - X^y X_q)\, A = 0, \\ &X_p^2\, E = 2\, X_p\, X_q\, E = X_q^2\, E = 2\, X^x X_q\, E = 2\, X^y X_p\, E = \\ &\qquad\qquad = 2\,(X^x X_p - X^y X_q)\, E = 0, \\ &X_p^2\, A - X^{y^2} E = 2\, X_p\, X_q\, A + 2\, X^x X^y E = X_q^2\, A - X^{x^2} E = 0; \end{aligned}\right\} \tag{iii}$$

pour le deuxième cas on a des équations tout-à-fait semblables.

Le premier cas donne une démonstration analytique de la propriété de la transformation de Lie. En effet, les équations définissantes de la transformation de Lie sont

$$X + i\, Y = -z - x\frac{px + qy}{q - x}, \quad X - i\, Y = \frac{p + y}{q - x}, \quad Z = \frac{p\,x + p\,y}{q - x},$$

$$P = \frac{q\,x - 1}{q + x}, \quad Q = -\,i\,\frac{q\,x + 1}{q + x};$$

donc on a

$$X^x = \frac{1}{2}\frac{(p + y)(1 - q^2)}{(q - x)^2}, \quad X^y = \frac{1}{2}\,\frac{1 - q^2}{q - x},$$

$$X_p = \frac{1}{2}\,\frac{1 - x^2}{q - x}, \quad X_q = -\,\frac{1}{2}\,\frac{(1 - x^2)(p + y)}{(q - x)^2},$$

$$Y^x = \frac{i}{2}\,\frac{(p + y)(1 + q^2)}{(q - x)^2}, \quad Y^y = \frac{i}{2}\,\frac{1 + q^2}{q - x},$$

$$Y_p = \frac{i}{2}\,\frac{(1 + x^2)}{q - x}, \quad Y_q = -\,\frac{i}{2}\,\frac{(1 + x^2)(p + y)}{(q - x)^2},$$

$$P^x = \frac{1 + q^2}{(q + x)^2}, \quad P^y = 0, \quad P_p = 0, \quad P_q = \frac{1 + x^2}{(q + x)^2},$$

$$Q^x = \frac{i\,(1 - q^2)}{(q + x)^2}, \quad Q^y = 0, \quad Q_p = 0, \quad Q_q = \frac{(1 - x^2)(q^2 - 1)}{(q + x)^2}.$$

En posant

$$f A' = \alpha', \quad f A'' = \alpha'', \quad f A''' = \alpha''', \quad f B' = \beta', \quad f B'' = \beta'', \quad f B''' = \beta''',$$

$$f C' = \gamma', \quad f C'' = \gamma'', \quad f C''' = \gamma''',$$

$$g\, D' = \delta', \quad g\, D'' = \delta'', \quad g\, D''' = \delta''', \quad f E' = \varepsilon', \quad f E'' = \varepsilon'', \quad f E''' = \varepsilon''',$$

où

$$f = 2\,(q - x)\,(q + x)^2, \quad g = \frac{2\,(q - x)^2\,(q + x)^2}{p + y},$$

nous avons

$$\alpha' = i\,(1 + q^2)^2, \quad \alpha'' = q^4 - 1, \quad \alpha''' = -\,i\,(q^2 - 1)^2,$$
$$\beta' = \beta'' = \beta''' = 0,$$
$$\gamma' = i\,(1 + x^2)\,(1 + q^2), \quad \gamma'' = q^2 x^2 - 1, \quad \gamma''' = -\,i\,(1 - x^2)(1 - q^2),$$
$$\delta' = -\,i\,(1 + x^2)\,(1 + q^2), \quad \delta'' = 1 - q^2 x^2, \quad \delta''' = i\,(1 - x^2)\,(1 - q^2),$$
$$\varepsilon' = -\,i\,(1 + x^2)^2, \quad \varepsilon'' = 1 - x^4, \quad \varepsilon''' = i\,(1 + x^2)^2;$$

donc

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{(1 - q^2)^2}{(q + x)^3}, \quad A_2 = \frac{i\,(1 - q^4)}{(q + x)^3}, \quad A_3 = \frac{1}{2}\frac{(1 + q^2)^2}{(q + x)^3},$$
$$E_1 = -\frac{1}{2}\frac{(1 - x^2)^2}{(q + x)^3}, \quad E_2 = \frac{i\,(1 - x^4)}{(q + x)^3}, \quad E_3 = \frac{1}{2}\frac{(1 + x^2)^2}{(q + x)^3},$$
$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

et nous voyons sans difficulté que les autres équations de condition sont satisfaites et ensuite que la transformation de Lie changent les lignes asymptotiques en lignes de courbure.

On remarque en passant qu'on peut attendre la desparition de plusieurs déterminants des équations du système particulier (iii); trois de ces déterminants se réduisent aux formes simples, savoir

$$(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1) = 4 \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix},$$

$$(\lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2) = 4 \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix},$$

$$(\lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3) = 4\,[X,\ Y] \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix},$$

où

$$\lambda_1 = 2\,X^x X^y, \qquad \mu_1 = X^x\,Y^y + X^y\,Y^x,$$
$$\nu_1 = 2\,Y^x\,Y^y,$$
$$\lambda_2 = 2\,X_p\,X_q, \qquad \mu_2 = X_p\,Y_q + X_q\,Y_p,$$
$$\nu_2 = 2\,Y_p\,Y_q,$$

$$\lambda_3 = 2\,(X^x X_p - X^y X_q),\quad \mu_3 = X^x Y_p + X_p Y^x - X^y Y_q - X_q Y^y,$$
$$\nu_3 = 2\,(Y^x Y_p - Y^y Y_q),$$

$$(\lambda_i,\ \mu_i,\ \nu_i) = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ 2\,X^y X_p & X_p Y^y + X^y Y_p & 2\,Y^y Y_p \\ 2\,X^x X_q & X_q Y^x + X^x Y_q & 2\,Y^x Y_q \end{vmatrix};$$

pour la transformation de Lie on a

$$(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1) = (\lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2) = (\lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3) = 0,$$

parce que on a les équations

$$\begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_p & Y_p \\ X_q & Y_q \end{vmatrix} = 0.$$

Pour une transformation de contact quelconque on a

$$[X\,Y] = 0\,;$$

donc la forme du déterminant $(\lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3)$ montre qu'on a

$$\begin{vmatrix} X^y X_p & X^y Y_p + X_p Y^y & Y^y Y_p \\ X^x X_p - X^y X_q & X^x Y_p + X_p Y^x - X^y Y_q - X_q Y^y & Y^x Y_p - Y^y Y_q \\ X^x X_q & X^x Y_q + X_q Y^x & Y^x Y_q \end{vmatrix} = 0$$

pour une transformation de contact quelconque.

Encore on observe que les quantités A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3 dans la transformation de Lie satisfaient à la relation

$$K_2^2 - 4\,K_3\,K_1 = 0\,;$$

pourque cette relation soit vraie pour les équations

$$2\,X^y X_p\,K_3 = 2\,X^x X_q\,K = 0$$

il est nécessaire et suffisant que la relation

$$\begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & X_q \\ Y_p & Y_q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix} = 0$$

ait lieu; en vertu de l'équation $[X\,Y] = 0$, la dernière relation s'ecrit dans l'une forme et l'autre

$$\begin{vmatrix} X^x & X_p \\ Y^x & Y_p \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & X_q \\ Y_p & Y_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X^y & X_q \\ Y^y & Y_q \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_p & X_q \\ Y_p & Y_q \end{vmatrix} = 0.$$

Transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques.

La forme

$$\Phi \equiv R\,d X^2 + 2\,S\,d X\,d Y + T\,d Y^2 = 0$$

devient

$$(\psi_1 r + \psi_4)\,d x^2 + (2\,\psi_2 + \psi_5)\,d x\,d y + (\psi_3 t + \psi_6)\,d y^2 = 0$$

où

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4,\ \psi_5,\ \psi_6$$

se dérivent immédiatement des fonctions de la note précédente

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ \varphi_6,$$

respectivement, en posant

$$A',\ B',\ C',\ D',\ E',\quad A'',\ B'',\ C'',\ D'',\ E'',\quad A''',\ B''',\ C''',\ D''',\ E'''$$

au lieu de

$$A_3,\ B_3,\ C_3,\ D_3,\ E_3,\quad A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2,\ E_2,\quad A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,$$

respectivement, et en écrivant

$$X^{x^2} A \equiv X^{x^2} A' + 2\,X^x\,Y^x\,A'' + Y^{x^2} A''',$$

$$X_p^2\,A \equiv X_p^2\,A' + 2\,X_p\,Y_p\,A'' + Y_p^2\,A''',$$

$$X^x\,X^y\,A = X^x\,X^y\,A' + (X^x\,Y^y + X^y\,Y^x)\,A'' + Y^x\,Y^y\,A''',$$

$$X_p\,X_q\,A \equiv X_p\,X_q\,A' + (X_p\,Y_q + X_q\,Y_p)\,A'' + Y_p\,Y_q\,A''',$$

$$X^{y^2} A \equiv X^{y^2} A' + 2\,X^y\,Y^y\,A'' + Y^{y^2} A''',$$

$$X_q^2\,A \equiv X_q^2\,A' + 2\,X_q\,Y_q\,A'' + Y_q^2\,A''',$$

$$X^x\,X_p\,A \equiv X^x\,X_p\,A' + (X^x\,Y_p + X_p\,Y^x)\,A'' + Y^x\,Y_p\,A''',$$

$$X^y\,X_p\,A \equiv X^y\,X_p\,A' + (X^y\,Y_p + X_p\,Y^y)\,A'' + Y^y\,Y_p\,A''',$$

$$X^x\,X_q\,A \equiv X^x\,X_q\,A' + (X^x\,Y_q + X_q\,Y^x)\,A'' + Y^x\,Y_q\,A''',$$

$$X^y\,X_q\,A \equiv X^y\,X_q\,A' + (X^y\,Y_q + X_q\,Y^y)\,A'' + Y^y\,Y_q\,A''';$$

Pour que l'équation $\Phi = 0$ soit une conséquence de l'équation

$$r\,d x^2 + 2\,s\,d x\,d y + t\,d y^2 = 0$$

il faut que les relations

$$\varphi(X, Y) \neq 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 \neq 0, \quad \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0$$

aient lieu pour toutes les valeurs de r, s, t; donc on trouve les équations suivantes pour les fonctions X, Y, P, Q:

$$X^{x^2} A = X^x X^y A = X^{y^2} A = 0,$$

$$X^{y^2} B = X^y X_p B = X_p^2 B = 0,$$

$$X^{x^2} D = X^x X_q D = X_q^2 D = 0,$$

$$X_p^2 E = X_p X_q E = X_q^2 E = 0,$$

$$X^y X_p A + X^x X^y B = 0,$$

$$X_p X_q B + X^y X_p E = 0,$$

$$2 X^x X_q A + X^{x^2} C = 0,$$

$$X^x X_q C + (X^x X_p - X^y X_q) D = 0,$$

$$2 X^y X_p A + X^{y^2} C = 0,$$

$$X_p^2 C - 2 X^y X_p E = 0,$$

$$(X^x X_p - X^y X_q) B - X^y X_p C = 0,$$

$$X_q^2 C - 2 X^x X_q E = 0,$$

$$X^x X_q A + X^x X^y D = 0,$$

$$X_p X_q D + X^x X_q E = 0,$$

$$(X^x X_p - X^y X_q) A + X^{x^2} B - X^x X^y C = 0,$$

$$X_p^2 A + 2 X^y X_p C - X^{y^2} E = 0,$$

$$(X^x X_p - X^y X_q) A + X^x X^y C - X^{y^2} D = 0,$$

$$X_q^2 A + 2 X^x X_q C - X^{x^2} E = 0,$$

$$X_q^2 B + X_p X_q C - (X^x X_p - X^y X_q) E = 0,$$

$$X_p X_q A + 2 X^x X_q B + (X^x X_p - X^y X_q) C + X^x X^y E = 0,$$

$$X_p X_q C + X_p^2 D + (X^x X_p - X^y X_q) E = 0,$$

$$X_p X_q A + X^x X_q B + X^y X_p D + X^x X^y E = 0.$$

Soient les transformations des transformations ponctuelles; il faut d'abord que

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = Z_p = Z_q = 0.$$

Les équations de condition se réduisent aux équations suivantes

$$X^{x^2} A = X^x X^y A = X^{y^2} A = 0, \qquad X^x X^y B = X^{y^2} B = 0,$$
$$X^{x^2} C = X^{y^2} C = 0, \qquad X^{x^2} D = X^x X^y D = 0,$$
$$X^{x^2} E = X^x X^y E = X^{y^2} E = 0, \qquad X^{x^2} B - X^x X^y C = 0,$$
$$X^x X^y C - X^{y^2} D = 0;$$

d'ailleurs

$$A' = Y^y P^x - Y^x P^y, \qquad B' = Y^y P_p, \qquad C' = Y^y P_q - Y^x P_p,$$
$$D' = - Y^x P_q, \qquad E' = 0,$$
$$A'' = X^x P^y - X^y P^x, \qquad B'' = - X^y P_p, \qquad C'' = X^x P_p - X^y P_q,$$
$$D'' = X^x P_q, \qquad E'' = 0,$$
$$A''' = X^x Q^y - X^y Q^x, \qquad B''' = - X^y Q_p, \qquad C''' = X^x Q_p - X^y Q_q,$$
$$D''' = X^x Q_q, \qquad E''' = 0.$$

Il faut distinguer deux cas suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X^{x^2} & 2 X^x Y^x & Y^{x^2} \\ X^x X^y & X^x X^y + X^y Y^x & Y^x Y^y \\ X^{y^2} & 2 X^y Y^y & Y^{y^2} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro ou différent de zéro. Ce déterminant est égal à

$$\Delta^3 \equiv \begin{vmatrix} X^x & X^y \\ Y^x & Y^y \end{vmatrix}^3 \equiv - \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ p & q & -1 \end{vmatrix}^3 .$$

Considérons le cas où $\Delta = 0$; en observant que pour une transformation ponctuelle quelconque

$$\pi(X, Y) P = \pi(Z, Y), \qquad \pi(X, Y) Q = \pi(X, Z)$$

où

$$\pi(M, N) \equiv \begin{vmatrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \\ p & q & -1 \end{vmatrix},$$

on voit que les fonctions P et Q deviennent ou infinies ou indéterminées;

donc on peut avoir seulement

$$\Delta \neq 0\,;$$

il suit que

$$Y^y P^x - Y^x P^y = X^x P^y - X^y P^x = X^x Q^y - X^y Q^x = 0\,;$$

c'est-à-dire

$$\frac{X^x}{X^y} = \frac{Y^x}{Y^y} = \frac{P^x}{P^y} = \frac{Q^x}{Q^y}\,;$$

d'ailleurs des équations

$$[P,\ Y] = [Q,\ X] = 0$$

on trouve, dans le cas de transformations ponctuelles

$$\frac{X^x}{X^y} = -\frac{Q_q}{Q_p}, \quad \frac{Y^x}{Y^y} = -\frac{P_q}{P_p}\,;$$

mais les relations

$$\frac{X^x}{X^y} = -\frac{P_q}{P_p}, \quad \frac{Y^x}{Y^y} = -\frac{Q_q}{Q_p}$$

contredisent les relations

$$[P,\ X] = [Q,\ Y] = \rho \neq 0\,;$$

donc, si $\Delta \neq 0$, on a ou

$$X^x = X^y = Y^x = Y^y = 0,$$

ou

$$P^x = P^y = Q^x = Q_y = 0\,;$$

mais l'evanouissement de X^x, X^y, Y^x et Y^y est incompatible avec le non-évanouissement du déterminant Δ; donc on conclut au résultat, si

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = Z_p = Z_q = 0,$$

donc

$$P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0\,;$$

c'est-à-dire, d'après les résultats d'une note précédente, les transformations changent les plans en plans; donc les seules transformations ponctuelles qui changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques sont les transformations du groupe projectif.

Réciproquement, d'une étude semblable du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_p^2 & 2\,X_p\,X_q & X_q^2 \\ X_p\,X_q & X_p\,Y_q + X_q\,Y_p & Y_p\,Y_q \\ Y_p^2 & 2\,Y_p\,Y_q & Y_q^2 \end{vmatrix}$$

on trouve que

$$X_p = Y_p = X_q = X_q = 0$$

est une conséquence de

$$P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0,$$

et des équations de condition.

Considérons maintenant les trois déterminants

$$L = |\,X^x,\ Y^y\,|,\quad M = |\,X_p,\ Y_q\,|,\quad N = |\,P_p,\ Q_q\,|;$$

on verifie facilement que les cas

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0;\qquad L \neq 0,\ M \neq 0,\ N = 0;$$
$$L \neq 0,\ M \neq 0,\ N \neq 0;\qquad L = 0,\ M \neq 0,\ N \neq 0;$$

donnent des contredictions avec les équations définissantes d'une transformation de contact.

Les cas

$$L \neq 0,\ M = 0,\ N \neq 0;\qquad L \neq 0,\ M = 0,\ N = 0;$$

donnent

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = P^x = P^y = Q^x = Q^y = 0,$$

et de ces relations on a

$$Z_p = Z_q = 0.$$

Des cas

$$L = 0,\ M = 0,\ N \neq 0;\qquad L = 0,\ M \neq 0,\ N = 0;$$

on trouve ou

$$X_p = X_q = Y_p = Y_q = 0,$$

ou

$$P_p = P_q = Q_p = Q_q = 0;$$

le premier cas donne des transformations projectives. Pour le deuxième cas on a

$$[Y,\ P] = Y_p P^x + Y_q P^y = 0, \qquad [X,\ Q] = X_p Q^x + X_q Q^y = 0,$$
$$[X,\ P] = X_p P^x + X_q P^y = \rho \neq 0, \quad [Y,\ Q] = Y_p Q^x + Y_q Q^y = \rho \neq 0;$$

encore

$$\begin{aligned}
A' &= Y^y P^x - Y^x P^y, \quad B' = - Y_p P^y, \quad C' = Y_p P^x - Y_q P^y, \\
&\qquad D' = Y_q P^x, \quad E' = 0, \\
A'' &= X^x P^y - X^y P^x, \quad B'' = X_p P^y, \quad C'' = X_q P^y - X_p P^x, \\
&\qquad D'' = - X_q P^x, \quad E'' = 0, \\
A''' &= X^x Q^y - X^y Q^x, \quad B''' = X_p Q^y, \quad C''' = X_q Q^y - X_p Q^x, \\
&\qquad D''' = - X_q Q^x, \quad E''' = 0;
\end{aligned}$$

et les équations de condition deviennent

$$\begin{aligned}
& X^{x^2} A = X^x X^y A = X^{y^2} A = X^{y^2} B = X^y X_p B = X_p^2 B = X_p X_q B = 0, \\
& X_p^2 C = X_q^2 C = X^{x^2} D = X^x X_q D = X_q^2 D = X_p X_q D = 0, \\
& X^y X_p A + X^x X^y B = 2 X^x X_q A + X^{x^2} C = 2 X^y X_p A + X^{y^2} C = 0, \\
& X^x X_q A + X^x X^y D = (X^x X_p - X^y X_q) B - X^y X_p C = X^x X_q C + \\
& \qquad + (X^x X_p - X^y X_q) D = 0, \\
& X_p^2 A + 2 X^y X_p C = X_q^2 A + 2 X^x X_q C = X_q^2 B + X_p X_q C = \\
& \qquad = X_p X_q C + X_p^2 D = 0, \\
& X_p X_q A + 2 X^x X_q B + (X^x X_p - X^y X_q) C = X_p X_q A + X^x X_q B + \\
& \qquad + X^y X_p D = 0, \\
& (X^x X_p - X^y X_q) A + X^{x^2} B - X^x X^y C = (X^x X_p - X^y X_q) A + \\
& \qquad + X^x X^y C - X^{y^2} D = 0.
\end{aligned}$$

En écrivant

$$\Delta_{xy} \equiv X^x Y^y - X^y Y^x, \quad \Delta_{xp} \equiv X^x Y_p - X_p Y^x, \quad \Delta_{yp} \equiv X^y Y_p - X_p Y^y,$$
$$\Delta_{pq} \equiv X_p Y_q - X_q Y_p, \quad \Delta_{xq} \equiv X^x Y_q - X_q Y^x, \quad \Delta_{yq} \equiv X^y Y_q - X_q Y^y,$$
$$\Delta_{ij} = - \Delta_{ji},$$

on verifie sans difficulté que ces équations se réduisent aux équations suivantes:

$$X_p P^x - Y_q Q^y = 0, \quad X_q P^y - Y_p Q^x = 0, \quad \Delta^2_{yp} = 0, \quad \Delta^2_{xq} = 0,$$
$$Y_p Q^x \Delta_{qy} + Y_q Q^y \Delta_{xp} = 0, \quad [X\,Y]^2 + 2\,|\,\Delta_{qx}\Delta_{yp} + 2\,\Delta_{px}\Delta_{yq}\,| = 0,$$
$$X_q Y_p \Delta_{qy} + X_p Y_q \Delta_{px} = 0, \quad X^y Y_p \Delta_{qy} + X_p Y^y \Delta_{px} = 0,$$
$$X^x Y_p \Delta_{px} + X_p Y^x \Delta_{qy} + X^x Y_q \Delta_{yp} + X_q Y^x \Delta_{py} + X^y Y_q \Delta_{xp} + \\ + X_q Y^y \Delta_{yq} = 0,$$
$$X^x Y_q \Delta_{yq} + X_q Y^x \Delta_{xp} = X^y Y_p \Delta_{xp} + X_p Y^y \Delta_{yq} = X^x Y_q \Delta_{xp} + \\ + X_q Y^x \Delta_{yq} = 0,$$
$$X_p Y_p \Delta_{xp} + X_q Y_p \Delta_{yp} + X_p Y^y \Delta_{pq} = X_q Y_q \Delta_{qy} + X_p Y_q \Delta_{qx} + \\ + X_q Y^x \Delta_{pq} = X^y Y^x \Delta_{qx} + X^x Y^x \Delta_{px} + X^x Y_q \Delta_{xy} = 0\,;$$

ce système est équivalent au système suivant

$$X_p P^x - Y_q Q^y = \Delta_{xy} = \Delta_{xp} = \Delta_{yp} = 0\,,$$
$$X_q P^y - Y_p Q^x = \Delta_{pq} = \Delta_{xq} = \Delta_{yq} = 0\,;$$

ce qui donne les transformations dualistiques.

En concluant on observe que le problème précédent et sa solution peuvent être generalisés pour un espace à $n+1$ dimensions.

En effet, soit

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \quad Z = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

une transformation ponctuelle qui ne change pas l'équation

$$\sum_1^n{}_i \sum_j p_{i,j}\, d x_i\, d x_j = 0\,, \qquad p_{i,j} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\,;$$

en vertu des identités

$$d z = \sum_1^n{}_i\, p_i\, d x_i, \qquad d p_i = \sum_1^n{}_j\, p_{ij}\, d x_j\,,$$

on a

$$P_i = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{\Delta^{(i}}{\Delta}\,,$$

où

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} & X_{1z} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} & X_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} & X_{nz} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & -1 \end{vmatrix}, \qquad X_{jx_i} \equiv \frac{\partial X_j}{\partial x_i},$$

est $\Delta^{(i)}$ se dérive de Δ en remplaçant la $i^{ième}$ ligne par

$$Z_{x_1} Z_{x_2} \dots Z_{x_n} Z_z ;$$

et aussi on trouve

$$P_{ij} = P_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}) =$$
$$= \frac{D^{(i)}}{\Delta} = \frac{D^{(j)}}{\Delta},$$

où $D^{(i)}$ se forme de Δ quand on remplace la $i^{ième}$ ligne par

$$P_{ix_1} P_{ix_2} \dots P_{ix_n} P_{iz} .$$

D'ailleurs

$$d X_i = X_{iz}\, d z + \sum_1^n{}_j X_{ix_j}\, d x_j ,$$

et en construisant l'équation aux dérivées totales

$$\sum_1^n{}_i \sum{}_j P_{ij}\, d X_i\, d X_j = 0$$

on voit qu'elle réduit à l'équation

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} \end{vmatrix}^2 .$$

$$\begin{vmatrix} X_{1x_1} & X_{1x_2} & \dots & X_{1x_n} & X_{1z} \\ X_{2x_1} & X_{2x_2} & \dots & X_{2x_n} & X_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{nx_1} & X_{nx_2} & \dots & X_{nx_n} & X_{nz} \\ Z_{x_1} & Z_{x_2} & \dots & Z_{x_n} & Z_z \end{vmatrix} \left\{ \sum_1^n{}_i \sum{}_j p_{ij}\, d x_i\, d x_j \right\} + \Phi = 0 ;$$

l'évanouissement identique pour toutes les valeurs de p_i, p_{ij}, de l'expansion de Ω donne le système suivant des équations aux dérivées partielles pour les fonctions inconnues:

$$Z_{x_i} X_{jx_ix_i} - X_{jx_i} Z_{x_ix_i} = 0\,,$$

$$Z_{x_i} X_{jx_ix_k} - X_{jx_i} Z_{x_ix_k} + z\,(Z_{x_k} X_{jx_ix_k} - X_{jx_k} Z_{x_ix_k}) = 0\,,$$

$$Z_{x_i} X_{jx_kx_l} + Z_{x_k} X_{jx_ix_l} + Z_{x_l} X_{jx_ix_k} - X_{jx_i} Z_{x_kx_l} - X_{jx_k} Z_{x_ix_l} - X_{jx_l} Z_{x_ix_k} = 0\,,$$

$$x_{n+1} = z\,, \qquad i,\, j,\, k,\, l = 1,\, 2, \ldots,\, n+1.$$

Il est commode pour l'intégration de ce système à diminuer le nombre des variables par unité et à écrire le système:

$$\varphi_{1x_i} \varphi_{jx_ix_i} - \varphi_{jx_i} \varphi_{1x_ix_i} = 0, \tag{a}$$

$$\varphi_{1x_i} \varphi_{jx_kx_k} - \varphi_{jx_i} \varphi_{1x_kx_k} + 2\,(\varphi_{1x_k} \varphi_{jx_ix_k} - \varphi_{jx_k} \varphi_{1x_ix_k}) = 0, \tag{b}$$

$$\varphi_{1x_i} \varphi_{jx_kx_l} + \varphi_{1x_k} \varphi_{jx_ix_l} + \varphi_{1x_l} \varphi_{jx_ix_k} - \varphi_{jx_i} \varphi_{1x_kx_l} - \varphi_{jx_k} \varphi_{1x_ix_l} - \varphi_{jx_l} \varphi_{1x_ix_k} = 0; \tag{c}$$

on déduit des équations (a) que

$$\frac{\partial \log \varphi_{1x_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \log \varphi_{2x_j}}{\partial x_j} = \cdots = \frac{\partial \log \varphi_{nx_j}}{\partial x_j}, \quad j - 1,\, 2, \ldots,\, n; \tag{d}$$

donc

$$\varphi_{ix_j} = \Phi^{ij}(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_{j-1},\, x_{j+1}, \ldots,\, x_n)\, \varphi_{1x_j}\,, \quad i,\, j = 1,\, 2, \ldots,\, n. \tag{e}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (b) on a

$$\left.\begin{aligned} (\Phi^{i1} - \Phi^{ij})\, \varphi_{1x_1x_1} \varphi_{1x_j} + 2\, \Phi^{i1}_{x_j} (\varphi_{1x_1})^2 = 0\,, \\ (\Phi^{ij} - \Phi^{i1})\, \varphi_{1x_jx_j} \varphi_{1x_1} + 2\, \Phi^{ij}_{x_1} (\varphi_{1x_j})^2 = 0\,, \\ i,\, j = 1,\, 2, \ldots,\, n. \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

Les équations (d) donnent

$$(\Phi^{ij} - \Phi^{ik})\, \varphi_{1x_jx_k} + \Phi^{ij}_{x_k} \varphi_{1x_j} - \Phi^{ik}_{x_j} \varphi_{1x_k} = 0, \quad i,\, j,\, k = 1,\, 2, \ldots,\, n, \tag{g}$$

en vertu d'égalité

$$\varphi_{ix_jx_k} = \varphi_{ix_kx_j}\,.$$

En différentiant les équations (f) par rapport à x_1 et x_j on a

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{ij}_{x_1} \varphi_{1x_1x_1} \varphi_{1x_j} - (\Phi^{i1} - \Phi^{ij})\,(\varphi_{1x_1x_1x_1} \varphi_{1x_j} + \varphi_{1x_1x_1} \varphi_{1x_1x_j}) - \\ - 4\, \Phi^{i1}_{x_j} \varphi_{1x_1} \varphi_{1x_1x_1} = 0\,, \\ \Phi^{i1}_{x_j} \varphi_{1x_jx_j} \varphi_{1x_1} + (\Phi^{i1} - \Phi^{ij})\,(\varphi_{1x_jx_jx_j} \varphi_{1x_1} + \varphi_{1x_jx_j} \varphi_{1x_1x_j}) - \\ - 4\, \Phi^{ij} \varphi_{1x_j} \varphi_{1x_jx_j} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

En éliminant les quantités $\varphi_{i x_j x_j}$ et $\varphi_{i x_j x_k}$ des équations (h) au moyen des équations (f) et (g) on trouve après une réduction facile

$$\varphi_{i x_j x_j x_j} = \frac{6\,(\varphi_{i x_j})^3\,(\Phi^{ij}_{x_k})^2}{(\varphi_{i x_k})^2\,(\Phi^{ij} - \Phi^{jk})^2}. \tag{i}$$

L'élimination des quantités

$$(\Phi^{ij}_{x_k})^2 \,/\, (\Phi^{ij} - \Phi^{jk})^2$$

au moyen des équations (e) donne

$$\frac{\varphi_{i x_j x_j x_j}}{\varphi_{i x_j x_j}} = \frac{3}{2}\,\frac{\varphi_{i x_j x_j}}{\varphi_{i x_j}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

en intégrant on trouve

$$\frac{\varphi_{i x_j x_j}}{(\varphi_{i x_j})^{\frac{3}{2}}} = f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n);$$

$$\varphi_{i x_j} = \frac{1}{\alpha_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, x_j + \beta_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)};$$

et enfin

$$\varphi_i = \frac{\gamma_{ij}\, x_j + \delta_{ij}}{\alpha_{ij}\, x_j + \beta_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

où les formes

$$\alpha_{ij}, \ \beta_{ij}, \ \gamma_{ij}, \ \delta_{ij}$$

sont des fonctions de

$$x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n;$$

donc la fonction φ_i est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions linéaires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les équations (e) demandent que les dénominateurs soient les mêmes fonctions à une facteur prés; on le voit en supposant que

$$\varphi_i = \frac{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad \varphi_j = \frac{\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

où α, β, γ, δ sont des fonctions linéaires par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$; les équations (e) donnent

$$\frac{\varphi_{i x_k}}{\varphi_{j x_k}} = \frac{\gamma^2(\delta\,\beta_{x_k} - \beta\,\delta_{x_k})}{\delta^2(\gamma\,\alpha_{x_k} - \alpha\,\gamma_{x_k})} = \frac{\Phi^{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{\Phi^{j1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)} =$$

$$= \rho_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

mais

$$\frac{\delta\,\beta_{x_k}-\beta\,\delta_{x_k}}{\gamma\,\alpha_{x_k}-\alpha\,\gamma_{x_k}}=\rho_k(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_{k-1},\,x_{k+1},\ldots,\,x_n);$$

parce que les fonctions α, β, γ, δ sont linéaires par rapport à chacune variable; donc le rapport $\gamma:\delta$ est une constante.

Enfin les équations (b) et (c) interdisent que les produits $x_k\,x_l$ apparaissent dans φ_j; donc on a

$$\varphi_i=\frac{\sum_1^n{}_j\,\alpha_{ij}\,x_j+\alpha_{in+1}}{\sum_1^n{}_j\,\beta_j\,x_j+\beta_{n+1}}\,.$$

Pour que déterminer les autres transformations de contact il ne faut considérer que les déterminants

$$|\,X_1^{x_1},\;X_2^{x_2},\ldots,\;X_n^{x_n}\,|,\qquad |\,X_{1p_1},\;X_{2p_2},\ldots,\;X_{np_n}\,|,$$
$$|\,P_{1p_1},\;P_{2p_2},\ldots,\;P_{np_n}\,|,$$

où

$$K_i^{x_j}=K_{ix_j}+p_j\,K_{iz},\quad K_{ix_j}=\frac{\partial K_i}{\partial x_j},\quad K_{ip_j}=\frac{\partial K_i}{\partial p_j};$$

les deux cas possibles donnent ou

$$X_{1p_1}=X_{1p_2}=\cdots=X_{1p_n}=X_{2p_1}=\cdots=X_{np_n}=0,$$

ou

$$P_{1p_1}=P_{1p_2}=\cdots=P_{1p_n}=P_{2p_1}=\cdots=P_{np_n}=0,$$

c'est-à-dire les transformations projectives et les transformations dualistiques.

Teoria del Giroscopio simmetrico pesante.

(*Di* R. Marcolongo, *a Messina.*)

Il Darboux in alcuni articoli dei *Comp. Ren.* (T. CI. 1885, p. 11 e 115); nelle Note alla *Mécanique de Despeyrous* (1884-1886) e nel *Journal de Liouville* (IV Ser., T. I, 1885); ha pel primo ridotta a grandissima semplicità la teoria del giroscopio simmetrico pesante, nell'intento di dimostrare alcuni risultati dell'Halphen relativi al celebre teorema di Jacobi.

I suoi lavori hanno dato origine ad una serie di altre interessanti ricerche dovute ai sigg. W. Hess (*Mathem. Ann.*, B. 29, 1887), Routh (*Quart. Journ.*, t. XXIII), al prof. Padova (*Atti Is. Ven.*, Ser. VII, T. III, 1892) e al sig. Greenhill (*Proc. Lon. Mat. Soc.*, Vol. XXVI-1895). Alcune di queste ricerche si basano sull'uso delle funzioni ellittiche (*).

Ispirandomi ai concetti sviluppati nel bellissimo libro dei sigg. Klein e Sommerfeld (*Ueber die Theorie des Kreisels*, 1898) espongo in questa Nota una teoria elementare e completa al tempo stesso del giroscopio simmetrico pesante, la quale permette di dedurre per via semplicissima le proprietà più notevoli del movimento.

(*) Io stesso mi sono occupato dell'argomento nel Tomo XXII, Ser. II di questi *Annali*, 1894 (questo lavoro sarà nel seguito accennato con Mem.): nel *Journal de Sc. Mathem. e Astron.*, Vol. XIII, 1897 e Vol. XIV, 1901.

L'ERPOLOIDE GENERALIZZATA.

Cominciamo coll'investigare le proprietà di una curva piana, traiettoria di un punto mobile, definita dalle due seguenti leggi:

la velocità areale è una funzione biquadrata del raggio vettore;

il quadrato della velocità totale è pure una funzione biquadrata del raggio vettore.

Posto:

$$u = \alpha\, t \qquad (\alpha \text{ costante});$$

dette x, y le coordinate ortogonali del punto mobile; ρ, ϖ le coordinate polari, abbiamo:

$$\rho^2 \frac{d\varpi}{du} = x y' - x' y = a \rho^4 + b \rho^2 + c$$

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varpi}{du}\right)^2 = x'^2 + y'^2 = a_1 \rho^4 + b_1 \rho^2 + c_1$$

a, b,... c_1 essendo costanti.

Da queste equazioni, con breve calcolo, si deduce:

il quadrato dell' accelerazione totale è una funzione di 3.º grado in ρ^2 (*).

Inoltre si ha:

$$\rho^2 x'' = x\varphi - y\psi; \qquad \rho^2 y'' = y\varphi + x\psi,$$

essendo φ di terzo grado in ρ^2, e ψ^2 di sesto grado in ρ^2: la forma poi di questi polinomi è assegnabile facilmente. Si può quindi dire che il punto descrive liberamente la traiettoria sotto l'azione di due forze: una, eguale a $\varphi : \rho$, secondo il raggio vettore; l'altra, eguale a $\psi : \rho$, normale al raggio vettore.

Nel caso speciale di:

$$a = b = 0$$

si ha:

$$\varphi = (2\, a_1 \rho^2 + b_1)\rho^2; \qquad \psi = 0;$$

(*) Questo risultato rettifica una inesattezza incorsa nella nota a pag. 14 della Mem. In generale è ancor facile provare che in quei moti piani in cui la velocità areale e il quadrato della velocità totale sono funzioni razionali intere di ρ^2, il quadrato dell'accelerazione è una funzione razionale intera di ρ^2.

il movimento è prodotto da una forza centrale di intensità:

$$2\, a_1 \rho^3 + b_1 \rho.$$

Se invece fosse:

$$a = 0; \qquad b \gtrless 0;$$

posto:

$$\varpi = \theta + b\, u,$$

riferendoci cioè ad una coppia di assi mobili uniformemente intorno all'origine, risulta:

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d u} = c.$$

Rispetto a questi assi è quindi valida la stessa conseguenza (GREENHILL, *The Applications of Ell. Fun.*, 1892, pag. 223).

È facile assegnare l'equazione della curva. Facciasi:

$$\omega = \rho^2 = x^2 + y^2; \qquad x\, x' + y\, y' = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d u}.$$

Quindi:

$$\left(\frac{d\omega}{d u}\right)^2 = 4\,\omega\,(a_1 \omega^2 + b_1 \omega + c_1) - 4\,(a\,\omega^2 + b\,\omega + c)^2;$$

di qui, per una nota formula d'inversione, si ha:

$$\omega = \frac{\alpha\, p\, u + \beta\, p'\, u + \gamma}{p\, u - p\, v},$$

essendo α, β, γ, v costanti: e precisamente:

$$\beta = \frac{1}{4\, i\, a}.$$

Inoltre è da notare che il numeratore si annulla per $u = v = v_1 + v_2$, essendo $-v_1$ e $-v_2$ altre due radici. Ma (vedi Mem. pag. 12):

$$\alpha\, p\, u + \beta\, p'\, u + \gamma = \frac{\sigma(u - v_1 - v_2)\,\sigma(u + v_1)\,\sigma(u + v_2)}{\sigma^3 u},$$

essendo:

$$2\,\beta = \sigma v_1\, \sigma v_2\, \sigma(v_1 + v_2); \qquad a = \frac{1}{2\, i\, \sigma v_1\, \sigma v_2\, \sigma(v_1 + v_2)}.$$

Quindi:

$$\omega = -\sigma^2 (v_1 + v_2) \frac{\sigma(u + v_1)\,\sigma(u + v_2)}{\sigma u\, \sigma(u + v_1 + v_2)}.$$

Poniamo:

$$\xi = x + i\,y\,; \qquad \eta = x - i\,y\,; \qquad \omega = \xi\,\eta\,;$$

e risulterà:

$$\frac{d}{d\,u} \log \frac{\xi}{\eta} = 2\,i\left(a\,\omega + b + \frac{c}{\omega}\right).$$

Conviene quindi decomporre in elementi semplici la funzione doppiamente periodica del secondo membro; coi metodi ordinari si trova:

$$a\,\omega = \frac{1}{2\,i}\,\{\zeta\,(u + v_1 + v_2) - \zeta\,u\,\} + \text{cost.}$$

Nè occorrono nuovi calcoli per $\frac{c}{\omega}$, notando che c rispetto $\frac{1}{\omega}$ sta nello stesso rapporto di a rispetto ω, ciò che si vede subito colla sostituzione $\omega_1 = \frac{1}{\omega}$; integrando:

$$\frac{\xi}{\eta} = C^2\,e^{2iku}\,\frac{\sigma\,(u + v_1 + v_2)\,\sigma\,(u + v_1)}{\sigma\,u\,\sigma\,(u + v_2)}\,;$$

e combinando questa espressione col valore già trovato per ω, otterremo infine:

$$\xi = m\,e^{iku}\,\frac{\sigma\,(u + v_1)}{\sigma\,u}, \qquad (m \text{ costante}).$$

Di qui si conclude che:

le coordinate della curva (nella combinazione $x + i\,y$) si esprimono mediante funzioni doppiamente periodiche di seconda specie e di primo grado.

La discussione dei valori di ρ dipende dalla considerazione delle radici di:

$$a_1\,\rho^4 + b_1\,\rho^2 + c_1 = 0.$$

Nel caso particolare in cui:

$$a = 0\,, \qquad a_1 = -\frac{1}{\mu^2},$$

la considerazione del quadrato della velocità mostra subito che la curva è compresa tra due cerchi reali, uno dei quali può essere nullo o infinitamente grande, a cui risulta alternativamente tangente. Infatti le radici del trinomio non possono essere nè immaginarie, nè reali e negative; ma una positiva e l'altra negativa, o tutte e due positive. Nel primo caso ω è sempre maggiore di una quantità finita; nel secondo è compresa tra due limiti finiti. Si ha poi:

$$\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2 = \alpha_0 \omega^3 + \alpha_1 \omega^2 + \alpha_2 \omega + \alpha_3,$$

dove:

$$\alpha_0 = 4 a_1; \qquad \alpha_3 = -4 c^2.$$

Quindi porremo:

$$\omega = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \frac{4}{\alpha_0} p u = \mu^2 (p v - p u);$$

$$p v = \frac{\alpha_1}{4},$$

La funzione p essendo costruita cogli invarianti:

$$g_2 = \frac{3}{4}(\alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2); \qquad g_3 = \frac{1}{16}(3 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - 2 \alpha_1^3 - \alpha_0^2 \alpha_3),$$

è facile ricavare:

$$\frac{1}{2i} p' v = \frac{c}{\mu^2};$$

e poichè:

$$\frac{d\varpi}{du} = b + \frac{c}{\omega} = b + \frac{c}{\mu^2} \frac{1}{pv - pu},$$

posto:

$$b = -\frac{\varepsilon h}{\mu} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

otterremo:

$$\frac{d\varpi}{du} = -\frac{\varepsilon h}{\mu} + \frac{1}{2i} \frac{p' v}{pv - pu},$$

$$\rho^2 = \mu^2 (p v - p u);$$

e queste formole (Halphen, *Traité d. Fon. Ell.*, T. II) individuano una erpoloide di un moto alla Poinsot. La curva definita dalle due leggi poste in principio di questo paragrafo, e che comprende come caso particolare l'erpoloide di un moto alla Poinsot, si chiamerà una *erpoloide generalizzata.*

Quelle due leggi costituiscono una estensione delle leggi di Darboux. Dalla analisi precedente risulta ancora un teorema inverso a quello di Darboux e cioè:

la sola curva descritta da un mobile conformemente alle leggi di Darboux *è l'erpoloide di un moto alla* Poinsot.

Definizioni e notazioni.

Un *giroscopio* è un corpo rigido sospeso ad un punto fisso O; se l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso è di rotazione ed il centro di massa trovasi sull'asse di rotazione, il giroscopio dicesi *simmetrico*; dicesi *sferico* se l'ellissoide è una sfera. Ci occuperemo esclusivamente di questi due casi.

Diremo $A = B$, C i momenti principali d'inerzia relativi ad O $(2A > C)$. Degli assi d'inerzia relativi al centro di massa G, due sono paralleli a quelli del punto fisso; il terzo, asse di simmetria, è comune; siano $A_1 = B_1$, C i momenti relativi. Rispetto ad un altro punto dell'asse di simmetria, distante di δ da G, i momenti sono:

$$A_1 + M\delta^2, \; C.$$

Se quindi $A_1 < C$, potremo determinare due punti reali dell'asse di simmetria, equidistanti da G, e rispetto ai quali l'ellissoide d'inerzia è una sfera. Si può dunque dire che, in tal caso, l'ipotesi della sfericità del giroscopio non specializza il corpo, ma il punto di sospensione.

Diremo: x, y, z gli assi principali d'inerzia relativi ad O (z asse di simmetria); x_1, y_1, z_1 quelli fissi concentrici (z_1 verticale positivo verso l'alto); a_1, a_2, a_3; $b_1, \ldots$ i coseni degli angoli che gli assi mobili fanno coi fissi. Sia $OG = \zeta$ (supponiamo, com'è sempre possibile, $\zeta > 0$) e siano ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate assolute di G; diciamo ancora: $\overline{OI}$ l'asse della coppia d'impulso e P, Q, R; P_1, Q_1, R_1 rispettivamente le sue componenti rispetto alle due terne; $\overline{O\Omega}$ l'asse istantaneo di rotazione e p, q, r; p_1, q_1, r_1, le sue componenti. Per la scelta speciale degli assi mobili abbiamo:

$$P = Ap, \qquad Q = Aq, \qquad R = Cr;$$
$$P : Q = p : q$$

cioè: *l'asse di simmetria, l'asse della coppia di impulso e l'asse istantaneo di rotazione sono in uno stesso piano.*

Notiamo infine che detta T l'energia cinetica, U l'energia potenziale, si ha, supposto il giroscopio soggetto al solo peso:

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$
$$U = Mg\zeta_1 = Mg\zeta c_3 = Sc_3,$$

essendo:

$$\xi_1 = a_3 \zeta, \qquad \eta_1 = b_3 \zeta, \qquad \zeta_1 = c_3 \zeta, \qquad S = M g \zeta > 0.$$

Le curve descritte dal punto I nello spazio e nel corpo si chiamano rispettivamente *prima e seconda curva d'impulso*; le curve descritte dal punto Ω nello spazio e nel corpo si chiamano *erpoloide* e *poloide*. Per meglio rappresentare il movimento dell'asse di simmetria del corpo si consideri su questo asse il vettore $\overline{OV} = 1$; V dicesi *vertice del giroscopio* e la curva descritta da V nello spazio dicesi *curva del vertice*. Infine si noti che:

$$\overline{OI}^2 = P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

$$\overline{O\Omega}^2 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

Equazioni differenziali ed integrali.

Le equazioni del moto del giroscopio simmetrico pesante si possono porre sotto forme diverse, egualmente importanti e che, in breve, ricorderemo.

La seconda legge di Newton sulla variazione dell'impulso ci dà:

$$\frac{d P_1}{d t} = M_{x_1}, \qquad \frac{d Q_1}{d t} = M_{y_1}, \qquad \frac{d R_1}{d t} = M_{z_1},$$

essendo M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1} le componenti, secondo gli assi fissi, del momento della gravità cioè di:

$$S\sqrt{1 - c_3^2};$$

e però sarà:

$$\frac{d P_1}{d t} = - M g \eta_1; \qquad \frac{d Q_1}{d t} = M g \xi_1; \qquad \frac{d R_1}{d t} = 0. \tag{1}$$

Riferendoci invece agli assi mobili, la stessa legge dà luogo alle equazioni euleriane:

$$\frac{d P}{dt} = (A - C) q r + S c_2; \quad \frac{d Q}{d t} = -(A - C) p r - S c_1; \quad \frac{d R}{d t} = 0. \tag{2}$$

Tra le p, q, r e le derivate dei nove coseni hanno luogo le relazioni di

Poisson:

$$\frac{d a_1}{d t} = r a_2 - q a_3 ; \quad \frac{d a_2}{d t} = p a_3 - r a_1 ; \quad \frac{d a_3}{d t} = q a_1 - p a_2 \tag{3}$$

ecc.

Possiamo agevolmente trovare un altro sistema di equazioni differenziali, notando che:

$$\frac{d p_1}{d t} = a_1 \frac{d p}{d t} + a_2 \frac{d q}{d t} + a_3 \frac{d r}{d t}, \quad \text{ecc.}$$

da cui si ricava:

$$\left.\begin{aligned} A \frac{d p_1}{d t} &= (A - C) r \frac{d a_3}{d t} - S b_3, \\ A \frac{d q_1}{d t} = (A - C) r \frac{d b_3}{d t} + S a_3, &\quad A \frac{d r_1}{d t} = (A - C) r \frac{d c_3}{d t}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Del sistema (1) è facile stabilire un integrale:

$$R_1 = \text{cost.} \tag{5}$$

che equivale a:

$$P c_1 + Q c_2 + R c_3 = R_1 \tag{6}$$

ed è un integrale del sistema (2), che a sua volta ammette quest'altro:

$$R = C r = \text{cost.} \tag{7}$$

Abbiamo poi l'integrale della conservazione dell'energia

$$A (p^2 + q^2) + 2 S c_3 = h - C r^2. \tag{8}$$

Per ciò che riguarda il sistema (4) osserviamo che la (6) equivale a:

$$A (p c_1 + q c_2) + R c_3 = R_1 ; \tag{9}$$

ma è:

$$r_1 = p c_1 + q c_2 + r c_3$$

onde:

$$A r_1 = (A - C) r c_3 + R_1$$

od anche:

$$r_1 = n c_3 + \frac{R_1}{A} \tag{10}$$

dove:

$$n = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) R.$$

Si ha infine:

$$p_1^2+q_1^2+r_1^2=p^2+q^2+r^2=\frac{h-C r^2}{A}+r^2-\frac{2S}{A}c_3. \qquad (11)$$

Quadrando e sommando le due equazioni:

$$p c_1+q c_2=\frac{R_1-R c_3}{A}, \quad q c_1-p c_2=\frac{d c_3}{d t},$$

otterremo p^2+q^2 espresso per c_3 e $\frac{d c_3}{d t}$; allora, eliminando dalla (8) il binomio p^2+q^2, risulterà $\left(\frac{d c_3}{d t}\right)^2$ eguale ad una funzione razionale intera di terzo grado in c_3. Da questo risultato è facile dedurre che la risoluzione completa del problema si riconduce alle quadrature ellittiche.

È da notare poi che il binomio $h-C r^2$ dipende da S, da A e dai valori iniziali di p, q, c_3. Diremo *simili* tutti quei giroscopi simmetrici pesanti (relativi allo stesso punto di sospensione e allo stesso asse di simmetria) che hanno a comune

$$A, \ S, \ R, \ R_1,$$

l'impulso iniziale e il valore iniziale di c_3. I giroscopi simili non differiscono quindi che pel valore di C. Il più semplice di questi è il giroscopio sferico. Per tutti i giroscopi simili c_3 è sempre la stessa funzione del tempo; onde:

tutti i giroscopi simili hanno lo stesso cono dell'asse di simmetria e quindi anche la stessa curva del vertice.

Della prima curva d'impulso.

La proiezione R_1 di $\overline{OI}$ su z_1 essendo costante, si deduce subito che la prima curva d'impulso è contenuta in un piano verticale.

Siano R ed R_1 rispettivamente le proiezioni di I su z e z_1 e sia K quella sul piano $z z_1$; le $R_1 K$ e $R K$ risultano rispettivamente normali a z_1 e z. Dalle equazioni (1) si deduce:

$$\xi_1 \frac{d P_1}{d t}+\eta_1 \frac{d Q_1}{d t}+\zeta_1 \frac{d R_1}{d t}=0,$$

cioè la velocità del punto I (sulla prima curva d'impulso) è normale a z ed essendo contenuta nel piano $I R_1 K$ è pure normale a z_1 e quindi al piano $z z_1$: dunque la $I K$ è la direzione della velocità di I. La grandezza v_1 di questa velocità è data da:

$$v_1^2 = S^2 (1 - c_3^2).$$

Cerchiamo ancora la velocità areale di I; cioè:

$$P_1 \frac{d Q_1}{d t} - Q_1 \frac{d P_1}{d t} = M g (P_1 \xi_1 + Q_1 \eta_1).$$

Ma:

$$P_1 \xi_1 + Q_1 \eta_1 + R_1 \zeta_1 = R \zeta$$

ambedue i prodotti esprimendo il prodotto scalare di $\overline{O I}$ per $\overline{O G}$; onde:

$$P_1 \frac{d Q_1}{d t} - Q_1 \frac{d P_1}{d t} = S (R - R_1 c_3).$$

Detto infine ρ_1 il raggio vettore $R_1 I$, si ha:

$$\rho_1^2 = P_1^2 + Q_1^2 = A (h - C r^2) + R^2 - R_1^2 - 2 A S c_3,$$

cioè ρ_1^2 è una funzione lineare di c_3; possiamo quindi dire:

il quadrato della velocità totale del punto I sulla prima curva d'impulso è una funzione biquadrata di ρ_1 *che ha negativo il coefficiente di* ρ_1^4 *e la velocità areale è una funzione lineare di* ρ_1^2.

Queste leggi, in virtù del teorema di Darboux, bastano a caratterizzare la curva stessa: cioè:

la prima curva d'impulso è una erpoloide di un moto alla Poinsot.

Risulta pure immediatamente:

tutti i giroscopi simili hanno la stessa prima curva d'impulso.

La discussione dei flessi di questa curva si fa in modo semplicissimo, valendosi dello stesso metodo adoperato dal Darboux nel caso di un moto alla Poinsot.

Infatti i valori di $c_3 = u$ cui corrispondono flessi si ottengono eguagliando a zero il differenziale di:

$$\frac{v_1^2}{\left(P_1 \frac{d Q_1}{d t} - Q_1 \frac{d P_1}{d t}\right)^2} = \frac{1 - u^2}{(R - R_1 u)^2}.$$

Otterremo, così operando, l'equazione di primo grado in u:

$$R_1 - R u = 0.$$

Per la realtà dei flessi occorre quindi che sia:

$$|R_1| \leq |R|$$

e che inoltre u cada entro i limiti tra i quali varia c_3.

Della seconda curva d'impulso.

Con un metodo del tutto analogo si investigano le proprietà di questa seconda curva.

Essendo $R = \text{cost.}$, anche questa curva è contenuta in un piano normale all'asse di simmetria (parallelo al piano equatoriale). Sia ρ il raggio vettore $\overline{IR}$: è:

$$\rho^2 = \overline{IR}^2 = P^2 + Q^2 = A(h - Cr^2) - 2ASc_3$$

cioè: *ρ^2 è una funzione lineare di c_3 ed è la stessa per tutti i giroscopi simili.*

Quadrando e sommando le equazioni (2) otteniamo il quadrato della velocità totale v del punto I sulla seconda curva d'impulso, cioè:

$$v^2 = (A - C)^2 r^2 (p^2 + q^2) + S^2 (c_1^2 + c_2^2) + 2S(A - C) r (p c_1 + q c_2)$$

oppure:

$$A v^2 = (A - C)^2 r^2 (h - Cr^2 - 2Sc_3) + AS^2 (1 - c_3^2) + \\ + 2S(A - C) r (R_1 - R c_3)$$

e però:

il quadrato della velocità del punto I sulla seconda curva d'impulso è una funzione biquadrata di ρ che ha negativo il coefficiente di ρ^4.

Per la velocità areale abbiamo:

$$P \frac{dQ}{dt} - Q \frac{dP}{dt} = -(A - C) r (h - Cr^2 - 2Sc_3) - S(R_1 - Rc_3);$$

essa è dunque una funzione lineare di c_3 e quindi di ρ^2; quindi

la seconda curva d'impulso è pure una erpoloide di un moto alla Poinsot.

Detta ϖ l'anomalia si vede subito che $\frac{d\varpi}{dt}$ è eguale ad una funzione di ρ^2 aumentata del termine costante:

$$-n = -\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) R.$$

Però ϖ non è lo stesso per tutti i giroscopi simili: tuttavia *prescindendo da una rotazione uniforme intorno all'asse di simmetria e di velocità angolare n,* si può dire che *tutti i giroscopi simili hanno la stessa seconda curva d'impulso.*

Consideriamo due casi particolari notevolissimi.

Nel caso del giroscopio sferico ($A = C$) le equazioni precedenti ci danno:

$$v^2 = S^2 (1 - c_3^2)$$

e le (2) diventano:

$$\frac{dP}{dt} = S c_2, \quad \frac{dQ}{dt} = - S c_1, \quad \frac{dR}{dt} = 0;$$

e però:

$$c_1 \frac{dP}{dt} + c_2 \frac{dQ}{dt} + c_3 \frac{dR}{dt} = 0$$

cioè la velocità del punto I è diretta normalmente all'asse z_1 e però la IK è tangente alla seconda curva di impulso: cioè le due curve di impulso si toccano nel punto I; inoltre la velocità del punto I sulle due curve è la stessa, cioè:

il moto di un giroscopio sferico si può riprodurre facendo rotolare l'un sull'altro due coni aventi per base due erpoloidi, che nel moto rotolano pure l'una sull'altra.

Questo teorema, come è chiaro, non è valido nel caso generale.

Nel caso in cui sia inizialmente:

$$p = q = 0$$

si ha:

$$R\,(c_3)_0 = R_1$$

e quindi:

$$|R_1| \leq |R|.$$

Dall'integrale (8) poi si deduce:

$$2\,S\,(c_3)_0 = h - C\,r^2$$

onde:

$$2\,S\,R_1 = R\,(h - C\,r^2);$$

la quale relazione permette di eliminare dalle espressioni precedenti il binomio $h - Cr^2$. Così si troverà subito:

$$\rho^2 = \frac{2SA}{R}(R_1 - Rc_3)$$

$$v^2 = \frac{2Sr(A-C)}{C}(R_1 - Rc_3) + S^2(1 - c_3^2);$$

$$P\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dP}{dt} = -\frac{2A-C}{C}S(R_1 - Rc_3).$$

Anche in questo caso è facile la discussione dei flessi; infatti:

$$\frac{v^2}{\left(P\frac{dQ}{dt} - Q\frac{dP}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2A-C}{C}\right)^2 S}\left\{\frac{2\alpha}{R_1 - Ru} + \frac{S(1-u^2)}{(R_1 - Ru)^2}\right\};$$

dove:

$$\alpha = \frac{r(A-C)}{C}$$

Differenziando e ponendo eguale a zero, si trova:

$$u = \frac{R_1}{R}\frac{\alpha_2 + \alpha}{\alpha_1 + \alpha}$$

avendo posto:

$$\alpha_1 = \frac{SR_1}{R^2}, \quad \alpha_2 = \frac{SR}{RR_1}.$$

Limitandoci, per brevità, a considerare il solo caso di R ed R_1 positivi, si ha:

$$\alpha_1 < \alpha_2;$$

inoltre u dovendo essere, in valore assoluto, minore di $\frac{R_1}{R}$, la frazione $\frac{\alpha_2 + \alpha}{\alpha_1 + \alpha}$ deve risultare minore di uno. Di qui si deduce subito che:

se $\alpha \geq 0$ la seconda curva d'impulso non ha flessi reali; se α è negativo e (in valore assoluto) minore di α_1 non si hanno flessi reali: questi invece sono reali se α essendo negativo, è però maggiore di α_2. Per α negativo e in valore assoluto compreso tra α_1 e α_2 i flessi sono reali se cade nell'intervallo $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ e α_2; nell'altro caso sono immaginari (*).

(*) Questa analisi completa quella della pag. 16 della Mem. che è relativa alla tacita ipotesi di

$$1 + 3e_2 m^2 > 0.$$

Mentre nel caso generale la 2.ª curva d'impulso è, come l'erpoloide, compresa tra due cerchi cui risulta tangente, in questo caso la curva passa per l'origine ed è contenuta entro un determinato cerchio.

Ricorrendo alla nota rappresentazione dell'erpoloide mediante funzioni ellittiche, possiamo dire:

le due curve d'impulso si rappresentano mediante funzioni doppiamente periodiche di seconda specie e di primo grado.

Della poloide e della erpoloide.

Le coordinate del punto Ω rispetto agli assi mobili sono p, q, r; quindi:

la poloide è una curva piana ed è una erpoloide simile alla seconda curva d'impulso.

Tutti i punti dell'asse istantaneo di rotazione descrivono curve simili alla poloide.

Poichè $O\,\Omega$, $O\,I$, $O\,z$ giacciono in uno stesso piano, vi ha un punto di $O\,\Omega$, di coordinate $A\,p$, $A\,q$, $A\,r$, che descriverà una curva eguale alla seconda curva d'impulso.

Eliminando c_3 tra le equazioni (10) e (11) si ottiene una prima equazione tra p_1, q_1, r_1 della forma

$$p_1^2 + q_1^2 + \left(r_1 + \frac{S}{A\,n}\right)^2 = \text{cost.} = K^2;$$

quindi:

l'erpoloide del giroscopio simmetrico pesante è una curva situata su di una sfera il cui centro giace sull'asse verticale; il moto del giroscopio si può quindi riprodurre col rotolamento di una erpoloide di un moto alla Poinsot *su di una sfera* (*). *La velocità di rotolamento è eguale al raggio.*

(*) Se il giroscopio simmetrico è soggetto a forze che ammettono un potenziale funzione del solo angolo che l'asse di simmetria fa con una retta fissa p. e. l'asse verticale; il problema è ancora riducibile alle quadrature, come già fu osservato dal Darboux (*Com. Ren.* T. CI; Note XX à la Méc. de Despeyrous). Infatti hanno ancora luogo gli integrali: $R = \text{cost.}$; $R_1 = \text{cost.}$ e l'integrale della conservazione dell'energia:

$$A\,(p^2 + q^2) + C\,r^2 = 2\,f\,(c_3) + h.$$

Consideriamo la proiezione orizzontale della erpoloide: si ha:

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{h - C r^2}{A} - \frac{2 S}{A} c_3 - \left(\frac{R_1}{A} + \frac{A - C}{A} r\, c_3\right)^2 + r^2.$$

Ma si è trovato che il quadrato del raggio vettore delle due curve d'impulso è una funzione lineare di c_3, quindi:

il quadrato del raggio vettore della proiezione orizzontale della erpoloide del giroscopio simmetrico è una funzione biquadrata del raggio vettore della prima e seconda curva di impulso, col coefficiente della quarta potenza negativo (*).

Dalle equazioni (4) si trae, con calcoli assai semplici:

$$p_1 \frac{d q_1}{d t} - q_1 \frac{d p_1}{d t} = \frac{S}{A}\left(r - \frac{R_1}{A} c_3 - \frac{A - C}{A} r\, c_3^2\right) -$$
$$- \frac{A - C}{A^2} r\, c_3 (h - C r^2 - 2 S c_3) - \frac{A - C}{A^2} r^2 (R_1 - R\, c_3);$$

la velocità areale della proiezione orizzontale dell'erpoloide è una funzione di 2.° grado in c_3; e quindi:

Alcune delle proprietà dimostrate seguitano ancora a sussistere; ad esempio: le due curve d'impulso e la polodia sono curve piane. Quanto alla erpoloide notando che:

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \alpha f(c_3) + \beta; \quad c_3 = m r_1 + n$$

risulta:

$$p_1^2 + q_1^2 = \alpha f(m r_1 + n) + \beta - r_1^2 = \varphi(r_1)$$

equazione di una superficie di rotazione intorno all'asse fisso; onde:

l'erpoloide giace su di una superficie di rotazione ed il moto del giroscopio si può riprodurre col rotolamento della poloide su di una superficie di rotazione intorno all'asse fisso; la velocità di rotolamento è uguale al raggio.

Nel caso del giroscopio simmetrico pesante questa superficie è una sfera: nel caso in cui $f = H c_3^2$ considerato da Tisserand (*C. R.*, Tom. CI, 1885), e sviluppato dal Padova (*Rend. Acc. Linc.*, 1886) e nel caso più generale di $f = H_1 c_3^2 + H_2 c_3$, trattato dal sig. Paladini (*Rend. Acc. Linc.*, 1888), le quadrature si effettuano colle funzioni ellittiche e la superficie di rotazione è una quadrica (ellissoide, iperboloide ad una falda o paraboloide). Nel caso in cui $f = \frac{c_3^2}{1 - c_3^2}$, trattato dal sig. Urzí (*Giorn. di Nap.*, 2.ª serie, T. V), che può studiarsi colle funzioni elementari, la superficie di rotazione è del 4.° ordine.

(*) Vedi Mem. pag. 18.

tra la velocità areale e il quadrato del raggio vettore ha luogo una relazione algebrica, biquadrata rispetto al raggio vettore e di secondo grado rispetto alla velocità areale.

È pure facile dedurre che:

il quadrato della velocità del punto che percorre l'erpoloide è una funzione di 2.º grado in c_3; il quadrato della velocità del punto che percorre la proiezione orizzontale dell'erpoloide è di terzo grado in c_3.

Le leggi di Darboux non essendo soddisfatte, in generale, si può dire:

la proiezione orizzontale dell'erpoloide di un giroscopio simmetrico non è una erpoloide di un moto alla Poinsot (*).

Nel caso del giroscopio sferico il vettore $\overline{O\Omega}$ ha la stessa direzione di $\overline{OI}$; e quindi non solo

$$P = A\,p, \quad Q = A\,q, \quad R = A\,r$$

ma ancora:

$$P_1 = A\,p_1, \quad Q_1 = A\,q_1, \quad R_1 = A\,r_1;$$

la erpoloide del giroscopio sferico è simile alla seconda curva d'impulso ed è quindi una erpoloide di un moto alla Poinsot.

Sull'asse verticale considero il punto N d'intersezione colla sfera su cui giace l'erpoloide e distante dal punto O di $K - \frac{S}{A\,n}$; si faccia la proiezione stereografica dell'erpoloide dal polo N sul piano orizzontale. Del resto le stesse considerazioni valgono per l'altro punto d'intersezione. Le coordinate di un punto di questa curva sono proporzionali a:

$$u_1 = \frac{p_1}{O\,N - r_1}; \quad v_1 = \frac{q_1}{O\,N - r_1}.$$

(*) Questo risultato non è conforme a quello del sig. Hess (Mem. cit.), che nelle sue equazioni (65), analoghe alle (4) del presente lavoro, ha trascurato il termine in $A - C$; non regge quindi la sua generalizzazione del teorema di Darboux (pag. 556). Che la proiezione orizzontale non sia effettivamente una erpoloide di un moto alla Poinsot risulta senz'altro dalla formola data nella mia Mem. (pag. 17) la quale esprime il binomio $p_1 + iq_1$, in modo assai semplice, mediante funzioni di seconda specie e *di secondo grado*, mettendo in luce la dipendenza colle coordinate della poloide nel primo moto alla Poinsot; mentre il binomio $x + iy$ nell'erpoloide di un moto alla Poinsot è esprimibile mediante funzioni di 2.ª specie e di *primo grado*. Vedi anche a tal proposito le osservazioni del sig. Klein (libr. cit., pag. 440) e la Nota XIX di Darboux, pag. 542.

Consideriamo la curva le cui coordinate sono u_1, v_1; si trova:

$$u_1^2 + v_1^2 = \rho_1^2 = \frac{K + \frac{S}{A\,n} + r_1}{K - \frac{S}{A\,n} - r_1}$$

e tenendo presente la (10) si deduce che ρ_1^2 è una funzione fratta di r_1 e quindi anche di c_3. Deduciamo inoltre:

$$r_1 = \frac{\left(K - \frac{S}{A\,n}\right)\rho_1^2 - \left(K + \frac{S}{A\,n}\right)}{1 + \rho_1^2}; \quad K - \frac{S}{A\,n} - r_1 = \frac{2\,K}{1 + \rho_1^2}.$$

Ancora:

$$u_1 \frac{d\,v_1}{d\,t} - v_1 \frac{d\,u_1}{d\,t} = \frac{p_1 \frac{d\,q_1}{d\,t} - q_1 \frac{d\,p_1}{d\,t}}{\left(K - \frac{S}{A\,n} - r_1\right)^2};$$

ma un breve calcolo mostra che $p_1 \frac{d\,q_1}{d\,t} - q_1 \frac{d\,p_1}{d\,t}$ è una funzione di secondo grado in c_3 e il coefficiente del termine in c_3^2 è $\frac{2\,S}{A}n$, e quindi è nullo solo nel caso del giroscopio sferico; dunque quel binomio è anche una funzione di secondo grado in r_1; onde:

la velocità areale è una funzione biquadrata di ρ_1.

Si ha infine:

$$\left(\frac{d\,u_1}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,v_1}{d\,t}\right)^2 = \frac{1}{\left(K - \frac{S}{A\,n} - r_1\right)^2} \left\{ \left(\frac{d\,p_1}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,q_1}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,r_1}{d\,t}\right)^2 \right\},$$

e quindi, dopo semplici riduzioni,

$$\left(\frac{d\,u_1}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,v_1}{d\,t}\right)^2 = \frac{1}{\left(K - \frac{S}{A\,n} - r_1\right)^2} \left\{ -\frac{S^2}{A^2\,n^2} r_1^2 + \beta\,r_1 + \gamma \right\},$$

essendo:

$$\beta^2 + \frac{4\,S^2}{A^2\,n^2}\gamma = \frac{4\,S^2\,K^2}{A^2}.$$

Il quadrato della velocità totale è una funzione biquadrata di ρ_1.

Da queste due proprietà si conclude:

la proiezione stereografica della erpoloide del giroscopio simmetrico pesante dai due punti d'intersezione dell'asse verticale colla sfera, sul piano orizzontale, è una erpoloide generalizzata e quindi rappresentabile con funzioni di seconda specie e di primo grado.

Questa ricerca risponde ad una questione posta dal sig. KLEIN (lib. cit., pag. 440, in nota).

L'espressione trovata pel quadrato della velocità mostra che r_1 è sempre compreso tra due valori reali (positivi o negativi) che in generale però non raggiunge; lo stesso avverrà per ρ_1: quindi la proiezione stereografica della erpoloide è sempre compresa entro una certa corona circolare; esisteranno quindi *due circoli tangenti a questa proiezione e che la comprendono.* La erpoloide stessa è quindi compresa tra due paralleli della sfera ai quali risulta tangente.

Del resto tutto ciò avrebbe potuto anche essere stabilito colla considerazione dei due valori di c_3, reali e minori di 1, (radici di una equazione cubica facile a stabilire) che annullano $\frac{d c_3}{d t}$ e quindi $\frac{d r_1}{d t}$. Le stesse proprietà si estendono al cono descritto dall'asse di simmetria.

Se i due paralleli tra i quali è compresa l'erpoloide giacciono da una stessa parte del piano converrà proiettare da N o dal suo diametralmente opposto N'.

DELLA CURVA DEL VERTICE.

Le coordinate del vertice sono a_3, b_3, c_3; consideriamo la proiezione stereografica del vertice sul piano orizzontale dal polo nord dell'asse z_1 e diciamo λ_1, μ_1, le coordinate di questa proiezione, ρ_1 il raggio vettore. Abbiamo:

$$\lambda_1 = \frac{a_3}{1 - c_3}; \quad \mu_1 = \frac{b_3}{1 - c_3}; \quad \rho_1^2 = \frac{1 - c_3}{1 + c_3}.$$

Inoltre:

$$\lambda_1 \frac{d\mu_1}{dt} - \mu_1 \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{R_1 - R c_3}{A(1 - c_3)^2} = \frac{\rho_1^2 + 1}{4A}\left\{(R_1 - R)\rho_1^2 + (R_1 + R)\right\},$$

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mu_1}{dt}\right)^2 = \frac{h - C r^2 - 2 S c_3}{A(1 - c_3)^2} =$$

$$= \frac{\rho_1^2 + 1}{4A}\left\{(h - C r^2 - 2S)\rho_1^2 + (h - C r^2 + 2S)\right\};$$

la proiezione stereografica della curva del vertice sul piano orizzontale è una erpoloide generalizzata.

Se $h - Cr^2 - 2S > 0$, dalla seconda formula non risulta alcuna limitazione per ρ_1.

Se $h - Cr^2 - 2S < 0$, tale proiezione risulta interna ad un determinato cerchio cui è tangente; se inoltre $R_1 = R$ *la proiezione stereografica suddetta diventa una erpoloide di un moto alla* Poinsot.

Notando che

$$h - Cr^2 - 2Sc_3 > 0$$

se c_3 è sempre diverso da 1, risulterà certamente $h - Cr^2 - 2S < 0$.

Si ha pure che λ_1, μ_1 e quindi a_3, b_3 sono gli stessi per tutti i giroscopi simili: onde *il moto dell'asse di simmetria è lo stesso per tutti i giroscopi simili.*

Infine da tutto quanto è stato esposto deduciamo:

tutti gli elementi geometrici che definiscono il moto di un giroscopio simmetrico pesante si possono rappresentare con funzioni doppiamente periodiche di 2.ª specie e di primo grado (*).

Paragone tra i moti di più giroscopi simili.

Consideriamo due giroscopi simili corrispondenti a due diversi valori C, C' di C; siano p, q, r le componenti della velocità istantanea di rotazione pel primo giroscopio; p', q', r' quelle del secondo. Abbiamo le seguenti relazioni integrali:

$$Cr = R; \quad A(pc_1 + qc_2) + Crc_3 = R_1, \quad A(p^2 + q^2) + 2Sc_3 = \text{cost.}$$

e tre relazioni analoghe pel secondo giroscopio: quindi:

$$Cr = C'r'.$$

Intorno all'asse di simmetria si effettui una rotazione istantanea di velocità angolare costante n, la quale si componga con p, q, r: dico che, sce-

(*) La stessa proprietà non sussiste più per i coseni direttori della terna mobile, i quali si esprimono (nelle combinazioni $a_r + i b_r$) con funzioni di 2.ª specie e di 2.º grado; mentre che in un moto alla Poinsot si esprimono con funzioni di 2.ª specie e di 1.º grado.

gliendo convenientemente n, avremo la rotazione di componenti p', q', r'. Nella rotazione costante, infatti, gli assi $x\,y$ si spostano in $x'\,y'$ e sarà

$$\widehat{x\,x'} = n\,t$$

e le componenti di p, q, r secondo x', y', z, sono:

$$p \cos n\,t + q \operatorname{sen} n\,t, \quad -p \operatorname{sen} n\,t + q \cos n\,t, \quad r.$$

Poniamo quindi:

$$p' = p \cos n\,t + q \operatorname{sen} n\,t; \quad q' = -p \operatorname{sen} n\,t + q \cos n\,t;$$
$$r' = r + n;$$

dovrà dunque essere:

$$R = C\,r = C'\,(r + n)$$

onde:

$$n = R\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right).$$

Osservando quindi che:

$$p\,c_1 + q\,c_2 = p'\,(c_1 \cos n\,t + c_2 \operatorname{sen} n\,t) +$$
$$+ q'\,(-c_1 \operatorname{sen} n\,t + c_2 \cos n\,t) = p'\,c'_1 + q'\,c'_2$$
$$p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2$$

otteniamo:

$$C'\,r' = R; \quad A\,(p'\,c'_1 + q'\,c'_2) + C'\,r'\,c_3 = R_1,$$
$$A\,(p'^2 + q'^2) + 2\,S\,c_3 = \text{cost.}$$

che sono gl'integrali del moto del secondo giroscopio; dunque:

i movimenti di più giroscopi simili non differiscono che per una rotazione uniforme intorno all'asse di simmetria.

Di qui l'opportunità di considerare il più semplice di questi movimenti corrispondente appunto al giroscopio sferico. Detto $O\,\Omega_0$ l'asse istantaneo di rotazione relativo al giroscopio sferico, componendo il vettore n posto su z con $\overline{O\,\Omega_0}$, otterremo il vettore $\overline{O\,\Omega}$ relativo ad uno dei giroscopi simili; quindi:

i poli di rotazione di tutti i giroscopi simili stanno su di una parallela all'asse comune di simmetria e a distanze invariabili tra loro.

Si può anche dire:

il moto risultante di un movimento di un giroscopio simmetrico pesante *e di una rotazione uniforme intorno all'asse di simmetria è un movimento di un giroscopio simile.*

Questo teorema può dirsi corrispondente di un famoso teorema di SYLVESTER, di cui fra breve dovremo fare applicazione, relativo ai moti alla POINSOT:

il moto risultante di un moto alla POINSOT *e di una rotazione uniforme intorno alla normale al piano invariabile è parimenti un moto alla* POINSOT; *le quadriche basi dei due movimenti sono omofocali* (*).

(*) *Philos. Trans.*, Vol. 156, part. II, pag. 757-779, anno 1866.

Il SYLVESTER dà due dimostrazioni assai semplici del suo teorema, partendo dalla ipotesi che la quadrica base (Kinematical exponent) sia un ellissoide d'inerzia. Colle notazioni e i metodi qui adoperati, in modo più spiccio, si può procedere così.

Le equazioni euleriane pel moto alla POINSOT sono:

$$\frac{dP}{dt}=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)QR,\quad \frac{dQ}{dt}=\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)RP,\quad \frac{dR}{dt}=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)PQ,$$

dove A, B, C hanno segni qualsiansi; queste ammettono gl'integrali:

$$\frac{P^2}{A}+\frac{Q^2}{B}+\frac{R^2}{C}=2h,\qquad P^2+Q^2+R^2=G^2.$$

L'asse z_1 sia l'asse della coppia costante d'impulso e siano ξ, η, ζ gli angoli che i piani xz_1, yz_1, zz_1 fanno con un piano fisso p. e. x_1z_1. Si trova subito che:

$$\operatorname{tag}\xi=-\frac{a_1}{b_1};\quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{a_1b'_1-a'_1b_1}{a_1^2+b_1^2}=G\,\frac{\dfrac{Q^2}{B}+\dfrac{P^2}{C}}{Q^2+P^2},\quad \text{e due formole analoghe.}$$

Se nelle equazioni differenzïali ed integrali mutiamo rispettivamente:

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C},\ \text{ in }\ \frac{1}{A_1}=\frac{1}{A}-\lambda,\quad \frac{1}{B_1}=\frac{1}{B}-\lambda,\quad \frac{1}{C_1}=\frac{1}{C}-\lambda,$$

e $2h$ in $2h_1=2h+\lambda G^2$, esse non mutano; $\frac{d\xi}{dt}$ aumenta di una costante $-\lambda G$; onde il nuovo moto alla POINSOT, la cui quadrica base è omofocale alla prima, consta del primo e di una rotazione uniforme intorno z_1.

Mutando invece $\frac{1}{A}$ in $\frac{1}{A_1}=\lambda-\frac{1}{A}$, ecc. si ha quel 2.° movimento che il SYLVESTER chiama *contrafocale.*

Teorema di Jacobi.

Consideriamo un primo ed un secondo moto alla Poinsot, le cui quadriche basi abbiano lo stesso centro, le stesse direzioni, x, y, z degli assi. I due moti abbiano inoltre le loro polodie rispettive simmetriche rispetto al punto fisso; li diremo, brevemente, moti coniugati.

Siano: A, B, C, le grandezze dei quadrati dei semi-assi della quadrica del primo moto; A_1, B_1, C_1 quelle della seconda; π, χ, ρ, le componenti della velocità istantanea, secondo x, y, z, del primo; saranno $-\pi$, $-\chi$, $-\rho$ quelle della velocità del secondo; sussisteranno le equazioni:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{B-C}{A}\chi\rho; \quad -\frac{d\pi}{dt} = \frac{B_1-C_1}{A_1}\chi\rho; \quad \text{ecc.}$$

Sarà dunque:

$$\frac{B-C}{A} + \frac{B_1-C_1}{A_1} = 0,$$

cioè:

$$A_1(B-C) + B_1 A - C_1 A = 0$$
$$-A_1 B + B_1(C-A) + C_1 B = 0$$
$$A_1 C - B_1 C + C_1(A-B) = 0.$$

Queste tre equazioni non sono indipendenti; la loro somma infatti si riduce alla identità $0 = 0$; quindi il sistema precedente determina i rapporti di A_1, B_1, C_1. Posto:

$$B + C - A = \alpha, \quad C + A - B = \beta, \quad A + B - C = \gamma, \tag{1}$$

e detto σ un coefficiente di proporzionalità, abbiamo:

$$A_1 = \sigma A\alpha, \quad B_1 = \sigma B\beta, \quad C_1 = \sigma C\gamma. \tag{2}$$

Gl'integrali dei due moti alla Poinsot sono, pel primo movimento:

$$A\pi^2 + B\chi^2 + C\rho^2 = 2h, \quad A^2\pi^2 + B^2\chi^2 + C^2\rho^2 = G^2,$$

i quali rispettivamente esprimono i teoremi della conservazione della energia e della costanza della coppia di impulso. Pel secondo movimento avremo parimenti:

$$A_1\pi^2 + B_1\chi^2 + C_1\rho^2 = 2h_1, \quad A_1^2\pi^2 + B_1^2\chi^2 + C_1^2\rho^2 = G_1^2.$$

Mostriamo anzitutto che, cognite le costanti del primo movimento, si possono determinare quelle del secondo a meno del fattore σ. Infatti abbiamo già le equazioni (2); dai primi due integrali poi deduciamo:

$$2\,h\,(A+B+C)-2\,G^2=A\,\alpha\,\pi^2+B\,\beta\,\chi^2+C\,\gamma\,\rho^2,$$

cioè

$$2\,h_1=\sigma\,\{2\,h\,(A+B+C)-2\,G^2\}\,. \tag{3}$$

Ha luogo la seguente identità:

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=2\,B\,C+2\,C\,A+2\,A\,B-A^2-B^2-C^2$$

e quindi:

$$\alpha^2=4\,B\,C-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$$

e due equazioni analoghe: e però:

$$8\,h\,A\,B\,C-G^2\,(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=A^2\,\alpha^2\,\pi^2+B^2\,\beta^2\,\chi^2+C^2\,\gamma^2\,\rho^2$$

cioè:

$$G_1^2=\sigma^2\,\{8\,h\,A\,B\,C-G^2\,(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\}\,. \tag{4}$$

Le equazioni (1) (3) (4) provano quanto si era asserito.

Osserviamo che qualunque siano i segni di A, B, C, risulta G_1^2 positivo e quindi G_1 reale.

Se la quadrica base del primo moto è un ellissoide d'inerzia, α, β, γ risultano positive; è facile vedere che in tal caso anche la quadrica del secondo moto è un ellissoide d'inerzia; ma nella ipotesi di

$$A>B>C,$$

risulta:

$$2\,h\,A-G^2>0\,,\quad 2\,h\,(B+C)-G^2>0\,;$$

e quindi anche $2\,h_1$ è positivo.

Notiamo ancora le seguenti identità utili in seguito:

$$\left.\begin{aligned}
&C\,B\,(\gamma-\beta)+A\,C\,(\alpha-\gamma)+B\,A\,(\beta-\alpha)=\\
&\qquad=2\,(C-B)\,(A-C)\,(B-A),\\
&C^2\,B^2\,(\gamma-\beta)+A^2\,C^2\,(\alpha-\gamma)+B^2\,A^2\,(\beta-\alpha)=\\
&\qquad=2\,(B\,C+C\,A+A\,B)\,(C-B)\,(A-C)\,(B-A),\\
&C\,B\,(C\gamma-B\beta)+A\,C\,(A\,\alpha-C\gamma)+B\,A\,(B\beta-A\,\alpha)=\\
&\qquad=(A+B+C)\,(C-B)\,(A-C)\,(B-A).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sia x_1, y_1, z_1 la terna degli assi fissi nel primo moto alla Poinsot, essendo z_1 normale al piano invariabile che è tangente alla prima quadrica nel punto in cui essa è incontrata dall'asse istantaneo di rotazione; i coseni direttori che la terna x, y, z forma con z_1 sono:

$$\gamma_1 = \frac{A\pi}{G}, \quad \gamma_2 = \frac{B\chi}{G}, \quad \gamma_3 = \frac{C\rho}{G}. \tag{6}$$

Sia x_2, y_2, z_2 la terna degli assi fissi nel secondo moto alla Poinsot, essendo z_2 normale al piano invariabile; x, y, z formano con z_2 angoli i cui coseni sono:

$$\nu_1 = -\frac{A_1\pi}{G_1}, \quad \nu_2 = -\frac{B_1\chi}{G_1}, \quad \nu_3 = -\frac{C_1\rho}{G_1}. \tag{7}$$

Proponiamoci di studiare il moto relativo di z_1 rispetto z_2.

Le componenti della velocità istantanea del sistema x_1, y_1, z_1, supposto mobile, rispetto x, y, z sono $-\pi$, $-\chi$, $-\rho$; quelle della velocità di x, y, z nel 2.° moto sono pure $-\pi$, $-\chi$, $-\rho$; onde le componenti della velocità istantanea del sistema x_1, y_1, z_1 rispetto al sistema fisso x_2, y_2, z_2 valutate secondo x, y, z, sono -2π, -2χ, -2ρ. Valutiamole secondo il sistema mobile x_1, y_1, z_1, e diciamole p, q, r. Se indichiamo rispettivamente con

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3; \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

i coseni degli angoli che x_1, y_1, z_1, fanno con x, y, z, avremo:

$$p = -2(\pi\alpha_1 + \chi\alpha_2 + \rho\alpha_3); \quad q = -2(\pi\beta_1 + \chi\beta_2 + \rho\beta_3);$$
$$r = -2(\pi\gamma_1 + \chi\gamma_2 + \rho\gamma_3).$$

Sostituendo nella terza di queste equazioni i valori (6) di γ_1, γ_2, γ_3, abbiamo:

$$r = -\frac{2}{G}(A\pi^2 + B\chi^2 + C\rho^2)$$

cioè:

$$r = -\frac{4h}{G} = \text{cost.} \tag{8}$$

Diciamo ancora c_1, c_2, c_3 i coseni direttori di x_1, y_1, z_1, rispetto z_2; e notiamo che:

$$\alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1 c_3 = \nu_1, \quad \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 + \gamma_2 c_3 = \nu_2,$$
$$\alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 + \gamma_3 c_2 = \nu_3.$$

Sarà

$$p c_1 + q c_2 + r c_3 = -2(\pi \nu_1 + \chi \nu_2 + \rho \nu_3)$$

cioè:

$$p c_1 + q c_2 + r c_3 = \frac{4 h_1}{G_1} = \text{cost.} \tag{9}$$

Finalmente abbiamo:

$$c_3 = \gamma_1 \nu_1 + \gamma_2 \nu_2 + \gamma_3 \nu_3 = -\frac{\sigma}{G G_1}(A^2 \alpha \pi^2 + B^2 \beta \chi^2 + C^2 \gamma \rho^2).$$

Consideriamo quindi il sistema:

$$A \pi^2 + B \chi^2 + C \rho^2 = 2 h,$$
$$A^2 \pi^2 + B^2 \chi^2 + C^2 \rho^2 = G^2,$$
$$A^2 \alpha \pi^2 + B^2 \beta \chi^2 + C^2 \gamma \rho^2 = -\frac{G G_1}{\sigma} u; \quad (u = c_3)$$

esso permetterà di esprimere π^2, χ^2, ρ^2 in funzione lineare di u; infatti si trova:

$$\pi^2 = \frac{2h}{\Delta} B^2 C^2 (\gamma - \beta) - \frac{G^2}{\Delta} B C (C\gamma - B\beta) - \frac{G G_1}{\sigma \Delta} B C (C - B) u \tag{10}$$

e due formole analoghe, in cui si è posto:

$$\Delta = 2 A B C (C - B)(A - C)(B - A).$$

Sommando le equazioni (10), tenendo presenti le (5) e la eguaglianza:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 4(\pi^2 + \chi^2 + \rho^2),$$

otterremo:

$$\left.\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 = 8 h \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) - \\ - 2 G^2 \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) + \frac{2 G G_1}{\sigma} \frac{1}{ABC} u. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Le equazioni (8), (9), (11) convengono al moto di un giroscopio sferico: e poichè il moto dell'asse di simmetria è lo stesso per tutti i giroscopi simili, così concludiamo:

l'asse invariabile del secondo moto alla Poinsot *si muove, rispetto all'altro asse del primo moto coniugato, come l'asse di simmetria di un giroscopio simmetrico pesante rispetto alla verticale.*

Volendo considerare il moto del giroscopio simmetrico bisogna comporre il moto del giroscopio sferico con una rotazione: e quindi uno dei due moti alla Poinsot con una rotazione intorno all'asse invariabile; questo movimento risultante, in virtù del teorema del Sylvester, è pure un moto alla Poinsot, la cui quadrica base è omofocale alla quadrica del primo moto alla Poinsot onde: *il moto di un giroscopio simmetrico pesante equivale al moto relativo di due moti alla* Poinsot.

Questi due movimenti non hanno più la stessa polodia e sono quelli che Halphen chiama concordanti, e i geometri inglesi « associated ».

Se diciamo R, R_1, A', S', h' le costanti del giroscopio sferico, le equazioni (8), (9), (11) ci danno:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R}{A'} = -\frac{4h}{G}, \quad \frac{R_1}{A'} = \frac{4h_1}{G_1}, \\ &\frac{h'}{A'} = 8h\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) - 2G^2\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right), \\ &\frac{S'}{A'} = -\frac{GG_1}{\sigma}\frac{1}{ABC}; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

le quali determinano i rapporti reali delle costanti R, R_1, S', h' alla costante A' in funzione delle costanti dei due moti di Poinsot.

Scrivendo:

$$\frac{h'}{A'} = \frac{2}{ABC}\Big((B+C)(2hA-G^2) + A\,\{2h(B+C)-G^2\} + 4hBC\Big),$$

si scorge subito che se la quadrica base del primo moto alla Poinsot è un ellissoide di inerzia, la costante $\frac{h'}{A'}$ è positiva.

È opportuno porre le prime due equazioni del sistema (12) sotto altra forma. Pongasi:

$$\frac{R}{A'} = n, \quad \frac{R_1}{A'} = l, \quad \frac{2h}{G} = \chi, \quad \frac{2h_1}{G_1} = \chi_1,$$

e si ha:

$$2\chi + n = 0, \quad 2\chi_1 - l = 0.$$

Aumentando la costante n (cioè r) di $\frac{A'-C'}{A'}n$, si passa alle relazioni analoghe per un giroscopio simmetrico; sarà quindi:

$$2\chi + \frac{A' - C'}{A'} n + n = 0, \quad 2\chi_1 - l = 0 \text{ (*)}.$$

Le formole trovate permettono di determinare il moto di un qualunque giroscopio sferico cogniti i due moti alla Poinsot coniugati; infatti disponendo opportunamente di A, B, C, h, G, le costanti del giroscopio possono assumere qualunque valore. Più importante è il problema inverso: determinare i due moti alla Poinsot componenti, cognito il moto del giroscopio sferico.

Tale decomposizione, come pure la maniera generalissima di enunciare il teorema di Jacobi nel caso di un giroscopio simmetrico, è dovuta ad Halphen che l'ha ottenuta e studiata diffusamente col sussidio delle funzioni ellittiche. Essa è la maniera più spontanea e diretta di dimostrare il teorema stesso ed è quella sostanzialmente seguita da Jacobi, da Lottner e dal Padova (**). La prima dimostrazione elementare dei risultati dell'Halphen e la loro interpretazione geometrica è dovuta al Darboux, il quale ha ricercate direttamente le condizioni a cui debbono soddisfare due moti alla Poinsot perchè il loro moto relativo sia un moto lagrangiano ed in particolare ha dedotto, che nel caso di un giroscopio sferico i due moti hanno la stessa polodia. La bella e diretta dimostrazione del Darboux è stata semplificata, con calcolo assai elegante, dal sig. Hess (*Zeitschrift*, ecc.). Egualmente semplice e diretta è la decomposizione ottenuta dal sig. Routh e fondata sull'uso dei tre angoli euleriani.

Oltre il bello studio che il Klein fa del teorema in quistione nel libro citato, sono notevolissimi i lavori del sig. Greenhill, il quale (*Proc.*, Vol. XXVII) partendo da un noto teorema di Darboux, che mostra come una generatrice di un iperboloide articolato deformabile può riprodurre il moto dell'asse di un giroscopio, ha ricercato in qual modo questa deformazione è associata col moto di un giroscopio e con due moti alla Poinsot. Questi lavori del Greenhill si collegano poi colla teoria degli integrali pseudo-ellittici ed accennano a casi numerosi in cui la curva del vertice e l'erpoloide sono curve algebriche.

Le formole stabilite permettono pure di risolvere semplicemente il problema, valendoci di un artificio già seguito dall'Halphen, dal Darboux e dal Routh.

(*) Queste equazioni coincidono con le (22) e (23) del sig. Hess (*Zeitschrift*).
(**) *Atti Acc. Sc. d. Torino*, Vol. XIX, 1884.

Porremo:

$$\frac{h'}{2\,S'} = m\,, \qquad \frac{A'}{2\,S'} = k\,;$$

sarà quindi k una costante positiva.

Osserviamo poi che dalle equazioni:

$$p\,c_1 + q\,c_2 = l - n\,u, \quad q\,c_1 - p\,c_2 = \frac{d\,u}{d\,t}\,, \quad p^2 + q^2 = \frac{m - u}{k}$$

si deduce:

$$k\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 = (m - u)\,(1 - u^2) - k\,(l - n\,u)^2 = f(u). \tag{13}$$

Deve essere intanto $m > u$. Di più l'equazione cubica:

$$f(u) = 0$$

ha le sue radici reali; una maggiore di uno, le altre due comprese tra $+1$ e -1. Ma poichè u è compreso tra queste due (seconda e terza), ed $f(m) < 0$, si conclude che m è compreso tra la prima e seconda radice. Ciò premesso consideriamo il valore (10) di π^2 e poniamo:

$$2\,h\,B\,C\,(\gamma - \beta) - G^2\,(C\,\gamma - B\,\beta) = \frac{G\,G_1}{\sigma}\,(C - B)\,u_1$$

cioè:

$$G^2\,(B + C - A) - 4\,h\,B\,C = \frac{G\,G_1}{\sigma}\,u_1 \tag{14}$$

e due espressioni analoghe per u_2 e u_3. Risulta quindi:

$$\pi^2 = \frac{B\,C}{\Delta}\,\frac{G\,G_1}{\sigma}\,(C - B)\,(u_1 - u).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{15}$$

Derivando l'equazione:

$$\alpha\,A^2\,\pi^2 + \beta\,B^2\,\chi^2 + \gamma\,C^2\,\rho^2 = -\frac{G\,G_1}{\sigma}\,u.$$

otteniamo:

$$\frac{\Delta}{A\,B\,C}\,\pi\,\chi\,\rho = \frac{G\,G_1}{2\,\sigma}\,\frac{d\,u}{d\,t}\,.$$

Sostituendo i valori (15) per π, χ, ρ, risulta:

$$\frac{\sigma\,A\,B\,C}{2\,G\,G_1}\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)^2 = (u_1 - u)\,(u_2 - u)\,(u_3 - u)\,,$$

la quale, paragonata colla (13), ci dice che u_1, u_2, u_3 sono le radici reali della $f(u) = 0$; quindi potremo riguardare u_1, u_2, u_3, come note in funzione di l, m, n. Si ha poi:

$$u_1 > m > u_2 > u > u_3 \tag{16}$$

$$k = -\frac{\sigma A B C}{2 G G_1}.$$

Il valore di k permette di eliminare dalle (14) il fattore $\frac{G G_1}{\sigma}$. Ponendo:

$$\frac{G}{A} = x, \quad \frac{G}{B} = y, \quad \frac{G}{C} = z \tag{17}$$

le (14) diventano:

$$\left.\begin{aligned} y z - z x - x y - n x &= \frac{u_1}{2 k}, \\ z x - x y - y z - n y &= \frac{u_2}{2 k}, \\ x y - y z - z x - n z &= \frac{u_3}{2 k}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

La (3), a sua volta, si trasforma in quest'altra:

$$n (y z + z x + x y) + 4 x y z = \frac{l}{2 k}.$$

Moltiplicando queste quattro equazioni rispettivamente per n, $-2x$, $-2x$, -1 e sommando si ottiene

$$x = \frac{1}{2} \frac{l - n u_1}{n^2 k - u_2 - u_3};$$

ma è:

$$u_1 + u_2 + u_3 = n^2 k + m,$$

onde:

$$x = \frac{1}{2} \frac{l - n u_1}{u_1 - m}, \quad y = \frac{1}{2} \frac{l - n u_2}{u_2 - m}, \quad z = \frac{1}{2} \frac{l - n u_3}{u_3 - m}; \tag{19}$$

quindi x, y, z risultano reali, positivi o negativi, ed espressi mediante le radici della $f = 0$. Lo stesso accade per π, χ, ρ; infatti un calcolo molto semplice trasforma le (15) in queste altre:

$$\pi^2 = \frac{1}{4k}\left(\frac{l - n u_1}{l - n m}\right)^2 \frac{(m - u_2)(m - u_3)}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)}(u_1 - u);$$

$$\chi^2 = \frac{1}{4k}\left(\frac{l - n u_2}{l - n m}\right)^2 \frac{(m - u_3)(m - u_1)}{(u_2 - u_3)(u_2 - u_1)}(u_2 - u);$$

$$\rho^2 = \frac{1}{4k}\left(\frac{l - n u_3}{l - n m}\right)^2 \frac{(m - u_1)(m - u_2)}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)}(u_3 - u).$$

In virtù della disuguaglianza (16) π^2, χ^2, ρ^2 risultano positivi; le equazioni precedenti forniscono valori reali per π, χ, ρ e quindi ancora per le γ e le ν.

Messina, ottobre 1901.

Sul potenziale elastico.

(*Di* Carlo Somigliana, *a Pavia.*)

In due Note pubblicate alcuni anni or sono nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (*) ho dimostrato relativamente al potenziale elastico unitario alcune proprietà che presentano un certo interesse riguardo ai principi della teoria della elasticità. Ho dimostrato cioè che se noi non facciamo alcuna ipotesi circa la struttura del corpo elastico che si considera e cerchiamo quali siano le forme speciali che può assumere il potenziale per effetto di proprietà di simmetria, troviamo che esse sono *tutte e sole* quelle che si trovano ammettendo *a priori*, come dato sperimentale, la legge fondamentale che regge la simmetria dei cristalli. Questa legge, per quanto riguarda le proprietà elastiche, risulta così implicita nella ipotesi ordinaria (poichè in sostanza altro non è che un'ipotesi, quantunque possa con vari argomenti giustificarsi) per cui si assume per il potenziale elastico una forma quadratica delle sei componenti di deformazione. Il teorema ricordato viene pertanto a portare un nuovo argomento in favore di tale ipotesi; poichè si può dimostrare che se prendiamo un'espressione più generale per il potenziale, includendovi una forma di grado superiore al 2.°, tale teorema cessa di essere vero. La così detta legge di razionalità degli indici non sarebbe quindi in generale compatibile, dal nostro punto di vista, con una teoria dell'elasticità, in cui si tenesse conto anche delle deformazioni d'ordine superiore al primo, come in qualche caso si è tentato di fare.

Ritornando nelle mie *Lezioni* sopra queste proprietà, ho potuto darne una dimostrazione assai più semplice di quelle di cui mi sono servito nelle due Note ricordate innanzi, che anzi mi sembra la più semplice ed elementare possibile. Mi pare perciò opportuno, il farla conoscere, almeno per ra-

(*) *Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastiche dei cristalli*, 1.° Sem. 1894. — *Sopra gli invarianti ortogonali di deformazione*, 1.° Sem. 1895.

gioni didattiche, aggiungendovi la deduzione completa che ne risulta, di tutte le forme speciali del potenziale, deduzione di cui prima non mi era occupato.

La determinazione delle varie forme del potenziale per questa via presenta anche il vantaggio di essere sotto certi punti di vista assai più spedita, rispetto ai metodi fondati sopra trasformazioni di coordinate, che sono ancora generalmente riprodotti nei trattati anche recenti. Tale utilità del resto era stata chiaramente indicata dal Beltrami nelle sue *Note fisico-matematiche* nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. III, 1889, nella deduzione delle forme isotrope del potenziale. È perciò doveroso ricordare che il concetto fondamentale, da cui hanno avuto origine questi studi, è del compianto maestro.

§ 1.

Determinazione degli invarianti ortogonali di deformazione.

Siano u, v, w le componenti di spostamento di un mezzo elastico riferite ad una terna di assi ortogonali x, y, z; u', v', w' le componenti dello stesso spostamento riferite ad un'altra terna di assi x', y', z'. Porremo secondo le notazioni di Kirchhoff

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

e analogamente

$$x'_x = \frac{\partial u'}{\partial x'} \qquad y'_z = z'_y = \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}, \text{ ecc., ecc.}$$

e chiameremo queste sei quantità x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y le componenti di deformazione. Se supponiamo che dagli assi x, y, z si passi agli assi x', y', z' con una semplice rotazione di un angolo α attorno all'asse delle z; le relazioni che legano le componenti di deformazione riferite ad una terna di assi alle componenti di deformazione riferite all'altra (le quali sono date in generale da una sostituzione ortogonale a sei variabili) si possono porre sotto una forma assai semplice, introducendo l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, come ho già dimostrato nella seconda delle note sopracitate. Si ha infatti

$$u' + i v' = e^{i\alpha}(u + i v) \qquad w' = w$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial y'} = e^{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

e, combinando opportunamente per moltiplicazione queste relazioni, si trova

$$\left.\begin{array}{ll} a) & x'_x - y'_y + i x'_y = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i x_y) \\ b) & x'_x + y'_y = x_x + y_y \\ c) & z'_x + i y'_z = e^{i\alpha}(z_x + i y_z) \\ d) & z'_z = z_z . \end{array}\right\} \qquad (1)$$

La sostituzione a sei variabili si decompone così in due sostituzioni ortogonali a tre variabili, ridotte a forma canonica. L'una rappresenta una rotazione di un angolo 2α, l'altra di un angolo α.

Se l'asse delle z è di simmetria per il mezzo elastico, il potenziale dovrà essere formato con espressioni che siano invarianti quadratici per le rotazioni corrispondenti al periodo di tale simmetria. La ricerca delle diverse forme possibili pel potenziale si riduce quindi alla ricerca di tali invarianti. Ora se $f(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, y_y)$ è uno di questi, la relazione che ne dimostra l'invariantività

$$f(x'_x, y'_y, z'_z, y'_z, z'_x, x'_y) = f(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y) \qquad (2)$$

dovrà essere una conseguenza delle (1), e precisamente il risultato della eliminazione del fattore esponenziale fra le relazioni che si ottengono dalle (1), o dalle loro coniugate, elevandole al quadrato o moltiplicandole fra loro a due a due. Inoltre siccome queste relazioni risulteranno tutte formate linearmente col fattore esponenziale e, toltone questo fattore, simmetriche rispetto ai due sistemi di componenti di deformazione, l'eliminazione si potrà eseguire uguagliando fra loro le espressioni che per tale fattore risultano dalle diverse relazioni, o, ciò che torna lo stesso, moltiplicando fra loro o per se stesse le relazioni (1) o le loro coniugate in modo che dai prodotti scompaiono i fattori esponenziali.

Abbiamo così un metodo assai semplice per costruire tutti i possibili invarianti quadratici. È chiaro poi che un procedimento analogo porterebbe a trovare gli invarianti di qualsiasi grado n. Basterebbe combinare per moltiplicazione le (1), e le loro coniugate n ad n, in modo che dai prodotti scomparissero i fattori esponenziali e si avrebbero così tutte le relazioni di grado n della forma (2) e quindi i corrispondenti invarianti. (Circa la legge di formazione di questi invarianti, V. la 2.ª delle due Note citate.)

§ 2.

Invarianti di rotazione.

Incominciamo a trovare col procedimento indicato quelle espressioni, ben note del resto, che rimangono invariate qualunque sia l'angolo di rotazione α, e che si possono chiamare, come ho già fatto in una delle Note citate, invarianti di rotazione.

Le (1_b) (1_d) non contenendo α, ci dànno i tre invarianti quadratici

$$(x_x + y_y)^2, \quad z_z^2, \quad (x_x + y_y) z_z .$$

Moltiplicando la (1_a) per la sua coniugata troviamo

$$(x'_x - y'_y)^2 + x'^2_y = (x_x - y_y)^2 + x^2_y$$

e così dalla (3_a) si ha

$$z'^2_x + y'^2_z = z^2_x + y^2_z .$$

Non è possibile in altro modo eliminare α fra le (1) combinandole a due a due senza attribuire ad α un valore speciale.

Troviamo così, come è notissimo, cinque invarianti di rotazione. Il potenziale elastico per i mezzi che ammettono un asse di isotropia è una funzione lineare di questi e contiene quindi cinque costanti.

§ 3.

Gli invarianti ciclici e la legge di razionalità degli indici.

Per avere gli invarianti corrispondenti a valori speciali di α, coi quali deve essere formato il potenziale, quando il mezzo ha un asse di simmetria elastica di un certo periodo n, cominciamo ad osservare che fra questi invarianti saranno sempre compresi i cinque di rotazione già considerati.

Pertanto delle 21 combinazioni a due a due che si possono formare colle (a) (b) (c) (d) e colle coniugate (a') (c') possiamo trascurare (b, b) (d, d) (b, d) (a, a') (c, c') già considerate. Riguardo alle rimanenti si può osservare che è inutile considerare le (a', a') (a', b) (a', d) (a', c') (c', c'), poichè danno luogo a relazioni che sono le coniugate delle (a, a) (a, b) (a, d) (a, c) (c, c) e portano perciò agli stessi invarianti. Inoltre si possono trascurare le (b, c) (c, d), (c', b) (c', d) (a', c) (a, c') poichè da esse non può risultare alcun invariante; difatti nel secondo membro di queste relazioni si ha il fattore $e^{\pm i\alpha}$ che non può ridursi all'unità in alcun caso, poichè α non può superare π. Tutto quindi si riduce a cercare gli invarianti che possono risultare dalle cinque relazioni seguenti:

$$(x'_x - y'_y + i\,x'_y)^2 = e^{4i\alpha}(x_x - y_y + i\,x_y)^2 \qquad (a,\ a)$$

$$(z'_x + i\,y'_z)^2 = e^{2i\alpha}(z_x + i\,y_z)^2 \qquad (c,\ c)$$

$$(x'_x - y'_y + i\,x'_y)(x'_x + y'_y) = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i\,x_y)(x_x + y_y) \qquad (a,\ b)$$

$$(x'_x - y'_y + i\,x'_y)(z'_x + i\,y'_z) = e^{3i\alpha}(x_x - y_y + i\,x_y)(z_x + i\,y_z) \qquad (a,\ c)$$

$$(x'_x - y'_y + i\,x'_y)\,z'_z = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i\,x_y)\,z_z \qquad (a,\ d)$$

quando si faccia $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ e si attribuiscono ad n tutti i valori interi da 2 in poi.

Ora per $n = 2$, si ha $\alpha = \pi$, quindi risultano uguali all'unità i fattori esponenziali delle (a, a), (c, c), (a, b), (a, d); ciascuna di queste 4 relazioni complesse si scinde quindi in due reali della forma della (2) e dà quindi luogo a due invarianti ciclici di periodo 2. A questi aggiungendo i 5 di rotazione, troviamo che il numero N degli invarianti, con cui dovrà essere formato il potenziale, e delle costanti che potrà contenere

$$\text{per} \quad n = 2 \cdot \text{sarà} \quad N = 13.$$

Supponendo $n = 3$ abbiamo $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e quindi dei fattori esponenziali che compaiono nelle relazioni precedenti si ridurrà all' unità soltanto quello della (a, c). Abbiamo così due soli invarianti, e perciò

$$\text{per} \quad n = 3 \quad \text{sarà} \quad N = 7.$$

Supponendo $n = 4$ abbiamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e si riduce alla unità il fattore esponenziale della sola (a, a). Quindi anche in questo caso si hanno due soli invarianti ciclici, a cui aggiungendo i cinque di rotazione, troviamo che

$$\text{per} \quad n = 4 \quad \text{sarà} \quad N = 7.$$

È chiaro che per $n > 4$ i numeri $4 i \alpha$, sia, $2 i \alpha$, $i \alpha$ non potranno mai diventare multipli interi di $2 \pi i$ e quindi le relazioni precedenti non potranno mai portare ad espressioni invariantive quadratiche nuove. Il potenziale in questi casi non potrà contenere che i cinque invarianti di rotazione.

Dunque possiamo senz' altro concludere:

I soli assi di simmetria pei quali il potenziale può avere forme distinte sono quelli a periodo 2, 3, 4. *Quando esistesse un asse a periodo superiore il potenziale ha la forma corrispondente ad un asse di isotropia.*

Questo risultato, come è noto, equivale alla così detta legge di razionalità degli indici, per quanto concerne i fenomeni elastici.

Per vedere poi come ammettendo che il potenziale possa essere di grado superiore al secondo, non si possa più arrivare alla conclusione ora enunciata, basta osservare che dalle (1) si può ricavare

$$(x'_x - y'_y + i x'_y)^2 (z'_x + i y'_z) = e^{5i\alpha} (x_x - y_y + i x_y)^2 (z_x + i y_z)$$

e che quindi esistono due invarianti di terzo grado di periodo 5, il che è in disaccordo colla legge di razionalità degli indici sopracitata.

§ 4.

Le forme del potenziale elastico.

Le considerazioni precedenti ci dànno quattro forme distinte per il potenziale, quella corrispondente al caso in cui esiste un asse d'isotropia e le tre che corrispondono agli assi a periodo 2, 3, 4 ossia ai gruppi ciclici di rotazioni, che possiamo indicare con C_2, C_3, C_4. Per trovare le rimanenti forme possibili pel potenziale, e corrispondenti ad un gruppo qualsiasi di operazioni caratterizzanti una certa simmetria, osserviamo anzitutto che è superfluo considerare i gruppi di operazioni di 2.ª specie, cioè quelli che mutano una figura nella sua simmetrica.

Difatti indichiamo con P una forma del potenziale che rimane invariata per un gruppo qualsiasi di operazioni S, contenente operazioni di 2.ª specie. Essa dovrà essere indentica colla forma Q che corrisponde al gruppo più generale R di rotazioni contenute nel gruppo S. Difatti le componenti di deformazione non mutano, quando le variabili x, y, z si mutano in $-x$, $-y$, $-z$, cioè per una inversione rispetto all'origine degli assi. Perciò la forma Q rimane invariata non solo pel gruppo R di rotazioni ma anche pel gruppo G più generale, che risulta aggiungendo ad R l'operazione d'inversione rispetto all'origine.

Per la stessa ragione la forma P non potrà in generale essere speciale al gruppo S; ma, se esso non contiene l'operazione d'inversione, apparterrà anche al gruppo più generale G_1, che si ottiene aggiungendo ad S tale inversione.

Ora un gruppo qualunque di 2.ª specie può sempre generarsi aggiungendo al gruppo più generale di rotazioni in esso contenute, una qualsiasi delle operazioni di 2.ª specie del gruppo stesso. (Cfr. Schoenflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur*, pag. 83.) Quindi dovrà G_1 coincidere con G, epperò sarà anche

$$Q = P.$$

Da ciò segue, che per avere tutte le possibili forme del potenziale, basterà cercare quelle che corrispondono ai gruppi di rotazioni, e per la proprietà dimostrata al paragrafo precedente, unicamente per quei gruppi che contengono assi a periodo 2, 3, 4.

Questi sono i gruppi ciclici C_2, C_3, C_4 già considerati, ed i gruppi diedrici D_2, D_3, D_4 determinati da un asse a periodo 2, 3, 4 e rispettivamente da 2, 3, 4 assi di periodo 2 normali all'asse principale. Poi i due gruppi T ed O così detti del tetraedro e dell'otaedro, poichè contengono gli assi di simmetria di questi due poliedri regolari. (Schoenflies, Op. cit., pag. 74.) Oltre le tre forme cristallografiche già trovate pel potenziale, non potremo quindi averne più di altre 5 nuove. Vedremo poi che queste forme si riducono a 4, poichè le due forme corrispondenti ai gruppi T ed O coincidono fra loro. In tutto dunque 7 forme cristallografiche.

In quanto alle forme che possiamo chiamare d'isotropia, si vede facilmente che, oltre quella già trovata, non ne può esistere che un'altra, quella corrispondente all'isotropia completa. Difatti se esistessero due assi d'isotropia, dovrebbero essere tali anche le generatrici dei due coni di rotazione aventi per asse tali assi d'isotropia e per apertura l'angolo compreso fra essi. Si avrebbero così infiniti assi d'isotropia, e si vede facilmente che qualunque retta scelta arbitrariamente dovrebbe pure essere tale.

§ 5.

Espressioni degli invarianti di deformazione.

Vediamo ora di trovare le espressioni effettive degli invarianti corrispondenti a tutti i gruppi considerati, osservando anche, che con opportune combinazioni lineari degli invarianti ottenuti col procedimento indicato nei paragrafi precedenti, si possono formare delle nuove espressioni invariantive più semplici e più simmetriche di quelle direttamente costruite.

Gli invarianti ciclici come risultano dalle equazioni del § 2, sono

$$i_1 = (x_x + y_y)^2 \qquad i_2 = z_z^2 \qquad i_3 = (x_x + y_y)\, z_z$$
$$i_4 = (x_x - y_y)^2 + x_y^2 \qquad i_5 = z_x^2 + y_z^2 .$$

Ad i_4 possiamo sostituire la combinazione

$$\frac{1}{2}(i_1 - i_4) = 2\, x_x\, y_y - \frac{1}{2}\, x_y^2 = i'_4 .$$

Si hanno così i cinque invarianti considerati dal BELTRAMI nelle citate *Note fisico-matematiche.*

Invece di i_1 si suole anche considerare la combinazione

$$\frac{1}{2}(i_1+i_4)=x_x^2+y_y^2+\frac{1}{2}x_y^2 .$$

Gli 8 invarianti che conviene aggiungere a questi per ottenere gli invarianti del gruppo C_2 sono, secondo le equazioni del § 3, (a, a), (c, c), (a, b), (a, d):

$$\begin{array}{ll}
I_1^{(2)}=(x_x-y_y)^2-x_y^2 & I_2^{(2)}=(x_x-y_y)\,x_y \\
I_3^{(2)}=z_x^2-y_z^2 & I_4^{(2)}=z_x\,y_z \\
I_5^{(2)}=x_x^2-y_y^2 & I_6^{(2)}=(x_x+y_y)\,x_y \\
I_7^{(2)}=(x_x-y_y)\,z_z & I_8^{(2)}=x_y\,z_z .
\end{array}$$

Pel gruppo C_3 abbiamo invece dalla (a, c)

$$I_1^{(3)}=(x_x-y_y)\,z_x-x_y\,y_z \qquad I_2^{(3)}=(x_x-y_y)\,y_z-x_y\,z_x .$$

Similmente per il gruppo C_4 dalla relazione (a, a) ricaviamo i due invarianti $I_1^{(2)}$ e $I_2^{(2)}$ già trovati pel gruppo C_2.

Per ottenere ora gli invariaati dei gruppi D_2, D_3, D_4 basta osservare che questi gruppi di operazioni possono essere generati aggiungendo ai gruppi ciclici una rotazione di un angolo π intorno ad un asse u normale all'asse del gruppo ciclico. Ora, se prendiamo per asse u l'asse delle x, vediamo subito che per tale rotazione si ha la seguente sostituzione nelle sei componenti di deformazione

$$\begin{pmatrix} x_x & y_y & z_z & y_z & z_x & x_y \\ x_x & y_y & z_z & y_z & -z_x & -x_y \end{pmatrix}$$

perciò noi potremo passare dagli invarianti dei gruppi C_2, C_3, C_4 a quelli dei corrispondenti gruppi D, scegliendo tra i primi quelli che restano invariati cambiando z_x, x_y in $-z_x$, $-x_y$.

Godono di questa proprietà

per il gruppo D_2:

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i'_4,\ i_5,\ I_1^{(2)},\ I_3^{(2)},\ I_5^{(2)},\ I_7^{(2)},$$

per il gruppo D_3:

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i'_4,\ i_5,\ I_2^{(3)},$$

per il gruppo D_4:

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ I_1^{(2)}.$$

Il potenziale conterrà quindi 9 coefficienti pel gruppo D_2, 6 per i gruppi D_3 e D_4.

Prima di passare agli ultimi due gruppi T, O osserviamo che gli invarianti del gruppo D_2 si possono mettere sotto una forma assai semplice e simmetrica. Infatti agli invarianti i_5, $I_3^{(2)}$ possiamo sostituire

$$z_x^2, \quad y_z^2$$

ad i_4 e $I_1^{(2)}$ possiamo sostituire

$$(x_x - y_y)^2, \quad x_y^2$$

e alla terna formata dal primo di questi, da i_1 ed $I_5^{(2)}$ possiamo sostituire

$$x_x^2, \quad y_y^2, \quad x_x y_y$$

Finalmente invece dei due invarianti i_3, $I_7^{(2)}$ possiamo prendere

$$x_x z_z, \quad y_y z_z.$$

I nove invarianti prendono quindi la forma seguente pel

Gruppo D_2:

$$\begin{array}{ccc} x_x^2, & y_y^2, & z_z^2 \\ y_y z_z, & z_z x_x, & x_x y_y \\ y_z^2, & z_x^2, & x_y^2. \end{array}$$

Possiamo ora subito ottenere gli invarianti del gruppo T del tetraedro. Difatti questo gruppo di rotazioni può ottenersi (Schoenflies, Op. cit., pag. 208), aggiungendo al gruppo D_2 le rotazioni attorno ad un asse ternario disposto simmetricamente rispetto ai tre assi ortogonali di D_2. Supponendo di prendere quest'asse ternario nel triedro positivo degli assi x, y, z le rotazioni attorno a quest'asse hanno per effetto una permutazione nelle x, y, z quindi anche nelle u, v, w. Perciò le tre espressioni che compaiono in ciascuna delle tre linee del quadro precedente si scambiano fra loro. Da ciò segue che gli invarianti del gruppo del tetraedro non possono essere altro che le tre espressioni

$$\begin{gathered} x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 \\ y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y \\ y_z^2 + z_x^2 + x_y^2. \end{gathered}$$

Nel potenziale avremo quindi tre costanti.

Non è difficile verificare che le tre espressioni precedenti sono invarianti anche per il gruppo O dell'ottaedro Difatti questo gruppo può ottenersi (Schoen-

FLIES, Op. cit., pag. 209) aggiungendo al gruppo del tetraedro le rotazioni intorno ad un asse binario che bisechi l'angolo compreso fra gli assi delle x e delle y. Una rotazione attorno a questo asse produce sulle componenti di deformazione la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x_x & y_y & z_z & y_z & z_x & x_y \\ y_y & x_x & z_z & -z_z & -y_z & x_y \end{pmatrix}$$

per la quale evidentemente le tre espressioni precedenti rimangono invariate.

Pei gruppi T ed O il potenziale ha quindi forma identica.

Per ottenere finalmente l'espressione del potenziale isotropo osserviamo che questa dovendo essere un caso speciale di quella corrispondente ai gruppi T, O (poichè in questa ultima ad es. gli assi x, y, z non sono d'isotropia) non potrà contenere più di 2 costanti e quindi non potranno esistere più di due invarianti isotropi.

D'altra parte sommando fra loro opportunamente i cinque invarianti di rotazione possiamo ottenere le due espressioni

$$(x_x + y_y + z_z)^2 \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z + \frac{1}{2} z_x + \frac{1}{2} x_y$$

le quali sono simmetriche rispetto ai tre assi.

Esse quindi possono considerarsi come invarianti pel caso, in cui i tre assi delle x, y, z siano d'isotropia; ma una tale particolarità, per un teorema noto sulla composizione delle rotazioni, (o anche per un'osservazione fatta alla fine del § 4) non può presentarsi senza che qualsiasi altra retta sia asse d'isotropia. I due invarianti precedenti sono perciò isotropi, come è ben noto.

Riassumendo possiamo quindi concludere:

Per il potenziale elastico quadratico possono esistere sette forme speciali cristallografiche, oltre la forma generale (con 21 costanti) che appartiene ai due gruppi del sistema triclino, ed alle due forme della isotropia completa ed incompleta. Queste sette forme corrispondono ai gruppi di operazioni di 1.ª specie (o gruppi di rotazione)

$$C_2,\ D_2,\ C_3,\ D_3,\ C_4,\ D_4,\ T$$

ossia, secondo la nomenclatura proposta dallo Schoenflies, *ai gruppi*

Tetardoedria del sistema monogonale,	C_2
Emiedria enantiomorfa „ ,	D_2
Tetartoedria del sistema trigonale,	C_3
Emiedria enantiomorfa „ ,	D_3
Tetartoedria del sistema tetragonale,	C_4
Emiedria enantiomorfa „ ,	D_4
Tetartoedria del sistema regolare,	T.

Le forme del potenziale corrispondenti a qualsiasi altro gruppo cristallografico coincidono con una di queste e precisamente con quelle del gruppo che contiene le stesse rotazioni, all'infuori di quelle del sistema esagonale che coincidono colla forma dell'isotropia assiale, e di quelle del sistema triclino che, come si è già detto, contengono tutti i 21 termini della forma quadratica completa.

Ottobre 1901.

Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici.

(Di Michele Gebbia, *a Palermo.)*

PREFAZIONE.

Mi propongo col presente lavoro d'introdurre nella statica dei corpi solidi elastici conservativi i concetti di tre deformazioni particolari di un corpo indefinito in tutti i sensi, che costituiscono gli enti analoghi di quelli, che nella teoria delle forze agenti secondo la legge newtoniana sono le tre funzioni potenziali di massa a tre dimensioni, di distribuzione superficiale semplice e di doppio strato. Io le chiamerò *deformazioni tipiche*, e dirò del primo, del secondo e del terzo tipo, ordinatamente, le analoghe di queste tre funzioni potenziali. Dimostrerò poi che la deformazione prodotta in un corpo elastico conservativo (qualunque ne sia il potenziale d'elasticità) da forze agenti in massa ed in superficie allo stato d'equilibrio può esser decomposta in tre dei tipi rispettivi 1.°, 2.° e 3.°. Il teorema analogo nella teoria delle funzioni potenziali è quello dovuto a Green, per cui una funzione di tre variabili reali comunque determinata dentro un campo a tre dimensioni, purchè sfornita di singolarità insieme alle sue derivate prime e dotata di derivate seconde finite, può esprimersi per la somma di tre funzioni potenziali delle tre specie su indicate. Questo teorema della scindibilità di qualunque deformazione avrà dunque nella statica dei corpi elastici un'importanza simile a quella, che il suo analogo gode nell'elettrostatica. Col concetto delle deformazioni tipiche e con questo teorema intendo apportare un contributo all'assestamento della statica dei corpi elastici secondo un ordine d'idee perfettamente analogo a quello, che regge la teoria delle forze newtoniane e l'elettrostatica analitica, assestamento del quale il Betti pose le prime ed indelebili fondamenta, e che dopo lui sembra aver costituito il *desideratum* di alcuni studiosi della materia.

Però, a differenza di quanto avviene per le tre funzioni potenziali, di cui si stabiliscono fin da principio le espressioni analitiche per integrali definiti deducendole dal concetto dell'attrazione, io non posso definire le deformazioni tipiche per le loro espressioni analitiche, in generale sconosciute: le definirò invece per le loro proprietà caratteristiche, mostrando che dalla considerazione di fenomeni fisici ideali dedotti per estensione di concetto dai fatti fisici osservabili, scaturisce la possibilità di tre deformazioni di un corpo elastico indefinito, ciascuna delle quali apparisce come dotata di certe proprietà, che la distinguono univocamente. Così la teoria delle deformazioni tipiche, quale qui la espongo, non ha il completo rigore matematico di quella delle funzioni potenziali, poichè attinge dalla fisica *i criteri di esistenza.* Però si rifletta che di questo ripiego è piena la fisica matematica, la quale senza di esso non potrebbe progredire. Ciò è avvenuto pel così detto principio di Dirichlet, la cui dimostrazione matematica rigorosa, tuttora non scevra di limitazioni, s'è fatta tanto aspettare, mentre si è lungamente supplita con la dimostrazione fisica dedotta dai fenomeni elettrostatici; e nella stessa teoria dell'elasticità siamo ben lontani dal poter dimostrare che le equazioni differenziali dell'equilibrio di un corpo elastico ammettono un sistema integrale, mentre siamo persuasi di non doverne dubitare di fronte all'esistenza dei fatti fisici. Ma del resto questo ripiego è provvisorio, e la nostra teoria se ne libera subito per ogni forma particolare del potenziale d'elasticità, per la quale sia possibile stabilire le espressioni analitiche delle deformazioni tipiche, come in questo lavoro stesso mostrerò potersi fare pei corpi isotropi. Intanto è notevole che la deducibilità immediata delle proprietà caratteristiche delle deformazioni tipiche dalla loro definizione fisica non perderebbe mai la sua importanza, quand'anche le loro espressioni analitiche fossero generalmente note; ed è questo un fatto, che non trova corrispondenza nell'analoga teoria delle funzioni potenziali, le proprietà caratteristiche delle quali non isgorgano immediatamente dal loro concetto dedotto dai fenomeni dell'attrazione. Ciò, secondo il mio modo di vedere, scevera dalle considerazioni con le quali presento questa teoria quel carattere di provvisorietà, che a prima vista potrebbe loro attribuirsi.

Mi è sembrato necessario cominciare la presente Memoria con una prima parte introduttiva. Ivi, dopo esser ritornato brevemente sui fondamenti, stabilisco anzitutto un'interpretazione, che può darsi alle equazioni d'equilibrio, più generale dell'ordinaria, e che è necessaria per l'intendimento della parte essenziale di tutto il lavoro. Essa è una conseguenza del carattere di approssimazione che investe tutta la teoria matematica dell'elasticità. Poscia definisco alcune nuove cause, da cui può pensarsi prodotta la deformazione di un corpo, oltre alle ordinarie, che sono le azioni di forze applicate in massa o sulla superficie esterna, perocchè la considerazione di queste altre cause è di essenziale importanza per la definizione delle deformazioni tipiche. Infine stabilisco un'amplificazione necessaria del teorema della sovrapposizione degli effetti nella sua espressione statica.

Nella seconda parte della Memoria svolgo la teoria generale delle deformazioni tipiche, ed enuncio il teorema della scindibilità di qualunque deformazione di un corpo limitato in tre tipiche, dandone due dimostrazioni: la prima puramente analitica richiede soltanto ammessa l'esistenza di queste deformazioni; la seconda fa scaturire la scissione dal principio della sovrapposizione degli effetti come sopra amplificato, e mi sembra che questo secondo metodo renda le scindibilità quasi intuitiva.

La terza parte della Memoria è dedicata alla costruzione delle espressioni analitiche delle deformazioni tipiche dei corpi isotropi, al quale scopo mi servo delle proprietà delle funzioni potenziali ordinarie e di quelle particolari da me studiate nei due lavori: 1.° *Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito* (Rendic. del Circolo matematico di Palermo, t. IV); 2.° *Appendice* alla stessa memoria (Ibid., t. VI). La costruzione di queste espressioni stabilisce matematicamente l'esistenza delle deformazioni tipiche dei corpi isotropi, e quindi, applicando il teorema di scindibilità così reso per questo caso indipendente da ogni fondamento d'ordine fisico, mi è possibile esprimere la deformazione di un corpo isotropo limitato sotto l'azione di forze equilibrate come risultante di tre tipiche, e perciò in funzione delle forze agenti in massa ed in superficie e degli spostamenti dei punti della superficie. Questa espressione coincide, salvo differenze di segnatura, con quella data dal sig. C. Somigliana nella memoria *Sulle equazioni dell'elasticità* (Ann. di Matematica, t. XVII).

PARTE PRIMA.

Note introduttive.

---

§ I. Sulle equazioni differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici.

1. La teoria matematica dell'elasticità è approssimativa, poichè riguarda la deformazione dei corpi come infinitesima, benchè di fatto essa non possa essere che estremamente piccola rispetto alle dimensioni del corpo deformato. Così vi si trascurano, rispetto alle dimensioni del corpo o alle forze che vi sono applicate, le grandezze piccolissime che dipendono dalla deformazione e, rispetto a queste, le grandezze di un ordine maggiore di piccolezza, come si farebbe rigorosamente se si trattasse di veri infinitesimi.

Riassumiamo brevemente il procedimento col quale si stabiliscono le equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici e le principali conseguenze che se ne deducono, proponendoci di mettere in luce alcune circostanze dipendenti dal cennato carattere di approssimazione della teoria, le quali spesso non si rilevano, almeno esplicitamente, ma che pel retto intendimento della parte essenziale del presente scritto hanno un'importanza fondamentale. Limiteremo quindi le spiegazioni o le dimostrazioni a quei soli punti che hanno attinenza con le cennate circostanze, sorvolando sul resto.

2. Un corpo elastico, quando si deforma, passa da una configurazione che diremo *anteriore* ad un'altra che chiameremo *posteriore*. Denoteremo con x_0, y_0, z_0 (coordinate anteriori) le coordinate di un punto materiale del corpo nella prima configurazione e con x, y, z (coordinate posteriori) quelle dello stesso punto nella seconda. Le grandezze u, v, w determinate dalle eguaglianze

$$x = x_0 + u\,, \qquad y = y_0 + v\,, \qquad z = z_0 + w \tag{1}$$

sono le *componenti dello spostamento* del punto materiale, e possono ritenersi funzioni di x_0, y_0, z_0. Esse sono piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo considerato, come mostra l'esperienza, e debbono ritenersi continue, se si ammette che la deformazione non produca lacerazioni. Anche le derivate prime e seconde di queste funzioni si ritengono piccolissime ed in generale continue per ragioni che qui non serve richiamare.

Son noti il significato e l'importanza di quelle combinazioni delle derivate prime, che chiamansi *componenti della deformazione*, cioè:

$$x_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \qquad y_{z,0} = z_{y,0} = \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0},$$

$$y_{y,0} = \frac{\partial v}{\partial y_0}, \qquad z_{x,0} = x_{z,0} = \frac{\partial w}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial z_0},$$

$$z_{z,0} = \frac{\partial w}{\partial z_0}, \qquad x_{y,0} = y_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0},$$

e qui abbiamo aggiunto l'indice 0 alla notazione di Kirchhoff per significare che le derivate son prese riguardando u, v, w come funzioni delle coordinate anteriori e rispetto a queste coordinate, distinzione di cui l'opportunità riuscirà manifesta in seguito.

3. Diciamo che nello spazio vi è un campo di forza, quando esistono tre funzioni delle coordinate di un suo punto

$$\Xi(x, y, z), \qquad \mathrm{H}(x, y, z), \qquad \mathrm{Z}(x, y, z),$$

che esprimano le componenti della forza che sollecita la massa unità quando è concentrata in questo punto.

Diciamo che nello spazio esiste un *campo di tensione* quando esistono tre funzioni

$$l(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma), \qquad m(x, \ldots \alpha, \ldots), \qquad n(x, \ldots \alpha, \ldots),$$

che esprimano le componenti riferite all'unità di superficie di una tensione che si esercita sopra un elemento superficiale qualunque, il cui centro abbia le coordinate x, y, z e la cui normale rivolta in determinato senso abbia i coseni direttori α, β, γ. Se allora si considerano elementi superficiali costituenti una determinata superficie, le variabili α, β, γ diventano funzioni di x, y, z dipendenti dall'equazione di questa, e con tale intendimento possiamo esprimere le componenti della tensione determinata dal campo per tre funzioni del tipo

$$L(x, y, z), \qquad M(x, y, z), \qquad N(x, y, z).$$

4. Rammentiamo che un corpo elastico dicesi *allo stato naturale* quando si trova in una configurazione tale, che le forze interne dovute all'elasticità siano dovunque nulle, mentre non vi agiscono forze esterne. Studiando deformazioni prodotte dall'applicazione di forze, ammetteremo che la configurazione anteriore sia d'equilibrio naturale.

5. È nota la definizione del *potenziale* P_0 delle forze elastiche, il quale esprime il lavoro, riferito all'unità di volume del corpo pensato nella configurazione anteriore, che compiono le forze stesse per restituire allo stato naturale il corpo deformato, e che viene espresso da una funzione omogenea quadratica essenzialmente negativa delle componenti della deformazione. In tale espressione è implicita l'ipotesi che la deformazione sia piccolissima, anzi essa non sarebbe rigorosa che per deformazioni infinitesime, ed applicandola ad una che non è veramente tale, si segue il metodo di approssimazione.

6. Ciò premesso, enunciamo il problema della statica dei corpi elastici così:

Dato un corpo elastico allo stato naturale, e dato un campo per le forze agenti nella sua massa ed un altro per le tensioni esterne che si esercitano sulla sua superficie, determinare la deformazione del corpo e le forze interne che si sviluppano dopo questa.

Il concetto dei campi di forza e di tensione che v'introduciamo fornisce a questo enunciato una larghezza, che d'ordinario non gli si dà. Di solito si suppone (e questo è il modo più intuitivo di concepire il problema) che siano date delle forze da applicarsi rispettivamente all'interno e sulla superficie del corpo preso allo stato naturale, oppure s'introducono le forze come applicate nella configurazione d'equilibrio. Ma, in quanto al primo modo, si rifletta che l'equilibrio del corpo avviene dopo la deformazione, e quindi il problema sarebbe indeterminato se durante questa non fosse determinata la maniera di variazione delle forze esterne, il che equivale all'assegnazione dei loro campi; ed in quanto al secondo modo, osta il fatto che, dovendo esser dato il corpo necessariamente nella configurazione anteriore, e la conoscenza della posteriore dipendendo dalla risoluzione del problema, la distribuzione delle forze esterne non può senza l'assegnazione del campo intendersi data *a priori*, come lo deve. Vedremo appresso per quali rispetti l'ordinario enunciato più ristretto (e noi preferiremo il primo) possa pure ritenersi attendibile.

7. Per istabilire le equazioni d'equilibrio applicando il principio delle velocità virtuali, bisogna pensare il corpo già deformato ed equilibrato sotto l'azione delle forze esterne, cioè ridotto alla configurazione posteriore, ed a

partire da questa immaginargli impressa una deformazione virtuale determinata mediante gl'incrementi δu, δv, δw delle componenti dello spostamento. Nella configurazione anteriore, nella quale il corpo è dato, sia $\rho_0(x_0, y_0, z_0)$ la densità, e segniamo con $d\,S_0$ il volume di un elemento interno. Dopo la deformazione queste quantità diventano rispettivamente ρ e $d\,S$, fra le quali, per la conservazione della massa, intercede la relazione

$$\rho_0\, d\,S_0 = \rho\, d\,S.$$

Sull'elemento $d\,S$ il campo determina una forza esterna di componente, secondo l'asse delle x, $\Xi(x, y, z)\rho\, d\,S$ o, per l'eguaglianza precedente,

$$\Xi(x, y, z)\, \rho_0\, d\,S_0,$$

che brevemente segneremo con $\Xi \rho_0\, d\,S_0$.

La superficie σ_0 del corpo nella configurazione anteriore diventa, dopo la deformazione, la superficie σ che limita la configurazione posteriore, ed un elemento $d\,\sigma_0$ della prima si trasforma in un elemento $d\,\sigma$ della seconda. Su questo elemento il campo di tensione determina una forza di componente, secondo l'asse delle x,

$$L(x, y, z)\, d\,\sigma = L(x, y, z) \frac{d\,\sigma}{d\,\sigma_0}\, d\,\sigma_0,$$

ove $\frac{d\,\sigma}{d\,\sigma_0}$ è una determinata funzione di x_0, y_0, z_0 dipendente dalle u, v, w, e noi segneremo brevemente questa forza con $L \frac{d\,\sigma}{d\,\sigma_0}\, d\,\sigma_0$.

L'equazione fornita dal principio delle velocità virtuali sarà dunque

$$\int\limits_{S_0} \left[\Xi\, \delta u + \mathrm{H}\, \delta v + Z\, \delta w\right] \rho_0\, d\,S_0 +$$
$$+ \int\limits_{\sigma_0} \left[L\, \delta u + M\, \delta v + N\, \delta w\right] \frac{d\,\sigma}{d\,\sigma_0}\, d\,\sigma_0 + \delta \int\limits_{S_0} P_0\, d\,S_0 = 0$$

e da questa, con noti procedimenti, si deducono le equazioni differenziali di equilibrio

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_{x,0}} + \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_{y,0}} + \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_{z,0}} + \Xi\, \rho_0 = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial P_0}{\partial y_{x,0}} + \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial P_0}{\partial y_{y,0}} + \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial P_0}{\partial y_{z,0}} + \mathrm{H}\, \rho_0 = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial P_0}{\partial z_{x,0}} + \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial P_0}{\partial z_{y,0}} + \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial P_0}{\partial z_{z,0}} + Z\, \rho_0 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_0}{\partial x_{x,0}}\alpha_0+\frac{\partial P_0}{\partial x_{y,0}}\beta_0+\frac{\partial P_0}{\partial x_{z,0}}\gamma_0+L\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=0\\
&\frac{\partial P_0}{\partial y_{x,0}}\alpha_0+\frac{\partial P_0}{\partial y_{y,0}}\beta_0+\frac{\partial P_0}{\partial y_{z,0}}\gamma_0+M\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=0\\
&\frac{\partial P_0}{\partial z_{x,0}}\alpha_0+\frac{\partial P_0}{\partial z_{y,0}}\beta_0+\frac{\partial P_0}{\partial z_{z,0}}\gamma_0+N\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ove α_0, β_0, γ_0 denotano i coseni direttori della normale a σ_0 rivolta verso l'interno. Le tre prime valgono all'interno del corpo e le tre ultime sulla sua superficie.

8. In questa forma, sotto cui rigorosamente vengon fuori, le equazioni d'equilibrio non sarebbero comode per la determinazione delle funzioni incognite u, v, w. Per passare da queste alle equazioni ordinarie, bisogna eseguirvi le seguenti *riduzioni per approssimazione.*

Le funzioni Ξ, H, Z e le L, M, N dipendono da x, y, z, e per ridurle alle variabili indipendenti x_0, y_0, z_0, bisogna introdurvi le funzioni incognite u, v, w per mezzo delle (1); la stessa osservazione vale pel fattore $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$. Or supponendo queste funzioni regolari, abbiamo

$$\Xi=\Xi_0+\frac{\partial\Xi_0}{\partial x_0}u+\frac{\partial\Xi_0}{\partial y_0}v+\frac{\partial\Xi_0}{\partial z_0}w+\cdots,$$

$$L=L_0+\frac{\partial L}{\partial x_0}u+\frac{\partial L}{\partial y_0}v+\frac{\partial L}{\partial z_0}w+\cdots,$$

ove per brevità si è posto

$$\Xi(x_0,\,y_0,\,z_0)=\Xi_0,\qquad L(x_0,\,y_0,\,z_0)=L_0\,;$$

quindi, trascurando i termini piccolissimi rispetto a quelli di grandezza ordinaria, possiamo porre $\Xi_0,\ldots,N_0$ ai posti rispettivi di $\Xi,\ldots,N$.

Si ha poi

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=1+\frac{d\sigma-d\sigma_0}{d\sigma_0}=1+\theta,$$

ove θ denota la dilatazione superficiale, che si esprime, com'è noto, linearmente ed omogeneamente per le derivate prime di u, v, w, e come tale è piccolissima; trascurandola di fronte all'unità, possiamo dunque porre 1 al posto di $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$.

Con queste riduzioni si ottengono dalle (2), (3) le ordinarie equazioni d'equilibrio

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial P_0}{\partial x_{x,0}}+\cdots+\Xi_0\,\rho_0=0\\ &\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial P_0}{\partial y_{x,0}}+\cdots+\mathrm{H}_0\,\rho_0=0\\ &\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial P_0}{\partial z_{x,0}}+\cdots+\mathrm{Z}_0\,\rho_0=0 \end{aligned}\right\}\ (2)' \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial P_0}{\partial x_{x,0}}\alpha_0+\cdots+L_0=0\\ &\frac{\partial P_0}{\partial y_{x,0}}\alpha_0+\cdots+M_0=0\\ &\frac{\partial P_0}{\partial z_{x,0}}\alpha_0+\cdots+N_0=0 \end{aligned}\right\}\ (3)'$$

che sono lineari, ed all'integrazione delle quali si riduce la risoluzione della prima parte del problema.

In seguito noi porremo

$$\Xi_0\,\rho_0=X_0\,,\qquad \mathrm{H}_0\,\rho_0=Y_0\,,\qquad \mathrm{Z}_0\,\rho_0=Z_0\,,$$

denotando così con X_0, Y_0, Z_0 le componenti delle forze applicate all'interno del corpo e riferite all'unità di volume nella configurazione anteriore. Così richiameremo le equazioni (2)', (3)' con la notazione abbreviata

$$\mathfrak{X}_0+X_0=0,\qquad \mathfrak{Y}_0+Y_0=0,\qquad \mathfrak{Z}_0+Z_0=0 \qquad (2)'$$

$$\mathfrak{L}_0+L_0=0,\qquad \mathfrak{M}_0+M_0=0,\qquad \mathfrak{N}_0+N_0=0 \qquad (3)'$$

denotando con $\mathfrak{X}_0,\ldots,\mathfrak{N}_0$ le somme dei termini che dipendono dal potenziale.

Qui cade acconcio osservare che $X_0,\ldots,N_0$ sono le componenti della forza o della tensione unitarie che i rispettivi campi determinano sugli elementi materiali interni o superficiali posti nella configurazione anteriore, ond'è che, per istabilire le definitive equazioni d'equilibrio, non viene a richiedersi effettivamente la conoscenza dei campi di forza e di tensione, ma basta conoscere la distribuzione delle forze esterne per la massa e sulla superficie del corpo nello stato naturale, e ciò giustifica l'ammissibilità dell'enunciato più ristretto del problema, di cui sopra è parola.

9. Passiamo alla seconda parte del problema, cioè alla determinazione delle forze interne. Queste consistono nelle tensioni subíte nella configurazione d'equilibrio dagli elementi superficiali interni del corpo come risultato delle forze elastiche. Or le equazioni (2), (3) del n.° 7 possono evidentemente applicarsi ad una porzione interna qualunque del corpo, a condizione di sosti-

tuire nelle (3) ai posti di L, M, N le componenti della tensione, che la porzione rimanente determina sulla superficie di separazione; e siccome quest'ultima può esser qualunque, le (3) così applicate possono darci le espressioni delle richieste tensioni superficiali interne. Facendo in esse la riduzione $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=1$, ma non le altre $L=L_0$ etc., e adoperando le notazioni del numero precedente, noi scriveremo

$$\mathfrak{L}_0=-L, \qquad \mathfrak{M}_0=-M, \qquad \mathfrak{N}_0=-N, \tag{4}$$

le quali ci manifestano che $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ esprimono, con l'approssimazione inerente alla teoria, le componenti, riferite all'unità di superficie nella configurazione posteriore, della pressione subíta in questa configurazione da un elemento superficiale interno, la giacitura e la faccia del quale nella configurazione anteriore siano determinate dai coseni α_0, β_0, γ_0.

In particolare, se $\alpha_0=1$, $\beta_0=\gamma_0=0$, le componenti della pressione sono

$$\frac{\partial P}{\partial x_{x,0}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y_{x,0}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z_{x,0}},$$

quindi le sei derivate del potenziale rispetto alle componenti della deformazione, distribuite opportunamente in tre terne, esprimono le componenti delle pressioni subíte dopo la deformazione dagli elementi superciali interni, che prima di questa sono paralleli ai piani coordinati, sulle loro facce positive. Per questa ragione le derivate medesime diconsi *componenti della pressione.*

§ II. Significato più generale delle equazioni d'equilibrio.

10. Fin qui la vigente teoria, salvo qualche piccola variazione nel modo di esporla. Ora con un cambiamento di variabili indipendenti ed applicando ulteriormente, com'è lecito, la riduzione per approssimazione, vogliamo dare alle equazioni (2)', (3)' un'interpretazione più generale.

Si assegnino in modo fisso ed arbitrario tre funzioni U, V, W di x_0, y_0, z_0 sottoposte soltanto alla condizione di essere, insieme alle loro derivate dei primi due ordini, continue e piccolissime come le u, v, w e le derivate di queste: in altri termini siano U, V, W le componenti dello spostamento per un'assegnata deformazione piccolissima e continua del corpo distinta da quella che si vuole studiare. Si pongano

$$x_0 + U = x_i, \qquad y_0 + V = y_i, \qquad z_0 + W = z_i \tag{5}$$

e si riguardino u, v, w come funzioni delle nuove variabili indipendenti x_i, y_i, z_i. Le formole di transformazione son quelle che si ottengono per inversione dalle (5) date che siano le forme funzionali U, V, W. La configurazione del corpo, per la quale il punto materiale di coordinate anteriori x_0, y_0, z_0 acquista le coordinate x_i, y_i, z_i, è diversa in generale dall'anteriore e dalla posteriore, e noi la chiameremo *configurazione fondamentale*, dicendo fondamentali le coordinate x_i, y_i, z_i.

Derivando le (5), si ottiene

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x_i}{\partial x_0} = 1 + \dfrac{\partial U}{\partial x_0}, & \dfrac{\partial y_i}{\partial x_0} = \dfrac{\partial V}{\partial x_0}, & \dfrac{\partial z_i}{\partial x_0} = \dfrac{\partial W}{\partial x_0}, \\[2ex]
\dfrac{\partial x_i}{\partial y_0} = \dfrac{\partial U}{\partial y_0}, & \dfrac{\partial y_i}{\partial y_0} = 1 + \dfrac{\partial V}{\partial y_0}, & \dfrac{\partial z_i}{\partial y_0} = \dfrac{\partial W}{\partial y_0}, \\[2ex]
\dfrac{\partial x_i}{\partial z_0} = \dfrac{\partial U}{\partial z_0}, & \dfrac{\partial y_i}{\partial z_0} = \dfrac{\partial V}{\partial z_0}, & \dfrac{\partial z_i}{\partial z_0} = 1 + \dfrac{\partial W}{\partial z_0}.
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Per trasformare le derivate di u, v, w, ci partiremo dalle formole pel cambiamento delle variabili indipendenti, facendo uso delle (6) e delle eguaglianze che se ne deducono con un'altra derivazione; trascurando poscia i termini di second'ordine, otterremo facilmente le equazioni approssimate

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_0} = \frac{\partial u}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z_0} = \frac{\partial u}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \ldots, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y_0 \, \partial z_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \, \partial z_i}, \ldots$$

Per trasformare le funzioni α_0, β_0, γ_0 osserviamo che, se

$$\sigma_0(x_0, y_0, z_0) = 0$$

è l'equazione della superficie esterna del corpo nella configurazione anteriore (superficie che supponghiamo mancante di singolarità), quella della superficie trasformata, che limita la configurazione fondamentale, è

$$\sigma_i(x_i,\ y_i,\ z_i) = \sigma_0(x_0 + U,\ y_0 + V,\ z_0 + W) = 0$$

e si ha

$$\alpha_0 = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_0}\left[\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial z_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ponghiamo altresì

$$\alpha_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial z_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

con che α_i, β_i, γ_i denotano i coseni direttori della normale al punto corrispondente di σ_i. Or, adoperando le (6), troveremo

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \varepsilon_x, \qquad \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_0} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial y_i} + \varepsilon_y, \qquad \frac{\partial \sigma_0}{\partial z_0} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial z_i} + \varepsilon_z,$$

ove ε_x, ε_y, ε_z sono piccolissimi del prim'ordine; quindi

$$\alpha_0 = \alpha_i + \eta_x,$$

ove η_x è piccolissima del prim'ordine. Dunque, limitatamente ai termini principali, possiamo ritenere

$$\alpha_0 = \alpha_i, \qquad \beta_0 = \beta_i, \qquad \gamma_0 = \gamma_i.$$

In quanto alle forze, per l'analogia fra le formole (1) e (5), è chiaro che le riduzioni analoghe a quelle fatte al n.° 8, per le quali alle funzioni delle coordinate posteriori

$$\Xi\rho = X, \ldots, \qquad L, \ldots$$

poterono sostituirsi quelle delle coordinate anteriori

$$\Xi_0\rho_0 = X_0, \ldots, \qquad L_0, \ldots$$

permettono adesso di sostituire a queste ultime le funzioni delle coordinate fondamentali

$$X(x_i,\ y_i,\ z_i) = X_i, \ldots \qquad L(z_i,\ y_i,\ z_i) = L_i, \ldots$$

La forma che assumeranno le equazioni (2)′, (3)′ dopo la trasformazione e le indicate riduzioni può enunciarsi brevemente come segue. Si pongano

$$x_{x,i}=\frac{\partial u}{\partial xi}, \qquad y_{z,i}=z_{y,i}=\frac{\partial v}{\partial zi}+\frac{\partial w}{\partial yi},$$

$$y_{y,i}=\frac{\partial v}{\partial yi}, \qquad z_{x,i}=x_{z,i}=\frac{\partial w}{\partial xi}+\frac{\partial u}{\partial zi},$$

$$z_{z,i}=\frac{\partial w}{\partial zi}, \qquad x_{y,i}=y_{x,i}=\frac{\partial u}{\partial yi}+\frac{\partial v}{\partial xi},$$

e nella funzione P_0 si pongano semplicemente $x_{x,i}, y_{y,i},\dots, x_{y,i}$ ai posti rispettivi di $x_{x,0}, y_{y,0},\dots, x_{y,0}$, denotando allora con P_i la funzione P_0 così intesa. Le equazioni trasformate saranno

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial xi}\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}+\cdots+X_i=0\\ \frac{\partial}{\partial yi}\frac{\partial P_i}{\partial y_{x,i}}+\cdots+Y_i=0\\ \frac{\partial}{\partial zi}\frac{\partial P_i}{\partial z_{x,i}}+\cdots+Z_i=0\end{aligned}\right\} \quad (2)'' \qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}\alpha_i+\cdots+L_i=0\\ \frac{\partial P_i}{\partial y_{x,i}}\alpha_i+\cdots+M_i=0\\ \frac{\partial P_i}{\partial z_{x,i}}\alpha_i+\cdots+N_i=0\end{aligned}\right\} \quad (3)''$$

e noi le richiameremo con la notazione abbreviata

$$\mathfrak{X}_i+X_i=0, \qquad \mathfrak{Y}_i+Y_i=0, \qquad \mathfrak{Z}_i+Z_i=0 \qquad (2)''$$

$$\mathfrak{L}_i+L_i=0, \qquad \mathfrak{M}_i+M_i=0, \qquad \mathfrak{N}_i+N_i=0 \qquad (3)''$$

Come si vede, esse non differiscono dalle equazioni ordinarie che pel significato delle variabili indipendenti. Però i campi entro cui valgono sono quelli occupati dal corpo e, rispettivamente, dalla sua superficie nella configurazione fondamentale, ed inoltre bisogna pensare associate ad esse le (5), le quali, per mezzo delle funzioni date U, V, W, riferiscono la configurazione fondamentale all'anteriore.

Quando le equazioni d'equilibrio s'intenderanno poste in questo modo, noi diremo per brevità che *la deformazione è rappresentata nella configurazione fondamentale* (x_i, y_i, z_i).

Convenghiamo di porre l'indice $i=0$ quando la configurazione fondamentale è l'anteriore e di omettere l'indice quando è la posteriore: ciò, tanto nelle coordinate che nelle funzioni di queste.

11. Circa alle forze interne, riattaccando con le considerazioni fatte al n.° 9, la trasformazione e le riduzioni del presente paragrafo ci permettono

di scrivere le eguaglianze (4) così:

$$\mathfrak{L}_i = -L, \qquad \mathfrak{M}_i = -M, \qquad \mathfrak{N}_i = -N,$$

e queste ci dicono che le espressioni $\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ possono assumersi come componenti della pressione che si esercita nella configurazione d'equilibrio sopra un elemento superficiale interno, la posizione e la giacitura del quale nella configurazione fondamentale siano determinate rispettivamente dalle coordinate x_i, y_i, z_i e dai coseni α_i, β_i, γ_i.

Fissiamo ancora le seguenti proposizioni, che ci servirà di richiamare singolarmente:

a) Se scegliamo come configurazione fondamentale la posteriore, queste ultime eguaglianze prendono la forma

$$\mathfrak{L} = -L, \qquad \mathfrak{M} = -M, \qquad \mathfrak{N} = -N$$

la quale è la più naturale, e perciò la più comoda, per l'immaginazione del fenomeno, in quanto che la posizione e la giacitura dell'elemento superficiale, che compariscono ai primi membri, vi sono determinate nella stessa configurazione (quella d'equilibrio), nella quale agiscono le pressioni coi loro valori unitarii rigorosi dati dai secondi membri.

b) Facendo in queste equazioni $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, risulta che

$$\frac{\partial P}{\partial x_x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y_x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z_x}$$

sono le espressioni delle componenti della pressione unitaria che si esercita nella configurazione d'equilibrio sopra un elemento superficiale, che in questa configurazione è parallelo al piano $y\,z$, e quindi, rappresentando la deformazione nella configurazione d'equilibrio, le sei derivate del potenziale distribuite opportunamente in tre terne esprimono le componenti delle pressioni subìte dagli elementi superficiali interni, che nella configurazione stessa sono paralleli agli assi. Quest'ultima definizione delle sei componenti della pressione è quella che risulta immediatamente dalla classica considerazione dell'equilibrio del parallelepipedo.

c) Se in una stessa ricerca occorra (come avverrà in seguito) di far uso di due configurazioni fondamentali diverse contradistinte dagl'indici i, j, possiamo ritener valide le eguaglianze

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}} = \frac{\partial P_j}{\partial x_{x,j}}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}} = \frac{\partial P_j}{\partial y_{y,j}}, \ldots \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}} = \frac{\partial P_j}{\partial x_{y,j}}$$

ed assumerne indifferentemente i primi o i secondi membri come espressioni delle componenti della pressione.

§ III. Sulle deformazioni eccitate da forze agenti in superficie interne al corpo.

12. Fin oggi nella teoria matematica dell'elasticità sono state considerate forze superficiali esterne agenti soltanto sulla superficie che limita il corpo, il concetto delle quali è inspirato dal fenomeno delle pressioni che può esercitare sopra un corpo elastico un fluido che lo circondi. Nel presente studio dobbiamo introdurre il concetto di forze superficiali esterne agenti in superficie interne al corpo. Sebbene nessun fenomeno fisico suggerisca la considerazione di forze siffatte, pure il loro concetto matematico è perfettamente chiaro, e l'utilità d'introdurlo diverrà manifesta nel prosieguo del presente lavoro.

Considerando un corpo nella configurazione d'equilibrio, diciamo σ una superficie tracciata al suo interno, che supponghiamo connessa e *chiusa*, e pensiamo che l'equilibrio abbia luogo sotto l'azione di forze agenti su questa superficie, delle quali denotiamo con Λ, M, N le componenti secondo gli assi ortogonali riferite all'unità superficiale nella detta configurazione, e supposte finite e continue.

Adopereremo la notazione $\mathcal{D} f$ (discontinuità di f) per indicare la differenza dei valori che prende una funzione f, determinata in un campo a tre dimensioni, in due punti infinitamente vicini ad un punto di una superficie singolare, il primo situato sulla normale positiva e il secondo sulla negativa.

Assumendo per ora come configurazione fondamentale la posteriore e ritornando alla notazione introdotta al n.° 10, avremo le seguenti condizioni analitiche imposte alla deformazione da queste forze:

$$\mathcal{D}\,\mathfrak{L} = -\Lambda, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{M} = -\mathrm{M}, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{N} = -\mathrm{N}. \tag{7}$$

Infatti distinguiamo le funzioni $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ con uno o due apici, secondo che si riferiscano alla faccia di σ che sta dalla parte della normale positiva o della negativa, sicchè avremo $\mathcal{D}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' - \mathfrak{L}''$, ecc. Consideriamo un elemento di σ avente due dimensioni lineari infinitesime, e da tutti i suoi punti innalziamo da ambo le parti le normali di una lunghezza comune infinitesima del 2.° ordine. Lo spazio occupato da queste normali costituirà un elemento di volume, che potremo riguardare come cilindrico, e che sarà infinitesimo del quarto ordine, mentre la sua superficie laterale lo sarà del terzo. Su questo elemento si fanno equilibrio le seguenti forze piccolissime del secondo ordine: 1.° la forza esterna di componenti $\mathrm{A}\,d\,\sigma$, $\mathrm{M}\,d\,\sigma$, $\mathrm{N}\,d\,\sigma$; 2.° l'azione che si esercita sulla base del cilindro che sta dalla parte della normale positiva, le cui componenti, trascurando infinitesimi d'ordine superiore al secondo, avranno i valori $\mathfrak{L}'\,d\,\sigma$, $\mathfrak{M}'\,d\,\sigma$, $\mathfrak{N}'\,d\,\sigma$; 3.° l'azione che si esercita sull'altra base del cilindro, di componenti $-\mathfrak{L}''\,d\,\sigma$, $-\mathfrak{M}''\,d\,\sigma$, $-\mathfrak{N}''\,d\,\sigma$. Rispetto a queste forze sono trascurabili le azioni che si esercitano sulla superficie laterale del cilindro, perchè infinitesime del terz'ordine, e quindi si ha

$$(\mathrm{A}+\mathfrak{L}'-\mathfrak{L}'')\,d\,\sigma=0, \qquad (\mathrm{M}+\mathfrak{M}'-\mathfrak{M}'')\,d\,\sigma=0,$$
$$(\mathrm{N}+\mathfrak{N}'-\mathfrak{N}'')\,d\,\sigma=0\,;$$

dividendo per $d\,\sigma$ e introducendo il simbolo $\mathcal{D}$, si perviene alle sopra scritte equazioni.

Queste forze possono essere le sole a produrre la deformazione (ed allora è necessario che si facciano staticamente equilibrio). Ciò ammesso, la deformazione sarà determinata dalle equazioni (7) insieme a quelle relative all'interno del corpo

$$\mathfrak{X}=0, \qquad \mathfrak{Y}=0, \qquad \mathfrak{Z}=0,$$

ed alle altre che han luogo per la superficie esterna

$$\mathfrak{L}=0, \qquad \mathfrak{M}=0, \qquad \mathfrak{N}=0\,;$$

è poi sottintesa la condizione che le funzioni u, v, w e le loro derivate prime non abbiano altre discontinuità.

13. È evidente, dopo quanto fu esposto al § II che, se invece della configurazione posteriore ne assumiamo come fondamentale un'altra qualunque vicinissima all'anteriore, cioè determinata da tre funzioni U, V, W delle coordinate anteriori piccolissime e continue insieme alle derivate dei primi due ordini, le superiori condizioni non mutano la loro forma nel grado di approssimazione della teoria, ma cambia soltanto il significato delle variabili indipendenti, e ciò si potrà indicare affiggendo alle lettere l'indice i.

Concludiamo enunciando le proprietà osservate nella deformazione di cui si tratta, supposto che sia rappresentata in una configurazione fondamentale qualunque:

1.° In tutto il campo analitico occupato dalla configurazione fondamentale del corpo, salvo al più i punti della superficie singolare σ_i, saranno soddisfatte le equazioni differenziali

$$\mathfrak{X}_i = 0, \qquad \mathfrak{Y}_i = 0, \qquad \mathfrak{Z}_i = 0;$$

2.° Sulla superficie singolare σ_i saranno sodisfatte le condizioni

$$\mathcal{D}\,\mathfrak{L}_i = -\Lambda_i, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{M}_i = -\mathrm{M}_i, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{N}_i = -\mathrm{N}_i;$$

3.° Sulla superficie esterna saranno

$$\mathfrak{L}_i = 0, \qquad \mathfrak{M}_i = 0, \qquad \mathfrak{N}_i = 0;$$

4.° In tutto il campo analitico, eccetto i punti della superficie singolare, le funzioni u, v, w saranno continue insieme alle loro derivate prime, e saranno dovunque piccolissime.

A queste condizioni bisogna supporre associate le equazioni che contengono le funzioni U, V, W.

14. Le precedenti condizioni sono caratteristiche nel senso, che determinano univocamente la deformazione a meno di un moto piccolissimo ed arbitrario del corpo irrigidito nella configurazione fondamentale. Infatti partiamoci dalla nota identità

$$2\int_S P\,d\,S = -\int_S (\Sigma\,\mathfrak{X}\,u)\,d\,S - \int_\sigma (\Sigma\,\mathfrak{L}\,u)\,d\,\sigma, \tag{A}$$

ove i sommatori comprendono i termini relativi ai tre assi coordinati, e la normale a σ si riguarda come positiva quando è rivolta verso l'interno di S. (Per semplicità abbiamo omesso gl'indici i, che sottintendiamo.) Questa è applicabile ad una porzione qualunque S del corpo, entro la quale u, v, w e le loro derivate prime siano finite e continue. Per applicarla al corpo intero da noi considerato, chiamiamo σ la superficie interna, su cui agiscono le forze Λ, M, N ed s la superficie esterna che limita il corpo. Poichè le derivate prime sono discontinue attraverso σ, bisogna riguardare lo spazio S come limitato da s e dalle due facce di σ, e così l'integrale superficiale si spezza nei tre relativi a queste superficie, ma quello relativo alla faccia di σ che sta dalla parte della normale negativa dev'essere cambiato di segno. Così l'eguaglianza diventa

$$2\int_S P\,d\,S = -\int_S (\Sigma\,\mathfrak{X}\,u)\,d\,S - \int_s (\Sigma\,\mathfrak{L}\,u)\,d\,s - \int_\sigma [\Sigma\,(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}'')]\,d\,\sigma,$$

la quale, per le condizioni ammesse al numero precedente, si riduce a

$$2\int_S P\,d\,S = \int_\sigma (\Sigma\,\Lambda\,u)\,d\,\sigma.$$

Ora se, per ipotesi, possono esistere due sistemi di funzioni u_1, v_1, v_1 ed u_2, v_2, w_2 soddisfacenti le equazioni del problema, l'equazione precedente è verificata per entrambi; ma allora il sistema di funzioni $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$, $w = w_1 - w_2$, che pure la verifica, rende nullo il secondo membro, sicchè resta

$$\int_S P\,d\,S = 0,$$

da cui s'inferisce, come di solito, che le u, v, w rappresentano uno spostamento del corpo irrigidito.

§ IV. Sulle deformazioni eccitate in un corpo da interposizione o soppressione di uno strato sottilissimo di materia.

15. Per l'oggetto del presente studio è di fondamentale importanza il concetto, che qui vogliamo introdurre, di un modo fin oggi non considerato per eccitare una deformazione piccolissima in un corpo elastico, cioè mediante l'interposizione o la soppressione di uno strato sottilissimo di materia.

Caso di sola interposizione. — All'interno di un corpo elastico allo stato naturale si pensi tracciata una superficie σ_0, che supponghiamo *chiusa*, per la quale si denotino con x_0, y_0, z_0 le coordinate dei punti e con α_0, β_0, γ_0 i coseni direttori della normale positiva arbitrariamente fissata. S'immagini tagliato il corpo per tutta l'estensione di σ_0, dopo di che questa superficie sarà costituita dalla sovrapposizione dei due *margini* del taglio, uno dei quali resterà dalla parte della normale positiva, e lo diremo *margine positivo*, mentre chiameremo *margine negativo* l'altro. In ogni punto di σ_0 restano dunque sovrapposti due punti appartenenti rispettivamente ai due margini, e noi li diremo *corrispondenti*. Designeremo con σ'_0 il margine positivo e con σ''_0 il negativo, e distingueremo pure con uno o due apici la lettera designatrice di una qualunque quantità pei due valori di questa relativi a due punti corrispondenti del primo e del secondo margine rispettivamente.

Assegniamo tre funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ dei punti di σ_0, o vogliamo meglio dire, di σ'_0, il che torna lo stesso, le quali siano continue, piccolissime come gli spostamenti dovuti all'elasticità, e sodisfino inoltre la condizione

$$\bar{u}\,\alpha_0 + \bar{v}\,\beta_0 + \bar{w}\,\gamma_0 > 0. \tag{8}$$

Allora imprimiamo tale deformazione (u_1, v_1, w_1) al corpo, per la quale i margini si allontanino, lasciando un interstizio vuoto strettissimo, e conseguiamo questo scopo assegnando gli spostamenti rispettivi u'_1, v'_1, w'_1 ed u''_1, v''_1, w''_1 di due punti corrispondenti, in modo che si abbia

$$u'_1 - u''_1 = \bar{u}, \qquad v'_1 - v''_1 = \bar{v}, \qquad w'_1 - w''_1 = \bar{w}. \tag{a}$$

La deformazione è univocamente determinata da questi dati, perocchè il corpo può riguardarsi come limitato dai margini, di cui sono dati gli spostamenti e dalla superficie esterna, su cui sono date le forze (nulle), mentre non vi agiscono forze in massa.

L'allontanamento dei margini avviene realmente in virtù della relazione (8). Infatti $u'_1\alpha_0 + v'_1\beta_0 + w'_1\gamma_0$ esprime la contrazione del margine positivo (espansione quando questo trinomio è negativo), ed $u''_1\alpha_0 + v''_1\beta_0 + w''_1\gamma_0$ esprime l'espansione del margine negativo: la relazione (8) dice dunque che la prima quantità è maggiore della seconda, come occorre che sia perchè l'allontanamento si verifichi. Diversamente l'immaginata deformazione implicherebbe compenetrazione di materia.

Immaginiamo che, dopo questa deformazione, l'interstizio vuoto venga *rinzeppato* con uno strato della stessa materia presa allo stato naturale, e le superficie esterne di questo strato vengano *saldate* sui margini; poscia si pensi il corpo abbandonato a se stesso. Evidentemente dovrà seguire una seconda deformazione (u_2, v_2, w_2), perocchè le tensioni o pressioni trasmesse dai margini allo strato non sono generalmente nulle, nè si fanno equilibrio. Dopo questa deformazione l'insieme costituito dal corpo e dallo strato raggiungerà uno stato di equilibrio, nel quale cioè le componenti della pressione varieranno al suo interno continuamente. Vedremo in seguito che questa seconda deformazione è pure univocamente determinata dai dati (n.° 30).

16. Proponghiamoci lo studio della deformazione complessiva subita *dal primitivo corpo*, ch'è quella che diciamo *prodotta da interposizione di materia*, e a tal uopo denotiamo con u, v, w le componenti dello spostamento, sicchè

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2, \qquad w = w_1 + w_2, \tag{b}$$

quantità che vogliamo riguardare per ora come funzioni delle coordinate posteriori x, y, z, rappresentando la deformazione nella configurazione posteriore (n.° 10). Anzitutto abbiamo per definizione

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_0 + u', & y' &= y_0 + v', & z' &= z_0 + w', \\ x'' &= x_0 + u'', & y'' &= y_0 + v''; & z'' &= z_0 + w''. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Denotiamo poi con $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate posteriori di un punto qualunque dello strato, il campo delle quali viene a riempire il vuoto lasciato da quello delle x, y, z, ed in particolare siano $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ ed $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ le coordinate di due punti delle facce esterne, i quali aderiscono a due punti corrispondenti, sicchè

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= x', & \mathfrak{y}' &= y', & \mathfrak{z}' &= z', \\ \mathfrak{x}'' &= x'', & \mathfrak{y}'' &= y'', & \mathfrak{z}'' &= z''. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Segniamo con $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ le componenti dello spostamento di un punto qualunque dello strato, e distinguiamo con analoghi apici quelle relative agli anzidetti punti delle facce esterne. Allora abbiamo per effetto delle saldature

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}' &= u'_2, & \mathfrak{v}' &= v'_2, & \mathfrak{w}' &= w'_2, \\ \mathfrak{u}'' &= u''_2, & \mathfrak{v}'' &= v''_2, & \mathfrak{w}'' &= w''_2. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

La deformazione in esame gode le due seguenti proprietà:

1.° *Per tutte le coppie di punti corrispondenti si ha, a meno di quantità piccolissime di second'ordine,*

$$u' - u'' = \overline{u}, \qquad v' - v'' = \overline{v}, \qquad w' - w'' = \overline{w}. \tag{9}$$

Infatti, poichè lo strato è in equilibrio dopo la sua deformazione unica, le funzioni $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sono piccolissime e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, e quindi

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'' + \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}}\right)_\theta (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'') + \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}\right)_\theta (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') + \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{z}}\right)_\theta (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}''),$$

ove in generale denotiamo con φ_θ il valore di $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ per

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'' + \theta(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''), \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}'' + \theta(\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''), \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}'' + \theta(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}''),$$
$$(0 < \theta < 1).$$

Ma per le (d), (c) abbiamo

$$\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = x' - x'' = u' - u'', \quad \text{ecc.},$$

onde i termini del secondo membro sono piccolissimi del second'ordine, all'infuori del primo: a meno di quantità del second'ordine possiamo dunque ritenere

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'', \qquad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'', \qquad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'', \tag{f}$$

ovvero, per le (*e*),

$$u'_2 - u''_2 = 0, \qquad v'_2 - v''_2 = 0, \qquad w'_2 - w''_2 = 0. \tag{g}$$

Sommando membro a membro le (*a*), (*g*) ed osservando le (*b*), si perviene alle enunciate eguaglianze (9).

2.° *Per tutte le coppie di punti corrispondenti le componenti omologhe della pressione sono uguali a meno di quautità piccolissime del prim'ordine.*

Infatti si premetta che, alla stessa maniera che le (*f*), possono anche dimostrarsi per lo strato le eguaglianze approssimate alle quantità del primo ordine

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}}\right)' = \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}\right)' = \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{z}}\right)' = \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{z}}\right)'', \tag{h}$$

e le simili per le derivate di $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Ciò posto, si denoti con P il potenziale delle forze elastiche pel primitivo corpo e con $\mathfrak{P}$ lo stesso potenziale per lo strato, entrambi rappresentati nelle configurazioni posteriori rispettive. Le componenti della pressione dentro il corpo primitivo possono dunque esprimersi (n.° 11, *b*) per

$$\frac{\partial P}{\partial x_x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_y}, \ldots, \quad \frac{\partial P}{\partial x_y},$$

e dentro lo strato per

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{y}_y}, \ldots, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_y},$$

ove $\mathfrak{x}_x$, $\mathfrak{y}_y, \ldots$, $\mathfrak{x}_y$ denotano le componenti della deformazione per lo strato. Or poichè, per lo stato di equilibrio, le pressioni variano continuamente attraverso i margini, abbiamo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)' = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_x}\right)', \text{ etc.}; \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)'' = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_x}\right)'', \text{ ecc.}$$

Ma per le eguaglianze approssimate (*h*) abbiamo, a meno di termini del prim'ordine,

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_x}\right)' = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{x}_x}\right)'', \text{ ecc.};$$

seguono dunque, a meno di termini del prim'ordine, le equazioni dell'enunciato

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial y_y}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial y_y}\right)'', \ldots, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x_y}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial x_y}\right)''. \tag{10}$$

17. Verificate queste due proprietà, ci proponghiamo di rappresentare la descritta deformazione (u, v, w) del primitivo corpo *in un campo continuo*, scegliendo opportunamente la configurazione fondamentale. Questa non potrebbe essere la posteriore, perchè allora il campo sarebbe interrotto dall'interstizio occupato dallo strato, la deformazione del quale non si vuole rappresentare. Potrebbe invece scegliersi la configurazione anteriore, per la quale, essendovi i margini congiunti, il campo sarebbe continuo. Ma, in generale, la condizione da raggiungere per ottenere la continuità è la congiunzione dei margini nella configurazione fondamentale per sovrapposizione dei punti corrispondenti sopra una superficie σ_i; quindi le condizioni a cui dobbiamo sottoporre le funzioni U, V, W delle equazioni (5) sono evidentemente

$$U' - U'' = 0, \qquad V' - V'' = 0, \qquad W' - W'' = 0. \tag{11}$$

È facile scorgere che, riguardando le grandezze $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ come funzioni dei punti di σ_i, invece che di σ_0 come furono definite, e riguardando come normale positiva di σ_i quella rivolta verso il margine positivo, si ha

$$\bar{u}\,\alpha_i + \bar{v}\,\beta_i + \bar{w}\,\gamma_i > 0.$$

Ciò infatti risulta direttamente dalla possibilità di sostituire nel trinomio (8) α_0, β_0, γ_0 rispettivamente con α_i, β_i, γ_i, e si può anche dimostrare indirettamente, ma più intuitivamente, così. Il corpo potrà passare dalla configurazione fondamentale alla posteriore subendo i suoi punti gli spostamenti $-U+u$, $-V+v$, $-W+w$, e questa deformazione non implicherà compenetrazione di materia, laonde in questo passaggio la contrazione

$$(-U'+u')\,\alpha_i + (-V'+v')\,\beta_i + (-W'+w')\,\gamma_i$$

del margine positivo sarà maggiore della espansione

$$(-U''+u'')\,\alpha_i + (-V''+v'')\,\beta_i + (-W''+w'')\,\gamma_i$$

del margine negativo per ogni coppia di punti corrispondenti: osservando le (9), (11), si perviene quindi alla superiore diseguaglianza.

La prima delle due proprietà verificate al numero precedente dimostra che, rappresentando in questo modo la deformazione, le funzioni u, v, w saranno discontinue attraverso σ_i, e le loro discontinuità saranno rispettivamente $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. La seconda delle indicate proprietà potrà pure esprimersi per le eguaglianze

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}\right)'', \ldots, \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}\right)'',$$

che possono sostituirsi alle (10) (n.° 11, c), e così espressa ci dice che, nel grado di approssimazione della teoria, le componenti della pressione possono ritenersi continue attraverso la superficie singolare.

18. La deformazione prodotta da interposizione di materia, rappresentata in siffatta configurazione fondamentale, possiede dunque i seguenti caratteri:

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento sono funzioni di x_i, y_i, z_i piccolissime e continue in tutto il campo, tranne che attraverso la superficie singolare σ_i hanno le discontinuità

$$\mathcal{D}\, u = \overline{u}, \qquad \mathcal{D}\, v = \overline{v}, \qquad \mathcal{D}\, w = \overline{w},$$

ove $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sono funzioni dei punti di questa superficie piccolissime come gli spostamenti e sottoposte alla condizione

$$\overline{u}\,\alpha_i + \overline{v}\,\beta_i + \overline{w}\,\gamma_i > 0.$$

2.° Le componenti della pressione

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}, \ldots, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}$$

sono finite e continue in tutto il campo, ed anche attraverso la superficie singolare.

3.° Sulla superficie esterna sono sodisfatte (n.° 11) le condizioni

$$\mathfrak{L}_i = 0, \qquad \mathfrak{M}_i = 0, \qquad \mathfrak{N}_i = 0.$$

4.° Si ha in tutto il campo, eccettuati al più i punti della superficie singolare,

$$\mathfrak{X}_i = 0, \qquad \mathfrak{Y}_i = 0, \qquad \mathfrak{Z}_i = 0.$$

Differiamo di dimostrare che queste proprietà sono caratteristiche.

19. *Riferimento tangenziale dei margini.* — Nella trattazione precedente i punti materiali, a cui nella configurazione fondamentale si riferiscono le discontinuità degli spostamenti, si corrispondono nella configurazione ante-

riore per sovrapposizione. Però può immaginarsi una maniera di corrispondenza più generale di questa, ed in seguito c'imbatteremo in casi nei quali diventa necessario farlo.

Riprendiamo fin da principio la descrizione del fenomeno. Tracciata nel corpo allo stato naturale la superficie σ'_0, che vogliamo adottare come margine positivo del taglio, ed assegnate le funzioni $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ dei suoi punti (x'_0, y'_0, z'_0) soggette alla saputa ineguaglianza, ponghiamo

$$x''_0 = x'_0 + \overline{U}, \qquad y''_0 = y'_0 + \overline{V}, \qquad z''_0 = z'_0 + \overline{W}, \tag{12}$$

dove $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ denotino tre funzioni comunque assegnate, ma piccolissime e continue, e sottoposte alla condizione

$$\overline{U}\alpha_0 + \overline{V}\beta_0 + \overline{W}\gamma_0 = 0. \tag{13}$$

Allora, trascurando quantità piccolissime del second'ordine, possiamo riguardare i punti (x''_0, y''_0, z''_0) come giacenti su σ'_0, poichè il segmento piccolissimo di retta di componenti $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ è tangenziale; ma noi, riguardando la stessa superficie geometrica come luogo di questi altri punti, la chiamiamo σ''_0 e l'adottiamo come margine negativo determinantesi dopo il taglio.

Deformiamo poscia il corpo una prima volta, assegnando gli spostamenti (u'_1, v'_1, w'_1) ed (u''_1, v''_1, w''_1) dei nuovi punti corrispondenti (x'_0, y'_0, z'_0) ed (x''_0, y''_0, z''_0) sottoposti alle condizioni (a), in modo da produrre un interstizio vuoto. Come condizione perchè ciò avvenga, può ritenersi la stessa (8): infatti, mentre il punto (x'_0, y'_0, z'_0) del margine positivo subisce gli spostamenti $u'_1(x'_0, y'_0, z'_0)$ etc., il suo sovrapposto del margine negativo (adesso non più corrispondente) riceve gli spostamenti $u''_1(x'_0, y'_0, z'_0)$ ecc.; ma, fra questi ultimi e gli spostamenti $u''_1(x''_0, y''_0, z''_0)$ ecc. del punto corrispondente, le differenze sono piccolissime del second'ordine, e quindi trascurabili; ora con questi trascuramenti la dimostrazione data al n.° 15 dell'eguaglianza resta ancora applicabile. Ciò stabilito, procediamo all'interposizione di materia ed alle saldature, e lasciamo riequilibrare il corpo con una seconda deformazione (u_2, v_2, w_2). Così avremo prodotto la deformazione totale (u, v, w).

È facile dimostrare che possono ritenersi sussistenti le due proprietà dimostrate al n.° 16. Se infatti per ogni punto del margine positivo consideriamo sul negativo di corrispondente ed il sovrapposto nella configurazione anteriore, le componenti omologhe dello spostamento per questi due punti differiscono per quantità del second'ordine, e sono quindi trascurabili, e le componenti omologhe della pressione, differenti per quantità del prim'ordine, sono trascurabili come tali, sicchè le conclusioni dedotte al n.° 16 pei punti sovrapposti reggono ancora qui pei corrispondenti.

Come configurazione fondamentale non dovrà più adottarsi l'anteriore, ma un'altra qualunque vicinissima a questa, e per la quale i margini coincidano per sovrapposizione dei nuovi punti corrispondenti, e ciò impone le condizioni relative a questi punti

$$U' - U'' = \overline{U}, \qquad V' - V'' = \overline{V}, \qquad W' - W'' = \overline{W}. \tag{14}$$

Allora sulla superficie singolare σ_i avrà luogo l'eguaglianza

$$\overline{U}\alpha_i + \overline{V}\beta_i + \overline{W}\gamma_i = 0, \tag{13)'$$

essendo lecito, a meno di termini trascurabili, sostituire nella (13) α_0, β_0, γ_0 con α_i, β_i, γ_i. Sarà pure soddisfatta la condizione

$$\overline{u}\,\alpha_i + \overline{v}\,\beta_i + \overline{w}\,\gamma_i > 0,$$

e ciò può dimostrarsi nello stesso modo, oppure intuitivamente come al n.° 17. La deformazione così immaginata e rappresentata gode dunque le stesse proprietà già formulate al n.° 18.

Quando una deformazione prodotta da interposizione di materia si determina e si rappresenta in questo modo, diremo che vi è *riferimento tangenziale dei margini.*

20. *Caso di sola soppressione.* — All'interno di un corpo elastico allo stato naturale sia tracciata una superficie σ'_0 connessa e chiusa, e siano x'_0, y'_0, z'_0 le coordinate di un punto qualunque di essa ed α'_0, β'_0, γ'_0 i coseni direttori della normale positiva stabilita in modo fisso. Assegniamo tre funzioni $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ dei punti di questa superficie, le quali siano piccolissime e continue, ed inoltre sodisfino la condizione

$$\overline{u}\,\alpha'_0 + \overline{v}\,\beta'_0 + \overline{w}\,\gamma'_0 < 0. \tag{15}$$

Ponendo allora

$$x'_0 + \overline{u} = x''_0, \qquad y'_0 + \overline{v} = y''_0, \qquad z'_0 + \overline{w} = z''_0, \tag{i}$$

il luogo dei punti (x''_0, y''_0, z''_0) sarà una superficie σ''_0 vicinissima alla prima e giacente tutta dalla parte della normale negativa alla medesima, di guisa che queste due superficie limiteranno sempre completamente uno spazio strettissimo.

Supponghiamo poi soppressa la materia del corpo interposta fra queste due superficie, lasciando in esso un vuoto, ed in riguardo a questo denominiamo σ'_0 *margine positivo* e σ''_0 *margine negativo.* Le relazioni (i) stabiliscono una corrispondenza univoca fra i punti di queste due superficie. Imprimiamo tale deformazione al corpo, che i margini vengono a congiungersi per sovrapposizione dei punti corrispondenti: basta all'uopo assegnare gli spostamenti rispettivi (u'_1, v'_1, w'_1) e (u''_1, v''_1, w''_1) di due punti corrispondenti di σ'_0, σ''_0 in modo, che siano

$$x'_0 + u'_1 = x''_0 + u''_1, \qquad y'_0 + v'_1 = y''_0 + v''_1, \qquad z'_0 + w'_1 = z''_0 + w''_1,$$

ovvero, per le (i),

$$u'_1 - u''_1 = \overline{u}, \qquad v'_1 - v''_1 = \overline{v}, \qquad w'_1 - w''_1 = \overline{w}. \tag{k}$$

La deformazione (u_1, v_1, w_1) così subìta dal corpo, esclusane la materia soppressa, è univocamente determinata dai dati, perocchè il rimanente corpo può riguardarsi come limitato dalla superficie esterna, su cui sono date le forze (nulle) e dai margini, su cui sono dati gli spostamenti, mentre non vi agiscono forze in massa.

Dopo ciò, si pensino saldati i margini combacianti e poscia abbandonato il corpo a sè stesso. Poichè le tensioni di due elementi superficiali corrispondenti prodotte dalla già impressa deformazione non sono generalmente uguali e contrarie, l'equilibrio non potrà sussistere, ed avverrà una seconda deformazione (u_2, v_2, w_2), dopo la quale le componenti della pressione varieranno continuamente in tutto il corpo.

La deformazione complessiva di spostamenti

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2, \qquad w = w_1 + w_2$$

così eccitata nel primitivo corpo, *esclusane la materia soppressa*, è quella che diciamo *prodotta da soppressione di materia*, e su questa vogliamo concentrare il nostro studio.

21. Importa rilevarne le due seguenti proprietà:

1.° *Per tutte le coppie di punti corrispondenti si ha rigorosamente*

$$u' - u'' = \overline{u}, \qquad v' - v'' = \overline{v}, \qquad w' - w'' = \overline{w}. \tag{16}$$

Ciò risulta dalle eguaglianze (k) e dalle altre, che sono conseguenza della saldatura,

$$u'_2 - u''_2 = 0, \qquad v'_2 - v''_2 = 0, \qquad w'_2 - w''_2 = 0.$$

2.° *Per tutte le coppie di punti corrispondenti le componenti omologhe della tensione sono rigorosamente uguali.*

Ciò è senz'altro evidente e, rappresentando la deformazione nella configurazione d'equilibrio, si esprime per le uguaglianze (n.° 11, b)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial x_x}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial y_y}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial y_y}\right)'', \ldots, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x_y}\right)' = \left(\frac{\partial P}{\partial x_y}\right)''. \tag{17}$$

22. Per rappresentare questa deformazione in un campo continuo, non si può adottare come configurazione fondamentale l'anteriore, perchè questa è discontinua per la mancanza della materia soppressa. Si può scegliere invece la posteriore. Ma in generale potrà scegliersi tal configurazione, per la quale i margini siano congiunti sopra una medesima superficie σ_i per sovrapposizione dei punti corrispondenti, e ciò fornisce le condizioni

$$U' - U'' = \overline{u}, \qquad V' - V'' = \overline{v}, \qquad W' - W'' = \overline{w}. \tag{18}$$

Riguardando $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ come funzioni dei punti di σ_i, e segnando con α_i, β_i, γ_i i coseni direttori della normale positiva scelta dalla parte del margine positivo, si avrà

$$\overline{u}\,\alpha_i + \overline{v}\,\beta_i + \overline{w}\,\gamma_i < 0.$$

Infatti il corpo potrà passare dalla configurazione fondamentale all'anteriore mediante gli spostamenti $-U$, $-V$, $-W$; con ciò si riprodurrà l'interstizio vuoto, e quindi la contrazione $-(U'\alpha_i + V'\beta_i + W'\gamma_i)$ del margine positivo sarà maggiore dell'espansione $-(U''\alpha_i + V''\beta_i + W''\gamma_i)$ del margine negativo. Osservando le (18), si perviene alla presunta diseguaglianza.

La prima delle due proprietà stabilite al numero precedente ci dice che le funzioni u, v, w così rappresentate sono discontinue attraverso σ_i, e le loro discontinuità sono appunto $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. La seconda proprietà, che afferma la continuità delle componenti della pressione attraverso σ_i, può esprimersi per le equazioni

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}\right)'', \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}\right)'', \ldots, \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}\right)' = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}\right)'',$$

che possono sostituirsi alle (17) (n.° 11, c).

23. La deformazione così definita e rappresentata ha dunque i seguenti caratteri:

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento sono funzioni di x_i, y_i, z_i piccolissime e continue in tutto il campo, tranne che attraverso la superficie σ_i hanno le discontinuità

$$\mathcal{D} u = \bar{u}, \qquad \mathcal{D} v = \bar{v}, \qquad \mathcal{D} w = \bar{w},$$

ove $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sono funzioni dei punti della superficie piccolissime come gli spostamenti e sottoposte alla condizione

$$\bar{u}\, \alpha_i + \bar{v}\, \beta_i + \bar{w}\, \gamma_i < 0.$$

2.° Le componenti della pressione

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}, \ldots, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}$$

sono finite e continue in tutto il campo, ed anche attraverso la superficie singolare.

3.° Sulla superficie esterna sono

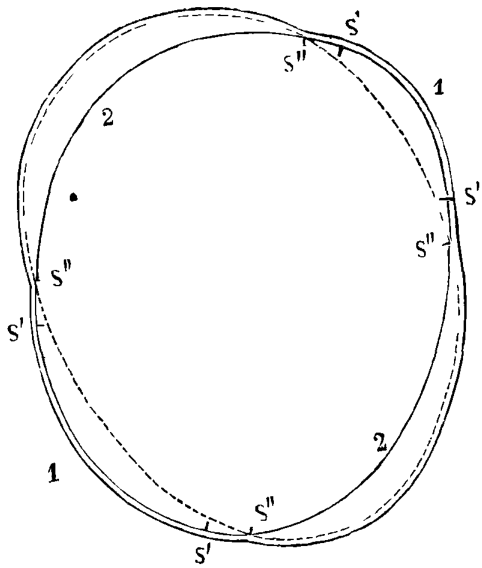
$$\mathfrak{L}_i = 0, \qquad \mathfrak{M}_i = 0, \qquad \mathfrak{N}_i = 0.$$

4.° In tutto il campo, eccettuati al più i punti della superficie singolare, sono

$$\mathfrak{X}_i = 0, \qquad \mathfrak{Y}_i = 0, \qquad \mathfrak{Z}_i = 0.$$

24. *Caso generale.* — Le deformazioni prodotte da interposizione e da soppressione di materia rappresentate in opportune configurazioni fondamentali hanno gli stessi caratteri, e differiscono soltanto pel segno del trinomio $\bar{u}\, \alpha_i + \bar{v}\, \beta_i + \bar{w}\, \gamma_i$ relativo alla superficie singolare. Ora in generale si può provocare in un corpo elastico una deformazione che, opportunamente rappresentata, abbia gli stessi caratteri, senza che il trinomio anzidetto soggiaccia ad alcuna restrizione in quanto al segno.

Si tracci all'interno del corpo una superficie connessa e chiusa σ'_0, che chiameremo margine positivo, e si segnino con x'_0, y'_0, z'_0 le coordinate di un punto qualunque di essa e con α'_0, β'_0, γ'_0 i coseni direttori della normale positiva. Indi si assegnino tre funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ piccolissime e continue dei punti di essa. Allora il trinomio



$$\bar{u}\,\alpha'_0 + \bar{v}\,\beta'_0 + \bar{w}\,\gamma'_0$$

sarà positivo in alcune *regioni* di σ'_0, che diremo *di prima specie* e negativo nelle rimanenti, che chiameremo *di seconda specie*, regioni che saranno separate da certe linee s' chiudentisi in sè stesse, sulle quali il trinomio sarà nullo (*). Se pei punti di queste linee ponghiamo

$$x'_0 + \bar{u} = x''_0, \qquad y'_0 + \bar{v} = y''_0, \qquad z'_0 + \bar{w} = z''_0, \tag{19}$$

i punti di coordinate x''_0, y''_0, z''_0 giaceranno egualmente su σ'_0, trascurando lunghezze piccolissime del 2.° ordine, poichè ivi il segmento di retta di componenti $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ è tangenziale. I luoghi di questi punti saranno altrettante linee s'' giacenti su σ'_0, vicinissime alle linee s' e rientranti, rispetto a queste, verso le regioni di prima o verso quelle di seconda specie (**). Queste altre linee, pure chiuse in sè stesse o insieme al contorno, dividono la superficie in altre regioni, le quali, una ad una, corrispondono alle prime, e ne differiscono per le striscie strettissime limitate dalle linee s' e dalle corispondenti s''. Noi chiameremo queste striscie *sconfinamenti* e diremo *sconfinate* le regioni superficiali limitate dalle linee s''.

(*) La figura intercalata nel testo, che rappresenta una sezione del corpo, potrà esser utile all'immaginazione del lettore. La linea continua interna rappresenta la traccia della superficie σ'_0, e i numeri 1, 2 designano le due specie di regioni, mentre i punti s' sono le tracce delle linee omonime. La normale positiva è supposta rivolta verso l'interno di σ'_0.

(**) Nel disegno è supposto che i punti s'' rientrino tutti verso le regioni di seconda specie, perchè così l'immaginazione del fenomeno riesce più facile.

Allora pei punti delle regioni di seconda specie (non sconfinate) si pongano pure, in continuità con le (19),

$$x'_0 + \bar{u} = x''_0, \qquad y'_0 + \bar{v} = y''_0, \qquad z'_0 + \bar{w} = z''_0. \tag{20}$$

Il luogo dei punti (x''_0, y''_0, z''_0) sarà costituito da tanti pezzi di superficie vicinissime alle regioni di seconda specie, giacenti dalla parte della normale negativa, e limitate dalle linee s'', sulle quali intersegheranno la superficie σ'_0 (*). Chiamiamo l'insieme di queste superficie *margine negativo di seconda specie.* Pensiamo allora soppressa la materia interposta fra queste porzioni di margine e la superficie σ'_0, in modo da costituire altrettanti vuoti strettissimi aderenti alle regioni di seconda specie sconfinate.

Dopo ciò immaginiamo tagliato il corpo per le regioni di prima specie sconfinate (**), e chiamiamo *margine negativo di prima specie* l'insieme di quei margini, che dopo il taglio restano dalla parte della normale negativa. I margini negativi delle due specie vengono così a costituire una superficie continua σ''_0, che sarà il *margine negativo*, sul quale essi restano separati dalle linee s'' come i positivi son separati su σ'_0 dalle s'.

25. Il corpo così preparato, e già scemato della materia soppressa, è quello a cui vogliamo imprimere la deformazione. All'uopo è necessario stabilire una corrispondenza univoca fra i punti dell'intero margine positivo σ'_0 e quelli dell'intero negativo σ''_0 in modo, che le regioni di ciascuna specie ma di segno contrario si corrispondano punto per punto. Per le regioni di seconda specie una tale corrispondenza è già determinata dalle equazioni (20). Per quelle di prima specie però essa non può essere determinata dalla sovrapposizione attuale, perchè il margine di prima specie positivo non ha la stessa estensione del negativo, ma ne differisce per gli sconfinamenti. È dunque necessario ricorrere al riferimento tangenziale definito al n.° 19, e questo adotteremo stabilendo la corrispondenza mediante le formole

$$x''_0 = x'_0 + \bar{U}, \qquad y''_0 = y'_0 + \bar{V}, \qquad z''_0 = z'_0 + \bar{W}, \tag{12}$$

ove le funzioni piccolissime e continue $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ siano assegnate pei punti del margine positivo di prima specie (non sconfinato) in modo che, oltre alla

(*) Nel disegno questi pezzi di superficie son rappresentati dalle linee tratteggiate esterne.

(**) Si è agevolata l'immagine del taglio sdoppiando la linea continua.

condizione

$$\overline{U}\alpha'_0 + \overline{V}\beta'_0 + \overline{W}\gamma'_0 = 0, \tag{13}$$

siano sui confini

$$\overline{U} = \overline{u}, \qquad \overline{V} = \overline{v}, \qquad \overline{W} = \overline{w}. \tag{21}$$

Queste ultime fanno sì, che sui confini s' le (12) s'identificano con le (19), e la continuità della corrispondenza per gl'interi due margini è assicurata.

26. Ciò posto, s'imprima al corpo una deformazione (u_1, v_1, w_1), assegnando gli spostamenti u'_1, v'_1, w'_1 ed u''_1, v''_1, w''_1 dei punti corrispondenti in modo, da aversi

$$u'_1 - u''_1 = \overline{u}, \qquad v'_1 - v''_1 = \overline{v}, \qquad w'_1 - w''_1 = \overline{w}. \tag{l}$$

Con questa deformazione (determinata univocamente dai dati anzidetti insieme alla condizione che sulla superficie esterna del corpo non agiscono forze) avverrà che: 1.° i margini di seconda specie e di segno contrario verranno a coincidere per sovrapposizione dei punti corrispondenti, scomparendo gl'interstizii vuoti, e particolarmente le linee s', s'' si sovrapporranno: infatti, denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate posteriori a questa deformazione ed applicando le (20), (l), si ottiene

$$x'_1 - x''_1 = x'_0 + u'_1 - x''_0 - u''_1 = -\overline{u} + \overline{u} = 0, \quad \text{etc.};$$

2.° i margini di prima specie e di segno contrario si allontaneranno evidentemente, costituendosi fra essi certi nuovi interstizii vuoti (*).

Dopo ciò s'interponga materia fra i margini di prima specie allontanati, si operino le saldature e si abbandoni il corpo a sè stesso, onde avverrà una seconda deformazione (u_2, v_2, w_2) fino al ristabilimento dell'equilibrio. La risultante (u, v, w) di queste due deformazioni è quella che diciamo prodotta da interposizione e soppressione di materia.

Evidentemente restano applicabili i ragionamenti, coi quali pei due casi particolari precedenti siam venuti dimostrando: 1.° che le differenze fra gli spostamenti omologhi di due punti corrispondenti di prima specie possono ri-

(*) Guardando il disegno, s'immagini per semplicità che il solo margine positivo si deformi, restando inalterato e fermo il negativo, il che corrisponde al caso particolare $u''_1 = v''_1 = w''_1 = 0$. Così deve immaginarsi la linea intera interna deformarsi sovrapponendosi alla tratteggiata in modo, che i punti s' vadano a coincidere con gli s''.

tenersi uguali rispettivamente ad $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, a meno di termini del second'ordine; 2.° che le stesse differenze per due punti corrispondenti di seconda specie sono rigorosamente uguali ad $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$; 3.° che le componenti omologhe della tensione in due punti corrispondenti di prima specie possono ritenersi uguali a meno di termini piccolissimi del prim'ordine; 4.° che le stesse componenti per due punti corrispondenti di seconda specie sono rigorosamente uguali.

27. Però, diversamente da quanto avviene pei due casi particolari, la configurazione fondamentale conveniente qui non può essere nè l'anteriore, nè la posteriore, perchè nel primo caso il campo analitico sarebbe discontinuo presso le regioni di seconda specie e nel secondo caso presso quelle di prima (*). È dunque necessario scegliere una configurazione fondamentale distinta dall'anteriore e dalla posteriore, ma nella quale i margini di ambo le specie siano congiunti per sovrapposizione dei punti corrispondenti sopra una medesima superficie σ_i. A tal uopo bisogna che le funzioni U, V, W soddisfino pei margini di prima specie le condizioni

$$U' - U'' = \overline{U}, \qquad V' - V'' = \overline{V}, \qquad W' - W'' = \overline{W} \tag{22}$$

e per quelli di seconda le altre

$$U' - U'' = \bar{u}, \qquad V' - V'' = \bar{v}, \qquad W' - W'' = \bar{w}. \tag{23}$$

Infatti da queste condizioni, tenendo presenti le (12), (22), consegue che saranno pei margini di prima specie

$$x'_i - x''_i = x'_0 - x''_0 + U' - U'' = -\overline{U} + \overline{U} = 0, \quad \text{etc.}$$

e per quelli di seconda, avendo riguardo alle (20), (23),

$$x'_i - x''_i = x'_0 - x''_0 + U' - U'' = -\bar{u} + \bar{u} = 0, \quad \text{etc.}$$

Queste due serie di condizioni non differiscono sulle linee di confine a cagione delle (21).

Così sulla superficie σ_i dello spazio restano distinte due specie di regioni corrispondenti a quelle che si distinsero sulla σ'_0, e noi le chiameremo del pari di prima e di seconda specie rispettivamente. Esse sono separate da

(*) Questo fatto dà ragione della necessità d'introdurre in questa teoria la nozione di configurazione fondamentale generale.

linee, che sono quelle su cui vengono a coincidere le linee materiali s', s'' dei due margini nella configurazione fondamentale. Sulle regioni di prima specie di σ_i sarà $\overline{U}\alpha_i + \overline{V}\beta_i + \overline{W}\gamma_i = 0$, come fu dimostrato al n.° 19. Si avrà pure per le ragioni di prima specie di σ_i

$$\overline{u}\,\alpha_i + \overline{v}\,\beta_i + \overline{w}\,\gamma_i > 0$$

e per quelle di seconda

$$\overline{u}\,\alpha_i + \overline{v}\,\beta_i + \overline{w}\,\gamma_i < 0.$$

Ciò può dimostrarsi al solito con la surrogabilità di α_0, β_0, γ_0 con α_i, β_i, γ_i, oppure col seguente ragionamento. Il corpo potrà passare dalla configurazione fondamentale all'anteriore per la deformazione $(-U, -V, -W)$, e siccome ciò riproduce i vuoti lasciati dalla materia soppressa, è sodisfatta la seconda ineguaglianza in virtù delle (23); il corpo potrà pure passare dalla configurazione fondamentale alla posteriore mediante la deformazione $(-U+u, -V+v, -W+w)$ e, ciò ripristinando i vuoti occupati dalla materia aggiunta, è sodisfatta in virtù delle (22), (13) la prima ineguaglianza.

28. Con una scelta siffatta di configurazione fondamentale, e dopo quanto precede, possiamo concludere che la deformazione così generata e rappresentata gode le seguenti proprietà.

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento sono funzioni piccolissime e continue delle coordinate fondamentali, salvo che attraverso la superficie singolare σ_i subiscono le discontinuità

$$\mathfrak{D}\,u = \overline{u}, \qquad \mathfrak{D}\,v = \overline{v}, \qquad \mathfrak{D}\,w = \overline{w},$$

ove $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sono funzioni continue e piccolissime dei punti di σ_i.

2.° Le componenti della pressione

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_{x,i}}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial y_{y,i}}, \ldots, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_{y,i}}$$

sono continue in tutto il campo, ed anche tali possono ritenersi attraverso la superficie singolare.

3.° Sulla superficie esterna si ha

$$\mathfrak{L}_i = 0, \qquad \mathfrak{M}_i = 0, \qquad \mathfrak{N}_i = 0.$$

4.° In tutto il campo, eccettuati al più i punti della superficie singolare, si ha

$$\mathfrak{X}_i = 0, \qquad \mathfrak{Y}_i = 0, \qquad \mathfrak{Z}_i = 0.$$

29. Teorema. — *Le proprietà rilevate al numero precedente sono caratteristiche, cioè determinano univocamente il sistema delle funzioni u, v, w che le sodisfano, a meno di termini atti a rapresentare un moto piccolissimo arbitrario del corpo irrigidito.*

Infatti, se, per ipotesi, potessero esistere due sistemi distinti di funzioni u', v', w' ed u'', v'', w'' sodisfacenti le stesse condizioni, le differenze $u = u' - u''$, $v = v' - v''$, $w = w' - w''$ poste in loro vece renderebbero in tutto il campo $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{Y}_i = \mathfrak{Z}_i = 0$, e sulla superficie esterna $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i = 0$; sopra σ_i si avrebbe $\mathcal{D} u = \bar{u} - \bar{u} = 0$, etc., e le derivate di P_i rispetto ad $x_{x,i}, \dots x_{y,i}$ sarebbero pure continue attraverso σ_i. Ora, per l'identità (A), tutte queste condizioni annullano l'integrale

$$\int_{S_i} P_i \, d\, S_i\,,$$

onde si conclude, come di solito, che u, v, w rappresentano uno spostamento arbitrario del corpo irrigidito.

30. Al teorema precedente vogliamo associare le seguenti deduzioni a complemento di quanto fu svolto al n.° 24 e segg.

1.° Abbiamo notato al n.° 26 che la prima deformazione parziale (u_1, v_1, w_1) del corpo, già privato della materia che va soppressa, è univocamente determinata dai valori u'_1, v'_1, w'_1 ed u''_1, v''_1, w''_1 relativi ai punti corrispondenti del margine positivo e del negativo rispettivamente. Ora il teorema stabilisce che la deformazione complessiva è univocamente determinata dalle funzioni date $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Siamo dunque in grado d'inferirne che anche la deformazione parziale (u_2, v_2, w_2) è determinata dagli stessi dati.

2.° In virtù del teorema la deformazione complessiva è dunque univocamente determinata dalle differenze $u'_1 - u''_2 = \bar{u}$, ecc. fra gli spostamenti assegnati per due punti corrispondenti nella prima deformazione parziale, onde segue che, comunque si assegnino le due terne di funzioni u'_1, v'_1, w'_1 ed u''_1, v''_1, w''_1, purchè le rispettive differenze abbiano i valori dati $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, le funzioni u, v, w sono sempre le stesse con l'approssimazione inerente alla teoria.

3.° Riunendo i due risultati precedenti concludiamo che *una deformazione prodotta da interposizione e soppressione di materia è univocamente determinata, per quanto riguarda la sua grandezza, cioè le funzioni u, v, w*

delle coordinate fondamentali, quando nel campo fondamentale è data la superficie singolare σ_i e la faccia di essa cui corrisponde la normale positiva, e son date le relative discontinuità caratteristiche $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$.

§ V. Nuova configurazione fondamentale per le deformazioni prodotte da forze. Teorema della sovrapposizione degli effetti.

31. Consideriamo un corpo sollecitato da forze agenti in massa e forze applicate alla superficie esterna ed a superficie interne. All'interno del corpo, ed in una regione di esso ove non cadano forze, pensiamo tracciata una superficie σ' ed assegnate tre funzioni piccolissime e continue $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ dei punti di questa. Indi, riguardando questa superficie come margine positivo, prepariamo il corpo come se dovessimo eccitarvi una deformazione per interposizione e soppressione di materia, cioè pensiamo eseguite tutte le operazioni descritte al n.° 24; ma poscia non procediamo ad eccitare effettivamente siffatta deformazione, cioè, non avviciniamo i margini di seconda specie e non allontaniamo quelli di prima. In questa maniera il corpo sarà semplicemente *disintegrato* per l'avvenuta soppressione di materia fra i margini di seconda specie.

Ciò premesso, nello studiare la deformazione prodotta dalle forze nel corpo *integro*, lasciamo da parte la materia pensata come sopra soppressa o, in altri termini, escludiamo dal problema la deformazione di questa materia, sebbene essa prenda parte al fenomeno, e, per rappresentare la deformazione della rimanente materia, facciamo uso di una delle configurazioni fondamentali adottabili per rappresentarvi la deformazione per interposizione e soppressione come sopra definita ma non prodotta.

Per dare ragione di questo modo di procedere, diciamo ch'esso diventa utile, come tosto vedremo, nel caso che sopra uno stesso corpo si vogliano paragonare gli effetti separati dell'azione di forze e di quella di aggiunzione e soppressione di materia: allora infatti l'azione separata delle forze si esercita sul corpo integro, e perciò ben pure sulla materia, che nell'altra azione separata va soppressa; ma per questa materia il paragone delle due deformazioni non ha senso.

Dimostreremo che, adottando una configurazione fondamentale siffatta, le condizioni caratteristiche per la deformazione prodotta dalle forze non si alterano. A tal uopo basta evidentemente dimostrare che, attraverso la superficie σ_i, a cui si riduce σ'_0, tanto le componenti dello spostamento che quelle della tensione possono ritenersi continue nel grado di approssimazione della teoria. Ma ciò è facile. Infatti consideriamo il corpo integro nella configurazione anteriore e richiamiamo le formole poste ai n.i 24 e 25 $x''_0 = x'_0 + \bar{u}$ ecc. relative al margine di seconda specie ed $x''_0 = x'_0 + \bar{U}$ ecc. relative a quello di prima. Intendendo per u, v, w gli spostamenti dovuti all'azione delle forze nel corpo integro, si trova per due punti corrispondenti di seconda specie, trascurando termini del second'ordine,

$$u(x''_0, y''_0, z''_0) = u(x'_0 + \bar{u}, y'_0 + \bar{v}, z'_0 + \bar{w}) = u(x'_0, y'_0, z'_0)$$

e per due punti corrispondenti di prima specie

$$u(x''_0, y''_0, z''_0) = u(x'_0 + \bar{U}, y'_0 + \bar{V}, z'_0 + \bar{W}) = u(x'_0, y'_0, z'_0).$$

Analoghe eguaglianze possono stabilirsi per tutte le componenti dello spostamento e della tensione. Quando dunque lasceremo da parte la saputa materia e sovrapporemo su σ_i i punti corrispondenti, queste eguaglianze si tradurranno in altrettante condizioni di continuità valevoli nel grado di approssimazione della teoria, e l'assunto è dimostrato.

32. Il teorema della sovrapposizione degli effetti, molto noto e molto utile per le applicazioni della statica dei corpi elastici, si può enunciare così:

Un sistema costituito da più sistemi di forze equilibrate eccita in un corpo elastico la deformazione risultante di quelle eccitatevi dai singoli sistemi di forze.

Qui per risultante di più deformazioni (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2),... s'intende la deformazione di spostamenti $u = u_1 + u_2 + \cdots$, $v = v_1 + v_2 + \cdots$, $w = w_1 + w_2 + \cdots$.

Quando le forze agiscono solamente in massa e sulla superficie esterna, ch'è il caso ordinario, questo teorema è una conseguenza della forma lineare delle equazioni differenziali d'equilibrio. L'estensione al caso di forze superficiali interne è ovvia, e ci esimiamo dallo svilupparla.

Lo stesso non può dirsi dell'estensione del teorema al caso, che fra le cause producenti deformazione siavi aggiunzione e soppressione di materia, pel quale una dimostrazione speciale è necessaria. Intanto il teorema può allora enunciarsi così:

Teorema. — *Per l'azione simultanea di più forze equilibrate e di aggiunzione e soppressione di materia un corpo elastico subisce la deformazione risultante di quelle prodottevi dalle due cause separatamente.*

Infatti, supponghiamo di sottoporre il medesimo corpo una prima volta alla deformazione prodotta da forze X, Y, Z agenti in massa, forze L, M, N agenti sulla superficie esterna e forze Λ, M, N agenti sopra una superficie interna τ_0; una seconda volta alla deformazione da interposizione e soppressione di materia determinata da un margine positivo σ'_0 e dalle rispettive discontinuità caratteristiche $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ (n.° 24); una terza volta alla deformazione provocata dall'azione di queste due cause concomitanti. La prima di queste tre deformazioni è subìta dal corpo integro, e le altre due dal corpo disintegrato per la soppressione di materia. Però, nel rappresentare la prima deformazione, lasciamo da parte la materia che rimane soppressa per le altre due, come fu indicato al numero precedente: così sarà possibile adottare, per rappresentarvi le tre deformazioni, una configurazione fondamentale unica soddisfacente la condizione di riferimento tangenziale $\overline{U}\alpha'_0 + \overline{V}\beta'_0 + \overline{W}\gamma'_0 = 0$ relativa alla regione di 1.ª specie di σ'_0 e le altre $U' - U'' = \overline{U}$ ecc. ed $U' - U'' = \bar{u}$ etc. relative alle regioni rispettive di 1.ª e di 2.ª specie.

Così facendo, detti u', v', w' gli spostamenti dovuti all'azione separata delle forze, si avrà per queste funzioni:

1.° Sulla superficie esterna

$$\mathfrak{L}'_i = - L_i, \qquad \mathfrak{M}'_i = - M_i, \qquad \mathfrak{N}'_i = - N_i.$$

2.° Attraverso τ_i

$$\mathcal{D}\, u' = 0, \qquad \mathcal{D}\, v' = 0, \qquad \mathcal{D}\, w' = 0,$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}'_i = - \Lambda_i, \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}'_i = - \mathrm{M}_i, \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}'_i = - \mathrm{N}_i.$$

3.° Attraverso σ_i (numero precedente)

$$\mathcal{D}\, u' = 0, \qquad \mathcal{D}\, v' = 0, \qquad \mathcal{D}\, w' = 0,$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}'_i = 0, \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}'_i = 0, \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}'_i = 0.$$

4.° Nel campo occupato dalle forze agenti in massa

$$\mathfrak{X}'_i = - X_i, \qquad \mathfrak{Y}'_i = - Y_i, \qquad \mathfrak{Z}'_i = - Z_i.$$

5.° In tutto il rimanente campo

$$\mathfrak{X}'_i = 0, \qquad \mathfrak{Y}'_i = 0, \qquad \mathfrak{Z}'_i = 0;$$

ed inoltre le solite condizioni di continuità.

Detti poi u'', v'', w'' gli spostamenti per l'azione separata dell'aggiunzione e soppressione di materia, si avrà:

1.° Sulla superficie esterna

$$\mathfrak{L}''_i = 0 , \qquad \mathfrak{M}''_i = 0 , \qquad \mathfrak{N}''_i = 0.$$

2.° Attraverso τ_i

$$\mathcal{D}\, u'' = 0 , \qquad \mathcal{D}\, v'' = 0 , \qquad \mathcal{D}\, w'' = 0 ,$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}''_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}''_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}''_i = 0.$$

3.° Attraverso σ_i

$$\mathcal{D}\, u'' = \bar{u} , \qquad \mathcal{D}\, v'' = \bar{v} , \qquad \mathcal{D}\, w'' = \bar{w} ,$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}''_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}''_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}''_i = 0.$$

4.° In tutto il campo

$$\mathfrak{X}''_i = 0 , \qquad \mathfrak{Y}''_i = 0 , \qquad \mathfrak{Z}''_i = 0 ;$$

e le sapute condizioni di continuità.

Infine, detti u, v, w gli spostamenti dovuti all'azione simultanea delle due cause, saranno evidentemente:

1.° Sulla superficie esterna

$$\mathfrak{L}_i = - L_i , \qquad \mathfrak{M}_i = - M_i , \qquad \mathfrak{N}_i = - N_i .$$

2.° Attraverso τ_i

$$\mathcal{D}\, u = 0 , \qquad \mathcal{D}\, v = 0 , \qquad \mathcal{D}\, w = 0$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}_i = - \Lambda_i , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}_i = - \mathrm{M}_i , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}_i = - \mathrm{N}_i .$$

3.° Attraverso σ_i

$$\mathcal{D}\, u = \bar{u} , \qquad \mathcal{D}\, v = \bar{v} , \qquad \mathcal{D}\, w = \bar{w} ,$$

$$\mathcal{D}\, \mathfrak{L}_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{M}_i = 0 , \qquad \mathcal{D}\, \mathfrak{N}_i = 0.$$

4.° Nel campo occupato dalle forze agenti in massa

$$\mathfrak{X}_i = - X_i , \qquad \mathfrak{Y}_i = - Y_i , \qquad \mathfrak{Z}_i = - Z_i .$$

5.° Nel rimanente campo

$$\mathfrak{X}_i = 0 , \qquad \mathfrak{Y}_i = 0 , \qquad \mathfrak{Z}_i = 0.$$

Tutte e tre queste serie di condizioni sono caratteristiche: noi lo abbiamo dimostrato per le due prime, ed analogamente può dimostrarsi per la terza. Ma le condizioni della terza serie sono evidentemente sodisfatte prendendo $u = u' + u''$, $v = v' + v''$, $w = w' + w''$: il teorema è così dimostrato.

33. *Osservazione.* — Le due superficie σ'_0 e τ_0 si sono supposte distinte per maggior chiarezza, ma è evidente che nulla si oppone a che si suppongano coincidenti, onde tali risulteranno pure σ_i e τ_i. Il lettore immaginerà facilmente le particolarità che allora intercedono, le quali però non infirmano evidentemente il teorema. Nell'applicazione che ne faremo avverrà precisamente questo caso particolare.

PARTE SECONDA.

Teoria generale delle deformazioni tipiche.

§ I. Sulle deformazioni di un corpo elastico indefinito in tutti i sensi.

34. In questa seconda parte si considerano deformazioni di un corpo elastico omogeneo indefinito in tutti i sensi nell'ipotesi che le cause producenti la deformazione (forze o interposizione e soppressione di materia) cadano sempre nel finito. Noi pensiamo le funzioni relative a questa deformazione come dedotte con un passaggio al limite da quelle relative ad un corpo di dimensioni finite limitato da una superficie chiusa *rigida* contenente al suo interno tutte le cause producenti la deformazione, quando poscia, accrescendosi le dimensioni del corpo, questa superficie ingrandisca indefinitamente secondo una legge determinata qualunque, fino a diventare la sfera all'infinito. Segue da questo concetto che *le componenti u, v, w dello spostamento sono nulle all'infinito,* poichè tali sono sulla superficie che contermina il corpo limitato, mentre questa ingrandisce sempre più.

Ciò stabilito, si può dimostrare che la deformazione possiede inoltre le due seguenti proprietà:

1.° *Le componenti dello spostamento si annullano all'infinito in modo, che i loro prodotti per la distanza del punto considerato dall'origine o per le coordinate di questo punto restano finiti ed in generale diversi da zero all'infinito.*

2.° *Le componenti della pressione si annullano all'infinito, ed in modo tale, che i loro prodotti pel quadrato della distanza dall'origine o pei quadrati o prodotti binarii delle coordinate restano finiti ed in generale diversi da zero all'infinito.*

Dimostriamo dapprima la seconda proposizione. Se la deformazione è prodotta da forze, noi ammettiamo ch'esse abbiano una risultante di traslazione finita. Allora, se con centro all'origine si descrive una sfera di raggio r

tanto grande da racchiudere al suo interno tutti i punti di applicazione delle forze, la porzione del corpo interna a questa sfera dovrà essere in equilibrio; quindi la risultante di traslazione delle tensioni, che si esercitano sulla superficie della sfera, dovrà essere uguale e contraria alla risultante delle forze, e, per conseguenza, finita per quanto grande sia r. Siccome d'altra parte le tensioni saranno distribuite sempre con continuità sulla superficie sferica, segue che, se r è grandissimo, le componenti della tensione sopra un elemento qualunque di essa riferite all'unità di superficie saranno piccolissime come $1 : r^2$, e che all'infinito diventeranno infinitesime del second'ordine. Questo ragionamento riguarda le componenti della tensione, che si esercita su elementi superficiali di sfere concentriche all'origine; ma facilmente se ne conclude che anche le sei componenti della pressione diventano infinitesime del secondo ordine all'infinito: infatti le componenti della tensione unitaria di un siffatto elemento superficiale sferico sono funzioni lineari delle componenti della pressione, ed i relativi coefficienti sono i coseni direttori di r, i quali non variano quando il centro dell'elemento tende all'infinito lungo il raggio medesimo.

Da quest'ultimo risultato scaturisce subito la conseguenza, che anche le derivate prime di u, v, w hanno lo stesso comportamento all'infinito, poichè le componenti della pressione sono funzioni lineari di queste derivate con coefficienti costanti.

Se la deformazione del corpo è prodotta da interposizione e soppressione di materia, le dimostrazioni precedenti restano pure applicabili, perchè allora l'anzidetta risultante di traslazione è nulla.

35. Dopo ciò la prima proposizione si può dimostrare applicando il seguente teorema:

Se nello spazio occupato dai punti (x, y, z) la funzione $u(x, y, z)$ è finita e continua insieme alle sue derivate prime almeno fuori di una sfera di raggio finito e si annulla sempre all'infinito; se inoltre le derivate prime di u si annullano all'infinito in modo, che i loro prodotti per $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ vi restino finiti ed in generale diversi da zero, la funzione u stessa si annulla all'infinito in modo, che il prodotto ur vi resta finito ed in generale diverso da zero.

Infatti, poichè u prende all'infinito uno stesso valore (lo zero) in qualunque direzione si allontani il punto (x, y, z), se trasformiamo lo spazio per raggi vettori reciproci mediante le formole

$$x = c^2 \frac{x_1}{r_1^2}, \quad y = c^2 \frac{y_1}{r_1^2}, \quad z = c^2 \frac{z_1}{r_1^2}; \quad (r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r\, r_1 = c^2),$$

con che ai punti all'infinito del primitivo spazio corrisponde uno stesso punto (l'origine) dello spazio trasformato, la funzione trasformata $u_1(x_1, y_1, z_1)$ prende in questo punto un unico valore, mentre l'intorno di questo punto corrisponde ai punti molto distanti dello spazio primitivo. Siccome u è finita per valori grandissimi ed anche infiniti di x, y, z, u_1 sarà pure finita in quell'intorno; e siccome u è allora continua, e tali sono pure le formole di trasformazione, anche u_1 sarà continua in quell'intorno.

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1},$$

ove

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{c^2}{r_1^2}\left(1 - \frac{2\,x_1^2}{r_1^2}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{c^2}{r_1^2}\,\frac{2\,x_1\,y_1}{r_1^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{c^2}{r_1^2}\cdot\frac{2\,x_1\,z_1}{r_1^2},$$

quindi, sostituendo ed applicando la relazione $\frac{c^2}{r_1^2} = \frac{r^2}{c^2}$, viene

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{c^2}\left\{ r^2\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 - \frac{2\,x_1^2}{r_1^2}\right) - r^2\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{2\,x_1 y_1}{r_1^2} - r^2\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{2\,x_1 z_1}{r_1^2}\right\}.$$

Or i prodotti di r^2 per $\frac{\partial u}{\partial x}$ ecc. sono per ipotesi finiti e continui per valori grandissimi ed anche infiniti di x, y, z, e gli altri fattori al secondo membro restano sempre finiti nell'intorno del punto $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, onde segue che $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ è finita e continua in questo intorno, e tali sono pure $\frac{\partial u}{\partial y_1}$, $\frac{\partial u}{\partial z_1}$.

Verificati questi caratteri, è lecito applicare alla funzione u_1 in questo intorno il teorema di Taylor esteso alle derivate prime, cioè

$$u_1 = (u_1)_0 + x_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_\theta + y_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)_\theta + z_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)_\theta,$$

ove il segno θ ha un noto significato. Ora $(u_1)_0 = 0$ per ipotesi, e quindi si ha

$$u\,r = \frac{c^2}{r_1^2}\,u_1 = c^2\left\{\frac{x_1}{r_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_\theta + \frac{y_1}{r_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)_\theta + \frac{z_1}{r_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)_\theta\right\}.$$

Passando al limite per $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ in qualunque direzione, quest'ultima espressione resta finita ed in generale diversa da zero, e ciò prova l'assunto.

§ II. Definizione delle deformazioni tipiche e loro proprietà caratteristiche.

36. Premessi questi caratteri generali delle deformazioni di un corpo elastico indefinito, intraprendiamo a definire tre deformazioni particolari di un corpo siffatto, che vogliamo introdurre nella statica dei corpi elastici col nome comune di *deformazioni tipiche*, cioè, rispettivamente, del *primo*, del *secondo* e del *terzo tipo*.

Deformazione del primo tipo. — Chiamiamo deformazione del primo tipo quella prodotta in un corpo elastico indefinito da forze agenti in massa e distribuite con continuità in una porzione limitata ed a tre dimensioni del corpo. Rappresentata questa deformazione in una configurazione qualunque vicinissima all'anteriore, e detto S il campo ivi occupato dai punti d'applicazione delle forze, sussistono evidentemente le seguenti proprietà. (Omettiamo qui ed in seguito l'indice i che ci ha servito a distinguere la rappresentazione nella configurazione fondamentale.)

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento di un punto sono funzioni piccolissime e continue delle sue coordinate, si annullano all'infinito, ed in modo che i loro prodotti per la distanza del punto dall'origine, o per le sue coordinate, diventano all'infinito infinitesimi del prim'ordine.

2.° Le componenti della pressione sono dappertutto finite e continue, ed all'infinito diventano infinitesime del second'ordine.

3.° Le derivate seconde di u, v, w sodisfano all'interno di S le equazioni

$$\mathfrak{X} = -X, \qquad \mathfrak{Y} = -Y, \qquad \mathfrak{Z} = -Z,$$

ove X, Y, Z denotano le componenti unitarie delle forze esterne; all'esterno di S sodisfano invece le stesse equazioni coi secondi membri nulli.

Queste proprietà manifestano l'analogia della deformazione del primo tipo con la funzione potenziale di un corpo a tre dimensioni.

37. *Deformazione del secondo tipo.* — Chiamiamo del secondo tipo la deformazione eccitata in un solido elastico indefinito dall'azione di forze distribuite con continuità sopra una sua superficie interna limitata e che supponghiamo anche chiusa. Rappresentata questa deformazione in una configurazione qualunque vicinissima all'anteriore, e detta σ la superficie quivi

costituita dai punti d'applicazione delle forze, sussistono evidentemente le seguenti proprietà:

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento sono funzioni piccolissime e continue delle coordinate, ed all'infinito diventano infinitesime del prim'ordine.

2.° Le sei componenti della pressione sono dappertutto funzioni finite e continue, tranne che attraverso σ subiscono discontinuità sottoposte alle condizioni

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{L} = -L, \qquad \mathfrak{D}\,\mathfrak{M} = -M, \qquad \mathfrak{D}\,\mathfrak{N} = -N,$$

ove L, M, N denotano le componenti della forza agente su σ riferite all'unità di superficie. Inoltre gli stessi elementi diventano all'infinito infinitesimi del second'ordine.

3.° Le derivate seconde di u, v, w sodisfano dappertutto, eccettuati al più i punti di σ, le equazioni

$$\mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0.$$

Risulta chiaramente da queste proprietà l'analogia della deformazione del secondo tipo con la funzione potenziale di una superficie.

38. *Deformazione del terzo tipo.* — Diciamo del terzo tipo la deformazione eccitata in un solido elastico indefinito da interposizione e soppressione di materia fatta assumendo come margine positivo una sua superficie interna limitata e connessa, e che supponghiamo anche chiusa. Rappresentando questa deformazione in una configurazione fondamentale vicinissima all'anteriore e chiamando σ la superficie, su cui quivi si congiungono i margini, vi si riconoscono le seguenti proprietà:

1.° Le componenti u, v, w dello spostamento sono dappertutto piccolissime e continue, tranne che attraverso σ subiscono le discontinuità

$$\mathfrak{D}\,u = \bar{u}, \qquad \mathfrak{D}\,v = \bar{v}, \qquad \mathfrak{D}\,w = \bar{w},$$

ove $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sono tre funzioni piccolissime e continue dei punti di σ. Inoltre le stesse componenti diventano infinitesime del prim'ordine all'infinito.

2.° Le componenti della pressione sono dappertutto finite e continue, e all'infinito diventano infinitesime del second'ordine.

3.° Le derivate seconde di u, v, w sodisfano dappertutto, eccetto nei punti di σ, le equazioni

$$\mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0,$$

Queste proprietà mettono in evidenza come la deformazione del terzo tipo sia l'analoga della funzione potenziale di un doppio strato.

39. *Osservazione.* — Definendo le deformazioni del secondo e del terzo tipo, abbiamo supposto che le relative superficie singolari siano chiuse, e la stessa restrizione abbiamo fatto, definendo le analoghe deformazioni di un corpo limitato, nella Parte prima. A questa restrizione siamo costretti dalle difficoltà che s' incontrerebbero dovendo studiare il comportamento della deformazione presso il contorno della superficie quando questa si pensasse aperta. Tali difficoltà non possono probabilmente superarsi, senza stabilire le espressioni analitiche delle deformazioni tipiche. E difatti nella Parte terza, stabilendo queste espressioni pei corpi isotropi, potremo dedurne le condizioni, sotto le quali la restrizione può in tal caso particolare rimuoversi. Del resto essa qui non nuoce alla dimostrazione del teorema fondamentale, che daremo con tutta la possibile generalità al § III di questa Parte seconda.

40. Teorema. — *Le proprietà sopra notate di ciascuna delle tre deformazioni tipiche sono per essa caratteristiche, cioè la determinano univocamente.*

Infatti, se fossero possibili due deformazioni tipiche dello stesso corpo indefinito e tali che, rappresentandole in una stessa configurazione fondamentale, le relative componenti dello spostamento, u', v', w' ed u'', v'', w'' godessero tutte le proprietà distinte per uno stesso tipo, la deformazione di spostamenti $u = u' - u''$, $v = v' - v''$, $w = w' - w''$ rappresentata nella stessa configurazione godrebbe le seguenti proprietà:

1.° Le u, v, w sarebbero dappertutto continue e piccolissime, e all'infinito diverrebbero infinitesime del prim'ordine.

2.° Le componenti della pressione ad essa relative sarebbero dovunque finite e continue, e all'infinito diverrebbero infinitesime del secondo ordine.

3.° Le derivate seconde sodisferebbero in tutto lo spazio, eccettuati al più i punti della superficie singolare, le equazioni

$$\mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0.$$

Allora l'eguaglianza già richiamata

$$2\int_S P\, dS = -\int_S (\Sigma\, \mathfrak{X}\, u)\, dS - \int_\sigma (\Sigma\, \mathfrak{L}\, u)\, d\sigma \tag{A}$$

si potrà applicare ad una porzione qualunque S del corpo. Si noti dapprima che da essa svanisce sempre il primo integrale al secondo membro, poichè le regioni ove $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ possono non esser nulle, essendo superficiali, non danno contributo all'integrale di spazio. Applichiamola ad un cubo di lato $2h$ col centro all'origine e gli spigoli paralleli agli assi coordinati. Allora, spezzando l'integrale superficiale in tre relativi ai tre termini del sommatorio, il primo di essi si decompone in tre altri corrispondenti alle coppie di facce opposte del cubo, cioè, (adottando la notazione di Kirchhoff per le componenti della pressione):

$$\int\int\Big[(X_x u)_{+h} - (X_x u)_{-h}\Big] dy\, dz + \int\int\Big[(X_y u)_{+h} - (X_y u)_{-h}\Big] dz\, dx$$

$$+ \int\int\Big[(X_z u)_{+h} - (X_z u)_{-h}\Big] dx\, dy.$$

Per le proprietà notate esisterà una grandezza finita e positiva k, della quale il valore assoluto del prodotto $X_x u h^3$ resterà sempre minore, per quanto grande sia la quantità positiva h, e perciò tale, che resti sempre in valore assoluto

$$\int\int (X_x u)_{+h}\, dy\, dz < \frac{4k}{h}, \quad \text{etc.,}$$

onde sorge che il limite di quest'integrale per $h = \infty$ è lo zero. Analoghe ragioni conducono alla stessa conclusione per gl'integrali relativi agli altri termini del sommatorio. Così, passando al limite per $h = \infty$, l'integrale superciale svanisce anch'esso, e resta

$$\int_{S_\infty} P\, dS = 0,$$

integrale che va esteso a tutto lo spazio. Si deduce da ciò, come d'ordinario, che la deformazione di cui si tratta è uno spostamento del corpo irrigidito, e poichè le u, v, w sono nulle all'infinito, esse lo saranno pure in tutto lo spazio, sicchè saranno dovunque $u' = u''$, $v' = v''$, $w' = w''$, c. d. d.

§ III. Decomponibilità della deformazione eccitata in un corpo da forze agenti in massa e sulla superficie esterna in tre dei tipi rispettivi 1.°, 2.° e 3.°

41. Teorema. — *La deformazione eccitata in un corpo limitato S da forze (X, Y, Z) agenti in massa e forze (L, M, N) applicate alla superficie esterna σ (ove con $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ si denotino gli spostamenti di questa superficie che ne conseguono) è la risultante di tre deformazioni tipiche del corpo S_∞, che si ottiene prolungando il corpo dato indefinitamente in tutti i sensi, cioè: la deformazione del primo tipo dovuta alle forze (X, Y, Z) agenti nella porzione S; la deformazione del secondo tipo eccitata dalle forze (L, M, N) applicate in σ; e la deformazione del terzo tipo, per cui σ sia la superficie singolare, la cui normale positiva s'intenda rivolta verso l'interno di S, ed $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ siano le discontinuità caratteristiche* (n.° 30, 3.°).

Questo teorema è analogo a quello dovuto a Green, secondo il quale una funzione qualunque finita e continua insieme alle sue derivate prime in tutto un campo è la somma di tre funzioni potenziali, la prima di massa a tre dimensioni, la seconda di superficie e la terza di doppio strato.

Dimostrazione 1.ª — Rappresentiamo la deformazione del corpo dato nella configurazione anteriore, e chiamiamo pure S lo spazio ivi occupato dal corpo e σ la sua superficie; (omettiamo per semplicità l'indice 0). Scegliamo al solito la normale positiva rivolta verso l'interno del corpo. Così, per ipotesi, le funzioni u, v, w sodisfano dentro S le equazioni

$$\mathfrak{X} = -X, \qquad \mathfrak{Y} = -Y, \qquad \mathfrak{Z} = -Z$$

e sopra σ le altre

$$\mathfrak{L} = -L, \qquad \mathfrak{M} = -M, \qquad \mathfrak{N} = -N.$$

Primieramente intendiamo prolungate indefinitamente queste funzioni fuori di S con valori nulli: le funzioni u, v, w così determinate in tutto lo spazio danno luogo alle seguenti proprietà:

1.° Dentro S sono $\quad \mathfrak{X} = -X, \quad \mathfrak{Y} = -Y, \quad \mathfrak{Z} = -Z$
e fuori di S $\quad \mathfrak{X} = 0, \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \mathfrak{Z} = 0.$

2. Attraverso σ si ha

$$\mathcal{D}\,\mathfrak{L} = -L - \text{zero} = -L, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{M} = -M, \qquad \mathcal{D}\,\mathfrak{N} = -N.$$

3.° Pure attraverso σ

$$\mathfrak{D}\, u = \bar{u} - \text{zero} = \bar{u}, \qquad \mathfrak{D}\, v = \bar{v}, \qquad \mathfrak{D}\, w = \bar{w}.$$

4.° Le funzioni u, v, w e le loro derivate prime sono altronde finite e continue e si annullano all'infinito.

In secondo luogo pensiamo il corpo dato, preso allo stato naturale, prolungato indefinitamente in tutti i sensi, e consideriamone separatamente le tre deformazioni tipiche definite dall'enunciato. Quanto a quella del 3.° tipo la immaginiamo prodotta col procedimento svolto al n.° 24, di guisa che, costituendo la superficie del dato corpo il margine positivo, tanto la materia soppressa che l'aggiunta cadranno nel prolungamento. Rappresentiamo queste tre deformazioni nella stessa configurazione fondamentale, la quale, per quanto riguarda il corpo dato, coincida con l'anteriore, occupandovi lo spazio S. Ciò è possibile nel modo indicato al n.° 31, cioè omettendo di rappresentare pei primi due tipi la deformazione di quella materia, che va soppressa per eccitare la deformazione del terzo tipo (*). Con siffatte rappresentazioni un punto qualunque del campo fondamentale è occupato dallo stesso punto materiale per le tre deformazioni. Componendo queste tre deformazioni tipiche, se ne ottiene una (u', v', w') dotata delle seguenti proprietà:

1.° Dentro S sono $\quad \mathfrak{X}' = -X, \quad \mathfrak{Y}' = -Y, \quad \mathfrak{Z}' = -Z$
e fuori di S $\quad \mathfrak{X}' = 0, \quad \mathfrak{Y}' = 0, \quad \mathfrak{Z}' = 0,$

poichè questi valori diversi da zero di $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ dentro S sono dovuti alla sola componente del primo tipo.

2.° Attraverso σ le derivate prime di u', v', w' hanno discontinuità soddisfacenti le equazioni

$$\mathfrak{D}\, \mathfrak{L}' = -L, \qquad \mathfrak{D}\, \mathfrak{M}' = -M, \qquad \mathfrak{D}\, \mathfrak{N}' = -N$$

provenienti dalla sola componente del secondo tipo.

3.° Attraverso σ si hanno le discontinuità

$$\mathfrak{D}\, u' = \bar{u}, \qquad \mathfrak{D}\, v = \bar{v}, \qquad \mathfrak{D}\, w' = \bar{w}$$

dovute alla sola componente del terzo tipo.

4.° Le funzioni u', v', w' e le loro derivate prime, altronde finite e continue, si annullano all'infinito nei soliti modi.

(*) Ne segue che, fuori del corpo dato la deformazione fondamentale non può coincidere con l'anteriore, cosa senza importanza per le nostre deduzioni.

In terzo luogo consideriamo nello stesso campo indefinito le funzioni

$$u'' = u - u', \qquad v'' = v - v', \qquad w'' = w - w',$$

delle quali si riconoscono subito le seguenti proprietà:

1.° all'interno di S $\qquad \mathfrak{X}'' = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}' = -X + X = 0$, etc.,
e all'esterno $\qquad \mathfrak{X}'' = \quad 0 - 0 = 0$, etc.;
2.° attraverso σ $\qquad \mathfrak{D}\mathfrak{L}'' = \mathfrak{D}\mathfrak{L} - \mathfrak{D}\mathfrak{L}' = -\bar{L} + \bar{L} = 0$, etc.;
3.° attraverso σ $\qquad \mathfrak{D}u'' = \mathfrak{D}u - \mathfrak{D}u' = \bar{u} - \bar{u} = 0$, etc.;
4.° il solito comportamento in tutto il resto del campo e all'infinito.

Se dunque applichiamo alle funzioni u'', v'', w'' l'eguaglianza (A) richiamata al n.° 14 per una sfera T di superficie τ con centro all'origine, il che sempre può farsi per quanto grande ne sia il raggio, troviamo

$$2\int_T P''\, d\,S + \int_\tau (\Sigma\, \mathfrak{L}''\, u)\, d\,\tau = 0.$$

Aumentando indefinitamente il raggio, il secondo integrale ha per limite zero, e quindi resta, al limite,

$$\int_{S_\infty} P''\, d\,S = 0,$$

da cui s'inferisce, come di solito, che le funzioni u'', v'', w'' sono nulle in tutto lo spazio, come lo sono all'infinito, laonde si ha dovunque, e particolarmente dentro S,

$$u = u', \qquad v = v', \qquad w = w',$$

cioè la deformazione (u, v, w) del corpo dato è appunto la risultante delle tre tipiche.

42. *Dimostrazione 2.ª* — Facendo fondamento sul teorema della sovrapposizione degli effetti con l'amplificazione datavi al § V della Parte prima, la decomponibilità in esame diventa quasi intuitiva, come mostreremo prima per due casi particolari e poscia in generale.

Chiamiamo σ_a e σ_p le due superficie dello spazio che limitano il corpo nelle configurazioni anteriore e posteriore.

Primieramente supponghiamo che gli spostamenti dei punti della superficie abbiano la componente normale sempre rivolta verso l'interno del corpo, cioè che questo per effetto delle forze si contragga in tutti i sensi: allora σ_a

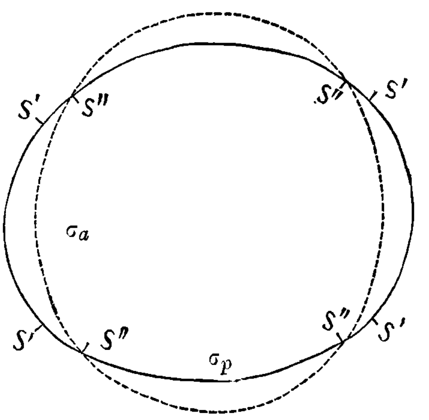
involge completamente σ_p. Immaginiamo per un momento soppresse le forze e restituito il corpo allo stato naturale, onde la sua superficie passa da σ_p a σ_a. Poi si pensi prolungato il corpo indefinitamente in tutti i sensi al di fuori di σ_a con la stessa materia, in modo da costituire un corpo elastico indefinito allo stato naturale; ma si supponga che il prolungamento non adcrisca col corpo primitivo, sicchè nel corpo indefinito rimanga un taglio occupante nello spazio la posizione σ_a. Pensando allora ripristinata l'azione delle forze, il corpo S si ritirerà di nuovo dentro σ_p, sicchè fra esso ed il prolungamento posto fuori di σ_a resterà uno spazio vuoto strettissimo interposto fra queste due superficie. Immaginando poi che questo spazio venga rinzeppato con uno strato della stessa materia allo stato naturale, e che questa si saldi sui due margini σ_a e σ_p, tutto lo spazio resta occupato da materia elastica equilibrata, la cui deformazione è nulla fuori di σ_p, e dentro σ_p è quella in esame. Però, limitandoci a considerare la sola materia del primitivo corpo indefinito, la quale in atto trovasi dentro σ_p e fuori di σ_a, deduciamo dal teorema della sovrapposizione degli effetti che la sua deformazione è la risultante di quelle dovute alle cause singole che la mantengono, le quali sono le forze e l'interposizione di materia. Queste deformazioni sono dunque le tre tipiche indicate nell'enunciato: ciò è manifesto senz'altro per quelle dei due primi tipi; ma lo diventa pure per quella del terzo, se si tien presente che lo spostamento relativo di due punti corrispondenti dei margini (dovuto al solo spostamento del margine positivo, perchè il negativo non si è mosso) ha precisamente le componenti $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ (*).

Si supponga poi che gli spostamenti dei punti della superficie abbiano la componente normale dovunque rivolta verso l'esterno, cioè che la deformazione del corpo sia espansiva in tutti i sensi: in questo caso σ_a è involta interamente da σ_p. Soppressa l'azione delle forze, il corpo ritorna allo stato naturale, e la sua superficie passa da σ_p a σ_a. Allora s'immagini prolungato il corpo indefinitamente in tutti i sensi al di fuori di σ_a, costituendo un corpo indefinito allo stato naturale. In questo si pensi poi soppressa la materia interposta fra σ_a e σ_p, lasciandovi un interstizio vuoto strettissimo. Se dopo ciò si ripristina l'azione delle forze, il corpo S si espande invadendo l'interstizio, fino a che la sua superficie si riadatta su σ_p.

(*) Si noti che la concomitanza dell'azione delle forze superficiali e della aggiunzione di materia avviene presso la stessa superficie, cioè nelle condizioni particolari rilevate al n.° 33. Ciò noterà pure il lettore nei due casi di cui segue l'esame.

Pensando allora saldate in σ_p le due superficie di S e del prolungamento, abbiamo un corpo elastico indefinito deformato ed equilibrato, la cui materia è quella del primitivo corpo indefinito, esclusion fatta della materia soppressa. La sua deformazione, nulla fuori di σ_p, e dentro σ_p identica a quella che si studia, è la risultante delle deformazioni dovute alle cause singole che la mantengono, e nelle tre componenti si riconoscono le tre tipiche indicate nello enunciato, se pur si riflette, che gli avvicinamenti di due punti corrispondenti dei margini sono gli spostamenti $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ del margine positivo, poichè l'altro non si è mosso.

Finalmente, nel caso più generale, per alcuni punti della superficie del corpo la componente normale dello spostamento è rivolta verso l'interno e per altri verso l'esterno di esso. I punti di queste due classi sono distribuiti su σ_a in due specie di regioni, e noi diremo di prima specie la regione dotata di spostamenti normali interni e di seconda specie l'altra. Le due specie di regioni sono separate da certe linee s' chiudentisi in sè stesse. La superficie σ_p interseca σ_a secondo certe altre linee s'' pure chiudentisi in sè stesse e rispettivamente vicinissime alle s': sono i luoghi delle posizioni posteriori dei punti delle s', i quali subiscono spostamenti tangenziali solamente. Fra le linee s' e le corrispondenti s'' si racchiudono su σ_a certe



striscie strettissime (sconfinamenti). Tolta l'azione delle forze e ritornato il corpo allo stato naturale, la sua superficie torna da σ_p a σ_a, e le linee s'' della prima tornano a costituire le s' della seconda. Pensiamo allora prolungato il corpo indefinitamente al di fuori di σ_a, costituendo nell'insieme un corpo indefinito allo stato naturale, ma supponghiamo che il prolungamento non aderisca col corpo primitivo, in guisa che resti un taglio in σ_a. Poi pensiamo soppressa la materia che sta fuori di σ_a e dentro σ_p, la quale forma tanti strati aderenti alle regioni di seconda specie sconfinati di σ_a, al posto dei quali lasciamo altrettanti vuoti strettissimi. Allora ripristinando l'azione delle forze, il corpo invaderà questi interstizii, mentre le linee s' andranno a coincidere con le s''; ma nel tempo stesso le contrazioni del corpo cagioneranno altri vuoti strettissimi esterni a σ_p ed interni a σ_a, cioè contigui alle regioni di prima specie sconfinate di σ_a. Si pensino riempiti questi vuoti con nuova materia allo stato naturale. In tal guisa si otterrà un corpo continuo ed equilibrato costituito dal primitivo indefinito, meno la materia soppressa e più quella aggiunta. La deformazione di esso è nulla fuori di σ_p, e dentro σ_p è identica a quella in esame. Omettendo di considerare gli strati aggiunti, la deformazione della materia restante è prodotta dall'azione concomitante delle forze e dell'aggiunzione e soppressione di materia, ed applicando il teorema di sovrapposizione, si ottiene la dimostrazione del presente.

43. Osservazione. — *Le tre deformazioni tipiche, che pel dato corpo limitato hanno per risultante la deformazione che vi producono le forze, pel suo prolungamento indefinito (esclusion fatta della materia che va soppressa generando la componente del 3.° tipo) hanno una risultante nulla.*

Ciò risulta immediatamente da entrambe le precedenti dimostrazioni e completa l'analogia che lega le deformazioni tipiche con le funzioni potenziali.

Naturalmente ciascuna delle tre deformazioni tipiche componenti non è nulla nel prolungamento del corpo: esse si distruggono soltanto mutuamente. Ed a questo riguardo si noti che, se, seguendo il ragionamento della 2.ª dimostrazione, si isola ciascuna delle tre deformazioni componenti, sopprimendo le cause produttive delle altre due, il prolungamento del corpo entra in deformazione e le quantità $\overline{u}$, L, etc. diventano vere discontinuità degli spostamenti e delle tensioni rispettivamente.

Non fa meraviglia questo mutuo distruggersi delle tre deformazioni tipiche fuori del corpo dato, se si riflette che esse non sono indipendenti, perchè la deformazione di quest'ultimo è determinata dalle sei funzioni $X, \ldots N$ e le tre $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ne sono una conseguenza.

PARTE TERZA.

Espressioni analitiche delle deformazioni tipiche dei corpi isotropi.

§ I. Richiamo di alcune formole.

44. Estraggo dalla Nota del Beltrami, *Intorno ad alcuni teoremi nuovi del sig. C. Neumann* (*) e dai miei lavori, *Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito* (**) alcune formole, di cui dovrò far uso nella seguente trattazione.

Sopra una data superficie σ si stabilisca un sistema di coordinate curvilinee (u, v); si dica n la normale alla superficie nel punto di coordinate u, v e si riguardi come positiva, quando da essa si vede ruotare la tangente positiva alla curva v verso la tangente positiva alla curva u, che passano pel suo piede (di un angolo $< 180^\circ$), come dall'asse cartesiano positivo delle z si vede ruotare il positivo delle y verso quello delle x (di un angolo retto). Si adottino col Beltrami le notazioni $\Delta_1(\varphi, \psi)$, $\Delta_2(\varphi)$, per indicare rispettivamente il parametro differenziale misto e quello del second'ordine relativi a funzioni φ, ψ dei punti della superficie.

Se φ è una funzione qualunque dei punti dello spazio ov'è tracciata σ, si ha per punti di questa superficie (***):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \Delta_1(\varphi, x) + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n},\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \Delta_1(\varphi, y) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n},\\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \Delta_1(\varphi, z) + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n},\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

(*) *Annali di Matematica*, serie 2.ª, t. X, pp. 46-63.

(**) Citerò la mia Memoria pubblicata con questo titolo nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. IV col segno convenzionale (M), e l' « Appendice » alla stessa pubblicata, ibid., t. VI col segno (M, A).

(***) V. Beltrami, op. cit.

ove α, β, γ sono i coseni direttori della normale positiva n rispetto agli assi cartesiani.

45. Le α, β, γ e le x, y, z, coordinate cartesiane dei punti della superficie, riguardate come funzioni delle coordinate curvilinee, sodisfano l'equazione identica

$$\beta \Delta_2(z) + \Delta_1(\beta, z) = \gamma \Delta_2(y) + \Delta_1(\gamma, y) \tag{b}$$

e due altre, che si ricavano da questa con permutazioni cicliche simultanee delle due terne di lettere (*).

46. Se V è la funzione potenziale di una massa distribuita sulla superficie σ con densità ρ; ξ, η, ζ sono le coordinate cartesiane del punto potenziato, ed r è la distanza di questo punto dall'elemento della superficie, le derivate prime di V si esprimono per funzioni potenziali di semplice strato, di doppio strato e di distribuzione lineare fatta sul contorno s di σ, mediante tre formule dovute a C. Neumann, ma di cui la forma più generale dovuta al Beltrami è la seguente per la derivata rispetto a ξ (**):

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \int_\sigma \left\{ \rho \Delta_2(x) + \Delta_1(\rho, x) \right\} \frac{\partial \sigma}{r} - \int_\sigma \rho \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_s \rho \frac{\partial x}{\partial \nu} \frac{ds}{r}, \tag{c}$$

ove ν è la normale al contorno s giacente nel piano tangente e rivolta verso l'interno della superficie, ed il senso positivo di s è scelto in modo, che la ν sia rivolta rispetto alla tangente positiva come la tangente positiva di una curva v lo è rispetto a quella di una curva u.

Se W è la funzione potenziale di un doppio strato distribuito su σ con momento μ, le sue derivate prime si sviluppano similmente con tre formole dovute a Neumann e Beltrami, di cui la prima è

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} = & \int_\sigma \left\{ \alpha \Delta_2(\mu) + \Delta_1(\alpha, \mu) \right\} \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma \Delta_1(\mu, x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma \\ & + \int_s \alpha \frac{\partial \mu}{\partial \nu} \frac{ds}{r} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_s \frac{\mu}{r} dy - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_s \frac{\mu}{r} dz. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

(*) V. (M), p. 232 e seg.

(**) V. Beltrami, op. cit.

47. Nella mia Memoria, *Su certe funzioni potenziali*, ecc., stabilii alcune formole esprimenti per integrali tripli o doppi le funzioni potenziali di masse occupanti tutto lo spazio, con densità espresse da altre funzioni potenziali di distribuzione finita a tre dimensioni, o superficiale semplice, o doppia, ovvero da derivate prime o seconde di funzioni potenziali siffatte. In un'appendice alla stessa Memoria completai la serie di queste formole con quelle relative al caso, che la funzione potenziale, esprimente per se stessa o per le sue derivate la densità, sia di distribuzione lineare. Lo scopo di tutte quelle formole, e perciò dei citati lavori, era l'applicazione che qui mi propongo di farne, per la quale però bastano le sole riguardanti i casi, che la densità sia data da *derivate seconde* delle quattro specie di funzioni potenziali. Per comodità del lettore credo utile trascrivere qui queste ultime formole.

Sia V la funzione potenziale di una distribuzione di massa con densità ρ fatta in un'estensione K, che può essere un corpo o una superficie o una linea, r la distanza fra il punto potenziante (x_k, y_k, z_k) ed il potenziato (x_h, y_h, z_h), sicchè

$$V = \int_K \frac{\rho \, d K}{r}.$$

Le derivate seconde di V costituiscano poi le densità per altrettante distribuzioni di massa in tutto lo spazio, e per queste si denoti con R la distanza dal punto potenziato (a, b, c) al potenziante (x_h, y_h, z_h), ch'era potenziato per la prima distribuzione. Le funzioni potenziali di queste distribuzioni indefinite sono naturalmente espresse per integrali sestupli o quintupli o quadrupli, i quali però si riducono rispettivamente a tripli o doppi o semplici con le formole seguenti:

1.° Se K è a tre dimensioni,

$$\left.\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_h^2} \frac{d S}{R} = -2\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K R \rho \, d K, \\ Q_{yz} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial z_h} \frac{d S}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \int_K R \rho \, d K. \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

2.° Se K è una superficie chiusa, oppure aperta e limitata da un contorno s, ed α, β, γ sono i coseni direttori della sua normale positiva,

$$\left.\begin{aligned} q_{xx} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_h^2} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K R \rho \, dK + 4\pi \int_K \frac{\rho \alpha^2 \, dK}{R}, \\ q_{yz} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial z_h} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \, \partial c} \int_K R \rho \, dK + 4\pi \int_K \frac{\rho \beta \gamma \, dK}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

3.° Se K è una linea

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{xx} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_h^2} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K R \rho \, dK + 2\pi \int_K \left[1 - \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\right] \frac{\rho \, dK}{R}, \\ \varkappa_{yz} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial z_h} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \, \partial c} \int_K R \rho \, dK - 2\pi \int_K \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\rho \, dK}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Finalmente se W è la funzione potenziale di un doppio strato disteso sulla superficie K, cioè

$$W = \int_K \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \, dK,$$

si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned} \chi_{xx} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial x_h^2} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} \, dK \\ &\quad - 4\pi \int_K \Delta_1(\mu, x) \frac{\alpha \, dK}{R} - 4\pi \frac{\partial}{\partial a} \int_K \frac{\mu \alpha \, dK}{R}, \\ \chi_{yz} &= \int_{S_\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial z_h} \frac{dS}{R} = -2\pi \frac{\partial^2}{\partial b \, \partial c} \int_K \mu \frac{\partial R}{\partial n} \, dK \\ &\quad - 4\pi \int_K \Delta_1(\mu, y) \frac{\gamma \, dK}{R} - 4\pi \frac{\partial}{\partial c} \int_K \frac{\mu \beta \, dK}{R} - 2\pi \int_s \mu \frac{\partial x}{\partial s} \frac{ds}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Tutte queste funzioni, che ho chiamato *con due indici*, godono di tutte le proprietà caratteristiche delle funzioni potenziali newtoniane di agenti a tre dimensioni, con la particolarità che sodisfano l'equazione di Poisson in tutto lo spazio. In grazia di ciò le funzioni con due indici potrebbero chiamarsi anche *funzioni potenziali aggiunte* (*).

§ II. Deformazione del primo tipo.

48. Proponghiamoci di costruire le funzioni u, v, w esprimenti la deformazione del 1.° tipo per un mezzo isotropo adoperando le proprietà caratteristiche distinte al n.° 36, cioè facciamo in modo che:

1.° le funzioni u, v, w siano finite e continue in tutto lo spazio, e si comportino all'infinito come le funzioni potenziali;

2.° le loro derivate prime siano finite e continue in tutto lo spazio, e si comportino all'infinito come le derivate prime delle funzioni potenziali;

3.° le derivate seconde all'interno della regione S occupata dalle forze sodisfino le equazioni

$$\mathfrak{X} \equiv (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + B\Delta^2 u = - X, \text{ etc.} \tag{1}$$

e nel rimanente spazio indefinito le stesse equazioni con secondi membri nulli. Qui Θ denota la dilatazione cubica, Δ^2 il parametro differenziale del 2.° ordine di Lamè, ed A, B sono i quadrati delle velocità con cui si propagano nel corpo le vibrazioni longitudinali e trasversali.

Scriviamo la (1) così:

$$B\Delta^2 u = - (A - B)\frac{\partial \Theta}{\partial x} - X. \tag{1$'$}$$

Segnando con u_1, v_1, w_1 i valori di u, v, w relativi al punto speciale (x_1, y_1, z_1), e ponendo

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

(*) Veramente nei citati opuscoli non ho dimostrato la continuità di queste funzioni e delle loro derivate prime, attraverso la superficie per la quale può cadere in dubbio, ma ho ritenuto questa continuità quasi evidente, deducendone qualche conseguenza [(*M*), p. 249]. Il lettore può supplirvi da sè applicando i metodi in uso ai varii termini dei loro sviluppi.

ricaviamo dalla (1)′

$$4\pi B u_1 = (A - B)\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + \int_S \frac{X dS}{R} + U_1, \tag{2}$$

ammettendo con ciò come *prima ipotesi*, salvo a verficarla in seguito, che *l'integrale esteso a tutto lo spazio sia finito, dotato di tutte le proprietà della funzione potenziale di un corpo, e che sodisfi l'equazione di* Poisson *in tutto lo spazio.* La funzione U_1 e le sue compagne V_1 e W_1 dovranno esser finite e continue in tutto lo spazio insieme alle loro derivate prime, annullarsi all'infinito e sodisfare in tutto lo spazio le equazioni

$$\Delta^2 U_1 = 0, \quad \Delta^2 V_1 = 0, \quad \Delta^2 W_1 = 0.$$

Or tutte queste condizioni dànno, com'è noto,

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad W_1 = 0,$$

e quindi resta

$$4\pi B u_1 = (A - B)\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + \int_S \frac{X dS}{R}. \tag{I}$$

Per trasformare l'integrale esteso a tutto lo spazio, si spezzi in due relativi ad S ed alla regione esterna; si applichi a questi due integrali l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno, indi si sommino i resultati: così si avrà

$$\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} = -\int_{S_\infty} \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} dS = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_\infty} \frac{\Theta\, dS}{R}.$$

Con ciò intendiamo ammettere come *seconda ipotesi, che* Θ *sia finita e continua in tutto lo spazio e si annulli all'infinito; che inoltre le sue derivate prime siano finite e continue almeno in ciascuno degli spazi* S, $S_\infty - S$. Così la (I) si trasforma in

$$4\pi B u_1 = (A - B)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{S_\infty} \frac{\Theta\, dS}{R} + \int_S \frac{X dS}{R}.$$

Ora, derivando questa equazione rispetto ad x_1, e le due analoghe rispetto ad y_1, z_1, e sommando, si ottiene:

$$4\pi B \Theta_1 = (A - B)\Delta^2\int_{S_\infty} \frac{\Theta\, dS}{R} + \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{X dS}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_S \frac{Y dS}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_S \frac{Z dS}{R}, \tag{3}$$

ove Θ_1 è il valore di Θ nel punto x_1, y_1, z_1; ammettendo allora come *terza ipotesi, che a questo integrale esteso a tutto lo spazio possa applicarsi l'equazione di* Poisson, cioè

$$\Delta^2 \int\limits_{S_\infty} \frac{\Theta\, d S}{R} = -4\pi\Theta_1,$$

resta

$$4\pi A\Theta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_S \frac{X d S}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_S \frac{Y d S}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int\limits_S \frac{Z d S}{R}. \qquad \text{(II)}$$

Per formare l'espressione di Θ pel punto (x, y, z) basterà naturalmente considerare un altro punto (x', y', z') e porre

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad d S = d x' \, d y' \, d z',$$

onde

$$4\pi A\Theta = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_S \frac{X d S}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_S \frac{Y d S}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_S \frac{Z d S}{r}. \qquad \text{(II)}'$$

Da ciò si riconosce facilmente ch'è realizzata l'ipotesi seconda, ed è anche manifesto che si avverano pure le ipotesi prima e terza, perchè risulta che gl'integrali estesi a tutto lo spazio, ch'entrano nelle formole (I) e (3), sono somme di funzioni potenziali aggiunte.

49. La formola (I) e le sue analoghe per gli altri due assi e la formola (II)' individuano completamente una deformazione del primo tipo; infatti l'espressione di u_1 si compone di due termini, dei quali il secondo come funzione potenziale di corpo, e il primo come somma di funzioni potenziali aggiunte, godono tutte le proprietà presunte per le componenti dello spostamento. È facile anche rilevare che le derivate di u_1, v_1, w_1 godono le proprietà per esse presunte, e quindi le godono pure le componenti di tensione (*). Infine le proprietà relative alle derivate seconde sono una conseguenza del processo con cui le formole sono state dedotte.

50. Per esprimere le componenti dello spostamento direttamente per le sole forze, basterà sostituire nelle (I) l'espressione (II)' della dilatazione cubica. Le formole così ottenute sarebbero complicate con integrali sestupli, ma questi si riducono facilmente a tripli, facendo uso delle formole (*e*), con l'aiuto

(*) V. (*M*), n.° 17 ed (*M*, *A*), n.° 6.

delle quali si ha:

$$\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{dS}{R} = -\frac{1}{2A}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_S X R\, d S + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\int_S Y R\, d S + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_1}\int_S Z R\, d S\right\},$$

e, sostituendo nella (I), si ottiene

$$4\pi B u_1 = \int_S \frac{X d S}{R} - \frac{A-B}{2A}\int_S \left\{X \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + Y \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + Z \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right\} d S. \qquad \text{(I)}'$$

La deformazione del primo tipo di un mezzo isotropo è stata già espressa sotto una forma riducibile alla precedente la prima volta dai sigg. Thomson e Tait nel loro *Treatise on Natural Philosophy*, e poi con altro metodo dal sig. Boussinesq (*).

51. Forse può esser utile notare che, per essere

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{1}{R} - \frac{\cos^2(R, x)}{R}, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos(R, x)\cos(R, y)}{R},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = -\frac{\cos(R, x)\cos(R, z)}{R},$$

la formola (I)′ si può scrivere

$$4\pi B u_1 = \frac{A+B}{2A}\int_S \frac{X d S}{R} + \frac{A-B}{2A}\int_S \frac{F\cos(F, R)\cos(R, x)}{R} d S,$$

ove F denota la risultante delle forze X, Y, Z. Questa espressione di u_1 e le analoghe di v_1, w_1 mostrano, che la deformazione è decomponibile in due, nella prima delle quali lo spostamento dipende dalle forze, e nella seconda dalle loro componenti nella direzione delle congiungenti i loro punti d'applicazione col punto spostato.

§ III. Deformazione del secondo tipo.

52. Per questa debbono esser sodisfatte le seguenti condizioni (n.° 37):

1.° Le u, v, w debbono esser finite e continue in tutto lo spazio, ed avere il solito comportamento all'infinito.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1879, 2.° semestre, p. 331.

2.° Le loro derivate prime, pur essendo in generale finite e continue e comportandosi come sappiamo all'infinito, debbono presentare attraverso la superficie σ, ove agiscono le forze (L, M, N), discontinuità sodisfacenti tre equazioni, di cui la prima relativa all'asse delle x è

$$B\mathfrak{D}\frac{\partial u}{\partial n}+B\mathfrak{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha+\frac{\partial v}{\partial x}\beta+\frac{\partial w}{\partial x}\gamma\right)+(A-2B)\alpha\mathfrak{D}\Theta=-L. \qquad (1)$$

3.° Le loro derivate seconde debbono sodisfare in tutto lo spazio tre equazioni, di cui la prima è

$$(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+B\Delta^2 u=0. \qquad (2)$$

53. *Caso d'una superficie chiusa.* — Designiamo con S lo spazio racchiuso da σ e con $S_\infty - S$ il rimanente spazio infinito, e riguardiamo la normale a σ come positiva quando è rivolta verso S. Dalla (2) possiamo dedurre

$$4\pi B u_1=(A-B)\int_{S_\infty}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial S}{R}+V_1, \qquad (\mathrm{I})$$

ammettendo con ciò come *prima ipotesi che l'integrale esteso a tutto lo spazio sia finito e dotato di tutte le proprietà della funzione potenziale di un corpo, e in particolare che sodisfi l'equazione di* Poisson *in tutto lo spazio.* Quanto alla U_1 e alle due analoghe V_1, W_1, esse sono vincolate fin da ora a dover essere finite e continue in tutto lo spazio, e comportarsi all'infinito come le funzioni potenziali, mentre le loro derivate seconde dovranno verificare le equazioni

$$\Delta^2 U_1=0, \quad \Delta^2 V_1=0, \quad \Delta^2 W_1=0. \qquad (3)$$

Ammettiamo come *seconda ipotesi che Θ sia finita e continua insieme alle sue derivate prime in ciascuno dei due spazi S, $S_\infty - S$, e che si annulli all'infinito.* Se primieramente supponghiamo che il punto (x_1, y_1, z_1) sia situato dentro S, potremo applicare il teorema preliminare di Green alle due funzioni Θ ed $\frac{1}{R}$ nello spazio S', che resta da S sopprimendo una sfera di raggio ε col centro nel punto (x_1, y_1, z_1), ed avremo

$$\int_{S'}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)dS=-\int_{\varsigma}\Theta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R}d\varsigma-\int_{\sigma}\Theta_i\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\sigma,$$

ove ς è la superficie della sfera e Θ_i è il valore di Θ sulla faccia interna di σ. Or si ha

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varsigma} \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial R} d\varsigma = -4\pi\Theta_1,$$

sicchè, passando al limite per $\varepsilon = 0$, con che lo spazio S' diventa S, ottenghiamo

$$\int_S \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right) dS = 4\pi\Theta_1 - \int_\sigma \Theta_i \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n} d\sigma.$$

Poi, applicando il teorema preliminare di Green alle stesse due funzioni nello spazio $S_\infty - S$, abbiamo senz'altro

$$\int_{S_\infty - S} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right) dS = \int_S \Theta_e \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n} d\sigma,$$

ove Θ_e indica il valore di Θ sulla faccia esterna di σ. Sommando queste due eguaglianze e introducendo la notazione

$$\mathfrak{D}\Theta = \Theta_i - \Theta_e,$$

ottenghiamo

$$\int_{S_\infty} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right) dS = 4\pi\Theta_1 - \int_\sigma \mathfrak{D}\Theta \cdot \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n} d\sigma. \tag{4}$$

Evidentemente si giungerebbe pure a questa formola, quando il punto (x_1, y_1, z_1) fosse situato dentro $S_\infty - S$, sicchè essa può ritenersi valevole per tutti i punti dello spazio, ad eccezione dei punti di σ.

Ciò premesso, differenziamo l'equazione (I) rispetto ad x_1 e le due analoghe rispetto ad y_1 e z_1, e sommiamo, dopo aver tenute presenti le relazioni del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} = -\int \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x} dS,$$

che valgono separatamente nei due spazi S ed $S_\infty - S$, ed ancora avuto riguardo alla relazione (4): avremo

$$4\pi B\,\Theta_1 = -4\pi(A-B)\,\Theta_1 + (A-B)\int_\sigma \mathfrak{D}\,\Theta\,.\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1},$$

cioè

$$4\pi A\,\Theta_1 = (A-B)\int_\sigma \mathfrak{D}\,\Theta\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}. \tag{5}$$

Ora si applichi questa formola per due punti (x_1, y_1, z_1) infinitamente vicini ad un punto della superficie, il primo sulla normale positiva e il secondo sulla negativa, e poi si operi per sottrazione: tenendo conto della proprietà della funzione potenziale di doppio strato, si otterrà

$$4\pi A\,\mathfrak{D}\,\Theta_1 = 4\pi(A-B)\,\mathfrak{D}\,\Theta_1 + \mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right),$$

da cui

$$4\pi B\,\mathfrak{D}\,\Theta_1 = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right). \tag{6}$$

Ritorniamo a considerare la (I) ed osserviamo che, tenendo presente l'ipotesi prima, se ne può dedurre

$$\left.\begin{aligned} &4\pi B\,\mathfrak{D}\,\frac{\partial u_1}{\partial n} = \mathfrak{D}\,\frac{\partial U_1}{\partial n},\\ &4\pi B\,\mathfrak{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\gamma\right) = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial W_1}{\partial x_1}\gamma\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sostituendo le espressioni (6), (7) nella (1) riferita al punto (x_1, y_1, z_1), si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}\,\frac{\partial U_1}{\partial n} + \mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial W_1}{\partial x_1}\gamma\right)\\ &+ \frac{A-2B}{B}\,\alpha\,\mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right) = -4\pi L. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Questa relazione e le analoghe per gli altri assi, aggiunte alle (3) e alle condizioni relative all' infinito, completano la serie delle condizioni, cui debbono sodisfare le funzioni U_1, V_1, W_1.

Procuriamo di rispondere a queste condizioni mediante funzioni potenziali di semplici strati agenti su σ, cioè ponghiamo

$$U_1 = \int_\sigma \frac{\lambda\, d\sigma}{R}, \qquad V_1 = \int_\sigma \frac{\mu\, d\sigma}{R}, \qquad W_1 = \int_\sigma \frac{\nu\, d\sigma}{R}. \tag{9}$$

Sostituendo le espressioni (9) nella (8) e nelle due analoghe, per le note proprietà delle funzioni potenziali si trova

$$\lambda + \frac{A-B}{B}(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,\alpha = L,$$

$$\mu + \frac{A-B}{B}(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,\beta = M,$$

$$\nu + \frac{A-B}{B}(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,\gamma = N,$$

equazioni lineari fra λ, μ, ν, che dànno

$$\lambda = L - \frac{A-B}{A} F_n\,\alpha, \quad \mu = M - \frac{A-B}{A} F_n\,\beta, \quad \nu = N - \frac{A-B}{A} F_n\,\gamma, \tag{10}$$

ove

$$F_n \equiv L\alpha + M\beta + N\gamma \tag{II}$$

è la componente della forza normale alla superficie. Si deduce da ciò

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \int_\sigma \frac{L\,d\sigma}{R} - \frac{A-B}{A}\int_\sigma \frac{F_n\,\alpha\,d\sigma}{R}, \\ V_1 &= \int_\sigma \frac{M\,d\sigma}{R} - \frac{A-B}{A}\int_\sigma \frac{F_n\,\beta\,d\sigma}{R}, \\ W_1 &= \int_\sigma \frac{N\,d\sigma}{R} - \frac{A-B}{A}\int_\sigma \frac{F_n\,\gamma\,d\sigma}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Conosciute queste funzioni, si può calcolare con la formola (6) la discontinuità della dilatazione cubica, e si ottiene

$$\mathfrak{D}\,\Theta_1 = -\frac{F_n}{A}. \tag{11}$$

Questo valore deve sostituirsi nella (5), onde questa, dopo facili semplificazioni, ci dà

$$4\pi A\,\Theta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{L\,d\sigma}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{M\,d\sigma}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{N\,d\sigma}{R}. \tag{IV}$$

Così la soluzione del problema è completamente data dalle formole (I), (II), (III), (IV). Resta a provare che sono sodisfatte le due ipotesi già presunte. La seconda di esse è provata dall'espressione (IV), la quale, essendo una somma di derivate prime di funzioni potenziali di superficie, mostra subito che Θ è finita e continua in ciascuno degli spazi S, $S_\infty - S$; che siano pure tali le derivate prime di Θ si può dimostrare trasformando i tre termini di Θ con la formola (c) del § I, poi derivando e tenendo presenti anche le proprietà delle derivate prime di funzioni potenziali di doppio strato. Anche la prima ipotesi è verificata, perchè l'integrale esteso a tutto lo spazio, ch'entra nella formola (I), è una somma di funzioni potenziali aggiunte dei tipi rispettivi q_{xx}, q_{xy}, q_{xz}. Finalmente le U_1, V_1, W_1, come funzioni potenziali di superficie, sodisfano le equazioni (3) e rispondono alle altre condizioni per esse presunte, come risulta dal processo con cui le abbiamo costruito.

54. La formola (I) può subire una trasformazione, che ci sarà utile in seguito. Le (10) per la (11) si possono scrivere:

$$\lambda = L + (A - B)\,\alpha\,\mathfrak{D}\,\Theta, \qquad \mu = M + (A - B)\,\beta\,\mathfrak{D}\,\Theta,$$
$$\nu = N + (A - B)\,\gamma\,\mathfrak{D}\,\Theta\,;$$

facendo le sostituzioni nelle (9) e poi nella (I), questa diviene

$$4\pi B u_1 = (A - B)\int\limits_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + (A - B)\int\limits_{\sigma} \mathfrak{D}\,\Theta\,.\,\alpha\,\frac{d\sigma}{R} + \int\limits_{\sigma} \frac{L\,d\sigma}{R}. \qquad \text{(I)}'$$

55. Eliminando fra le eguaglianze (I), (II), (III) e (IV) la dilatazione cubica, si possono esprimere le componenti u, v, w dello spostamento come funzioni delle sole forze L, M, N; ma le formole risultanti conterrebbero integrali doppi e quintupli. Però le formole (f) del § I, che dànno gli sviluppi delle funzioni q_{xx}, q_{xy}, q_{xy}, permettono di sostituire altre formole composte semplicemente d'integrali doppi estesi alla superficie sollecitata. Infatti, operando così sull'espressione (IV) di Θ, si trova

$$\int\limits_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} = -\frac{1}{2A}\int\limits_{\sigma}\left(L\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + M\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} + N\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}\right)d\sigma + \frac{1}{A}\int\limits_{S} \frac{F_n\,\alpha\,d\sigma}{R},$$

e sostituendo nella (I), si ottiene

$$4\pi B u_1 = \int\limits_{\sigma} \frac{L\,d\sigma}{R} - \frac{A - B}{2A}\int\limits_{\sigma}\left(L\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + M\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} + N\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}\right)d\sigma. \qquad \text{(I)}''$$

Questa formola e le due analoghe relative agli altri assi esprimono nel modo più semplice la seconda deformazione tipica di un mezzo isotropo nel caso d'una superficie chiusa. Essa mostra un carattere ch'era da aspettarsi, cioè ch'è identica alla (I)$'$ del paragrafo precedente, che dà la prima deformazione tipica, salvo la debita mutazione della qualità delle forze sollecitanti e del campo di sollecitazione.

56. *Caso d'una superficie aperta.* — Benchè nella Parte seconda abbiamo definito le deformazioni del 2.° e del 3.° tipo per superficie chiuse (cfr. il n.° 39), vogliamo qui, pei corpi isotropi, estenderne la nozione al caso di superficie aperte, costruendo le funzioni definite dalle stesse proprietà caratteristiche. La forma di queste funzioni ci fornirà le condizioni sotto le quali l'estensione è possibile compatibilmente con la rappresentabilità fisica delle funzioni medesime. L'analogia fra queste deformazioni e le funzioni potenziali sarà così più completa, benchè resti provvisoriamente limitata al caso dell'isotropia.

Per la deformazione del secondo tipo, se la superficie σ è aperta, bisogna arrecare alcune modificazioni nei ragionamenti svolti nei numeri precedenti. Dopo aver poste le (I), (3), si riguardi la linea di contorno s di σ come asse di una superficie tubulare ω di raggio piccolissimo t, e si chiami S' lo spazio che resta da S_∞ detraendone la parte racchiusa dal tubo. Si prendano poi come limiti di S', oltre alla superficie del tubo ed alla sfera all'infinito, anche le due facce di σ, o per dir meglio, della parte σ' di σ che resta esterna al tubo. Considerando un punto (x_1, y_1, z_1) non racchiuso dal tubo, lo si circondi con una superficie sferica ς di raggio ε. La funzione $\frac{1}{R}$ è finita e continua nello spazio che resta escludendo da S' la sfera τ limitata da ς; si supponga *per ipotesi* che altrettanto avvenga di Θ: allora si ha:

$$\int_{S'-\tau}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right)dS$$

$$=-\int_{\varsigma}\Theta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R}-\int_{\sigma'}\mathcal{D}\,\Theta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma-\int_{\omega}\Theta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial t}\,d\omega.$$

Ora ammettiamo *per ipotesi*, salvo a verificarlo nei risultati, *che Θ diventi infinita logaritmicamente* quando il punto (x, y, z) si avvicini indefinitamente ad un punto di s; allora alla funzione Θ, ch' entra nell' integrale esteso per ω, possiamo dare l'espressione

$$\Theta = k \log t + h, \tag{a}$$

ove k dipende soltanto dal punto di s, da cui si dirama il raggio t, ed h è una funzione che si annulla con t. Adunque, segnando con θ l'angolo che descrive il raggio t movendosi nel piano di sezione retta del tubo, contato a partire da una posizione fissa, si avrà, a meno di grandezze piccolissime rispetto a t (*):

$$\int_\omega \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial t} d\omega = -\int_s k\, d s \int_0^{2\pi} \frac{\cos(R,\, t)}{R^2} t \log t \, d\theta + H,$$

ove H si annulla con t. Ma l'integrale al secondo membro si annulla esso pure con t, perchè la funzione da esso racchiusa resta finita nel campo d'integrazione, per quanto piccolo sia t, essendo

$$\lim_{t=0} t \log t = 0.$$

Così abbiamo

$$\lim_{t=0} \int_\omega \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial t} d\omega = 0.$$

Ma inoltre

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_\varsigma \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial R} = -4\pi \Theta_1,$$

sicchè in conclusione il passaggio al limite per $t=0$, $\varepsilon=0$, dopo il quale lo spazio d'integrazione si estende ad S_∞, ci conduce medesimamente all'equazione (4).

Adunque le espressioni analitiche già trovate per una superficie chiusa sono anche valevoli per una superficie aperta.

Ci resta a dover confermare le due ipotesi assunte sul comportamento della funzione Θ: 1.° in tutto lo spazio S'; 2.° in prossimità del contorno.

Or la prima ipotesi è subito confermata dalla espressione (IV) di Θ_1.

(*) V. (M, A), n.° 1.

In quanto alla seconda, si trasformi l'espressione medesima applicando la formola (c) del § I e le due compagne. Così Θ_1 verrà a contenere termini espressi per integrali di superficie, che restano finiti al contorno, e termini espressi per integrali estesi al contorno, che ivi diventano infiniti appunto logaritmicamente. Applicando a questi ultimi un noto teorema sulle funzioni potenziali di linee, trovasi difatti la seguente espressione della funzione k introdotta nell'equazione (a):

$$k = -2\left(L\frac{\partial x}{\partial \nu} + M\frac{\partial y}{\partial \nu} + N\frac{\partial z}{\partial \nu}\right).$$

57. La precedente espressione di k apre l'adito a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti perchè le formole ultimamente trovate siano fisicamente atte a rappresentare una deformazione. Dovendo Θ_1 rimanere dovunque finita, è necessario che sia $k = 0$, e d'altra parte, se Θ_1 è dovunque finita, si desume facilmente, come nel caso della superficie chiusa, che tali sono pure dovunque le componenti dello spostamento. Così, distinguendo le ipotesi che annullano k, pervenghiamo alla seguente conclusione:

Una deformazione di secondo tipo per superficie aperta è possibile in un corpo isotropo indefinito: 1.° *quando la forza è sempre nulla al contorno;* 2.° *quando in qualunque punto del contorno la forza giace nel piano normale alla superficie e tangente al contorno medesimo.*

§ IV. Deformazione del terzo tipo.

58. Per la deformazione del terzo tipo debbono sussistere le seguenti condizioni (n.° 38):

1.° Le u, v, w debbono essere finite e continue in tutto lo spazio, eccetto che attraverso la superficie σ avranno le discontinuità

$$\mathfrak{D}\,u = \bar{u}, \qquad \mathfrak{D}\,v = \bar{v}, \qquad \mathfrak{D}\,w = \bar{w}, \tag{1}$$

ove $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sono tre funzioni qualunque, purchè continue e piccolissime, dei punti della superficie. Inoltre le u, v, w debbono comportarsi all'infinito come le funzioni potenziali.

2.° Le loro derivate prime debbono esser finite e continue in tutto lo spazio, e se pure attraverso σ subiscono discontinuità, queste debbono sodisfare tre equazioni, di cui la prima relativa all'asse x è

$$B\,\mathfrak{D}\frac{\partial u}{\partial n}+B\,\mathfrak{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha+\frac{\partial v}{\partial x}\beta+\frac{\partial w}{\partial x}\gamma\right)+(A-2B)\,\alpha\,\mathfrak{D}\,\Theta=0\,; \tag{2}$$

inoltre debbono comportarsi all'infinito come le derivate prime delle funzioni potenziali.

3.° Le loro derivate seconde sodisfaranno in tutto lo spazio tre equazioni, di cui la prima relativa all'asse x è

$$(A-B)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+B\,\Delta^2 u=0. \tag{3}$$

59. 1.° *Caso di una superficie chiusa.* — Dalle (3) si può dedurre come precedentemente

$$4\pi B u_1=(A-B)\int_{S_\infty}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dS}{R}+U_1\,, \tag{I}$$

ammettendo come *prima ipotesi che l'integrale esteso a tutto lo spazio sia finito e dotato di tutta le proprietà della funzione potenziale di un corpo, e in particolare che sodisfi l'equazione di* Poisson *in tutto lo spazio.*

La funzione U_1 e le analoghe V_1, W_1 relative agli altri assi dovranno sodisfare le seguenti condizioni:

1.° Saranno finite e continue in tutto lo spazio, salvo che attraverso σ avranno le discontinuità

$$\mathfrak{D}\,U_1=4\pi B\bar{u},\qquad \mathfrak{D}\,V_1=4\pi B\bar{v},\qquad \mathfrak{D}\,W_1=4\pi B\bar{w}, \tag{4}$$

e si comporteranno all'infinito come le funzioni potenziali.

2.° Avranno derivate prime finite e continue e che, se pure attraverso σ subiscono discontinuità, queste rispondano alle tre condizioni del tipo

$$\left.\begin{aligned}&B\,\mathfrak{D}\frac{\partial U_1}{\partial n}+B\,\mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\alpha+\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\beta+\frac{\partial W_1}{\partial x_1}\gamma\right)\\&\qquad+(A-2B)\,\alpha\,\mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right)=0\,;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

che inoltre si comportino all'infinito come derivate prime di funzioni potenziali.

3.° Avranno derivate seconde sodisfacenti le equazioni

$$\Delta^2 U_1=v,\qquad \Delta^2 V_1=v,\qquad \Delta^2 W_1=0. \tag{6}$$

Procuriamo di sodisfare tutte queste condizioni con funzioni della forma

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= B\int_\sigma \bar{u}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{a\,d\sigma}{R}, \\ V_1 &= B\int_\sigma \bar{v}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{b\,d\sigma}{R}, \\ W_1 &= B\int_\sigma \bar{w}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{c\,d\sigma}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Anzitutto per le proprietà delle funzioni potenziali queste espressioni rispondono alle (4), (6) e alle condizioni che si vogliono all'infinito; resta a far sì, ch'esse sodisfino le condizioni (5), al che si provvederà con le funzioni indeterminate a, b, c.

60. Prima di operare la sostituzione, introduciamo per brevità le seguenti notazioni:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1(\bar{u}, x) + \Delta_1(\bar{v}, y) + \Delta_1(\bar{w}, z) &\equiv K, \\ \alpha\,\Delta_1(\bar{u}, x) + \beta\,\Delta_1(\bar{v}, x) + \gamma\,\Delta_1(\bar{w}, x) &\equiv \Gamma_x(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \equiv \Gamma_x, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ove il simbolo Δ_1 ha il senso indicato al n.° 44. Introduciamo ancora la notazione

$$\Gamma(x, y, z) \equiv \Gamma'(\varphi),$$

ove φ denota una funzione qualunque. È facile verificare, facendo uso delle formole (a) del § I, che $\Gamma'(\varphi)$ è identicamente nulla, qualunque sia φ. Adunque si avrà pure identicamente

$$\alpha\,\Gamma(x) + \beta\,\Gamma(y) + \gamma\,\Gamma(z) = 0, \tag{8}$$

perchè il primo membro può mettersi nella forma

$$\alpha\,\Gamma'_{\bar{u}} + \beta\,\Gamma'_{\bar{v}} + \gamma\,\Gamma'_{\bar{w}}.$$

Ciò premesso, per sostituire le espressioni (II) nelle equazioni (5), bisogna calcolare le discontinuità delle derivate prime di funzioni potenziali di semplice e di doppio strato attraverso la superficie dello strato, e a ciò si perverrà trasformando queste derivate con le formole di Neumann e Beltrami, citate al § I con le lettere (c) e (d), e poi ricordando le note proprietà delle funzioni potenziali. Così si otterrà

$$\mathfrak{D}\frac{\partial U_1}{\partial n} = 4\pi B \Gamma'_{\overline{u}} - 4\pi a = -4\pi a,$$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial W_1}{\partial x_1}\gamma\right) = 4\pi B \Gamma_x - 4\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma)\alpha,$$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right) = 4\pi B K - 4\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Sostituendo questi valori nella (5) e nelle sue analoghe, avremo

$$\left.\begin{aligned} a + \frac{A-B}{B}(a\alpha + b\beta + c\gamma)\alpha &= (A - 2B)K\alpha + B\Gamma_x, \\ b + \frac{A-B}{B}(a\alpha + b\beta + c\gamma)\beta &= (A - 2B)K\beta + B\Gamma_y, \\ c + \frac{A-B}{B}(a\alpha + b\beta + c\gamma)\gamma &= (A - 2B)K\gamma + B\Gamma_z, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

equazioni lineari, che determinano a, b, c. Per risolverle brevemente si sommino dopo averle moltiplicate rispettivamente per α, β, γ: tenendo conto dell'identità (8), si ottiene,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = (A - 2B)\frac{B}{A}K,$$

e sostituendo nelle precedenti equazioni, se ne deducono tosto i valori

$$\left.\begin{aligned} a &= B\Gamma_x + (A - 2B)\frac{B}{A}K\alpha, \\ b &= B\Gamma_y + (A - 2B)\frac{B}{A}K\beta, \\ c &= B\Gamma_z + (A - 2B)\frac{B}{A}K\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

D'altra parte, ammettendo come *seconda ipotesi che* Θ *sia finita e continua insieme alle sue derivate prime in ciascuno degli spazi* S, $S_\infty - S$, *e che si annulli all'infinito,* si può stabilire come al paragrafo precedente l'eguaglianza

$$4\pi A\Theta_1 = (A - B)\int_\sigma \mathfrak{D}\,\Theta\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\sigma + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}, \tag{10}$$

da cui, uguagliandone le discontinuità dei due membri attraverso σ, si ottiene come prima

$$4\pi B \mathfrak{D}\,\Theta_1 = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right).$$

Intanto, conoscendo già U_1, V_1, W_1, s'inferisce, dalle proprietà delle funzioni potenziali e dalle formole di Neumann e Beltrami, il valore del secondo membro di questa eguaglianza, che è

$$-4\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma) + 4\pi B K = -4\pi \cdot \frac{2B^2}{A} K,$$

sicchè risulta

$$\mathfrak{D}\,\Theta = \frac{2B}{A} K. \tag{10}$$

Ora nell'espressione (10) di Θ_1 possiamo sostituire i valori ottenuti per $\mathfrak{D}\,\Theta$, U_1, V_1, W_1; ma nel far ciò sarà opportuno scrivere la prima delle (III) altrimenti così:

$$a = B(\Gamma_x - K\alpha) + 2(A-B)\frac{B}{A} K\alpha \tag{III$'$}$$

e analogamente le altre due. Così si otterrà per Θ_1 lo sviluppo seguente:

$$\left.\begin{aligned}4\pi A\,\Theta_1 = {} & 2(A-B)\frac{B}{A}\int_\sigma K \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma \\ & + B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \bar{v}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \bar{w}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma\right\} \\ & + 2(A-B)\frac{B}{A}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{K\alpha\, d\sigma}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{K\beta\, d\sigma}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{K\gamma\, d\sigma}{R}\right\} \\ & + B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_y - K\beta}{R}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_z - K\gamma}{R}\, d\sigma\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Il primo e il terzo rigo si elidono a vicenda. Inoltre dimostreremo che, nel caso della superficie chiusa, il secondo è uguale al quarto, stabilendo alcune formole che ci saranno utili anche in seguito.

61. Per istabilire queste formole con la maggiore generalità che ci sarà necessaria, supponghiamo per poco la superficie σ aperta, e segniamo con s il contorno di essa. Indicando con φ una funzione qualunque, ma sempre finita e continua, dei punti della superficie, abbiamo

$$\int_\sigma \varphi\left(\gamma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\right) d\sigma = \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{\varphi \beta\, d\sigma}{R} - \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{\varphi \gamma\, d\sigma}{R},$$

ovvero, applicando al secondo membro la formola (c) del Beltrami,

$$= \int_\sigma \left\{ \varphi(\beta\, \Delta_2 z - \gamma\, \Delta_2 y) + \Delta_1(\varphi\beta, z) + \Delta_1(\varphi\gamma, y) \right\} \frac{d\sigma}{R}$$

$$+ \int_s \varphi\left(\beta \frac{\partial z}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial y}{\partial \nu}\right) \frac{ds}{R}.$$

Ora si ha

$$\Delta_1(\varphi\beta, z) = \varphi\, \Delta_1(\beta, z) + \beta\, \Delta_1(\varphi, z), \text{ etc.},$$

onde, tenendo pur conto della formola (b) del § I ed anche dell'eguaglianza (*)

$$\beta \frac{\partial z}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

si ottiene infine

$$\left.\begin{aligned}&\int_\sigma \varphi\left(\gamma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} - \beta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\right) d\sigma \\ &= \int_\sigma \left\{ \beta\, \Delta_1(\varphi, z) - \gamma\, \Delta_1(\varphi, y) \right\} \frac{d\sigma}{R} - \int_s \frac{\varphi}{R}\, dx.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Questa, e le due che se ne deducono con le permutazioni cicliche delle due terne x, y, z; α, β, γ, sono le formole a cui volevamo pervenire. Da esse siamo condotti alle due seguenti:

$$\int_\sigma \left\{ \beta\, \Delta_1(\bar{v}, x) - \alpha\, \Delta_1(\bar{v}, y) \right\} \frac{d\sigma}{R} = \int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\beta\right) d\sigma - \int_s \frac{\bar{v}}{R}\, dz,$$

$$\int_\sigma \left\{ \gamma\, \Delta_1(\bar{w}, x) - \alpha\, \Delta_1(\bar{w}, z) \right\} \frac{d\sigma}{R} = \int_\sigma w\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\gamma\right) d\sigma + \int_s \frac{\bar{w}}{R}\, dy,$$

(*) V. (M, A), n.° 3.

alle quali associando l'identità

$$\int_\sigma \left\{ \alpha\, \Delta_1(\bar{u}, x) - \alpha\, \Delta_1(\bar{u}, x) \right\} \frac{dx}{R} = 0$$

e sommando, otteniamo

$$\left.\begin{aligned}\int_\sigma \frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\, d\sigma = \int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\beta\right) d\sigma + \int_\sigma \bar{w}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\gamma\right) d\sigma \\ - \int_s \frac{\bar{v}\, dz - \bar{w}\, dy}{R},\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

o anche, scrivendo

$$u\alpha + v\beta + \bar{w}\gamma \equiv s_n,$$

con che s_n è la componente normale della discontinuità risultante (la spessezza dello strato aggiunto o soppresso),

$$\int_\sigma \frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{s_n\, d\sigma}{R} + \int_\sigma \left(\bar{u}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\right)\alpha\, d\sigma$$

$$- \int \frac{\bar{v}\, dz - \bar{w}\, dy}{R}.$$

Infine, derivando questa rispetto ad x_1 e le due analoghe rispetto ad y_1 e z_1, e sommando, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_y - K\beta}{R}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_z - K\gamma}{R}\, d\sigma \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \bar{v}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\, d\sigma \\ &- \frac{\partial}{\partial x_1}\int_s \frac{\bar{v}\, dz - \bar{w}\, dy}{R} - \frac{\partial}{\partial y_1}\int_s \frac{\bar{w}\, dx - \bar{u}\, dz}{R} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int_s \frac{\bar{u}\, dy - \bar{v}\, dx}{R}.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

62. Ciò posto, nel caso della superficie chiusa, che stavamo considerando, questa eguaglianza manca dei termini al contorno, e l'espressione della

dilatazione cubica si semplifica così:

$$4\pi A \Theta_1 = 2B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \bar{u}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \bar{v}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \bar{w}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma\right\}. \qquad \text{(IV)}$$

La deformazione del terzo tipo è completamente espressa dalle formole (I), (II), (III) e (IV), ed è notevole che da queste formole le componenti dello spostamento vengono determinate, non solo per mezzo dei valori $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ delle discontinuità caratteristiche, ma anche di quelli delle loro derivate tangenziali alla superficie singolare.

Resta a provare che son verificate le ipotesi presunte. Ora da una parte Θ, come somma di derivate prime di funzioni potenziali di doppio strato, è finita e continua con le sue derivate prime in ciascuno degli spazi S, $S_\infty - S$, come si deduce dall'applicazione della formola (d) del § I e dalla considerazione delle note proprietà delle funzioni potenziali: così è verificata l'ipotesi seconda. D'altra parte l'integrale, che comparisce al secondo membro della (I), è una somma di funzioni potenziali aggiunte dei tipi χ_{xx}, χ_{xy}, χ_{xz}, e come tale rappresenta una funzione dovunque finita e dotata di tutte le proprietà della funzione potenziale di un corpo: così è verificata la prima ipotesi.

63. La formola (I) trasformata nel modo seguente assumerà un carattere che ci sarà utile in seguito. A cagione della (11), la (III)′ e le compagne di questa per gli assi y, z si possono scrivere

$$a = B(\Gamma_x - K\alpha) + (A - B)\,\alpha\,\mathfrak{D}\,\Theta, \quad \text{ecc.};$$

fatte le sostituzioni nelle (II), e di queste nelle (I), e profittando della formola (14), si ottiene

$$\left.\begin{aligned}4\pi B u_1 = {} & (A - B)\int_\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + (A - B)\int_\sigma \alpha\,\mathfrak{D}\,\Theta\,\frac{d\sigma}{R}\\ & + B\int_\sigma \bar{u}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + B\int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\,\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\,\beta\right)d\sigma\\ & \qquad + B\int_\sigma \bar{w}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\,\alpha - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\,\gamma\right)d\sigma.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}'$$

64. Fatte le debite eliminazioni fra le formole (I), (II), (III) e (IV), si può pervenire ad esprimere direttamente le componenti dello spostamento

nella deformazione del terzo tipo per mezzo dei valori delle discontinuità caratteristiche e delle derivate di queste tangenzialmente alla superficie singolare; però le relative formole sarebbero complicate da integrali quintupli. Questi si evitano facendo uso delle formole (h), mediante le quali si trova

$$\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{dS}{R} = -2\frac{B}{A}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\int_\sigma \bar{v}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_1}\int_\sigma \bar{w}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma \right\}$$
$$-2\frac{B}{A}\int_\sigma \frac{K\alpha\, d\sigma}{R} - 2\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{s_n\, d\sigma}{R},$$

ove $s_n = \bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma$. Sostituendo questo sviluppo nella (I) e facendo uso dell'eguaglianza (14), si ottiene infine

$$\left.\begin{aligned}
4\pi B u_1 = &-\frac{A-B}{A} B\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\int_\sigma \bar{v}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma \right.\\
&\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_1}\int_\sigma \bar{w}\frac{\partial R}{\partial n} d\sigma \right\}\\
&-2\frac{A-B}{A} B\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{s_n\, d\sigma}{R}\\
&+ B\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d\sigma + B\int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\beta - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\alpha\right) d\sigma\\
&+ B\int_\sigma w\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\gamma - \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z}\alpha\right) d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})''$$

Questa formola e le due compagne relative a gli due assi esprimono nel modo più semplice la terza deformazione tipica in funzione delle discontinuità caratteristiche, ed è a notare che esse, a differenza delle precedenti, non contengono più le derivate tangenziali di queste discontinuità.

65. *Caso d'una superficie aperta.* Se la superficie σ è aperta ed s indica la sua linea di contorno, dopo essere pervenuti come precedentemente alle formole (III), bisogna arrecare qualche mutamento nel modo di prose-

guire. Siccome si ha ragione di presumere che Θ diventi infinita al contorno della superficie, così nell'applicare il teorema preliminare di Green alle due funzioni Θ ed $\frac{1}{R}$, bisogna, (come si fece al n.° 56), prendere come limiti dello spazio, entro cui si considerano, oltre alla sfera all'infinito, a quella di raggio ε che circonda il punto (x_1, y_1, z_1), e alle due facce della superficie, anche una superficie tubulare ω descritta come precedentemente. Applicando a questo spazio connesso il teorema sudetto, e passando al limite per $t = 0$, $\varepsilon = 0$, si ottiene

$$\int_{S_\infty} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} \right) d S$$

$$= 4 \pi \Theta_1 - \int_\sigma \mathfrak{D}\, \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d \sigma - \lim_{t=0} \int_\omega \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial t} d \omega.$$

Facendo uso di questa eguaglianza, si otterrà al solito dalla (I) e dalle due analoghe, per derivazione e somma

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi A\, \Theta_1 = (A - B) \int_\sigma \mathfrak{D}\, \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} d \sigma + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1} \\ + (A - B) \lim_{t=0} \int_\omega \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial t} d \omega , \end{aligned} \right\} \quad (10)'$$

da cui, uguagliando le discontinuità dei due membri, si ricaverà come prima

$$4 \pi B\, \mathfrak{D}\, \Theta_1 = \mathfrak{D} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1} \right),$$

perchè non v'è ragione di presumere (e si potrà confermare in seguito) che il termine relativo al contorno sia discontinuo attraverso σ.

Adunque, poichè l'espressione di $\mathfrak{D}\, \Theta$ resta inalterata, e tali sono pure quelle di U_1, V_1, W_1, le sostituzioni fatte nella (10) ci daranno per Θ lo stesso sviluppo (12) con la sola aggiunzione del termine al contorno. Allora, fatta in questa la soppressione della prima e terza riga, che si elidono, e trasformando la seconda riga con la formola (15), si otterrà

$$
\left.\begin{aligned}
4\pi A\,\Theta_1 = {} & 2B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma \frac{\Gamma_y + K\beta}{R}\,d\sigma \right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_s \frac{\Gamma_z - K\gamma}{R}\,d\sigma\right\}\\
& + B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_s \frac{\bar v\,dz - \bar w\,dy}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_s \frac{\bar w\,dx - \bar u\,dz}{R}\right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_s \frac{\bar u\,dy - \bar v\,dx}{R}\right\}\\
& + (A - B)\lim_{t=0}\int_\omega \Theta\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial t}\,d\omega.
\end{aligned}\right\} \quad (10)''
$$

Procuriamo di calcolare il limite per $t = 0$ dell'integrale esteso per ω, e a tal uopo supponghiamo che la funzione Θ, che vi entra, venga sviluppata con la stessa formola precedente. Per ottenere questo sviluppo basterà sostituire in essa ai punti (x_1, y_1, z_1) ed (x, y, z) rispettivamente i punti (x, y, z), (x', y', z'); invece di R porremo r dato dall'eguaglianza

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

affiggeremo un apice a tutte le funzioni sottoposte al segno integrale, e al tubo ω, che per questo sviluppo sarà fisso, sostituiremo un altro tubo ω' di raggio variabile t': così avremo:

$$
\left.\begin{aligned}
4\pi A\,\Theta = {} & 2B\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\Gamma'_{x'} - K'\alpha'}{r}\,d\sigma' + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\Gamma'_{y'} - K'\beta'}{r}\,d\sigma' \right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{\Gamma'_{z'} - K'\gamma'}{r}\right\}d\sigma'\\
& + B\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_s \frac{\bar v'\,dz' - \bar w'\,dy'}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int_s \frac{\bar w'\,dx' - \bar u'\,dz'}{r}\right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z}\int_s \frac{\bar u'\,dy' - \bar v'\,dx'}{r}\right\}\\
& + (A - B)\lim_{t'=0}\int_{\omega'} \Theta'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t'}\,d\omega'.
\end{aligned}\right\} \quad (10)'''
$$

Questo sviluppo si può limitare ai soli termini che dànno un contributo non nullo al limite che si cerca. Or è facile scorgere che il contributo dei termini della prima riga è nullo, perchè, sviluppando le derivate prime di funzioni potenziali che la costituiscono con la formola (c) del § I, si ottengono funzioni potenziali di semplice e doppio strato, che restano finite al contorno, e funzioni potenziali di distribuzioni lineari giacenti sul contorno, le quali diventano infinite logaritmicamente quando il punto (x, y, z) vi si avvicina; or le prime dànno evidentemente un contributo che si annulla al limite, ed anche le seconde lo dànno tale, perchè il differenziale $d\omega = t d\vartheta ds$ introduce il fattore t e si ha $\lim\limits_{t=0} t \log t = 0$.

I termini della seconda riga, quando il punto si avvicina al contorno, diventano infiniti come $\frac{1}{t}$, quindi apportano un contributo, di cui bisogna tener conto. A tal uopo si osservi che, siccome i punti (x, y, z) che serve considerare giacciono sulla superficie ω, cioè vicine quanto si vuole al contorno, si può ritenere che siano

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(t,\, x)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \cos(t,\, y)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos(t,\, z)\frac{\partial}{\partial t}, \tag{b}$$

e perciò le derivate della seconda riga si possono ridurre a derivate rispetto a t; ma siccome queste in generale hanno per limite sulla linea il doppio della densità mutato di segno e diviso per t, così il contributo dei termini della seconda riga sarà il seguente:

$$-\frac{2B}{t}\left\{(\bar{v}\, c_3 - \bar{w}\, c_2)\cos(t,\, x) + (\bar{w}\, c_1 - \bar{u}\, c_3)\cos(t,\, y)\right.$$
$$\left. + (\bar{u}\, c_2 - \bar{v}\, c_1)\cos(t,\, z)\right\},$$

ove per brevità si è posto

$$\frac{\partial x}{\partial s} = c_1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = c_2, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = c_3.$$

Dipoi si ammetta *per ipotesi*, che il contributo apportato dall'ultimo termine della $(10)'''$ sia pure di questa forma, cioè che pei punti (x, y, z) di ω

possa scriversi, a meno di termini che si annullano per $t=0$,

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{t'=0}\int_{\omega'}\Theta'\dfrac{\partial\frac{1}{R}}{\partial t'}\,d\,\omega' = \\ =\dfrac{1}{t}\Big\{(k_2c_3-k_3c_2)\cos(t,\ x)+(k_3c_1-k_1c_3)\cos(t,\ y) \\ +(k_1c_2-k_2c_1)\cos(t,\ z)\Big\},\end{array}\right\} \tag{16}$$

ove k_1, k_2, k_3 sono funzioni dei punti di s da determinarsi.

Allora, raccogliendo le diverse parti, si ottiene che il valore di Θ su ω, a meno di termini che svaniscono al limite dell'integrale esteso per ω, ha l'espressione seguente:

$$\left.\begin{array}{c}4\pi A\Theta = \\ =\dfrac{1}{t}\Big\{(h_2c_3-h_3c_2)\cos(t,\ x)+(h_3c_1-h_1c_1)\cos(t,\ y) \\ +(h_1c_2-h_2c_1)\cos(t,\ z)\Big\},\end{array}\right\} \tag{17}$$

ove si è posto per brevità

$$\left.\begin{array}{c}-2B\ddot{u}+(A-B)k_1=h_1, \qquad -2B\ddot{v}(A-B)k_2=h_2, \\ -2B\ddot{w}+(A-B)k_3=h_3.\end{array}\right\} \tag{α}$$

D'altra parte si ha per punti di ω

$$\left.\begin{array}{c}\int_{\omega'}\Theta'\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t'}\,d\,\omega' = \\ =-\dfrac{\partial}{\partial x}\int_{\omega'}\dfrac{\Theta'}{r}\cos(t',\ x)\,d\,\omega'-\dfrac{\partial}{\partial y}\int_{\omega'}\dfrac{\Theta'}{r}\cos(t',\ y)\,d\,\omega' \\ -\int_{\omega'}\dfrac{\Theta'}{r}\cos(t',\ z)\,d\,\omega'.\end{array}\right\} \tag{18}$$

Il primo di questi tre integrali si può sviluppare nel modo seguente, sostituendovi per Θ' l'espressione (17) con la debita aggiunzione d'indici, e ponendovi $d\omega' = t' d\theta' ds'$:

$$\int_{\omega'} \frac{\Theta'}{r} \cos(t', y)\, d\omega' =$$

$$\frac{1}{4\pi A}\Bigg[\int_s \frac{ds'}{r_0}(h'_2 c'_3 - h'_3 c'_2)\int_0^{2\pi}\cos^2(t', x)\, d\theta'$$

$$+ \int_s \frac{ds'}{r_0}(h'_3 c'_1 - h'_1 c'_3)\int_0^{2\pi}\cos(t', x)\cos(t', y)\, d\theta'$$

$$+ \int_s \frac{ds'}{r_0}(h'_1 c'_2 - h'_2 c'_1)\int_0^{2\pi}\cos(t', x)\cos(t', z)\, d\theta'\Bigg],$$

ove r_0 è il valore medio di r sulla circonferenza generatrice del tubo ω'. Ora i tre integrali relativi a θ' hanno rispettivamente i valori (*).

$$\pi(1 - c'^2_1), \qquad -\pi c'_1 c'_2, \qquad -\pi c'_1 c'_3,$$

sicchè sostituendoli e riducendo, si ottiene

$$\int_{\omega'} \frac{\Theta'}{r}\cos(t', x)\, d\omega' = \pi\int_s (h'_2 c'_3 - h'_3 c'_2)\frac{ds'}{r_0}.$$

Analoghe espressioni si possono dare agli altri due integrali del secondo membro della (18); adunque da questa equazione, col passaggio al limite per $t' = 0$, il quale non porta altro che il cangiamento di r_0 in r, ottenghiamo:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t'=0}\int_{\omega'} \Theta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t'}\, d\omega' = \\ &-\frac{1}{4A}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_s (h'_2 c'_3 - h'_3 c'_2)\frac{ds'}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int_s (h'_3 c'_1 - h'_1 c'_3)\frac{ds'}{r}\right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z}\int_s (h'_1 c'_2 - h'_2 c'_1)\frac{ds'}{r}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Ora, se il punto (x, y, z) si avvicina indefinitamente al contorno, il se-

(*) Quest' integrali sono stati calcolati da me nella cit. Appendice alla Memoria, *Su certe funzioni*, ecc., n.° 1.

condo membro tende all'infinito come $\frac{1}{t}$, di modo che, a meno di termini che non dànno contributo all'ultimo termine della (10)'', si può scrivere

$$\lim_{t'=0} \int_{\omega'} \Theta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t'} d\,\omega' =$$

$$= \frac{2}{4At} \Big\{ (h_2 c_3 - h_3 c_2) \cos(t,\ x) + (h_3 c_1 - h_1 c_3) \cos(t,\ y)$$

$$+ (h_1 c_2 - h_2 c_1) \cos(t,\ z) \Big\}.$$

Dal paragone di quest'eguaglianza con la (16) si può dedurre evidentemente

$$h_1 = 2\,A\,k_1\,, \qquad h_2 = 2\,A\,k_2\,, \qquad h_3 = 2\,A\,k_3\,. \qquad (\beta)$$

I sistemi di equazioni (α), (β) permettono di determinare le h e le k, e se ne ottiene

$$k_1 = -\frac{2B}{A+B}\bar{u}\,, \qquad h_1 = -\frac{4AB}{A+B}\bar{u}\,,$$

ove cambiando l'indice 1 in 2 o 3, bisogna sostituire alla $\bar{u}$ la $\bar{v}$ o la $\bar{w}$.

Introducendo i valori delle h nella (19) e togliendo gl'indici, si ha finalmente

$$\lim_{t=0} \int_{\omega} \Theta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial t} d\,\omega =$$

$$= \frac{B}{A+B} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_s \frac{\bar{v}\,dz - \bar{w}\,dy}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_s \frac{\bar{w}\,dx - \bar{u}\,dz}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_s \frac{\bar{u}\,dy - \bar{v}\,dx}{R} \Big\},$$

espressione che convalida l'ipotesi ammessa stabilendo l'eguaglianza (16).

Sostituendo questo valore nella (10)'' e trasformando gl'integrali al contorno in integrali alla superficie mediante la formola (15), si perviene alla seguente espressione della dilatazione cubica:

$$
\left.
\begin{aligned}
&4\pi A\,\Theta_1 = \\
&= 2B\frac{B}{A+B}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{\Gamma_x - K\alpha}{R}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\frac{\Gamma_y - K\beta}{R}\,d\sigma\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma\frac{\Gamma_z - K\gamma}{R}\,d\sigma\right\} \\
&+ 2B\frac{A}{A+B}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\bar{u}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\bar{v}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma\right\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{IV})'
$$

Se la superficie è chiusa, le due espressioni fra parentesi di questo sviluppo sono uguali in virtù della (15) e si ricade nella formola (IV). La (IV)′ dà lo sviluppo di Θ_1 per le discontinuità caratteristiche e per le loro derivate tangenziali. Se si vuole uno sviluppo per le sole $\bar{u}$, $\bar{v}$, w basta sostituirvi la prima riga col valore di questa tratto dalla (15); ma allora il risultato viene a contenere integrali al contorno, cioè

$$
\left.
\begin{aligned}
&4\pi A\,\Theta_1 = \\
&= 2B\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\bar{u}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\sigma\bar{v}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma w\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma\right\} \\
&- 2B\frac{B}{A+B}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_s\frac{\bar{v}\,dz - \bar{w}\,dy}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_s\frac{\bar{w}\,dx - \bar{u}\,dz}{R}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\int_s\frac{\bar{u}\,dy - \bar{v}\,dx}{R}\right\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{IV})''
$$

Per ottenere le componenti dello spostamento, bisogna ora sostituire nelle equazioni (I) il nuovo sviluppo di Θ. A noi basta calcolare i soli termini addizionali a quelli già contenuti nella formola (I)″, e che dipendono dalla seconda riga dello sviluppo (IV)″. Essi sono funzioni potenziali aggiunte dei tipi $\varkappa_{xx}$, $\varkappa_{yz}$ (§ I). Fatto il calcolo, si ottengono questi termini addizionali nella forma

$$\frac{B^2}{A}\frac{A-B}{A+B}\left\{-\int_s \frac{\bar v\,dz-\bar w\,dy}{R}\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\int_s R(\bar v\,dz-\bar w\,dy)+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_s R(\bar w\,dx-\bar u\,dz)$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_s R(\bar u\,dy-\bar v\,dx)\right\}.$$

66. Per giudicare se le formole precedenti siano fisicamente compatibili, s'incominci dal trasformare la prima parte dell'espressione (IV)$''$ di Θ_1 mediante la formola (d) del § I. Omettendo allora i termini espressi per integrali di superficie, come quelli che restano finiti al contorno, la rimanente parte di $4\pi A\,\Theta_1$ sarà

$$2B\int_s\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\nu}\alpha+\frac{\partial\bar v}{\partial\nu}\beta+\frac{\partial\bar w}{\partial\nu}\gamma\right)\frac{ds}{R}$$

$$+2B\frac{A}{A+B}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\int_s\frac{\bar v\,dz-\bar w\,dy}{R}+\frac{\partial}{\partial y_1}\int_s\frac{\bar w\,dx-\bar u\,dz}{R}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_1}\int_s\frac{\bar u\,dy-\bar v\,dx}{R}\right\}.$$

In vicinanza del contorno questa funzione può mettersi nella forma

$$k\log t+\frac{h}{t}+l,$$

ove t ha il significato più sopra attribuitole, l si annulla con t, e k, h sono funzioni che restano finite per $t=0$. Per determinare queste funzioni, ricorriamo alle note proprietà delle funzioni potenziali di linea e delle loro derivate, e, ciò facendo, approfittiamo delle equazioni simboliche (b) per trasformare le derivate rispetto ad x, y, z in derivate rispetto a t. Così otterremo le espressioni seguenti

$$k=-4B\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\nu}\alpha+\frac{\partial\bar v}{\partial\nu}\beta+\frac{\partial\bar w}{\partial\nu}\gamma\right),$$

$$h=-4B\frac{A}{A+B}\left\{a_1(\bar v\,c_3-w\,c_2)+a_2(\bar w\,c_1-\bar u\,c_3)+a_3(\bar u\,c_2-\bar v\,c_1)\right\},$$

ove le a designano brevemente i coseni direttori di t e le c, come più sopra, quelli della tangente al contorno.

Ciò premesso, ritorniamo col pensiero alla costruzione di una deformazione prodotta da interposizione e soppressione di materia, quale fu descritta nel § IV della Parte prima. Se la superficie singolare dev'essere aperta, il taglio deve estendersi ad una superficie siffatta, e quindi, per la continuità, è necessario che le differenze $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ fra gli spostamenti di due corrispondenti siano nulle al contorno. Il riferimento tangenziale, necessario in generale, non infirma questa conseguenza, perchè possiamo evidentemente introdurlo, ponendo le funzioni $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ eguali a zero sul contorno (n.° 19).

Una prima conseguenza di questo fatto si è quella, che i termini espressi per integrali estesi al contorno, che l'analisi precedente introduce pel caso d'una superficie aperta, sono nulli, sicchè le formole analitiche esprimenti la deformazione restano identiche a quelle relative ad una superficie chiusa.

Ma ritornando all'esame della compatibilità fisica, questa richiede evidentemente che le funzioni k, h siano nulle per tutto il contorno. In quanto ad h, essa è nulla insieme alle $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Però l'annullarsi di k richiede, che sul contorno sia pure

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\alpha + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\beta + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\gamma = 0,$$

e questa è una nuova condizione, cui debbono sodisfare le discontinuità $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ per la compatibilità fisica. Per interpretarla geometricamente, notiamo che l'annullarsi di $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ permette di scriverla

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\bar{u}\alpha + \bar{v}\beta + \bar{w}\gamma) = 0$$

e così essa esprime manifestamente la condizione di contatto fra i margini, e precisamente fra i margini di prima specie dopo la deformazione e fra quelli di seconda prima di questa.

Se le funzioni $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ verificano queste condizioni, Θ è dappertutto finita, ed allora si deduce dalla (I) e dalle sue compagne, che u, v, w sono finite in tutto lo spazio insieme alle loro derivate prime, sicchè la compatibilità fisica delle formole è assicurata.

In conclusione *una deformazione di terzo tipo per superficie aperta si può determinare in un corpo isotropo indefinito a condizione che i margini di prima specie dopo la deformazione e quelli di seconda prima di questa siano tangenti lungo il contorno della superficie.*

§ V. Deformazione di un corpo isotropo limitato sotto l'azione di date forze.

67. Ora siamo in grado di esprimere analiticamente la deformazione di un corpo isotropo limitato sotto l'azione di date forze in funzione di queste e degli spostamenti dei punti della superficie, e ciò potremo fare subito applicando il teorema del n.° 41. Adottando anche qui le segnature ivi adoperate, non bisogna far altro, che sommare le espressioni delle componenti dello spostamento ottenute nei paragrafi precedenti per le deformazioni dei tipi rispettivi 1.°, 2.° e 3.°, intendendo che le forze L, M, N caratteristiche della deformazione del secondo tipo siano uguali a quelle che sollecitano in superficie il corpo considerato, che le discontinuità $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, caratteristiche della componente del terzo tipo, siano uguali agli spostamenti dei punti della superficie, e che infine le forze X, Y, Z, caratteristiche della componente del primo tipo, siano uguali a quelle agenti nella massa del corpo.

68. Primieramente sommando le espressioni della dilatazione cubica segnate con (II) al n.° 48, con (IV) al n.° 53, e con (IV) al n.° 62, e denotando con Θ_1 la dilatazione cubica della deformazione risultante, si ottiene il noto sviluppo

$$4\pi A\,\Theta_1 = \Sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{X\,dS}{R} + \Sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \frac{L\,d\sigma}{R} + 2B\,\Sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma \overline{u}\,\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n}\,d\sigma,$$

ove i sommatori si estendono ai termini analoghi relativi ai tre assi.

69. Delle componenti dello spostamento possiamo dare primieramente sviluppi contenenti la dilatazione cubica. A tal uopo basta prendere le formole relative al 2.° e 3.° tipo come furono esposte con l'indicazione (I)' al n.° 54 e (I)' al n.° 63; quanto alla deformazione del primo tipo, l'espressione indicata con (I) al n.° 48 si può scrivere nella seguente forma analoga alle precedenti, aggiungendovi un termine con $\mathfrak{D}\,\Theta$, il quale in questo caso è nullo, perchè la dilatazione cubica vi è continua in tutto lo spazio:

$$4\pi B u_1 = (A-B)\int_{S_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + (A-B)\int_\sigma \alpha\,\mathfrak{D}\,\Theta\,\frac{d\sigma}{R} + \int_S \frac{X\,dS}{R}.$$

Sommando queste tre espressioni e riferendo ora u_1, Θ e Θ_1 alla deformazione risultante, si ha

$$4\pi B u_1 = (A-B)\int_{S_\infty} \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + (A-B)\int_\sigma \alpha\,\mathfrak{D}\Theta\frac{d\sigma}{R}$$

$$+\int_S \frac{X\,dS}{R} + \int_\sigma \frac{L\,d\sigma}{R} + B\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\sigma$$

$$+B\int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\alpha - \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\beta\right)d\sigma + B\int_\sigma \bar{w}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\alpha - \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\gamma\right)d\sigma.$$

Ora bisogna osservare che questa formola e le due compagne per gli altri assi dànno valori nulli di u_1, v_1, w_1 per punti esterni alla superficie σ, (n.° 43), e quindi nulla è pure fuori del corpo la funzione Θ. Ne segue che il precedente integrale esteso a tutto lo spazio si può estendere alla sola porzione S, e per la stessa ragione $\mathfrak{D}\Theta$ si riduce a Θ, cioè al valore della dilatazione cubica su σ. Fatte queste modificazioni, ed osservando che

$$\int_S \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{dS}{R} + \int_\sigma \frac{\Theta\,\alpha\,d\sigma}{R} = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{\Theta\,dS}{R},$$

si ottiene definitivamente

$$4\pi B u_1 = (A-B)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_S \frac{\Theta\,dS}{R} + \int_S \frac{X\,dS}{R} + \int_\sigma \frac{L\,d\sigma}{R}$$

$$+B\int_\sigma \bar{u}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\sigma + B\int_\sigma \bar{v}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\alpha + \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\beta\right)d\sigma + B\int_\sigma \bar{w}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\alpha - \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\gamma\right)d\sigma,$$

e sotto questa forma furono espresse la prima volta le componenti dello spostamento dal sig. C. SOMIGLIANA (*).

70. Il SOMIGLIANA giunse a questi sviluppi, facendo uso della formola che si deduce dal teorema di GREEN, cioè

$$4\pi u_1 = \int_\sigma \left(u\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\right) - \int_S \Delta^2 u\frac{dS}{R}. \qquad (m)$$

(*) V. *Nuovo Cimento*, ser. 3.ª, t. XVII, 1885, p. 115.

Seguendo il suo metodo, ma facendo uso delle formole ausiliarie da me invocate, io procedo così. Le condizioni d'equilibrio relative all'interno del corpo sono

$$(A-B)\frac{\partial \Theta}{\partial x}+B\,\Delta^2 u+X=0$$

e le due compagne. Delle condizioni relative alla superficie quella riguardante l'asse delle x è

$$B\frac{\partial u}{\partial n}+(A-2\,B)\,\Theta\,\alpha+B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\alpha+\frac{\partial v}{\partial x}\beta+\frac{\partial w}{\partial x}\gamma\right)+L=0,$$

che, facendo uso delle (a) del § I, si può sostituire con

$$B\frac{\partial u}{\partial n}+(A-B)\,\Theta\,\alpha+B\,(\Gamma_x-K\,\alpha)+L=0.$$

Ricavando da questa eguaglianza $\frac{\partial u}{\partial n}$ e dalla prima $\Delta^2 u$, e ponendoli nella (m), si ricade nella formola del Somigliana dopo avere sostituito l'integrale contenente $\Gamma_x-K\,\alpha$ mediante la formola (14) del n.° 61.

71. Finalmente possiamo esprimere direttamente le u_1 ecc. per mezzo delle forze e dei valori superficiali $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ con integrali, tripli e doppi, sommando le equazioni (I)′ del n.° 50, (I)″ del n.° 55 e (I)′ del n.° 64, ottenendo così

$$4\,\pi\,B\,u_1=$$

$$=\frac{A-B}{2\,A}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Sigma\int_S X\frac{\partial R}{\partial x}d\,S+\frac{\partial}{\partial x_1}\Sigma\int_\sigma L\frac{\partial R}{\partial x}d\,\sigma+2\,B\frac{\partial}{\partial x_1}\Sigma\int_\sigma\bar{u}\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial n}d\,\sigma\right\}$$

$$+\int_S\frac{X\,d\,S}{R}+\int_\sigma\frac{L\,d\,\sigma}{R}-2\,\frac{A-B}{A}B\,\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\sigma\frac{s_n\,d\,\sigma}{R}$$

$$+B\int_\sigma\bar{u}\,\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n}d\,\sigma+B\int_\sigma\bar{v}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\beta-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}\alpha\right)d\,\sigma+B\int_\sigma\bar{w}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}\gamma-\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\alpha\right)d\,\sigma.$$

Questo sviluppo e i due analoghi di v_1, w_1 coincidono, salvo cambiamento di notazioni, con quelli dati dal sig. Somigliana nel 1888 (*).

(*) V. op. cit. del 1888, *Annali di Matematica*, ser. 2.ª, t. X, p. 46.

NOTA A.

Sullo svolgimento de' miei studi esposti nel presente lavoro.

Concepii l'esistenza delle deformazioni tipiche, come individuate dalle proprietà caratteristiche, fin dall'aprile del 1889. Allora, oltre alle Memorie del Betti e del Cerruti, conosceva pure il lavoro del Somigliana *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo* (1885), nel quale si dànno per la prima volta esplicitamente le espressioni delle componenti dello spostamento in un corpo isotropo, per mezzo delle forze agenti in massa ed in superficie e degli spostamenti dei punti della superficie. In quel lavoro il sig. Somigliana aveva manifestamente di mira il problema dell'integrazione, ma oggi ho ragione di credere ch'egli fin d'allora sospettasse della decomposizione di qualunque deformazione di un corpo isotropo in tre, che dipendessero separatamente da quei tre ordini di elementi; però non manifestava tale sospetto, nè lo avrebbe potuto, perchè le sue formole per le componenti dello spostamento erano complicate dall'intervento della dilatazione cubica; questa poteva soltanto eliminarsi facendo entrare, invece del termine che la contiene, integrali quintupli e sestupli, dai quali la scissione sarebbe restata sempre adombrata.

Tentando io di costruire le deformazioni tipiche di un mezzo isotropo mediante le proprietà caratteristiche, m'imbattei pure, naturalmente, nell'intervento della dilatazione cubica, e il bisogno di eliminarla, senza introdurre integrali d'ordine superiore al terzo, mi suggerì i lavori sulle funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio, qui citati, e che iniziai nell'ottobre del 1889. Durante il 1890, usufruendo dei risultati di questi lavori, potei districare le formole delle deformazioni tipiche del mezzo isotropo dalla dilatazione cubica, e mi accertai *a posteriori* che la scindibilità di qualunque deformazione in tre dei tipi rispettivi 1.°, 2.° e 3.° aveva luogo nel caso dell'isotropia.

Nell'ottobre del 1890 concepii la dimostrazione, fondata sulle proprietà caratteristiche, del teorema di scindibilità per la forma più generale del potenziale delle forze elastiche, quella che qui presento al n.° 41. Solo nel 1891 ebbi conoscenza della Memoria del Somigliana *Sulle equazioni dell'elasticità*, che porta la data di dicembre 1888; e così seppi con molto ritardo che l'egregio analista era poi giunto, pei corpi isotropi, alla decomposizione di qualunque deformazione in tre dipendenti separatamente dalle dette tre specie di elementi. Le sue formole per la deformazione di un corpo isotropo limitato ed equilibrato coincidevano con quelle da me ottenute per altra via (n.° 71), ma io glie ne doveva riconoscere, come faccio, la priorità. Però non mi parve che l'Autore avesse avuto con quel lavoro il concetto di quella che voglio chiamare *tipicità* o delle proprietà caratteristiche. Così, trovando la mia speculazione inoltrata anche rispetto a quest'importantissimo lavoro del Somigliana, sì pel concetto completo della tipicità che per aver preso ad obbietto il caso più generale del potenziale d'elasticità, credetti opportuno pubblicare sommariamente questi risultati e lo feci con una comunicazione al Circolo matematico di Palermo dal titolo: *Proposizioni fondamentali della statica dei corpi elastici.* (Rendic., t. V), che contiene senza dimostrazioni lo schema della seconda parte di questo scritto, dalla compilazione del quale mi distoglieva allora il desiderio di qualche completamento (*). Infatti nel 1892 potei rendere più preciso il concetto della deformazione di terzo tipo, che ha bisogno di considerazioni alquanto delicate, e stabilii la seconda dimostrazione del teorema di scindibilità qui esposta al n.° 42. Allora mi è parso il mio studio abbastanza completo e maturo per intraprenderne la compilazione, di cui sin d'allora a più riprese mi occupai, e che oggi presento al pubblico.

NOTA *B.*

Un'osservazione sui lavori del Betti.

Il Betti scisse pel primo il problèma statico dei corpi isotropi in due, col primo dei quali si eliminano le forze agenti in massa. Per risolvere questo primo problema basta trovare una soluzione *qualunque* delle sole equazioni dette indefinite, senza esser necessario che questa sia la deformazione del primo tipo. Ma il Betti non ebbe il concetto della tipicità, e lo provo in modo definitivo il fatto che la deformazione da lui proposta pel caso dell'isotropia, nel § 6 della sua *Teoria dell'Elasticità* per eliminare le forze agenti in massa non è tipica, di che il lettore può accertarsi verificando che, se le formole esprimenti quella deformazione si riferiscono a tutto il corpo indefinito, le componenti della pressione non sono continue attraverso la superficie del corpo dato.

Palermo, giugno 1901.

(*) La terza di quelle *Proposizioni fondamentali* è una proprietà delle deformazioni di 1.° e 2.° tipo analoga al teorema di reciprocità di Gauss per le funzioni potenziali di corpo e di superficie. Come tale essa merita un'individuazione speciale, benchè a prima vista possa apparire come non distinta dal teorema di Betti. Per dedurnela, basta applicare il teorema ad un corpo indefinito, tenendo conto del modo di comportarsi delle pressioni e degli spostamenti all'infinito, quale trovasi stabilito nel § I di questa Parte terza, e ciò il lettore potrà fare da sè. Mi limito a notar ciò, e non riporto questa proposizione nel testo del presente scritto, già abbastanza lungo, e di cui essa non farebbe parte necessaria.

Intégrale, Longueur, Aire.

(*Par* H. Lebesgue, *à Nancy.*)

INTRODUCTION.

Dans ce travail j'essaie de donner des définitions aussi générales et précises que possible de quelques uns des nombres que l'on considère en Analyse: intégrale définie, longueur d'une courbe, aire d'une surface.

M.r Jordan, dans la seconde édition de son *Cours d'Analyse*, a fait une étude approfondie de ces nombres. Il m'a semblé utile cependant de reprendre cette étude, et voici pourquoi. On sait qu'il existe des fonction dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait M.r Jordan, la définition de l'intégrale qu'a donnée Riemann; de sorte que l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral:

Trouver une fonction connaissant sa dérivée.

Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.

D'autre part, comme le remarque M.r Jordan, l'aire d'une surface n'ayant pas des plans tangents variant d'une façon continue n'est pas définie; et les énoncés que l'on serait tenté d'admettre comme analogues à la définition de la longueur d'une courbe ne peuvent être adoptés (*). Il y a donc lieu de chercher une définition de l'aire et peut être aussi de modifier celle

(*) Voir Schwarz, lettre à Genocchi. Cette lettre est reproduîte dans l'édition lithographiée du *Cours professé à la Faculté des sciences par* Ch. Hermite, pendant le second semestre de 1882. (Second tirage, page 25.) — Voir aussi Peano, *Atti della Accademia dei Lincei*, 1890.

de la longueur de façon que ces deux définitions soient aussi analogues que possible.

Dans l'étude des questions relatives à la théorie des fonctions de variables réelles on reconnait souvent qu'il serait commode de pouvoir attacher aux ensembles de points des nombres jouissant de certaines des propriétés des longueurs des segments ou des aires des polygones. On a proposé différentes définitions de ces nombres que l'on appelle les mesures des ensembles (*); celle qui a été le plus souvent adoptée se trouve exposée et étudiée dans le livre de M.r JORDAN.

Dans le premier chapitre je définis, avec M.r BOREL, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété et précisé les indications un peu rapides que donne M.r BOREL (**), j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure au sens de M.r JORDAN. La définition que j'adopte s'applique aux espaces à plusieurs dimensions; de la notion de mesure d'un ensemble dont les éléments sont les points d'un plan, on déduit celle d'aire d'un domaine plan; si les éléments sont des points de l'espace ordinaire on en déduit la notion de volume, etc.

Ces préliminaires posés, il n'y a plus d'inconvénients à définir l'intégrale d'une fonction continue comme l'aire d'un domaine plan; et même cette méthode a l'avantage de conduire à une définition de l'intégrale d'une fonction discontinue bornée comme mesure d'un certain ensemble de points. C'est cette définition géométrique que j'adopte au chapitre II; on peut d'ailleurs la remplacer par une définition analytique, l'intégrale se présente alors comme étant la limite d'une suite de sommes assez analogues à celles que l'on considère dans la définition de RIEMANN. Les fonctions auxquelles s'applique cette définition géométrique sont celles que j'appelle *sommables*.

Je ne connais aucune fonction qui ne soit sommable, je ne sais s'il en existe. Toutes les fonctions qu'on peut définir à l'aide des opérations arithmétiques et du passage à la limite sont sommables. Toutes les fonctions intégrables au sens de RIEMANN sont sommables et les deux définitions de l'intégrale conduisent au même nombre. Toute fonction dérivée bornée est sommable.

(*) Voir au sujet de ces définitions SCHŒNFLIES, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1900.

(**) *Leçons sur la théorie des Fonctions.*

L'intégrale d'une dérivée bornée, considérée comme fonction de la limite supérieure d'intégration est une fonction primitive de la dérivée donnée, le problème fondamental du calcul intégral est donc théoriquement résolu toutes les fois que la fonction dérivée donnée est bornée.

Pour obtenir des résultats plus généraux il est nécessaire de donner une définition de l'intégrale s'appliquant à des fonctions non bornées. Il est facile de trouver une telle définition, mais celle qui m'a paru la plus simple et la plus naturelle ne s'applique pas à toutes les fonctions dérivées non bornées; de sorte que pour les fonctions non bornées, le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas résolu dans tous les cas. Avec mes définitions je trouve que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivée ait une intégrale est que sa fonction primitive soit à variation bornée. Toutes les fois que l'intégrale existe elle fait connaître une fonction primitive.*

Le calcul effectif d'une intégrale dépend essentiellement de la façon dont est donnée la fonction à intégrer. Dans le cas où la fonction est définie à l'aide de séries on pourra se servir de cette propriété, dont un cas particulier a été obtenu par M.r OSGOOD (*): *Une série dont les termes ont des intégrales et dont les restes sont, en valeur absolue, inférieurs à un nombre fixe est intégrable terme à terme.*

La définition de l'intégrale s'étend immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Dans le premier chapitre j'ai développé une généralisation de la notion de longueur d'un segment, une généralisation faite dans un sens différent donne la notion de longueur d'une courbe. Dans le troisième chapitre, où je m'occupe de cette notion, j'adopte la définition suivante: *la longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales qui tendent uniformément vers C.* Cette définition est exactement équivalente à la définition classique (**). Une courbe à longueur finie est dite rectifiable. Je retrouve rapidement les principaux résultats relatifs à ces courbes obtenus par M.r JORDAN.

La recherche d'une expression de la longueur d'une courbe ayant des tangentes conduit à une nouvelle application de l'intégrale définie au chapitre précédent. *Si f', φ', ψ' existent, la condition nécessaire et suffisante pour que*

(*) *American Journal,* 1897.

(**) SCHEEFFER, *Acta Mathematica,* 5; JORDAN, *Cours d'Analyse.*

la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

soit rectifiable est que l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ *existe. Toutes les fois que cette intégrale existe elle représente la longueur de la courbe.* La définition qu'adoptait P. Du Bois Reymond (*) est donc un cas particulier de la définition classique, même en étendant comme je l'ai fait le sens du mot intégrale.

Dans le quatrième chapitre *j'appelle aire d'une surface L la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers L.* On peut déduire de là une définition de l'aire analogue à celle de la longueur d'une courbe définie comme limite des longueurs des polygones inscrits.

L'étude de la représentation de l'aire à l'aide d'une intégrale double n'est abordée que dans le cas très particulier où la surface admet des plans tangents variant d'une façon continue; on retrouve l'intégrale classique $\int\int\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des recherches assez différentes. Il s'agit de voir, sur des exemples, si l'extension donnée aux sens des mots longueur, aire n'entraine pas des modifications correspondantes dans les énoncés ou les raisonnements de la géométrie des surfaces. Dans ces raisonnements on suppose généralement les surfaces et les courbes analytiques, ou tout au moins définies à l'aide de fonctions ayant un certain nombre de dérivées.

Le premier problème que je me propose est celui des surfaces applicables sur le plan : Chercher les surfaces correspondant point à point à un plan, de façon que les longueurs soient conservées. Je trouve d'une part qu'*il existe des surfaces applicables sur le plan et ne contenant aucun segment de droite*, d'autre part qu'*il existe des courbes gauches ayant en chaque point un plan osculateur et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.* Les procédés élémentaires que j'ai employés ne m'ont pas donné toutes les surfaces applicables sur le plan, mais ils m'ont fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface cylindrique, conique, une surface formée par les tangentes d'une courbe gauche, une sur-

(*) *Mathematische Annalen*, Bd. 15, pag. 287 et *Acta Mathematica*, 6.

face de révolution soient applicables sur le plan; enfin ils montrent que l'application conserve les aires.

Le second problème est celui de LAGRANGE ou de PLATEAU: étant donné un contour fermé trouver une surface limitée à ce contour et dont l'aire soit minima. Je montre que ce problème est toujours possible et admet une infinité de solutions.

Il serait très intéressant de savoir si, parmi toutes ces surfaces solutions, ne se trouve pas une surface analytique. La méthode qui se présente immédiatement à l'esprit et qui consiste à démontrer successivement l'existence de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, paraît fort difficile à appliquer. Cependant des raisonnements très élémentaires m'ont permis dans un cas particulier de démontrer l'existence des plans tangents à l'une des surfaces solutions.

Les méthodes de ce dernier chapitre sont analogues à celles qui ont permis à M.r HILBERT (*) de reprendre l'étude du problème de DIRICHLET par le procédé de RIEMANN. Les résultats obtenus par M.r HILBERT et ceux que je viens d'indiquer, si incomplets qu'ils soient, semblent montrer qu'il y a avantage à laisser de côté, au moins momentanément, les équations aux dérivées partielles que donnent les méthodes ordinaires du calcul des variations, et à raisonner directement sur l'intégrale qu'il s'agit de rendre minima.

J'ai indiqué les principaux résultats de ce travail dans différentes notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* (19 Juin et 27 Novembre 1899, 26 Novembre et 3 Décembre 1900, 29 Avril 1901.)

CHAPITRE I.

Mesure des Ensembles.

1. Un ensemble de points est dit borné si la distance de deux de ses points est limitée supérieurement. Deux ensembles sont dits égaux si, en déplaçant l'un deux, on peut les amener à coincider. Des ensembles E_1, E_2,...

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Août 1900.

étant donnés, l'ensemble somme E est formé des points appartenant à l'un au moins des E_i. Nous n'aurons jamais à considérer qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E_i et nous poserons

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

Si tout point de E_2 est point de E_1, on dit que E_1 contient E_2 et l'on appelle différence de E_1 et E_2 $(E_1 - E_2)$ l'ensemble des points de E_1 qui n'appartiennent pas à E_2. Il faut bien remarquer que E_2 contenant E_3, les ensembles

$$E_1 + (E_2 - E_3) \quad \text{et} \quad (E_1 + E_2) - E_3$$

diffèrent s'il existe des points communs à la fois à E_1, E_2 et E_3.

Ces définitions posées:

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.

2.° Deux ensembles égaux ont même mesure.

3.° La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.

Nous ne résoudrons ce *problème de la mesure* que pour les ensembles que nous appellerons mesurables. Ce problème admet d'ailleurs des solutions différentes suivant que l'on se borne aux ensembles dont tous les points sont sur une droite, ou à ceux dont tous les points sont dans un plan, etc. Pour distinguer nous dirons, quand il sera nécessaire: mesure linéaire, mesure superficielle, etc.

Remarquons que si le problème de la mesure admet une solution, en multipliant toutes les mesures obtenues par un même nombre on a un autre système de mesures. Nous ne considèrerons pas comme différentes de telles solutions, de sorte que, sans nuire à la généralité, nous pourrons attribuer la mesure 1 à un ensemble quelconque de mesure non nulle.

I. Les elements de l'ensemble sont les points d'une droite.

2. Supposons possible le problème de la mesure. Un ensemble formé d'un seul point a une mesure nulle car un ensemble borné contenant une infinité de points doit avoir une mesure finie. L'ensemble des points d'un segment MN a donc même mesure que M et N fassent ou non partie de l'ensemble; d'ailleurs MN ne peut avoir une mesure nulle sans qu'il en soit de même pour tout ensemble borné.

Choisissons un segment MN et attribuons lui 1 pour mesure. On sait que si l'on prend MN pour unité de longueur on peut attacher à chaque segment PQ un nombre, sa longueur; ce nombre est aussi la mesure de l'ensemble des points de PQ. Pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que si la longueur l de PQ est commensurable et égale à $\frac{\alpha}{\beta}$ il existe un segment RS contenu α fois dans PQ et β fois dans MN et que si l est incommensurable, à tout nombre λ inférieur à l correspond un segment contenu dans PQ, et de longueur λ et à tout nombre λ supérieur à l un segment contenant PQ et de longueur λ.

Pour que la 3[e] condition du problème de la mesure soit remplie il faut que la longueur d'un segment somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'autres segments, n'empiétant pas les uns sur les autres, soit la somme des longueurs de ces segments.

Des propriétés des longueurs il résulte qu'il en est bien ainsi si les segments composants sont en nombre fini; cela est encore vrai s'ils sont en nombre infini. (*Voir les Leçons sur la Théorie des fonctions*, de M.[r] Borel.

3. Un ensemble E étant donné, on peut d'une infinité de manières enfermer ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles. L'ensemble E_1 des points de ces intervalles contient E donc la mesures $m(E)$ de E est au plus égale à celle $m(E_1)$ de E_1, c'est à dire au plus égale à la somme des longueurs des intervalles considérés. La limite inférieure de cette somme est une limite supérieure de $m(E)$, nous l'appellerons la mesure extérieure de E, $m_e(E)$.

Supposons que tous les points de E appartiennent à un segment AB. Nous appellerons complémentaire de E par rapport à AB, $C_{AB}(E)$, l'ensemble $AB - E$. Puisque la mesure de $C_{AB}(E)$ est au plus $m_e[C_{AB}(E]$ celle de E est au moins $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Ce nombre ne dépend pas de celui des segments AB contenant E choisi; nous l'appellerons la mesure intérieure de E, $m_i(E)$. Deux ensembles égaux ont des mesures intérieures égales et des mesures extérieures égales. D'ailleurs puisque l'on a:

$$m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geqq m(AB)$$

la mesure extérieure n'est jamais inférieure à la mesure intérieure. Si le problème de la mesure est possible, la mesure d'un ensemble E est comprise entre les deux nombres $m_e(E)$, $m_i(E)$ que nous venons de définir.

4. Nous appellerons *ensembles mesurables* (*) *ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales*, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible. Des propriétés qui suivent il résultera que le nombre $m(E)$ ainsi défini satisfait bien aux conditions du problème de la mesure *si l'on s'astreint à ne considérer que des ensembles mesurables.*

La définition des ensembles mesurables est équivalente à celle ci: Un ensemble E est dit mesurable s'il est possible d'enserrer ses points dans des intervalles α, et ceux de son complémentaire dans des intervalles β de manière que la somme des longueurs des parties communes aux α et aux β soit aussi petite que l'on veut.

Soit un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles mesurables E_1, E_2,... montrons que l'ensemble somme E est mesurable.

Nous supposons tous les ensembles E_i formés des points d'un segment AB par rapport auquel nous prendrons les complémentaires. Enserrons les points de E_1 dans des intervalles α_1 n'empiétant pas les uns sur les autres et $C(E_1)$ dans des intervalles β_1; les parties communes aux α_1 et aux β_1 étant de longueur totale choisie arbitrairement ε_1. Enserrons E_2 dans des intervalles α_2 et $C(E_2)$ dans β_2 ayant en commun une longueur totale ε_2. Soient α'_2 et β'_2 les parties des α_2 et β_2 communes aux β_1. A E_3 correspondent des intervalles α_3, β_3 et un nombre ε_3, soient α'_3 et β'_3 les parties des α_3 et β_3 communes aux β'_2 et ainsi de suite.

Les points de E peuvent être enfermés dans les intervalles α_1, α'_2, α'_3,... Ceux de $C(E)$ peuvent être enserrés dans les intervalles β'_i, quel que soit i. Or ces deux séries d'intervalles ont des parties communes de longueur totale

(*) En adoptant cette définition nous modifions le langage qu'adopte M.r Borel.

au plus égale à

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m(\alpha'_{i+1}) + m(\alpha'_{i+2}) + \cdots$$

La série $\Sigma\, m(\alpha'_i)$ est convergente, si donc on a choisi les ε_i de façon que la série $\Sigma\, \varepsilon_i$ soit convergente et ait ε pour somme, on pourra prendre i assez grand pour que l_i soit inférieur à $2\,\varepsilon$.

Donc E est sommable. — La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sommables étant un ensemble sommable, cela a bien un sens de poser le problème de la mesure seulement pour les ensembles mesurables.

Si les E_1, $E_2, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, les points de E_i sont intérieurs aux intervalles α'_i de sorte que $m(\alpha'_i) - m(E_i)$ est au plus égal à ε_i. Or $m(E)$ diffère de

$$m(\alpha_1) + m(\alpha'_2) + m(\alpha'_3) + \cdots$$

de moins de

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots$$

donc on a:

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$$

et la 3.ème condition du problème de la mesure est remplie.

5. Le problème de la mesure est donc possible pour les ensembles mesurables; et il n'admet qu'une seule solution, car les raisonnements qui nous ont servi à définir les deux nombres m_e et m_i, appliqués à un ensemble mesurable, ne font intervenir que des ensembles mesurables.

Il n'est nullement démontré que le problème de la mesure soit impossible pour les ensembles (s'il en existe) dont les mesures intérieure et extérieure sont inégales. Mais dans la suite nous ne rencontrerons que des ensembles mesurables. En effet les procédés que nous emploierons pour définir un ensemble pourront toujours se ramener aux deux suivants.

1.° Faire la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis.

2.° Considérer l'ensemble des points communs à un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles donnés;

et ces deux procédés appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Nous l'avons vu pour le premier, démontrons le pour le second.

Soient E_1, $E_2 \ldots$ les ensembles donnés; l'ensemble cherché e_1 peut être défini comme ayant pour complémentaire la somme des complémentaires de E_1, $E_2 \ldots$, ce qui démontre la proposition.

Soit e_i l'ensemble analogue à e_1, relatif à la suite E_i, $E_{i+1} \ldots$; l'ensemble somme des e_i est formé des points communs à tous les E_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, variable d'ailleurs d'un point à l'autre; comme somme d'ensembles mesurables il est mesurable.

Voici une autre application du 2ème procédé. Soit E_1 contenant E_2, $E_1 - E_2$ est l'ensemble des points communs à E_1 et $C\,(E_2)$, donc si E_1 et E_2 sont mesurables, $E_1 - E_2$ l'est. D'ailleurs, puisque l'on a:

$$E_1 = (E_1 - E_2) + E_2$$

$$m\,(E_1 - E_2) = m\,(E_1) - m\,(E_2)$$

6. Puisque nous connaissons un ensemble mesurable, celui formé de tous les points d'un intervalle, les deux procédés précédents appliqués un nombre fini de fois nous permettent d'en définir de nouveaux. Ceux que l'on peut obtenir par cette méthode et leurs complémentaires sont ceux que M.r Borel appelle mesurables (*) et que nous nommerons *ensembles mesurables* (*B*). Ils sont définis par une infinité dénombrable de conditions, leur ensemble a la puissance du continu. Parmi ces ensembles il faut citer ceux qui sont des sommes d'intervalles et les ensembles fermés, c'est-à-dire contenant leur derivé (**), dont les complémentaires sont sommes d'intervalles.

L'ensemble E formé des points d'abcisses:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots,$$

où les a_i sont égaux à 0 ou 2, étant parfait est mesurable (B). Son complémentaire est formé d'un intervalle $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de longueur $\frac{1}{3}$, de deux intervalles $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)$ de longueur $\frac{1}{3^2}$, de quatre intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$, etc, donc a pour mesure

$$\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{3^2} + 2^2\,\frac{1}{3^3} + \cdots = 1$$

(*) *Leçons sur la théorie des fonctions,* pages 46 à 50.

(**) Ce sont ces ensembles que M.r Jordan appelle parfaits et M.r Borel relativement parfaits. Un tel ensemble contient sa frontière (laquelle sera définie plus loin).

et par suite E est de mesure nulle. E a la puissance du continu, donc on peut former avec les points de E une infinité d'ensembles qui tous, ayant une mesure extérieure nulle, sont mesurables. La puissance de l'ensemble de ces ensembles est celle de l'ensemble des ensembles de points; il existe donc des ensembles mesurables qui ne sont pas mesurables (B), et la puissance de l'ensemble des ensembles mesurables est celle de l'ensemble des ensembles de points.

7. Soit E un ensemble mesurable. Choisissons des nombres $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ décroissant jusqu'à zéro. On peut enfermer E dans une infinité dénombrable d'intervalles α_i de mesure $m(E) + \varepsilon_i$. L'ensemble E_1 des points qui font partie à la fois des ensembles $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ est mesurable (B), il a pour mesure $m(E)$ et contient E. L'ensemble $E_1 - E$ est de mesure nulle. On peut l'enfermer dans des intervalles β_i, contenus dans les α_i et de mesure ε_i. L'ensemble e des points communs à tous les β_i est mesurable (B) et de mesure nulle. L'ensemble $E_2 = E_1 - e$ est donc mesurable (B) et de mesure $m(E)$; de sorte que ***tout ensemble mesurable est contenu dans un ensemble E_1 et contient un ensemble E_2, E_1 et E_2 étant mesurables (B) et de même mesure.*** Les ensembles que nous appelons mesurables sont donc ceux que les procédés de M.r Borel permettent de mesurer, à condition de tenir compte des remarques énoncées à la fin de la page 48 (*) (loc. cit.).

D'une manière analogue on démontre que la mesure extérieure d'un ensemble E est la limite inférieure des mesures des ensembles mesurables contenant E et qu'il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenant E et de mesure $m_e(E)$. De même, $m_i(E)$ est la limite supérieure des mesures des ensembles mesurables contenus dans E et il existe effectivement un ensemble mesurable (B) contenu dans E ayant $m_i(E)$ pour mesure.

8. Dans son traité d'Analyse M.r Jordan donne les définitions suivantes. Un point M est point intérieur d'un ensemble E s'il est intérieur à un segment dont tous les points sont points de E. La frontière de E est l'ensemble des points qui ne sont intérieurs ni à E, ni à $C(E)$.

Divisons le segment AB qui porte E, en intervalles partiels. Soit l la somme des longueurs de ceux de ces intervalles dont tous les points sont in-

(*) « Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1, de mesure α_1 nous pourrons dire que la mesure de E est supérieure à α_1 sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement,... Les mots supérieure et inférieure n'excluent d'ailleurs pas l'égalité », térieurs à E et L la somme des longueurs de ceux qui contiennent des points de E ou de sa frontière. On démontre que, lorsque l'on fait varier d'une manière quelconque la division de $A\,B$, de façon que le maximum de la longueur des intervalles partiels tende vers zéro, les deux nombres l et L tendent vers des limites déterminées les *étendues intérieure et extérieure* de E. De cette définition il résulte que l'étendue extérieure est au moins égale à la mesure extérieure et que l'étendue intérieure est au plus égale à la mesure intérieure. M.r Jordan appelle mesurables les ensembles dont les deux étendues extérieure et intérieure sont égales; ces ensembles que nous nommerons *mesurables* (J) sont donc mesurables au sens que nous avons adopté et les deux définitions de la mesure concordent lorqu'elles sont toutes deux applicables.

On peut encore dire que l'étendue intérieure de E est la mesure de l'ensemble de ses points intérieurs, lequel ensemble étant ouvert (*), c'est-à-dire ne contenant aucun point de sa frontière, a pour complémentaire un ensemble fermé et par suite est mesurable (B). L'étendue extérieure de E est la mesure de l'ensemble somme de E et de sa frontière, lequel étant fermé est mesurable (B). Donc pour qu'un ensemble soit mesurable (J) il faut et il suffit que sa frontière soit de mesure nulle.

Un ensemble fermé, ayant pour étendue extérieure sa mesure, s'il est de mesure nulle on peut affirmer qu'il est mesurable (J). En particulier l'ensemble parfait défini au § 6 est mesurable (J); il en est de même de tous ceux que l'on peut former avec ses points, donc l'ensemble des ensembles mesurables (J) a même puissance que l'ensemble des ensembles de points, et il existe des ensembles mesurables (J) qui ne sont pas mesurables (B).

9. Nous venons d'attacher à certains ensembles une mesure, il nous reste à rechercher comment on peut calculer ce nombre. Cela dépend évidemment de la manière dont l'ensemble est donné.

Supposons qu'un intervalle quelconque (a, b) étant donné, on sache reconnaître s'il existe dans (a, b) des points de l'ensemble donné E ou de sa frontière, et s'il y existe des points de $C\,(E)$. Nous pourrons alors, par un nombre fini d'opérations, calculer un nombre quelconque de termes des deux suites (que l'on peut supposer l'une décroissante, l'autre croissante) dont les limites sont les étendues extérieure et intérieure de E. L'habitude que nous avons de manier les séries conduit à considérer les étendues comme bien définies.

(*) Tous les points d'un tel ensemble sont intérieurs à l'ensemble.

On sait donc calculer la mesure d'un ensemble mesurable (J) et la considération simultanée des deux suites permet d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque.

Il est beaucoup plus difficile de calculer $m_e(E)$ et $m_i(E)$ pour un ensemble quelconque. Ces nombres sont en effet définis par la considération d'une infinité non dénombrable de nombres; pour trouver une suite de nombres tendant vers $m_e(E)$ il faudrait considérer des divisions du segment AB portant E, en intervalles partiels qui dépendraient de l'ensemble E.

Si un ensemble est mesurable (B) et est défini à l'aide des deux opérations que nous avons indiquées à partir de suites d'intervalles, il est facile de calculer sa mesure en s'appuyant sur la 3ème condition du problème de la mesure et sur cette propriété : l'ensemble E des points communs à tous les ensembles mesurables $E_1 . E_2 \dots$ qui sont tels que chacun contient tous ceux qui le suivent, est la limite inférieure de la suite $m(E_1)$, $m(E_2)\dots$

En effet $C(E)$ est la somme des ensembles, sans point commun, deux à deux, $C(E_1)$, $[C(E_2) - C(E_1)]$, $[C(E_3) - C(E_2)] \dots$

Donc

$$m[C(E)] = m[C(E_1)] + m[C(E_2) - C(E_1)] + \cdots$$

et

$$m(E) = m(E_1) + [m(E_2) - m(E_1)] + \cdots$$

II. Les elements de l'ensemble sont les points d'un plan.

10. Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux ensembles dont les éléments sont les points d'un espace à plusieurs dimensions; nous nous bornerons au cas du plan.

En raisonnant comme au § 2 on voit que tout ensemble borné de points sur une droite a une mesure superficielle nulle et que l'ensemble des points d'un carré ne peut avoir 0 pour mesure. Attribuons donc arbitrairement 1 pour mesure à un carré $MNPQ$.

Les raisonnements que l'on emploie en géométrie élémentaire pour trouver l'aire d'un triangle, prouvent que la mesure de l'ensemble des points d'un triangle ne peut différer de la moitié du produit des nombres qui mesurent son côté et sa hauteur, MN étant l'unité de longueur.

La mesure d'un triangle étant ainsi définie, il faut démontrer que *la mesure d'un triangle, somme de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres, est la somme des mesures de ces triangles.*

Les raisonnements exposés par M.r HADAMARD dans la note D de sa *Géométrie élémentaire* prouvent qu'il en est bien ainsi si les triangles composants sont en nombre fini. Le cas où ils sont en nombre infini se traite par un raisonnement semblable à celui qui nous a été utile dans le cas des ensembles de points sur une droite (BOREL, *Théorie des fonctions*, page 42).

11. Nous pouvons maintenant donner les définitions analogues à celles du § 3.

La mesure extérieure $m_e(E)$ d'un ensemble E est la limite inférieure de la somme des mesures des triangles (en nombre fini ou infini) dans lesquels on peut enfermer les points de E.

E étant intérieur à un triangle $A\,B\,C$, par définition

$$C_{ABC}(E) = (A\,B\,C) - E.$$

La mesure intérieure de E sera, par définition

$$m_i(E) = m\,(A\,B\,C) - m_e\,[C_{ABC}(E)].$$

Un ensemble pour lequel les deux nombres ainsi définis sont égaux sera dit mesurable, et la valeur commune de ces nombres sera sa mesure.

On démontre comme au § 4 que le problème de la mesure est possible et n'admet qu'une solution quand on se borne aux ensembles mesurables; et que les deux procédés du § 5 appliqués à des ensembles mesurables donnent des ensembles mesurables. Ces deux procédés, appliqués un nombre fini de fois à des ensembles dont chacun est formé des points d'un triangle, donnent les ensembles plans que nous appellerons, ainsi que leurs complémentaires, ensembles mesurables (B).

Soit un ensemble ouvert E, chacun de ses points M est intérieur à E. Nous pouvons donc à M faire correspondre un carré ayant M pour centre, de côtés parallèles à des directions rectangulaires données, et défini comme étant le plus grand dont tous les points intérieurs sont intérieurs à E. E étant somme de ceux de ces carrés qui correspondent aux points dont les deux coordonnées sont rationnelles, est mesurable (B).

Le complémentaire d'un ensemble fermé est un ensemble ouvert, donc tout ensemble fermé est mesurable (B).

On définira les étendues extérieure et intérieure d'un ensemble comme dans le cas de la droite, une division de la portion de droite contenant l'ensemble en un nombre fini de segments étant remplacée par une division en un nombre fini de carrés de la portion de plan contenant l'ensemble. De là la notion d'ensemble mesurable (J).

Tous ces ensembles et tous ces nombres ont entre eux les mêmes rapports que les ensembles et les nombres de mêmes noms rencontrés précédemment.

III. Le problème des aires (*).

12. On sait que l'on appelle courbe plane l'ensemble des deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \tag{1}$$

f et φ étant continues dans l'intervalle (a, b) *fini* où elles sont définies. A chaque valeur de t on peut faire correspondre le point dont les coordonnées sont les valeurs correspondantes de x et y. Une courbe définit donc un ensemble de points, cet ensemble est parfait (**). Un point est dit multiple s'il correspond à plusieurs valeurs de t. Dans le cas d'une courbe sans point multiple la connaissance de l'ensemble des points de la courbe suffit à la définir, car on ne considère pas comme différentes la courbe (1) et celles qu'on en déduit en remplaçant t par une fonction $\theta(t)$ toujours croissante ou toujours décroissante.

Une courbe est dite fermée sans point multiple si elle n'a d'autre point multiple qu'un point double correspondant à $t = a$ et $t = b$. On considère cette courbe comme définie par l'ensemble de ses points. Une telle courbe étant donnée, on sait qu'elle divise le plan en deux régions l'une intérieure, l'autre extérieure (***).

Nous appellerons *domaine* l'ensemble des points à l'intérieur d'une courbe fermée C sans point multiple. C est la frontière du domaine, lequel est un

(*) Jordan, Tome I. — J. Hadamard, *Géométrie Elémentaire.*

(**) Il n'en serait pas ainsi si, comme cela se présente souvent en mécanique, l'intervalle (a, b) était infini.

(***) Jordan, *Cours d'Analyse*, 2ème Edition, Tome I, pages 90 à 100.

ensemble ouvert. Nous dirons qu'un domaine D est somme des domaines D_1, D_2,... en nombre fini ou non, si tout point de D appartient à un et un seul des D_i, ou bien à l'une au moins des frontières des D_i.

13. *Nous nous proposons d'attacher à chaque domaine un nombre positif que nous appellerons son aire et satisfaisant aux conditions suivantes:*

1.° *Deux domaines égaux ont même aire.*

2.° *L'aire d'un domaine somme d'un nombre fini ou infini d'autres domaines est la somme des aires de ces domaines.*

C'est *le problème des aires.*

Si ce problème est possible, il l'est d'une infinité de manières et l'on peut attribuer arbitrairement 1 pour aire à un carré $MNPQ$. Les raisonnements connus de la géométrie élémentaire prouvent que l'aire d'un rectangle ne peut différer du produit des longueurs de ses côtés, MN étant l'unité de longueur, c'est-à-dire de la mesure superficielle du rectangle.

Un domaine étant un ensemble ouvert est, comme nous l'avons vu, somme d'une infinité dénombrable de rectangles, dont on peut supposer qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres; donc son aire ne peut différer de la somme des aires de ces rectangles, c'est-à-dire de la mesure superficielle du domaine considéré comme ensemble de points.

Soient maintenant deux domaines D_1 et D_2 sans point commun, ayant en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, et un seul. Le domaine D — somme de l'ensemble des points de D_1, de l'ensemble des points de D_2, de l'ensemble des points de $\alpha\beta$ (autres que α et β), — a pour mesure la somme des mesures de ces trois ensembles, qui sont tous trois mesurables puisque les deux premiers sont ouverts et que le troisième est parfait, aux points α et β près. Pour que la 2ème condition du problème des aires soit remplie il faut donc que la mesure superficielle de l'arc $\alpha\beta$ soit nulle.

Le problème des aires n'est donc possible que si l'on ne considère que les domaines dont la frontière est de mesure superficielle nulle.

Nous appellerons ces domaines *domaines quarrables* et les courbes dont la mesure superficielle est nulle *courbes quarrables.*

Soit un domaine quarrable D, somme des domaines quarrables D_1, D_2,... L'ensemble des points de D contient la somme des ensembles sans point commun deux à deux $D_1 D_2$... et comme aucun des D_i n'a une mesure nulle ils forment au plus une infinité dénombrable. Les frontières ont une mesure superficielle nulle, on peut les négliger dans le calcul de la mesure ou aire de D.

Le problème des aires est donc possible pour les domaines quarrables et il n'admet qu'une seule solution, si l'on fixe l'unité d'aire.

14. Nous allons supposer maintenant que la 2ème condition du problème des aires est ainsi modifiée :

L'aire d'un domaine somme de deux autres est la somme des aires de ces deux autres (*).

En reprenant des raisonnements déjà employés on verra que l'aire d'un domaine D est comprise entre les étendues intérieure et extérieure de ce domaine. De sorte que l'aire d'un domaine quarrable est encore bien déterminée.

L'aire d'un domaine D non quarrable, limité par une courbe non quarrable C est comprise entre les nombres $m(D)$ et $m(D) + m(C)$ (**).

Montrons que le problème des aires ainsi posé est indéterminé pour les domaines non quarrables. Nous nous appuierons sur cette propriété : lorsque deux domaines D_1, D_2 ont en commun un arc de frontière $\alpha\beta$, on peut trouver un domaine D contenant $\alpha\beta$ (sans peut-être α et β) et tel que, ou bien tout point de D intérieur à D_1 est intérieur à D_2 et inversement, ou bien tout point de D intérieur à D_1 n'appartient pas à D_2 et inversement (***). Dans le premier cas nous dirons que D_1 et D_2 sont du même côté de $\alpha\beta$ et dans le second qu'ils sont de côtés différents.

Soit un arc de courbe $\alpha\beta$, sans point multiple et non quarrable, supposons qu'il fasse partie de la frontière d'un domaine Δ. Soit maintenant un domaine quelconque D limité par une courbe C. C et $\alpha\beta$ peuvent avoir des arcs en commun (nous négligeons les points communs, s'il en existe, ne faisant pas partie de tels arcs). Soit E l'ensemble de ceux de ces arcs le long desquels D et Δ sont d'un même côté de $\alpha\beta$ et E_1 l'ensemble des arcs pour lesquels cela n'est pas. Choisissons arbitrairement, une fois pour toutes, un

(*) C'est ainsi que M.r HADAMARD pose le problème des aires pour les polygones. (*Géométrie Elémentaire*, Note *D*.)

(**) Il existe des courbes non quarrables puisqu'il existe des courbes passant par tous les points d'un carré. Pour former une courbe non quarrable, sans point multiple il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie M.r HILBERT pour définir une courbe passant par tous les points d'un carré (*Mathematische Annalen*, Bd. 38 ou PICARD, *Traité d'Analyse*, 2.e Edition, Tome I). On remplacera chacun des carrés qui figure dans la définition de M.r HILBERT par un polygone intérieur à ce carré, d'aire assez grande, choisi de façon que les frontières de deux de ces polygones n'aient en commun que le sommet, s'il existe, par lequel la courbe passe de l'un dans l'autre.

(***) La démonstration n'offre aucune difficulté.

nombre θ compris entre 0 et 1. Nous attribuerons à D l'aire:

$$m(D)+\frac{1}{2}m(C-E-E_1)+\theta\, m(E)+(1-\theta)\, m(E_1).$$

On démontrera très facilement que l'aire ainsi définie vérifie la seconde condition du problème des aires, telle qu'elle a été posée au début de ce paragraphe (*).

En résumé le problème des aires n'est à la fois possible et bien déterminé que pour les domaines quarrables. Dans la suite nous ne parlerons d'aire que dans le cas d'un domaine quarrable.

Des raisonnements analogues aux précédents pourront être faits au sujet des *volumes des domaines* de l'espace ordinaire, et d'une façon plus générale de l'*étendue d'un domaine* d'un espace à un nombre quelconque de dimensions.

CHAPITRE II.

Intégrale.

I. Integrale definie des fonctions d'une variable.

15. Au point de vue géométrique le problème de l'intégration peut se poser ainsi:

Étant donnée une courbe C par son équation $y=f(x)$ (f est une fonction continue positive, les axes sont rectangulaires) trouver l'aire du domaine limité par un arc de C, un segment de $0x$ et deux parallèles à l'axe des y d'abcisses données a et b, $(a<b)$.

Cette aire s'appelle l'intégrale définie de f prise entre les limites a et b, elle se représente par $\int_a^b f(x)\,dx$.

Archimède en quarrant un segment de parabole a résolu un cas particulier de ce problème. La méthode classique applicable au cas général con-

(*) Il faudra pour cela s'appuyer sur cette propriété: Si un domaine est somme de deux domaines D_1 et D_2, D_1 et D_2 ont en commun un arc de frontière et un seul, et aucun point commun en dehors de cet arc.

siste essentiellement à évaluer les étendues intérieure et extérieure du domaine à l'aide d'une division du plan en rectangles dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. Pour avoir ces rectangles traçons d'abord des parallèles à $0y$, puis divisons les bandes obtenues par des segments parallèles à $0x$, d'ordonnées variables d'une bande à l'autre. Si l'un R_1 des rectangles R ainsi formés doit être considéré pour calculer l'une des étendues, tous les rectangles R situés dans la même bande et compris entre R_1 et $0x$ doivent aussi être considérés pour le calcul de la même étendue. Les étendues sont donc des limites de sommes d'aires de rectangles ayant leurs bases sur $0x$.

Soient δ_1, δ_2... les longueurs de ces bases; m_1, m_2..., M_1, M_2... les valeurs inférieures et supérieures de f dans les intervalles correspondants. Si l'on suppose les δ donnés, c'est-à-dire les parallèles à $0y$ tracées, et si l'on choisit les segments parallèles à $0x$ de manière à obtenir les valeurs les plus approchées possibles pour les étendues, on obtiendra pour ces valeurs approchées :

$$s = \Sigma\, \delta_i\, m_i \qquad S = \Sigma\, \delta_i\, M_i .$$

Ainsi on sait calculer les deux étendues du domaine; on démontre qu'elles sont égales, le problème que nous nous sommes posé a donc un sens et nous savons le résoudre.

Relativement aux fonctions f bornées quelconques M.r Darboux a démontré (*) que les deux sommes s et S tendent vers des limites parfaitement déterminées; on les appelle *intégrales par défaut* et *par excès*. Lorsque ces deux intégrales sont égales, et cela se présente pour d'autres fonctions que les fonctions continues, la fonction est dite *intégrable* et la limite commune de s et S est appelée depuis Riemann (**) *l'intégrale définie de f prise entre a et b.*

16. Pour interpréter géométriquement ces nombres, attachons à toute fonction f positive définie dans (a, b) l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient à la fois les deux inégalités

$$a \leq x \leq b \qquad 0 \leq y \leq f(y).$$

(*) Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Annales de l'Ecole Normale, 1875.

(**) Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique.*

Les deux sommes s et S sont évidemment des valeurs approchées des étendues intérieure et extérieure de E et par suite s et S ont des limites bien déterminées: ces étendues. Ainsi, au point de vue géométrique, l'existence des intégrales par défaut et par excès est une conséquence de l'existence des étendues intérieure et extérieure d'un ensemble borné. — Pour que la fonction f soit intégrable il faut et il suffit que E soit mesurable (J); la mesure de E est l'intégrale.

Si la fonction f est de signe quelconque, nous lui faisons correspondre l'ensemble E des points dont les coordonnées vérifient les trois inégalités

$$a \leqq x \leqq b \qquad x f(x) \geqq 0 \qquad 0 \leqq y^2 \leqq \overline{f(x)}^2.$$

L'ensemble E est somme de deux ensembles E_1 et E_2 formés des points à ordonnées positives pour E_1 et négatives pour E_2 (*). L'intégrale par défaut est l'étendue intérieure de E_1 moins l'étendue extérieure de E_2; l'intégrale par excès est l'étendue extérieure de E_1 moins l'étendue intérieure de E_2. Si E est mesurable (J) (auquel cas E_1 et E_2 le sont) la fonction est intégrable, l'intégrale étant $m(E_1) - m(E_2)$.

17. Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: *si l'ensemble E est mesurable, (auquel cas E_1 et E_2 le sont) nous appellerons intégrale définie de f, prise entre a et b, la quantité*

$$m(E_1) - m(E_2).$$

Les fonctions f correspondantes seront dites sommables.

Relativement aux fonctions non sommables, s'il en existe, nous définirons les intégrales inférieure et supérieure comme égales à

$$m_i(E_1) - m_e(E_2) \qquad m_e(E_1) - m_i(E_2).$$

Ces deux nombres sont compris entre les intégrales par défaut et par excès.

18. Nous allons définir analytiquement les fonctions sommables.

Puisque E est mesurable il est contenu dans un ensemble E' et contient un ensemble E'', E' et E'' étant mesurables (B) et de mesure $m(E)$, § 7. D'ailleurs les raisonnements qui nous ont donné ce résultat prouvent que l'on peut supposer E' et E'' formés de segments parallèles à $0y$ et ayant leurs pieds sur $0x$, c'est-à-dire correspondant à deux fonctions f_1 et f_2 $(f_1 \geqq f_2)$.

(*) Il importe peu de considérer les points de l'axe des x comme faisant partie de E_1 ou de E_2.

Soient e, e', e'' les ensembles formés de ceux des points de E, E', E'' dont les ordonnées sont plus grandes qu'un nombre donné $m > 0$; e, e', e'' sont mesurables et de même mesure. Soient s, s', s'' les sections de ces ensembles par la droite $y = m + h$; s' et s'' sont mesurables (B) linéairement, et $m(s')$, $m(s'')$ ne décroissent pas quand h tend vers zéro; soient S', S'' leurs limites. Montrons qu'elles sont égales. — En effet, s'il en était autrement pour h assez petit on aurait toujours

$$m(s') \geqq m(s'') + \varepsilon.$$

Et l'on peut trouver h_1 et h_2, $h_1 < h_2$, assez petits pour que

$$m[s'(h_1)] \geqq m[s'(h_2)] \geqq m[s''(h_1)] + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Soient e'_1, e''_1 les points de e' et e'' compris entre $y = h_1$ et $y = h_2$ on a :

$$m(e'_1) \geqq (h_2 - h_1) \cdot m[s'(h_2)]$$

$$m(e''_1) \leqq (h_2 - h_1) \cdot m[s''(h_1)].$$

Donc

$$m(e'_1) \geqq m(e''_1) + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est impossible car e'_1 et e''_1 doivent avoir la même mesure.

Donc s' et s'' ont même mesure linéaire et par suite s est mesurable; c'est-à-dire que *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est supérieure à $m > 0$ est mesurable.* De même *l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est inférieure à $m < 0$ est mesurable.*

De là résulte que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est inférieure ou égale à $m > 0$ (supérieure ou égale à $m < 0$) est mesurable; donc que l'ensemble des points pour lesquels on a soit $a \geqq f(x) > b > 0$, soit $0 > c > f(x) \geqq d$, soit $e \geqq f(x) \geqq g$ $(e\, g < 0)$ est mesurable; et en faisant tendre b vers a, ou d vers c, ou e et g vers 0 ou voit que l'ensemble des points pour lesquels y a une valeur donnée est mesurable. En résumé, sans qu'il soit nécessaire de s'occuper des signes de a et b, *si f est sommable, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a :*

$$a > f(x) > b$$

est mesurable.

19. Réciproquement: *si quels que soient a et b l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $a > f(x) > b$ est mesurable, et si la fonction $f(x)$ est bornée, elle est sommable.*

En effet, divisons l'intervalle de variation de $f(x)$; soient a_0, a_1, $a_2, \ldots a_n$ les points de division. Soit e_i ($i = 0, 1, \ldots n$) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = a_i$.

Soit e'_i ($i = 0, 1, 2, \ldots n-1$) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $a_i < f(x) < a_{i+1}$.

Les points de l'ensemble E attaché à $f(x)$, correspondant aux valeurs de x qui appartiennent à e_i forment un ensemble mesurable dans le plan et de mesure $|a_i| \cdot m_l(e_i)$, ($m_l(e_i)$ désignant une mesure linéaire).

Les points de E qui correspondent à ceux de e'_i forment un ensemble contenant un ensemble mesurable de mesure $|a_i| \cdot m_l(e'_i)$, et contenu dans un ensemble mesurable de mesure $|a_{i+1}| \, m_l(e'_i)$.

E contient donc un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| \, m_l(e_i) + \sum_1^n |a_{i-1}| \, m_l(e'_i)$$

et est contenu dans un ensemble de mesure

$$\sum_0^n |a_i| \, m_l(e_i) + \sum_1^n |a_i| \, m_l(e'_i).$$

Ces deux mesures diffèrent de moins de $(a_n - a_0)\,\alpha$ en appelant α le maximum de $a_i - a_{i-1}$, donc on peut les rendre aussi voisines que l'on veut et E est mesurable, donc f sommable.

De plus on sait calculer la mesure de E; donc, *si f est positive l'intégrale est la limite commune des deux sommes*

$$\sigma = \sum_0^n a_i \, m_l(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} \cdot m_l(e'_i), \qquad \Sigma = \sum_0^n a_i \, m_l(e_i) + \sum_1^n a_i \, m_l(e'_i)$$

lorsque $a_{i-1} - a_i$ tend vers zéro.

Or si f n'est pas toujours positive la limite de la somme de ceux des termes de σ ou Σ qui sont positifs donne la mesure de l'ensemble que nous avons appelé E_1 § 16, et la limite de la somme des termes négatifs donne $-m(E_2)$, donc *dans tous les cas σ et Σ définissent l'intégrale.*

20. Il n'est peut-être pas inutile de montrer que des raisonnements analytiques auraient pu nous conduire à la considération des fonctions sommables et de ce que nous venons d'appeler leurs intégrales.

Soit une fonction continue toujours croissante $f(x)$ définie entre α et β $(\alpha < \beta)$ et variant entre a et b $(a < b)$. Prenons arbitrairement pour x les valeurs

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

auxquelles correspondent pour $f(x)$ les valeurs

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b.$$

L'intégrale définie, au sens ordinaire du mot, est la limite commune des deux sommes

$$\sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_{i-1} \qquad \sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_i$$

quand le maximum de $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro.

Mais x_i est donné si a_i l'est, et $x_i - x_{i-1}$ tend vers zéro si $a_i - a_{i-1}$ tend vers zéro. Donc *pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante $f(x)$ on peut se donner les a_i, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de $f(x)$, au lieu de se donner les x_i, c'est-à-dire la division de l'intervalle de variation de x.*

En cherchant à opérer de même, d'abord dans le cas simple des fonctions continues variables dans tout intervalle, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, puis dans le cas d'une fonction continue quelconque on est facilement conduit à cette propriété. Soit une fonction continue $f(x)$ définie dans (α, β) et variant entre a et b, $(a < b)$. Choisissons arbitrairement

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b\,;$$

$f(x) = a_i$ pour les points d'un ensemble fermé e_i, $(i = 0, 1 \ldots n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ pour les points d'un ensemble, somme d'intervalles, e'_i, $(i = 0, 1, 2 \ldots, n-1)$; les ensembles e_i et e'_i sont mesurables.

Les deux quantités

$$\sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_i\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_{i+1}\, m(e'_i)$$

tendent vers $\int_a^b f(x)\, dx$ quand le nombre des a_i augmente de façon que le maximum de $a_i - a_{i-1}$ tende vers zéro.

Cette propriété obtenue, on peut la prendre pour définition de l'intégrale de $f(x)$. Mais les deux quantités σ et Σ ont un sens pour d'autres fonctions que les fonctions continues, ce sont les fonctions sommables. Nous allons démontrer que pour ces fonctions σ et Σ ont une même limite indépendante du choix des a_i; cette limite sera, par définition, l'intégrale de $f(x)$ prise entre α et β.

Lorsque, entre les a_i, on introduit de nouveaux points de division, σ ne décroît pas, Σ ne croît pas, donc σ et Σ ont des limites. Elles sont égales, car $\Sigma - \sigma$ est au plus égal à $(\beta - \alpha)$ multiplié par le maximum de $(a_i - a_{i-1})$.

Soit maintenant un autre mode de division de la variation de $f(x)$ à l'aide de points b_i et soient σ' et Σ' les valeurs correspondantes de σ et Σ. Soient σ'' et Σ'' les valeurs correspondant au mode de division dans lequel on emploie à la fois les a_i et b_i. Les deux séries d'inégalités

$$\sigma \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma'$$

$$\sigma' \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma$$

prouvent que les six sommes σ, σ', σ'', Σ, Σ', Σ', ont la même limite.

L'existence de l'intégrale est donc démontrée. Si l'on adopte cette méthode d'exposition, d'ailleurs peu différente de la précédente, il n'est pas évident que la définition de l'intégrale telle que l'a donnée Riemann n'est jamais en désaccord avec la précédente. Pour le démontrer nous nous appuierons sur ce fait: Les points de discontinuité d'une fonction intégrable forment un ensemble de mesure nulle (*). — Soit $f(x)$ une fonction intégrable et soit E l'ensemble des points pour lesquels on a

$$a \leq f(x) \leq b$$

a et b étant deux nombres quelconques. Les points limites de E qui ne font pas partie de E sont des points de discontinuité; ils forment donc un ensemble e de mesure nulle. $E + e$ étant fermé est mesurable, e est mesurable, donc E l'est. Cela suffit pour qu'on en conclut que f est sommable.

Si dans un intervalle de longueur l, le maximum de f est M et le minimum m, l'intégrale (au sens que nous avons donné à ce mot) est comprise entre lM et lm. De plus si $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des nombres croissants, on a:

$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} = \int_{a_1}^{a_n}$$

(les intégrales ayant le sens que nous avons adopté).

(*) Riemann énonce cette propriété de la façon suivante: Pour qu'une fonction soit intégrable il faut que « la somme totale des intervalles, pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ, quel que soit σ, puisse être rendue infiniment petite ».

De là résulte que l'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre les intégrales par défaut et par excès, et en particulier que les deux définitions de l'intégrale concordent lorsqu'elles sont toutes deux applicables.

21. L'intégrale prise entre les limites a et b n'a été définie que si a est inférieur à b, nous complèterons la définition par l'identité

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

De là résulte que l'on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \cdots + \int_k^l f(x)\,dx = \int_a^l f(x)\,dx$$

et cela quels que soient $a, b \ldots l$.

Nous aurons aussi besoin de la notion d'intégrale d'une fonction f définie seulement pour les points d'un ensemble E (*). Soit un segment AB contenant E, définissons une fonction φ comme égale à f pour les points de E et à 0 pour les points de $C_{AB}(E)$. L'intégrale de f prise dans E est, par définition, l'intégrale de φ prise dans AB. Il est évident que l'intégrale de f ainsi définie ne dépend pas du choix du segment AB contenant E.

Si E est somme de $E_1, E_2 \ldots$, tous ces ensembles étant mesurables et sans point commun deux à deux, et si la fonction f est sommable dans E, on a :

$$\int_E f(x)\,dx = \Sigma \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

Remarquons encore que l'on peut définir l'intégrale inférieure d'une fonction f comme la limite supérieure des intégrales des fonctions φ sommables non supérieures à f; il existe une de ces fonctions φ dont l'intégrale est égale à l'intégrale inférieure de f. On énoncerait une propriété analogue pour l'intégrale supérieure.

22. Nous allons maintenant montrer que les opérations arithmétiques élémentaires appliquées à des fonctions sommables donnent des fonctions sommables.

(*) On aurait pu d'abord définir les fonctions sommables dans E, puis leurs intégrales à l'aide des mêmes définitions que précédemment, à condition de faire abstraction de tous les points qui n'appartiennent pas à E.

Soient f et φ deux fonctions sommables qui restent comprises entre m et M. Partageons l'intervalle (m, M); soient les points de division

$$m_0 = m < m_1 < m_2 \ldots < m_n = M.$$

Soit $e_i (i = 1, 2 \ldots n)$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a: $m_{i-1} < f \leq m_i$, soit e'_i l'ensemble correspondant pour φ.

Soit e_{ij} l'ensemble des points communs à e_i et e'_j, pour les points de cet ensemble on a:

$$m_{i-1} + m_{j-1} < f + \varphi \leq m_i + m_j\,;$$

e_i, e'_j, e_{ij} sont mesurables.

Soient a et b deux nombres donnés. Soit E l'ensemble somme de ceux des e_{ij} dont tous les points sont compris *entre* a et b. E est mesurable.

Augmentons indéfiniment le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - m_{i-1}$ tende vers zéro. Nous aurons une suite infinie d'ensembles E dont la somme, qui est mesurable, est l'ensemble de valeurs de x pour lesquelles on a:

$$a < f + \varphi < b$$

donc $f + \varphi$ est sommable.

L'intégrale de f est la somme des intégrales de f prises dans les ensembles e_{ij}, donc on a:

$$\Sigma\, m(e_{ij})\, m_{i-1} < \int f(x)\, dx < \Sigma\, m(e_{ij})\, m_i\,.$$

De même

$$\Sigma\, m(e_{ij})\, m_{j-1} < \int \varphi(x)\, dx < \Sigma\, m(e_{ij})\, m_j\,.$$

Et, en raisonnant de même pour la fonction $f + \varphi$,

$$\Sigma\, m(e_{ij})(m_{i-1} + m_{j-1}) < \int (f + \varphi)\, dx < \Sigma\, m(e_{ij})(m_i + m_j).$$

De là résulte que:

$$\left|\int (f + \varphi)\, dx - \int f\, dx - \int \varphi\, dx\right| < \Sigma\, m(e_{ij})(m_i + m_j - m_{i-1} - m_{j-1})$$

donc

$$\int (f + \varphi)\, dx = \int f\, dx + \int \varphi\, dx \text{ (*)}.$$

(*) L'introduction des notions d'intégrales inférieure et extérieure aurait permis de se borner à la 2ème partie du raisonnement précédent.

Cette propriété se généralise immédiatement, de sorte que : *la somme d'un nombre quelconque de fonctions sommables est une fonction sommable et l'intégrale est la somme des intégrales.*

On démontrera de même que *le produit de deux fonctions sommables est une fonction sommable;* que *l'inverse d'une fonction sommable f vérifiant l'inégalité*

$$0 < m < |f| < M$$

est une fonction sommable; que *la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique d'une fonction f sommable, pour laquelle cette racine existe, est sommable;* que *si f et φ sont deux fonctions sommables, telles que $f(\varphi)$ ait un sens, la fonction $f(\varphi)$ est sommable; de même $f\varphi$ est sommable si f et φ le sont*, etc.

Une proposition plus importante est la suivante : *Si une fonction f bornée est la limite d'une suite de fonctions f_i sommables, f est sommable.*

En effet soit e_i l'ensemble des valeurs pour lesquelles f_i est comprise *entre* a et b. L'ensemble e des points communs à tous les e_i, au moins à partir d'une certaine valeur de i, est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est comprise *entre* a et b. Or les e_i étant mesurables e l'est, donc f est sommable.

23. Les propositions que nous venons d'obtenir permettent de définir une classe importante de fonctions sommables.

Nous nous appuierons sur ce fait que $y = h$ et $y = x$ sont des fonctions sommables; alors $k x^m$ est sommable et tout polynome est sommable.

Depuis Weierstrass on sait que toute fonction continue est la limite d'une suite de polynomes, donc les fonctions continues sont sommables. Mais il existe des fonctions autres que les fonctions continues qui sont limites de polynomes, ce sont les fonctions qu'a étudiées M.r Baire et qu'il a appelées fonctions de première classe. (*Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica, 1899.) Les fonctions de première classe sont donc sommables. Les limites de fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe sont sommables, etc. Toutes les fonctions de l'ensemble que M.r Baire désigne par E (page 70, loc. cit.) sont sommables.

Ces résultats nous fournissent de nombreux exemples de fonctions sommables, discontinues et non intégrables (au sens de Riemann). On peut d'ailleurs obtenir de tels exemples de la façon suivante. — Le raisonnement qui nous a permis au paragraphe 20 de démontrer que toute fonction intégrable est sommable prouve que : Si, en faisant abstraction d'un ensemble de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Donc si f et φ sont deux fonctions continues, la fonction F, définie comme égale à f sauf aux points d'un ensemble E de mesure nulle, pour lesquels on a

$$F = f + \varphi,$$

est sommable. Or si φ n'est jamais nulle et si E est dense dans tout intervalle, tous les points sont points de discontinuité pour F qui n'est donc pas intégrable (au sens de Riemann).

Ce procédé nous permet de construire des fonctions sommables formant un ensemble dont la puissance est égale à celle de l'ensemble des fonctions.

24. La méthode géométrique qui nous a servie au début de ce chapitre, étant basée sur la notion de mesure d'un ensemble borné, ne s'appliquait qu'aux fonctions bornées (*). Au contraire la méthode analytique indiquée au § 20 s'applique presque sans modification à des fonctions non limitées supérieurement en valeur absolue.

Une fonction sera dite sommable si, quels que soient a et b, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$a < f(x) < b$$

est mesurable. Nous distinguerons les fonctions sommables bornées, celles dont nous nous sommes occupés, jusqu'à présent, et les fonctions sommables non bornées.

Soit $f(x)$ une fonction sommable. Choisissons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

variant depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et tels que $m_i - m_{i-1}$ soit limité supérieurement en valeur absolue. Soit toujours e_i l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ égale m_i et e'_i l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$m_i < f(x) < m_{i+1}.$$

Considérons les deux sommes

$$\sigma = \Sigma\, m_i \,.\, m(e_i) + \Sigma\, m_i \,.\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \Sigma\, m_i \,.\, m(e_i) + \Sigma\, m_{i+1}\, m(e'_i)$$

dans lesquelles les signes Σ représentent des sommes de deux séries l'une à

(*) Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à poser le problème de la mesure des ensembles de points pour tous les ensembles, bornés ou non.

termes positifs, l'autre à termes négatifs. Ces séries peuvent être convergentes ou divergentes; si celles qui figurent dans σ sont convergentes, c'est-à-dire si σ a un sens, Σ a un sens et inversement; et il en est de même quels que soient les m_i choisis.

En raisonnant comme au paragraphe 20 on verra que les deux sommes σ et Σ tendent vers la même limite, indépendante des m_i choisis, quand on augmente le nombre des m_i de façon que le maximum de $m_i - m_{i-1}$ tende vers zéro. — Cette limite est l'intégrale.

Avec cette extension du sens des mots *fonction sommable* et *intégrale*, tous les énoncés donnés précédemment restent exacts (*). Mais il faut se rappeler qu'une fonction sommable non bornée n'a pas nécessairement une intégrale (**).

25. Le calcul de l'intégrale d'une fonction donnée présente les mêmes difficultés que le calcul de la mesure d'un ensemble donné.

La plupart des fonctions discontinues que l'on a considérées jusqu'à présent en Analyse étaient définies à l'aide de séries, il y a donc intérêt à connaître le théorème suivant.

Si une suite de fonctions sommables, ayant des intégrales $f_1, f_2, f_3 \ldots$ a une limite f et si $|f - f_n|$ reste, quel que soit n, inférieure à un nombre fixe M, f a une intégrale qui est la limite des intégrales des fonctions f_n (***).

En effet on a:

$$f = f_n + (f - f_n).$$

Les deux fonctions du second membre ayant des intégrales il en est de même de f et l'intégrale de f est la somme des intégrales de f_n et $f - f_n$. Cherchons une limite supérieure de cette seconde intégrale.

Choisissons arbitrairement un nombre positif Σ. Soit e_n l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on n'a pas, pour toute valeur positive ou nulle

(*) Le premier des énoncés du § 22 demande cependant quelques explications. Si f et φ sont sommables $f + \varphi$ l'est et l'on a bien $\int (f + \varphi) = \int f + \int \varphi$ si $\int f$ et $\int \varphi$ ont un sens; mais $\int (f + \varphi)$ peut avoir un sens sans qu'il en soit de même de $\int f$ et de $\int \varphi$.

(**) Il resterait à examiner le cas où f devient infinie pour certaines valeurs de x. Si ces valeurs sont en nombre fini il suffit de définir l'intégrale en faisant abstraction des valeurs qui rendent f infinie, pour que les énoncés ordinaires ne soient pas changés.

(***) Le cas particulier le plus intéressant de ce théorème, celui où f et les f_i sont des fonctions continues, a déjà été obtenu, à l'aide de considérations toutes différentes par M.r Osgood, dans son Mémoire sur la convergence non uniforme (*American Journal*, 1891).

de p

$$\left| f - f_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

e_n est mesurable.

Soit E l'ensemble mesurable dans lequel on prend les intégrales, on a:

$$\left| \int (f - f_n)\, d\, x \right| \leq M \,.\, m\,(e_n) + \varepsilon \left[m\,(E) - m\,(e_n) \right].$$

Or chaque ensemble e_n contient tous les ensembles dont les indices sont plus grands et il n'existe aucun point commun à la fois à tous les e_n. Donc $m\,(e_n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et par suite il en de même de

$$\left| \int (f - f_n)\, d\, x \right| .$$

Lorsque f est bornée la proposition peut s'énoncer ainsi: Lorsqu'une suite $f_1 f_2 \ldots$ de fonctions sommables, limitées supérieurement en valeur absolue dans leur ensemble, a une limite f l'intégrale de f est la limite des intégrales des fonctions f_n.

Voici une autre forme de l'énoncé relatif au cas général:

Lorsque l'ensemble des restes d'une série convergente de fonctions ayant des intégrales est limité supérieurement en valeur absolue, la série est intégrable terme à terme.

Comme cas très particulier on a le théorème sur l'intégration des séries uniformément convergentes.

II. Integrales indefinies et fonctions primitives des fonctions d'une variable.

26. On appelle intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$, ayant une intégrale définie dans un intervalle (α, β), une fonction $F\,(x)$ définie dans (α, β) et telle que, quels que soient a et b compris entre α et β, on ait:

$$\int_a^b f\,(x)\, d\, x = F\,(b) - F\,(a).$$

De cette égalité on tire :

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + F(a).$$

Donc toute fonction ayant une intégrale définie admet une infinité d'intégrales indéfinies qui ne diffèrent que par une constante $F(a)$.

L'intégrale indéfinie est une fonction continue (*), cela est évident si la fonction $f(x)$ est bornée. Pour le démontrer dans le cas général reprenons les notations du paragraphe 24; a étant arbitrairement choisi il faut démontrer que dès que h est inférieur en valeur absolue à une certaine quantité on a :

$$\left| F(a+h) - F(a) \right| = \left| \int_a^{a+h} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Nous allons, pour simplifier, supposer h positif.

Il existe *au plus* une infinité dénombrable de nombres m_i tels que les ensembles e_i correspondants aient une mesure non nulle, on pourra donc supposer que les m_i n'ont pas été pris parmi ces valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire que nous ferons $m(e_i) = 0$, ce qui simplifie les sommes σ et Σ.

Alors si l'on suppose $m_0 = 0$ (**), on peut écrire

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \lim \left\{ \sum_0^{\infty} m_{i+1}\, m\left[e'_i(h)\right] + \sum_{-1}^{-\infty} m_i\, m\left[e'_i(h)\right] \right\}$$

en désignant par $e'_i(h)$ la portion de e'_i comprise entre a et $a+h$. Considérons un système fixe de nombres m_i. Les deux séries du second membre ne varieront que si h varie et l'on peut supposer h assez petit pour que la valeur absolue d'un nombre fini quelconque de termes du second membre soit aussi petite que l'on veut. Donc on peut prendre h assez petit que les deux séries du second membre, qui sont l'une à termes positifs, l'autre à termes négatifs, soient aussi petites que l'on veut en valeur absolue.

(*) On peut aussi ajouter qu'elle a une variation bornée; cette variation étant au plus égale à $\int |f(x)|\,dx$. La démonstration est la même que celle qu'emploie M.r Jordan, *Cours d'Analyse* § 81. Ceci explique les résultats obtenus plus loin (§§ 30, 31, 32).

(**) Alors e_0 ne sera peut-être pas de mesure nulle, mais cela n'a pas d'importance pour la suite.

Mais pour passer à la limite il faut, entre les m_i choisis, introduire de nouveaux nombres; cette opération fait diminuer, en valeur absolue, les deux séries du second membre; donc il est bien démontré que $\int_a^{a+h} f(x)\, d\, x$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. L'intégrale indéfinie est donc bien une fonction continue.

27. Si M et m sont les maximum et minimum de $f(x)$ dans $(a, a+h)$ on a:

$$m\, h < \int_a^{a+h} f(x)\, d\, x < M\, h$$

d'où

$$m < \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < M$$

donc pour $x = a$, si $f(x)$ est continue en ce point, $F(x)$ a une dérivée égale à $f(a)$.

Si $f(x)$ est continue pour toute valeur de x, $F(x)$ est l'une quelconque des fonctions qui admettent pour dérivée $f(x)$, c'est-à-dire l'une des *fonctions primitives* de $f(x)$.

Ainsi dans le cas des fonctions continues il y a identité entre la recherche des fonctions primitives et la recherche des intégrales indéfinies d'une fonction donnée. Ce résultat bien connu est encore vrai lorsqu'il s'agit d'une fonction dérivée intégrable au sens de Riemann (*). Mais il existe des fonctions dérivées qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann (**); une de ces fonctions étant donnée on ne peut pas calculer ses fonctions primitives à l'aide de l'intégration, au sens de Riemann.

Nous allons voir que toute fonction dérivée bornée admet une intégrale indéfinie qui est une de ses fonctions primitives; nous saurons donc calculer la fonction primitive, si elle existe, d'une fonction bornée donnée.

Relativement aux fonctions dérivées non bornées, nous démontrerons que si elles admettent des intégrales il y a identité entre leurs fonctions primitives et leurs intégrales indéfinies.

(*) Voir Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues.*

(**) M.r Volterra a le premier donné effectivement un exemple de ces fonctions (*Giornale de Battaglini*, t. XIX, 1881). Cet exemple est reproduit plus loin.

28. La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la limite quand h tend vers zéro de l'expression:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)$$

laquelle, h étant fixe, représente une fonction continue; donc la dérivée est limite de fonctions continues, elle est sommable.

Supposons que la dérivée f' soit toujours inférieure en valeur absolue à M. En vertu du théorème des accroissements finis $\varphi(x)=f'(x+\theta h)$, donc les fonctions $f(x)$ sont bornées dans leur ensemble et par suite l'on a (§ 25):

$$\int_a^b f'x\,dx=\lim\int_a^b\varphi(x)\,dx=\left[\lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(x)\,dx\right]_a^b$$

donc

$$\int_a^b f'x\,dx=f(b)-f(a).$$

Toute fonction dérivée bornée admet comme intégrales indéfinies ses fonctions primitives; ce résultat est encore vrai s'il s'agit de dérivée à droite, ou à gauche bornée; ou d'une limite vers laquelle tend $\varphi(x)$ pour certaines valeurs de h tendant vers zéro.

29. Pour appliquer ce qui précède, nous allons rechercher s'il existe des fonctions primitives pour la fonction définie de la manière suivante:

Soit un ensemble E fermé non dense dans toute portion de $(0, 1)$ et de mesure non nulle. Soient (a, b) un intervalle contigu à E (*) et c le milieu de cet intervalle. La fonction

$$\varphi(x-a)=2(x-a)\sin\frac{1}{x-a}-\cos\frac{1}{x-a}$$

s'annule une infinité de fois entre a et c; soit $a+d$ le point le plus voisin de c, entre a et c, pour lequel elle est nulle.

La fonction $f(x)$ dont nous allons nous occuper est nulle pour tous les points de E; dans chaque intervalle (a, b) contigu à E, elle est égale à $\varphi(x-a)$ entre a et $a+d$, nulle entre $a+d$ et $b-d$, égale à $-\varphi(b-x)$ entre $b-d$ et b.

(*) C'est-à-dire un intervalle ne contenant pas de points de E et dont les extrémités sont points de E. — Cette expression est de M.r Baire.

Cette fonction est continue dans chaque intervalle contigu à E, discontinue pour tous les points de E qui sont des points de discontinuité de seconde espèce.

De plus $f(x)$ est toujours comprise entre -3 et $+3$. Pour que $f(x)$ admette une fonction primitive, il faut d'abord qu'elle admette une intégrale définie dans l'intervalle $(0, 1)$. Cette intégrale, si elle existe, est égale à l'intégrale prise dans E plus l'intégrale prise dans $C(E)$, à supposer qu'elles existent. Or l'intégrale dans E existe et est nulle; l'intégrale dans $C(E)$ existe aussi, car elle est la somme des intégrales prises dans les intervalles contigus à E, lesquelles sont nulles.

D'après cela la fonction $F(x)$ nulle pour les points de E, et définie dans tout intervalle (a, b) contigu à E par les égalités

$$F(x) = (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} \qquad \text{entre } a \text{ et } a+d$$

$$F(x) = d^2 \sin \frac{1}{d} \qquad \text{entre } a+d \text{ et } b-d$$

$$F(x) = (b-x)^2 \sin \frac{1}{b-x} \qquad \text{entre } b-d \text{ et } b$$

est égale à $\int f(x)\, dx$.

Donc si $f(x)$ a des fonctions primitives, $F(x)$ est l'une d'elles.

Pour tous les points où $f(x)$ est continue, c'est-à-dire pour tous les points de $C(E)$, on a évidemment

$$F'(x) = f(x).$$

Soit a un point de E; si a est extrémité d'un intervalle contigu à E, situé à droite de a, $F(x)$ a évidemment une dérivée à droite nulle. Supposons qu'à droite de a se trouve une infinité de points de E, ayant a pour point limite. Soient α_i un de ces points, pour x supérieur à α_i le rapport

$$r(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

est en valeur absolue inférieur à

$$\frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a} < x - a,$$

donc tend vers zéro quand x tend vers a.

En tous les points de E, $F(x)$ a donc une dérivée à droite nulle, on verrait de même qu'elle a une dérivée à gauche nulle, et par suite pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1 on a :

$$F'(x) = f(x).$$

La fonction $f(x)$ est donc une fonction dérivée; elle n'est pas intégrable (au sens de RIEMANN) puisque l'ensemble de ses points de discontinuité a une mesure non nulle.

Cet exemple de fonction dérivée non intégrable au sens de RIEMANN est dû à M.r VOLTERRA, *Giornale de Battaglini*, tome XIX (*).

30. Les fonctions primitives que nous venons de trouver sont à variation bornée (**). Nous allons démontrer que : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la dérivée (bornée ou non) d'une fonction dérivable existe est que cette fonction soit à variation bornée. S'il en est ainsi, la fonction est l'une des intégrales indéfinies de sa dérivée.*

Puisque $f'(x)$ est sommable, pour rechercher son intégrale opérons comme au paragraphe 24. Nous supposerons tous les e_i de mesure nulle et de plus $m_0 = 0$, ce qui est possible si, au lieu de raisonner sur la fonction donnée $f(x)$, on raisonne sur $f(x) + Kx$, K ayant été convenablement choisi.

A chaque point x_0 de e'_i, on peut faire correspondre un intervalle (α, β) tel que si l'on a :

$$\alpha < a \leq x_0 \leq b < \beta$$

on ait aussi

$$m_i < r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}.$$

Nous définirons (α, β) comme étant le plus grand intervalle possible de longueur au plus égale à un nombre donné σ et ayant x_0 pour milieu.

Si $m_i - m_{i-1}$ est toujours inférieur à η, $(b - a)\, r(a, b)$ est à $\eta\,(b - a)$ près égal à $f'(x_0)(b - a)$.

(*) Des séries uniformément convergentes, dont les termes sont des fonctions analogues à celle que nous venons de considérer, permettent à M.r VOLTERRA de donner des exemples de fonctions dérivées qui ne sont intégrables dans aucun intervalle.

L'intégration terme à terme de ces séries nous donnera les fonctions primitives.

(**) Nous nous servirons ici de quelques unes des propriétés de ces fonctions (Voir JORDAN, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1881 et *Cours d'Analyse* 2ème Edition, tome I). La plupart de ces propriétés sont reprises dans le chapitre suivant, de sorte que les paragraphes 30 à 35 pourraient être mis dans ce chapitre. L'ordre adopté dans le texte permet de réunir tout ce qui a trait à la recherche des fonctions primitives.

Soit $E_i(\sigma)$ l'ensemble somme des intervalles qui correspondent aux points de e'_i. $E_i(\sigma)$ peut être considéré comme une somme d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres; si (a, b) est l'un de ces intervalles et si l'on a:

$$a < \alpha < \beta < b,$$

on a aussi

$$m_i < r(\alpha, \beta) < m_{i+1}$$

pourvu que, entre α et β, se trouve au moins un point de e'_i.

$E_i(\sigma)$ contient e'_i. Faisons tendre σ vers zéro et soit x_0 un point appartenant à une infinité d'ensembles $E_i(\sigma)$. $f'(x_0)$ est la limite des valeurs de $r(\alpha, \beta)$ relatives aux intervalles des $E_i(\sigma)$ qui contiennent x_0, donc x_0 est point de e_i, de e'_i ou de e_{i+1}. Par suite l'ensemble E_i, formé des points communs à une infinité de $E_i(\sigma)$ relatifs à des valeurs de σ tendant vers zéro, contient e'_i et des points de $e_i + e_{i+1}$, il a donc même mesure que e'_i. De plus comme chaque $E_i(\sigma)$ contient les ensembles relatifs aux valeurs plus petites de σ, $m(E_i)$ est la limite de $m[E_i(\sigma)]$. On peut donc choisir les nombres

$$\ldots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots$$

de manière que la somme D soit aussi petite que l'on veut,

$$D = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot \left(m[E_i(\sigma_i)] - m(E_i)\right).$$

Ceci posé, remarquons que $\int f'\,dx$ et $\int |f'|\,dx$ existent en même temps de sorte que $\int f'\,dx$ existe si la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m(e'_i) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m(E_i)$$

est convergente, c'est-à-dire s'il en est de même pour

$$V = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m[E_i(\sigma_i)].$$

On peut toujours, parmi les intervalles formant les $E_i(\sigma_i)$, en choisir un nombre fini de manière que la contribution de ces intervalles A dans V soit aussi grande que l'on veut si V est divergente, et aussi près que l'on veut de la valeur de V si cette série est convergente. Supprimons assez de ces intervalles A, sans changer l'ensemble somme de ces intervalles, pour qu'aucun des intervalles conservés ne soit à l'intérieur d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles supprimés est moindre que D.

Considérons deux intervalles empiétant l'un sur l'autre (a_i, b_i), (a_j, b_j) relatifs à e'_i et e'_j Supposons que l'on ait

$$a_i < a_j < b_i < b_j.$$

Entre a_j et b_i il ne peut y avoir à la fois des points de e'_i et de e'_j sans quoi $r(a_j + \varepsilon, b_i - \varepsilon)$ serait à la fois compris entre m_i et m_{i+1} et entre m_j et m_{j+1}. On peut donc trouver entre a_j et b_i un point c tel qu'entre a_i et c se trouve un point de e'_i et entre c et b_j un point de e'_j. Alors on a :

$$|f(c) - f(a_i)| + |f(b_j) - f(c)| = (c - a_i)|r(a_i, c)| + (b_j - c)|r(c, b_j)| .$$

Donc le premier membre, c'est-à-dire la variation de $f(x)$ entre a_i et b_j quand on considère la division

$$a_i \qquad c \qquad b_j,$$

est égal à la contribution dans V des deux intervalles (a_i, b_i), (a_j, b_j) à moins de $(b_i - a_j)|m_j - m_i| + \eta(b_j - a_i)$ près. La quantité $(b_i - a_j)|m_j - m_i|$ est inférieure à la contribution dans D de l'intervalle (a_j, b_i).

En continuant ainsi, on est conduit à considérer une suite de valeurs croissantes $x_0 x_1 x_2 \ldots$ en nombre fini. La somme $\Sigma |f(x_i) - f(x_{i+1})|$ diffère de la contribution des intervalles A dans V de moins de $D + \eta m(A)$. Or cette somme est inférieure à la variation totale de $f(x)$. Donc la limite de V c'est-à-dire $\int |f'| dx$ est inférieure ou au plus égale à la variation totale de $f(x)$. C'est-à-dire que si $f(x)$ est à variation bornée $\int |f'| dx$ existe et est inférieure à la variation de $f(x)$.

31. Supposons que l'intégrale $\int |f'| dx$ existe.

Enfermons les points de e_i dans une infinité dénombrable d'intervalles A_i, on peut choisir $m(A_i)$ aussi petite que l'on veut. A chaque point x_0 de e_i faisons correspondre le plus grand intervalle (α, β) de longueur inférieure à σ'_i, ayant x_0 pour milieu, tout entier à l'intérieur de A_i et tel que

$$\alpha < a \leq x_0 \leq b < \beta$$

entraine

$$m_i - \varepsilon_i < r(a, b) < m_i + \varepsilon_i.$$

Soit $e_i(\sigma'_i)$ la somme de ces intervalles. A condition de choisir convenablement les σ'_i et ε_i, la somme D' sera aussi petite qu'on le voudra,

$$D' = \sum_{-\infty}^{+\infty} |m_i| \cdot m\,[e_i(\sigma'_i)].$$

Chaque $E_i(\sigma_i)$ ou $e_i(\sigma'_i)$ est somme d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Si $f(x)$ est définie dans (a, b), chaque point *intérieur* à (a, b) est *intérieur* à l'un au moins de ces intervalles et de plus a et b sont des extrémités de tels intervalles, donc, d'après un théorème sur les ensembles, on peut choisir parmi les intervalles qui forment les $E_i(\sigma_i)$ et les $e_i(\sigma'_i)$ un nombre fini d'intervalles B tel que tout point intérieur à (a, b) soit intérieur à l'un des B.

Nous supposerons ce choix fait de façon qu'aucun intervalle conservé ne soit intérieur à d'autres intervalles conservés. La contribution dans V des intervalles des $E_i(\sigma_i)$ non employés est au plus égale à $D + D_1$, D_1 étant l'intégrale de $|f'|$ dans l'ensemble des $e_i(\sigma'_i)$.

En raisonnant sur les B comme sur les A, on est conduit à considérer des nombres

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b.$$

La somme $\Sigma\ f(x_i) - f(x_{i-1})|$ est égale à la contribution dans V des intervalles conservés provenant des $E_i(\sigma_i)$, à moins de $D + D' + \eta\,(b - a)$ près.

Or deux nombres x_i consécutifs proviennent d'un même intervalle appartenant à l'un des $E_i(\sigma_i)$ ou des $e_i(\sigma'_i)$, lequel peut être décomposé en intervalles de longueurs au plus égales à $2\,\sigma_i$ ou $2\,\sigma'_i$, la somme des variations correspondantes à une telle division diffère toujours de V de moins de $2\,D + D_1 + D' + \eta\,(b - a)$. Or par l'introduction de ces nouveaux points de division, en prenant le maximum σ des σ_i et σ'_i assez petit, on rend la somme $\Sigma\,|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ aussi voisine que l'on veut de la variation totale de $f(x)$ dans (a, b).

De là résulte que si $\int f'(x)\,dx$ existe, la fonction $f(x)$ est à variation bornée, cette variation étant égale à la valeur de l'intégrale $\int |f'|\,dx$.

32. Nous avons ainsi trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $|f'|$ existe, et nous connaissons sa signification.

Mais le raisonnement précédent fournit d'autres résultats. Reprenons en effet ce raisonnement et portons notre attention sur les ensembles e_i, E'_i, $E_i(\sigma)$, E_i, etc. à indices positifs.

Nous voyons que la variation positive totale de $f(x)$ entre a et x est égale à l'intégrale de $f'(x)$ étendue à l'ensemble des points pour lesquels f' est positive, c'est-à-dire à l'intégrale

$$p(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' + \;f'\;)\,dx.$$

De même pour la variation négative on a:

$$-n(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f' - |f'|)\,dx.$$

Et comme l'on a:

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx.$$

Ainsi une fonction $f(x)$ étant donnée nous savons reconnaître si elle est la dérivée d'une fonction à variation bornée et, s'il en est ainsi, nous savons trouver ses fonctions primitives.

Si $f(x)$ est bornée, ses fonctions primitives s'il en existe sont à variation bornée, nous pouvons les trouver.

Mais l'intégration, telle que nous l'avons définie, ne nous permet pas de savoir si une fonction donnée a des fonctions primitives à variation non bornée (*).

33. La fonction $f(x)$ donnée par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue et à variation non bornée.

(*) Ce dernier résultat était évident puisque (Note du § 26) toute intégrale indéfinie est à variation bornée.

La démonstration qui précède montre que, pour obtenir une fonction $f(x)$ à variation non bornée connaissant sa dérivée, par une méthode analogue à celle que nous avons employée quand f est à variation bornée, il faudrait mettre un certain ordre dans les termes des séries telles que $\Sigma\, m_i\, m\,[E_i\,(\sigma_i)]$, $\Sigma\, m_i\, m\,(e_i')$.

La généralisation de la notion d'intégrale indéfinie donnée dans le paragraphe suivant, permet dans quelques cas d'obtenir ce résultat; aussi elle donnera des fonctions primitives à variation non bornée.

En effet

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right)=0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}}\right)=(-1)^k\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

donc la somme des variations est $\Sigma\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$, série divergente.

Cette fonction admet une dérivée $f'(x)$,

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, \qquad \text{pour } x \neq 0$$

et

$$f'(0)=0$$

$f'(x)$ nous fournit un exemple de fonction non bornée, sommable, n'ayant pas d'intégrale. $f'(x)$ étant donnée, les méthodes précédentes ne permettent pas de trouver $f(x)$.

Il est intéressant de remarquer que la définition classique de l'intégrale d'une fonction devenant infinie dans le voisinage d'un point, permet de trouver $f(x)$ connaissant $f'(x)$. C'est que, dans le cas où la fonction à intégrer n'est pas bornée, la définition que nous avons adoptée n'est pas une généralisation de la définition classique, elle est autre que cette définition, mais concorde avec elle lorsque toutes deux s'appliquent. Il serait d'ailleurs très facile de généraliser la notion d'intégrale définie de façon que la définition classique et celle que nous avons adoptée deviennent des cas particuliers d'une définition plus générale. Pour simplifier les énoncés qui suivront, nous conserverons cependant au mot *intégrale définie* le sens précédemment adopté, mais nous étendrons le sens du mot *intégrale indéfinie*.

Nous avons vu que toute intégrale indéfinie était continue. Si maintenant nous considérons cette propriété comme l'une des parties de la définition des intégrales indéfinies, nous sommes conduits à dire que :

Une fonction $f(x)$ définie dans (α, β) a dans cet intervalle une intégrale indéfinie $F(x)$, s'il existe une fonction continue $F(x)$, et une seule à une constante additive près, telle que l'on ait :

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

pour tous les systèmes de nombres a et b choisis, entre α et β, de manière que le second membre ait un sens (*).

34. L'intégrale indéfinie d'une fonction dérivée est toujours une de ses fonctions primitives puisqu'une fonction primitive est continue et, d'après ce que nous avons dit, vérifie bien l'égalité

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

toutes les fois que le second membre a un sens.

Nous saurons ainsi trouver la fonction primitive de la fonction $f'(x)$ du paragraphe 30.

Mais il est facile de former des fonctions dérivées n'ayant pas d'intégrales indéfinies.

Soit $\varphi(x)$ une fonction dérivable définie entre 0 et 1 s'annulant pour 0 et 1 ainsi que sa dérivée, ayant une variation bornée dans tout intervalle *intérieur* à (0, 1), ayant une variation non bornée dans tout intervalle dont une des extrémités est 0 ou 1.

On sait trouver $\varphi(x)$ quand on connaît $\varphi'(x)$, car $\varphi(x)$ est celle des intégrales indéfinies de $\varphi'(x)$ qui s'annule pour $x = 0$.

Considérons un ensemble E fermé non dense dans toute partie de (0, 1) et de mesure non nulle; par exemple, celui que l'on obtient en retranchant de (0, 1) une suite indéfinie d'intervalles dont les milieux sont les points d'abscisses rationnelles et dont la somme des longueurs est inférieure à 1.

Définissons une fonction $f(x)$ continue, par la condition d'être égale à $(b-a)^2 \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ dans tout intervalle (a, b) contigu à l'ensemble E. $f(x)$ est alors nulle en tous les points de E. Cette fonction est dérivable, sa dérivée est nulle pour les points de E, égale à $(b-a)\varphi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ pour les points d'un intervalle (a, b) contigu à E.

Cette dérivée $f'(x)$ n'admet pas d'intégrale indéfinie. En effet si elle en admettait, ses intégrales indéfinies seraient $f(x) + c^{te}$. Mais soit $\psi(x)$ la fonction qui représente la mesure de l'ensemble de ceux des points de E qui

---

(*) Comparer cette définition avec celle que donne M.r Jordan de l'intégrale définie d'une fonction non bornée. *Cours d'Analyse,* 2.e Edition, Tome II, p. 46 à 91.

sont dans l'intervalle $(0, x)$; $\psi(x)$ est une fonction continue, constante dans tout intervalle contigu à E, donc $f(x)+\psi(x)$ satisfait à l'égalité

$$\Big[f(x)+\psi(x)\Big]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$

pour tous les systèmes α, β pour lesquels le second membre a un sens.

Les définitions que nous avons données ne suffisent donc pas pour qu'il soit possible de parler d'intégrales indéfinies de $f'(x)$.

Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est pas complètement résolu (*).

35. Soit $f(x)$ une fonction continue; on peut donner à h une suite de valeurs tendant vers zéro telles que

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ait une limite. L'ensemble des nombres ainsi définis, correspondant aux valeurs positives de h, admet une limite supérieure Λ_d et une limite inférieure λ_d qui sont les extrêmes oscillatoires à droite de la fonction $f(x)$, pour le point x_0. De même on définit Λ_g, λ_g. Ces quatre nombres sont les nombres dérivés; dans certains problèmes ils rendent les mêmes services que la dérivée (**).

Le problème suivant: *Trouver une fonction connaissant l'un de ses nombres dérivés* (***), est donc une généralisation du problème que nous venons de traiter.

Quelques cas particuliers de ce problème se résolvent à l'aide de l'intégration au sens de Riemann (Dini, loc. cit.). L'intégration, telle que nous

---

(*) On peut dire que nous savons résoudre ce problème lorsque l'intervalle de variation de x peut être considéré comme somme d'un ensemble non dense E et de l'ensemble des intervalles (α, β) contigus à E, l'ensemble E étant réductible et la fonction proposée ayant une intégrale indéfinie $F(x)$ dans chaque intervalle (α, β).

Même si E n'est pas réductible le problème peut être résolu, à condition que la fonction soit intégrable dans E et que la série des quantités $[F(\beta)-F(\alpha)]$ soit absolument convergente. Il en est ainsi dans l'exemple précédent, mais ce n'est pas le cas général.

(**) Voir Dini: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

(***) Ce problème a un sens; c'est-à-dire que toutes les fonctions qui ont un même nombre dérivé donné ne diffèrent que par une constante (Volterra. *Sui principii del Calcolo Integrale.* Giornale de Battaglini, XIX).

l'avons définie, permettrait de le résoudre dans des cas plus étendus. Nous nous bornerons aux indications qui suivent.

Tout d'abord, si l'un des quatre nombres dérivés est toujours fini, Λ_d par exemple, c'est une fonction sommable. En effet cherchons l'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles Λ_d est supérieur à un nombre donné M. Donnons à h toutes les valeurs positives rationnelles inférieures à ε_1; à chacune d'elles correspond une fonction $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x, h)$. A $\varphi(x, h)$ correspond un ensemble mesurable $E(h)$ formé de tous les points pour lesquels on a:

$$\varphi(x, h) > M.$$

Soit $E(\varepsilon_1)$ l'ensemble somme de tous les $E(h)$; il est mesurable.

A ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ correspondent $E(\varepsilon_2)$, $E(\varepsilon_3) \ldots$

Si les ε tendent vers zéro, l'ensemble commun à tous les $E(\varepsilon_i)$ qui est mesurable contient l'ensemble cherché, plus des points pour lesquels on a: $\Lambda_d = M$. Cela suffit pour qu'on en conclue que la fonction Λ_d est sommable.

Supposons maintenant que l'un des quatre nombres dérivés soit borné, auquel cas tous les autres le sont. (*). Λ_d aura alors une intégrale.

Considérons une suite de nombres positifs décroissant jusqu'à zéro h_1, $h_2 \ldots$ et les fonctions

$$\varphi(x, h_i) = \frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}.$$

A chaque valeur de x correspond une valeur n telle que, pour $i \geqq n$, on a:

$$\varphi(x, h_i) < \Lambda_d(x) + \varepsilon.$$

Soit E_k l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $n \leqq k$. Le complémentaire $C(E_k)$ pris par rapport à l'intervalle considéré a une mesure qui tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$, et pour les points de cet ensemble on a:

$$\left|\varphi(x, h_k) - \Lambda_d(x)\right| \leqq M$$

(*) Car si Λ_d est toujours compris entre A et B, le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est toujours compris entre A et B. (Voir Dini, *Fondamenti*, etc.).

si M est la limite supérieure de la valeur absolue de Λ_d. Donc (*)

$$\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx < \int_a^b \Lambda_d(x)\, dx + \varepsilon\, m(E_k) + M\, m\Big[C(E_k)\Big].$$

Evaluons le premier membre

$$\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx = \int_a^b \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k} = f(b+\theta\, h_k) - f(a+\theta'\, h_k).$$

Lorsque k augmente indéfiniment cette quantité tend vers $f(b)-f(a)$, on a donc

$$f(b)-f(a) < \int_a^b \Lambda_d(x)\, dx.$$

De même on trouverait

$$\int_a^b \lambda_d(x)\, dx < f(b) - f(a).$$

Donc *si les deux nombres dérivés à droite (ou à gauche) d'une fonction $f(x)$ sont bornés et ont même intégrale, leurs intégrales indéfinies sont égales à $f(x)$ à une constante additive près.*

III. Integrales definies des fonctions de plusieurs variables.

36. Il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats obtenus aux fonctions de plusieurs variables.

Une fonction f sera dite sommable si l'ensemble des points pour lesquels on a:

$$a < f < b$$

est mesurable, quels que soient les nombres a et b.

(*) Pour que $\int_a^b \varphi(x, h_k)\, dx$ ait un sens il faut que $f(x)$ soit définie dans a, $b+h_k$. Il suffit de définir $f(x)$ comme constante et égale à $f(b)$ pour x plus grand que b.

Les fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables sont sommables. La somme, le produit de deux fonctions sommables, la limite d'une suite de fonctions sommables sont des fonctions sommables. Donc les fonctions discontinues que M.r Baire appelle fonctions de première classe, de seconde classe, etc. sont sommables.

Les fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles sont de $n-1^{\text{ème}}$ classe au plus (*), donc elles sont sommables.

Soit f une fonction sommable. Considérons des nombres

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$$

tels que $m_i - m_{i-1}$ ait un maximum η.

$f = m_i$ pour les points d'un ensemble mesurable e_i; $m_i < f < m_{i+1}$ pour les points d'un ensemble mesurable e'_i. Les deux sommes

$$\sigma = \Sigma\, m_i\, m(e_i) + \Sigma\, m_i\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \Sigma\, m_i\, m(e_i) + \Sigma\, m_{i+1}\, m(e'_i)$$

ont en même temps un sens ou n'en ont pas.

Si elles ont un sens, il en est de même quels que soient les m_i choisis et ces deux sommes tendent vers une même limite quand η tend zéro.

Cette limite est l'intégrale de f. σ et Σ ont un sens lorsque f est bornée de sorte que *toute fonction sommable bornée a une intégrale.*

Les définitions qui précèdent s'appliquent, que la fonction soit définie dans un domaine ou pour les points d'un ensemble, lequel devra nécessairement être mesurable pour que la fonction soit sommable.

Soit une fonction f bornée définie dans un ensemble E mesurable. Si f n'est pas sommable il existe une infinité de fonctions sommables bornées φ telles que l'on ait toujours

$$f(x) > \varphi(x).$$

Soit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots$ une série de ces fonctions dont les intégrales tendent vers la limite supérieure des intégrales des fonctions φ. Soit $\psi(x)$ une fonction égale pour chaque valeur de x_0 à la limite supérieure des nombres $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)\ldots$ On démontrera facilement que $\psi(x)$ est sommable. Son intégrale n'est pas inférieure aux intégrales des fonctions $\varphi_i(x)$ et comme $\psi(x)$

(*) Voir Lebesgue. *Sur l'approximation des fonctions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898.)

est une fonction $\varphi(x)$ l'intégrale de $\psi(x)$ est exactement égale à la limite supérieure des intégrales des fonctions $\varphi(x)$.

Donc, étant donnée une fonction bornée f, il existe une fonction sommable ψ non supérieure à f et dont l'intégrale est la limite supérieure des intégrales des fonctions sommables non supérieures à f. *C'est l'intégrale inférieure de f.*

On définirait de même l'intégrale supérieure (*).

37. Nous allons rechercher si l'on peut ramener le calcul d'une intégrale multiple à des calculs d'intégrales simples. En nous bornant au cas de deux variables nous allons essayer de généraliser la formule classique

$$\iint f\,dx\,dy = \int\left(\int f\,dy\right)dx.$$

Le cas le plus simple que nous ayons à examiner correspond à $f = 1$. Nous avons alors à évaluer la mesure superficielle d'un ensemble en fonction des mesures linéaires de ses sections. Les considérations développées aux paragraphes 18 et 19 résolvent un cas particulier de ce problème.

Soit E un ensemble plan mesurable. Nous désignerons par $E(x_0)$ l'ensemble des points de E dont l'abcisse est x_0, c'est-à-dire la section de E par $x = x_0$. $E(x_0)$ n'est pas nécessairement mesurable, s'il existe des ensembles de points sur une droite non mesurables linéairement, puisque tout ensemble borné de points sur une droite est mesurable superficiellement. Mais $E(x_0)$ sera mesurable (B) linéairement si E est mesurable (B) superficiellement. Or on sait que E contient un ensemble mesurable (B) E_1 de mesure $m(E)$, la mesure de $E_1(x_0)$ sera donc au plus égale à la mesure intérieure de $E(x_0)$; c'est-à-dire au plus égale à l'intégrale inférieure, prise sur $x = x_0$, de la fonction φ égale à 1 pour les points de E, nulle pour les autres points. Donc

$$m_l\,[E_1(x_0)] \leq \int_{\text{inf.}} \varphi(x_0, y)\,dy.$$

En se reportant au paragraphe 7 où a été démontrée l'existence de E_1, on voit que E_1 est défini comme formé des points communs à tous les ensembles de la suite $A_1, A_2, \ldots$; l'ensemble A_i étant somme d'une infinité dénombrable de rectangles n'empiétant pas les uns sur les autres et dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. A_i contient $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots$

(*) Toutes ces définitions s'interprètent géométriquement comme pour le cas d'une variable. S'il y a n variables, il faut considérer un espace à $n+1$ dimensions.

Or $m_l\,[A_i\,(x)]$ est la somme des mesures des sections par la droite d'abscisse x des rectangles C_{ij} qui composent A_i. On a donc

$$m_l\,[A_i\,(x)] = \sum_j m_l\,[C_{ij}\,(x)].$$

Dans cette série les restes sont limités supérieurement en valeur absolue, car E_1 étant borné tous les A_i sont situés dans un même domaine borné et par suite l'ensemble (par rapport à i et à x) des nombres $m_l\,[A_i\,(x)]$ est borné. Cette série est donc intégrable terme à terme, § 25.

L'intégrale de $m_l\,[C_{ij}\,(x)]$ est l'aire de C_{ij}, donc

$$m_s\,(A_i) = \int m_l\,[A_i\,(x)]\,d\,x.$$

Or les limites pour i infini des nombres $m_l\,[A_i\,(x)]$, $m_s\,(A_i)$ sont $m_l\,[E_1(x)]$ et $m_s(E_1)$ et comme l'ensemble de ces nombres est borné, on a :

$$\int m_l\,[E_1\,(x)]\,d\,x = \lim_{i=\infty} \int m_l\,[A_i\,(x)]\,d\,x = \lim_{i=\infty} m_s\,(A_i) = m_s\,(E_1)\ (^*).$$

On peut donc en conclure que :

$$m_s\,(E) \leqq \int_{\text{inf.}} m_{l,\text{int.}}\,[E\,(x)]\,d\,x$$

et aussi que

$$m_s\,(E) \leqq \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi\,(x,\,y)\,d\,y\right) d\,x.$$

De la même façon on démontrera que :

$$m_s\,(E) \geqq \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi\,(x,\,y)\,d\,y\right) d\,x.$$

De là on conclut que l'on a :

$$m_s\,(E) = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi\,(x,\,y)\,d\,y\right) d\,x = \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi\,(x,\,y)\,d\,y\right) d\,x\ (^{**}).$$

(*) Ce raisonnement peut être interprété de la façon suivante: $m_s\,[E_1\,(x)]$ est une fonction de seconde classe au plus.

(**) Jusqu'ici les intégrales sont étendues à certains segments des axes $0\,x$ et $0\,y$.

Pour la fonction $f = 1$ définie seulement dans l'ensemble sommable E, dont les sections ne sont peut-être pas toutes mesurables

$$\int\int^{E} f\,d\,x\,d\,y = \int_{\text{inf.int.}}^{e} \left(\int_{\text{inf.int.}}^{E(x)} f\,d\,y\right) d\,x = \int_{\text{sup.ext.}}^{e} \left(\int_{\text{sup.ext.}}^{E(x)} f\,d\,y\right) d\,x$$

l'intégrale par rapport à x étant étendue à l'ensemble e projection de E sur $O\,x$, la seconde à l'ensemble $E\,(x)$. Mais ces deux ensembles ne sont peut être pas mesurables linéairement. Le signe $\int_{\text{inf.int.}}^{A}$ indique la limite supérieure des intégrales inférieures de f étendues aux ensembles mesurables contenus dans A.

L'égalité précédente peut encore s'écrire

$$m_s\,(E) = \int_{\text{inf.int.}}^{e} m_{l,\text{int.}}\,[E\,(x)]\,d\,x = \int_{\text{sup.ext.}}^{e} m_{l,\text{ext.}}\,[E\,(x)]\,d\,x.$$

38. La formule trouvée pour exprimer $\int\int_{E} f\,d\,x\,d\,y$ est générale, elle s'applique à toutes les fonctions sommables bornées.

Désignons par $\varphi\,(x,\ y)$ une fonction égale à f pour les points de E, nulle pour les autres points. Si E est tout entier intérieur au rectangle $O\,A\,C\,B$ dont les côtés $O\,A$ et $O\,B$ sont portés par $o\,x$ et $o\,y$, la formule à démontrer est équivalente à la suivante

$$\int\int_{OACB} \varphi\,(x,\ y)\,d\,x\,d\,y = \int_{O,\text{inf.}}^{A} \left(\int_{O,\text{inf.}}^{B} \varphi\,(x,\ y)\,d\,y\right) d\,x = \int_{O,\text{sup.}}^{A} \left(\int_{O,\text{sup.}}^{B} \varphi\,(x,\ y)\,d\,y\right) d\,x.$$

C'est cette formule que nous allons démontrer.

Soient $m_0,\ m_1 \ldots m_n$ les divisions de l'intervalle de variation de $\varphi\,(x,\ y)$. Désignons par $\varphi_p\,(x,\ y)$ la fonction égale à φ pour les points de e_p (notations du § 19), nulle pour les autres points, et par $\varphi'_p\,(x,\ y)$ la fonction égale à φ pour les points de e'_p, nulle pour les autres points.

On a:

$$\int\int \varphi\,(x,\ y)\,d\,x\,d\,y = \sum_p \int\int \varphi_p\,(x,\ y)\,d\,x\,d\,y + \sum_p \int\int \varphi'_p\,(x,\ y)\,d\,x\,d\,y$$

$\int\int \varphi_p(x, y)\,dx\,dy$ est égale à $m_p \,.\, m(e_p)$ et, d'après le paragraphe précédent, on a:

$$\int\int \varphi_p(x, y)\,dx\,dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x, y)\,dy\right) dx,$$

$\int\int \varphi'_p(x, y)\,dx\,dy$ est comprise entre $m_p\, m(e'_p)$ et $m_{p+1}\, m(e'_p)$; d'ailleurs si l'on remplace φ'_p par une fonction ψ, égale à m_p ou m_{p+1} en tous les points où φ_p est différente de zéro, nulle quand φ'_p est nulle, on modifie l'intégrale de moins de $(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$. De plus les deux expressions

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf,}} \psi\,dy\right) dx \qquad \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf,}} \varphi'\,dy\right) dx$$

diffèrent aussi de moins de $(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$. Donc, à moins de $2(m_{p+1} - m_p)\, m(e'_p)$ près, on a:

$$\int\int \varphi'_p(x, y)\,dx\,dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\,dy\right) dx.$$

Soit η le maximum de $m_{p+1} - m_p$; à moins de $2\eta\, m(O\,A\,C\,B)$ près on aura

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy = \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\,dy\right) dx + \sum_p \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\,dy\right) dx.$$

Or on a:

$$\int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\,dy\right) dx \leq \sum_p \left\{ \int_{\text{inf,}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi_p(x, y)\,dy\right) dx + \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi'_p(x, y)\,dy\right) dx \right\}.$$

On a donc, quel que soit η

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy \leq \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\,dy\right) dx + 2\eta\,.\,m(O\,A\,B\,C).$$

De cette inégalité et de l'inégalité analogue relative aux intégrales supérieures, résulte la formule annoncée.

39. Si la fonction donnée est telle que tous les ensembles e'_p soient mesurables (B), auquel cas on pourra dire que la fonction est sommable (B), la formule se simplifie et devient

$$\int\int_{OACB} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_0^A \left(\int_0^B \varphi(x, y)\, dy\right) dx.$$

C'est la formule classique. On sait que cette formule doit être remplacée par une formule plus compliquée, analogue à celle que nous avons obtenue, quand on s'occupe de l'intégration, au sens de Riemann, appliquée dans toute sa généralité (*).

Parmi les fonctions sommables (B) on peut citer les fonctions continues, les limites de fonctions continues ou fonctions de première classe, les limites des fonctions de première classe ou fonctions de seconde classe, et d'une manière générale toutes les fonctions de classe n, n étant fini.

En particulier la formule classique simple est applicable aux fonctions de n variables continues par rapport à chacune d'elles.

Cette formule est aussi applicable aux fonctions f''_{xy}, f''_{yx} (**) si elles existent et sont bornées.

Donc on a:

$$f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0) = \int_0^x \left(\int_0^y f''_{xy}\, dy\right) dx = \int\int f''_{xy}\, dx\, dy.$$

Cette formule résout le problème qui, dans le cas de deux variables, est l'analogue de celui concernant la recherche des fonctions primitives.

40. On peut étendre quelques-uns des résultats précédents aux fonctions non bornées.

Une fonction non sommable non bornée peut avoir une intégrale inférieure et une intégrale supérieure. Sans qu'il soit nécessaire de reprendre les raisonnements précédents on voit que l'on a:

$$\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\text{inf.}} \left(\int_{\text{inf.}} \varphi(x, y)\, dy\right) dx = \int_{\text{sup.}} \left(\int_{\text{sup.}} \varphi(x, y)\, dy\right) dx$$

(*) Voir Jordan (loc. cit.) §§ 56, 57, 58.

(**) Car elles sont de seconde classe au plus.

toutes les fois que les intégrales qui interviennent dans cette formule ont un sens. Il en est de même pour la formule classique

$$\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy = \int\left(\int \varphi(x, y)\,dy\right)dx.$$

Les raisonnements employés dans ce chapitre ont conduit à une généralisation de la notion d'intégrale définie.

Pour qu'une telle généralisation puisse servir il faut qu'elle satisfasse à certaines conditions que l'on aperçoit facilement et qu'on peut imposer a priori.

Voici quelques unes de ces conditions. Il faut que l'on ait :

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c, \qquad \int f + \varphi = \int f + \int \varphi.$$

Il faut que la définition adoptée contienne comme cas particulier celle de Riemann.

Il faut qu'il n'y ait pas de différences notables entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables.

Enfin, si l'on veut que l'intégration permette de résoudre le problème fondamental du calcul intégral : trouver une fonction connaissant sa dérivée, il faut que l'intégrale définie d'une fonction dérivée, considérée comme fonction de sa limite supérieure, soit une fonction primitive de f.

La définition que j'ai adoptée, au moins pour le cas où la fonction à intégrer est bornée, remplit bien toutes ces conditions. Mais ces conditions ne suffisent pas pour définir l'intégrale d'une fonction bornée, (sauf dans le cas où la fonction est une somme algébrique de fonctions intégrables au sens de Riemann et de fonctions dérivées,) de sorte que les méthodes du premier chapitre (*) n'ont pu être employées.

(*) Ces méthodes sont analogues à celles de M.r Drach. (Essai sur une théorie générale de l'Intégration — Introduction à l'Etude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure.)

Voir à ce sujet la note 1, page 48 de l'ouvrage de M.r Borel.

Voir aussi Hadamard, *Géométrie Elémentaire*, 1ère Partie. Note *D*.

Ne pouvant démontrer que la définition proposée était la seule remplissant les conditions imposées, j'ai essayé de montrer qu'elle était naturelle et qu'au point de vue géométrique elle apparaissait presque comme nécessaire.

J'ai essayé de plus de montrer qu'elle était utile : elle permet en effet de résoudre le problème fondamental du calcul différentiel dans tous les cas où la fonction dérivée est bornée, et, comme conséquence, elle permet d'intégrer des équations différentielles qui se ramènent à des quadratures. Par exemple, $f(x)$ étant une fonction bornée quelconque, nous saurons reconnaître si l'équation :

$$y' + a\,y = f(x)$$

admet des solutions et, si elle en admet, les trouver (*).

Dans les chapitres suivants, où il est question des notions de longueur et d'aire, on trouvera des applications géométriques de l'intégration.

CHAPITRE III.

Longueur des courbes.

41. Nous nous proposons dans ce chapitre de définir la *longueur d'une courbe plane ou gauche* (**).

Ces mots — longueur d'une courbe — sont d'un emploi constant dans le langage usuel. On sait par exemple mesurer la longueur d'une route, d'une rampe d'escalier. Supposons que l'on effectue cette mesure à l'aide d'une règle rigide; le procédé employé montre que l'on appelle ordinairement longueur d'une courbe, ou plus exactement valeur approchée de cette longueur, la

---

(*) Cette remarque conduit à des problèmes intéressants. Par exemple, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant bornées, toutes les solutions de l'équation

$$y' + f(x)\,y = \varphi(x)$$

sont-elles comprises dans la formule classique $y = \int \varphi(x)\, e^{\int f(x)dx}\, dx \,.\, e^{-\int f(x)dx}$?

(**) Une courbe gauche se définit comme une courbe plane à l'aide de trois équations au lieu de deux.

longueur, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés de lignes polygonales qui se confondent avec la courbe au degré de précision que l'on peut atteindre.

Lorsque l'on raisonne sur la longueur d'une courbe comme sur un nombre déterminé, on fait l'hypothèse que, par des mesures convenables, on obtient des valeurs approchées ayant une limite que l'on appelle la longueur de la courbe considérée.

La longueur d'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

est ainsi définie comme limite des longueurs de lignes polygonales tendant uniformément vers la courbe, c'est-à-dire que les coordonnées de la $p^{ième}$ de ces lignes C_p s'expriment par

$$x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

f_p, φ_p, ψ_p tendant uniformément vers f, φ, ψ.

Nous dirons que C est la limite des C_p.

Si, quelle que soit la suite de lignes polygonales tendant vers une courbe C, la suite correspondante des longueurs avait une limite, qui serait par conséquent indépendante des lignes polygonales choisies, ce qui précède suffirait à définir la longueur de la courbe C. Mais il n'en est pas ainsi et l'on peut choisir les lignes polygonales de façon que leurs longueurs augmentent indéfiniment.

Donner une définition de la longueur d'une courbe, c'est donc dire quelle suite de lignes polygonales on choisit.

D'après M.r Peano (*), les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

La longueur d'un arc de courbe plane convexe est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites et de la limite inférieure des circonscrites.

Archimède démontre d'ailleurs l'identité des limites dans les cas qu'il étudie.

La définition ordinairement adoptée est la suivante:

(*) *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Rendiconti 1900, 1.° Semestre.

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans la courbe quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment de façon que la longueur maximum des côtés de cette ligne tende vers zéro (*).

M.r PEANO adopte la première partie de la définition d'Archimède: la longueur d'une courbe est la limite supérieure des lignes polygonales inscrites.

L'identité de ces définitions se démontre facilement, elle résulte d'ailleurs des résultats que nous allons obtenir.

42. Si l'on veut qu'il y ait quelque analogie entre le sens vulgaire et le sens mathématique du mot longueur, il ne faut essayer de définir la longueur d'une courbe C, que s'il existe une suite de lignes polygonales ayant C pour limite et telle que la suite correspondante de longueurs n'augmente pas indéfiniment. Nous appellerons ces courbes, *courbes rectifiables.*

Pour définir la longueur de ces courbes, rappelons d'abord quelques définitions.

Soit un ensemble de suites de nombres. Les valeurs qui forment l'une de ces suites forment un ensemble E, l'ensemble dérivé de E est l'ensemble de toutes les limites de la suite considérée. L'ensemble des ensembles E' ainsi définis est l'ensemble des limites des suites de l'ensemble considéré; la limite supérieure de cet ensemble est ce que l'on appelle depuis CAUCHY la plus grande des limites. On définit de même la plus petite des limites.

Ces deux nombres, que l'on appelle aussi quelquefois limites supérieure et inférieure d'indétermination, peuvent être infinis.

Soit une courbe C, considérons l'ensemble des suites formées des longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C.

La plus grande des limites de l'ensemble est infinie. Il en est de même de la plus petite si C n'est pas rectifiable. Au contraire si C est rectifiable la plus petite des limites est finie.

Nous appellerons longueur d'une courbe C, la plus petite des limites vers lesquelles tendent les longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C.

Une courbe rectifiable a une longueur finie.

(*) Les conséquences de cette définition ont été particulièrement étudiées par LUDWIG SCHEEFFER (*Acta Mathematica*, tome V) et par M.r JORDAN dans la seconde édition de son cours d'Analyse. Voir aussi STUDY. *Mathematische Annalen*, XLV.

Une courbe non rectifiable n'a pas de longueur, où si l'on veut a une longueur infinie.

43. Soit une courbe C d'extrémités A et B. Toute ligne polygonale dont les extrémités tendent vers A et B a une longueur qui ne peut tendre vers un nombre inférieur à la longueur de AB. C'est-à-dire que la longueur d'un arc de courbe n'est pas inférieure à la longueur de la corde.

Marquons sur l'arc AB entre A et B un point D. L'arc AB est dit la somme des arcs AD et DB et la longueur de l'arc AB est évidemment la somme des longueurs des arcs AD et DB. Donc la longueur de l'arc AB n'est pas inférieure à $AD + DB$.

En raisonnant ainsi on voit que la longueur de l'arc est supérieure ou au moins égale à celle d'une ligne polygonale quelconque inscrite (*).

Considérons une suite de lignes polygonales inscrites, telles que le maximum de la longueur des côtés tende vers zéro. Ces lignes tendant uniformément vers la courbe, la plus petite limite de la suite correspondante des longueurs n'est pas inférieure à la longueur de la courbe C. Mais d'après ce que nous venons de voir tous les nombres de cette suite sont au plus égaux à la longueur de C; la plus grande limite est au plus égale à cette longueur.

Donc la suite des longueurs considérées a pour limite la longueur de C et il y a identité entre la définition que nous avons adoptée et la définition classique, celle de Scheeffer et de M.r Jordan.

Nous avons en même temps démontré l'identité de cette définition et de celle de M.r Peano.

En adoptant la définition qui a été donnée, on obtient une analogie complète entre les définitions des longueurs et des aires. L'identité de cette définition et de la définition classique nous permet de trouver la longueur par une infinité dénombrable d'opérations.

44. Nous disons qu'une courbe C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t) \tag{1}$$

est la limite d'une famille de courbes C_p

$$C_p \qquad x = f_p(t), \qquad y = \varphi_p(t), \qquad z = \psi_p(t),$$

si f_p, φ_p, ψ_p tendent uniformément vers f, φ, ψ.

(*) On suppose bien entendu que, dans l'ordre où ils se présentent sur la ligne polygonale, les sommets de cette ligne correspondent à des valeurs croissantes de t.

De ce qui précède résulte que la longueur de C est au plus égale à la plus petite limite des longueurs des C_p, et qu'il existe des familles de courbes C_p telles que la longueur de C soit la limite des longueurs des C_p. C'est ce que nous exprimerons en disant que la longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des courbes dont C est la limite (*). On peut donc poser ainsi le problème de la mesure des longueurs des courbes.

Attacher à chaque courbe un nombre positif fini ou infini que l'on appellera sa longueur et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° *Il existe des courbes ayant une longueur finie.*

2.° *Deux courbes égales* (**) *ont même longueur.*

3.° *Une courbe somme de deux autres* (***) *a pour longueur la somme des longueurs de ces deux autres.*

4.° *La longueur d'une courbe C est la plus petite limite des longueurs des lignes polygonales dont C est la limite.*

45. Soit C une courbe rectifiable, la longueur $(0, t)$ de l'arc $s(t)$ est une fonction croissante de t. Donc les quantités $s(\theta - 0)$, $s(\theta + 0)$ existent. Considérons la courbe $C(\varepsilon)$ formée de l'arc $(0, \theta - \varepsilon)$ de la droite $\theta - \varepsilon$, $\theta + \varepsilon$ et de l'arc $(\theta + \varepsilon, \theta + h)$. Quand ε tend vers zéro $C(\varepsilon)$ tend vers C. Or la longueur de $C(\varepsilon)$ est

$$s(\theta - \varepsilon) + [s(\theta + h) - s(\theta + \varepsilon)] + \operatorname{long}[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on déduit :

$$s(\theta + h) \leqq s(\theta - 0) + [s(\theta + h) - s(\theta + 0)]$$

d'où il résulte $s(\theta + 0) = s(\theta - 0)$ et $s(t)$ est une fonction continue de t.

Il existe des courbes dont aucun arc n'est rectifiable. Il en est ainsi,

—

(*) Si l'on considère la longueur comme fonction de la courbe, on peut dire que la fonction est partout égale à son minimum ou encore semi-continue inférieurement (Baire, loc. cit.).

(**) Deux courbes sont égales si l'on passe des formules qui définissent la première à celles qui définissent la seconde par les formules du changement de coordonnées.

(***) Si les deux courbes composantes sont données par $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, $a \leqq t \leqq b$ et $x = f_1(t)$, $y = \varphi_1(t)$, $z = \psi_1(t)$, $a_1 \leqq t \leqq b_1$, avec $f(b) = f(a_1)$, $\varphi(b) = \varphi(a_1)$, $\psi(b) = \psi(a_1)$. La courbe somme est définie par $x = F(t)$, $y = \Phi(t)$, $z = \Psi(t)$ avec $F = f$, $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$, si $a \leqq t \leqq b$ et $F(t + b - a_1) = f_1(t)$, $\Phi(t + b - a_1) = \varphi_1(t)$, $\Psi(t + b - a_1) = \psi_1(t)$ si $b \leqq t \leqq b + b_1 - a_1$.

pour certaines valeurs de a et de b, de la courbe

$$x = \sum_0^\infty l^n \cos a^n \pi t, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \text{ (*)}.$$

Soit une courbe Γ somme d'une courbe rectifiable C et d'une courbe C_1 dont aucun arc n'est rectifiable. Si C correspond à l'intervalle $(0, \theta)$, $s(t)$ est une fonction continue croissante entre 0 et θ, puis pour t supérieur à θ cette fonction devient infinie.

46. Nous appellerons projection de la courbe (1) sur l'axe des x la courbe

$$x = f(t), \qquad y = 0, \qquad z = 0\,;$$

et sur le plan des $x\,y$ la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = 0.$$

A un polygone inscrit dans la courbe (1) correspond un polygone inscrit dans la courbe projection.

Chaque côté d'un polygone projection est au plus égal au côté projeté, donc *les projections d'une courbe rectifiable sont rectifiables.*

D'ailleurs un côté projeté a une longueur au plus égale à la somme des longueurs des trois côtés projections sur les trois axes de coordonnées, donc *si une courbe a des projections rectifiables sur les trois axes de coordonnées elle est rectifiable.*

47. Cherchons la forme la plus générale de la fonction $f(t)$ pour que la courbe $x = f(t)$ portée par l'axe des x soit rectifiable.

Considérons un polygone inscrit dans cette courbe, ses sommets correspondent aux valeurs croissantes $a = t_0,\ t_1 \dots t_n = b$ de t. La longueur de ce polygone est $\Sigma\,|\,f(t_i) - f(t_{i-1})\,|$, cette quantité s'appelle encore la variation de f pour le système de valeurs $t_0,\ t_1 \dots t_n$.

Cette somme se décompose en deux autres Σ_1, Σ_2. La première correspondant aux termes $f(t_i) - f(t_{i-1})$ qui sont positifs, la seconde aux termes négatifs. On les appelle *variation positive* et *variation négative* de f pour le système $t_0,\ t_1 \dots t_n$.

Supposons que a et b restant fixes, le nombre des t_i augmente indéfiniment de manière que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro. Dès que ce

(*) Voir JORDAN, (loc. cit.), page 318.

maximum est inférieur à un certain nombre η, $\Sigma_1 + \Sigma_2$ diffère de la longueur de l'arc de a à b de moins de ε, si cette longueur est finie, et est plus grande que M, si la longueur de l'arc de a à b est infinie; sans quoi il serait possible de trouver une suite de polygones inscrits tendant vers la courbe et dont les longueurs ne tendraient pas vers celle de la courbe (*). Donc $\Sigma_1 + \Sigma_2$ a pour limite la longueur de l'arc (a, b); cette quantité $s = v$ s'appelle la variation totale de f entre a et b. Si cette variation est finie, la fonction f est dite à variation bornée entre a et b. Si la variation est infinie la fonction est à variation non bornée.

$\Sigma_1 - \Sigma_2$ est toujours égale à $f(b) - f(a)$, donc a pour limite $f(b) - f(a)$.

De là il résulte que Σ_1 et Σ_2 ont des limites parfaitement déterminées p et n que l'on appelle la variation positive et la variation négative de f entre a et b; et l'on a:

$$p + n = v$$

$$p - n = f(b) - f(a).$$

Nous avons vu que si a est fixe, v est une fonction continue de b pour les fonctions à variation bornée. De ces formules il résulte que p et n qui sont des fonctions croissantes, ou du moins jamais décroissantes, sont des fonctions continues. La formule

$$f(b) = f(a) + p - n$$

montre que toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions continues non décroissantes.

Pour une fonction continue croissante n est nulle, donc une fonction croissante est à variation bornée. D'ailleurs si

$$f = \varphi - \psi,$$

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})|$$

donc la différence de deux fonctions à variation bornée est une fonction à variation bornée.

Il y a donc identité entre les fonctions à variation bornée et les différences de fonctions continues non décroissantes (**).

(*) En d'autres termes si des polygones inscrits T tendent vers C la longueur de T tend uniformément vers celle de C.

(**) On peut dans cet énoncé supprimer le mot *continues*, (voir à ce sujet Jordan, loc. cit.).

Si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

sont les équations d'une courbe rectifiable, f, φ, ψ sont des différences de deux fonctions continues non décroissantes et inversement.

48. Voici des exemples de fonctions à variation bornée.

Soit dans l'intervalle (0, 1) un ensemble dénombrable de couples de points a_i, b_i ($a_i < b_i$), tels qu'entre a_i et b_i ne se trouve aucun point a ou b d'indice inférieur à i.

Désignons par $f_0(x)$ la fonction x, et par $f_p(x)$ la fonction continue qui admet $a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p$ pour maxima ou minima, qui entre deux de ces points est de la forme $\pm x + h$ et qui est égale à $f_0(x)$ entre 0 et le premier des points d'indice au plus égal à p.

On voit immédiatement que le maximum de $|f_p(x) - f_{p-1}(x)|$ s'obtient pour $x = b_p$ et est égal à $2\,|f_{p-1}(a_p) - f_{p-1}(b_p)| = 2\,\varepsilon_p$, si ε_p désigne la longueur $a_p b_p$.

Donc si la série $\Sigma\,\varepsilon_p$ est convergente $f_p(x)$ tend uniformément vers une limite $f(x)$; et comme $f_p(x)$ a entre 0 et x une variation totale égale à x, celle de $f(x)$ est au plus x.

Pour les points d'indice au plus égal à p on a:

$$|f(x) - f_p(x)| \leq 2 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}\,.$$

La variation de $f(x)$ pour le système $a_1, \ldots a_p, b_1, \ldots b_p$ est donc supérieure à

$$x - 4\,p\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$$

donc si $p\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, $f(x)$ a x pour variation totale entre 0 et x.

Soit un intervalle (α, β), si, les conditions précédentes étant remplies, l'ensemble des a_p est partout dense on peut trouver dans (α, β) un intervalle (a_p, b_p). Supposons qu'entre a_p et b_p $f_p(x)$ soit de la forme $x + h_1$, on a:

$$f(b_p) - f(a_p) = f_p(b_p) - f_p(a_p) + [f(b_p) - f_p(b_p)] +$$
$$+ [f_p(a_p) - f(a_p)] \geq \varepsilon_p - 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_{p+h}\,;$$

donc si, au moins à partir d'une certaine valeur de p, on a:

$$\varepsilon_p > 4\,\Sigma\,\varepsilon_{p+h}$$

$f(x)$ n'est pas toujours décroissante de a_p à b_p et a fortiori de α à β. Mais de même on prouverait qu'elle n'est pas croissante, donc *dans tout intervalle* $f(x)$ *admet des maxima et des minima.*

Pour réaliser toutes ces conditions prenons pour l'ensemble des milieux des (a_i, b_i) l'ensemble des nombres rationnels rangés dans un ordre quelconque. Prenons pour ε_1 un nombre irrationnel quelconque, tel que a_1 et b_1 soient compris entre 0 et 1. Prenons pour ε_i le plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_{i-1}}{1}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{2}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{3}\ldots$ tels que a_i et b_i soient compris entre 0 et 1 et qu'entre a_i et b_i ne se trouve aucun des points $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, b_1, b_2 \ldots b_{i-1}$.

Nous définirons ainsi une fonction dont la variation totale entre 0 et x est x et qui a dans tout intervalle des maxima et des minima.

Traçons par rapport à deux axes rectangulaires la droite $z=x$. Soient A_i, B_i les points de cette droite dont les abscisses sont a_i, b_i.

Plions la feuille de papier sur laquelle nous avons tracé $z=x$ d'abord suivant la parallèle à $0x$ passant par A_1 puis suivant la parallèle à $0x$ passant par B_1, nous réalisons la courbe $z=f_1(x)$. En pliant de nouveau le papier autour des parallèles à $0x$ passant par A_2 et B_2 on réalise $z=f_2(x)$ et ainsi de suite.

Donc, avec une précision qui n'est limitée que par la possibilité d'effectuer le pliage, on peut réaliser les courbes $z=f(x)$ que nous venons de définir. On peut même démontrer qu'en choisissant convenablement les A_i, B_i on peut réaliser toute courbe $z=f(x)$ de variation totale entre 0 et x égale à x.

49. On sait que, dans le cas simple où les fonctions f, φ, ψ ont des dérivées continues on peut représenter la longueur par une intégrale. Voici une première généralisation simple. Nous supposons que f', φ', ψ' existent, soient bornées et intégrables au sens de Riemann.

Soit AB une corde, dont les extrémités correspondent aux valeurs t_i, t_{i+1} du paramètre. On a:

$$\text{Longueur } AB = \sqrt{\overline{f(t_{i+1})-f(t_i)}^2+\overline{\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)}^2+\overline{\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)}^2}\ (*).$$

Désignons par m_1, M_1; m_2, M_2; m_3, M_3 les limites inférieures et supérieures de $|f'(t)|$, $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ entre t_i et t_{i+1}.

(*) Nous supposons les axes rectangulaires.

Le théorème des accroissements finis montre que

$$(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2} \leqq \text{Long}\, A\, B \leqq \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\,(t_{i+1}-t_i).$$

Soit une division $t_0, t_1, \ldots t_n$ de l'intervalle de variation de t; il lui correspond un polygone inscrit P et l'on a:

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2} \leqq \text{Long}\, P \leqq \Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}.$$

Si entre les t_i choisis on intercale de nouvelles valeurs de t, la première somme augmente la troisième diminue, donc elles tendent vers des limites quand on fait tendre vers zéro $t_{i+1}-t_i$; d'ailleurs ces deux limites sont égales car la différence entre le premier et le troisième membre est au plus

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\,[(M_1-m_1)+(M_2-m_2)+(M_3-m_3)]$$

quantité qui tend vers zéro car $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ sont intégrables puisque f', φ', ψ', le sont.

L'expression

$$\Sigma\,(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}, \quad \left(t=\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$$

est comprise entre la première et la troisième somme, sa limite est l'intégrale

$$\int\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

qui représente donc la longueur de la courbe.

50. Servons nous maintenant des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Si f', φ', ψ' existent et si la courbe est rectifiable, ces dérivées admettent des intégrales et il en est par suite de même de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$. Réciproquement si cette quantité admet une intégrale, il en est de même de f', φ', ψ', car l'on a:

$$\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2} \geqq |f'|,$$

et la courbe est rectifiable.

Nous n'avons donc à nous occuper de l'intégrale de $\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}$ que pour les courbes rectifiables. Pour démontrer que cette intégrale représente la longueur de la courbe nous raisonnerons comme dans le chapitre précédent.

Divisons les intervalles de variation (finis ou non) de f', φ', ψ' à l'aide de nombres m_i. Il en résulte une division en ensembles de l'intervalle de variation de t.

Pour ceux que nous nommerons e_{ijk} on a:

$$m_i < f' < m_{i+1}$$
$$m_j < \varphi' < m_{j+1}$$
$$m_k < \psi' < m_{k+1}.$$

Pour ceux que nous nommerons $e^i_{\alpha jk}$, la première de ces inégalités est remplacée par:

$$m_i = f'.$$

Nous aurons de même $e^j_{i\alpha k}$ $e^k_{ij\alpha}$; dans ces expressions α est un symbole indiquant celle des inégalités qui est remplacée par une égalité et non l'un des nombres entiers.

Nous aurons encore les ensembles $e^{ij\alpha}_k$, les deux premières inégalités sont remplacées par

$$m_i = f', \qquad m_j = \varphi'.$$

Enfin nous aurons des ensembles e^{ijk} pour lesquels f', φ', ψ' seront égales à m_i, m_j, m_k.

Tous ces ensembles sont mesurables; en choisissant convenablement les m_i tous ces ensembles, sauf les e_{ijk}, seront de mesure nulle.

A chaque point t_0 de e_{ijk} nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à σ_{ijk}, ayant t_0 pour milieu et tel que

$$\alpha < a \leq t_0 \leq b < \beta$$

entraîne

$$m_i < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_{i+1}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}.$$

Soit $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ la somme de ces intervalles. Faisons tendre σ_{ijk} vers zéro, l'ensemble E_{ijk} des points communs à tous les $E_{ijk}(\sigma_{ijk})$ a même mesure que e_{ijk}.

A chaque point t_0 de $e^i_{\alpha jk}$ nous pouvons faire correspondre le plus grand intervalle possible (α, β) de longueur inférieure à $\sigma^i_{\alpha jk}$, ayant t_0 pour milieu et tel que

$$\alpha < a \leq t_0 \leq b < \beta$$

entraîne

$$m_i - \varepsilon^i_{\alpha jk} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < m_i + \varepsilon^i_{\alpha jk}$$

$$m_j < \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} < m_{j+1}$$

$$m_k < \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} < m_{k+1}\,.$$

Soit $E^i_{\alpha jk}\ (\sigma^i_{\alpha jk})$ la somme de ces intervalles.

Faisons tendre simultanément $\sigma^i_{\alpha jk}$ et $\varepsilon^i_{\alpha jk}$ vers zéro, l'ensemble $E^i_{\alpha jk}$ formé des points communs à tous les $E^i_{\alpha jk}(\sigma^i_{\alpha jk})$, a même mesure que $e^i_{\alpha jk}$. On définira de même $E^{ij\alpha}_k\,(\sigma^{ij\alpha}_k)$, $E^{ijk}\,(\sigma^{ijk})$.

Si $m_{i+1} - m_i$ est, quel que soit i, inférieur à η l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ est égale à

$$\sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}\ [m\,(e_{ijk}) + m\,(e^i_{\alpha jk}) \ldots + m\,(e^{ijk})]$$

à moins de $2\eta\, l$ près, l'intégrale étant étendue à un intervalle de longueur l. Or on peut choisir les nombres σ et ε assez petits, pour que cette somme diffère aussi peu qu'on le veut, de moins de D, de

$$V = \sum_{ijk} \sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2} \Big[m\,[E_{jk}\,(\sigma_{jk})] + m\,[E^i_{\alpha jk}\,(\sigma^i_{\alpha jk})] + \ldots + m[E^{ijk}\,(\sigma^{ijk})] \Big].$$

Parmi les intervalles formant les E on en peut choisir un nombre fini de manière que tout point de l'intervalle considéré soit intérieur à l'un des intervalles conservés et que les extrémités de l'intervalle considéré soient des extrémités d'intervalles conservés.

Nous supposerons ces intervalles conservés A choisis de façon qu'aucun d'eux ne soit à l'intérieur d'un autre. La contribution dans V des intervalles non conservés est inférieure à D.

Considérons deux intervalles conservés (a, b), (a_1, b_1) empiétant l'un sur l'autre et soit

$$a < a_1 < b < b_1\,;$$

supposons qu'ils correspondent à $E_{ijk}\,(\sigma_{ijk})$ et $E_{i'j'k'}\,(\sigma_{i'j'k'})$. Entre a_1 et b on peut trouver un point c tel que entre a et c se trouve un point au moins de e_{ijk} et entre c et b_1 un point au moins de $e_{i'j'k}$; en effet s'il en était autrement c'est que tous les points de e_{ijk} et $e_{i'j'k'}$ contenus dans $a\, b_1$ seraient entre a et b (ou entre a_1 et b_1) et en prenant dans a, b deux points α et β suffisamment voisins de a et b on aurait à la fois

$$m_i < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i+1}$$

$$m_{i'} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < m_{i'+1}$$

et les inégalités analogues. Or on n'a pas à la fois $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$.

Nous remplacerons les intervalles (a, b), (a_1, b_1) par (a, c), (c, b_1). On aurait pu faire de même pour des intervalles correspondant à $E^i_{\alpha jk}$, $E^{i'j'\alpha}_k \ldots$

Il n'y a de difficulté que si les trois indices sont identiques, c'est-à-dire par exemple si les deux intervalles correspondent à $E^i_{\alpha jk}$, $E^{\alpha jk}_i$, auquel cas on prendra comme point c un point quelconque de (a_1, b).

En continuant ainsi on remplace les intervalles A par des intervalles A' n'empiétant plus les uns sur les autres. La contribution dans V des intervalles $A - A'$ est inférieure à D.

Considérons maintenant la ligne polygonale inscrite dans la courbe et dont les sommets correspondent aux extrémités de A'.

Le côté de cette ligne qui correspond à l'intervalle (α, β) a une longueur égale à $(\beta - \alpha)\sqrt{m_i^2 + m_j^2 + m_k^2}$ à moins de

$$3\,\eta(\beta - \alpha) \quad \text{ou} \quad (2\,\eta + \varepsilon^i_{\alpha jk})(\beta - \alpha) \quad \text{ou} \quad (\eta + 2\,\varepsilon^k_{ij\alpha})(\beta - \alpha) \ldots$$

près, suivant que (α, β) correspond à E_{ijk}, $E^i_{\alpha jk}$, $E^{ij\alpha}_k \ldots$

Si donc les ε sont choisis assez petits, la longueur de la ligne polygonale diffère de la contribution de A' dans V de moins de $3\,\eta\, l$.

Ainsi, en choisissant convenablement les nombres η, σ, ε, le procédé que nous venons d'indiquer conduit à considérer une ligne polygonale inscrite dans la courbe, dont les côtés sont aussi petits que l'on veut, et dont la longueur est aussi voisine que l'on veut de l'intégrale

$$\int \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\, d\,t.$$

Cette intégrale représente donc la longueur de la courbe.

51. Les raisonnements que nous venons d'indiquer sont analogues à ceux des paragraphes 30, 31. D'une façon plus générale, à tout raisonnement de la deuxième partie du chapitre II, on peut faire correspondre des raisonne-

ments relatifs à la rectification des courbes. Nous allons indiquer ce qui est l'analogue de la proposition du paragraphe 35.

Dans ce paragraphe il a été démontré que si les nombres dérivés d'une fonction $f(t)$ sont bornés et si les h_i sont des nombres positifs tendant vers zéro on a :

$$\int \lambda_d(t)\,d\,t < \operatorname{Lim}\int \frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}\,d\,t < \int \Lambda_d(t)\,d\,t.$$

Un raisonnement analogue prouve que, si l'on désigne par D_d et d_d la plus grande et la plus petite des deux quantités $|\Lambda_d|$ et $|\lambda_d|$, on a:

$$\int d_d\,d\,t < \operatorname{Lim}\int \left|\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i}\right| d\,t < \int D_d\,d\,t$$

et aussi que les limites de

$$\int \left|\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \Lambda_d(t)\right| d\,t \quad \text{et} \quad \int \left|\frac{f(t+h_i)-f(t)}{h_i} - \lambda_d(t)\right| d\,t$$

sont inférieures à $\int (D_d - d_d)\,d\,t$.

Ceci posé soit $C(h_i)$ la courbe

$$x = \frac{F(t+h_i)-F(t)}{h_i}, \qquad y = \frac{\Phi(t+h_i)-\Phi(t)}{h_i}, \qquad z = \frac{\Psi(t+h_i)-\Psi(t)}{h_i}$$

$F(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ étant les fonctions primitives de $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ dont nous supposons les nombres dérivés bornés. $C(h_i)$ a pour longueur

$$l_i = \frac{1}{h_i}\int \sqrt{[f(t+h_i)-f(t)]^2 + [\varphi(t+h_i)-\varphi(t)]^2 + [\psi(t+h_i)-\psi(t)]^2}\,d\,t.$$

Quand h_i tend vers zéro les limites de l_i sont comprises entre

$$\int \sqrt{\overline{D_d(f)}^2 + \overline{D_d(\varphi)}^2 + \overline{D_d(\psi)}^2}\,d\,t \quad \text{et} \quad \int \sqrt{\overline{d_d(f)}^2 + \overline{d_d(\varphi)}^2 + \overline{d_d(\psi)}^2}\,d\,t.$$

Nous supposerons que ces deux intégrales ont la même valeur, alors l_i tend vers une limite déterminée que nous allons démontrer être la longueur de C.

Si ces deux intégrales ont la même valeur c'est que les couples d'intégrales $\int D_d\,d\,t$ et $\int d_d\,d\,t$ ont aussi les mêmes valeurs et ces intégrales représentent les variations totales de f, φ, ψ. D'ailleurs comme l'on a:

$$D_d - d_d \leqq \Lambda_d - \lambda_d \leqq 2\,D_d,$$

les couples d'intégrales $\int \Lambda_d \, d\, t$ et $\int \lambda_d \, d\, t$ ont aussi les mêmes valeurs et réciproquement.

De sorte que l'on a :

$$\int D_d \, d\, t = \int d_d \, d\, t = \int | \Lambda_d | \, d\, t = \int | \lambda_d | \, d\, t.$$

Considérons une ligne polygonale inscrite dans $C(h_i)$ correspondant à

$$t_0 \, t_1 \ldots t_n$$

et la ligne analogue inscrite dans C. Soient $A_i \, B_i$ d'une part, $A \, B$ d'autre part deux côtés correspondants $(t_\alpha, \; t_{\alpha+1})$. Les projections du premier sur les trois axes sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{f(t+h_i) - f(t)}{h_i} \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\varphi(t+h_i) - \varphi(t)}{h_i} \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \frac{\psi(t+h_i) - \psi(t)}{h_i} \, d\, t$$

celles du second sont

$$\int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(f) \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\varphi) \, d\, t, \quad \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \Lambda_d(\psi) \, d\, t.$$

La différence entre les longueurs de ces deux côtés est donc au plus égale à la somme des valeurs des trois intégrales analogues à

$$\left| \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} \left[\frac{f(t+h_i) - f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f) \right] d\, t \right| .$$

Donc la différence des longueurs entre les deux polygones considérés est au plus

$$S_{f, \varphi, \psi} \int \left| \frac{f(t+h_i) - f(t)}{h_i} - \Lambda_d(f) \right| d\, t.$$

Or chacune des trois intégrales de cette somme tend vers zéro avec h_i donc la longueur de C_i a pour limite la longueur de C.

Pour énoncer ce résultat donnons la définition suivante: Soit $f(t)$ une fonction continue, nous appellerons dérivée à droite $f'_d(t)$ une fonction définie pour $t = t_0$ comme égale à l'une quelconque des limites vers lesquelles tend

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

quand h tend en décroissant vers zéro.

La dérivée à droite est en général indéterminée. Nous venons de démontrer que :

Si les dérivées à droite $f'_d(t)$, $\varphi'_d(t)$, $\psi'_d(t)$ sont bornées et si l'intégrale

$$\int \sqrt{f'_d(t)^2 + \varphi'_d(t)^2 + \psi'_d(t)^2}\, dt$$

a une valeur bien déterminée, indépendante des dérivées à droite choisies, cette intégrale est la longueur de la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

52. La proposition précédente est une généralisation du résultat classique concernant la représentation de la longueur d'une courbe ayant des tangentes variant d'une façon continue.

Ce résultat classique étant connu, si l'on s'était proposé de généraliser analytiquement la notion de longueur, la proposition précédente aurait pu être prise pour définition ; on voit que la longueur ainsi définie ne dépend pas du choix des axes de coordonnées et, en particulier, reste la même si l'on remplace les dérivées à droite par des dérivées à gauche.

Cette définition ne s'applique qu'à des courbes rectifiables. Il serait intéressant de rechercher à quelles courbes rectifiables elle s'applique ou si elle concerne toutes les courbes rectifiables. Si, pour exprimer les points d'une courbe rectifiable, on prend comme paramètre t la longueur de l'arc, on a des fonctions f, φ, ψ dont les nombres dérivés sont bornés ; la proposition du paragraphe précédent s'applique toutes les fois que l'ensemble des points pour lesquels l'une des différences telles que $\Lambda_d(f) - \lambda_d(f)$ est différente de zéro a une mesure nulle.

CHAPITRE IV.

Aire des Surfaces.

53. Les mots *aire d'une surface* désignent dans le langage usuel l'aire, c'est-à-dire la somme des aires des faces, de surfaces polyédrales confondues avec la surface considérée au degré de précision que l'on peut atteindre.

En géométrie on considère souvent l'aire d'une surface S comme la limite des aires de certaines surfaces polyédrales ayant S pour limite; définir l'aire c'est alors dire quelle suite de polyèdres l'on considère.

Par analogie avec la définition de la longueur d'une courbe, on a tout d'abord considéré les polyèdres inscrits. C'est ainsi que, d'après M.r Peano (*), les postulats qu'admettait Archimède équivalent à la définition suivante:

L'aire d'une surface convexe est la valeur commune de la limite supérieure des aires des surfaces polyédrales convexes inscrites et de la limite inférieure des circonscrites; — d'ailleurs, dans les cas qu'il étudie, Archimède démontre la coïncidence des deux limites.

Pendant longtemps on a admis que l'aire d'une surface pouvait être définie comme la limite des aires des surfaces polyédrales inscrites (**), le maximum de l'aire des faces et le maximum de la longueur des arêtes tendant vers zéro. Mais Schwarz dans une lettre à Genocchi a montré que les aires des surfaces polyédrales inscrites dans un morceau fini de cylindre de révolution n'avaient pas de limite supérieure. La même observation a été faite par M.r Peano, dans ses leçons de l'Université de Turin en 1881-82, avant la publication de la lettre de Schwarz dans le cours professé à la Faculté des Sciences pendant le second semestre 1882 par Ch. Hermite (second tirage, p. 25).

Si l'on veut définir l'aire par la considération de polyèdres inscrits il faut donc assujettir ces polyèdres à des conditions supplémentaires. On s'est

(*) *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, Rendiconti 1890.

(**) Aux sommets d'une surface polyédrale inscrite on peut faire correspondre les points du plan (u, v) auxquels correspondent les sommets en tant que points de la surface proposée. A chaque face du polyèdre correspond ainsi un polygone du plan (u, v), nous supposons ici et dans tout ce qui suit que ces polygones n'empiètent pas les uns sur les autres.

quelquefois astreint à ne considérer que les polyèdres dont les angles des faces ne tendent pas vers zéro ou des polyèdres dont les angles des faces avec les plans tangents tendent vers zéro (*). La plupart des restrictions que l'on a ainsi considérées se sont trouvées insuffisantes pour qu'il existe une limite; d'ailleurs elles sont si particulières que, seule, l'existence de la limite légitimerait leur considération.

54. Il nous reste à citer deux définitions (**) dues à HERMITE et à M.r PEANO. Elles présentent ce caractère commun de ne plus reposer sur la considération de polyèdres inscrits et d'admettre, comme généralisation de la division d'une courbe en arcs partiels, la division d'une surface en morceaux par des contours fermés.

HERMITE (***) considère une surface $z = f(x, y)$ ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Soient un contour d du plan des $x\,y$, m un point intérieur à ce contour, M le point de la surface qui lui correspond, D' le contour situé dans le plan tangent en M à la surface qui a pour projection d et D le contour de la surface qui se projette en d. A D on fait correspondre l'aire de D' (on suppose d quarrable). Ceci posé on divise la surface en morceaux; la somme des nombres attachés aux contours employés est une valeur approchée de l'aire. L'aire est la limite de ces valeurs lorsque le nombre des morceaux augmente indéfiniment de manière que le diamètre maximum de ces morceaux tende vers zéro. (L'existence de la limite suppose que le contour considéré limitant la surface n'est pas quelconque; il en était de même pour les définitions précédentes.)

La définition d'HERMITE fait donc intervenir explicitement les axes de coordonnées, de plus elle n'est pas la généralisation de la définition de la longueur par la considération des polygones inscrits.

(*) Voir au sujet de ces essais de définition la note déjà citée de M.r PEANO.

(**) Dans un article récent *(Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1901) M.r MINKOWSKI adopte pour la longueur et l'aire les définitions suivantes.

De chaque point d'une courbe C comme centre traçons une sphère de rayon r l'ensemble des points intérieurs à l'une au moins de ces sphères est mesurable, soit $V(r)$ sa mesure; la limite, si elle existe, du rapport $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ quand r tend vers zéro est dite la longueur de C. De même si $V(r)$ est la mesure de l'ensemble des points dont la distance à l'un des points d'une surface S est inférieure à r, la limite de $\frac{V(r)}{2r}$ définit l'aire de S.

(***) Loc. cit.

La définition de M.r Peano ne présente pas ces inconvénients. Soit une courbe gauche fermée C, on démontre, au moins dans les cas simples, qu'il existe une courbe plane fermée c telle que sur tout plan les projections orthogonales de C et c limitent des aires égales (*); à chaque courbe C on attache le nombre qui représente l'aire du domaine plan limité par c. De même dans la définition de la longueur, à chaque arc partiel on attache la longueur du segment qui joint ses extrémités, c'est-à-dire la longueur du segment qui sur toute droite a même projection orthogonale (**) que l'arc. Ceci posé divisons une surface par des contours fermés; à chaque division nous faisons correspondre la somme des nombres attachés aux contours employés. M.r Peano appelle aire la limite supérieure de la somme de ces nombres.

55. Toutes ces définitions, celle due à M.r Peano exceptée, supposent l'existence de la limite d'une suite de nombres et l'existence de cette limite n'est démontrée que pour les surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue. Or, dans ce cas, il ne s'agit pas d'attacher à chaque surface un nombre, mais bien d'attacher à chaque surface des domaines plans dont la somme des aires définissent comme limite ou limite supérieure ou limite inférieure un nombre égal à l'intégrale double $\int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$; toute définition géométrique qui ne conduirait pas à ce nombre consacré par l'usage serait en effet rejetée. Une définition de l'aire qui ne s'applique qu'aux surfaces ayant des plans tangents variant d'une façon continue, peut faire connaître une propriété géométrique intéressante, mais n'est pas une véritable définition de l'aire, le nombre à définir étant connu avant la définition.

56. La définition due à M.r Peano s'applique à toutes les surfaces dont la frontière est un de ces contours C auxquels on peut faire correspondre des contours plans c, comme il a été dit plus haut. Mais cette définition n'est vraiment intéressante que si l'on peut sur la surface tracer assez de ces contours C pour qu'il soit possible de diviser la surface en morceaux de diamètres aussi petits que l'on veut et dont les frontières sont des courbes C;

(*) Si la projection de C a des points multiples, l'aire limitée par C doit être comptée comme si elle était exprimée à l'aide de l'intégrale curviligne $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

(**) Il ne s'agit pas ici de la courbe projection mais de la distance des deux extrémités de l'arc projection.

dans ce cas seulement l'aire dépend de la forme de toutes les parties de la surface. Cette condition est remplie par exemple si la surface a des plans tangents variant d'une façon continue.

Prenons ce cas, les courbes C forment un ensemble dont la puissance est celle du continu, alors l'aire est définie comme limite supérieure d'un ensemble de nombres dont la puissance est celle du continu.

Pour calculer l'aire il faut, dans cet ensemble, isoler une infinité dénombrable de nombres tendant vers la limite supérieure; on peut démontrer que si l'on considère une suite de divisions de la surface par des contours C, le diamètre maximum de ces contours tendant vers zéro, les nombres correspondant à ces divisions tendent vers l'aire. Mais il n'est pas évident que l'on puisse toujours atteindre par une infinité dénombrable d'opérations le nombre que définit M.r Peano; ajoutons qu'on ne connaît rien d'autre sur ce nombre que son existence.

57. Une surface étant définie par

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

(u, v) étant un point d'un domaine plan D.

On ne considère pas comme différentes celles que l'on obtient en exprimant u, v en fonction des coordonnées u_1, v_1 des points d'un domaine D_1; entre D et D_1 existe une correspondance ponctuelle biunivoque et continue. On dit que l'on a deux représentations paramétriques de la même surface.

L'ensemble des points qui correspondent à la courbe qui limite le domaine D forme la courbe frontière de la surface (*).

Deux surfaces sont dites égales si l'on passe de l'une à l'autre par les formules du changement de coordonnées.

Une surface S est dite somme de surfaces S_i, en nombre fini ou non, si le domaine D du plan des (u, v) auquel correspond S est somme des domaines D_i auxquels correspondent les S_i et si la portion de S qui correspond à D_i est identique à S_i.

Une surface S est dite la limite de surfaces S_p données par des fonctions f_p, φ_p, ψ_p, si f_p, φ_p, ψ_p sont définies dans le même domaine que f, φ, ψ et tendent uniformément vers f, φ, ψ.

(*) Nous réservons donc le nom de *surface* à ce que l'on appelle ordinairement une calotte à un seul contour, simplement connexe. — Il faudrait répéter pour les points d'une surface ce qui a été dit au chapitre I pour les points d'une courbe.

Ceci rappelé, par analogie avec le problème de la mesure des courbes, nous posons ainsi le problème de la mesure des surfaces.

Attacher à chaque surface un nombre positif fini ou infini que l'on appellera son aire et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° *Il existe des surfaces planes ayant une aire finie.*

2.° *Deux surfaces égales ont même aire.*

3.° *Une surface somme de plusieurs autres a pour aire la somme des aires des surfaces composantes.*

4.° *L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite.*

Les trois premières conditions suffisent, nous l'avons vu, quand on ne considère que des domaines plans. Le problème n'est possible que pour les domaines limités par des courbes quarrables.

Remarquons d'ailleurs qu'il importe peu de modifier ainsi la troisième condition du problème :

3 bis. *Une surface somme de deux autres a pour aire la somme des aires de ces deux autres.*

Les conditions 1, 2, 3 bis suffisent en effet pour les domaines quarrables. Soit maintenant un domaine non quarrable, il est limite de domaines quarrables dont les aires tendent vers la mesure des points du domaine (*); avec M.r Jordan nous appellerons ce nombre l'*aire intérieure* du domaine non quarrable. La condition 4 montre que l'on doit appeler aire l'aire intérieure, mais alors la condition 3 bis n'est pas remplie (**).

Le problème des aires ainsi posé n'est donc possible que pour les domaines quarrables. Il est bien entendu que cela ne veut pas dire que le problème des aires est impossible pour tout autre famille de domaines que celle des domaines quarrables. Il est bien évident par exemple que le problème des aires est possible pour toute famille comprenant un nombre fini de domaines déterminés en grandeur et en position, que ces domaines soient quarrables ou non. Nous voulons dire seulement que le problème n'est pas possible pour l'ensemble de tous les domaines, mais qu'il est possible pour les domaines quarrables.

(*) Rappelons que nous avons appelé domaine l'ensemble des points *intérieurs à la frontière.*

(**) De même il importait peu dans la 3e condition du problème de la mesure des courbes de parler d'une courbe somme de deux autres ou d'une courbe somme de plusieurs autres.

On démontrera facilement que, si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3, 4, il n'existe aucune famille de domaines formée des domaines quarrables et d'autres domaines, pour laquelle le problème des aires soit possible; au contraire il existe de telles familles si l'on pose le problème avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 et que l'on ne considère que les domaines plans.

Retenons seulement que le problème des aires n'est possible dans le plan que pour certaines familles de domaines, dans l'espace il ne sera donc aussi possible que pour certaines familles de surfaces.

58. Nous dirons qu'une surface S, correspondant au domaine D du plan (u, v), est fermée si à tous les points de la frontière de D correspond le même point pour S.

Nous dirons qu'un arc de courbe $\alpha\beta$ est intérieur à une surface fermée S s'il est impossible de tracer une courbe rencontrant $\alpha\beta$, ayant une branche infinie et ne rencontrant par S.

Nous dirons qu'un arc $\alpha\beta$ est *quarrable* s'il est possible de trouver une suite de surfaces polyédrales fermées S_1, $S_2, \ldots$ contenant $\alpha\beta$, dont les aires, sommes des aires des faces, tendent vers zéro et qui ont pour surface limite une surface dont l'ensemble des points est identique à l'ensemble des points de $\alpha\beta$.

Une courbe fermée sera dite quarrable si chacun de ses arcs est quarrable. Nous ne résoudrons le problème des aires que pour les surfaces limitées par des courbes quarrables (*).

Pour donner un exemple étendu de courbes quarrables montrons que toute courbe rectifiable est quarrable. Soit C une courbe rectifiable de longueur l, partageons-la en arcs de longueur a.

Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta\ldots$ ces arcs. Considérons les cylindres de révolution dont les axes sont les cordes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta\ldots$ et dont les rayons sont égaux à a. Nous limiterons le cylindre $\alpha\beta$ aux deux parallèles dont les plans passent par α et β et de même pour les autres cylindres.

Deux cylindres consécutifs, $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ par exemple, seront reliés par l'un, convenablement choisi, des deux fuseaux que les parallèles limites de ces deux cylindres détachent sur la sphère de rayon a et de centre β. Nous terminerons les cylindres extrêmes par des demi-sphères.

(*) Dans une note des Comptes Rendus de Novembre 1899 je me suis occupé de la définition de l'aire d'une classe particulière de surfaces, les surfaces rectifiables. J'ai pu alors adopter une autre définition des courbes quarrables.

L'ensemble de ces surfaces est une surface fermée contenant C. La somme des aires de ces cylindres et sphères, le mot aire ayant le sens qu'on lui attribue en géométrie élémentaire, est au plus égale à

$$\frac{l}{a} 4 \pi a^2 + 2 \pi a \Sigma \operatorname{long} \alpha \beta \leq 4 \pi a l + 2 \pi a l.$$

En remplaçant les cylindres par des prismes inscrits et les sphères par des polyèdres convexes inscrits on a une surface polyédrale fermée contenant C et d'aire au plus égale à $6 \pi a l$; quand a diminue ces surfaces tendent vers C qui est quarrable.

Nous verrons plus loin que toute courbe quarrable dans le plan est quarrable dans l'espace.

59. Soit une courbe fermée C, *nous appellerons aire minima de C la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers C.*

Soient trois courbes fermées formées des arcs (α, β) pour la première, (β, γ) pour la seconde, (α, γ) pour la troisième. Supposons β quarrable; on peut l'enfermer dans des surfaces polyédrales fermées B_1, $B_2 \ldots$ dont les aires tendent vers zéro et dont les points tendent vers ceux de β. Soient A_1, $A_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers (α, β) et dont les aires tendent vers l'aire minima de (α, β). Soient de même les surfaces C_1, $C_2 \ldots$ relatives à (β, γ).

Si i est assez grand et j assez petit, A_i et C_i rencontrent B_j suivant des courbes.

Supposons A_i définie à l'aide de fonctions des variables u, v; le point (u, v) étant dans un certain domaine D indépendant de i; soit b la partie de frontière de D qui correspond à β. Les points de A_i intérieurs à B_j correspondent à un certain ensemble de points du plan (u, v) lequel contient un domaine dont la frontière comprend b. Supposons ce domaine d_{ij} pris le plus grand possible et soit b_{ij} la partie de sa frontière qui ne fait pas partie de celle de D.

La courbe β_{ij} de A_i qui correspond à b_{ij} est sur B_j; si i et j augmentent simultanément β_{ij} tend vers β (*).

Nous définirons de même la courbe β'_{ij} relative à B_j, C_i. Sur B_j on

(*) Pour ne pas être entraîné à de trop longs développements, nous admettons ces propriétés.

peut joindre les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité m de β par une ligne polygonale m_{ij} dont tous les points tendent vers m, de même soit n_{ij} une courbe de B_j joignant les extrémités de β_{ij} et β'_{ij} qui tendent vers l'extrémité n de β.

Soient A'_{ij} la portion de A_i correspondant à $D - d_{ij}$ et C'_{ij} la portion analogue de C_i. La surface formée de A'_{ij}, C'_{ij} et de l'une des deux surfaces limitées sur B_j par β_{ij}, β'_{ij}, m_{ij}, n_{ij} a sa frontière qui tend vers (α, γ) et l'une de ses courbes qui tend vers β. Son aire tend vers une quantité au plus égale à la somme des aires minima de (α, β) et (β, γ); il est d'ailleurs évident que la limite ne peut être inférieure à cette somme, donc elle lui est égale.

C'est cette propriété qui nous servira dans la suite. Remarquons qu'elle suffit pour prouver que toute courbe plane non quarrable dans le plan n'est pas quarrable dans l'espace.

60. Considérons une courbe rectifiable fermée C de longueur l et soit une suite de polygones inscrits P_1, $P_2 \ldots$ que l'on obtient en divisant C en arcs égaux de longueurs a_1, $a_2 \ldots$ tendant vers zéro. Soit A l'un des sommets de P_i, la surface que nous avons attachée, au § 58, à la courbe C considérée comme ouverte et d'extrémités A, A et à P_i, moins les deux demi-sphères qui la terminent, constitue ce que nous appellerons une surface annulaire. En remplaçant les cylindres et fuseaux qui la composent par des polyèdres nous avons une surface annulaire polyédrale S_i.

Considérons sur S_i un contour fermé formé, sur les prismes, de parallèles aux arêtes des prismes, sur les polyèdres qui remplacent les fuseaux, de lignes polygonales inscrites dans des grands cercles de ces fuseaux, soit Γ_i; la longueur de Γ_i est évidemment inférieure à

$$l + 2\pi a_i \frac{l}{a_i} = (2\pi + 1)\, l.$$

Considérons l'ensemble E des polygones comprenant: 1.° les trapèzes dont les bases sont les axes des cylindres et les parallèles aux génératrices faisant partie de Γ_i; 2.° les triangles que l'on obtient en joignant chaque sommet m de P_i aux sommets de Γ_i situés sur la sphère de rayon a_i et de centre m. La somme des aires de ces polygones est au plus

$$\frac{(2\pi + 1)\, l + l}{2} a_i = (\pi + 1)\, a_i\, l.$$

Ceci posé, nous avons vu au paragraphe précédent que l'on peut considérer l'aire minima de C comme la limite la plus petite des aires de surfaces polyédrales A_i dont les frontières C_i, portées par les surfaces S_i, tendent vers C.

Considérons la surface formée de l'ensemble E, de l'un des ensembles de polygones de S_i dont les frontières sont les côtés de C_i et de Γ_i, et de la surface A_i (*); son aire diffère de celle de A_i de moins de $(\pi+1)\,a_i\,l$ augmentée de la somme des aires des polygones qui forment S_i. Donc l'aire minima de C est la limite des aires minima des contours P_i, et l'aire minima de P_i est la limite inférieure des aires des surfaces polyédrales dont P_i est la frontière. On sait donc trouver l'aire minima de P_i par une suite dénombrable d'opérations, donc l'aire minima de C peut être obtenue à l'aide d'une infinité dénombrable d'opérations. Mais il faut bien remarquer que ce n'est pas une suite dénombrable d'opérations; en d'autres termes l'aire minima d'une courbe rectifiable n'est pas définie à la façon de la somme d'une série mais à la façon de la somme d'une série dont les termes sont des séries.

Les polygones P_i sont des polygones particuliers inscrits dans C, on peut remplacer cette suite de polygones par une suite quelconque de polygones inscrits dans C et tendant vers C. En effet, soient deux polygones P et Q de longueurs inférieures à l qui se correspondent point par point, les points homologues étant distants de moins de ε; en raisonnant sur P et Q comme sur Γ_i et P_i, on voit que les aires minima de P et Q diffèrent de moins de $l\,\varepsilon$.

61. La plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent vers une surface donnée S est ce que nous appellerons l'*aire intérieure* de S.

D'après la condition 4 du problème des aires ce nombre doit être l'aire de S. Avant de rechercher s'il vérifie la condition 3 de ce problème, nous allons étudier les surfaces dont l'aire intérieure est finie. Ces surfaces sont les *surfaces quarrables*, elles correspondent aux courbes rectifiables.

Soit a l'aire intérieure de S. Supposons que l'ensemble des projections des points de S sur le plan des $x\,y$ contienne un domaine. Soit un rectangle $A\,B\,C\,D$ de côtés parallèles à $o\,x$ et $o\,y$ et contenu dans ce domaine.

Soit une série de surfaces polyédrales S_1, S_2... qui tendent vers S et dont les aires a_1, a_2... tendent vers a. L'ensemble des projections des points de S_i sur le plan des $x\,y$ contient un rectangle $A_i\,B_i\,C_i\,D_i$ de côtés paral-

(*) Nous admettons ici que tous ces polygones forment bien une surface.

lèles à $o x$ et $o y$. On peut supposer que A_i, B_i, C_i, D_i tendent vers A, B, C, D, quand i augmente indéfiniment.

Soit $l_i(y)$ la somme des longueurs des lignes polygonales sections de S_i par $y = y_i$, $l_i(y)$ sera indéterminée si dans le plan d'ordonnée y se trouve une face de S_i, nous ne nous occuperons pas des valeurs de y pour lesquelles cela a lieu. Soit l_i la limite inférieure de $l_i(y)$ quand y varie de y_i ordonnée de $A_i B_i$ à y'_i ordonnée de $D_i C_i$. On a évidemment

$$a_i \geqq l_i (y'_i - y_i).$$

Or a_i tend vers a, $y'_i - y_i$ tend vers la longueur du côté $B C$, donc la plus grande des limites vers laquelle tend l_i est au plus $\frac{a}{\text{long.}\, B C}$, quantité finie. D'ailleurs $l_i(y)$ étant continue la valeur l_i est atteinte pour une valeur α_i de y.

La section de S_i par le plan $y = \alpha_i$ se compose d'un nombre fini de lignes polygonales qui décomposent S_i en un nombre fini de morceaux.

Supposons choisis sur S deux points M et N se projetant sur le plan des $x y$ de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies $A B$ et $C D$, et soient M_i et N_i des points de S_i qui tendent respectivement vers M et N. Les projections de M_i et N_i sont, dès que i est assez grand, de part et d'autre de la bande comprise entre les droites indéfinies $A_i B_i$ et $C_i D_i$; M_i et N_i appartiennent alors à deux morceaux différents de S_i; désignons par L_i l'une des lignes composant la section de S_i par $y = \alpha_i$ et choisie de façon que M_i et N_i soient sur S_i de part et d'autre de L_i. L_i est de longueur au plus égale à l_i.

Nous verrons, §§ 95 et 96, que certaines des L_i ont une courbe limite L dont la longueur au plus égale à $\frac{a}{\text{long.}\, B C}$.

L est d'ailleurs une courbe plane située dans le plan $y = \alpha$, α étant la limite des nombres α_i correspondant aux courbes L_i considérées. De plus L divise S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre contenant N.

Donc *toute surface quarrable peut être divisée en deux morceaux par une courbe rectifiable*, on peut de plus supposer que cette courbe est dans un plan parallèle à un plan P donné. Mais la démonstration précédente suppose qu'il existe un plan perpendiculaire à P sur lequel l'ensemble des projections des points de S contient un domaine. Les seules surfaces pour lesquelles cela n'a pas lieu sont celles qui sont sommes de surfaces portées par des plans parallèles à P et de surfaces dont l'ensemble des points est aussi l'ensemble des points d'une courbe dont la projection ne remplit aucun domaine. Des raisonnements longs mais simples, analogues à ceux que nous venons d'employer, permettent de montrer que le théorème précédent s'applique aussi à ces surfaces, donc *toute surface quarrable peut être décomposée à l'aide de courbes rectifiables en un nombre fini de surfaces dont les aires intérieures sont aussi petites que l'on veut.*

62. Considérons une surface quarrable S et soit une suite de divisions de S en un nombre fini de surfaces à l'aide de courbes quarrables. De telles divisions existent toujours d'après ce qui précède; de plus on peut supposer que, dans la $i^{ème}$ division D_i, le maximum de la distance de deux points d'un même morceau soit ε_i, ε_i tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Soient A, B, C... les n morceaux qui proviennent de la division D_i; a, b, c... les contours de ces morceaux. Soient α, β, γ... des surfaces polyédrales dont les aires diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon}{n}$ des aires minima de a, b, c... et dont les frontières diffèrent de moins de ε_i de ces frontières. On peut enfermer A dans un cube de côté ε_i et nous pouvons supposer que α est tout entière dans ce cube.

Ceci posé, le raisonnement du § 59 nous montre qu'il est possible de construire une surface polyédrale S_i dont l'aire soit aussi voisine que l'on veut de la somme des aires des α, β, ..., c'est-à-dire dont l'aire soit plus petite que la somme des aires minima des a, b... augmentée de ε ou du moins aussi voisine que l'on veut de cette somme.

Si l'on fait correspondre point à point α et A les points correspondants sont distants au plus de $\varepsilon_i\sqrt{3}$, donc on peut supposer que S_i et S se correspondent point à point, le maximum de la distance de deux points homologues étant aussi voisin que l'on veut de $\varepsilon_i\sqrt{3}$.

Les surfaces S_i ont donc pour limite S et par suite la plus petite limite de leurs aires est au moins égale à l'aire intérieure de S.

Attachons à chaque division D_i le nombre m_i somme des aires minima des contours a, b... L'aire intérieure de S est au plus égale à la plus petite limite des nombres m_i.

Considérons une suite de surfaces polyédrales Σ_p tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S. Traçons sur elles des courbes qui tendent vers a, b, c... On divise ainsi Σ_p en n morceaux qui tendent respectivement vers A, B,... et dont la somme des aires tend vers une limite supérieure à la somme des aires minima de a, b... Donc, quel que soit i, m_i est inférieur à l'aire intérieure de S.

Donc *quelle que soit la suite de divisions D_i, les nombres m_i correspondants ont une limite: l'aire intérieure de S.*

De cette définition de l'aire intérieure résulte que si l'on divise une surface S en deux surfaces S_1, S_2 par une courbe quarrable, l'aire intérieure de S est la somme des aires intérieures de S_1 et S_2. Donc *si l'on pose le problème des aires avec les conditions 1, 2, 3 bis, 4 il est possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.*

63. Nous dirons qu'une courbe C tracée sur une surface S est quarrable sur cette surface s'il est possible de l'enfermer dans des morceaux de S dont la somme des aires est aussi petite que l'on veut; le mot aire ayant le sens qui vient d'être indiqué.

Supposons tracée sur S une courbe C fermée qui partage S en deux morceaux. L'un d'eux est intérieur à C. Dans ce morceau nous pouvons tracer des courbes quarrables C_i divisant S en deux morceaux et tendant vers C; C_i limite sur S une surface S_i, il est évident que l'aire de S_i tend vers l'aire intérieure du morceau Σ limité par C. Au contraire si l'on considère des courbes C_i tendant vers C, mais extérieures à Σ, il se peut que les aires des surfaces S_i que limitent les C'_i ne tendent pas vers l'aire intérieure de celle limitée par C. Un raisonnement tout-à-fait identique à celui qu'emploie M.r Jordan pour le cas où S est un plan (Cours d'Analyse, 2e édition § 36) montre que les aires des S_i tendent vers une limite déterminée, *l'aire extérieure de Σ sur S.*

Dans le cas où C est quarrable sur la surface et dans ce cas seulement ces deux aires (intérieure et extérieure) sont égales.

On voit qu'une courbe de S quarrable dans l'espace est quarrable sur S. Ceci revient à dire que si l'on considère sur S une famille de courbes quarrables dans l'espace $C(\lambda)$ variant d'une façon continue avec λ, la courbe $C(\lambda)$ limitant sur S une surface $S(\lambda)$, l'aire de $S(\lambda)$ est une fonction continue de λ.

64. Nous pouvons maintenant démontrer que l'aire d'une surface satisfait à la condition 3 du problème des aires. Soit une surface S divisée par des courbes en morceaux S_1, S_2... Nous pouvons remplacer chaque surface S_i par une surface S'_i qui la comprend de façon que la différence des aires entre S'_i et S_i soit inférieure à un nombre choisi arbitrairement ε_i.

Pour démontrer que la somme des aires des S_i, qui n'est pas supérieure à l'aire de S, ne lui est pas inférieure, il suffit donc de démontrer qu'il en est de même de la somme des aires des S'_i. Chaque point de S étant intérieur à l'un des S_i cela serait évident si les S'_i étaient en nombre fini, à cause de ce qui précède. Or, en reprenant le raisonnement que M.r Borel emploie à la page 42 de ses Leçons sur la théorie des fonctions et qui nous a déjà été utile, on voit qu'il suffit de choisir convenablement un nombre fini de surfaces S'_i pour que tout point de S soit intérieur à l'une d'elles.

Le problème des aires posé avec les conditions 1, 2, 3, 4 est donc possible et d'une seule manière pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, l'aire d'une surface étant son aire intérieure.

On verrait aussi que dans la définition de l'aire intérieure à l'aide des divisions D_i du § 62, il est inutile que ces divisions ne fassent intervenir qu'un nombre fini de morceaux.

Remarquons que cette définition de l'aire intérieure d'une surface est analogue à la définition de la longueur d'une courbe comme limite des périmètres des polygones inscrits. Un polygone inscrit définit en effet une division de la courbe à laquelle nous faisons correspondre une division de la surface à l'aide de courbes quarrables. A la longueur d'un côté $a\,b$ d'un polygone, c'est-à-dire à la limite inférieure des longueurs des courbes qui joignent les deux points de division consécutifs a, b, nous faisons correspondre la limite inférieure des aires des surfaces limitées par C l'un des contours quarrables qui intervient dans la division de la surface.

L'analogie se poursuit plus loin encore, car il est possible de démontrer qu'étant donnée une courbe fermée C il existe une surface limitée à C et ayant pour aire intérieure l'aire minima de C (*). Ces surfaces correspondent aux côtés des polygones inscrits.

65. En géométrie élémentaire on définit les aires des surfaces cylindriques, des surfaces coniques et des surfaces convexes; il nous est facile de légitimer ces définitions.

Soient un cylindre limité à deux sections droites et A, B deux de ses génératrices, elles découpent sur la surface un morceau D. La projection sur le plan de A et B d'une surface polyédrale qui tend vers D couvre un domaine qui tend au moins vers le rectangle limité par A, B; donc l'aire de cette surface polyédrale tend au moins vers l'aire de ce rectangle. De là

(*) Voir chapitre VI.

résulte que l'aire d'un cylindre est au moins celle de tout prisme inscrit. Mais si les faces d'un tel prisme tendent vers zéro le prisme tend vers le cylindre et par suite son aire tend au moins vers celle du cylindre, donc exactement vers cette aire.

La même démonstration s'applique au cône. On voit que les cylindres de directrices planes rectifiables et que les cônes de directrices sphériques rectifiables sont seuls quarrables.

Soit une surface S fermée convexe, c'est-à-dire ne rencontrant aucune droite en plus de deux points; et soient S_1, $S_2 \dots$ des surfaces polyédrales fermées tendant vers S et dont les aires tendent vers l'aire intérieure de S (*).

Soit O un point intérieur à S. Prenons par rapport à O les homothétiques S'_1, $S'_2 \dots$ de S_1, $S_2 \dots$ les rapports étant tels que S'_i n'ait aucun point intérieur à S. Il suffit pour cela que le rapport relatif à S_i soit $\frac{R}{R - \varepsilon_i}$, si deux points correspondants de S et S'_i sont distants d'au plus ε_i et si R est le minimum de la distance de O aux points de S, et puisque ε_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$ l'aire de S est la limite des aires des S'_i.

Ceci posé considérons un polyèdre convexe P inscrit dans S; tous les points de P étant intérieurs à S et par suite à S'_i l'aire de P est inférieure à celle de S'_i, c'est-à-dire au plus égale à celle de S. Si donc nous considérons une suite de polyèdres convexes inscrits dans S et tendant vers S on voit, d'une part que la plus petite limite des aires de ces polyèdres n'est pas inférieure à l'aire de S, d'autre part que la plus grande limite ne lui est pas supérieure, c'est-à-dire que *l'aire de S est la limite des aires des polyèdres convexes inscrits tendant vers S.*

Si l'on ne considère qu'un morceau de S limité par une courbe quarrable le même résultat est vrai, comme il résulte de la démonstration précédente. Remarquons d'ailleurs que toute section plane de S étant convexe est rectifiable et par suite quarrable.

(*) Puisque nous avons défini une surface fermée comme ayant tous ses points frontières confondus en un point A, nous pouvons seulement affirmer que les frontières des S_i, tendent vers A, et non pas que les S_i sont fermées. Mais en coupant S_i par une sphère Σ_i de centre A, ce qui détermine autour de la frontière de S_i une courbe C_i et en fermant la portion de S_i extérieure à Σ_i par l'une des portions limitées par C_i sur Σ_i, on remplace S_i par une surface fermée, laquelle est polyédrale si l'on emploie à la place de Σ_i un polyèdre convenable inscrit dans Σ_i.

On voit aussi que si une surface convexe S enveloppe une surface convexe S' l'aire de S est supérieure à celle de S'; de là résulte que l'aire de S' est finie si celle de S est finie et comme on peut prendre pour S un cube, toute surface convexe est quarrable. De plus son aire peut être définie comme la limite supérieure de celles des polyèdres convexes inscrits.

Les exemples de ce paragraphe montrent que l'on pourrait en géométrie élémentaire définir d'une manière générale l'aire d'une surface S comme la plus petite limite des aires des surfaces qui tendent vers S.

66. Pour les surfaces simples que nous venons d'examiner l'aire se calcule par une suite dénombrable d'opérations. Dans le cas général, pour calculer l'aire de la surface par les procédés précédemment indiqués, il faut d'abord diviser la surface en morceaux aussi petits que l'on veut par des courbes quarrables. Nous savons obtenir une telle division si la surface est donnée comme limite de surfaces polyédrales dont les aires n'augmentent pas indéfiniment.

Supposons la surface S donnée par:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v);$$

u, v décrivant un domaine D. Coupons cette surface par $x = \lambda$, ce qui donne sur S un nombre fini ou infini de courbes. Soient sur S deux points M, N que nous supposons de part et d'autre de $x = \lambda$; nous appellerons $C(\lambda)$ l'une des courbes sections de S par $x = \lambda$, qui sépare S en deux morceaux, l'un contenant M, l'autre N. A $C(\lambda)$ correspond dans le plan (u, v) $\gamma(\lambda)$. Soit D_1 une partie de D balayée par $\gamma(\lambda)$.

Inscrivons dans $\gamma(\lambda)$ un polygone de côtés égaux à l_1 et soient $P(\lambda, l_1)$ le polygone correspondant inscrit dans $C(\lambda)$ et $l(\lambda, l_1)$ sa longueur. $l(\lambda, l_1)$ est une fonction continue de λ, on peut donc la définir par une infinité dénombrable de valeurs, celles qui correspondent aux valeurs rationnelles de λ; et par suite trouver son minimum $m(l_1)$ et la valeur λ_1 pour laquelle il est atteint.

Soient $l_1, l_2, \ldots$ tendant vers zéro, les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ correspondantes ont une valeur limite λ_0; $C(\lambda_0)$ a pour longueur la limite de $m(l_1)$, $m(l_2) \ldots$ et c'est la courbe de plus petite longueur parmi les $C(\lambda)$. Donc si $m(l_1)$, $m(l_2) \ldots$ augmentent indéfiniment S n'est pas quarrable; sinon on sait diviser S en deux morceaux par une courbe quarrable.

On peut donc par une infinité dénombrable d'opérations savoir si une surface est quarrable et, si elle l'est, trouver son aire.

67. Démontrons que toute courbe quarrable sur une surface $z = f(x, y)$ est quarrable dans l'espace. Soit Γ une courbe quarrable sur la surface considérée S; enfermons-la dans un morceau D de S limité par une courbe rectifiable C, soit l la longueur de C. Faisons subir à D les translations $\frac{\varepsilon}{l}$, parallèles d'une part à oz, d'autre part à zo. Les nouvelles positions de D et l'ensemble des positions occupées par C constitue une surface fermée dont l'aire est deux fois celle de D augmentée de ε. Cette aire peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut; et puisqu'une surface fermée peut être remplacée par une surface polyédrale voisine, l'aire étant changée aussi peu qu'on le veut, Γ est quarrable dans l'espace.

Cette propriété s'applique en particulier au plan, ainsi que nous l'avions annoncé; mais elle n'est pas générale, c'est-à-dire qu'une courbe non quarrable dans l'espace peut être quarrable sur une surface.

Considérons en effet une courbe plane fermée non quarrable C et une circonférence Γ intérieure à C. C n'est pas quarrable dans l'espace et cependant C est quarrable sur la surface quarrable formée d'une part de la surface limitée par C sur le plan, d'autre part de la couronne limitée sur le plan par C et Γ.

68. Nous considérons les surfaces:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

ayant en tout point un plan tangent et telles que f, φ, ψ aient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Isolons sur la surface un morceau qui, par rapport à des axes convenables, ait pour équation $z = f(x, y)$, le plan tangent n'étant jamais parallèle à oz.

Soit D le domaine projection sur oxy du morceau considéré Σ; soit M le maximum de la valeur absolue des dérivées du premier ordre. Divisons D en carrés de côtés parallèles à ox et oy; supposons tous ces carrés de côté a et soit n le nombre de ceux de ces carrés qui sont intérieurs à D (nous négligerons ceux qui ne sont pas intérieurs à D).

Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ l'un de ces carrés, C la courbe qui lui correspond sur Σ, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ le parallélogramme qui se projette sur $\alpha\beta\gamma\delta$ et qui est dans le plan tangent en un point ξ, η, ζ du morceau de Σ limité par C.

La différence entre l'aire de ce parallélogramme et l'aire minima de C est au plus l'aire de la partie du prisme projetant C limitée par cette courbe et $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$. Si nous désignons par ε le maximum de la variation des dérivées partielles dans l'un quelconque des n carrés, cette aire est au plus $2\, a^2 \varepsilon \, . \, 4$.

L'aire de $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ est

$$\sqrt{\overline{f'_x(\xi,\ \eta)}^2 + \overline{f'_y(\xi,\ \eta)}^2 + 1} \, . \, a^2.$$

L'aire intérieure de Σ, ou plutôt de la partie de Σ qui se projette à l'intérieur des carrés considérés, est égale à

$$A = a^2 \sum \sqrt{f'^2_\xi + f'^2_\eta + 1}$$

à moins de $8\, a^2 n\, \varepsilon$ près. Or A tend, quand a tend vers zéro, vers l'intégrale

$$\iint \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}\, d\, x\, d\, y$$

étendue au domaine D; $a^2 n$ est inférieur à l'aire de D, ε tend vers zéro avec a, donc l'aire est donnée par l'intégrale

$$\iint \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, d\, x\, d\, y.$$

Il suffit d'un changement de variables pour retomber sur la formule connue:

$$A = \iint \sqrt{\overline{D\frac{(f,\ \varphi)}{(u,\ v)}}^2 + \overline{D\frac{(\varphi,\ \psi)}{(u,\ v)}}^2 + \overline{D\frac{(\psi,\ f)}{(u,\ v)}}^2}\, d\, u\, d\, v.$$

Nous avons en même temps retrouvé la définition qu'emploie M.r Hermite.

69. Il serait intéressant de savoir si, dans tous les cas où l'intégrale précédente existe, elle représente l'aire et dans quels cas cette intégrale existe.

Les méthodes du § 50 avec lesquelles nous avons fait dans le cas des courbes l'étude analogue, permettraient peut-être, bien que des difficultés nouvelles se présentent, d'examiner le cas où il existe en tout point un plan tangent. Mais il faudrait encore étudier le cas où les dérivées partielles de x, y, z existent sans que le plan tangent existe.

J'indiquerai seulement le résultat suivant dont la démonstration est fort simple. Si les dérivées de x, y, z, considérées comme fonctions de u ou de v, sont toutes inférieures en valeur absolue à un nombre M l'intégrale précédente donne une limite supérieure de l'aire.

70. Dans le chapitre III nous avons appris à former des fonctions qui définissent la courbe rectifiable la plus générale; nous ne résoudrons pas le problème analogue relatif aux surfaces quarrables (*), nous allons montrer seulement que l'on peut définir une famille intéressante et fort étendue de surfaces quarrables qui jouit de propriétés analogues à celles de la famille des courbes rectifiables: c'est la famille des *surfaces rectifiables.*

Nous dirons qu'une surface S

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

définie pour un certain domaine D du plan (u, v), est rectifiable si, à toute courbe rectifiable de D correspond une courbe rectifiable de S.

Signalons d'abord une différence entre les courbes et les surfaces rectifiables. Dire qu'une courbe est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points; dire qu'une surface est rectifiable c'est donner une propriété de l'ensemble de ses points et une propriété de la représentation particulière qui définit la surface. En d'autres termes, une surface rectifiable peut cesser de l'être si l'on change de représentation paramétrique. Par exemple, la demi-sphère

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

n'est pas rectifiable, et la demi-sphère

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta$$

l'est.

Il est d'abord évident que pour qu'une surface soit rectifiable il faut et il suffit que ses projections le soient; qu'il s'agisse de projections sur des plans ou sur des droites. Nous pouvons donc raisonner sur la surface

$$x = f(u, v), \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Soient a, b deux points du plan (u, v), A et B les points de la surface qui leur correspondent. Nous allons démontrer que le rapport

$$\frac{\text{distance } AB}{\text{distance } ab} = r(a, b)$$

(*) Cependant, une surface quarrable étant limite de surfaces dont les aires n'augmentent pas indéfiniment, il est facile d'indiquer un procédé régulier permettant d'obtenir toute surface quarrable par une suite dénombrable d'opérations. Mais un tel procédé n'est pas comparable pour la simplicité à celui qui fournit les courbes rectifiables.

est limité. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait trouver une suite a_1, b_1; a_2, b_2;... telle que les rapports correspondants augmentent indéfiniment; on pourrait même supposer que les points a_i d'une part, b_i d'autre part ont des points limites a et b. a et b sont confondus, sans quoi $r(a, b)$ serait infini, ce qui est impossible. Choisissons une série convergente à termes positifs décroissants, soit

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$$

Soient a_{α_i}, b_{β_i} deux points dont les distances à a sont inférieures à ε_i et tels que $r(a_{\alpha_i}, b_{\beta_i})$ est supérieur à $\frac{1}{\varepsilon_i}\cdot$ Considérons la courbe obtenue en allant de a à a_{α_1} en ligne droite, de a_{α_1} à b_{β_1} de b_{β_1} à a_{α_1} et ainsi de suite assez de fois pour que le chemin parcouru sur $a_{\alpha_1} b_{\beta_1}$ soit compris entre ε_1 et $2\,\varepsilon_1$, on arrivera ainsi soit en α_1 soit en β_1; on parcourt la droite qui joint ce point à a, puis on va de a à a_{α_2} et l'on parcourt sur $a_{\alpha_2} b_{\beta_2}$ une longueur comprise entre ε_2 et $2\,\varepsilon_2$ et l'on va de a_{α_2} ou b_{β_2} à a et ainsi de suite. La courbe du plan (u, v) ainsi parcourue est de longueur au plus

$$4\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots).$$

La courbe de la surface ainsi parcourue est de longueur au moins

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} + \cdots$$

donc de longueur infinie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi $r(a, b)$ est limité, cette condition est évidemment suffisante; on peut l'exprimer ainsi: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit donnée sous forme rectifiable est que $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ considérées comme fonctions de la seule variable u ou de la seule variable v aient des nombres dérivés bornés.*

Occupons-nous de la surface projection sur ox. Les courbes

$$u = f_1(t) \qquad v = \varphi_1(t),$$

f_1 et φ_1 étant croissantes, qui joignent u_0, v_0 à u, v ont une longueur au plus égale à

$$u - u_0 + v - v_0$$

(nous supposons que u_0, v_0 sont les plus petites valeurs de u et v et que u_0, v_0 définit un point de la surface; il est facile de se débarrasser de cette hypothèse); les courbes correspondantes de la surface ont donc des longueurs au plus égales à

$$M\sqrt{2}\,(u+v-u_0-v_0)$$

si les nombres dérivés de f sont inférieurs à M.

Soit $V(u, v)$ le maximum de ces longueurs, c'est une fonction croissante de u et de v dont les nombres dérivés sont inférieurs à M.

D'ailleurs si

$$u_1 > u_2, \qquad v_1 > v_2,$$

on a:

$$V(u_1, v_1) - V(u_2, v_2) \geqq |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)|,$$

donc

$$n(u, v) = \frac{1}{2}\Big[V(u, v) - f(u, v)\Big]$$

$$p(u, v) = \frac{1}{2}\Big[V(u, v) + f(u, v)\Big]$$

sont des fonctions croissantes de u et v et $f(u, v)$ *est la différence de deux fonctions croissantes dont les nombres dérivés sont inférieurs à M.*

Si nous avions recherché la condition pour qu'à toute courbe rectifiable $t = \chi(\theta)$ de l'axe des t corresponde sur la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

une courbe rectifiable

$$x = f[\chi(\theta)], \qquad y = \varphi[\chi(\theta)], \qquad z = \psi[\chi(\theta)],$$

nous aurions aussi trouvé que f, φ, ψ sont des différences de fonctions croissantes à nombres dérivés bornés.

71. Montrons que les surfaces rectifiables sont quarrables. Divisons le domaine D du plan (u, v) en carrés. Soit a le côté de l'un d'eux, la courbe qui correspond à son périmètre a une longueur au plus égale à $4\,Ma$. L'aire minima de cette courbe C est au plus l'aire du cône dont le sommet est sur C et dont C est la directrice. Or on obtient cette aire comme limite des aires analogues relatives aux polygones inscrits dans C et tendant vers C; l'aire minima de C est donc au plus égale à celle que limite dans le plan une courbe de longueur $4\,Ma$ c'est-à-dire au plus l'aire $\frac{4\,M^2 a^2}{\pi}$ du cercle de circonférence $4\,Ma$.

L'aire de la surface est donc au plus celle du domaine D multipliée par $\frac{4M^2}{\pi}$.

Une surface rectifiable est donc quarrable et le rapport de l'aire d'un morceau de surface à l'aire de la partie correspondante du plan (u, v) *est borné.*

72. L'ensemble des surfaces rectifiables est fort étendu; il comprend par exemple toutes les surfaces analytiques, tous les cylindres et cônes développables (*), toutes les surfaces convexes, à condition de choisir convenablement la représentation paramétrique. Mais il existe des surfaces quarrables qui ne sont pas rectifiables, quelle que soit la représentation paramétrique choisie.

Considérons en effet dans le plan des zx une courbe $z = f(x)$, passant par l'origine, définie pour $0 < x < 1$ et telle que, s étant l'arc, on ait:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Cette courbe n'est pas rectifiable, mais tout arc de cette courbe ne comprenant pas l'origine l'est; c'est-à-dire que le cylindre $z = f(x)$ n'est pas quarrable mais que tout morceau ne rencontrant pas l'axe des y l'est.

Considérons la partie de cylindre qui est située entre les plans $x = 0$, $x = y$; elle est quarrable et d'aire:

$$\int_0^1 x\,ds = \int_0^1 dx = 1$$

La surface comprenant ce morceau de cylindre et symétrique par rapport aux plans $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, $x = -y$ est donc quarrable; mais il ne passe aucune courbe rectifiable de cette surface par l'origine, donc elle ne peut être mise sous forme rectifiable.

(*) Chapitre V.

CHAPITRE V.

Surfaces applicables sur le plan.

73. Nous nous servirons de la propriété suivante:

Si dans tout intervalle les fonctions (f, f_1); (φ, φ_1); (ψ, ψ_1) ont les mêmes variations totales finies les deux courbes (f, φ, ψ) et (f_1, φ_1, ψ_1) ont la même longueur.

En effet, soit une division de l'intervalle de variation de t

$$t_0, \; t_1, \ldots \; t_n.$$

La longueur de la première courbe a pour valeur approchée

$$\Sigma \sqrt{\overline{f(t_{i+1}) - f(t_i)}^2 + \overline{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}^2 + \overline{\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)}^2}.$$

Soit $v\,[f(t)]$ la variation totale de f entre t_0 et t.

La somme précédente diffère de

$$\Sigma \sqrt{\overline{v\,[f(t_{i+1})] - v\,[f(t_i)]}^2 + \overline{v\,[\varphi(t_{i+1})] - v\,[\varphi(t_i)]}^2 + \overline{v\,[\psi(t_{i+1})] - v\,[\psi(t_i)]}^2}$$

de moins de

$$\Sigma\, S_{f,\varphi,\psi} \overline{\{v\,[f(t_{i+1})] - v\,[f(t_i)]\} - |f(t_{i+1}) - f(t_i)|} = S v\,[f(t_n)] - \Sigma \overline{|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}.$$

Donc la longueur peut être définie comme la limite de

$$\Sigma \sqrt{\overline{v\,[f(t_{i+1})] - v\,[f(t_i)]}^2 + \overline{v\,[\varphi(t_{i+1})] - v\,[\varphi(t_i)]}^2 + \overline{v\,[\psi(t_{i+1})] - v\,[\psi(t_i)]}^2}$$

et cette somme est la même pour les deux courbes.

74. Considérons une courbe rectifiable quelconque C, $x = f(t)$, portée par l'axe des x, effectuons la transformation ponctuelle $X = \varphi(x)$, φ étant continue. A la courbe C correspond la courbe Γ, $X = \varphi\,[f(t)]$. Proposons-nous de rechercher quelle doit être la fonction $\varphi(x)$ pour que C et Γ aient toujours la même longueur.

Si la fonction $f(t)$ se réduit à t, Γ a pour équation $X = \varphi(t)$, ce qui montre que $\varphi(x)$ doit avoir entre t_0 et t_1 une variation totale égale à $t_1 - t_0$.

Supposons cette condition remplie et prenons pour C une courbe rectifiable quelconque. Inscrivons dans cette courbe un polygone, soit ε la longueur maximum des côtés de ce polygone. Si les sommets de ce polygone correspondent aux nombres t_i, sa longueur est:

$$l(C) = \Sigma\,|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

et celle du polygone correspondant de Γ

$$l(\Gamma) = \Sigma\,|\varphi[f(t_{i+1})] - \varphi[f(t_i)]\,|\,.$$

Or quand ε tend vers zéro la plus petite des limites de cette somme est égale à la variation totale de φ entre $f(t_0)$ et $f(t_n)$ c'est-à-dire à $|f(t_n) - f(t_0)|$. La longueur de Γ est donc supérieure à la corde qui joint les extrémités de C.

Divisons C en arcs partiels, le même raisonnement montre que la longueur de Γ est supérieure à celle du polygone formé par les cordes des arcs partiels considérés. Donc la longueur de Γ n'est pas inférieure à celle de C.

D'ailleurs la longueur de Γ est la limite de la somme $l(\Gamma)$ et d'après ce que nous avons supposé on a:

$$|\varphi[f(t_{i+1})] - \varphi[f(t_i)]\,| \leqq |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

c'est-à-dire que $l(\Gamma)$ est inférieure à $l(C)$.

Donc C et Γ ont la même longueur.

Pour trouver toutes les transformations ponctuelles de l'axe des x qui ne changent pas les longueurs des courbes portées par cet axe, il suffit donc de trouver toutes les fonctions $\varphi(x)$ dont la variation totale dans un intervalle quelconque est égale à la variation de x dans cet intervalle. Pour cela, prenons une fonction continue à variation limitée $f(t)$, c'est-à-dire la différence de deux fonctions continues croissantes. Soit $v(t)$ la fonction qui représente la variation totale de f entre t_0 et t, affectée du signe $+$ ou $-$ suivant que t est supérieur ou inférieur à t_0. L'équation $x = v(t)$ peut être résolue par rapport à t puisque $v(t)$ est une fonction croissante, soit $t = \psi(x)$. La fonction $f[\psi(x)]$ est la plus générale répondant à la question.

75. Soient trois fonctions F, Φ, Ψ, dont les variations totales sont dans tout intervalle égales à la longueur de l'intervalle.

La transformation ponctuelle

$$X = F(x), \qquad Y = \Phi(y), \qquad Z = \Psi(z)$$

fait correspondre à toute courbe C une courbe Γ de même longueur. En effet, si C est définie par $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, Γ est définie par $F[f(t)]$, $\Phi[\varphi(t)]$, $\Psi[\psi(t)]$; et les deux fonctions telles, que $f(t)$, $F[f(t)]$, ont, dans tout intervalle, la même variation totale et il en est de même pour $\varphi(t)$, $\Phi[\varphi(t)]$; $\psi(t)$, $\Psi[\psi(t)]$.

La transformation dont il s'agit fait correspondre à chaque point de l'espace (x, y, z) un seul point de l'espace (X, Y, Z). Mais à un point de cet espace peut correspondre un ensemble de points de (x, y, z) ayant la puissance du continu. Si la transformation était biunivoque, ce serait une symétrie plus un déplacement ou un déplacement.

Remarquons encore qu'à toute courbe de l'espace (x, y, z) correspond une courbe de l'espace (X, Y, Z) mais que la réciproque n'est pas vraie.

76. Soit une surface S, appliquons lui la transformation ponctuelle du paragraphe précédent; on trouve une surface Σ. A toute courbe tracée sur S correspond une ligne de même longueur tracée sur Σ; à toute courbe de Σ correspond une courbe de S car, se donner une courbe sur S ou sur Σ, c'est se donner une courbe dans le domaine plan (u, v) qui sert à définir S.

Entre les points de S et de Σ on peut établir une correspondance biunivoque telle qu'à toute courbe rectifiable tracée sur l'une des surfaces corresponde sur l'autre une courbe de même longueur.

Deux surfaces qui jouissent de cette propriété sont dites *applicables l'une sur l'autre*. Cette définition n'est intéressante que si par tout point des surfaces considérées passent plusieurs courbes rectifiables. Elle aurait peu d'intérêt s'il s'agissait de cylindres à section droite non rectifiable, car sur de tels cylindres les génératrices sont les seules courbes rectifiables.

La définition précédente n'aurait plus aucun sens s'il s'agissait de surfaces de la forme

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

f et φ étant à variation non bornée, de telles surfaces ne contenant en général aucun arc de courbe rectifiable.

77. Il est, au contraire, très intéressant de savoir si deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre. On sait que, pour une surface analytique

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

la longueur d'un arc correspondant à des fonctions u, v ayant des dérivées continues, a pour différentielle

$$d s^2 = S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} \cdot d u^2 + 2 S \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}\right)} \cdot d u \, d v + S\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} \cdot d v^2$$
$$= E d u^2 + 2 F d u \, d v + G d v^2.$$

Pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points (u, v) des deux surfaces se correspondant, il faut que pour les deux surfaces les quantités E, F, G soient les mêmes.

Montrons que ces conditions sont suffisantes; cela est évident pour les courbes analytiques et pour celles qui sont composées d'un nombre fini d'arcs analytiques.

Soit maintenant un arc rectifiable quelconque sur une surface analytique S. Considérons un ligne polygonale P inscrite dans cette courbe. Aux sommets de P correspondent dans le plan (u, v) des points que nous considérons comme les sommets d'un polygone π du plan des (u, v); soit Π la courbe de S qui correspond à π. Nous allons démontrer que, lorsque les côtés de P sont assez petits, la différence des longueurs entre P et Π est aussi petite qu'on le veut.

Soit $A B$ un côté de P, $a b$ le côté correspondant de π. Evaluons le rapport long. $A B$: long. $a b$. Si les coordonnées de a et b sont (u, v); $(u + t \cos \theta, v + t \sin \theta)$ ce rapport est:

$$\left(\frac{A B}{a b}\right)^2 = r^2 (u, v, \theta, t) = \frac{1}{t^2} S \left[f(u + t \cos \theta, v + t \sin \theta) - f(u, v)\right]^2.$$

Cette fonction n'est définie que pour $t \neq 0$, nous poserons

$$r^2 (u, v, \theta, 0) = E \cos^2 \theta + 2 F \sin \theta \cos \theta + G \sin^2 \theta.$$

La fonction r^2 ainsi définie est continue par rapport à l'ensemble u, v, θ, 0. Cela est évident si $t \neq 0$; montrons qu'il en est encore ainsi pour le point u_0, v_0, θ_0, 0. Si cela n'était pas il serait possible de trouver une suite de valeurs u_i, v_i, θ_i, t_i tendant vers u_0, v_0, θ_0, 0 les valeurs correspondantes $r^2(u_i, v_i, \theta_i, t_i)$ ne tendant pas vers $r^2(u_0, v_0, \theta_0, 0)$. Dans une telle suite aussi loin que l'on aille, on trouvera des valeurs de t_i différentes de zéro, car $r(u, v, \theta, 0)$ est continue par rapport à l'ensemble u, v, θ. On peut donc supprimer tous les groupes u_i, v_i, θ_i, t_i pour lesquels t_i est nul, ou, ce qui revient au même, supposer tous les t_i différents de zéro. Nous avons à chercher la limite de

$$\frac{1}{t_i^2} S\,[f(u_i + t_i \cos\theta_i,\ v_i + t_i \sin\theta_i) - f(u_i,\ v_i)]^2.$$

Ceci s'écrit

$$S\,[f'_u(u_i + \eta'_i\, t_i \cos\theta_i,\ v_i + \eta'_i\, t_i \sin\theta_i)\cos\theta_i +$$
$$+ f'_v(u_i + \eta'_i\, t_i \cos\theta_i,\ v_i + \eta'_i\, t_i \sin\theta_i)\sin\theta_i]^2.$$

Les nombres η'_i correspondant à f, η''_i à φ, η'''_i à ψ étant compris entre zéro et un.

Les dérivées premières sont continues par rapport à l'ensemble u, v donc la limite est

$$S\,[f'_u(u_0,\ v_0)\cos\theta_0 + f'_v(u_0,\ v_0)\sin\theta_0]^2 = r^2(u_0,\ v_0,\ \theta_0,\ 0).$$

La fonction $r^2(u,\ v,\ \theta,\ t)$ étant continue, on peut trouver une valeur η telle que, pour

$$|u_1 - u_2| < \eta, \qquad |v_1 - v_2| < \eta, \qquad |t_1 - t_2| < \eta,$$

on ait :

$$|r(u_1,\ v_1,\ \theta,\ t_1) - r(u_2,\ v_2,\ \theta,\ t_2)| < \varepsilon.$$

Supposons tous les côtés de π de longueur inférieure à η et soit $A\,\alpha\,B$ l'arc de Π correspondant au côté $a\,b$ de π. Evaluons la longueur de cet arc.

Pour cela inscrivons un polygone Q dans l'arc, un côté $M\,N$ de ce polygone correspond à un segment $m\,n$ porté par le côté $a\,b$ et l'on a, en conservant les notations précédentes

$$\left|\frac{\operatorname{long} M\,N}{\operatorname{long} m\,n} - r(u,\ v,\ \theta,\ 0)\right| < \varepsilon.$$

Donc

$$|\operatorname{long} A\,\alpha\,B - \operatorname{long} a\,b \,.\, r(u,\ v,\ \theta,\ 0)| < \operatorname{long} a\,b \,.\, \varepsilon$$

Mais on a aussi

$$|\operatorname{long} A\,B - \operatorname{long} a\,b \,.\, r(u,\ v,\ \theta,\ 0)| < \operatorname{long} a\,b \,.\, \varepsilon$$

Et par suite

$$\operatorname{long} A\,\alpha\,B - \operatorname{long} A\,B < 2 \operatorname{long} a\,b \,.\, \varepsilon$$

On en déduit:

$$\operatorname{long} \Pi - \operatorname{long} P < 2 \operatorname{long} \pi \,.\, \varepsilon.$$

La longueur de π tend vers la longueur de la courbe c du plan des (u, v) qui correspond à la courbe considérée C de l'espace. Montrons que c est rectifiable si la surface dont il s'agit n'a pas de point singulier. On sait qu'on appelle ainsi ceux pour lesquels les trois déterminants fonctionnels tels que $\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ sont nuls. (Il s'agit là soit de points singuliers de la surface, soit de points singuliers de la représentation paramétrique en u, v).

Les dérivées premières de f, φ, ψ ne s'annulent donc pas en même temps et par suite $r^2(u, v, \theta, 0)$ est toujours supérieur à un nombre fixe positif. Si l'on choisit τ assez petit il en est de même, pour $0 < t < \tau$, de $r^2(u, v, \theta, t)$ que nous supposerons supérieur à $M^2 > 0$.

Donc on a:

$$\frac{\operatorname{long} a b}{\operatorname{long} A B} < \frac{1}{M} \; (M > 0)$$

et par suite

$$\frac{\operatorname{long} c}{\operatorname{long} C} < \frac{1}{M}$$

et puisque C est rectifiable c l'est.

La différence $\operatorname{long} \Pi - \operatorname{long} P$ tend donc vers zéro quand P tend vers C et l'on peut dire que: sur une portion de surface analytique ne contenant aucun point singulier la longueur d'une courbe C est la limite inférieure des longueurs des courbes de la surface dont C est la limite.

Nous avons déjà vu que si deux surfaces analytiques S et Σ ont le même $d s^2$, à toute courbe analytique, ou composée d'un nombre fini d'arcs analytiques de l'une correspond une courbe de même longueur sur l'autre. La courbe que nous avons désignée par Π est composée d'un nombre fini d'arcs analytiques, la définition de la longueur que nous venons de trouver prouve donc qu'à toute courbe rectifiable de S correspond une courbe de même longueur sur Σ et inversement.

Nous avons retrouvé le résultat classique pour que deux surfaces analytiques soient applicables l'une sur l'autre, les points de ces deux surfaces correspondant aux mêmes valeurs de u, v étant homologues: il est nécessaire et suffisant qu'elles aient même $d s^2$ (*).

(*) On pourrait étendre ce résultat à des cas plus généraux, en ne supposant pas les surfaces analytiques. Mais ce qui précède suffit pour légitimer les applications que l'on fait de la méthode classique,

78. Demandons-nous maintenant si toutes les surfaces applicables sur une surface analytique sont analytiques.

Par exemple toutes les surfaces applicables sur le plan sont-elles analytiques? — Soit C le cône

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

On sait, d'après la théorie classique, qu'il est applicable sur le plan. Effectuons la transformation ponctuelle

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \Psi(z),$$

Ψ ayant entre z_0 et z_1 une variation totale égale à $|z_0 - z_1|$. A C correspond une surface Γ applicable sur C; Γ est de révolution et n'est ni un cône, ni un cylindre, c'est une surface non analytique. Si en particulier nous prenons pour la fonction Ψ l'une de celles qui ont été définies au chapitre III et qui ont des maxima et des minima dans tout intervalle (*) la surface Γ *est une surface de révolution applicable sur le plan et ne contenant aucun segment de droite* (**).

79. Des exemples analogues à celui qui précède peuvent être obtenus par des procédés différents. Occupons-nous toujours des surfaces applicables sur le plan.

La théorie classique montre que les développables analytiques sont applicables sur le plan. Soit S une telle développable, G l'une de ses génératrices, G partage S en deux morceaux S_1, S_2.

Faisons glisser S_2 le long de G, puis faisons tourner S_1 autour de G. Après cette double opération géométrique on obtient une nouvelle surface Σ qui est applicable sur le plan ou plus exactement dont un morceau comprenant un segment de G, plus ou moins grand suivant la grandeur de la translation de S_2, est applicable sur le plan.

La même opération répétée un nombre infini de fois pour une infinité dénombrable de génératrices formant un ensemble partout dense sur la surface donnera, si les translations et les rotations sont convenablement choisies, une surface réglée applicable sur le plan et ne contenant aucun morceau de développable.

(*) C'est-à-dire que $f(x)$ étant la fonction définie au § 48 nous posons $\Psi(x) = f(x)$.

(**) D'une façon plus précise la méridienne de Γ ne contient aucun segment de droite, mais de plus Γ ne peut contenir un morceau de surface gauche de révolution donc Γ ne contient pas de droite.

Prenons maintenant une développable analytique S et soit C une courbe analytique tracée sur S. Réalisons la correspondance entre S et le plan, soit c la transformée de C. Soient A un point quelconque de C, P le plan tangent en A à S, Q le plan osculateur en A à C, et soit P' le symétrique de P par rapport à Q.

Les plans P' ainsi définis enveloppent une développable S' dont on peut réaliser l'application sur le plan de façon qu'à C corresponde c. Si C n'est pas géodésique S et S' sont deux surfaces différentes.

c partage le plan en deux régions A_1, A_2; C partage S en deux régions S_1, S_2 correspondant respectivement à A_1 et A_2; de même sur S' nous avons les deux régions S'_1, S'_2.

Soit S la surface $S_1 + S'_2$; c'est une surface non développable applicable sur le plan (*).

Pour bien définir Σ, c'est-à-dire pour distinguer entre $S_1 + S'_2$ et $S_2 + S'_1$ nous prenons arbitrairement un point M sur S, ce point M fixera celle des régions que nous désignons par S_1. Dans toutes les opérations ultérieures ce point M restera fixe.

Σ peut être définie comme la surface applicable sur le plan, formée de deux morceaux de développables analytiques dont la frontière commune est la ligne correspondante à c, et qui autour de M est confondue avec S; ce que nous rappellerons par la notation $\Sigma\,(S,\ c,\ M)$.

$c_1, c_2, c_3, \dots c_n$ étant n courbes analytiques planes ne se rencontrant pas, nous désignerons par $\Sigma\,(S,\ c_1,\ c_2, \dots c_n, M)$ la surface applicable sur le plan, formée de morceaux de développables analytiques dont les lignes singulières — c'est-à-dire les frontières communes à deux morceaux analytiques — sont les courbes qui correspondent à c_1, $c_2, \dots c_n$, et qui est confondue avec S autour du point M.

Soient maintenant c_1, c'_1; c_2, c'_2; ... des courbes analytiques planes ne se rencontrant pas.

Considérons les surfaces

$$S,\ \Sigma\,(S,\ c_1,\ c'_1,\ M),\ \Sigma\,(S,\ c_1,\ c'_1,\ c_2,\ c'_2,\ M)\dots,$$

si les courbes c_i, c'_i sont convenablement choisies, ces surfaces auront une surface limite applicable sur le plan.

Pour obtenir l'exemple du paragraphe précédent il faut choisir pour

(*) Ou du moins dont un morceau comprenant un arc de C est applicable sur le plan.

surface S le cône

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad z > 0,$$

pour courbes c_i, c'_i celles qui correspondent aux parallèles de ce cône passant par les points A_i, B_i (notations du paragraphe 48) situés sur la génératrice

$$y = 0, \qquad z = x$$

et pour point M, l'origine O.

Désignons par $\Sigma\ (S,\ c_1,\ c'_1,\ c_2,\ c'_2, \ldots O)$ la surface ainsi obtenue.

80. On peut passer de cette surface à son développement par une déformation continue. Pour le voir, considérons le développement du cône S supposé fendu le long de la génératrice $y = 0$, $z = x$. Ce développement est un secteur que nous supposons placé dans le plan des $x\,y$ du côté des y positifs, la génératrice $y = 0$, $z = x$ ayant pour transformée la partie positive de l'axe des x, et la portion du cône voisine de cette génératrice et située du côté des y positifs ayant pour transformée la portion du plan des $x\,y$ voisine de l'axe des x. Soit $S(0)$ ce secteur, c'est sur lui que sont tracées les circonférences c_i, c'_i. Désignons par $S(t)$ le cône

$$z^2 = t^2 (x^2 + y^2), \qquad z > 0,$$

ou plus exactement la portion de cône applicable sur $S(0)$ limitée par la génératrice $y = 0$, $z = t\,x$ et qui, dans le voisinage de cette génératrice, est du côté des y positifs.

$S(1)$ est le cône considéré précédemment S.

Si t représente le temps, par une déformation continue conservant les longueurs, on passe de la surface $S(0)$ (à l'origine des temps), au cône S (au temps 1). On passe de même de la surface $\Sigma\,[S(0), c_1, c'_1, c_2, c'_2 \ldots c_n, c'_n, O]$ à la surface $\Sigma\,[S, c_1, c'_1, c_2, c'_2 \ldots c_n, c'_n, O]$ par l'intermédiaire des surfaces $\Sigma\,[S(t),\ c_1,\ c'_1 \ldots c_n,\ c'_n,\ O]$.

Ces surfaces ont, t restant fixe, une surface limite $\Sigma\,[S(t),\ c_1, c'_1 \ldots O]$. La transformation ponctuelle

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \Psi_t(z)$$

qui permet de passer de cette surface de révolution, supposée entière, au cône $S(t)$, supposé entier est définie par une fonction $\Psi_t(z)$ qui admet entre z_0 et z_1 une variation totale égale à $(z_0 - z_1)$ (*). Donc cette surface est applicable sur $S(0)$.

(*) On le verrait en reprenant les raisonnements du paragraphe 48.

Comme les surfaces $S(0)$, $\Sigma\,[S(0), c_1, c'_1,\ldots c_n, c'_n, O]$, $\Sigma\,[S(0), c_1, c'_1,\ldots O]$ sont identiques, on voit que l'on passe par une déformation continue du secteur plan à la surface de révolution $\Sigma\,(S, c_1, c'_1, \ldots, O)$.

Il est facile de réaliser des modèles des surfaces de révolution applicables sur le plan que nous venons d'obtenir.

On sait, à l'aide d'une feuille de papier, réaliser le modèle d'un cône de révolution par une déformation image de la déformation du cône $S(t)$. De même on peut réaliser une déformation du papier, image de la déformation de la surface $\Sigma\,[S(t), c_1, O]$, ce qui donne un modèle de la surface $\Sigma\,[S, c_1, O]$ laquelle est formée de deux morceaux de cônes de révolution.

D'une manière générale on sait former un modèle de $\Sigma\,[S, c, c'_1, \ldots c'_n, O]$ par la déformation d'une feuille de papier; donc par ce procédé on réalise, avec telle approximation que l'on veut, l'image de $\Sigma\,(S, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots, O)$.

Si l'on admet que l'on peut réaliser par déformation du papier l'image de toute développable analytique, les images de toutes les surfaces définies au § 79 s'obtiendront par le même procédé.

La déformation d'une feuille de papier nous permet donc d'obtenir des images des surfaces non analytiques applicables sur le plan aussi parfaites que celles que l'on obtient par le même procédé pour représenter les surfaces analytiques. En ce sens, on peut dire que, pour prévoir l'existence de surfaces non analytiques applicables sur le plan, il suffisait de remarquer combien la forme des surfaces physiquement applicables sur le plan diffère de celle des surfaces développables.

Notons encore que le procédé en apparence le plus simple, celui qui s'est le premier présenté à l'esprit, permettant de faire correspondre un problème géométrique au problème physique de la déformation des surfaces, conduit à la considération de fonctions continues n'ayant pas de dérivées.

81. Les résultats précédents sont en contradiction avec les énoncés classiques relatifs à l'application et à la déformation des surfaces. Nous avons, par exemple, trouvé des surfaces applicables sur le plan et non développables.

La contradiction n'est qu'apparente. Les énoncés classiques sont en effet obtenus à l'aide de raisonnements qui supposent implicitement ou explicitement l'existence et la continuité de toutes les dérivées que l'on est conduit à considérer. Le nombre de ces dérivées varie d'une question à l'autre, dans quelques raisonnements on suppose même que les fonctions dont on s'occupe sont analytiques, de sorte que les énoncés classiques ne sont démontrés que pour certains ensembles de surfaces qui varient suivant la nature de la question. D'une manière générale, les démonstrations sont valables pour l'ensemble des surfaces analytiques et, le plus souvent, les surfaces analytiques ne forment qu'une classe très particulière dans l'ensemble de celles auxquelles s'appliquent les raisonnements employés.

Prenons par exemple ce théorème: Toutes les surfaces applicables sur le plan sont développables.

La démonstration qu'en a donnée Ossian Bonnet (*) *s'applique à toutes les surfaces ayant des rayons de courbure principaux variant d'une façon continue.* En effet Ossian Bonnet démontre que si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface, α, β celles du point correspondant du plan, on doit avoir

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha\,\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}}$$

et de là il conclut que les trois fonctions $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ sont fonctions de l'une d'entre elles, et la théorie ordinaire du déterminant fonctionnel suppose la continuité des dérivées qui interviennent dans le jacobien.

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\,\partial \beta}, \cdots$ doivent donc exister et être continues pour que le raisonnement d'O. Bonnet ait un sens, ce qui revient à supposer que la surface jouit de la propriété géométrique indiquée.

Les surfaces construites au paragraphe 78 nous montrent que non seulement l'énoncé du théorème d' Ossian Bonnet n'est légitimé que pour certaines surfaces mais encore qu'il n'est exact que si l'on fait certaines restrictions sur la nature des surfaces considérées.

82. Comme autre exemple prenons la réciproque du théorème d'Ossian Bonnet:

Toute surface développable est applicable sur le plan.

On la démontre ordinairement en supposant que l'on appelle surface développable la surface formée par les tangentes à une courbe gauche ayant des plans osculateurs variant d'une façon continue. car on met le $d s^2$ de la

(*) *Annali di Matematica,* 2.ᵉ Série, Tome VII. Cette démonstration est reproduite avec les mêmes notations dans le Tome I des *Leçons sur la théorie des Surfaces* de M.ʳ Darboux et dans les *Traités d'Analyse* de MM.ʳˢ Jordan et Picard.

surface sous la forme

$$d s_1^2 = \left(d s + d l + i l \frac{d s}{R}\right) e^{i \int \frac{d s}{R}} \cdot \left(d s + d l - i l \frac{d s}{R}\right) e^{-i \int \frac{d s}{R}}$$

(notations du traité d'Analyse de M.r Picard), R désignant le rayon de courbure de la courbe gauche.

On donne couramment au mot surface développable deux significations distinctes. On appelle ainsi:

1.° Une surface décomposable en cônes, cylindres et surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche.

2 ° La surface enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre. — C'est cette définition qui sert dans le théorème d'Ossian Bonnet.

Soit

$$u x + v y + w z + p = 0$$

ce plan. — L'enveloppe est définie par cette équation et

$$u' x + v' y + w' z + p' = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre t dont dépend le plan. C'est-à-dire que l'on obtient l'équation de la surface en résolvant par rapport à t cette seconde équation et en portant dans la première. D'après la théorie des équations implicites cela suppose l'existence et la continuité de u'', v'', w'', p''; mais il n'en résulte pas que la surface soit développable au sens 1.

Supposons en effet que φ'' soit continue, le plan

$$z = t x + t^2 y + \varphi(t) \tag{1}$$

a une enveloppe. Les génératrices données par (1) et

$$o = x + 2 t y + \varphi'(t) \tag{2}$$

varient d'une façon continue. Si donc la courbe donnée par (1), (2) et

$$o = 2 y + \varphi''(t)$$

était tangente aux génératrices elle serait rectifiable. Or on peut prendre $\varphi''(t)$ à variation non bornée, donc la surface (1), (2) est développable au sens 2 sans l'être au sens 1. Il est d'ailleurs évident que toute surface développable au sens 1 ne l'est pas nécessairement au sens 2.

L'énoncé de la réciproque du théorème d'Ossian Bonnet suppose donc que le mot développable ait le sens restreint donné au commencement de ce paragraphe.

Pour obtenir un résultat un peu plus général nous allons rechercher dans quels cas on peut appliquer sur le plan un cylindre, un cône, une surface formée des tangentes à une courbe gauche.

83. Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il faut qu'entre deux quelconques de ses points on puisse tracer une courbe rectifiable. Si les deux points choisis ne sont pas sur une même génératrice la projection de cette courbe, sur le plan de la section droite du cylindre, ne se réduit pas à un point et par suite est une courbe portée par la courbe section droite; c'est-à-dire que si

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

est la section droite la projection considérée a des équations qui s'obtiennent en remplaçant dans ces formules t par une fonction continue d'un paramètre.

La projection étant rectifiable, la section droite l'est aussi (*).

Pour qu'un cylindre soit applicable sur le plan il est donc nécessaire que sa section droite soit rectifiable; cela est aussi suffisant. En effet prenons sur la section droite une origine O, et faisons correspondre à tout point a de cette section droite le point A de l'axe des x tel que OA soit égal à la longueur de l'arc Oa de section droite. Faisons correspondre de plus à toute génératrice une parallèle à l'axe des y (les axes sont rectangulaires) les longueurs portées par les génératrices étant conservées. Cette correspondance réalise l'application.

Soient en effet c une courbe du cylindre, C la courbe correspondante du plan, a et b deux points de c, A et B les points correspondants de C, a_1 et b_1 les points de la section droite appartenant aux mêmes génératrices que a et b, A_1 et B_1 les points correspondants du plan. On a évidemment

$$\overline{A_1 B_1} > \overline{a_1 b_1}$$

et par suite $\overline{AB} > \overline{ab}$.

Les deux trapèzes rectangles $a a_1 b_1 b$, $A A_1 B_1 B$ ont mêmes bases, donc la différence entre les hypoténuses est inférieure à celle des hauteurs,

$$\overline{AB} - \overline{ab} > \overline{A_1 B_1} - \overline{a_1 b_1}.$$

(*) C'est de là que résulte une propriété qui nous a déjà servi: sur un cylindre dont la section droite n'est pas rectifiable, les seules courbes rectifiables sont portées par les génératrices.

D'où, si l'on divise c en arcs tels que $a\,b$

$$\Sigma\,\overline{A\,B} - \Sigma\,\overline{a\,b} = \Sigma\,(\overline{A\,B} - \overline{a\,b}) > \Sigma\,(\overline{A_1\,B_1} - \overline{a_1\,b_1}) = \Sigma\,\overline{A_1\,B_1} - \Sigma\,\overline{a_1\,b_1}\,.$$

Les deux premières sommes tendent vers les longueurs de C et c, les deux dernières vers les longueurs des projections de C et c sur l'axe des x d'une part, sur la section droite d'autre part. Ces deux dernières sommes sont égales, donc C et c ont la même longueur.

84. Résolvons le même problème pour les cônes. Soit un cône ayant pour sommet l'origine, s'il est applicable sur le plan il contient des courbes rectifiables non portées par les génératrices. Soit

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

une de ce courbes. La courbe rectifiable

$$x = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \quad y = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}, \quad z = \frac{\psi(t)}{\sqrt{f^2 + \varphi^2 + \psi^2}}$$

est portée par une directrice sphérique du cône. On appelle ainsi pour le cône dont les génératrices ont les cosinus directeurs

$$\alpha = f_1(t), \qquad \beta = \varphi_1(t), \qquad \gamma = \psi_1(t)$$

les courbes

$$x = k\,f_1(t), \qquad y = k\,\varphi_1(t), \qquad z = k\,\psi_1(t),$$

k étant indépendant de t.

Dans un cône applicable sur le plan la directrice sphérique est donc rectifiable. Et réciproquement tout cône à directrice sphérique rectifiable est applicable sur le plan comme on le voit en faisant correspondre à la directrice sphérique un arc de cercle de rayon égal à celui de la directrice sphérique et aux génératrices des rayons de cet arc.

Dans cette application si la directrice sphérique a une longueur supérieure à la circonférence qui porte sa transformée, à un point du plan correspondront plusieurs points du cône; mais autour de chaque point du cône, le sommet excepté, on peut trouver un fragment du cône pour lequel la transformation précédente réalise une correspondance biunivoque avec un certain domaine du plan; cette correspondance conserve les longueurs comme le montre un raisonnement analogue à celui du précédent paragraphe. On dit d'un tel cône qu'il est applicable sur le plan sans rechercher si après l'application un point du plan correspond ou non à un seul point du cône.

On peut encore dire que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône ou un cylindre soit applicable sur le plan est qu'il existe sur la surface une courbe rectifiable rencontrant toutes les génératrices, et ne passant pas par le sommet s'il s'agit d'un cône.*

Remarquons que, puisqu'il existe des fonctions dérivables à variation non bornée, il existe des courbes ayant des tangentes en tout point et qui ne sont pas rectifiables, *donc des cônes et des cylindres ayant des plans tangents suivant chaque génératrice et qui ne sont pas applicables sur le plan.*

85. Considérons une surface réglée et supposons qu'on puisse, sur cette surface, tracer deux courbes rectifiables ne se rencontrant pas et rencontrant chacune une fois chacune des génératrices; soient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; $x(\theta)$, $y(\theta)$, $z(\theta)$ ces deux courbes. A chaque point t de la première courbe faisons correspondre le point θ de la seconde situé sur la même génératrice, alors θ est une fonction continue toujours croissante ou décroissante de t. En remplaçant θ par sa valeur en fonction de t la seconde courbe devient $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$.

La courbe

$$x = x(t) - x_1(t), \qquad y = y(t) - y_1(t), \qquad z = z(t) - z_1(t)$$

rencontre toutes les génératrices du cône directeur de la surface dont le sommet est l'origine, cette courbe étant rectifiable, le cône est applicable sur le plan.

Ceci posé nous allons démontrer que *pour que la surface formée par les tangentes à une courbe gauche soit applicable sur le plan il est nécessaire et suffisant que son cône directeur soit applicable sur le plan.* Dans cet énoncé nous appelons surface applicable sur le plan une surface à tout point de laquelle on peut faire correspondre un point du plan, cette correspondance conservant les longueurs; à un point du plan correspond un nombre fini ou infini de points de la surface.

D'après ce qui précède la condition est nécessaire; pour montrer qu'elle est suffisante, effectuons d'abord l'application du cône directeur sur le plan. Nous allons maintenant faire correspondre à la courbe gauche donnée Γ une courbe plane γ, les arcs correspondants ayant la même longueur, la tangente en tout point a de γ étant parallèle au développement de celle des génératrices du cône directeur qui est parallèle à la tangente à Γ au point A homologue de a (*).

(*) Cette propriété du développement de l'arête de rebroussement doit être considérée comme la généralisation du théorème classique: la courbure de l'arête de rebroussement est conservée.

Pour construire γ, divisons Γ à l'aide des points A_i correspondant aux valeurs t_i du paramètre, et portons sur les génératrices $O\,a'_i$ correspondantes du développement du cône directeur des longueurs $O\,a'_i = s\,(t_i) - s\,(t_{i-1})$; $s\,(t)$ représentant la longueur de l'arc $(0,\ t)$ de Γ.

Soit $O\,M_i$ le vecteur somme de $O\,a'_1,\ O\,a'_2, \ldots O\,a'_i$. Considérons le polygone $O\,M_1\,M_2\,M_3 \ldots$, si nous supposons $t_0 = 0$ la longueur $O\,M_1\,M_2 \ldots M_i$ comptée sur ce polygone est égale à $s\,(t_i)$. Faisons correspondre ce polygone à Γ de façon que les longueurs soient conservées; alors M_i correspond à A_i.

Introduisons entre les t_i de nouvelles valeurs de t, d'où la suite de points

$$B_0\,(\text{ou } O),\ B_1,\ B_2 \ldots B_j\,(\text{ou } A_1),\ B_{j+1},\ B_{j+2} \ldots B_k\,(\text{ou } A_2) \ldots$$

et un nouveau polygone de sommets

$$O,\ N_1,\ N_2 \ldots N_j,\ N_{j+1} \ldots$$

Supposons que l'on augmente indéfiniment le nombre des t_i de façon que le maximum de $t_i - t_{i-1}$ tende vers zéro et montrons que ces polygones ont une limite, il suffira de démontrer que les points correspondant aux valeurs choisies t_i tendent uniformément vers des points limites.

Soient M_i et N_{α_i} deux sommets correspondants des deux polygones considérés. On a:

$$\begin{aligned} \text{long}\ M_i\,N_{\alpha_i} &\leqq |\text{long}\ O\,M_i - \text{long}\ O\,N_{\alpha_i}| \\ &\leqq \sum_1^i |\text{long}\ M_i\,M_{i-1} - \text{long}\ N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}}|. \end{aligned}$$

La longueur $M_i\,M_{i-1}$ est celle du segment $O\,a'_i$; celle de $N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}}$ est celle de la résultante des segments

$$O\,b'_{\alpha_{i-1}+1},\ O\,b'_{\alpha_{i-1}+2} \ldots O\,b'_{\alpha_i}.$$

La somme des longueurs de ces segments est $O\,a'_i$, et ils font entre eux des angles inférieurs à ε, si ε est le maximum des angles $a'_i\,O\,a'_{i-1}$ donc

$$0 \leqq \text{long}\ M_i\,M_{i-1} - \text{long}\ N_{\alpha_i}\,N_{\alpha_{i-1}} \leqq \varepsilon\,[s\,(t_i) - s\,(t_{i-1})].$$

Ainsi si l'on s'occupe de l'arc $(0,\ t)$ de Γ, quels que soient les nouveaux points choisis sur Γ entre les A_i, la distance entre deux points correspondants des polygones est inférieure à $\varepsilon\,s\,(t)$.

Or ε tend vers zéro avec le maximum de $t_i - t_{i-1}$. Les polygones ont donc une courbe limite γ.

Prenons pour axe des x dans le plan la génératrice $O a'_0$ du développement du cône directeur; si l'intervalle $(0, t)$ est assez petit (*) l'angle des génératrices $O a'_1$, $O a'_2 \ldots$ avec l'axe des x est inférieur à un droit et par suite les polygones dont γ est la limite ont des équations de la forme

$$y = f_1(x), \; y = f_2(x) \ldots$$

Supposons que ces équations représentent, non les polygones tels que $O A_1 A_2 \ldots$ mais les courbes que l'on obtient en raccordant les côtés consécutifs $A_{i-1} A_i$, $A_i A_{i+1}$ par des arcs de cercles. Nous supposerons ces arcs choisis assez petits pour que les longueurs des courbes tendent vers la longueur commune des polygones, c'est-à-dire vers celle de Γ. Les fonctions $f_i(x)$ ont des dérivées continues. De plus, quand i augmente, la dérivée $f'_i(x_0)$ tend vers le coefficient angulaire de la génératrice du développement du cône directeur qui correspond au point $x = x_0$ de γ, soit $\varphi(x_0)$.

Les fonctions bornées dans leur ensemble $f'_i(x)$ tendent vers $\varphi(x)$, donc on a:

$$\mathrm{Lim} \int_0^x f'_i(x)\, d x = \mathrm{Lim}\, f_i(x) = \int_0^x \varphi(x)\, d x.$$

Donc γ a pour équation:

$$y = \int_0^x \varphi(x)\, d x,$$

et comme $\varphi(x)$ est une fonction continue

$$y'_x = \varphi(x)$$

et les tangentes à γ sont bien parallèles aux génératrices correspondantes du développement du cône directeur.

De plus

$$\mathrm{Lim} \int_0^x \sqrt{1 + \overline{f'_i(x)}^2}\, d x = \int_0^x \sqrt{1 + \varphi^2(x)}\, d x$$

donc γ a même longueur que Γ.

(*) Cette restriction est sans importance, il suffit en effet de démontrer que, autour de chaque génératrice, on peut trouver un morceau applicable sur le plan pour qu'il en soit de même pour toute la surface.

86. Nous allons maintenant définir la correspondance entre le plan et la surface. A tout point de Γ correspond un point de γ comme il a été dit. A un point A de la surface situé sur la génératrice passant par le point A_1 de Γ correspond un point a situé sur la tangente à γ au point a_1 homologue de A_1 et tel que $a_1 a = A_1 A$, ces deux segments étant dirigés par rapport à γ et Γ, dans des sens correspondants.

Désignons par A' le point du cône directeur situé sur la génératrice parallèle à $A_1 A$ et tel que

$$\overline{A_1 A} = \overline{O A'}$$

et par a' le développement de A'. Alors on a

$$\overline{a_1 a} = \overline{O a'}.$$

Soient C une courbe rectifiable de la surface, c, C', c' les lieux des points a, A', a' correspondant aux points A de C. On a les égalités segmentaires, si A et B sont sur C,

$$\overline{A B} = \overline{A_1 B_1} + \overline{A' B'},$$

$$\overline{a b} = \overline{a_1 b_1} + \overline{a' b'},$$

donc

$$|\operatorname{long} A B - \operatorname{long} a b| \leqq |\operatorname{long} A_1 B_1 - \operatorname{long} a_1 b_1| + |\operatorname{long} A' B' - \operatorname{long} a' b'|.$$

Supposons que C ne rencontre qu'une seule fois chaque génératrice. Alors C' est rectifiable, § 85, et l'on a :

$$|\operatorname{long} A B - \operatorname{long} a b| \leqq |\operatorname{long\,arc} A_1 B_1 \text{ de } \Gamma - A_1 B_1| +$$
$$+ |\operatorname{long\,arc} a_1 b_1 \text{ de } \gamma - a_1 b_1| + |\operatorname{long\,arc} A' B' \text{ de } C' - A' B'| +$$
$$+ |\operatorname{long\,arc} a' b' \text{ de } c' - a' b'|.$$

Si donc on considère un polygone P inscrit dans C et les polygones p, P', p', P_1, p_1 correspondants on a :

$$|\operatorname{long} P - \operatorname{long} p| \leqq (\operatorname{long} \Gamma - \operatorname{long} P_1) + (\operatorname{long} \gamma - \operatorname{long} p_1) +$$
$$+ (\operatorname{long} C' - \operatorname{long} P') + (\operatorname{long} c' - \operatorname{long} p').$$

Donc C et c ont même longueur. Ce résultat s'étend immédiatement aux courbes qui rencontrent un nombre fini de fois les génératrices. Pour les autres, qui sont limites de courbes ne rencontrant les génératrices qu'un nombre fini de fois, nous pouvons affirmer que la longueur de la courbe de la surface est au moins égale à la longueur de la courbe correspondante du plan.

Mais la portion considérée de γ est convexe, les tangentes aux deux extrémités font un angle inférieur à un droit; donc, si l'on ne considère que l'une des nappes de la surface (limitée par Γ), la correspondance avec le plan est univoque.

Soit, dans la portion du plan correspondante, un segment $a\,b$; considérons-le comme la courbe c. On voit immédiatement que c est rectifiable, donc c' l'est et par suite aussi C. De là résulte que l'on a:

$$A\,B \leqq a\,b.$$

Ceci posé, soit une courbe rectifiable quelconque C, inscrivons dans cette courbe une ligne polygonale P d'un nombre fini ou infini de côtés, en ayant soin que tous les points de rencontre de C et de Γ soient des sommets (ou limites de sommets) de ce polygone, p étant le polygone correspondant on a:

$$\text{long}\, p \geqq \text{long}\, P,$$

d'où

$$\text{long}\, c \geqq \text{long}\, C.$$

En rapprochant ce résultat du précédent on a:

$$\text{long}\, c = \text{long}\, C$$

et la surface est applicable sur le plan.

Nous savons donc construire la courbe gauche la plus générale dont les tangentes forment une surface applicable sur le plan; il suffit en effet de se donner le cône directeur applicable sur le plan, ce que nous savons faire, et la fonction continue positive croissante $s(t)$ et d'en déduire Γ par une construction analogue à celle qui a donné γ.

87. Dans les paragraphes précédents on a appelé surface applicable sur le plan une surface S qui correspond à une surface Σ portée par le plan, la correspondance ponctuelle entre S et Σ étant biunivoque et conservant les longueurs.

S étant donnée, Σ n'est pas déterminée. En effet si S est un cône on peut prendre pour Σ un secteur. Soit G l'un de ses rayons qui partage Σ en Σ_1 et Σ_2 et soit Σ'_2 le symétrique de Σ_2 par rapport à G; on peut prendre pour Σ, $\Sigma_1 + \Sigma'_2$.

Les surfaces Σ que nous venons de définir relativement aux cônes et aux surfaces formées des tangentes à une courbe sont telles qu'autour de chacun de leurs points (ceux qui correspondent au sommet du cône, et aux points de l'arête de rebroussement exceptés) on puisse trouver un morceau de Σ ne recouvrant qu'une fois le plan. Soit Σ_1 un tel morceau, S_1 le morceau correspondant de S; entre S_1 et Σ_1 la correspondance ponctuelle est biunivoque et Σ_1 est un domaine plan.

C'est la surface Σ ainsi définie, qui est unique puisque deux de ces surfaces seraient composées de morceaux égaux disposés pareillement, que l'on appelle le développement de S.

88. Nous pouvons maintenant donner des exemples de *courbes gauches dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan.*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \varphi(t)$$

$\varphi(t)$ étant une fonction dont la dérivée est continue mais à variation non bornée, nous donnent un tel exemple. On sait que l'on peut même supposer que $\varphi''(t)$ existe, donc il y a des *courbes gauches ayant en tout point un plan osculateur, et dont les tangentes forment une surface non applicable sur le plan. Une telle surface admet des plans tangents; le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice; le plan tangent dépend donc d'un seul paramètre.*

89. Nous terminerons en cherchant les surfaces de révolution applicables sur le plan.

Démontrons d'abord que, si un morceau de surface de révolution est applicable sur le plan, les méridiens correspondent à des droites parallèles ou concourantes. Il est évident que les méridiens étant des lignes de longueur minimum ou géodésiques ont pour transformées des géodésiques du plan, c'est-à-dire des droites.

Soient A, B deux points d'un méridien, a, b leurs correspondants dans le plan; A', B' deux points d'un autre méridien situés respectivement sur les parallèles de A et B, a', b' leurs homologues.

On a $ab = a'b'$; d'ailleurs les deux courbes de la surface qui correspondent aux deux droites ab, $a'b'$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan bissecteur des méridiens de A et de A'; elles sont égales et

$$ab' = a'b.$$

La figure $abb'a'$ est donc un trapèze isocèle.

Soient A'', B'' les symétriques de A, B par rapport au plan méridien de A'; $a'' b'' b' a'$ est symétrique de $a b b' a'$ par rapport à $b' a'$, donc les trois droites $a b$, $a' b'$, $a'' b''$ ou bien concourent en un même point O qui est le centre de la circonférence passant respectivement par a, a', a'' et par b, b', b''; ou bien sont parallèles et a, a', a'' d'une part, b, b', b'' d'autre part sont en ligne droite, $a a'$ et $a b$ étant perpendiculaires.

Si l'on fixe la position d'un méridien par son angle θ avec le méridien de A et si A' correspond à θ_0, le raisonnement précédent montre que tous les points du méridien de A correspondant aux valeurs $\frac{m \theta_0}{2 n}$, m et n étant entiers, ont leurs homologues sur la circonférence ou la droite $a a' a''$; ils forment un ensemble partout dense sur cette circonférence. Il en est de même pour les points du méridien de B. Les points des méridiens de A et B correspondant à la même valeur de θ sont sur le même rayon. Donc les méridiens ont pour homologues des droites parallèles ou concourantes et les parallèles correspondent aux trajectoires orthogonales de ces droites.

Supposons d'abord que les droites homologues des méridiens soient parallèles, alors les parallèles sont égaux, donc ont le même rayon et puisque les méridiens sont rectifiables, les seules surfaces de cette nature sont

$$x = R \cos \theta, \qquad y = R \sin \theta, \qquad z = \varphi(t),$$

φ étant à variation bornée.

Supposons maintenant les droites concourantes. Soient A, B, C trois points du même méridien, en conservant les notations précédentes on a:

$$\frac{a b}{b c} = \frac{\text{arc } b b' - \text{arc } a a'}{\text{arc } c c' - \text{arc } b b'}$$

c'est-à-dire que si l'axe des z est l'axe de révolution, la méridienne est de la forme $z = f(x)$, et s étant son arc, on a:

$$\frac{\delta s}{\delta x} = \text{constante}$$

quel que soit δx. La distance de deux points d'abscisses x_0 et x_1 étant au moins $|x_0 - x_1|$, la constante est au moins égale à 1, nous poserons

$$\delta s = \sqrt{1 + K^2}\, \delta x.$$

Si K est nul, la surface est engendrée par l'axe des x tournant autour de l'axe des z, c'est le plan des $x y$.

Supposons maintenant K positif. Une solution particulière du problème s'obtient en effectuant la transformation ponctuelle

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = \psi(z)$$

(ψ ayant dans tout intervalle de longueur l une variation totale égale à l) sur le cône

$$z^2 = K^2(x^2 + y^2);$$

nous allons démontrer que c'est la solution générale.

Soit en effet $z = f(x)$ une méridienne, si $v(x)$ est la variation totale de f entre x_0 et x, la surface de révolution dont $z = v(x)$ est la méridienne est aussi applicable sur le plan. Nous allons démontrer que $v(x)$ est égale à $K(x - x_0)$.

Soient deux points (x_0, x_1) de la courbe $z = v(x)$, la longueur de l'arc de cette courbe compris entre ces deux points est supérieure à

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + \overline{v(x_1) - v(x_0)}^2};$$

cette quantité doit donc être inférieure à $K|x_1 - x_0|$ c'est-à-dire que l'on a:

$$0 < \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} \leqq K.$$

Ceci posé considérons un polygone inscrit dans $z = v(x)$ et le polygone Q inscrit dans $z = K(x - x_0)$ dont les sommets ont les mêmes abscisses, il est évident que

$$\text{long } P \leqq \text{long } Q.$$

Des considérations de géométrie élémentaire montrent que, si R est le polygone inscrit dans $z = K(x - x_0) - v(x)$ dont les sommets ont mêmes abscisses que ceux de P et Q, on a:

$$\text{long } Q - \text{long } P \geqq \text{long } R - (x_1 - x_0)$$

si l'on s'occupe de l'intervalle $x_1 - x_0$.

Si l'on fait tendre vers zéro le maximum de la longueur des côtés de P, le second membre ne tend vers zéro que si $v(x) - K(x - x_0) = 0$, or le premier membre tend vers zéro, donc:

$$v(x) = K(x - x_0).$$

Les seules surfaces de révolution applicables sur le plan sont donc celles que *l'on obtient par la transformation du § 78 appliquée aux surfaces de révolution analytiques applicables sur le plan, l'axe de révolution étant* Oz.

90. Considérons une surface applicable sur le plan. Si l'on exprime les coordonnées d'un point de cette surface en fonction de celles du point correspondant du plan, on a la surface sous forme rectifiable, elle est donc quarrable.

Nous allons démontrer que dans l'application sur le plan les aires sont conservées. Le raisonnement s'étendrait d'ailleurs aux surfaces applicables sur une surface analytique quelconque.

Soit une surface S applicable sur le plan (u, v). Divisons le plan (u, v) à l'aide de parallèles aux trois directions $\omega = 0$, $\omega = 60^\circ$, $\omega = 120^\circ$ en triangles équilatéraux. A un réseau de ces triangles correspond un polyèdre inscrit dans la surface S; chaque face de ce polyèdre étant d'aire inférieure au triangle correspondant du plan (u, v), l'aire de S est au plus celle du domaine correspondant dans (u, v).

Considérons maintenant une suite de surfaces S_i tendant vers S. Choisissons arbitrairement un nombre l et soit m_i le minimum de la longueur des courbes Γ_i de S_i qui correspondent à celles Γ joignant les couples de points du plan (u, v) qui sont distants d'au moins l.

La plus petite limite des m_i quand $\frac{1}{i}$ tend vers zéro est au moins l. En effet si elle était inférieure à l on pourrait trouver une suite de courbes $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \ldots$ dont les longueurs auraient une limite inférieure à l. Or cela est impossible car on démontrerait l'existence d'une courbe de longueur inférieure à l limite de certaines des courbes $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2} \ldots$ c'est-à-dire d'une courbe correspondant à une courbe Γ du plan (u, v).

Donc si i est supérieur à un certain nombre i_0 les courbes joignant des points des côtés opposés d'un carré de côté l du plan (u, v) ont pour homologues des courbes de la surface S_i de longueurs supérieures à $l - \varepsilon$.

Soient M et M_i les parties de S et S_i correspondant à ce carré. Nous pouvons sans augmenter la plus petite limite des aires des S_i, supposer que les surfaces S_i sont analytiques.

Divisons M_i par deux séries de courbes orthogonales C_p, C'_p homologues de courbes du plan (u, v) joignant des points des côtés opposés du carré. Soient $a_{j,k}$ la longueur de l'arc déterminé sur C_k par C'_j et C'_{j+1} et $a'_{k,j}$ la longueur de l'arc déterminé par C_j et C_{j+1} sur C'_k. L'aire de M_i est la limite de la somme

$$\sum_k \sum_j a_{kj}\, a'_{kj}$$

quand le maximum de a_{kj} et a'_{kj} tend vers zéro. Or cette somme est évidemment supérieure à $(l - \varepsilon)^2$, donc la plus petite des aires des M_i est l^2.

Lorsqu'une surface est applicable sur un plan, les parties correspondantes du plan et de la surface ont donc même aire si elles sont quarrables et, si elles ne le sont pas, mêmes aires intérieure et extérieure.

Lorsque deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre, les longueurs, les aires et les angles sont conservés; on voit que lorsqu'il s'agit de surfaces non analytiques les longueurs et les aires sont encore conservées, mais les angles ne le sont plus (*).

CHAPITRE VI.

Le Problème de Plateau.

91. Nous nous proposons dans ce chapitre de démontrer l'existence d'une surface S ayant pour frontière un contour C donné et pour aire intérieure l'aire minima de C. L'aire de toute autre surface ayant pour frontière C sera au moins égale à celle de S; en ce sens l'aire de S sera un minimum et la surface S pourra être dite *minima*. Dans le cas où l'on se limite à la considération des surfaces ayant tous les éléments que l'on considère ordinairement (plans tangents, rayons de courbure, etc.) ce problème a reçu le nom de *problème de* Plateau.

Il n'est pas démontré que le problème de Plateau ait une solution; nous allons voir que si l'on n'astreint la surface minima à aucune condition supplémentaire, l'existence de cette surface peut être facilement démontrée. Les résultats que nous allons obtenir peuvent ainsi être considérés comme préparant l'étude de l'existence de la solution du problème de Plateau.

(*) Supposons réalisée l'image matérielle d'une surface. L'aire, au sens usuel du mot, d'une telle surface peut être mesurée par la masse de la matière qui la constitue. Dans une déformation de la surface cette masse ne change pas, aussi l'aire, au sens usuel du mot, ne change pas. L'une des conditions que doit remplir l'aire, au sens mathématique, pour qu'on puisse l'assimiler à l'aire, au sens usuel du mot, et pour qu'on puisse considérer la déformation physique d'une surface comme l'image d'une déformation géométrique, est donc d'être inaltérée par les déformations géométriques qui conservent les longueurs.

Les raisonnements qui suivent s'appliquent à d'autres problèmes que celui de PLATEAU; pour énoncer ces problèmes nous allons d'abord définir certaines intégrales de courbe et de surface.

92. Considérons une courbe C dont les points dépendent d'une façon continue d'un paramètre t, une fonction de t sera dite attachée aux points de C. Supposons C rectifiable et $f(t)$ continue. Divisons C en un nombre fini d'arcs partiels de longueurs l_1, l_2... et soient f_1, f_2,... des valeurs de f pour certains points de ces arcs partiels. La somme $\Sigma\, l_i f_i$ quand le maximum des l_i tend vers zéro, tend vers une limite déterminée (*) que nous représenterons par

$$\int_C f(t)\, d\, s.$$

Si $f(t) = 1$ l'intégrale représente la longueur.

Considérons une surface quarrable S dont les points dépendent d'une façon continue de (u, v) et une fonction continue $f(u, v)$ attachée aux points de cette surface. Divisons S en un nombre fini de morceaux quarrables d'aires a_1, a_2,... et soient f_1, f_2,... des valeurs de f pour certains points de ces morceaux quarrables. Quand le maximum du diamètre de ces morceaux et le maximum de a_i (**) tendent vers zéro la somme $\Sigma f_i a_i$ tend vers une limite déterminée que nous représenterons par

$$\iint_S f(u, v)\, d\, a.$$

Si $f(u, v) = 1$ l'intégrale représente l'aire.

On aurait pu définir ces intégrales par le procédé suivant. Il est facile de faire correspondre à C un segment, les longueurs étant conservées; il est possible de démontrer qu'on peut établir entre les points de S et les points d'un plan une correspondance conservant les aires (***). Ces correspondances établies, elles définissent sur la droite ou dans le plan une fonction F qui correspond à f; l'intégrale de F est égale à l'intégrale de courbe ou de surface que nous avons définie.

(*) Il suffit de reprendre le raisonnement classique relatif à l'existence de l'intégrale d'une fonction continue pour obtenir ce résultat.

(**) Il est facile de démontrer que cette seconde condition est une conséquence de la première.

(***) Il se peut que cette correspondance ne soit pas univoque.

L'un et l'autre procédé permettent d'indiquer dans quels cas on dira que f est sommable et par suite d'étendre la définition de l'intégrale au cas où f n'est pas continue; mais cela ne nous sera d'aucune utilité.

93. Considérons une famille de courbes rectifiables C et une famille de surfaces quarrables S. Et soit f une fonction définie dans l'ensemble des points de tous les C ou S, et jamais négative. Nous supposerons que f est continue dans cet ensemble. Les intégrales

$$\int_C f\,d\,s, \quad \iint_S f\,d\,a$$

ont alors un sens. Démontrons que si C (ou S) est la limite des courbes C_i (ou des surfaces S_i) prises dans la famille considérée, l'intégrale relative à C (ou S) est au plus égale à la plus petite des limites des intégrales relatives à C_i (ou S_i).

Divisons C (ou S) en un nombre fini de morceaux de longueurs (ou d'aires) m_1, m_2... et soient γ_1, γ_2... les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants. A la division de C (ou S) correspond sur C_i (ou S_i) une division en morceaux de longueurs (ou d'aires) m_1^i, m_2^i,...; les valeurs minima de f dans les morceaux correspondants sont γ_1^i, γ_2^i,...

Quand i augmente indéfiniment γ_j^i a pour limite γ_j et la plus petite des limites de m_j^i est au moins égale à m_j, donc la plus petite limite de $\Sigma_j m_j^i \gamma_j^i$ est au moins égale à $\Sigma_j m_j \gamma_j$.

Il suffit d'augmenter indéfiniment le nombre des morceaux de façon que le maximum de leurs diamètres tende vers zéro pour avoir la propriété énoncée.

En adoptant des dénominations dues à M.r Baire on peut dire que l'intégrale considérée est partout égale à son minimum ou encore que, en tant que fonction de C (ou S), elle est semi-continue inférieurement.

Si la famille de courbes (ou surfaces) comprend toutes les surfaces rectifiables (ou toutes les surfaces quarrables) la valeur de l'intégrale pour C (ou S) est exactement la plus petite limite des intégrales relatives aux courbes (ou surfaces) dont C (ou S) est la limite (*); puisqu'on peut choisir les C_i (ou S_i) de manière que γ_j^i ait pour limite γ_j.

(*) Cette propriété aurait pu être prise comme définition de l'intégrale considérée. Cette méthode a l'avantage de suggérer des définitions des intégrales

$$\int f(x, y, x', y')\,d\,t$$

$$\iint f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) du\,dv$$

94. Supposons que les courbes C (ou que les surfaces S) soient toutes celles qui satisfassent à certaines conditions aux limites, — extrémités de C données, ou sur des courbes ou des surfaces données, — frontière de S donnée ou sur des surfaces données.

Nous supposerons de plus que C (ou S) est assujettie à rester dans une portion limitée Π de l'espace, ou que C se déplace sur une surface Σ n'ayant pas de nappe infinie. f étant une fonction continue dans Π ou sur Σ, nous nous proposons de chercher si la fonction

$$\varphi(C) = \int_C f\,ds \qquad \left(\text{ou } \varphi(S) = \iint_S f\,da\right)$$

atteint son minimum.

Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une fonction $f(E)$ de certains éléments E atteint son minimum, par la méthode qui sert pour les fonctions continues de points, on est conduit aux deux opérations suivantes:

I. Choisir une suite d'éléments $E_1, E_2 \dots$ ayant un élément limite e, et tels que $f(E_1), f(E_2) \dots$ tendent vers la limite inférieure $m\,f(E)$ de $f(E_i)$.

II. Démontrer que $f(e) = m\,f(E)$.

D'après ce que nous venons de dire si c (ou s) est la limite de C_i (ou S_i) $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] est au plus égale à la plus petite des limites des $\varphi(C_i)$ [ou $\varphi(S_i)$]; d'ailleurs $\varphi(c)$ [ou $\varphi(s)$] est au moins égale à $m\,\varphi(C)$ [ou $m\,\varphi(S)$], donc nous avons effectué l'opération II.

95. Pour effectuer l'opération I, nous emploierons une méthode que M.r Hilbert a indiquée dans une note des *Nouvelles Annales* (Août 1900), note qu'il avait déjà présentée en septembre 1899 au congrès de Munich.

Ou bien on sait qu'il existe un élément e tel que $f(e) = m\,f(E)$ ou bien on sait qu'on peut trouver une suite d'éléments $E_1, E_2 \dots$ tels que $f(E_1), f(E_2) \dots$ aient pour limite $m\,f(E)$. Tout revient à choisir parmi les E_i une suite d'éléments ayant un élément limite.

Nous supposerons que E est une fonction de n variables, continue par rapport à l'ensemble $x_1, x_2 \dots x_n$ de ces variables, définie dans une portion D de l'espace $(x_1\,x_2 \dots x_n)$, et que l'on a toujours $|E| < P$. Alors E sera dite

---

dans le cas où les fonctions f sont continues et jamais négatives. Le cas où f est continue se ramène à celui-là par l'addition d'une constante. Avec ces définitions on peut faire des applications plus étendues des remarques qui suivent.

la limite (*) de E_i si, quel que soit ε, on peut choisir i assez grand pour que l'on ait:

$$(p > 0) \qquad |E(x_1, x_2, \ldots x_n) - E_{i+p}(x_1, x_2 \ldots x_n)| < \varepsilon$$

pour tout point de D.

M.r Hilbert remarque que si l'on a certains renseignements sur la variation de la fonction E_i il suffit de choisir parmi les E_i une suite d'éléments e_j tels que, à tout point d'un ensemble A partout dense dans D, corresponde une valeur de E_j qui a une limite quand j augmente indéfiniment, pour que les E_j aient une limite. Pour préciser, nous supposerons que l'ensemble des nombres dérivés des E_i considérées comme fonctions d'une seule, quelconque, des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ soit borné.

Nous supposons donc que l'on ait, quels que soient i, x_1, $x_2 \ldots x_n$, h, p

$$\left| \frac{E_i(x_1, x_2 \ldots x_p, x_{p+1} \ldots x_n) - E_j(x_1, x_2, \ldots x_p + h, x_{p+1} \ldots x_n)}{h} \right| < M, \qquad (1)$$

M étant fixe. Nous prenons pour A un ensemble dénombrable partout dense dans P; soient P_1, $P_2, \ldots$ les points de A. Soient ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ des nombres décroissant jusqu'à zéro.

Les différentes valeurs $E_i(P_1)$ étant toutes, en valeur absolue, inférieures à P ont au moins une valeur limite α. Nous appelons E_i^1 celles des E_i telles que:

$$|E_i(P_1) - \alpha_1| < \varepsilon_1$$

et nous appelons e_1 l'une d'elles.

Les valeurs $E_i^1(P_2)$ ont au moins une valeur limite α_2. Nous appelons E_i^2 celles des E_i^1 telles que

$$|E_i^1(P_2) - \alpha_2| < \varepsilon_2,$$

e_2 est l'une des E_i^2. Nous définissons de même e_3, $e_4, \ldots$; α_3, $\alpha_4, \ldots$

Nous allons montrer qu'on peut définir une fonction e continue dans D par les égalités $e(P_i) = \alpha_i$.

Des égalités (1) on déduit

$$\left| \frac{E_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2 \ldots x_n + h_n) - E_i(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} \right| <$$

$$< \frac{|h_1| + |h_2| + \cdots + |h_n|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} M.$$

(*) Nous supposons donc que la fonction E_i tend uniformément vers E. Le mot limite a été employé précédemment dans un sens différent, voir par exemple § 23.

Le maximum du second membre est $\sqrt{n}\, M$, c'est donc aussi le maximum du premier. L'inégalité précédente s'écrit donc

$$\left| \frac{E_i(P) - E_i(Q)}{l(PQ)} \right| < \sqrt{n}\, M,$$

le symbole $l(PQ)$ représentant ce que l'on peut appeler la distance de P à Q.

Ceci posé, considérons tous les points de A distants d'un point M de D de moins de η, ils sont distants entre eux de moins de 2η, donc les α correspondants diffèrent de moins de $2\eta\sqrt{n}\, M$. Donc tous les α correspondant aux P_i tendant vers M ont une valeur limite $e(M)$ qui est fonction continue de M. De plus on a aussi :

$$\left| \frac{e(P) - e(Q)}{l(PQ)} \right| < \sqrt{n}\, M.$$

Désignons par l_i le maximum, quand M parcourt D, de la limite inférieure de $l(MP_1)$, $l(MP_2), \ldots l(MP_i)$, l_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. On a, j étant choisi inférieur à i, de façon que $l(MP_j)$ ne soit pas supérieure à l_i,

$$\begin{aligned} |e_i(M) - e(M)| &\leq |e_i(M) - e_i(P_j)| + |e_i(P_j) - e(P_j)| + |e(P_j) - e(M)| \\ &\leq l_i\sqrt{n}\, M + \varepsilon_i + l_i\sqrt{n}\, M, \end{aligned}$$

donc e est la limite de la suite $e_1, e_2 \ldots$

Nous avons supposé que E est une fonction ; si E est un ensemble d'un nombre fini de fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, la conclusion subsiste.

Il reste à voir si l'élément limite e ainsi défini fait bien partie des éléments E considérés (*).

96. Reprenons la fonction

$$\varphi(C) = \int_C f\, ds.$$

L'élément C est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées

(*) Dans sa note des *Nouvelles Annales*, M.r Hilbert n'a exposé sa méthode pour établir l'existence de l'élément limite que sur deux exemples particuliers. Il me semble bien que la méthode qui ressort de ces deux exemples est celle du § 95. En tous cas les résultats de ce paragraphe suffisent à démontrer l'existence des éléments limites dans les deux exemples de M.r Hilbert.

des points de C. Supposons que l'on ait $f > k > 0$, alors si $\varphi(C_i)$ tend vers $m\varphi(C)$ la longueur de C_i n'augmente pas indéfiniment. Soit L un nombre supérieur aux longueurs des C_i. Les coordonnées des points de ces courbes peuvent être exprimées par des fonctions d'un paramètre t variant entre 0 et L, dont les nombres dérivés sont inférieurs à 1. D'où l'existence d'un élément limite c, puisque nous supposons que C reste dans la portion finie Π de l'espace ou sur la surface Σ. c fait bien partie de la famille des courbes C.

Nous démontrons donc immédiatement l'existence du minimum dans un cas assez étendu (*).

97. Considérons la fonction

$$\varphi(S) = \iint_S f\, d\, a.$$

L'élément S est l'ensemble des trois fonctions qui représentent les coordonnées des points de S. Supposons que l'on ait trouvé une suite S_1, $S_2 \ldots$ telle que $\varphi(S_1)$, $\varphi(S_2) \ldots$ tendent vers $m\varphi(S)$; supposons toutes les S_i exprimées à l'aide des coordonnées (u, v) des points d'un domaine D par des fonctions dont les nombres dérivés sont bornés, alors ce qui précède démontre l'existence d'un élément limite.

Nous obtiendrons un exemple où ces conditions sont réalisées en supposant $f = 1$, les surfaces S étant toutes celles qui ont une frontière donnée C satisfaisant aux conditions suivantes:

1.° La projection de C sur le plan des (x, y) est convexe.

2.° Tout plan qui contient trois points au moins de C fait avec le plan des xy un angle inférieur à α. $(\alpha < 90°)$.

De la première condition résulte que c est rectifiable, donc le cylindre projetant C est applicable sur le plan. Dans cette application c devient $\omega\xi$, et l'une des génératrices $\omega\eta$; C devient C_1 d'équation:

$$\eta = \psi(\xi).$$

Toute sécante de C fait, d'après la condition 2, un angle moindre que α avec le plan des xy, donc a fortiori toute sécante de C_1 fait avec $\omega\xi$ un angle inférieur à α. ψ a donc des nombres dérivés inférieurs, en valeur absolue, à $tg\,\alpha$; C_1 et C sont rectifiables.

(*) Pour $f = 1$ on retrouve l'un des exemples que traite M.r Hilbert.

Nous avons trouvé précédemment que C étant rectifiable son aire minima est la limite de celles des polygones inscrits dans C et tendant vers C. Soit P_1 un polygone inscrit dans C, soit n le nombre de ses sommets. Désignons par S_p celui des polyèdres à faces triangulaires qui a P_1 pour frontière, $n+p$ sommets (sur P_1 ou non) et dont l'aire est la plus petite possible.

S_p existe et peut théoriquement être obtenu par des opérations algébriques car tous les polyèdres à $n+p$ sommets peuvent se ramener par des déplacements continus des p sommets variables à un nombre fini de types, et de tels déplacements font varier l'aire d'une façon continue.

S_p ne peut avoir aucun angle polyèdre convexe, ou plus généralement aucun angle polyèdre qu'un plan P puisse couper suivant un contour fermé. Soient en effet S le sommet d'un tel angle, Γ le contour formé par ceux des côtés, ne passant pas par S, des faces qui passent en S. Γ est tout entier d'un même côté de P, donc l'angle polyèdre obtenu en joignant les sommets de Γ à la projection s de S sur P a ses faces respectivement plus petites que celles de l'angle polyèdre considéré.

S_p ne peut être coupé par un plan P suivant une courbe fermée; en effet, cette courbe limiterait sur S_p une surface Σ, soit M un point de Σ, déplaçons le plan P parallèlement à lui-même du côté de M jusqu'à la position limite Π qu'il ne peut franchir sans cesser de rencontrer Σ. Tous les sommets de Σ qui sont dans Π sont des sommets d'angles polyèdres qui peuvent être coupés par un plan suivant un contour fermé (*), ce qui est impossible.

Considérons maintenant le plan P d'une face et montrons qu'il rencontre le contour P_1, en trois points au moins. Tout d'abord il est évident que P contient au moins deux points de P_1, sans quoi on pourrait couper la surface suivant une courbe fermée par un plan voisin de P. Supposons que P ne contienne que deux points de P_1, A et B. Soit γ le contour d'un groupe de faces contenues dans P. La section de la surface par P se compose de groupes de faces et d'une ligne brisée joignant A et B à tous ces groupes de faces. Il existe donc une ligne brisée tracée sur la surface et dans P, joignant A au contour γ, soit $A\alpha$ et une ligne analogue $B\beta$. Joignons α à β par une ligne l intérieure à γ et soient AM_1B, AM_2B les deux parties de P_1. Les

(*) Cela n'est pas absolument exact. Les sommets de Σ qui sont dans Π sont seulement tels que chacun des angles polyèdres correspondants est tout entier d'un même côté d'un plan; mais en remarquant que la frontière de Σ n'a pas de point dans Π, on démontrerait l'existence d'angles polyèdres ayant le propriété indiquée.

contours $A\,M_1\,\beta\,l\,\alpha\,A$, $A\,M_2\,B\,\beta\,l\,\alpha\,A$, ne traversent pas le plan P il en est donc de même des portions de S_p limitées par ces contours. Or sur l'une des deux lignes brisées α, β, en lesquelles est divisé γ, on pourra trouver un sommet Q tel que les deux côtés qui aboutissent en Q forment un angle aigu. On voit sans difficulté qu'un plan voisin de P coupe l'angle polyèdre Q suivant une courbe fermée; ce qui est impossible.

Dans ce qui précède nous n'avons rien supposé sur le polygone P_1, il nous faut tenir compte maintenant du fait que, comme C, il vérifie les deux conditions énoncées au début de ce paragraphe.

La projection de S_p est alors le domaine du plan des $x\,y$ limité par la projection p_1 de P_1, chaque point de ce domaine étant projection d'un seul point de S_p (*). L'équation de S_p sera donc de la forme

$$z = f(x, y),$$

f ayant des nombres dérivés au plus égaux, en valeur absolue, à $tg\,\alpha$ et étant définie dans le domaine limité par p_1.

Considérons l'une des surfaces S_p d'indice assez grand pour que son aire diffère de l'aire minima de P_1 de moins de ε_1. Ajoutons à S_p les triangles qui ont pour bases les côtés de P_1 et respectivement pour sommets les milieux des arcs que limitent sur C les bases correspondantes.

La nouvelle surface a un contour P'_1 sur lequel nous opérons comme sur P_1, et ainsi de suite.

Nous sommes conduits à une surface S^1

$$z = f_1(x, y),$$

f_1 étant définie dans c, et ayant ses nombres dérivés inférieurs à $tg\,\alpha$. Si a_1 est l'aire de la portion du plan comprise entre c et p_1, l'aire de S^1 diffère de l'aire minima de P_1 de moins de

$$\varepsilon_1 + \frac{a_1}{\cos\alpha}.$$

Choisissons une suite de polygones P_1, P_2... inscrits dans C et tendant vers C et des nombres ε_1, ε_2... décroissant jusqu'à zéro. A P_i on fait correspondre une surface $S^i\,[z = f_i(x, y)]$ dont l'aire diffère de l'aire minima

(*) S'il en était autrement on pourrait en effet trouver un plan parallèle à oz qui couperait S_p suivant une courbe fermée.

de P_i de moins de

$$\varepsilon_i + \frac{a_i}{\cos \alpha}.$$

La méthode de M.r Hilbert appliquée aux fonctions $f_i(x, y)$ nous permet de trouver une surface S

$$z = f(x, y)$$

limite de certaines des surfaces S^i. ε_i et a_i tendant vers zéro, les aires des S_i tendent vers l'aire minima de C, qui est donc l'aire de S. Nous savons de plus que les nombres dérivés de f sont, en valeur absolue, au plus égaux à $tg\, \alpha$.

Nous avons donc prouvé, dans un cas particulier, l'existence d'une solution pour le problème de Plateau généralisé que nous nous étions proposé.

98. L'exemple précédent nous montre que les raisonnements du § 95 ne suffisent pas pour prouver immédiatement l'existence d'une surface rendant minimum la fonction $\varphi(S)$, tandis qu'ils suffisaient dans un cas étendu pour la fonction $\varphi(C)$. En traitant le cas particulier relatif à l'intégrale $\int\int_S d\,a$ nous allons voir comment l'on peut dans certains cas démontrer l'existence de l'élément limite. Les raisonnements suivants s'appliqueront toutes les fois qu'on voudra démontrer l'existence d'une surface limitée par un contour donné C et rendant minimum $\varphi(S)$ si l'on sait:

1.° qu'il existe une suite de surfaces S_1, $S_2 \ldots$ dont les aires sont bornées et telles que $\varphi(S_i)$ tende vers $m\, \varphi(S)$,

2.° que la distance de deux points de S_i reste, quel que soit i, inférieure à un nombre fixe l, qui tend vers zéro avec le plus grand diamètre de C.

99. Soit C le contour donné. Soient S_1, $S_2 \ldots$ des surfaces polyédrales dont les aires tendent vers l'aire minima de C et dont les contours P_1, $P_2 \ldots$ tendent vers C; nous supposerons que ces contours n'ont aucun côté parallèle à l'un des plans coordonnés, et que les surfaces S_i n'ont aucune face parallèle aux plans coordonnés, ce qui est toujours légitime.

Divisons C à l'aide d'un nombre fini de points A, B, $C \ldots K$, en arcs tels que la projection sur $o\,x$ d'un quelconque de ces arcs couvre un segment de longueur au plus égale à ε; soient A_i, $B_i \ldots K_i$ les points de division correspondants sur P_i.

Coupons par un plan parallèle au plan des yz passant entre A et B, la section de S_i par ce plan se compose d'un certain nombre de lignes brisées. Le minimum de la somme des longueurs de ces lignes reste, quel que soit i, inférieur à un nombre fixe Z, ce minimum est atteint pour une certaine abscisse x_i du plan sécant $P(x_i)$. Soit L_i celle (ou l'une de celles) des lignes brisées, qui composent la section $(S_i, P(x_i))$, qui joint un point situé entre A_i et B_i à un autre point de $P(x_i)$. Les abscisses et les longueurs des L_i forment un ensemble borné, donc il est possible de choisir une suite de surfaces S_i pour lesquelles les L_i aient une courbe limite L (*). Cette courbe L est située dans un plan parallèle à yoz passant entre A et B et joint deux points de C.

On voit que l'on peut, parmi les S_i, choisir une suite S_1^1, S_2^1... telle que certaines sections de ces surfaces par des plans parallèles à yoz aient des courbes limites. Ces courbes limites sont rectifiables, chacune d'elles joint deux points de C; il existe au moins une extrémité de ces courbes entre A et B, au moins une entre B et C, etc.

Soient a, b deux extrémités consécutives sur C de deux courbes limites α, β; les plans de α et β, qu'on peut toujours supposer distincts, sont distants d'au plus 2ε. Soient c et d les deux autres extrémités de α et β, et soient a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i les éléments correspondant à a, b, c, d, α, β sur S_i^1. Le contour $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i limite sur S_i^1 une surface; d et c sont donc deux points consécutifs sur C sans quoi d_i et c_i ne seraient pas consécutifs sur S_i^1, non plus que a_i et b_i ce qui est impossible. Il en résulte que la projection de l'arc cd sur ox couvre un segment de longueur au plus égale à 2ε.

Le contour $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i est tout entier compris entre deux plans parallèles à yoz, P_i, Q_i, que nous prendrons aussi rapprochés que possible. Remplaçons la portion Σ de S_i^1 limitée par le contour considéré par ce que l'on obtient en remplaçant les parties de Σ non comprises entre P_i et Q_i par les parties de ces plans limitées par les courbes (P_i, Σ), (Q_i, Σ).

En faisant de même pour chacun des contours tels que $a_i b_i$, β_i, $d_i c_i$, α_i et chaque surface S_i^1 nous obtenons une nouvelle suite de surfaces (**) $S_1^{(1)} S_2^{(1)}$... On peut dire que le contour C est la somme des contours $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$... tels

(*) C'est le raisonnement qui nous a déjà servi § 61.

(**) Cette opération introduit des faces parallèles aux plans coordonnés, mais cela sera sans importance pour la suite.

que $a\,b$, β, $d\,c$, α; chacun de ces contours est compris entre deux plans parallèles à $y\,o\,z$ distants de moins de $2\,\varepsilon$. Au contour $C_j^{(1)}$ correspond sur $S_i^{(1)}$ un contour qui limite une surface $S_{i,j}^{(1)}$.

En raisonnant sur chacune des surfaces $S_{i,j}^{(1)}$ comme sur S_i, et en faisant jouer au plan $z\,o\,x$ le rôle du plan $z\,o\,y$. On est conduit à la considération de contours rectifiables $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}, \ldots$ dont C est la somme; ces contours sont formés d'arcs des $C_i^{(1)}$ et de courbes situées dans des plans parallèles à $z\,o\,x$, chacun d'eux est compris entre deux plans $x =$ const. distants de moins de $2\,\varepsilon$ et deux plans $y =$ const. distants de moins de $2\,\varepsilon$. On est aussi conduit à des surfaces $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)} \ldots$ dont certaines courbes tendent vers $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)} \ldots$, les morceaux limités par ces courbes étant contenus dans les plus petits prismes quadrangulaires, de faces parallèles à $z\,o\,x$ et $y\,o\,z$, qui en contiennent les frontières.

Remplaçant enfin le plan $z\,o\,x$ par le plan $x\,o\,y$, on est conduit à des contours

$$C_{1,1},\ C_{1,2}, \ldots$$

rectifiables que l'on peut enfermer dans des cubes de côté $2\,\varepsilon$, dont C est la somme et à une suite de surfaces

$$S_{1,1},\ S_{1,2}, \ldots$$

dont certaines courbes tendent vers ces contours; les morceaux ainsi limités sur ces surfaces étant enfermés dans les plus petits parallélépipèdes, de faces parallèles à $x\,o\,y$, $y\,o\,z$, $z\,o\,x$, qui en contiennent les frontières.

En raisonnant sur les surfaces $S_{1,i}$ comme sur les surfaces S_i, et en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$ nous sommes conduits à la suite $S_{2,i}$; puis en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{3}$ à la suite $S_{3,i}$ et ainsi de suite. Nous aurons aussi les contours $C_{2,i}$, $C_{3,i} \ldots$

Ceci posé, considérons un contour c fermé sans point multiple du plan (u, v); nous le faisons correspondre au contour C. Divisons le domaine limité par c en domaines partiels à l'aide de contours sans point double $c_{1,1}, c_{1,2} \ldots$ Nous supposons ces contours choisis de manière qu'il soit possible, pour i assez grand, de faire correspondre $S_{1,i}$ au domaine limité par c de façon que les contours de $S_{1,i}$ qui tendent vers $C_{1,1}$ $C_{1,2} \ldots$ correspondent à $c_{1,1}$, $c_{1,2} \ldots$

Nous avons de la sorte une correspondance entre le réseau des contours $C_{1,1}\,C_{1,2} \ldots$ qui respecte la correspondance déjà établie entre C et c. Nous traçons des contours $c_{2,1}$, $c_{2,2}\ldots$ que l'on peut faire correspondre à $C_{2,1}$, $C_{2,2}\ldots$ sans détruire les correspondances déjà établies, et ainsi de suite.

Montrons qu'il est possible de définir dans le domaine limité sur c, trois fonctions continues par rapport à l'ensemble (u, v):

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

par la condition qu'à tout point d'une courbe $c_{i,j}$ elles fassent correspondre le point homologue de $C_{i,j}$. f, φ, ψ sont actuellement définies pour l'ensemble E des points de $c_{i,j}$; il suffit donc de démontrer qu'à tous les points de E, suffisamment voisins d'un point choisi arbitrairement (u_0, v_0) correspondent des points distants entre eux de moins de η.

Choisissons n assez grand pour que $2\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$ soit inférieur à η. Le point (u_0, v_0) est à l'intérieur d'un contour $c_{n,i}$ ou sur plusieurs de ces contour c_{n,i_1}, $c_{n,i_2},\ldots c_{n,i_p}$. A tous les points de E intérieurs à C_{n,i_1} ou sur C_{n,i_1} correspondent des points, soit intérieurs au plus petit parallélépipède de faces parallèles aux plans coordonnés et qui contient C_{n,i_1}, soit situé sur ce parallélépipède; donc des points qui diffèrent de moins de $\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{3}$. Et comme tous les c_{n,i_α} ont au moins un point commun, à tous les points intérieurs à la somme des domaines qu'ils limitent correspondent des points distants de moins de η.

Les fonctions f, φ, ψ définissent une surface S limitée par C et sur laquelle sont tracés les contours rectifiables C_{ij}.

L'aire de cette surface est la limite, pour n infini, de la somme des aires minima des contours $C_{n,i}$. Cette somme est au plus égale à la plus petite limite des aires des surfaces $S_{n,i}$. Mais l'opération qui permet de passer de S_1, $S_2\ldots$ à $S_{1,1}$, $S_{1,2},\ldots$ n'augmente pas la plus petite limite des aires; de même on n'augmente pas cette limite en passant des $S_{1,i}$ aux $S_{2,i}$, etc., donc l'aire de S est au plus égale à l'aire minima de C. D'ailleurs l'aire de S ne peut être inférieure à cette aire minima, *nous avons donc démontré l'existence d'une surface d'aire minima limitée par un contour quelconque donné.*

100. Il nous reste à nous demander si la solution obtenue est l'unique solution du problème.

La surface définie par

$$x = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\cos\omega, \qquad y = 2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\sin\omega, \qquad z = 0,$$

pour $1 \geqq \rho \geqq \frac{1}{2}$, et par

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{1}{2} - \rho,$$

pour $\frac{1}{2} \geqq \rho \geqq 0$, est minima pour son contour qui est la circonférence de rayon 1 du plan des xy et cependant ce n'est pas une surface plane.

Cet exemple montre que, dans le cas des surfaces, si l'un des problèmes que nous faisons correspondre aux problèmes ordinaires du calcul des variations admet une solution, il en admet une infinité.

101. Nous avons déjà remarqué combien il était plus difficile de démontrer l'existence de l'élément limite pour $\varphi(S)$ que pour $\varphi(C)$; nous pouvons apercevoir maintenant une différence nouvelle. Tandis que, pour le cas de la courbe, la nature des conditions aux limites importait peu, dans le cas de la surface la difficulté du problème varie avec la nature de ces conditions.

Supposons en effet qu'il ne s'agisse plus de trouver la surface d'aire minima passant par un contour fixe donné, mais supposons qu'une partie de ce contour soit assujettie à rester sur une surface S. En reprenant les raisonnements précédents on est conduit aux fonctions

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

définies pour tous les points *intérieurs* à c et continues en (u, v) pour ces points; mais l'on ne sait rien pour les points de c. L'ensemble des points correspondant à ceux d'un domaine limité par c_1, intérieure à c, forme une surface; quand c_1 tend vers c l'aire de cette surface tend vers la valeur minima des aires des surfaces répondant à la question, mais nous ne savons pas si la courbe correspondant à c_1 a une limite.

102. Il serait intéressant de savoir quelles relations il y a entre les surfaces d'aire minima que nous avons trouvées et celles qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0. \tag{1}$$

Remarquons d'abord que si le problème de Plateau, tel qu'on le pose dans la théorie des surfaces, admet une solution, cette solution convient aussi au problème généralisé. En effet, par hypothèse il n'existe pas de surface, telle que p, q, r, s, t, existent et soient continues, passant par le contour donné et ayant une aire plus petite que la surface S solution du problème non généralisé; s'il existait une surface S_1 d'aire inférieure à celle de S, il existerait une surface Σ_1 d'aire aussi voisine qu'on le veut de celle de S_1, passant par le contour donné, et telle qu'en tous ces points, sauf peut-être sur le contour, p, q, r, s, t existent et soient continues (*). Il y a donc contradiction.

Il faudrait rechercher maintenant si, parmi les surfaces solutions du problème généralisé, ne se trouve pas une surface satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (1). La méthode qui paraît la plus naturelle consiste à démontrer successivement l'existence et la continuité de chacune des dérivées nécessaires à l'établissement de la formule (1). Les raisonnements qui suivent montrent que dans certains cas des considérations élémentaires permettent d'aborder cette question.

103. Nous supposons que le contour donné C satisfait aux conditions du paragraphe 97 et que, de plus, il est tel que S, une des surfaces d'aire minima construites comme il a été dit à ce paragraphe, ne soit rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points.

Ces conditions sont compatibles, puisqu'elles sont satisfaites quand S est une surface analytique et C un contour assez petit tracé sur cette surface.

On a vu que S est de la forme $z = f(x, y)$, les nombres dérivés de z étant inférieurs à un certain nombre M, quand on se déplace sur une courbe rectifiable quelconque du plan des xy, et que l'on considère z comme fonction de la longueur s parcourue sur cette courbe.

Coupons S par un plan quelconque P parallèle à oz, il existe une courbe section dont l'équation est $z = \varphi(s)$. Cette courbe admet en un point quelconque A deux demi-tangentes, c'est-à-dire que φ a des dérivées à droite et à gauche; s'il en était autrement, si par exemple il n'existait pas de dérivée à droite, la droite issue du point A, située dans P, et faisant avec le plan des xy un angle dont la tangente est $\frac{\Lambda_d + \lambda_d}{2}$, ($\Lambda_d$ et λ_d étant les nombres dérivés à droite de φ sont inférieurs à M), rencontrerait la courbe section, et par suite S, en un nombre infini de points (**).

(*) On pourra obtenir cette surface Σ_1 en modifiant celle d'un des polyèdres qui servent à définir l'aire de S_1.

(**) C'est uniquement par cette conséquence qu'intervient dans le raisonnement la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points. Les demi-tangentes peuvent d'ailleurs exister sans que la condition précédente soit vérifiée. J'ai énoncé cette condition parce que j'avais cru démontrer qu'elle était remplie, lorsque le

104. Soit a la projection de A sur le plan des xy. Traçons de a comme centre une circonférence Γ de rayon r, soit γ la courbe de S qui se projette en Γ, et soit γ_1 l'homothétique de γ, A étant le centre d'homothétie et le rapport étant tel que la projection de γ_1 soit la circonférence Γ_1 de rayon 1.

Soit $z = \psi(s)$ l'équation de γ_1, s étant l'arc de Γ_1. Si l'on fait tendre r vers zéro, s restant fixe, ψ tend vers une valeur limite $\chi(s)$, $z = \chi(s)$ définissant l'ensemble des points qui se projettent sur Γ_1 et sont situés sur les demi-tangentes précédemment trouvées. Mais $\psi(s)$ a ses nombres dérivés inférieurs à M, de là se déduit immédiatement que $\psi(s)$ tend uniformément vers $\chi(s)$; donc $\chi(s)$ est continue, les demi-tangentes forment un cône Λ.

Désignons par $\varepsilon(\rho)$ le maximum de $|\chi(s) - \psi(s)|$ quand r est inférieur ou égal à ρ, $\varepsilon(\rho)$ tend vers zéro avec ρ.

Remarquons encore que $\chi(s)$ ayant ses nombres dérivés inférieurs à M, la courbe $z = \chi(s)$ est rectifiable; Λ est applicable sur le plan, donc quarrable.

Soit λ la courbe de Λ qui se projette sur Γ. Désignons par s et σ les aires des domaines S' et Λ' limités sur S et Λ par les courbes rectifiables γ et λ. Nous allons chercher une limite supérieure de la quantité $\frac{1}{r^2}|s - \sigma|$.

Soit η un nombre positif arbitrairement choisi; pourvu que l'on trace sur Λ assez de génératrices on partage Λ' en morceaux tels que la somme des aires minima des contours de ces morceaux diffère de l'aire Λ' de moins de $r^2\eta$. Alors en conservant les mêmes génératrices il en est de même quel que soit r.

Les cylindres qui projettent sur xy les contours qui divisent Λ' en morceaux, tracent sur S' des contours qui divisent cette surface en morceaux correspondants. L'aire de S' est exactement la somme des aires minima des contours de ces morceaux. Or les aires minima de deux contours correspondants diffèrent de moins de l'aire que limitent ces deux contours sur le cylindre parallèle à oz sur lequel ils sont tracés. Si donc lr est la somme des longueurs des bases, dans xoy, de ces cylindres on a:

$$|s - \sigma| < r^2\eta + lr \,.\, r\varepsilon(r).$$

Dans cette formule l est indépendant de r, mais dépend de η, $\varepsilon(r)$ tend vers

contour satisfait à certaines conditions, à l'aide de raisonnements élémentaires sur les polyèdres qui servent à définir S, § 97. Je considère encore comme probable que, au moins pour des contours simples, de tels raisonnements conduiraient à la démonstration, bien que je ne sois parvenu dans aucun cas à cette démonstration.

zéro avec r; donc, à condition de prendre r assez petit, on a

$$\frac{|s-\sigma|}{r^2} < 2\eta$$

et cela quel que soit η.

r étant ainsi choisi, remplaçons S' par la surface Λ' et la bande que limitent γ et λ sur le cylindre parallèle à oz qui les contient. L'aire de cette nouvelle surface S'_1 est au plus $s+2\eta r^2+2\pi r^2 \varepsilon(r)$; donc si r est assez petit elle est inférieure à $s+3\eta r^2$.

Ceci posé je dis que Λ est une surface minima. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer Λ' par une surface Λ'_1 limitée à γ et d'aire plus petite; soit $\sigma - K^2 r^2$ son aire, K est indépendant de r. Par ce changement on remplace S'_1 par S'_2 dont l'aire est au plus $s+(3\eta - K^2)r^2$.

Mais puisque η peut être pris aussi petit que l'on veut, si K n'est pas nul S n'est pas une surface d'aire minima. Donc K est nul, Λ est une surface d'aire minima.

105. Il nous reste à rechercher quels sont les cônes Λ d'aire minima. Appliquons Λ sur le plan et traçons sur la surface ainsi développée une circonférence L_1, soit L cette courbe avant le développement. Si Λ n'est pas un plan (*) on peut trouver sur L deux points A, B tels que la distance AB ne soit pas égale à la distance des points correspondants A_1, B_1 de L_1. Considérons le cône Σ de sommet A et de directrice L. Soient a et a' deux points de L voisins de A, de part et d'autre de A; développons la portion de ce cône qui comprend AB et qui est limitée par Aa et Aa'. Soit A_2B_2 le développement de AB, sans faire varier A_2B_2 faisons tendre a et a' vers A, ce que nous obtenons ainsi peut être appelé le développement du cône Σ, ouvert suivant sa génératrice de longueur nulle (**).

Soit L_2 le développement de L, l'aire limitée par L_2 dans le développement est l'aire que limite L sur Σ, or cette aire est plus petite que celle que limite L sur Λ, ou L_1 dans le plan, puisque L_2 n'est pas une circonférence.

(*) On sait que Λ est de la forme $z=f(x,y)$, on n'a donc pas à examiner le cas où Λ recouvrirait plusieurs fois un plan.

(**) Ces précautions seraient inutiles si l'on démontrait que L a des tangentes. En s'appuyant sur la condition: S n'est rencontrée par aucune droite en un nombre infini de points, on démontre que le long de chaque génératrice de Λ existent deux demi-plans tangents. Or l'ensemble de ces deux demi-plans doit former une surface minima, donc Λ a des plans tangents, L a des tangentes.

Donc A est un plan, *la surface S admet des plans tangents.*

La démonstration précédente suppose établi que, de toutes les courbes isopérimètres, la circonférence est celle qui enferme la plus grande aire et qu'il n'existe aucune courbe de même périmètre enfermant la même aire que la circonférence. Il existe plusieurs démonstrations rigoureuses de cette propriété; pour l'application précédente il est nécessaire, ce qui est facile, d'étendre ces démonstrations au cas où les courbes seraient tracées sur une surface de Riemann ayant des lignes de croisement issues de A_2, car nous n'avons pas démontré que C_2 ne tournait pas autour de A_2.