

*G. ROESSLER*

---

*TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE A GRANDE DISTANCE*

---

*THÉORIE ET CALCUL*

*DES*

*LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS*

*PARIS & LIÈGE*

*CH. BÉRANGER EDITEUR*



**THÉORIE ET CALCUL**  
**DES**  
**LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS**





TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE A GRANDE DISTANCE

---

THÉORIE ET CALCUL

DES

LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

PAR

**G. ROESSLER**

Docteur ès sciences,  
Professeur à l'École technique supérieure de Danzig.

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

**E. STEINMANN**

Docteur ès sciences,  
Professeur à l'École de Mécanique de Genève.



PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE. CH. BÉRANGER. ÉDITEUR

SUCESSEUR DE BAUDRY ET C<sup>ie</sup>

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MAISON A LIÉGE. 21, RUE DE LA RÉGENCE

1907

Tous droits réservés.



## PRÉFACE DE L'ÉDITION ALLEMANDE

---

L'emploi des hautes tensions pour la transmission de l'énergie à grande distance au moyen des courants alternatifs a fait ressortir toujours plus l'importance du courant de charge vis-à-vis du courant utile. Le phénomène est bien connu ; mais il semble que les idées des techniciens sur son importance pratique ne soient pas encore bien claires.

Ce n'est pas d'aujourd'hui que les physiciens et les ingénieurs se sont occupés de l'étude de l'influence que peut avoir la capacité uniformément répartie sur les longues lignes à courant alternatif ; il nous suffira de citer les travaux de Fleming sur le phénomène de Ferranti observé à Deptford et de H.-F. Weber sur la ligne triphasée Lauffen-Francfort, ainsi que d'autres études d'une nature plus théorique ; mais en général les techniciens se sont abstenus de traiter scientifiquement ces questions en raison de l'appareil mathématique compliqué et délicat qu'il faut employer.

La question a changé de face depuis que Steinmetz a montré que l'emploi des quantités complexes, cou-

rant en physique, se prête admirablement à la solution des questions pratiques dans lesquelles on peut admettre que les courants alternatifs obéissent à la loi sinusoïdale. Les équations différentielles aux dérivées partielles, difficiles à manier, se transforment en équations linéaires, faciles à résoudre ; les expressions longues et compliquées qui représentent les phénomènes se simplifient et s'abrègent dans une large mesure.

Parmi ceux qui se sont servis de la méthode des quantités complexes, on peut citer Franke, vers 1890, et plus récemment, Pupin et Breisig dans leurs études sur la transmission des courants téléphoniques. C'est par les intéressantes conférences que Breisig a données à Berlin que l'auteur a été amené à reconnaître l'importance et la fécondité de la méthode des complexes pour l'étude des courants intenses employés dans les transports d'énergie.

Le présent ouvrage contient le résultat des études auxquelles l'auteur s'est livré à la suite de ces conférences, études qui ont été l'objet de plusieurs cours qu'il a faits à l'École technique supérieure de Berlin sur la transmission de l'énergie à grande distance. Ce volume ne traite que des courants forts de forme sinusoïdale.

Les phénomènes qui ne peuvent pas être traités par la méthode des complexes, tels que ceux qui se produisent lors de la fermeture ou de l'ouverture subite d'un circuit, ont été laissés de côté. (La Commission des câbles de l'Association des électriciens allemands est en train

de formuler des prescriptions sur ce sujet important.) Une autre question non traitée est celle de l'influence des dissymétries de la ligne, telles qu'elles se produisent dans les câbles concentriques ou dans la ligne aérienne non montée en triangle équilatéral, ou encore par suite de l'isolement défectueux de l'un des conducteurs. La méthode des complexes donne dans ces cas des résultats si compliqués qu'il sera nécessaire d'en faire une étude toute spéciale.

Afin de reconnaître autant que possible en soi l'influence de la capacité uniformément répartie, l'auteur a étudié tout d'abord la façon dont se comporte une ligne douée seulement de résistance et de capacité, puis il a complété cette étude par un exemple numérique, résolu graphiquement et par le calcul.

Cet exemple revient en plusieurs endroits du livre, et sert chaque fois de base et de point de départ pour l'étude de la ligne réelle possédant à la fois de la résistance, de la capacité, de la self-induction et des courants dérivés dans l'isolant.

Pour l'application pratique des résultats trouvés, l'auteur s'est servi des constantes électriques d'une série de câbles à 10 000 volts de diverses sections, constantes qui lui ont été gracieusement communiquées par une grande fabrique allemande ; d'autre part la ligne Lauffen-Francfort, utilisée pour la fameuse expérience de transport d'énergie faite en 1891 à l'occasion de l'Exposition internationale d'électricité, a fourni le type de ligne aérienne pour l'application des formules.

En résumé, le présent ouvrage se compose d'études

théoriques générales faites dans le but d'arriver à des méthodes simples et pratiques permettant de calculer par avance la façon dont les lignes se comporteront une fois posées, et d'exemples numériques se rapportant aux câbles et à la ligne aérienne dont il est parlé plus haut.

Les calculs sont faits en général pour les longueurs de 50, 100, 150 et 200 kilomètres ; les résultats sont consignés en tableaux dont le détail fait l'objet d'une table des matières spéciale.

Le lecteur s'apercevra que ces résultats sont extrêmement variables suivant la longueur, la section et le régime de la ligne, et que pour la plupart ils sont absolument inattendus pour celui qui calcule avec les méthodes actuellement en faveur.

L'auteur espère, pour autant que cela est possible avec des câbles relativement courts, vérifier les résultats trouvés dans le laboratoire spécial d'étude de câbles qu'il compte installer à la nouvelle École technique supérieure de Danzig.

Le chapitre relatif aux câbles de longueur finie en circuit ouvert contient quelques résultats qui pourront être utiles pour la télégraphie sans fil ; l'auteur s'est borné à les énoncer sans pousser la chose à fond, le but de cet ouvrage étant essentiellement l'étude des courants intenses.

En ce qui concerne l'apparence extérieure du livre, il y a lieu de remarquer que les équations sont numérotées par chapitre ; si l'équation est rappelée dans le même chapitre, elle n'est désignée que par son numéro ;

si au contraire il s'agit d'une équation d'un autre chapitre, l'indication de son numéro est accompagnée de celle de la page où elle se trouve.

L'auteur a commencé la rédaction de cet ouvrage vers la fin de 1901 dans l'intention de publier le cours qu'il faisait à cette époque; mais à mesure que le travail avançait, de nouveaux aperçus se découvraient qui en ont augmenté considérablement l'envergure, de sorte qu'il n'aurait pas encore pu être présenté au public ingénieur si le concours infatigable de quelques élèves et assistants de l'École technique supérieure de Danzig, MM. David, Kade, le D<sup>r</sup> Grix, le D<sup>r</sup> Martiny, MM. Radeboldt, Somborn, Tröger et Vollmer, n'avait permis à l'auteur de faire exécuter les épures et les calculs souvent pénibles qui sont consignés dans les 36 tableaux du présent volume.

Que ces fidèles et dévoués collaborateurs reçoivent ici l'expression de la cordiale reconnaissance de l'auteur.

Danzig, juin 1905.

G. ROESSLER.

---





## AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR

---

M. le professeur Rössler n'est pas un inconnu pour les ingénieurs de langue française. Ses ouvrages précédents : « Moteurs à courant continu » « Moteurs à courants alternatifs », ont eu en France comme dans leur pays d'origine un succès de bon aloi, dû en toute première ligne à la façon simple et pratique dont les sujets sont présentés et au souci constant de l'auteur de donner une interprétation concrète des formules trouvées. Si cette manière de procéder entraîne parfois des longueurs, elle a par contre l'immense avantage de ramener constamment le lecteur à la considération des phénomènes eux-mêmes, dont la dépendance mutuelle disparaît bien souvent au cours des transformations algébriques.

La préface de l'édition allemande donne toutes les indications désirables sur la genèse et le but du présent ouvrage. Fidèle à notre rôle de traducteur, nous n'avons modifié en rien la marche suivie par l'auteur et sa manière d'exposer le sujet ; nous espérons avoir

rendu clairement sa pensée, sans nous dissimuler que la complication du sujet et la multiplicité des notions qu'il met en jeu doivent donner au premier abord une impression de confusion. A ce propos, on nous permettra d'attirer l'attention sur le système de notations employé dans cet ouvrage. Rigoureusement conséquent avec lui-même, il en facilite grandement la lecture, à la condition de bien s'en pénétrer dès le début.

Dans le but d'abrégier l'écriture, nous avons systématiquement employé l'expression « tension » dans le sens de « différence de potentiel », partout où cela était possible sans équivoque ; dans la même intention, nous avons désigné la rotation dans le sens positif (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre) par rotation « à gauche », et vice versa.

Pour rendre les recherches plus aisées, nous avons fait une table des matières très détaillée, ainsi qu'un recueil des principales formules et notations, avec l'indication de la page où elles se trouvent indiquées pour la première fois.

Genève, le 30 juin 1906.

E. STEINMANN.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

## CHAPITRE PREMIER

### LA MÉTHODE SYMBOLIQUE

Addition et soustraction des quantités sinusoïdales . . . . .	1
Les symboles. Forme complète. forme réduite, forme principale . .	3
Forme accessoire. Passage d'une forme à une autre: composante wattée et déwattée du courant; puissance et facteur de puissance . . . . .	7

## CHAPITRE II

### LE COURANT DANS LES LIGNES POSSÉDANT DE LA SELF-INDUCTION

Calcul des constantes électriques au commencement de la ligne, connaissant les données au point de consommation . . . . .	10
Equivalence de la solution d'une équation linéaire entre les quantités sinusoïdales et leurs dérivées et de la solution de l'équation correspondante entre les symboles et leurs dérivées . . . . .	12
L'équation de la tension mise sous la forme de la loi d'Ohm . . . . .	15

## CHAPITRE III

### EXEMPLES

Détermination du courant dans une bobine de self, la tension étant donnée . . . . .	17
Détermination de la tension à la fin d'une ligne douée de self, la tension de l'usine génératrice étant donnée. . . . .	19
Dépendance entre la chute de tension en ligne et le décalage . . . . .	22

## CHAPITRE IV

### LE CALCUL DES QUANTITÉS COMPLEXES

Egalité des quantités complexes . . . . .	25
Passage d'une forme à une autre. . . . .	26
Opérations sur les quantités complexes . . . . .	27
Multiplication par $\pm i$ . . . . .	31
Proportions . . . . .	31

## CHAPITRE V

## LA CAPACITÉ DES LIGNES

Champ électrique entre les conducteurs d'une ligne. . . . .	33
Définition de la capacité. . . . .	36
Transmission du courant continu et du courant alternatif dans un câble. Câble artificiel. . . . .	37
Farad, microfarad . . . . .	39

## CHAPITRE VI

## LE CONDENSATEUR DANS LE CIRCUIT A COURANTS ALTERNATIFS

Charge; courant de charge et de décharge; courant dérivé dans l'isolant. . . . .	41
Hystérésis diélectrique. . . . .	46

## CHAPITRE VII

## LE CÂBLE ARTIFICIEL

Variation de l'état électrique le long du câble à charge inductive. . .	48
Variation de l'état électrique le long du câble, le courant étant en avance sur la tension au point d'utilisation. . . . .	53
Variation de l'état électrique le long du câble à charge non inductive.	53

## CHAPITRE VIII

## LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DES CABLES

Recherche des équations différentielles. . . . .	57
Solution des équations différentielles. . . . .	59
Tableau des solutions, en comptant les distances soit à partir du commencement, soit à partir de la fin du câble . . . . .	63
Les équations différentielles classiques. . . . .	64

## CHAPITRE IX

CALCUL DES CONSTANTES ÉLECTRIQUES D'UN CÂBLE  
D'APRÈS SES DIMENSIONS

Les constantes électriques d'une ligne à deux fils. . . . .	66
Les constantes électriques d'une ligne triphasée. . . . .	70
Capacité et dérivation dans l'isolant. . . . .	70
Résistance et self-induction. . . . .	80
Exemples numériques. . . . .	88
Constantes électriques, poids et prix des câbles. . . . .	89
Termes de correction. . . . .	93

CHAPITRE X

LE CABLE DE LONGUEUR INFINIE EN CIRCUIT OUVERT

Généralités. . . . .	97
Equations fondamentales. . . . .	98
Variation de la tension, du courant et du décalage le long du câble. . . . .	100
Représentation graphique par spirales logarithmiques . . . . .	113

CHAPITRE XI

LE CABLE DE LONGUEUR FINIE EN CIRCUIT OUVERT

Equations générales . . . . .	121
Représentation par spirales logarithmiques . . . . .	125
Variation de la tension et du courant le long du câble . . . . .	133
Maxima et minima de la tension et du courant . . . . .	136
Chute de tension dans le câble . . . . .	152
Variation du courant admis suivant la longueur du câble . . . . .	157
Variation du décalage le long du câble. . . . .	163
Puissance absorbée par le câble . . . . .	169

CHAPITRE XII

LE CABLE EN CHARGE

Equations fondamentales . . . . .	180
Représentation par spirales logarithmiques. . . . .	185

RÉSISTANCE DU CABLE EN CIRCUIT OUVERT ET EN COURT-CIRCUIT

Définitions et mesures . . . . .	197
Emploi des mesures pour le calcul a retro des constantes du câble . . . . .	198
Calcul de la manière d'être du câble suivant sa longueur . . . . .	200
Puissance dissipée dans le câble . . . . .	215

ÉTAT ÉLECTRIQUE AU COMMENCEMENT DU CABLE, LA CHARGE  
A L'EXTRÉMITÉ ÉTANT DONNÉE

Marche du calcul; exemples numériques . . . . .	216
Etude spéciale de l'influence de la capacité uniformément répartie . . . . .	229
Influence de la fréquence. . . . .	248

LE RENDEMENT MAXIMUM

Calcul du rendement maximum: conditions pour qu'il se présente. . . . .	251
Etat électrique du câble lors du rendement maximum. Exemples. . . . .	257

LE MAXIMUM DE PUISSANCE

Calcul du maximum de puissance; conditions pour qu'il se présente. . . . .	264
Etat électrique du câble lors du maximum de puissance. Exemples . . . . .	268

Manière d'être du câble, la tension initiale étant donnée . . . . .	273
Détermination de la section du câble dans l'établissement d'un projet. . . . .	277
<b>Formulaire</b> . . . . .	283



## LISTE DES TABLEAUX NUMÉRIQUES

*se rapportant à 8 câbles triphasés, armés, sous plomb, établis pour 10 000 volts, et à la ligne aérienne Lauffen-Francfort. — Fréquence 50 périodes (parfois 25) par seconde.*

### DONNÉES GÉNÉRALES

Tableau IV.	Dimensions. . . . .	89
— V.	Constantes électriques . . . . .	90
— VI.	Poids et prix. . . . .	91
— VII.	Valeurs de $\mathbf{v}$ , $\frac{b}{a}$ , $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{u}$ . . . . .	92

### LE CABLE DE LONGUEUR INFINIE

Tableau VIII.	Courant admis par volt de tension initiale. Avance de phase du courant sur la tension . . . . .	113
---------------	---	-----

### LE CABLE EN CIRCUIT OUVERT SUR 50, 100, 150 ET 200 KM.

Tableau XIII.	Rapport des tensions au commencement et à la fin de la ligne. . . . .	155
— XIV.	Courant admis par les câbles sous 10 000 volts . . . . .	159
— XVI.	Avance de phase du courant sur la tension au commencement de la ligne . . . . .	170
— XVII.	Puissance admise par les câbles sous 10 000 volts . . . . .	174

### LE CABLE EN CHARGE SUR 50, 100, 150 ET 200 KM.

Tableau XXI.	Résistance $\mathbf{R}_o$ de marche à vide . . . . .	210
— XXII.	Résistance $\mathbf{R}_c$ de court-circuit. . . . .	211
— XXIV.	Etat électrique au commencement du câble de plus faible section et de la ligne aérienne, en admettant une chute ohmique de 10 p. 100 sur la tension, des charges non inductives, et en négligeant la capacité. (Tension finale 10 000 volts) . . . . .	238
— XXV.	Le même tableau en tenant compte de la capacité. . . . .	238
— XXVI.	Courant utile et courant de charge du même câble dans le cas du tableau XXV. . . . .	240

Tableau XXVII.	Manière d'être du câble le plus fort dans le cas du tableau XXV . . . . .	244
—	XXVIII. Comme tableau XXVI, mais pour le câble le plus fort.	244
—	XXIX. Etat électrique du câble le plus fort avec charge non inductive, sur 200 km., et 10 000 volts au récepteur. . . . .	244
	XXX. Comme tableau XXIX, mais à 25 périodes par seconde.	248
—	XXXI. Rendement maximum et intensité correspondante .	256
	XXXII. Rendement maximum des câbles et données électriques correspondantes. . . . .	259
—	XXXIII. Même tableau pour la ligne aérienne . . . . .	259
—	XXXIV. Puissance maximale des câbles et de la ligne aérienne sous une tension de 10 000 volts. . . . .	267
	XXXV. Puissance maximale des câbles et données électriques correspondantes . . . . .	271
—	XXXVI. Même tableau pour la ligne aérienne . . . . .	271



# THÉORIE ET CALCUL

## DES

# LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

---

## CHAPITRE PREMIER

### LA MÉTHODE SYMBOLIQUE

1° Dans la pratique des courants alternatifs, le problème se pose souvent d'additionner une suite de quantités variant périodiquement dans le temps suivant la loi sinusoïdale

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), A_2 \sin(\omega t + \alpha_2), A_3 \sin(\omega t + \alpha_3), \text{ etc...};$$

il s'agit alors de déterminer une nouvelle quantité à variation sinusoïdale définie par la relation

$$A \sin(\omega t + \alpha) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) + A_3 \sin(\omega t + \alpha_3) + \dots \quad (1)$$

La détermination de l'amplitude résultante  $A$  et de la phase  $\alpha$  se fait en développant les sommes de sinus et en ordonnant par rapport à  $\sin \omega t$  et  $\cos \omega t$  : on obtient alors

$$\begin{aligned} & \sin \omega t \cdot A \cos \alpha + \cos \omega t \cdot A \sin \alpha \\ &= \sin \omega t (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3 + \dots) \\ &+ \cos \omega t (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3 + \dots). \end{aligned}$$

Cette équation (comme d'ailleurs l'équation 1), doit se trouver vérifiée à n'importe quel instant. A l'instant  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \omega t$  est égal à 0, et par conséquent

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3 + \dots \quad (2)$$

## 2 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

A l'instant  $\omega t = 0$ ,  $\sin \omega t = 0$ , et nous avons de même

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3 + \dots \quad (3)$$

Les équations 2 et 3 suffisent à la détermination de  $A$  et de  $\alpha$ , car leurs seconds membres sont entièrement connus ; en posant

$$A \cos \alpha = B \quad \text{et} \quad A \sin \alpha = C$$

on a

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \alpha = \frac{C}{B} .$$

2°  $A$  et  $\alpha$  peuvent aussi se déterminer facilement par la méthode graphique. Il n'y a qu'à adopter (fig. 1) comme origine une « horizontale »  $R$  et à porter à partir de cette

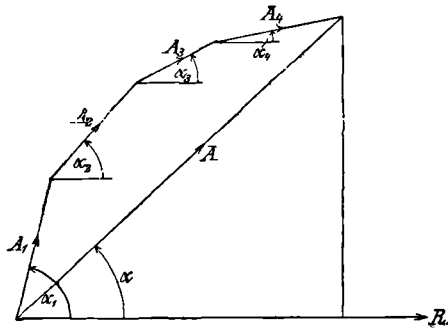


Fig. 1.

droite les amplitudes  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , successivement sous leurs angles respectifs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  ; la ligne de fermeture du tracé polygonal obtenu donne en grandeur et en phase l'amplitude cherchée  $A$  ; le sens de cette amplitude est opposé à celui dans lequel le tracé polygonal a été parcouru ; c'est la construction bien connue de la résultante de plusieurs forces situées dans un même plan.

La justesse de cette construction devient évidente quand on projette les diverses droites  $A_1, A_2, A_3, \dots$  de la figure 1 sur la droite origine et sur une perpendiculaire à

cette droite. Les projections « horizontales » correspondent aux termes de l'équation 2, les projections « verticales » à celles de l'équation 3.

Dans tout le cours de cet ouvrage, nous indiquerons les différences de phase *positives* (les décalages *en avant*) par des angles portés dans le *sens contraire* à celui des aiguilles d'un montre (rotation à *gauche*) et vice versa.

3° Les équations 2 et 3 sont absolument équivalentes à l'équation 1 et peuvent la remplacer complètement; elles ont en outre l'avantage de servir de point de départ à une nouvelle forme mathématique de l'équation 1.

Si en effet nous remplaçons dans l'équation 1 les quantités

$$A \sin(\omega t + \alpha), A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \dots$$

respectivement par les suivantes

$$A e^{i\alpha}, A_1 e^{i\alpha_1}, A_2 e^{i\alpha_2} \dots$$

nous obtenons

$$A e^{i\alpha} = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2} + A_3 e^{i\alpha_3} + \dots \quad (4)$$

d'où l'on peut tirer immédiatement les équations 2 et 3,  $i$  représentant l'unité imaginaire  $\sqrt{-1}$ . On peut s'en assurer en développant les quantités exponentielles de l'équation 4 d'après la formule de Moivre

$$A e^{\pm i\alpha} = A (\cos \alpha \pm i \sin \alpha) \quad (5)$$

et en séparant les quantités réelles et les quantités imaginaires.

On a :

$$\begin{aligned} & A \cos \alpha + i A \sin \alpha \\ &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3 + \dots \\ &+ i (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3 + \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

Les équations 2 et 3 s'en déduisent par la simple remarque que l'égalité de deux quantités complexes

#### 4 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

entraîne l'égalité des quantités réelles entre elles et l'égalité des quantités imaginaires entre elles.

Les exponentielles imaginaires ne sont que des symboles destinés à remplacer les quantités sinusoïdales ; nous n'avons prouvé jusqu'ici qu'une chose, c'est que ces exponentielles pouvaient être utilisées dans l'addition des fonctions sinusoïdales, comme cela se présente dans la mise en série des tensions ou la mise en parallèle des intensités.

En posant pour abrégier l'écriture des symboles

$$\mathbf{A}_n = A_n e^{i\alpha_n} \quad (7)$$

nous obtenons l'équation 4 sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \dots \quad (8)$$

et nous constatons que l'addition des tensions ou des intensités se présente dans les courants alternatifs sous une forme identique à celle qui est employée en courant continu. Dorénavant nous désignerons tous les symboles par des majuscules *droites* et nous choisirons chaque fois les lettres qui, écrites en majuscules *penchées* ont servi à désigner les amplitudes des quantités sinusoïdales en jeu.

Le symbole

$$\mathbf{A} = A e^{\pm i\alpha} \quad (9)$$

signifie donc toujours une quantité variant sinusoïdalement, d'amplitude  $A$  et de phase  $\alpha$ . Dans la représentation graphique  $\mathbf{A}$  indique un vecteur  $A$  faisant avec la directrice un angle  $\pm \alpha$ .

En formule, nous aurons

$$A_t = A \sin (\omega t \pm \alpha).$$

l'indice  $t$  indiquant la variabilité de  $A_t$  dans le temps.

4° Afin de mettre en évidence l'angle  $\omega t \pm \alpha$  qui figure dans l'expression de  $A_t$ , on pourrait aussi écrire

$$A e^{i(\omega t \pm \alpha)} \quad (10)$$

tout simplement en remplaçant  $\pm ix$  par  $i(\omega t \pm \alpha)$  dans l'équation 9.

En introduisant le symbole sous cette nouvelle forme dans l'équation 1, les facteurs  $e^{i\omega t}$  disparaîtraient les deux membres, et la suite du calcul nous ferait retomber sur les équations 2 et 3 absolument comme si  $\omega t$  n'avait pas du tout été introduit dans le symbole. Les deux formes du symbole sont donc équivalentes. Pour les distinguer nous appellerons *forme réduite* celle de l'équation 9 et nous la désignerons par  $\mathbf{A}$  sans l'indice  $t$ , tandis que celle de l'équation 10 sera la *forme complète*, indiquée par  $\mathbf{A}_t$ .

Dorénavant nous aurons toujours

$$\mathbf{A}_t = A e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Dans toutes les équations où figurent des symboles *réduits*, (telles que l'équation 4), les grandeurs  $Ae^{i\alpha}$  peuvent signifier des valeurs efficaces aussi bien que des amplitudes, le rapport de ces deux quantités étant constant et égal à  $\sqrt{2}$ . Dans tous les cas où la lettre  $A$  aura à volonté l'une ou l'autre signification, nous la désignerons sous le nom de *module*.

Lorsque, par contre,  $\mathbf{A}$  figure sous la forme complète  $\mathbf{A}_t = Ae^{i(\omega t + \alpha)}$ , la seule signification logique qu'elle puisse avoir est celle d'une amplitude, puisque l'indice  $t$  indique la variabilité dans le temps.

5° Dans toutes les représentations graphiques, il est avantageux de porter, non pas les amplitudes et les décalages, mais plutôt les projections des amplitudes sur deux axes perpendiculaires; l'emploi du té et de l'équerre est alors tout indiqué. Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Moivre à la transformation du symbole réduit; on obtient

$$\mathbf{A} = A e^{i\alpha} = \underbrace{A \cos \alpha}_p + i \underbrace{A \sin \alpha}_{qi},$$

soit

$p$  et  $q$  sont les projections cherchées. On portera  $p$  toujours sur l'axe des abscisses,  $q$  sur l'axe des ordonnées.

## 6 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

Il va sans dire que  $p$  et  $q$  peuvent avoir toutes les valeurs positives ou négatives.

Quand  $A$  indique des valeurs efficaces et que l'on pose

$$A e^{i\alpha} = p + qi \quad (11)$$

$p$  et  $q$  sont naturellement  $\sqrt{2}$  fois plus petits que lorsque  $A$  représente l'amplitude. Il faut donc indiquer dans chaque cas particulier si les  $A$  représentent des amplitudes ou des valeurs efficaces.

Quand on fait l'addition des grandeurs alternatives par le calcul au lieu du graphique, les équations 2 et 3 amènent aussi à l'addition des projections des vecteurs. Il est donc avantageux pour tous les calculs numériques de se servir de la forme  $p + qi$  plutôt que de la forme  $Ae^{i\alpha}$ . Nous dirons dorénavant que  $p + qi$  est la *forme accessoire*,  $Ae^{i\alpha}$  la *forme principale* du symbole. Il est facile de passer de l'une à l'autre. La forme principale  $Ae^{i\alpha}$  étant donnée, on obtient  $p$  et  $q$  par les formules

$$p = A \cos \alpha \quad \text{et} \quad q = A \sin \alpha. \quad (12)$$

Dans le cas inverse, on obtient  $A$  et  $\alpha$  par les formules

$$A^2 = p^2 + q^2 \quad \text{et} \quad \text{tg } \alpha = \frac{q}{p}. \quad (13)$$

6° Dans le cas où l'une des grandeurs à additionner est de la forme

$$A_t = A_n \sin \omega t.$$

(donc que  $\alpha_n = 0$ ) son symbole est d'après l'équation 9

$$\mathbf{A}_n = A_n$$

et en graphique, elle coïncide avec l'axe des abscisses ou lui est parallèle, tandis que sa projection sur l'axe « vertical » est nulle. Le vecteur représentatif de cette quantité peut alors servir d'origine des phases.

On pourra donc reconnaître facilement la quantité dont

le vecteur est origine des phases par le fait que la forme principale de son symbole est égale au module, et que la partie imaginaire de la forme accessoire est nulle.

Si par exemple une tension

$$E_t = E_{\max} \sin \omega t$$

sert de point de départ, et que l'intensité correspondante soit

$$I_t = I_{\max} \sin (\omega t - \alpha),$$

ces deux quantités auront pour symbole

$$\mathbf{E} = E_{\max} \quad \text{et} \quad \mathbf{I} = I_{\max} e^{-i\alpha}.$$

Leur graphique est donné par la figure 2.

En développant  $\mathbf{I}$  sous la forme accessoire, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= I_{\max} e^{-i\alpha} = \underbrace{I_{\max} \cos \alpha}_p - i \underbrace{I_{\max} \sin \alpha}_q \\ &= p - iq \end{aligned}$$

On voit que  $p$  et  $q$  sont ici deux composantes de l'intensité, la première en phase avec la tension, la seconde perpendiculaire à celle-ci. La partie réelle  $p$  de la forme accessoire représente donc, quand on prend la tension pour origine des phases, la composante *wattée* de l'intensité, le coefficient  $q$  de la partie imaginaire la composante *déwattée*. Cette décomposition qui se produit automatiquement par la méthode des nombres complexes a une grande importance pratique.

7° Même dans le cas où la tension n'est pas origine des phases, il est facile de calculer la composante wattée du courant. Soient

$$\mathbf{E} = p_e + q_e i \tag{14}$$

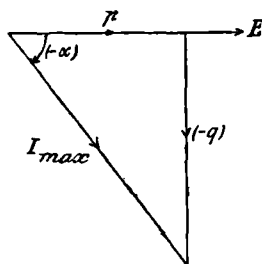


Fig. 2.

8 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

la tension, donnée sous la forme accessoire, et

$$\mathbf{I} = p_i + q_i i \quad (15)$$

le courant. Passons aux formes principales de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{I}$  par les équations

$$\mathbf{E} = E_{\max} e^{i \delta} \quad (16)$$

$$\mathbf{I} = I_{\max} e^{i \lambda}. \quad (17)$$

Il en suit d'après les équations 13

$$E_{\max} = \sqrt{p_e^2 + q_e^2} \quad \text{et} \quad I_{\max} = \sqrt{p_i^2 + q_i^2} \quad (18)$$

et enfin

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} &= \frac{E_{\max}}{I_{\max}} e^{i(\delta - \lambda)} = \frac{E_{\max}}{I_{\max}} \cos(\delta - \lambda) \\ &\quad + i \frac{E_{\max}}{I_{\max}} \sin(\delta - \lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

équation dans laquelle  $(\delta - \lambda)$  est le décalage du courant sur la tension, et  $\cos(\delta - \lambda)$  le facteur de puissance.

On peut aussi obtenir  $\cos(\delta - \lambda)$  en déterminant le rapport  $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{I}$  étant exprimés sous la forme accessoire, et en égalant les parties réelles des deux expressions de  $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$ .

Il suffit pour cela de prendre les valeurs de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{I}$  données par les équations 14 et 15, et de multiplier les 2 termes de la fraction  $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}}$  par  $p_i - q_i i$ .

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} &= \frac{(p_e + q_e i)(p_i - q_i i)}{(p_i + q_i i)(p_i - q_i i)} = \frac{p_e p_i + q_e q_i}{p_i^2 + q_i^2} \\ &\quad + i \frac{p_i q_e - p_e q_i}{p_i^2 + q_i^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Égalant les parties réelles de 20 et de 19, nous obtenons

$$\frac{E_{\max}}{I_{\max}} \cos(\delta - \lambda) = \frac{p_e p_i + q_e q_i}{p_i^2 + q_i^2}$$



et en introduisant dans cette expression les valeurs de  $E_{\max}$  et  $I_{\max}$  données par les équations 18, il suit

$$\cos(\delta - \lambda) = \frac{p_e p_i + q_e q_i}{\sqrt{(p_e^2 + q_e^2)(p_i^2 + q_i^2)}}$$

La composante wattée du courant sera

$$I_{\max} \cos(\delta - \lambda) = \frac{p_e p_i + q_e q_i}{\sqrt{p_e^2 + q_e^2}}$$

et enfin la puissance mise en jeu

$$A = \frac{E_{\max} I_{\max}}{2} \cos(\delta - \lambda) = \frac{p_e p_i + q_e q_i}{2}. \quad (21)$$

8° Si on calcule  $p$  et  $q$  en les rapportant, non aux valeurs maximales de  $E$  et de  $I$ , mais aux valeurs efficaces, les nouveaux  $p$  et  $q$  seront  $\sqrt{2}$  fois plus petits, ce qui fera disparaître le dénominateur 2 dans l'équation 21.

Avec ces nouveaux  $p$  et  $q$ , la puissance sera

$$A = p_e p_i + q_e q_i. \quad (22)$$

9° Quand il ne s'agit que de déterminer l'angle du décalage et que le facteur de puissance n'est pas demandé, il est souvent plus facile de calculer la tangente de cet angle plutôt que son cosinus. Il suffit pour cela d'égaliser dans les équations 19 et 20 les termes réels entre eux et les termes imaginaires entre eux. On obtient  $\cos(\delta - \lambda)$  et  $\sin(\delta - \lambda)$ ; leur quotient est

$$\operatorname{tg}(\delta - \lambda) = \frac{p_i q_e - p_e q_i}{p_e p_i + q_e q_i}. \quad (23)$$

Remarquons que d'après la convention faite plus haut, une valeur *positive* de l'angle de décalage signifie une *avance de phase* de la tension sur le courant.

Le chapitre II montrera une application de la méthode symbolique à une ligne de grande longueur possédant de la résistance et de la self-induction.

## CHAPITRE II

### LA LIGNE POSSÉDANT DE LA SELF-INDUCTION

1° Soient (fig. 3) :

$E_t$  la tension en volts entre les extrémités  $a$  et  $b$  d'une ligne en boucle simple ;

$r$  la résistance *totale* de la ligne, en ohms ;

$L$  le coefficient de self-induction total des deux fils de ligne, en henrys ;

$I_t$  l'intensité du courant, en ampères.

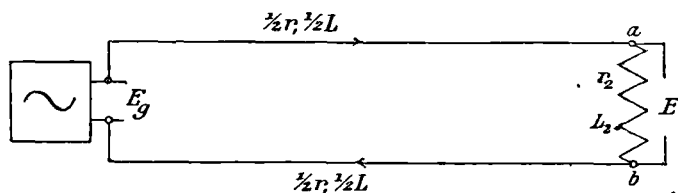


Fig. 3.

On sait que la tension aux bornes de générateur est donnée par l'équation

$$E_{gt} = E_t + rI_t + L \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

Cette formule indique que la chute de tension dans la ligne se compose de deux parties : la chute ohmique  $rI_t$  qui est la seule qui se manifesterait en courant continu, et la chute due à la self-induction, qui se monte à  $L \frac{dI}{dt}$ .

Dans le cas spécial que nous voulons étudier, l'intensité

exigée par le récepteur placé entre  $a$  et  $b$  est

$$I_t = I_{\max} \sin \omega t \quad (2)$$

où  $\omega$  (la pulsation) est égale à  $2\pi\nu$  ( $\nu$  étant le nombre de périodes par seconde).

Posons pour la tension exigée aux bornes du récepteur

$$E_t = E_{\max} \sin (\omega t + \varphi) \quad (3)$$

où  $\varphi$  représente une avance de phase de la tension sur le courant. L'appareil d'utilisation est donc un transformateur ou un moteur.

On a successivement

$$rI_t = rI_{\max} \sin \omega t$$

et

$$L \frac{dI}{dt} = \omega LI_{\max} \cos \omega t = \omega LI_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (4)$$

La différence de potentiel aux bornes du générateur sera de la forme

$$E_{g t} = E_{g \max} \sin (\omega t + \delta)$$

car elle doit avoir une avance de phase sur  $I_t$ , ainsi que l'indiquent les équations 3 et 4.

On obtiendra  $E_{g \max}$  et  $L \frac{dI}{dt}$  en écrivant d'après l'équation 1

$$E_{g \max} \sin (\omega t + \delta) = E_{\max} \sin (\omega t + \varphi) + rI_{\max} \sin \omega t + \omega LI_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

et en procédant de la même façon que dans l'équation 1 de la page 1 pour la recherche de  $A$  et de  $\alpha$ , on aura

$$E_{g \max} \cos \delta = E_{\max} \cos \varphi + rI_{\max} \quad (5)$$

$$E_{g \max} \sin \delta = E_{\max} \sin \varphi + \omega LI_{\max}. \quad (6)$$

2° Nous allons maintenant montrer que la méthode sym-

holique amène aux mêmes résultats. Nous aurons pour

$$\begin{aligned} E_t &= E_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \dots \dots \dots \mathbf{E} = E_{\max} e^{i\varphi} \\ rI_t &= rI_{\max} \sin \omega t \dots \dots \dots r\mathbf{I} = rI_{\max} \\ L \frac{dI}{dt} &= \omega \cdot LI_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \dots \mathbf{S} = \omega LI_{\max} e^{\frac{i\pi}{2}} \\ E_{gt} &= E_{g \max} \sin(\omega t + \delta) \dots \dots \dots \mathbf{E}_g = E_{g \max} e^{i\delta}. \end{aligned}$$

L'équation 1 devient sous forme symbolique

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{E} + r\mathbf{I} + \mathbf{S} \quad (7)$$

puis en y substituant les valeurs ci-dessus, on a

$$E_{g \max} e^{i\delta} = E_{\max} e^{i\varphi} + rI_{\max} + i\omega LI_{\max} \quad (8)$$

en remarquant que

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

et que par conséquent

$$\mathbf{S} = i\omega LI_{\max}.$$

Il suffit de développer  $e^{i\delta}$  et  $e^{i\varphi}$  par la formule de Moivre, et de séparer les termes réels des imaginaires pour retomber sur les équations 5 et 6.

Remarquons que dans le calcul précédent pour  $E_{gt}$ ,  $E_t$  et  $rI_t$  étaient donnés ainsi que leurs symboles, tandis que le symbole remplaçant  $L \frac{dI}{dt}$  a exigé au préalable le calcul de la dérivée de  $LI$  par rapport au temps. Il est possible d'obtenir le symbole en question de la façon suivante : Au lieu de calculer d'abord  $L \frac{dI}{dt}$ , il suffit de dériver *directement* le symbole complet de  $LI_t$ . Le symbole complet de  $I_t = I_{\max} \sin \omega t$  est  $I_{\max} e^{i\omega t}$ , celui de  $\frac{dI}{dt} = \omega I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$  est  $\omega I_{\max} e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = i\omega I_{\max} e^{i\omega t}$ .

On aurait pu obtenir *directement* ce dernier résultat en dérivant le symbole  $I_{\max} e^{i\omega t}$  par rapport à  $t$ .

Au lieu donc d'écrire le symbole complet de la dérivée de  $I_t$ , il suffit de dériver le symbole complet lui-même.

3° Le théorème de l'égalité de la dérivée du symbole complet et du symbole complet de la dérivée est d'ailleurs absolument général pour toutes les fonctions sinusoïdales, et cela pour les dérivées de tout ordre. Il est facile de le reconnaître.

Considérons, en effet,  $A_t = A \sin(\omega t \pm \alpha)$  et son symbole complet  $Ae^{i(\omega t \pm \alpha)}$  ;

Les dérivées de  $A_t$  seront

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \omega A \cos(\omega t \pm \alpha) = \omega A \sin\left(\omega t \pm \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{d^2A}{dt^2} &= -\omega^2 A \sin(\omega t \pm \alpha) \\ \frac{d^3A}{dt^3} &= -\omega^3 A \cos(\omega t \pm \alpha) = -\omega^3 A \sin\left(\omega t \pm \alpha + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

Les symboles des dérivées seront :

$$\begin{aligned} \frac{dA_t}{dt} &= \omega A e^{i(\omega t \pm \alpha)} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega A e^{i(\omega t \pm \alpha)} \\ \frac{d^2A_t}{dt^2} &= -\omega^2 A e^{i(\omega t \pm \alpha)} \\ \frac{d^3A_t}{dt^3} &= -\omega^3 A e^{i(\omega t \pm \alpha)} e^{i\frac{\pi}{2}} = -i\omega^3 A e^{i(\omega t \pm \alpha)}; \end{aligned}$$

Les dérivées des symboles seront :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A e^{i(\omega t \pm \alpha)} &= i\omega A e^{i(\omega t \pm \alpha)} \\ \frac{d}{dt} i\omega A e^{i(\omega t \pm \alpha)} &= -\omega^2 A e^{i(\omega t \pm \alpha)} \\ \frac{d}{dt} (-\omega^2 A e^{i(\omega t \pm \alpha)}) &= -i\omega^3 A e^{i(\omega t \pm \alpha)}. \end{aligned}$$

Les deux derniers tableaux sont identiques, c. q. f. d.

Le théorème démontré a le grand avantage que voici : toutes les fois que nous aurons une équation entre des

fonctions sinusoïdales et leurs dérivées, nous pourrions immédiatement remplacer ces fonctions et leurs dérivées par les symboles complets et les dérivées de ces symboles.

Toutes les équations différentielles qui expriment les lois des courants alternatifs pourront être transformées de la sorte, et éprouveront souvent de ce fait de notables simplifications.

En outre, une équation entre symboles *complets* a dans tous ses termes le facteur  $e^{i\omega t}$ , qui peut se supprimer, de sorte que l'équation ne contient plus que des symboles *réduits*. Comme nous allons le montrer, cette équation réduite prend même dans le cas du circuit pourvu de résistance, de self et de capacité, la forme de la loi d'Ohm en courant continu.

4° Reprenons, à titre d'application du théorème, l'exemple traité dans ce chapitre, comme s'il n'avait pas encore été résolu.

Nous avons comme point de départ

$$E_{gt} = E_t + rI_t + L \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

équation dans laquelle  $E_t$  et  $I_t$  (les constantes exigées par le récepteur) étaient données par leurs amplitudes  $E_{\max}$  et  $I_{\max}$  et l'avance de phase de  $E_t$  sur  $I_t$ .

Prenons de nouveau la phase de  $I_t$  pour origine des phases. Nous aurons le symbole complet

$$I_{\max} e^{i\omega t}.$$

Celui de  $E_{\max}$  sera

$$E_{\max} e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Celui de  $L \frac{dI}{dt}$ .

$$L \frac{d(I_{\max} e^{i\omega t})}{dt} = i\omega L \cdot I_{\max} e^{i\omega t}.$$

Il s'agit de déterminer l'amplitude  $E_{g\max}$  et la phase  $\varphi$

de  $E_{gt}$ . On posera

$$E_{gt} = E_{g \max} e^{i(\omega t + \delta)}$$

et l'on aura par l'équation 9

$$E_{g \max} e^{i(\omega t + \delta)} = E_{\max} e^{i(\omega t + \varphi)} + r I_{\max} e^{i \omega t} + i \omega L I_{\max} e^{i \omega t}$$

puis en simplifiant par  $e^{i \omega t}$ .

$$E_{g \max} e^{i \delta} = E_{\max} e^{i \varphi} + r I_{\max} + i \omega L I_{\max}. \quad (10)$$

Nous retombons sur l'équation 8. Le calcul pour  $E_{g \max}$  et  $\varphi$  se termine comme plus haut par l'application de la formule de Moivre.

5° Remarquons que l'équation 10 n'est au fond qu'une forme particulière des deux équations 5 et 6, qui ont servi dans la méthode classique développée au début de ce chapitre pour le calcul de  $E_{g \max}$  et de  $\varphi$ . L'équation 10 a sur les équations 5 et 6 l'avantage d'être susceptible d'une grande simplification ; il suffit pour cela de l'écrire :

$$E_{g \max} e^{i \delta} = E_{\max} e^{i \varphi} + I_{\max} (r + i \omega L)$$

puis de remplacer les symboles réduits d'après la convention de la page 4 par les majuscules droites  $\mathbf{E}_g$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{I}$ . On a alors

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{E} + \mathbf{I} (r + i \omega L)$$

puis en posant

$$r + i \omega L = \mathbf{R} \quad (11)$$

enfin

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{R}.$$

Cette dernière équation a la forme de la loi d'Ohm, telle qu'elle est appliquée en courant continu.

La quantité  $\mathbf{R}$ , qui synthétise les effets de la résistance ohmique et de la force électromotrice de self-induction, est ordinairement désignée sous le nom d'*impédance imagi-*

16 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
*naire ou de résistance apparente sous forme imaginaire.*

La possibilité d'employer la loi d'Ohm dans les problèmes de courants alternatifs en simplifie beaucoup la compréhension. Nous allons le montrer par quelques exemples.

---



## CHAPITRE III

### APPLICATIONS

1° Considérons d'abord (fig. 4) une résistance inductive  $r$  ayant un coefficient de self-induction  $L$ , soumise à une tension  $E_t$  et cherchons à déterminer le courant  $I_t$  qui y passe.

Nous prendrons  $E_t$  comme origine des phases et poserons en conséquence  $\mathbf{E}_t = E_{\max}$ .

Le courant aura pour amplitude  $I_{\max}$  et un décalage  $\varphi$

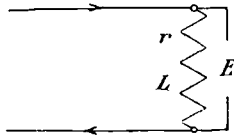


Fig. 4.

dont nous ignorons encore le sens ; nous le représenterons par le symbole réduit :

$$\mathbf{I} = I_{\max} e^{i\varphi}.$$

Les inconnues sont donc  $I_{\max}$  et  $\varphi$ .

En écrivant la résistance apparente sous forme complexe

$$r + i\omega L = \mathbf{R}$$

nous aurons par la loi d'Ohm

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}} = \frac{E_{\max}}{r + i\omega L}.$$

Ce dernier symbole doit être amené à la forme  $\mathbf{I} = I_{\max} e^{i\varphi}$ .

On y arrivera le plus facilement en passant par la forme accessoire  $p + qi$ . En multipliant haut et bas par  $(r - i\omega L)$ , on a

$$\mathbf{I} = \frac{r E_{\max}}{r^2 + \omega^2 L^2} - i \frac{\omega L E_{\max}}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

d'où

$$p = \frac{r \cdot E_{\max}}{r^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{et} \quad q = - \frac{\omega L E_{\max}}{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

On a donc pour

$$\mathbf{I} = I_{\max} e^{i\varphi}$$

$$I_{\max} = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{p} = - \frac{\omega L}{r}$$

soit

$$\varphi = - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}.$$

Le problème est donc résolu.

Si nous écrivons  $\mathbf{E} = E_{\max}$  sous la forme réelle

$$E_t = E_{\max} \sin \omega t$$

le symbole  $\mathbf{I} = I_{\max} e^{i\varphi}$  sera représenté par  $I_t = I_{\max} \sin (\omega t + \varphi)$ .

En introduisant dans cette dernière expression les valeurs trouvées pour  $I_{\max}$  et  $\varphi$ , on a

$$I_t = \frac{E_{\max}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left( \omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r} \right)$$

résultat bien connu.

Remarquons que dans la méthode employée nous n'avons eu besoin que de l'algèbre élémentaire, tandis que par la méthode ordinaire, le même résultat ne peut être obtenu

que par la résolution d'une équation différentielle

$$E_t = rI_t + L \frac{dI}{dt}.$$

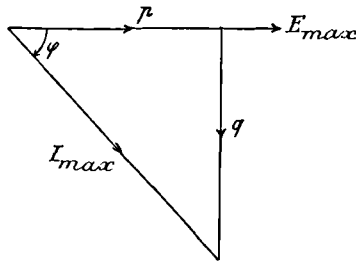


Fig. 5.

La figure 5 donne la méthode graphique.  $E_{\max}$ , qui ne contient pas d'imaginaire, se confond avec la directrice ; la composante du courant qui coïncide avec cette directrice est la composante wattée, tandis qu'il faut porter perpendiculairement, et vers le bas, puisqu'elle est négative, la composante déwattée

$$q = - E_{\max} \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Le courant réel, qui résulte de la composition de  $p$  et de  $q$  se trouve décalé de l'angle  $\varphi$  sur la droite de la directrice ; il est donc en retard de phase sur la tension.

2° A titre de seconde application, nous allons reprendre le problème traité dans le chapitre II. Il s'agit (fig. 3) d'une ligne possédant une résistance  $r_1$  et une self-induction  $L_1$  données ; on possède en outre les données correspondantes  $r_2$  et  $L_2$  pour le récepteur placé à l'extrémité de la ligne. Mais cette fois nous supposerons que la tension  $E_g$  du générateur est donnée, et nous demanderons de déterminer en grandeur et en phase la tension  $E$  aux bornes du récepteur.

Les résistances apparentes sous forme complexe seront :

Pour la ligne  $\mathbf{R}_1 = r_1 + i \omega L_1$ ; pour le récepteur  $\mathbf{R}_2 = r_2 + i \omega L_2$ . Posons pour simplifier  $\omega L = s$ ; nous aurons

$$\mathbf{R}_1 = r_1 + is_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_2 = r_2 + is_2.$$

Partons de  $E_g$  et posons en conséquence  $\mathbf{E}_g = E_{g \max}$ .

Nous aurons alors  $\mathbf{E} = E_{\max} e^{i\psi}$ ,  $\psi$  étant la différence de phase entre  $E_t$  et  $E_{gt}$ .

La loi d'Ohm donnera (fig. 3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_g \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2} \\ &= E_{g \max} \frac{r_2 + is_2}{r_1 + is_1 + r_2 + is_2}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression doit être amenée à la forme  $E_{\max} e^{i\psi}$ ; pour cela nous passons par la forme accessoire  $p + qi$  et écrivons tout d'abord

$$\mathbf{E} = E_{g \max} \frac{r_2 + is_2}{r_1 + r_2 + i(s_1 + s_2)}$$

ou en posant

$$r_1 + r_2 = r \quad \text{et} \quad s_1 + s_2 = s$$

$$\mathbf{E} = E_{g \max} \frac{r_2 + is_2}{r + is}.$$

Multiplions haut et bas par  $(r - is)$ ; nous obtenons

$$\mathbf{E} = E_{\max} \underbrace{\frac{r_2 r + s_2 s}{r^2 + s^2}}_p + i E_{\max} \underbrace{\frac{r s_2 - r_2 s}{r^2 + s^2}}_q$$

ce qui est la forme accessoire cherchée.

Pour passer à la forme principale  $\mathbf{E} = E_{\max} e^{i\psi}$ , il suffit de calculer

$$E_{\max} = \sqrt{p^2 + q^2} = E_{g \max} \sqrt{\frac{r_2^2 + s_2^2}{r^2 + s^2}} \quad (1)$$

et

$$\text{tg } \psi = \frac{q}{p} = \frac{r s_2 - r_2 s}{r r_2 + s s_2}. \quad (2)$$

Le problème est donc résolu.

Nous allons vérifier ces résultats par le procédé graphique en partant de l'équation 1, page 10. Nous y remplaçons  $r$  par  $r_1$  et  $L$  par  $L_1$  puisque nous avons donné l'indice 1 à toutes les quantités caractéristiques de la ligne et obtenons

$$E_{gt} = E_t + r_1 I_t + L_1 \frac{dI}{dt}$$

dans laquelle, d'après la page 11, on a

$$r_1 I_t = r_1 I_{\max} \sin \omega t$$

$$E_t = E_{\max} \sin (\omega t + \varphi)$$

$$L_1 \frac{dI}{dt} = \omega L_1 I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Comme la première de ces équations nous montre que dans le cas actuel c'est le *courant* qui est origine des

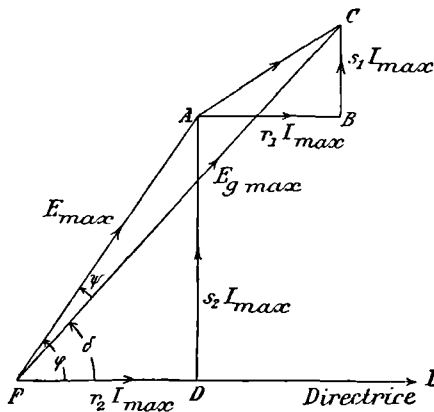


Fig. 6 a.

phases, nous portons  $I$  comme directrice (fig. 6 a); nous portons  $E_{\max}$  faisant un angle  $\varphi$  vers la gauche,  $r_1 I_{\max}$  parallèle à la directrice et  $\omega L_1 I_{\max} = s_1 I_{\max}$  perpendiculaire à cette dernière dans le sens positif (vers la gauche).

En fermant le polygone, nous obtenons comme résultante  $E_{g \max}$  en grandeur et en direction. Cette résultante

forme avec la directrice l'angle  $\delta$  vers la gauche, et avec  $E_{\max}$  l'angle cherché  $\psi$ .

La figure 6a montre en outre la décomposition de la tension  $E_{\max}$  appliquée au récepteur en deux composantes :

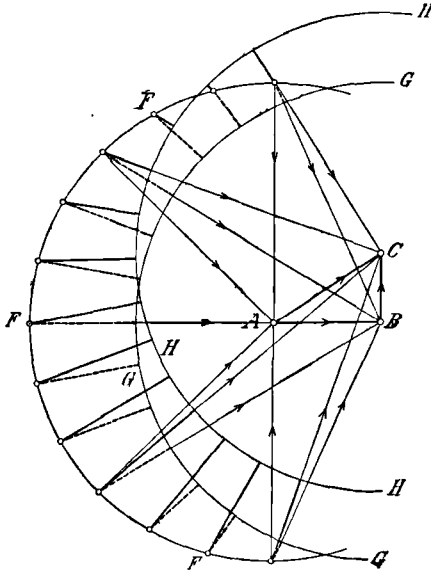


Fig. 6 b.

Chute ohmique de tension  $r_2 I_{\max}$  et force électro-motrice de self-induction  $\omega L_2 I_{\max} = s_2 I_{\max}$ .

Il est facile de déduire de la figure 6 a les relations suivantes :

$$\frac{E_{\max}^2}{E_{g\max}^2} = \frac{I_{\max}^2 r_2^2 + I_{\max}^2 s_2^2}{(I_{\max} r_2 + I_{\max} r_1)^2 + (I_{\max} s_2 + I_{\max} s_1)^2} = \frac{r_2^2 + s_2^2}{r^2 + s^2}$$

et

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\varphi - \delta) = \frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta} = \frac{r s_2 - r_2 s}{r r_2 + s s_2}$$

qui ne sont autres que les équations 1 et 2.

La figure 6 a permet de se rendre compte que la self de

la ligne augmente en général la chute de tension ; en effet, si le produit  $s_1 I_{\max} = \omega L_1 I_{\max}$  diminue, le point  $C$  de la figure se rapproche de  $B$  et peut arriver à coïncider avec lui quand  $L_1 = 0$ . La tension aux bornes du générateur est à ce moment  $E_{g_{\max}} = FB$  et son avance sur le courant devient  $\delta = \sphericalangle DFB$ .

L'absence de self dans la ligne a donc pour conséquence de diminuer à la fois  $E_g$  et  $\delta$  ; ce sont là deux points très avantageux pour l'exploitation, car l'excitation exigée par la machine devient plus faible à mesure que la tension exigée du générateur et le décalage diminuent.

La self de la ligne a donc dans le cas présent une influence défavorable.

La figure 6 *b* permet de se rendre compte facilement de l'influence que la self de la ligne exerce sur la chute de tension, suivant la nature de la charge. Le triangle  $ABC$  est la réduction du triangle homologue de la figure 6 *a*. Du point  $A$  comme centre on a tracé un arc de cercle  $FFF$  de rayon  $AF = E_{\max}$  ; ce rayon a été réduit dans le même rapport que  $ABC$ .

Les différents vecteurs  $FB$  de la figure 6 *b* représentent (comme ceux de même nom qu'on aurait pu tracer dans la figure 6 *a*) les tensions  $E_{g_{\max}}$  que le générateur devrait développer dans le cas d'une ligne sans self, les différents vecteurs  $FC$  les tensions au générateur dans le cas d'une ligne inductive.

L'angle variable des vecteurs  $FA$  et  $AB$  représente le décalage du courant sur la tension aux bornes du récepteur. Ce décalage est nul quand  $FA$  est dans le prolongement de  $AB$  ; quand  $F$  est au-dessus, il y a avance du courant sur la tension ; quand  $F$  est au-dessous, il y a retard du courant sur la tension, ce qui est le cas habituel en pratique (charge constituée par des transformateurs ou des moteurs).

Le vecteur  $FB$  de la figure 6 *b* donne dans le cas d'une

ligne sans self la tension nécessaire aux bornes du générateur pour maintenir un courant et une tension *constants* aux bornes de l'appareil d'utilisation, pour toutes les différences de phase possible entre ces deux constantes; le vecteur  $FC$  donne la tension exigée au générateur dans le cas de la ligne inductive.

On déterminera les chutes de tension dans les deux cas en faisant les différences  $FB - FA$  et  $FC - FA$ .

Ces différences peuvent être rendues très visibles en traçant avec  $B$  comme centre un arc  $GGG$  et avec  $C$  un arc  $HHH$  tous deux avec le rayon  $AF$ . Les lignes pointillées  $FG = FB - BG = FB - FA$  représentent les chutes de tension dans le cas de la ligne sans self, tandis que les lignes en traits forts  $FH = FC - HC = FC - FA$  les donnent dans le cas de la ligne inductive.

On reconnaît immédiatement que dans le quadrant inférieur, qui est le cas le plus fréquent en pratique, la chute de tension est plus grande quand la ligne possède de la self, et que la différence avec la ligne sans self est d'autant plus considérable que le courant est plus décalé sur la tension aux bornes du récepteur.

Dans le quadrant supérieur, c'est-à-dire quand le récepteur provoque une avance de phase du courant sur la tension qui règne à ses bornes, il se produit, à partir d'une certaine valeur de cette avance, une plus faible chute de tension quand la ligne est inductive.

On peut donc conclure en disant que dans les cas pratiques la self de la ligne agit défavorablement sur la chute de tension.

Les considérations qui précèdent donnent le moyen de tenir compte de la self-induction des lignes dans tous les cas possibles, pourvu que le coefficient de self-induction soit connu. Le chapitre ix donnera les formules qui permettent de calculer  $L$  d'après les dimensions des conducteurs et leur position relative.



## CHAPITRE IV

### LE CALCUL DES QUANTITÉS COMPLEXES

Maintenant que nous avons démontré l'utilité des quantités complexes, il nous paraît indiqué de faire ici un bref résumé des règles de calcul qui peuvent être utilisées dans les problèmes de courants alternatifs. Nous avons déjà fait usage de quelques-unes de ces règles dans ce qui précède.

1. Égalité des quantités complexes. — Quand

$$p' + q' i = p'' + q'' i,$$

on a

$$p' = p'' \quad \text{et} \quad q' = q''.$$

Lorsque deux quantités complexes sont égales, il en résulte l'égalité des parties réelles entre elles et l'égalité des parties imaginaires entre elles.

Un théorème analogue existe entre quantités complexes données sous la forme principale. Quand

$$A e^{i\alpha} = B e^{i\beta},$$

on a

$$A \cos \alpha + i A \sin \alpha = B \cos \beta + i B \sin \beta$$

et par conséquent

$$A \cos \alpha = B \cos \beta$$

$$A \sin \alpha = B \sin \beta.$$

En divisant membre à membre, on a :

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$$

d'où

$$\alpha = \beta.$$

En élevant au carré et en additionnant on arrive à

$$A = B$$

Les amplitudes et les angles de phase sont donc égaux, chacun à chacun.

2. Passage d'une forme à une autre. — On passe de la forme  $A e^{i\alpha}$  à la forme  $p + qi$  en posant

$$p = A \cos \alpha \quad \text{et} \quad q = A \sin \alpha.$$

La transformation inverse se fait en posant

$$A = \sqrt{p^2 + q^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \alpha = \frac{q}{p} \text{ *)}.$$

\*) Il va sans dire qu'il faut tenir compte des signes individuels de  $p$  et de  $q$  et distinguer par exemple le  $+\frac{q}{p}$  qui provient de  $+p$  et de  $+q$  du

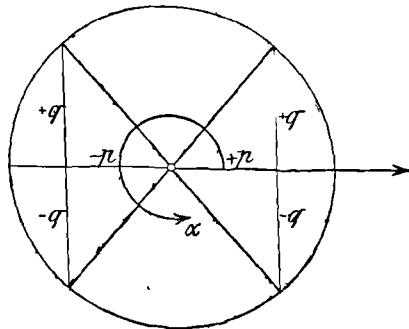


Fig. 7.

$+\frac{q}{p}$  provenant de  $-p$  et  $-q$ ; de même le  $-\frac{q}{p}$  venant de  $-p$  et de  $+q$  de celui qui résulte de  $+p$  et de  $-q$ .

Si par exemple (fig. 7) on a

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad \text{tg} \alpha &= \frac{+q}{+p} \quad \text{et} \quad \alpha = 37^\circ, \\ \text{tg} \alpha &= \frac{+q}{-p} \quad \text{fera} \quad \alpha = 180^\circ - 37^\circ \\ \text{tg} \alpha &= \frac{-q}{-p} \quad \text{fera} \quad \alpha = 180^\circ + 37^\circ \\ \text{tg} \alpha &= \frac{-q}{+p} \quad \text{fera} \quad \alpha = 360^\circ - 37^\circ \end{aligned}$$

3. Opérations sur les quantités complexes. — Il y a deux marches différentes, suivant que l'on désire obtenir comme résultat final une forme  $p + qi$  ou  $A e^{i\alpha}$ .

a) *Addition et soustraction.* — On a

$$(p' + q' i) \pm (p'' + q'' i) = (p' \pm p'') + (q' \pm q'')i.$$

Si au contraire on donne les formes principales  $A e^{i\alpha}$  et  $B e^{i\beta}$  on trouvera leur somme

$$C e^{i\gamma} = A e^{i\alpha} + B e^{i\beta},$$

en portant (fig. 8 a) à la suite l'un de l'autre les vecteurs  $A$  et  $B$  faisant respectivement les angles  $\alpha$  et  $\beta$  avec une direc-

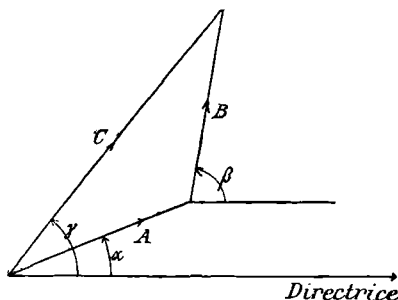


Fig. 8 a.

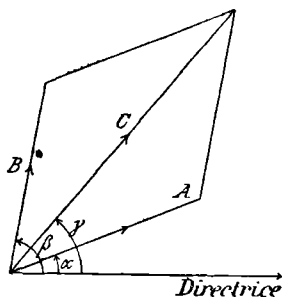


Fig. 8 b.

trice arbitraire, et en fermant le triangle par un vecteur  $C$  dont la position détermine l'angle  $\gamma$ .

Quand on se voit obligé de porter  $A$  et  $B$  comme vecteurs issus d'un même point, le vecteur  $C$  est la diagonale du parallélogramme construit sur  $A$  et  $B$  (fig. 8 b). Cette dernière manière est plus compliquée que celle de la figure 8 a, puisqu'elle comporte le tracé de cinq lignes au lieu de trois; mais elle offre par contre l'avantage de porter les trois angles à partir d'un côté commun, ce qui facilite les comparaisons.

La soustraction des quantités complexes résulte immé-

diatement de l'addition ; soit par exemple à calculer

$$B e^{i\beta} = C e^{i\gamma} - A e^{i\alpha}.$$

Cela revient au problème résolu par la figure 8 a.

$$C e^{i\gamma} = A e^{i\alpha} + B e^{i\beta}.$$

On portera les vecteurs donnés  $C e^{i\gamma}$  et  $A e^{i\alpha}$  à partir d'une origine commune, puis on joindra les extrémités de ces vecteurs ; le vecteur ainsi obtenu, dirigé de l'extrémité de  $A e^{i\alpha}$  à celle de  $C e^{i\gamma}$ , est la différence cherchée  $B e^{i\beta}$ .

Si l'on tient à faire l'addition ou la soustraction de deux formes principales  $A e^{i\alpha}$  et  $B e^{i\beta}$ , par le calcul et non graphiquement, il faut d'abord les amener aux formes accessoires  $p' + q'i$  et  $p'' + q''i$ .

b) *Multiplication.* — On a

$$(p' + q'i)(p'' + q''i) = \underbrace{(p' p'')}_{p} - \underbrace{q' q''}_{q} + (p' q'' + p'' q') i$$

et

$$A' e^{i\alpha'} \cdot A'' e^{i\alpha''} = A' A'' e^{i(\alpha' + \alpha'')} = A e^{i\alpha}.$$

c) *Division.* — Pour amener le quotient  $\frac{p' + q'i}{p'' + q''i}$  à la forme  $p + qi$ , il suffit de multiplier haut et bas par  $p'' - q''i$ . On obtient alors

$$\frac{p' + q'i}{p'' + q''i} = \frac{(p' + q'i)(p'' - q''i)}{p''^2 + q''^2} = \frac{p' p'' + q' q''}{\underbrace{p''^2 + q''^2}_p} + \frac{p'' q' - p' q''}{\underbrace{p''^2 + q''^2}_q} i.$$

Le quotient de 2 formes principales est

$$\frac{A' e^{i\alpha'}}{A'' e^{i\alpha''}} = \frac{A'}{A''} e^{i(\alpha' - \alpha'')} = A e^{i\alpha}.$$

d) *Extraction de racines.* — Quand les quantités données sont sous la forme principale, on a à effectuer

$$\sqrt{A' e^{i\alpha'}} = A e^{i\alpha}$$

d'où

$$A' e^{i\alpha'} = A^2 e^{2i\alpha}$$

et

$$A = \sqrt{A'}$$

et enfin

$$\alpha = \frac{\alpha'}{2}.$$

Si, au contraire, on a la forme accessoire, on pose

$$\sqrt{p' + q' i} = p + q i;$$

on élève au carré les deux membres

$$p' + q' i = p^2 - q^2 + 2 p q i,$$

et l'on a

$$p^2 - q^2 = p'$$

et

$$2 p q = q'$$

d'où enfin

$$p = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{p'^2 + q'^2} + p')}$$

et

$$q = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{p'^2 + q'^2} - p')}.$$

Il reste à déterminer les signes de  $p$  et  $q$ . Pour cela on a recours à la forme principale.

Comme

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{q}{p}$$

et

$$\alpha' = \operatorname{arctg} \frac{q'}{p'}$$

on aura

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{q}{p} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{q'}{p'}.$$

Quand  $\alpha'$  est dans le premier quadrant,  $\alpha$  y est aussi; donc quand  $p'$  est (+) et  $q'$  (+),  $p$  est (+) et  $q$  est (+).

Quand  $\alpha'$  est dans le deuxième quadrant,  $\alpha$  est dans le premier; donc quand  $p'$  est (—) et  $q'$  (+),  $p$  est (+) et  $q$  est (+).

Quand  $\alpha'$  est dans le troisième quadrant,  $\alpha$  est dans le deuxième; donc quand  $p'$  est (—) et  $q'$  (—),  $p$  est (—) et  $q$  est (+).

Quand enfin  $\alpha'$  est dans le quatrième quadrant,  $\alpha$  est dans le deuxième; donc quand  $p'$  est (+) et  $q'$  (—),  $p$  est (—) et  $q$  est (+).

On remarquera que dans ce tableau  $p$  est deux fois positif et deux fois négatif, tandis que  $q$  est constamment positif. Cela provient du fait que nous n'avons considéré que la racine positive de  $p' + q'i$ . Si l'on considère la racine négative, les signes de  $p$  et de  $q$  changent, de sorte qu'à la fin, on a bien toutes les combinaisons possibles de signes pour  $p$  et  $q$ .

La nature du problème indique d'ailleurs dans chaque cas particulier le signe à adopter pour la racine de  $p' + q'i$ .

e) *Logarithmes*. — On doit amener  $\ln(p' + q'i)$  à la forme

$$\ln(p' + q'i) = p + q i$$

en observant qu'on a alors

$$p' + q'i = e^{p + qi} = e^p \cdot e^{qi}.$$

On en tire

$$e^p (\cos q + i \sin q) = p' + q'i$$

d'où

$$e^p \cos q = p'$$

et

$$e^p \sin q = q',$$

et

$$e^{2p} = p'^2 + q'^2,$$

et

$$p = \frac{1}{2} \ln (p'^2 + q'^2),$$

et enfin

$$\operatorname{tg} q = \frac{q'}{p'},$$

et

$$q = \operatorname{arctg} \frac{q'}{p'}.$$

Quand on a la forme principale, il s'agit de trouver

$$\ln (A' e^{i\alpha'}) = A e^{i\alpha}$$

On a alors

$$\ln A' + i\alpha' = A \cos \alpha + i A \sin \alpha,$$

soit

$$\ln A' = A \cos \alpha$$

et

$$\alpha' = A \sin \alpha,$$

d'où

$$A = \sqrt{(\ln A')^2 + \alpha'^2}$$

et

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha'}{\ln A'}.$$

4. **Multiplication par  $\pm i$ .** — La multiplication d'une quantité complexe par  $(+i)$  se représente graphiquement par une rotation de  $90^\circ$  vers la gauche, celle par  $(-i)$  par une rotation de  $90^\circ$  vers la droite; la longueur du vecteur ne se modifie pas.

En voici la démonstration sans autre :

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha \pm 90^\circ)} &= \cos(\alpha \pm 90^\circ) + i \sin(\alpha \pm 90^\circ) = \mp \sin \alpha \pm i \cos \alpha \\ &= \pm i^2 \sin \alpha \pm i \cos \alpha = \pm i (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \pm i e^{i\alpha}. \end{aligned}$$

5. **Proportions entre quantités complexes.** — Quand on a la proportion :

$$\frac{Ae^{i\alpha}}{Be^{i\beta}} = \frac{Ce^{i\gamma}}{De^{i\delta}},$$

il en résulte

$$\frac{A}{B} e^{i(\alpha - \beta)} = \frac{C}{D} e^{i(\gamma - \delta)},$$

et d'après le § 1 pages 23 et 24.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

et

$$\alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Les couples de vecteurs  $A$  et  $B$ ,  $C$  et  $D$  forment donc des rapports égaux, et l'angle des vecteurs d'un couple est égal à celui des vecteurs de l'autre couple.

En joignant les extrémités des deux vecteurs de chaque couple par un troisième vecteur, on obtient des triangles semblables.





## CHAPITRE V

### LA CAPACITÉ DES LIGNES

Quand on relie les extrémités d'une ligne à 2 fils aux bornes d'un générateur à courant continu, sans fermer le circuit à l'extrémité opposée de la ligne, chacun des conducteurs prend sur toute sa longueur le potentiel du pôle auquel il est joint. Le potentiel de chaque conducteur est par conséquent constant sur toute sa longueur. Nous entendons par potentiel en un point la capacité de travail qui caractérise l'unité de masse électrique au point considéré.

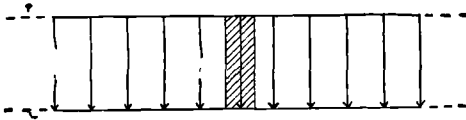


Fig. 9.

La connaissance du potentiel des conducteurs doit être complétée par la connaissance de la variation du potentiel dans l'espace qui les sépare. Pour cela, imaginons que les deux conducteurs soient reliés en un point quelconque par une droite qui leur soit perpendiculaire, et que l'on suive cette droite d'un conducteur à l'autre ; on constatera que le potentiel se modifie d'une façon continue en ayant pour valeurs limites celles des conducteurs. La variation du potentiel par unité de longueur de la droite qui joint les conducteurs est caractéristique pour la gran-

deur de la force électrique  $H$  qui agirait sur la masse électrique unité placée dans le diélectrique qui sépare les conducteurs. En appelant  $d\mathbf{P}$  la variation de potentiel sur une longueur  $dn$ , on a

$$H = - \frac{d\mathbf{P}}{dn} \quad (1)$$

formule dans laquelle le signe — signifie que  $H$  agit dans le sens du potentiel *décroissant*.  $H$  s'appelle aussi l'intensité de champ dans le diélectrique.

La cause de cette force est l'accumulation de charges électriques sur les deux conducteurs par le fait de leur jonction aux pôles du générateur.

On sait que le phénomène de la charge est caractérisé par le fait que les masses électriques ne se portent que sur la surface des conducteurs et non dans leur intérieur. La relation entre la force et la charge est donnée par la loi de Coulomb, d'après laquelle deux masses  $m_1$  et  $m_2$  placées à la distance  $r$  l'une de l'autre agissent l'une sur l'autre avec une force

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

formule dans laquelle  $k$  est une constante caractéristique du diélectrique. L'intensité du champ en un point est la force qui résulte de l'action de toutes les charges réparties sur les deux conducteurs sur une unité de masse électrique placée au point considéré. La notion d'intensité de champ électrique correspond parfaitement à la notion d'intensité de champ magnétique.

De même que pour les phénomènes magnétiques, les phénomènes électriques peuvent être représentés par des lignes de force. Si, par exemple, on imagine que l'unité de masse électrique soit placée dans le voisinage du conducteur au potentiel le plus élevé, elle se trouve sous l'influence d'une force qui tend à l'éloigner de ce conducteur

du côté de celui qui est au potentiel le moins élevé. La ligne suivant laquelle le mouvement tend à se produire peut être désignée par le terme de « ligne de force électrique ». On est ainsi amené à considérer l'espace compris entre les conducteurs comme rempli de lignes de force qui se dirigent du conducteur à potentiel élevé vers l'autre, absolument comme dans l'espace compris entre deux pôles magnétiques *N* et *S*. Dans le cas traité ici de conducteurs parallèles de très grande longueur par rapport à leur distance, les lignes de force qui existent dans un plan mené par les axes des deux conducteurs (fig. 9) sont toutes perpendiculaires aux deux fils, et parallèles entre elles absolument comme les lignes de force magnétique entre deux pôles parallèles et plans dont la distance est petite par rapport à leurs dimensions.

Il est très intéressant de suivre une de ces lignes de force électrique. A l'endroit où elle sort du conducteur et dans son voisinage immédiat la seule charge électrique qui puisse agir sur la masse unité est celle qui se trouve précisément à la naissance de la ligne de force. Si l'on désigne par  $\sigma$  la densité électrique (c'est-à-dire le nombre d'unités de masse électrique par centimètre carré) au point considéré de la surface du conducteur, on a

$$H_o = 4\pi\sigma k. \quad (2)$$

Si on représente la grandeur de la force électrique par la densité des lignes de force, cette densité est simplement proportionnelle à celle de la charge électrique au point de naissance de la ligne de force. La densité de la charge et celle des lignes de force sont deux quantités indissolublement liées qui se présentent toujours en même temps ; leur rapport numérique ne dépend que de la nature du diélectrique.

Si maintenant nous imaginons que le nombre des unités électriques placées sur les conducteurs soit par exemple

subitement doublé, l'intensité de champ  $H_0$ , tout près de la surface du conducteur se doublera aussi, ainsi que  $H$  en tous les autres points du diélectrique. Il en suit, d'après l'équation 1, que le potentiel  $P$  double aussi avec  $H$ . D'après cela la différence de potentiel et la charge électrique aux extrémités d'une ligne de force sont proportionnelles. A chaque charge d'un élément de conducteur et de l'élément homologue de l'autre conducteur correspond donc une cer-

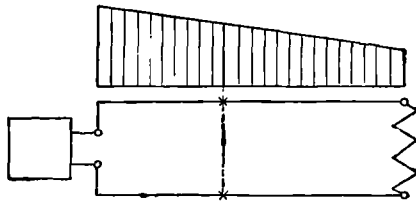


Fig. 10.

taine différence de potentiel, et réciproquement : quand il y a une certaine différence de potentiel entre deux éléments correspondants des conducteurs, il doit exister sur ces éléments une charge parfaitement déterminée et proportionnelle à la différence de potentiel. On désigne sous le nom de capacité des conducteurs la charge qui correspond à la différence de potentiel *unité* entre deux éléments correspondants. Quand les deux conducteurs sont parallèles la capacité de tous les éléments correspondants des conducteurs est naturellement la même partout, puisqu'ils se trouvent tous dans la même position les uns par rapport aux autres.

Le théorème de la coexistence de la différence de potentiel et de la charge est vrai, non seulement quand les deux conducteurs sont en circuit ouvert, mais aussi dans le cas où ils sont parcourus par un courant.

S'il s'agit d'un courant continu, la différence de potentiel entre deux conducteurs diminue alors proportionnellement à la longueur de ces conducteurs, mesurée en partant du générateur pour aller du côté du récepteur (fig. 10).

Il en suit que la charge par unité de longueur (charge spécifique ou densité de charge) doit aller en diminuant du commencement à la fin de la ligne proportionnellement à la longueur parcourue sur la ligne. Nous avons donc dans ce cas, à part les masses électriques qui circulent dans la ligne, des charges *statiques* sur les conducteurs; sur l'un des charges positives, sur l'autre des charges négatives dont les densités sont invariables dans le temps comme les différences de potentiel et qui comme elles

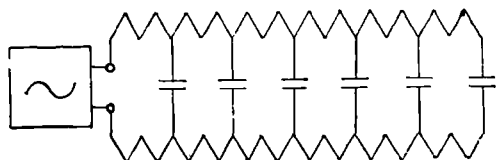


Fig. 11.

diminuent proportionnellement à la distance qui les sépare du générateur. Ce phénomène est un phénomène de *condensation* : les éléments correspondants des conducteurs forment des *condensateurs*. La figure 10 donne donc en même temps que la répartition des potentiels la répartition des charges *statiques*.

En courant continu cette charge statique se fait dès l'établissement du courant et reste constante sitôt que les charges ont pris leur position; en alternatif, au contraire, la différence de potentiel entre deux éléments correspondants varie périodiquement avec le temps, la charge par conséquent aussi. Une variation périodique des charges accumulées sur les conducteurs ne peut se faire que par un flux et reflux : le phénomène de la charge statique a pour conséquence un certain courant qui se superpose au courant alternatif.

La figure 11 représente schématiquement un groupe de deux conducteurs ayant de la capacité. Les deux lignes en zigzag représentent deux conducteurs possédant de la

résistance et de la self-induction ; leur capacité est représentée par des condensateurs formant de place en place un pont entre les deux lignes. On peut imaginer que la capacité du conducteur est tout entière concentrée dans ces condensateurs. Si donc les éléments de conducteur placés entre les condensateurs sont infiniment petits, et si ces condensateurs en représentent les capacités infiniment petites, la ligne artificielle représentée figure 11 doit pouvoir remplacer complètement la ligne réelle. Comme c'est principalement dans les câbles que se manifeste la capacité, la figure 11 peut être considérée comme le schéma du câble artificiel.

Il en suit que l'étude des courants dans les lignes possédant de la capacité doit être précédée de l'étude du courant nécessaire à la charge des conducteurs. Le calcul de ce courant sera fait dans les chapitres suivants.

Nous allons donner ici quelques notions sur la capacité des lignes aériennes et des câbles et discuter les facteurs dont elle dépend.

Considérons de nouveau les éléments correspondants de deux conducteurs parallèles, ceux-ci étant plus rapprochés qu'auparavant. Si les deux conducteurs restent reliés au même générateur, de telle sorte que la différence de potentiel entre eux est la même qu'avant, la chute de potentiel sur l'unité de longueur de ligne de force électrique *grandit*; le quotient  $-\frac{dP}{dn}$  *grandit* et par conséquent, la force électrique  $H$  aussi (éq. 1).

Mais l'augmentation de  $H$  a pour conséquence l'augmentation de la quantité d'électricité sur le conducteur (éq. 2). La diminution de distance a donc comme conséquence une *augmentation de la capacité*. La self-induction suit une marche inverse, car elle dépend du flux de force magnétique compris entre les conducteurs, flux qui diminue avec la surface comprise entre ces conducteurs.

L'unité technique de capacité est le farad. C'est la quantité d'électricité, exprimée en coulombs, dont chacun des conducteurs reliés au générateur à courant continu est susceptible de se charger par volt de différence de potentiel existant entre les bornes de ce générateur. On aura donc la formule suivante :

$$c = \frac{Q}{P} \quad (3)$$

$C$  étant la capacité, en farads,  $Q$  la charge totale de *chaque* conducteur, en coulombs, et  $P$  la différence de potentiel aux bornes du générateur, en volts.

Le farad est très grand. Les capacités qui se rencontrent dans la pratique sont représentées par des très petits nombres. C'est pourquoi en emploie comme unité pratique de capacité le microfarad, millionième partie du farad. Il va sans dire que toutes les données sont rapportées à l'unité de longueur de ligne, par exemple au kilomètre.

La mesure de la capacité d'une ligne existante est facile, car la mesure des différences de potentiel et des charges n'offre pas de difficultés spéciales.

Les lignes à deux conducteurs parallèles dont il est question ici peuvent être aussi bien des lignes aériennes que des câbles ; ces derniers portent, comme on le sait, les conducteurs d'aller et de retour placés concentriquement ou cordés ensemble suivant un pas très allongé. Dans les câbles concentriques, la dessiccation parfaite de l'isolant qui sépare les deux conducteurs présente certaines difficultés ; c'est pourquoi l'emploi des câbles à conducteurs cordés est plus fréquent. Les câbles concentriques pour courant triphasé ont l'inconvénient d'être dissymétriques par le fait des diamètres différents des trois couches de cuivre ; aussi les lignes triphasées sont-elles presque toujours en câbles cordés.

La faible distance des conducteurs dans les câbles en

augmente passablement la capacité par rapport à celle des lignes aériennes équivalentes ; par contre, la self-induction y est plus petite. Mais les différences entre les câbles et les lignes aériennes ne sont en somme que quantitatives. Nous traiterons principalement les câbles, car ce sont eux qui montrent de la façon la plus nette les effets de la capacité uniformément répartie, dont l'étude est le but du présent ouvrage. Pour abrégier le langage, nous désignerons dorénavant toutes les lignes possédant de la capacité sous le nom de câbles, à moins qu'il ne soit expressément stipulé qu'il s'agit de lignes aériennes.

Le chapitre ix donnera les formules qui permettent de calculer la capacité des lignes aériennes et des câbles en fonction de leurs dimensions, ainsi que les autres données électriques qui déterminent le courant dans les lignes.

---



## CHAPITRE VI

### LE CONDENSATEUR DANS LE CIRCUIT A COURANT ALTERNATIF

Nous allons aborder le problème posé à propos de la figure 11 : Recherche du courant de charge d'un condensateur.

Soit  $c$  la capacité d'un condensateur, en farads, et

$$E_t = E_{\max} \sin \omega t$$

la différence de potentiel en volts à laquelle il est soumis.



Fig. 12.

$\nu$  est le nombre de périodes par seconde et  $\omega = 2\pi\nu$  la pulsation. Si la charge de chacune des armatures du condensateur est  $Q_t$  coulombs, la capacité vaut (éq. 3, p. 39)

$$c = \frac{Q_t}{E_t}$$

ce qui donne

$$Q_t = c \cdot E_t. \quad (1)$$

La charge des armatures est donc proportionnelle à la tension et varie sinusoïdalement avec elle. Cette variation

n'est possible que si ces armatures sont constamment chargées et déchargées ou en d'autres termes si un courant alternatif circule dans les conducteurs qui joignent les armatures à la ligne. Soit  $dQ$  la quantité d'électricité qui arrive dans le temps  $dt$ ; on aura :

$$\frac{dQ}{dt} = I_t \quad (2)$$

formule qui donne la quantité par seconde, ou en d'autres termes l'intensité du courant dans la dérivation portant le condensateur.

En introduisant dans l'équation 2 la valeur de  $Q_t$  donnée par l'équation 1, on a pour le courant de charge dans le conducteur l'expression

$$I_t = c. \omega. E_{\max} \cos \omega t = c. \omega. E_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Comme on le voit, le courant de charge a une avance de phase d'un quart de période sur la tension, et son amplitude a pour valeur

$$I_{\max} = c. \omega. E_{\max}$$

ou, en tenant compte de la relation  $\omega = 2 \pi \nu$

$$I_{\max} = 2 \pi \nu. c. E_{\max}.$$

L'intensité n'est donc pas seulement proportionnelle à la tension et à la capacité, mais encore à la fréquence du courant alternatif.

La méthode symbolique amène au même résultat. Si l'on exprime  $E_t$  par le symbole complet  $\mathbf{E}_t = E_{\max} e^{i\omega t}$ , on obtient pour  $Q$  le symbole complet

$$\mathbf{Q}_t = c. \mathbf{E}_t = c. E_{\max} e^{i\omega t} \quad (2a)$$

et pour le courant de charge

$$\mathbf{I}_t = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = c. \omega. E_{\max}. i. e^{i\omega t} \quad (3)$$

ou encore d'après le § 4, page 31.

$$\mathbf{I}_t = c. \omega. E_{\max}. e^{i(\omega t + 90^\circ)}.$$

Comme d'autre part,  $\mathbf{I}_t$  doit avoir la forme

$$\mathbf{I}_t = I_{\max} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4)$$

on aura enfin

$$I_{\max} = c. \omega. E_{\max} \quad \text{et} \quad \varphi = 90^\circ.$$

De la même façon que  $I_{\max}$  est exprimé en fonction de  $E_{\max}$ , il est possible d'exprimer le symbole réduit

$$\mathbf{I} = I_{\max} e^{i\varphi}$$

en partant du symbole réduit

$$\mathbf{E} = E_{\max}$$

En combinant les équations 3 et 4, on a

$$I_{\max} e^{i(\omega t + \varphi)} = i. c. \omega. E_{\max} e^{i\omega t}$$

soit

$$I_{\max} e^{i\varphi} = i. c. \omega. E_{\max}.$$

ou en introduisant les notations  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{I} = i. c. \omega. \mathbf{E}.$$

Nous munirons le symbole  $\mathbf{I}$  de l'indice 1 pour distinguer la valeur que nous venons de trouver pour le courant de charge de celle d'un autre courant qui pourrait être amené au condensateur. Nous écrivons donc

$$\mathbf{I}_1 = i. c. \omega. \mathbf{E}. \quad (5)$$

Comme on le sait, les armatures d'un condensateur ne peuvent pas être absolument isolées l'une de l'autre, pas plus d'ailleurs que les conducteurs d'un câble ou d'une ligne aérienne; il doit donc passer entre elles un courant, très petit à la vérité, que nous désignerons sous le nom de *courant dérivé dans l'isolant* ou courant perdu. La résistance d'isolement est une résistance purement ohmique, dépourvue de self-induction. Si nous la désignons par  $\rho$ , le courant dans l'isolant sera  $I_t = \frac{1}{\rho} E_t$  quand la différence de potentiel aux armatures vaudra  $E_t$ .

Si l'on remplace  $I_t$  et  $E_t$  par leurs symboles complets, nous obtenons l'équation

$$I_{\max} e^{i\omega t} = \frac{1}{\rho} E_{\max} e^{i\omega t}$$

soit

$$I_{\max} = \frac{1}{\rho} E_{\max}.$$

Cette relation entre les valeurs maximales est encore vraie pour les symboles réduits de la tension et du courant, car, de même que nous pouvions poser  $\mathbf{E} = E_{\max}$ , nous pouvons écrire maintenant  $\mathbf{I} = I_{\max}$ . En effet le courant dans l'isolant  $I_t$ , qui est en concordance de phase avec  $E_t$ , peut aussi être pris comme origine des phases. En caractérisant le courant dans l'isolant par l'indice 2, nous avons

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

D'après le chapitre 1, il suffit de faire la somme des symboles des courants qui entrent dans le condensateur, pour obtenir le symbole du courant total. Celui-ci vaut donc

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \left( i c \omega + \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{E}. \quad (6)$$

En prenant comme ci-dessus  $\mathbf{E}$  comme origine des phases, nous avons

$$\mathbf{I} = \left( i c \omega + \frac{1}{\rho} \right) E_{\max} \quad (7)$$

et par conséquent

$$I_{\max} = E_{\max} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + c^2 \omega^2}.$$

L'angle d'avance du courant total sur la tension n'est plus de  $90^\circ$ ; il vaut

$$\varphi_0 = \arctg c \omega \rho. \quad (8)$$

Quand l'isolement est bon, c'est-à-dire quand  $\rho$  est très grand,  $\varphi_0$  se rapproche beaucoup de  $90^\circ$ .

L'équation 6 montre nettement l'importance que l'étude des courants dans les condensateurs a pour le transport de l'énergie à grande distance par courants alternatifs. Le courant  $I$  est le courant total qui entre dans chacun des condensateurs du schéma figure 11, quand la tension aux bornes de ces condensateurs est  $E$ ;  $I$  est donc le courant qui se dérive entre deux éléments correspondants du fil d'aller et de retour d'un transport de force à la tension  $E$ . Mais tandis que dans le transport d'une certaine puissance  $E_i I_i$  le courant utile  $I_i$  est d'autant plus petit que la tension employée est plus grande, le courant dérivé dans les condensateurs, bien au contraire, augmente à mesure que la tension augmente. Plus la tension que l'on emploie dans un transport d'énergie est élevée, plus le courant de charge des condensateurs devient considérable par rapport au courant utile, et plus les effets dus à la capacité prennent de l'importance. Comme le transport de l'énergie électrique à grande distance ne peut se faire pratiquement que par l'emploi de très hautes tensions et que d'année en année ces tensions augmentent, l'étude des effets de condensation prend une importance croissante.

Le résultat trouvé plus haut que le courant de charge  $I_1$  du condensateur a une avance de phase de  $90^\circ$  sur la différence de potentiel appliquée à ce condensateur signifie que le condensateur n'absorbe pas d'énergie malgré la présence du courant de charge. En effet la puissance d'un courant alternatif est égale au produit de la tension par le courant et par le cosinus de la différence de phase entre ces deux quantités : or ce cosinus vaut ici zéro.

Le courant de charge est donc déwatté, ce qui ressort d'ailleurs de l'équation 5, en même temps que de la remarque faite page 7 sur les composantes wattée et déwattée du courant.

Ce résultat, il faut le dire, ne concorde pas absolument avec l'expérience; car toutes les fois que l'on place un

wattmètre sur un condensateur, il indique qu'il s'y consume une certaine puissance, à la vérité très petite.

Le fait que le condensateur absorbe une certaine puissance provient en premier lieu du courant qui circule dans l'isolant entre ses armatures et qu'il n'est pas possible de supprimer complètement. La valeur efficace de ce dernier étant  $I_2$ , la puissance qu'il dissipe dans la résistance d'isolement  $\rho$  vaut  $I_2^2\rho$ . Il semble aussi qu'une certaine perte de puissance provienne du fait que la différence de phase entre le courant *de charge*  $I_1$  et la tension  $E$  n'est pas exactement de  $90^\circ$ . Voici comment on explique ce phénomène :

La force électrique  $H$  qui existe dans la matière isolante du câble, et qui se modifie périodiquement en grandeur et en sens d'après les variations correspondantes de la tension de charge, a pour conséquence une électrisation alternative du diélectrique. Cette électrisation nécessite — du moins on l'admet — une dépense d'énergie comme l'aimantation alternative du fer.

De même que dans ce cas on parle d'hystérésis magnétique, on imagine dans l'électrisation alternative une *hystérésis diélectrique* qui consisterait dans le fait que l'électrisation produite par la force  $H$  a un certain retard sur cette force.

Il faut dire que le phénomène de l'hystérésis diélectrique dans les câbles n'a pas été étudié d'une façon complète. Ces derniers temps on a mis son existence même en doute<sup>4</sup>.

Des notions précises sur ce point auraient une très grande importance, car cette hystérésis représente tout comme  $I_2^2\rho$  une perte d'énergie, et cause en outre, par la transformation de cette énergie en chaleur un échauffement du câble.

<sup>4</sup> Voy. *Elektrotechnische Zeitschrift*, 1903, p. 879, art. de Apt et Mauritius.

Dans la suite de cette étude, nous supposerons que le courant de charge des condensateurs a une avance de  $90^\circ$  exactement sur la tension ; mais les résultats que nous trouverons n'en seront pas moins absolument généraux. Les formules auxquelles nous arriverons seront parfaitement exactes, à la seule condition de faire subir de petites corrections aux constantes électriques du câble. Ces constantes, comme on le verra plus loin, peuvent être déterminées par des expériences très simples, dont les résultats comparés à ceux que donnent nos formules permettent de déduire une théorie corrigée.

---

## CHAPITRE VII

### LE CABLE ARTIFICIEL

Maintenant que nous possédons les moyens de calculer le courant de charge, nous pouvons étudier la manière d'être du câble artificiel représenté par la figure 11. Cette étude nous acheminera à celle des propriétés du câble réel, tout simplement en se représentant les résistances et les capacités partielles du câble artificiel comme infiniment petites (voy. p. 38).

Nous considérerons tout d'abord le câble artificiel comme une combinaison de résistances et de capacités finies et admettrons pour simplifier que l'isolement est parfait et qu'il n'y a pas de self-induction. Les figures 13 et suivantes, par lesquelles nous allons représenter la répartition de la tension et du courant le long du câble, auront trait à un exemple concret que nous pourrons vérifier plus tard par une autre méthode de calcul. Nous adopterons les données suivantes : La résistance du conducteur est par kilomètre de simple fil  $0,455 \Omega$ , la capacité par kilomètre de longueur simple  $c = 0,17$  m. f. La distance des condensateurs est de 5 kilomètres, de telle sorte que la résistance des deux fils entre deux condensateurs vaut  $r' = 5 \times 0,455 = 2,275 \Omega$  et la capacité de chaque condensateur  $5 \times 0,17 = 0,85$  m. f.  $= 0,85 \cdot 10^{-6}$  farads.

Admettons à l'extrémité de la ligne une tension  $E_0$  de 1 000 volts et un courant  $I_0$  de  $10 - 20i$  ampères. Il faut donc qu'à une tension efficace  $E_0$  de 1 000 volts cor-



responde un courant efficace  $I_0 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36$  ampères avec une différence de phase  $\varphi_0$  telle que  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{20}{10}$  et  $\varphi_0 = -63^\circ 26'$ ; d'après cela le facteur de puissance  $\cos \varphi_0$  vaut 0,447. Le courant employé a 50 périodes par seconde. Il s'agit de déterminer la tension, le courant et le décalage en divers points du câble artificiel.

Désignons (fig. 13) les différences de potentiel aux condensateurs successivement par  $E_1, E_2, E_3 \dots$  (la numérotation

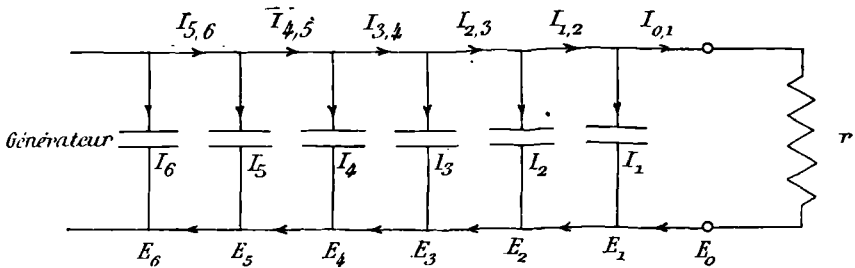


Fig. 13.

tion commence à l'extrémité du câble jointe au récepteur); les courants dans les condensateurs par  $I_1, I_2, I_3 \dots$ ; les courants dans les conducteurs principaux sont munis d'un indice double composé des numéros d'ordre des condensateurs entre lesquels ces courants circulent. — Toutes les valeurs des courants et des tensions sont des valeurs efficaces.

La répartition des tensions et des intensités dans le câble artificiel est alors représentée par les figures 14 c et 14 d, planche I; ces figures ont été tracées en utilisant les figures 14 a et 14 b qui donnent les chutes de tension dans les conducteurs et les courants des condensateurs.

La chute de tension qu'un courant quelconque  $I_{x,y}$  produit dans les conducteurs principaux entre deux condensateurs voisins est

$$e_{x,y} = r' I_{x,y} = 2,275 I_{x,y}$$

Cette chute de tension a été déterminée pour les différents courants de notre exemple par le dessin de la figure 14 *a*, en portant une valeur de  $I_{x,y}^o$  dans le sens « horizontal », puis en élevant à l'extrémité de droite de la ligne ainsi obtenue une perpendiculaire représentant la valeur correspondante  $e_{x,y}^o$  donnée par l'équation ci-dessus. En tirant l'oblique qui joint les extrémités des deux droites, puis en portant sur l'horizontale, à partir de l'extrémité gauche une autre distance  $I_{x,y}$  et en élevant à l'extrémité de droite de cette nouvelle longueur une nouvelle perpendiculaire, l'oblique dont nous venons de parler détermine sur cette perpendiculaire une distance qui mesure le  $e_{x,y}$  correspondant d'après l'équation ci-dessus à  $I_{x,y}$ . En effet :

$$\frac{e_{x,y}}{I_{x,y}} = \frac{e_{x,y}^o}{I_{x,y}^o}$$

comme le demande l'équation.

Les courants  $I_x$  des condensateurs ont été trouvés d'une façon analogue dans la figure 14 *b*, par l'équation

$$I_x = c \omega E_x = 0,17 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \pi \cdot 50 \cdot E_x = 0,0002671 E_x.$$

Les deux figures 14 *b* de la planche I sont la continuation l'une de l'autre.

Nous pouvons maintenant utiliser les figures 14 *a* et 14 *b* pour la détermination des tensions et des courants, comme suit :

Nous dessinons (fig. 14 *c*)  $AB = E_0$  suivant une ligne « horizontale » et (fig. 14 *d*)  $CD = I_{0,1} = 22,36$  formant avec  $E_0$  un angle  $\varphi_c = \text{arc tg} \left( -\frac{20}{10} \right) = -63^\circ 26'$ .

La figure 14 *a* fournit alors  $e_{0,1}$  correspondant à  $I_{0,1}$ , que l'on porte à l'extrémité de la ligne  $E_0$  de la figure 14 *c*, dans une direction parallèle à  $I_{0,1}$  de la figure 14 *d*. Ce parallélisme s'explique par le fait que  $e_{0,1}$  est une chute ohmique de tension, qui comme telle est en phase avec  $I_{0,1}$ .

Le rayon vecteur (non tracé dans la figure 14 c) qui joindrait l'origine  $A$  à l'extrémité de  $e_{3,1}$  donnerait  $E_1$  en grandeur et en phase puisqu'il indique la résultante de  $E_0$  et de  $r' I_{0,1}$ .

Quant au courant  $I_1$  dérivé dans le condensateur 1, nous l'empruntons à la figure 14 b et le portons dans la figure 14 d à l'extrémité de  $I_{0,1}$  dans une direction perpendiculaire à  $E_1$ ; en effet, le courant  $I_1$  est décalé de  $90^\circ$  en avant de  $E_1$ , ce qui correspond à une rotation de  $90^\circ$  vers la gauche.

Le rayon vecteur qui joint l'origine  $C$  à l'extrémité de  $I_1$  donne en grandeur et en phase le courant  $I_{1,2}$ , qui doit être la somme des courants  $I_{0,1}$  et  $I_1$  (voir fig. 13).

La suite de l'épure se fait en répétant les mêmes opérations. Les courants  $I_x$  de la figure 14 d sont toujours perpendiculaires aux vecteurs de même indice de la figure 14 c, tandis que les rayons  $e_{x,y}$  de la figure 14 c sont constamment parallèles aux rayons  $I_{x,y}$  de mêmes indices de la figure 14 d.

En considérant les figures 14 c et 14 d, on reconnaît que les vecteurs  $E_x$  augmentent à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble et que les vecteurs  $I_{x,y}$  diminuent d'abord pour croître ensuite. Les différences de phases aussi sont intéressantes à considérer. Comme les rayons  $E_x$  tournent d'abord vers la droite jusqu'à ce qu'ils soient tangents à la courbe des  $e_{x,y}$  puis tournent ensuite vers la gauche,  $E_x$  est d'abord décalé en arrière sur  $E_0$  d'un angle qui croît jusqu'à un maximum, décroît ensuite et qui même (ce qui ne figure pas dans la figure 14 c) se transforme en une avance de phase.

Les rayons  $I_{x,y}$  tournent toujours plus vers la gauche en s'éloignant de l'extrémité du câble; la différence de phase de  $I_{x,y}$  et de  $E_0$  diminue toujours plus et devient finalement, quoique cela ne soit pas représenté par le dessin, une avance de phase.

Le point  $x$  où  $I_{x,y}$  passe par son minimum est particu-

lièrement intéressant (fig. 14 d). Comme en cet endroit le rayon  $I_{x,y}$  a sa plus petite longueur et que par conséquent la courbe  $I_x$  est à son minimum de distance de l'origine  $C$ , il en suit que le rayon  $I_{x,y}$  doit être perpendiculaire à la courbe des  $I_x$ . Comme d'autre part les quantités  $I_x$  sont perpendiculaires aux tensions correspondantes  $E_x$ , les lignes représentatives de  $I_{x,y}$  et de  $E_x$  sont parallèles au point considéré.

*La tension et l'intensité sont en concordance de phase au point où l'intensité passe par son minimum.* — Ce fait ressort aussi de l'équation de la puissance transmise par le câble. Celle-ci est en tous points du câble égale à  $E_x \cdot I_{x,y} \cdot \cos \varphi_x, \dots \varphi_x$  étant l'angle de la différence de phase entre  $E_x$  et  $I_{x,y}$ .

D'après cette équation, le câble est susceptible de transmettre la puissance par le courant minimum au point précis où  $\cos \varphi_x$  a son maximum, c'est-à-dire où  $\varphi_0 = 0$ . En ce point les rayons  $E_x$  sont évidemment tangents à la courbe  $e_{x,y}$  de la figure 14 c, car  $e_{x,y}$  étant la chute ohmique de tension doit être en concordance de phase avec  $I_{x,y}$  et par conséquent avec  $E_x$ .

Nous pouvons donc nous représenter les variations de la phase le long du câble de la façon suivante :

L'intensité, qui doit avoir un décalage sur la tension à l'extrémité du câble, à l'endroit donc où se trouve le récepteur qui précisément exige ce décalage, tend à prendre une avance de phase sur la tension à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble. La figure 14 d montre que le rayon  $I_{40, 41} y$  est arrivé.

La tension qui, à l'extrémité du câble est en avance sur le courant, ne peut pas arriver à retarder sur celui-ci sans passer par la concordance de phase. Pour arriver à cette concordance, la tension retarde d'abord sur sa phase à l'extrémité du câble et se porte pour ainsi dire à la rencontre de celle de l'intensité. Une fois la concordance de phase

obtenue, le courant et la tension avancent dans leurs phases ; mais le courant marche plus vite que la tension jusqu'au moment où il a atteint une limite d'avance de phase à laquelle il se tient depuis lors. Nous verrons plus tard dans la théorie des câbles que cette valeur limite est de  $45^\circ$  dans le cas présent, où il n'y a que de la résistance et de la capacité. (Ce résultat ne peut pas encore être affirmé d'après les considérations qui précèdent.)

Dans le cas spécial où le courant consommé à l'extrémité du câble est décalé en avant sur la tension, d'autant qu'il était décalé en arrière dans l'exemple ci-dessus, tout en conservant la même intensité absolue  $I_0 = 10 + 20i$ , la tension et le courant ont la répartition indiquée par la figure 15, planche II. Cette figure a été obtenue de la même manière que la figure 14 ; elle est à la même échelle.  $AB$  représente la tension  $E_0 = 1\ 000$  volts,  $CD$  le courant  $10 + 20i$  exigé par le récepteur ; les chutes de tension  $e_{x,y}$  sont parallèles aux courants  $I_{x,y}$  ; les courants  $I_x$  dans les condensateurs sont perpendiculaires aux tensions  $E_x$  ; les grandeurs de  $e_{x,y}$  et de  $I_x$  ont été déterminées par les figures accessoires 15 *a* et 15 *b*.

Dans le cas du courant décalé en avant, les figures 15 *c* et 15 *d* montrent que ni le courant ni la tension n'ont de minimum ; tous deux croissent à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble. Mais il faut remarquer que le courant modifie sa phase moins rapidement que la tension, de sorte que l'avance de l'intensité sur la tension, qui vaut  $63^\circ 26'$  à l'extrémité du câble, diminue à mesure qu'on s'en éloigne ; cette phase tend comme dans la figure 14 vers la valeur  $45^\circ$ , comme on le démontrera plus tard.

La figure 16, planche III, représente le troisième cas, celui où le courant, tout en ayant la même valeur 22,36 ampères que dans les cas précédents, se trouve en concordance de phase avec  $E_0$  ; les lignes  $AB =$

$E_0$  et  $CD = I_0$  coïncident en direction. De même que dans le cas précédent, ni la tension, ni le courant n'ont de minimum; tous deux croissent d'une façon continue, tous deux avancent en phase, mais le courant  $I_{x,y}$  marche plus vite que la tension  $E_x$ , de telle sorte que l'intensité avance toujours plus sur la tension à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble. La limite de cette avance de phase est encore à  $45^\circ$ , comme on le verra plus loin.

Les considérations précédentes montrent distinctement la différence fondamentale de la ligne possédant de la capacité sur toutes les autres. Dans n'importe quel autre type de ligne à courant alternatif, l'intensité a en tous les points la même valeur, tandis que la ligne possédant de la capacité a en chaque point une intensité différente par le fait des courants dérivés dans les condensateurs. La variation de l'intensité le long de la ligne ne dépend pas seulement des constantes électriques de la ligne, mais essentiellement de la différence de phase entre la tension et le courant imposée par la nature du récepteur placé à l'extrémité du câble. Dans le cas très fréquent en pratique où les appareils alimentés par le câble sont des transformateurs ou des moteurs, dans lesquels  $I_0$  est toujours décalé en arrière de  $E_0$ , il peut se faire, comme l'indique la figure 14, que le courant aille en diminuant de l'appareil d'utilisation vers le générateur, de telle sorte que pour une certaine longueur de la ligne le générateur fournit au câble une intensité inférieure à celle qui est consommée à son extrémité.

Lorsqu'on projette un transport d'énergie, le calcul de l'intensité à fournir par le générateur est donc tout aussi utile que celui de la tension, afin de choisir le type de générateur le plus approprié.

Le calcul de la différence de phases au générateur a aussi une très grande importance, car, comme le montrent

les figures 14 et 16, cette différence varie le long du câble. Comme on le sait, la chute de tension à l'intérieur d'un générateur dépend essentiellement de la différence de phase que la tension et le courant qu'il fournit ont l'un par rapport à l'autre, et cela dans ce sens que cette chute est d'autant plus petite que le courant est moins décalé en arrière, ou plus décalé en avant.

La capacité, qui oblige l'intensité à être en avance de phase sur la tension, et qui en même temps fait diminuer de plus en plus, de la fin de la ligne vers le commencement, un décalage en arrière de l'intensité, a donc une influence favorable sur la chute de tension, tandis que la self-induction de la ligne a pour effet d'augmenter la chute de tension dans le générateur par l'augmentation de la différence de phase (voy. p. 24).

Les variations du courant, de la tension et de la phase représentées par les figures 14 à 16, sont beaucoup plus fortes que celles qui se présentent dans les installations pratiquement exécutées; celles-ci n'admettent en effet tout au plus que 10 à 15 p. 100 de chute de tension; mais l'étude que nous venons de faire n'en a pas moins une grande importance pour l'étude approfondie des effets de la capacité uniformément répartie. La méthode graphique que nous avons employée a le grand avantage de donner une image intuitive de la façon dont la capacité modifie le courant à mesure qu'il parcourt la ligne; mais cette méthode a aussi le désavantage qu'une inexactitude ou une erreur en un point se répercute sur tous les autres; en outre, il n'est pas possible de déterminer la manière d'être du câble en un point déterminé sans avoir fait cette détermination pour les points précédents. La méthode sera donc inapplicable dans les projets pratiques, où l'on doit déterminer rapidement l'état électrique au commencement du câble par les données électriques des différents points de consommation. Enfin l'exactitude des résultats obtenus par

la méthode graphique est diminuée par le fait que le câble, composé en réalité d'éléments infiniment petits, est étudié au contraire comme s'il était composé de portions finies. La méthode que nous allons exposer dans les chapitres suivants évite ces inconvénients.

---



## CHAPITRE VIII

### LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DES COURANTS DANS LES CABLES

Nous allons formuler les lois des courants dans les câbles, en étudiant un fragment de câble infiniment court se composant d'un fil d'aller et d'un fil de retour. Nous avons démontré à la page 38 qu'un câble artificiel composé d'éléments infiniment courts est équivalent à un câble réel; nous imaginons par conséquent que les

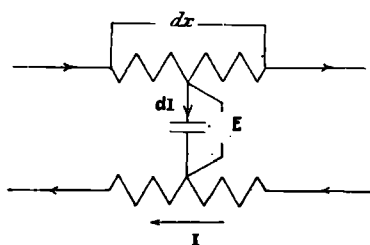


Fig. 17.

subdivisions du câble artificiel de la figure 14 sont infiniment petites et reproduisons un de ces éléments dans la figure 17. Soient :

$dx$  la longueur de l'élément ;

$x$  sa distance à partir de l'*extrémité* du câble ;

$E_x$  la tension qui existe entre les conducteurs d'aller et de retour ;

$I_x$  l'intensité dans les deux conducteurs ;

$d\mathbf{I}_x$  le courant dérivé dans le condensateur infiniment petit; et enfin

$d\mathbf{E}_x$  la chute totale de tension, infiniment petite, dans les éléments considérés des conducteurs d'aller et de retour.

Soient encore  $r$  la résistance du câble, en ohms;

$L$  le coefficient de self-induction, en henrys;

$c$  la capacité, en farads;

$\rho$  la résistance d'isolement, en ohms, *ces quatre données rapportées à un kilomètre de ligne simple.*

Nous aurons alors comme caractéristiques de l'élément considéré, long de  $dx$  kilomètres, les valeurs  $r dx$ ,  $L dx$ ,  $c dx$  et  $\frac{\rho}{dx}$ .

L'équation 11, page 13, donne la résistance apparente totale des conducteurs d'aller et de retour sous forme complexe

$$d\mathbf{R} = r dx + i \omega L dx = (r + i \omega L) dx.$$

D'après la loi d'Ohm applicable en quantités complexes, la chute de potentiel qui s'y produit est

$$d\mathbf{E}_x = \mathbf{I}_x d\mathbf{R} = \mathbf{I}_x (r + i \omega L) dx. \quad (1)$$

Le courant dérivé dans le condensateur  $d\mathbf{I}_x$ , qui est la somme du courant dans l'isolant et du courant de charge vaut, la tension aux bornes du condensateur étant  $\mathbf{E}_x$

$$d\mathbf{I}_x = \left[ \frac{dx}{\rho} + i \omega c dx \right] \mathbf{E}_x = \mathbf{E}_x \left( \frac{1}{\rho} + i \omega c \right) dx. \quad (2)$$

(Voir équation 7, page 44).

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons dorénavant l'inverse de la valeur de la résistance d'isolement par  $g$  en posant

$$\frac{1}{\rho} = g,$$

$g$  est par conséquent la conductibilité de l'isolant rapportée

au kilomètre. On obtient finalement la forme suivante pour l'équation 1

$$\frac{d\mathbf{E}^*}{dx} = \mathbf{I}_x (r + i\omega L) \quad (3)$$

et pour l'équation 2

$$\frac{d\mathbf{I}}{dx} = \mathbf{E}_x (g + i\omega c). \quad (4)$$

Enfin nous poserons, toujours pour simplifier l'écriture

$$\omega L = s \quad c\omega = \kappa$$

et

$$r + i\omega L = \mathbf{R} \quad g + i\omega c = \mathbf{K}. \quad (5)$$

$s$  et  $\kappa$  sont donc des grandeurs constantes et réelles,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{K}$  des constantes complexes. Remarquons que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{K}$  ne contiennent à part la pulsation  $\omega$  du courant alternatif que les données électriques du câble ( $r$ ,  $L$ ,  $g$  et  $c$ ). L'équation 3 et l'équation 4 peuvent s'écrire plus simplement

$$\frac{d\mathbf{E}}{dx} = \mathbf{I}_x \cdot \mathbf{R} \quad (6)$$

et

$$\frac{d\mathbf{I}}{dx} = \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{K}. \quad (7)$$

La détermination de  $\mathbf{E}_x$  et de  $\mathbf{I}_x$  est maintenant facile. En dérivant les deux équations par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dx^2} = \frac{d\mathbf{I}}{dx} \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\mathbf{I}}{dx^2} = \frac{d\mathbf{E}}{dx} \cdot \mathbf{K}$$

et en remplaçant  $\frac{d\mathbf{I}}{dx}$  et  $\frac{d\mathbf{E}}{dx}$  d'après les équations 6 et 7

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dx^2} = \mathbf{E}_x \mathbf{R} \mathbf{K} \quad (8)$$

\* Nous supprimons dorénavant l'indice  $x$  dans les dérivées de  $\mathbf{E}_x$  et de  $\mathbf{I}_x$  par rapport à  $x$ , la dépendance de  $x$  étant alors évidente.

et

$$\frac{d^2 \mathbf{I}}{dx^2} = \mathbf{I}_x \mathbf{R K}. \quad (9)$$

Retenons que dans ces expressions  $\mathbf{R K}$  est une constante complexe (comme produit de quantités complexes), et que cette constante, comme on l'a vu plus haut, ne contient que la pulsation  $\omega$  du courant et les données électriques du câble.

Les deux équations différentielles 8 et 9 sont semblables de forme ; ce sont des équations différentielles linéaires du deuxième ordre avec  $x$  comme variable indépendante.

Nous allons les résoudre.

Nous remplaçons d'abord  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  par  $y$  ; de la sorte nous trouverons par un seul calcul la solution des deux équations ; nous avons maintenant à résoudre l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y \mathbf{R K}. \quad (10)$$

Nous reconnaissons immédiatement une solution dans l'expression  $y = e^{\rho x}$ , dans laquelle  $\rho$  est une constante à choisir convenablement ; en effet si l'on substitue cette expression à  $y$  on obtient,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  devenant égal à  $\rho^2 e^{\rho x}$ .

$$\rho^2 e^{\rho x} = e^{\rho x} \mathbf{R K}$$

ou

$$\rho^2 = \mathbf{R K}.$$

L'expression  $e^{\rho x}$  satisfait donc à l'équation différentielle quand on pose

$$\rho = \pm \sqrt{\mathbf{R K}}.$$

Le double signe devant le radical montre qu'il y a deux solutions de l'équation différentielle.

Posons

$$+ \sqrt{\mathbf{R K}} = \mathbf{v}. \quad (11)$$

Les deux solutions peuvent s'écrire  $e^{+\mathbf{v}x}$  et  $e^{-\mathbf{v}x}$ . Ces

deux expressions donnent encore des solutions de l'équation quand elles sont multipliées par des constantes arbitraires, donc quand on écrit les solutions sous la forme  $c_1 e^{+\mathbf{v}x}$  et  $c_2 e^{-\mathbf{v}x}$ ; si en effet on remplace  $y$  par ces valeurs dans l'équation 10, les deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  s'évanouissent.

Nous venons de trouver des solutions particulières de l'équation différentielle. La solution la plus générale est la somme de ces deux solutions particulières

$$y = c_1 e^{+\mathbf{v}x} + c_2 e^{-\mathbf{v}x}. \quad (12)$$

Il est facile de reconnaître que cette expression est une solution de l'équation différentielle, en écrivant cette dernière sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y \mathbf{R} \mathbf{K} = 0.$$

Puisque chacune des expressions  $c_1 e^{+\mathbf{v}x}$  et  $c_2 e^{-\mathbf{v}x}$  annule le membre gauche de l'équation, la somme des deux expressions doit aussi l'annuler.

Pour la suite de l'étude de la solution donnée par l'équation 12, il est avantageux d'écrire  $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{R} \mathbf{K}}$  sous la forme accessoire  $p + qi$ ; cette forme complexe est justifiée par le fait que  $\mathbf{v}$  est la racine du produit de deux quantités complexes.

Posons

$$\mathbf{v} = a + bi. \quad (13)$$

$a$  et  $b$  sont de nouvelles constantes qui, comme  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{K}$  ne dépendent que de la pulsation  $\omega$  du courant alternatif et des constantes électriques du câble; remarquons en outre que  $a$  et  $b$  doivent être réels, car ils servent à séparer la quantité complexe  $\mathbf{v}$  en sa partie réelle et sa partie imaginaire. Les valeurs de  $a$  et de  $b$  se trouvent en utilisant les équations 5 et en posant

$$a + bi = \mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{R} \mathbf{K}} = \sqrt{(r + is)(g + i\kappa)}; \quad (13a)$$

en élevant au carré, on a

$$a^2 - b^2 + 2abi = (r + is)(g + ix) = (rg - sx) + (sg + rx)i$$

et en égalant entre elles les parties réelles et les parties imaginaires

$$a^2 - b^2 = rg - sx \quad (14)$$

et

$$2ab = sg + rx. \quad (15)$$

$a$  et  $b$ , comme on le voit, sont faciles à calculer pour n'importe quel câble. Les expressions générales de  $a$  et de  $b$  sont

$$a = \sqrt{\frac{i}{2} \{ (g^2 + x^2)(r^2 + s^2) + gr - sx \}} \quad (16)$$

et

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (g^2 + x^2)(r^2 + s^2) - gr + sx \}}. \quad (17)$$

En substituant dans l'équation 12 la valeur de  $v$  donnée par l'équation 13, on a

$$y = c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{-ax} e^{-ibx} \quad (18)$$

ou en développant  $e^{ibx}$  et  $e^{-ibx}$  par la formule de Moivre :

$$y = c_1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + c_2 e^{-ax} (\cos bx - i \sin bx) \quad (19)$$

ou encore, en ordonnant d'après  $\cos bx$  et  $\sin bx$

$$y = (c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}) \cos bx + i (c_1 e^{ax} - c_2 e^{-ax}) \sin bx \quad (20)$$

les équations 18, 19 ou 20 que nous venons de trouver permettent de calculer  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$ , puisqu'on a posé  $y$  pour ces deux quantités dans les équations 8 et 9. Si l'on considère ces équations comme donnant  $\mathbf{E}_x$ , la quantité  $\mathbf{I}_x$  doit être déterminée par l'équation 6 ; si on les considère au contraire comme donnant  $\mathbf{I}_x$ , la quantité  $\mathbf{E}_x$  doit être déterminée par l'équation 7.

Il est vrai que ces solutions contiennent encore les constantes arbitraires  $c_1$  et  $c_2$  ; mais ces dernières sont déterminées chaque fois par la nature du problème, comme les

exemples traités plus loin le montreront. Ces constantes  $c_1$  et  $c_2$  peuvent être des quantités complexes, tandis que  $a$  et  $b$  sont toujours réels.

Attirons encore l'attention sur un fait important : les considérations qui précèdent ont été faites en supposant que  $x$  est toujours compté à partir de l'extrémité du câble *opposée au générateur*. Nous le reconnaissons facilement par les équations 6 et 7 qui montrent que quand  $dx$  est positif,  $dE_x$  et  $dI_x$  sont positifs, c'est-à-dire que les variations de  $x$ , de  $E_x$  et de  $I_x$  sont de même sens.  $x$  est donc compté dans le sens où l'énergie mise en jeu va en croissant. Dorénavant nous désignerons simplement par le terme *extrémité ou fin du câble* l'extrémité *opposée* au générateur, réservant le mot de *commencement* pour l'extrémité reliée au générateur.

Si pourtant on désire compter  $x$  à partir du générateur, il suffit de substituer  $(-x)$  à  $(+x)$  dans les formules qui donnent  $y$ .

Toute cette discussion va être résumée dans les tableaux qui suivent.

$x$  compté à partir de la fin du câble. — En remplaçant  $y$  de l'équation 12 par  $E_x$ , on a

$$\left. \begin{aligned} E_x &= c_1 e^{\mathbf{v}x} + c_2 e^{-\mathbf{v}x} \\ \text{et d'après l'équation 6} \\ I_x &= \frac{1}{\mathbf{R}} \frac{dE}{dx} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (c_1 e^{\mathbf{v}x} - c_2 e^{-\mathbf{v}x}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

En posant au contraire  $y = I_x$ , on a

$$\left. \begin{aligned} I_x &= c_1 e^{\mathbf{v}x} + c_2 e^{-\mathbf{v}x} \\ \text{et d'après l'équation 7} \\ E_x &= \frac{1}{\mathbf{K}} \frac{dI}{dx} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{K}} (c_1 e^{\mathbf{v}x} - c_2 e^{-\mathbf{v}x}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Ces deux groupes de formules ne se contredisent pas,

car les différences que l'on voit dans les expressions de  $\mathbf{E}_x$  et de  $\mathbf{I}_x$  se justifient par la différence des constantes  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  imposées par la nature du problème.

$x$  est compté à partir du commencement du câble. — Comme nous l'avons dit, il suffit de remplacer  $x$  par  $-x$ ; on aura pour correspondre au groupe I

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{\mathbf{v}x} \\ \mathbf{I}_x &= \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{\mathbf{v}x}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

et au groupe II

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_x &= \mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{\mathbf{v}x} \\ \mathbf{E}_x &= \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{K}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{\mathbf{v}x}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

Dans toutes les formules qui donnent l'intensité,  $\mathbf{I}_x$  indique le courant dans le conducteur d'aller ou dans celui de retour, courant qui est le même partout, au sens près.

Chacun des couples d'équations I et II, III et IV, permet de calculer la répartition des tensions et des courants, pourvu que l'on connaisse  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{K}$  et par conséquent  $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{K}}$ .

Nous allons donc passer au calcul de  $\mathbf{R}$ , de  $\mathbf{K}$  et des données  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$ , en partant des dimensions du câble. Comme on le verra, ces calculs nous permettront d'établir du même coup les équations fondamentales des câbles pour courants triphasés.

Si on renonce à l'emploi des quantités complexes, la solution des équations différentielles du circuit parcouru par un courant alternatif sinusoïdal se présente ainsi :

On a

$$dE_t = rI_t dx + L \frac{dI}{dt} \cdot dx \quad (21)$$

$dE_t$  est la différence de potentiel entre les extrémités de l'élément de câble représenté figure 17,  $rdx$  la résistance et  $Ldx$  est la self-induction de l'élément.



Le petit condensateur de la figure 17 est parcouru par un courant

$$\frac{E_t}{\frac{\rho}{dx}} = E_t g dx$$

provenant de l'isolement défectueux, ainsi que par un courant

$$\frac{dQ}{dt} = c. \frac{dE}{dt} . dx$$

provenant de la capacité  $cdx$  (voir les équations 1 et 2, pages 41 et 42).

On a donc dans le condensateur un courant total

$$dI_t = E_t g dx + c. \frac{dE}{dt} dx \quad (22)$$

Les équations 21 et 22 donnent

$$\frac{dE_t}{dx} = rI_t + L \frac{dI}{dt} \quad (23)$$

$$\frac{dI_t}{dx} = E_t g + c \frac{dE}{dt} \quad (24)$$

En dérivant l'équation 23 par rapport à  $x$ , et en y portant la valeur de  $\frac{dI_t}{dx}$  tirée de l'équation 24, on obtient

$$\frac{d^2 E_t}{dx^2} = rg E_t + (rc + gL) \frac{dE}{dt} + cL \frac{d^2 E}{dt^2}$$

Une marche analogue donne l'équation qui définit  $I_t$ ; on arrive à

$$\frac{d^2 I_t}{dx^2} = rg I_t + (rc + gL) \frac{dI}{dt} + cL \frac{d^2 I}{dt^2}$$

Les équations différentielles donnant  $E_t$  et  $I_t$  sont donc de la même forme, absolument comme les équations 8 et 9 qui définissent  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$ . La différence entre les deux systèmes réside dans le fait que celui qui donne  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  est beaucoup plus simple à résoudre que l'autre. L'emploi des quantités complexes simplifie donc dans une grande mesure le problème des courants dans les câbles.

## CHAPITRE IX

### CALCUL DES CONSTANTES ÉLECTRIQUES D'UN CÂBLE D'APRÈS SES DIMENSIONS

Le calcul qui fournit les données électriques  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  d'un câble en se basant sur ses dimensions géométriques est en somme un problème d'électricité statique et d'électro-dynamique très différent des problèmes traités dans cet ouvrage; nous ne le referons pas. Nous nous limiterons à un tableau récapitulatif des formules, à une explication de la signification de  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  dans les canalisations à courants triphasés et aux rapports de ces données avec les données correspondantes des lignes à deux fils, les seules qui nous aient occupé jusqu'à présent. Les considérations qui vont suivre expliqueront aussi la mesure de ces quantités dans les câbles triphasés.

Les constantes électriques des lignes à deux fils (Boucles). — 1° Le tableau I, page 67, donne les constantes des boucles simples. La signification des lettres employées ressort des figures 18, 19 et 20. Toutes les dimensions cotées sur ces figures sont en millimètres.

Soient :  $l$  la longueur du conducteur d'aller ou de retour, en kilomètres;

$\epsilon$  la constante diélectrique;

$\rho$ , la résistance d'un cube de 1 centimètre de côté pris dans la matière du diélectrique, en mégohms.

TABLEAU I

Formules pour les constantes électriques des lignes à deux fils.

r EN OHMS	L EN HENRYS	c EN MICROFARADS	g EN MHOS
Ligne aérienne (fig. 18). $42,44 \cdot \frac{l}{d^2}$	$4 \cdot 10^{-4} \cdot l \left[ \ln \frac{2a}{d} + 0,25 \right]$	$0,0121 \cdot \frac{l}{\log\left(\frac{2a}{d}\right)}$ , et plus exactement	
Câble concentrique (fig. 19) $21,22 \cdot l \cdot \left[ \frac{1}{\delta_a^2 - \delta_i^2} + \frac{1}{d^2} \right]$	$2 \cdot 10^{-4} \cdot l \left[ \ln \frac{\delta_i}{d} + \frac{1}{2} \frac{\delta_a^2}{\delta_a^2 - \delta_i^2} \cdot \ln \frac{\delta_a}{\delta_i} \right]$	$0,0121 \cdot \frac{l}{\log\left(\frac{2a}{d} \cdot \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + a^2}}\right)}$	$0,272 \cdot \frac{l}{\rho_s} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{\delta_i}{d}\right)}$
Câble cordé (fig. 20). $42,44 \cdot \frac{l}{d^2}$	$4 \cdot 10^{-4} \cdot l \left[ \ln \frac{2a}{d} + 0,25 \right]$	$0,0121 \cdot \varepsilon \cdot \frac{l^{(1)}}{\log\left[\frac{2a}{d} \cdot \frac{D^2 - a^2}{D^2 + a^2}\right]}$	$0,136 \cdot \frac{l}{\rho_s} \cdot \frac{1}{\log\left[\frac{2a}{d} \cdot \frac{D^2 - a^2}{D^2 + a^2}\right]}$

<sup>1</sup> S. Lichtenstein, *E. T. Z.*, 1904, p. 426.

REMARQUE. — Observer qu'en tenant compte de la notion de potentiel *absolu* expliquée un peu plus loin, les valeurs de ce tableau introduites dans les équations du chapitre VIII donnent la *différence de potentiel*  $E_x$  entre deux points correspondants du fil d'aller et du fil de retour.

La tableau II donne les valeurs de  $\epsilon$  et  $\rho_s$ , d'après les auteurs indiqués.

TABLEAU II

	$\epsilon$	$\rho_s$	AUTEURS
Jute : 2 résine + 3 huile de résine . . . . .	2,7	$1,2 \cdot 10^{10}$	Kath, Durchschlagspannung von Kabeln, E. T. Z. 1904, p. 569.
Papier sec, en moyenne . .	1,8	$1 \cdot 10^{10}$	
» huile de résine . . . . .	2,4	$0,3 \cdot 10^{10}$	
» 1 résine + 3 huile de résine . . . . .	2,75	$0,24 \cdot 10^{10}$	Grawinkel et Strecker, Hilfsbuch, 5 <sup>e</sup> édition, p. 50, et 55.
Caoutchouc brun . . . . .	2	$0,4 \dots 0,6 \cdot 10^{10}$	
— vulcanisé, gris . . . . .	2,7	$1 \dots 2,5 \cdot 10^{10}$	
Gutta-percha . . . . .	4,2	$1 \dots 2,5 \cdot 10^{10}$ (pour les bonnes qualités).	

La capacité et la conductibilité de l'isolant ont un rapport constant, comme le montre le tableau I. On tire la conductibilité  $g$  de la capacité  $c$  en remplaçant le  $\epsilon$  du numérateur par  $\rho_s$  au dénominateur, et en substituant dans le numérateur le nombre 0,272 au nombre 0,0241.

Les formules pour la conductibilité n'ont pas grande importance pratique, car dans le câble une fois posé la résistance d'isolement devient plus petite que le calcul de  $g$  ne l'indique, et cela à cause des dérivations et des prises de courant. On estime  $\rho$  à 10 à 100 mégohms par kilomètre pour un câble posé.

2° La formule donnée dans le tableau I pour la capacité du câble concentrique n'est valable que dans certaines conditions d'exploitation. La valeur qui en résulte

$$Q = c (P_1 - P_2)$$

indique la charge électrique qui se localise sur chacun des conducteurs quand ils sont reliés aux bornes d'un générateur sans former une boucle fermée, la différence de potentiel entre eux étant  $(P_1 - P_2)$ .

Quand l'un des conducteurs a le potentiel  $P_1$ , l'autre le potentiel  $P_2$ , ils se chargent d'électricité, mais non pas seulement à cause de leur capacité l'un par rapport à l'autre ; le conducteur extérieur prendra en outre une charge parce qu'il possède de la capacité par rapport à l'enveloppe de plomb qui l'entoure et qui est mise à la terre. Les charges électriques du conducteur extérieur induisent sur le conducteur intérieur et sur l'enveloppe de plomb des charges électriques de signe opposé. Le conducteur central par contre ne possède pas de capacité par rapport à la chape de plomb, puisqu'il est complètement entouré par le conducteur extérieur.

Le conducteur extérieur a donc deux charges distinctes, qui proviennent la première de sa capacité et de son potentiel par rapport au plomb, l'autre de sa capacité et de son potentiel par rapport au conducteur central.

Le conducteur central, le conducteur extérieur et l'enveloppe de plomb ont des charges différentes et sont par conséquent le siège de courants différents quand on alimente le câble avec du courant alternatif.

3° Dans les câbles cordés et dans les lignes aériennes, le voisinage de l'enveloppe de plomb dans le premier, de la terre dans les deux, n'est pas non plus sans influence ; mais cette influence sera la même dans les deux conducteurs, vu la symétrie de leur position relativement à l'enveloppe de plomb et à la terre. Les deux conducteurs ne présenteront de différence marquée dans leur allure que si leur isolement est différent par rapport à la chape de plomb. Le câble cordé à isolement défectueux et le câble concentrique à chape de plomb, ce dernier même régulièrement isolé, présentent donc des dissymétries fort difficiles à suivre par le calcul.

4° Les formules données pour la capacité dans le tableau I concernent les câbles concentriques dont le conducteur extérieur n'a pas de capacité par rapport à la terre, et les

70 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
câbles cordés dans lesquels tous les conducteurs ont la même résistance d'isolement par rapport à l'enveloppe de plomb.

**Les constantes électriques des lignes polyphasées.** — Le problème est encore plus compliqué pour les lignes à plus de deux fils, car chaque conducteur possède une capacité par rapport à chacun des autres et par rapport à la terre. La définition de la capacité — charge électrique de chacun des conducteurs, quand la différence de potentiel entre les conducteurs est d'un volt, — ne suffit plus, car ce n'est plus la différence de potentiel avec un conducteur voisin qui détermine la charge d'un conducteur, mais bien les différences de potentiel qui existent entre ce conducteur, tous les autres conducteurs et la terre. Comme ces différences de potentiel sont inégales et se modifient continuellement en courant alternatif, il est très difficile d'exprimer la charge d'un conducteur par ces différences de potentiel. Il nous faut adopter une nouvelle définition de la capacité ; c'est le but du paragraphe suivant.

**Capacité et conductibilité de l'isolant.** — Il est facile d'obtenir une définition non équivoque de la capacité en se basant sur la définition suivante : La capacité d'un conducteur est le rapport entre la charge de ce conducteur et le potentiel « absolu » de ce conducteur.

Il reste à expliquer ce que c'est que ce potentiel « absolu ». Dans le langage courant, on dit que toute source d'électricité a deux pôles : un pôle positif et un pôle négatif. Cette façon de s'exprimer provient de ce qu'on se représente chaque pôle comme ayant un potentiel égal à celui de l'autre, mais de signe contraire. Si on désigne ces potentiels par

$$P_1 = (+ P) \quad \text{et} \quad P_2 = (- P)$$

la différence de potentiel s'exprime par

$$P_1 - P_2 = 2P; \quad (1)$$

+  $P$  et  $-P$  sont alors les potentiels « absolus » de deux pôles parfaitement isolés dont l'un surpasse le potentiel de la terre d'autant que l'autre reste en dessous.

En supposant que du générateur à deux pôles partent deux conducteurs qui ne se joignent pas pour former la boucle, nous savons que ces conducteurs se chargent des quantités  $+Q$  et  $-Q$ ; d'après la définition de la capacité utilisée jusqu'à présent, nous pouvons poser pour capacité de l'un des deux conducteurs

$$c_a = \frac{Q}{P_1 - P_2}. \quad (2)$$

D'après la nouvelle définition, nous dirons : la capacité est le rapport de la charge de chacun des conducteurs au potentiel « absolu » de ce conducteur, soit

$$c = \frac{Q}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{-Q}{-P}. \quad (3)$$

La comparaison de l'équation 3 et de l'équation 1 donne

$$c = 2c_a.$$

Nous allons montrer que cette nouvelle définition de la capacité suffit dans tous les cas pratiques, même dans les lignes polyphasées, à déterminer la charge d'un conducteur en fonction seulement de son potentiel « absolu », sans s'inquiéter de ceux des autres conducteurs;

A. — Soient dans les figures 18, 19 et 20 :

$P_1$  et  $P_2$  les potentiels des deux conducteurs,

$P_0$  le potentiel de la terre dans les lignes aériennes et celui de l'enveloppe de plomb dans les câbles ;

$c_{1,0}$  la capacité du premier conducteur par rapport à la terre ou au plomb ;

$c_{2,0}$  celle du deuxième conducteur ;

$c_{1,2}$  la capacité des deux conducteurs l'un par rapport à l'autre.....

toutes ces capacités étant mesurées de l'ancienne façon, c'est-à-dire que multipliées par la différence de potentiel

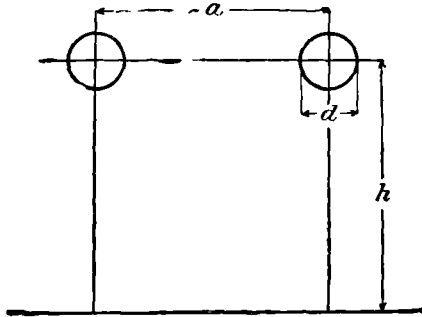


Fig. 18.

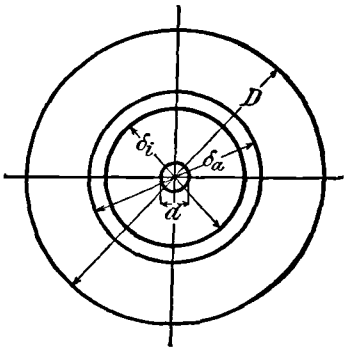


Fig. 19.

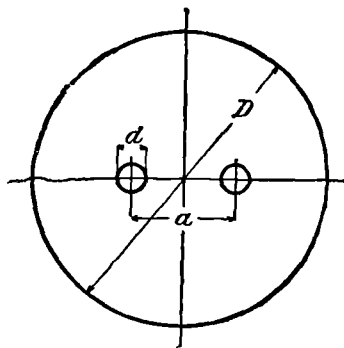


Fig. 20.

entre les conducteurs elles donnent la charge produite par ces différences de potentiel.

On obtient sur le conducteur I les charges suivantes :

1° Par suite de sa capacité par rapport au conducteur II

$$q_{1,2} = c_{1,2} (P_1 - P_2).$$

2° Par suite de sa capacité par rapport à la terre ou au plomb

$$q_{1,0} = c_{1,0} (P_1 - P_0).$$



En tout

$$Q_1 = q_{1,2} + q_{1,0} = c_{1,2} (P_1 - P_2) + c_{1,0} (P_1 - P_0) \quad (3a)$$

On aura de même sur le conducteur II

$$Q_2 = q_{1,2} + q_{2,0} = c_{2,1} (P_2 - P_1) + c_{2,0} (P_2 - P_0). \quad (3a)$$

Si nous posons maintenant pour passer à la nouvelle définition

$$P_1 = P \quad \text{et} \quad P_2 = -P$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Q_1 &= (c_{1,0} + 2c_{1,2}) P - c_{1,0} P_0 = (c_{1,0} + 2c_{1,2}) P_1 - c_{1,0} P_0 \\ Q_2 &= -(c_{2,0} + 2c_{2,1}) P - c_{2,0} P_0 = (c_{2,0} + 2c_{2,1}) P_2 - c_{2,0} P_0. \end{aligned} \quad (3b)$$

Comme par définition le potentiel  $P_0$  de la terre est nul et que dans les câbles l'enveloppe de plomb est mise à la terre, les formules 3b se simplifient et on a

$$\begin{aligned} Q_1 &= (c_{1,0} + 2c_{1,2}) P_1 \\ Q_2 &= (c_{2,0} + 2c_{2,1}) P_2; \end{aligned}$$

on voit que la charge de chacun des conducteurs est proportionnelle au potentiel qui y règne, et qu'elle peut être exprimée par ce potentiel uniquement. Les grandeurs

$$\begin{aligned} c_{1,0} + 2c_{1,2} &= c_1 \\ c_{2,0} + 2c_{2,1} &= c_2 \end{aligned}$$

peuvent donc être considérées comme les capacités des deux conducteurs d'après la nouvelle définition. Elles sont différentes l'une de l'autre dans le cas où  $c_{1,0}$  et  $c_{2,0}$  sont différentes lorsque (comme par exemple dans la figure 19) les deux conducteurs ont des dimensions différentes ou des distances inégales au plomb; elles sont égales si  $c_{1,0}$  et  $c_{2,0}$  ainsi que  $c_{1,2}$  et  $c_{2,1}$  sont égales, comme c'est le cas dans les figures 18 et 20, qui sont parfaitement symétriques par rapport à la terre ou au plomb. En posant dans ce dernier cas

$$c_{1,0} = c_{2,0} = c_0$$

et

$$c_{1,2} = c_{2,1} = c'$$

on arrive à

$$c_0 + 2c' = c$$

expression qui représente la capacité de chacun des conducteurs d'après la définition page 71 :

$$Q = cP. \quad (4)$$

Les capacités indiquées dans le tableau I tiennent compte aussi des capacités par rapport à la terre ou au plomb ; mais elles expriment la charge par la *différence* de potentiel des deux conducteurs et non pas par leur potentiel *absolu*. Si nous tenons compte de l'équation 1, l'équation 4 devient

$$Q = \frac{c}{2} (P_1 - P_2).$$

la capacité indiquée dans le tableau I est donc

$$c_a = \frac{c}{2} \quad (4a)$$

c'est-à-dire qu'elle est la moitié de celle que donnerait la nouvelle définition.

B. — Dans une canalisation triphasée symétrique, où les conducteurs sont à égale distance les uns des autres, ainsi que de la terre ou de la chape de plomb mise à la terre, posons :  $P_1, P_2, P_3, P_0$  les potentiels des conducteurs et de la terre ;  $c_{1,2}, c_{1,3}, c_{2,3}$  les capacités des conducteurs les uns par rapport aux autres ;

$c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}$  les capacités des conducteurs par rapport à la terre.

Par suite de sa capacité par rapport au conducteur II le conducteur I portera la charge

$$q_{1,2} = c_{1,2} (P_1 - P_2), \quad (4b)$$

par rapport au conducteur III la charge

$$q_{1,3} = c_{1,3} (P_1 - P_3), \tag{4b}$$

par rapport à la terre ou au plomb la charge

$$q_{1,0} = c_{1,0} (P_1 - P_0), \tag{4b}$$

d'où nous tirons les charges totales

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{1,2} (P_1 - P_2) + c_{1,3} (P_1 - P_3) + c_{1,0} (P_1 - P_0) \\ Q_2 &= c_{2,1} (P_2 - P_1) + c_{2,3} (P_2 - P_3) + c_{2,0} (P_2 - P_0) \\ Q_3 &= c_{3,1} (P_3 - P_1) + c_{3,2} (P_3 - P_2) + c_{3,0} (P_3 - P_0). \end{aligned} \tag{5}$$

Vu la parfaite symétrie des conducteurs nous pouvons poser

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= c_{1,3} = c_{2,3} = c' \\ c_{1,0} &= c_{2,0} = c_{3,0} = c_0. \end{aligned} \tag{5a}$$

Nous savons en outre que dans le système triphasé

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0; \tag{5b}$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} Q_1 &= (c_0 + 3c') P_1 - c_0 P_0 \\ Q_2 &= (c_0 + 3c') P_2 - c_0 P_0 \\ Q_3 &= (c_0 + 3c') P_3 - c_0 P_0. \end{aligned} \tag{6}$$

En admettant que le plomb soit relié au point neutre, et qu'il ait en conséquence le potentiel 0, on aura pour les trois conducteurs l'expression générale

$$Q = (c_0 + 3c') P. \tag{7}$$

L'expression

$$c = c_0 + 3c'$$

indique donc la capacité d'un conducteur de la canalisation triphasée.

C. — Les équations 3a et 5 donnent immédiatement les méthodes de mesure des capacités partielles  $c_0$  et  $c'$  qui servent à déterminer les capacités totales  $c$ , soit de la boucle à deux fils, soit de la canalisation triphasée. Il suffit d'y poser  $P_0 = 0$ .

La charge sur le conducteur I du câble à deux conducteurs est alors, en tenant compte du bas de la page 73

$$Q_1 = c' (P_1 - P_2) + c_0 P_1.$$

Si on met ce conducteur à la terre ou au plomb, c'est-à-dire qu'on ait  $P_1 = 0$ , il vient

$$Q' = - c' P_2.$$

Quand on le joint au conducteur II,  $P_1 = P_2$ , on a

$$Q_0 = c_0 P_1 = c_0 P_2.$$

La valeur absolue de la capacité  $c'$  se déduit de la charge  $Q'$  du conducteur I par la formule

$$c' = \frac{Q'}{P_2}.$$

La charge  $Q_0$  donne

$$c_0 = \frac{Q_0}{P_2}.$$

On en tire facilement  $c = c_0 + 2c'$ .

D. — La charge sur le conducteur I d'une canalisation triphasée ( $P_0$  égalant 0) est d'après les équations 5 et 5a

$$Q_1 = c' (P_1 - P_2) + c' (P_1 - P_3) + c_0 P_1. \quad (7')$$

Si nous mettons ce conducteur I à la terre et que nous joignons les deux autres, nous obtenons une charge

$$Q' = - 2c' P_2$$

car alors

$$P_1 = 0 \text{ et } P_2 = P_3.$$

Si, au contraire, on joint le I aux conducteurs II et III, on a

$$Q_0 = c_0 P_1$$

car alors

$$P_1 = P_2 = P_3.$$

Il en suit pour la capacité  $c'$  en valeur absolue

$$c' = \frac{Q'}{2 P_2}$$

et pour la capacité  $c_0$

$$c_0 = \frac{Q_0}{P_1} .$$

Il est possible d'obtenir par une seule mesure la capacité totale  $c = c_0 + 3c'$  de la canalisation triphasée ; il suffit de mettre un des conducteurs à la terre et de charger les deux autres par une source quelconque à deux pôles, bien isolée. Dans ce cas nous avons les trois équations

$$P_3 = 0 \quad P_1 = P \quad \text{et} \quad P_2 = -P$$

et par conséquent d'après l'équation 7'

$$Q_1 = (c_0 + 3c') P,$$

d'où on tire facilement

$$(c_0 + 3c') = c.$$

*E.* — Supposons maintenant que l'on ait transformé une canalisation à deux fils en une canalisation triphasée en remplaçant le fil de retour par deux fils, tout en conservant entre les deux nouveaux conducteurs ainsi qu'entre ceux-ci et le conducteur intact la distance des deux conducteurs primitifs. Nous pouvons remarquer que la détermination de  $c_0$  et de  $c'$  va être modifiée par le fait que nous avons maintenant *deux* conducteurs portés au potentiel  $P$  à côté du fil d'aller, tandis qu'il n'y en avait qu'*un* auparavant. Les charges trouvées auront donc dans la ligne triphasée une valeur autre que dans la boucle simple ; par conséquent les capacités partielles  $c_0$  et  $c'$  auront d'autres valeurs. Le calcul montre que malgré cela les capacités totales

$$c = c_0 + 2c'$$

pour la ligne à 2 fils et

$$c = c_0 + 3c'$$

pour la ligne à 3 fils sont égales.

En effet il est évidemment indifférent pour la charge totale  $Q$  qui se porte sur le conducteur I quand il est au potentiel  $P_1$  qu'un conducteur voisin ait le potentiel  $P_2 = -P_1$  ou que deux conducteurs placés à la même distance que le conducteur unique aient ensemble le même potentiel  $P_2 + P_3 = -P_1$ . La capacité indiquée ci-dessus pour la ligne aérienne à deux fils (capacité qui est rapportée aux potentiels absolus) peut donc servir directement pour la ligne à 3 fils. La capacité  $c_a$  donnée par le tableau I n'a qu'à être doublée pour donner  $c$  (voir équation 4 a). Par contre la formule donnée plus haut pour un câble à deux conducteurs ne peut pas servir sans autre pour un câble triphasé; en effet il n'est pas possible de remplacer le deuxième conducteur par deux autres formant avec le premier un triangle équilatéral dont le côté soit égal à l'ancienne distance des deux conducteurs, sans modifier la distance des trois conducteurs à l'enveloppe de plomb.

La nouvelle définition de la capacité, exprimée par les équations 6 et 7 n'a pas seulement l'avantage d'une détermination non équivoque de cette constante, même en triphasé; elle permet dans le cas où  $P_0 = 0$  d'indiquer la charge de chacun des trois conducteurs uniquement par le potentiel  $P$  de chacun d'eux, indépendamment du potentiel des autres. Comme on le sait,  $P$  est la tension de phase.

F. — Le courant de charge aussi ne dépend plus que du potentiel de chaque conducteur; on peut l'exprimer d'après l'équation 3, page 43, par

$$I_i = ic \omega \mathbf{E}$$

expression dans laquelle nous avons posé  $\mathbf{E}$  à la place de  $P$ .

La conductibilité  $g$  de l'isolant qui, comme l'indique le

le tableau I pour la ligne à deux fils, est proportionnelle à la capacité, reste proportionnelle à cette dernière même dans les canalisations multiples, et le rapport de ces deux quantités reste le même. En effet, si dans un câble triphasé cette conductibilité vaut  $g'$  entre deux conducteurs et  $g_0$  entre chaque conducteur et le plomb, on a, partant du conducteur I :

- le courant  $g' (P_1 - P_2)$  allant vers II ;
- le courant  $g' (P_1 - P_3)$  allant vers III ;
- le courant  $g_0 (P_1 - P_0)$  allant au plomb.

Ces trois équations, tout à fait analogues aux équations 4 b, donnent dans le cas où un courant triphasé passe dans le câble, car alors  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ , un courant venant du conducteur I pour se perdre dans l'isolant et valant en tout

$$(g_0 + 3g') P_1 = gP_1.$$

Il est donc possible de déterminer la dérivation dans l'isolant au moyen des capacités indiquées pour la canalisation triphasée, tout simplement en remplaçant comme dans le tableau I des canalisations à deux fils  $\varepsilon$  par  $\frac{1}{\varepsilon_s}$  et 0,0244 par 0,272.

Nous aurons enfin dans une canalisation triphasée, en additionnant le courant de charge et le courant dans l'isolant,

$$(g + ic\omega) \mathbf{E},$$

$\mathbf{E}$  étant la tension de phase. On obtient pour une longueur infiniment petite de conducteur le courant dérivé infiniment petit

$$d\mathbf{I} = (g + ic\omega) \mathbf{E} dx \tag{8}$$

formule qui correspond absolument à l'équation 4, page 59 donnée pour le courant des condensateurs dans la ligne à deux fils. La seule chose à observer est que dans la for-

mule 4 que nous venons de rappeler,  $\mathbf{E}$  signifie la tension entre le conducteur d'aller et le conducteur de retour, tandis qu'ici  $\mathbf{E}$  représente la tension de phase et que  $g$  et  $c$  ont les valeurs spéciales indiquées pour le triphasé dans les pages qu'on vient de lire.

**Résistance et self-induction.** — La ressemblance parfaite de l'équation 8 ci-dessus et de l'équation 4, page 59 a une importance toute particulière, car cette dernière est l'une de celles qui nous a permis de poser les équations fondamentales du chapitre VIII. Si nous pouvions arriver à rendre applicable au système triphasé l'équation 3 de la page 59, les lois trouvées pour les lignes à deux fils pourraient s'appliquer sans autre aux lignes triphasées, simplement en définissant convenablement les constantes du câble.

Examinons l'équation 3 sus-mentionnée

$$d\mathbf{E} = \mathbf{I}(r + i\omega L) dx$$

et voyons si nous pouvons amener  $r$  et  $L$  à une forme qui puisse faire servir cette équation pour chacun des conducteurs d'un câble triphasé.

$r$  représente dans l'équation ci-dessus la résistance globale des conducteurs d'aller et de retour pour 1 kilomètre de ligne simple,  $r dx$  la résistance totale de deux éléments correspondants des deux conducteurs,  $d\mathbf{E}$  enfin la chute totale de tension dans les mêmes éléments. Comme nous n'avons à considérer maintenant que l'un des trois conducteurs du triphasé,  $r$  doit signifier la résistance d'un kilomètre de fil simple et  $r dx$  la résistance d'un seul élément du conducteur.  $\mathbf{I} r dx$  est alors la chute ohmique de tension dans l'élément considéré, et  $r$  a une valeur deux fois plus petite qu'avant.

Il nous faut maintenant exprimer  $L$  de telle sorte que la partie de la chute de tension  $i\mathbf{I}\omega L dx$  due à la self-induction se rapporte à l'élément  $dx$  du conducteur simple. Il



faut que  $Ldx$  ait une valeur telle que l'expression

$$(L dx) \frac{dI}{dt}$$

ne représente plus que la force électromotrice induite dans l'élément  $dx$  et non plus celle qui s'induirait dans deux éléments correspondants des conducteurs d'aller et de retour. A première vue, le phénomène paraît plus compliqué que dans la ligne à deux fils. En effet, tandis que dans la boucle simple, c'est le même courant qui circule dans les deux conducteurs, nous avons ici trois courants à considérer, dont chacun exerce une action inductrice sur chacun des trois conducteurs. La chose devient plus claire sitôt que l'on se met à considérer pour lui-même chacun des conducteurs de la ligne à 2 fils; on reconnaît alors que le phénomène dans la boucle simple est lui aussi assez compliqué, car chacun des conducteurs est soumis non seulement à sa propre induction, mais à celle du conducteur voisin.

1° Désignons par  $I_t$  le courant d'aller et par  $-I_t$  le courant de retour, dont le sens est opposé. La force électromotrice induite par chacun des deux courants est donnée par la dérivée de l'intensité par rapport au temps multipliée par un coefficient qui, dans le cas de l'induction d'un conducteur par lui-même est désigné sous le nom de coefficient de self-induction  $L'$  de ce conducteur, et qui dans le cas de l'induction exercée par l'un de ces conducteurs sur l'autre est désigné sous le nom de coefficient d'induction mutuelle  $M$  des deux conducteurs.

Le conducteur considéré comme fil d'aller induit sur lui-même une force électromotrice

$$L' \frac{dI}{dt}$$

82 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 et subit de la part de l'autre une force électromotrice

$$M \frac{d(-I)}{dt},$$

ce qui fait en tout une force électromotrice

$$(L' - M) \frac{dI}{dt}.$$

Un calcul détaillé donne les valeurs suivantes pour  $L'$  et  $M$

$$L' = 2 \cdot 10^{-4} l \left( \ln \frac{2l}{r} - 0,75 \right) \text{ henrys,}$$

( $r$  étant le rayon d'un fil) et

$$M = 2 \cdot 10^{-4} l \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 \right) \text{ henrys,}$$

les notations étant les mêmes que plus haut. La force électromotrice totale induite dans chacun des conducteurs est donc

$$(L' - M) \frac{dI}{dt} = 2 \cdot 10^{-4} l \left( \ln \frac{a}{r} + 0,25 \right) \frac{dI}{dt}.$$

Posons

$$2 \cdot 10^{-4} l \left( \ln \frac{a}{r} + 0,25 \right) = L_1 \quad (9)$$

et désignons  $L_1$  sous le nom de coefficient de l'induction totale subie par chacun des conducteurs par *le fait du passage du courant dans les fils d'aller et de retour*.

Le coefficient total de l'ensemble des deux conducteurs a une valeur double; c'est pourquoi le tableau I pour la ligne à deux fils l'indique sous la forme

$$4 \cdot 10^{-4} l \left[ \ln \frac{2a}{d} + 0,25 \right].$$

2° Sur cette base il est facile de déterminer l'induction totale dans chacun des conducteurs du système triphasé.

Soient :

$I_{1t}, I_{2t}, I_{3t}$  les trois courants ;

$L', L'', L'''$ , les coefficients de self-induction de chacun des conducteurs ;

$M_{1,2}, M_{1,3}, M_{2,3}$  les coefficients d'induction mutuelle.

Le conducteur I subit les inductions suivantes :  
par son propre courant, la force électromotrice

$$L' \frac{dI_1}{dt}$$

par le courant du conducteur II, la force électromotrice

$$M_{1,2} \frac{dI_2}{dt}$$

par le courant du conducteur III, la force électromotrice

$$M_{1,3} \frac{dI_3}{dt}.$$

en tout une force électromotrice

$$L' \frac{dI_1}{dt} + M_{1,2} \frac{dI_2}{dt} + M_{1,3} \frac{dI_3}{dt}.$$

Mais comme en triphasé

$$I_{1t} + I_{2t} + I_{3t} = 0$$

et qu'en raison de la symétrie on a évidemment

$$M_{1,2} = M_{1,3} = M_{2,3} = M,$$

nous pouvons poser pour la force électromotrice totale induite dans le conducteur I l'expression très simple

$$(L' - M) \frac{dI_1}{dt}.$$

Remarquons qu'ici encore, malgré la présence de trois courants, l'induction totale dans chaque conducteur ne dépend en définitive que du courant qui circule dans ce conducteur, et que le coefficient d'induction

$$L' - M = L_1$$

est le même que celui que nous avons trouvé dans l'équation 9 ci-dessus.

On pouvait d'ailleurs s'attendre à l'égalité de  $L_1$  dans la canalisation en boucle et dans la canalisation triphasée; car les deux fils qui, dans le triphasé, remplacent le conducteur de retour de la ligne à deux fils doivent avoir la même action magnétique que ce conducteur de retour, puisqu'ils sont placés à la même distance du conducteur d'aller que l'ex-conducteur de retour et qu'ensemble ils portent le même courant que celui-ci. On peut donc désigner  $L_1$  comme coefficient de self-induction d'un des conducteurs d'une canalisation triphasée, ce coefficient valant la moitié de la valeur du coefficient de self-induction d'une ligne à deux fils. Dorénavant nous désignerons ce coefficient par la lettre  $L$  sans indice en indiquant naturellement chaque fois de quelle sorte de ligne il s'agit. Le problème de déterminer le coefficient  $L$  de l'expression  $(Ldx) \frac{dI}{dt}$  posée page 81 est donc résolu et l'expression de la self-induction d'une ligne triphasée est amenée à la même forme que celle d'une boucle.

3° Nous pouvons maintenant déterminer la chute totale de tension dans l'élément  $dx$  d'un des conducteurs d'un système triphasé en additionnant l'expression de la force électromotrice de self-induction donnée sous forme imaginaire dans le chapitre II

$$i\omega (L dx) \mathbf{I}$$

à la chute ohmique de tension  $rI dx$ . Nous arrivons ainsi à la formule

$$d\mathbf{E} = \mathbf{I} (r + i\omega L) dx$$

qui est exactement la même que celle trouvée page 59 pour la boucle simple. Le but que nous nous propositions est donc atteint.

Les formules qui permettent de calculer  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  dans un système triphasé sont réunies dans le tableau III.

TABLEAU III

Formules pour les constantes électriques des lignes à courant triphasé.

$r$ en ohms.	$L$ en henrys.	$c$ en microfarads.	$g$ en ohms.
Ligne aérienne (fig. 21). $21,22 \cdot \frac{l}{d^2}$	$2 \cdot 10^{-4} \cdot l \left[ \ln \frac{2a}{d} + 0,23 \right]$	$0,0241 \cdot \frac{l}{\log \left( \frac{2a}{d} \right)}$ , et plus exactement  $0,0241 \cdot \frac{l}{\log \left( \frac{2a}{d} \cdot \frac{2}{\sqrt{(2h)^2 + a^2}} \right)}$	
Câble cordé (fig. 22) $21,22 \cdot \frac{l}{d^2}$	$2 \cdot 10^{-4} \cdot l \left[ \ln \frac{2a}{d} + 0,23 \right]$	$0,0483 \cdot \epsilon \cdot \frac{l^{(1)}}{\log \left[ \frac{4a^2}{d^2} \cdot \frac{(3D^2 - 4a^2)^3}{(3D^2)^3 - (4a^2)^3} \right]}$	$0,545 \cdot \frac{l}{\varphi_s} \cdot \frac{1}{\log \left[ \frac{4a^2}{d^2} \cdot \frac{(3D^2 - 4a^2)^3}{(3D^2)^3 - (4a^2)^3} \right]}$

(<sup>1</sup>) Lichtenstein *E. T. Z.*, 1904, p. 126.

REMARQUE. — Quand le point neutre est mis à terre, ou relié à l'enveloppe de plomb du câble, les valeurs de ce tableau peuvent être *sans autre* introduites dans les formules du chapitre VIII, bien que ce chapitre soit consacré aux lignes à deux fils.  $E_x$  est alors la tension d'une phase.

En comparant les colonnes correspondantes des tableaux I et III, on voit que ce dernier donne dans la ligne aérienne pour  $r$  et  $L$  des valeurs plus petites de moitié, et pour  $c$  des valeurs doubles. Pour les câbles,  $r$  et  $L$  sont aussi diminués de moitié,  $c$  et  $g$  par contre sont fort

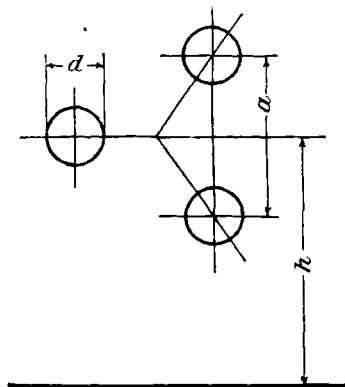


Fig. 21.

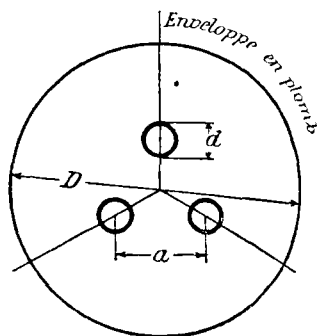


Fig. 22.

différents. La raison qui fait que  $c$  et  $g$  se présentent sous une autre forme dans les câbles triphasés que dans les câbles à deux conducteurs, a déjà été indiquée à la page 78; c'est que même dans le cas où les données  $d$ ,  $a$  et  $D$  d'un câble triphasé sont égales aux valeurs correspondantes d'un câble à deux conducteurs, la distance de ces conducteurs à l'enveloppe de plomb n'est pas la même.

Les tableaux I et III indiquent pour  $L$  des valeurs égales pour les câbles et les lignes aériennes; en réalité, la chose n'est pas parfaitement exacte quand les câbles sont armés de fer; en effet, cette armature renforce le flux magnétique dont la variation induit la force électromotrice de self-induction. Il est très difficile de suivre par le calcul cette influence de l'armature; nous reparlerons plus tard de sa détermination par l'expérience.

4° Dans les cas où on désire calculer non seulement la

capacité totale, mais encore les capacités partielles des conducteurs, on peut se servir dans les lignes aériennes des formules suivantes pour  $c_0$  et  $c'$ . Posons dans les figures 18 et 21

$$\lg \frac{4h}{d} = p \quad \text{et} \quad \log \frac{2h}{a} = q.$$

Nous pouvons écrire que la capacité totale des lignes à deux fils, rapportée à la différence de potentiel, est

$$c_a = 0,0121 \cdot l \cdot \frac{1}{p - q},$$

tandis que, rapportée au potentiel absolu, elle vaut

$$c = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{1}{p - q};$$

on a de même pour les canalisations triphasées en se rapportant à la tension de phase

$$c = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{1}{p - q}.$$

Pour les lignes à deux fils on aura

$$c_0 = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{1}{p + q}$$

$$c' = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{q}{(p + q)(p - q)}$$

et enfin pour les lignes triphasées

$$c_0 = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{1}{p + 2q}$$

$$c' = 0,0241 \cdot l \cdot \frac{q}{(p + 2q)(p - q)}.$$

Pour plus de clarté nous allons donner deux exemples numériques du calcul de la capacité d'une ligne triphasée.

N° 1. Le transport de force par courants triphasés qui a été exécuté en 1891 pendant l'Exposition de Francfort, entre Lauffen et Francfort, s'est effectué par une ligne aérienne composée de trois fils de cuivre nu de 4 millimètres de diamètre, montés sur isolateurs, les trois conducteurs formant un triangle isocèle à base horizontale. La distance des deux fils inférieurs était de 100 centimètres; le fil supérieur était tendu à une distance de 116 centimètres des fils inférieurs et se trouvait en moyenne à 686 centimètres du sol; la longueur totale de la ligne était de 169,93 km., en chiffres ronds 170 kilomètres.

On peut tirer de là pour le conducteur supérieur

$$r = 1,3623 \text{ ohms par km.}$$

$$L = 0,001323 \text{ henrys par km.}$$

$$c = 0,008737 \text{ m. f. par km.}$$

$$c_0 = 0,004034 \text{ m. f. par km.}$$

$$c' = 0,001566 \text{ m. f. par km.}$$

N° 2. Un câble triphasé pour 10 000 volts a les constantes suivantes :

Section du cuivre  $q = 10 \text{ mm}^2$  ( $d = 3,57 \text{ mm.}$ );

Distance des conducteur d'axe en axe  $a = 13,6 \text{ mm.}$ ;

Diamètre intérieur de l'enveloppe de plomb  $D = 39,2 \text{ mm.}$ ;

Pouvoir inducteur spécifique du diélectrique  $\varepsilon = 4,2$ .

D'après cela on a

$$r = 1,667 \text{ ohms par km.}$$

$$L = 0,0004562 \text{ henrys par km.}$$

$$c = 0,13176 \text{ m. f. par km.}$$

Nous donnons enfin dans les tableaux IV, V et VI les constantes de construction et les données électriques ainsi que les poids et les prix d'une série de câbles triphasés de construction moderne pour 3 000, 5 000 et 10 000 volts. Ces tableaux n'indiquent pas la résistance d'isolement; mais les fabriques garantissent qu'après la pose on a au moins 15 mégohms par km. à 15° C, de sorte que l'on peut poser  $g = 0,06667 \cdot 10^{-6}$ .



**TABEAU IV**

*Données de construction des câbles armés, à 3 conducteurs cordés, pour des tensions de 3 000, 5 000 et 10 000 volts.*

N°	SECTION du cuivre en mm <sup>2</sup> .	CUIVRE		DISTANCE D'AXE EN AXE des conducteurs, en mm.			DIAMÈTRES DE L'ENVELOPPE EN PLOMB, EN MM.					
		Nombre des fils.	Diamètre d'un des fils en mm.	3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.	INTÉRIEUR			EXTÉRIEUR		
							3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.	3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.
1	3 · 10	1	3,60	9,6	11,6	13,6	26,6	33,0	39,2	30,4	37,2	44,0
2	3 · 16	7	1,71	11,1	13,2	15,1	29,9	36,4	42,5	33,9	41,0	47,5
3	3 · 25	7	2,13	12,4	14,4	16,4	32,7	39,0	45,4	36,9	43,8	50,4
4	3 · 35	7	2,52	13,6	15,6	17,6	35,2	41,5	47,8	39,6	46,5	53,0
5	3 · 50	19	1,83	15,2	17,2	19,2	38,7	45,0	51,2	43,5	50,0	56,6
6	3 · 70	19	2,17	16,9	18,9	20,9	42,3	48,6	54,8	47,3	53,8	60,2
7	3 · 95	19	2,52	18,6	20,6	22,6	46,0	52,3	59,6	51,2	57,7	65,2
8	3 · 120	19	2,84	20,2	22,2	24,2	49,4	55,8	62,0	54,6	61,4	67,8

CALCUL DES CONSTANTES ÉLECTRIQUES D'UN CÂBLE

TABLEAU V

Constantes électriques, par kilomètre, des câbles armés sous plomb à 3 conducteurs cordés,  
pour 3 000, 5 000 et 10 000 volts.

N°	SECTION du cuivre en mm <sup>2</sup> .	CUIVRE		RÉSISTANCE par km. de chaque conducteur en ohms.	CAPACITÉ PAR KM. en microfarads.			SELF-INDUCTION PAR KM. en henrys.		
		Nombre des fils.	Diamètre d'un des fils en mm.		3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.	3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.
1	3 · 10	1	3,60	1,8100	0,158	0,142	0,130	0,000405	0,000443	0,000484
2	3 · 16	7	1,71	1,1230	0,172	0,155	0,143	0,000375	0,000411	0,000443
3	3 · 25	7	2,13	0,7188	0,196	0,176	0,162	0,000315	0,000367	0,000395
4	3 · 35	7	2,52	0,5135	0,207	0,187	0,173	0,000311	0,000349	0,000374
5	3 · 50	19	1,83	0,3594	0,222	0,200	0,185	0,000303	0,000328	0,000352
6	3 · 70	19	2,17	0,2567	0,234	0,213	0,197	0,000290	0,000313	0,000336
7	3 · 95	19	2,52	0,1892	0,245	0,224	0,208	0,000279	0,000300	0,000320
8	3 · 120	19	2,84	0,1498	0,253	0,235	0,215	0,000272	0,000290	0,000310

**TABEAU VI**

*Poids et prix approximatifs, par kilometre, des câbles armés sous plomb à 3 conducteurs cordés,  
pour 3 000, 5 000 et 10 000 volts.*

N°	SECTION du cuivre en mm <sup>2</sup>	CUIVRE		POIDS APPROXIMATIF EN KG			PRIX APPROXIMATIF EN MARCS (1 marc = 1,25 fr.)		
		Nombre des fils.	Diamètre d'un des fils en mm.	3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.	3 000 V.	5 000 V.	10 000 V.
1	3 · 10	1	3,57	4 010	4 640	8 330	3 900	5 100	6 500
2	3 · 16	7	1,71	4 840	5 520	9 450	4 700	5 800	7 500
3	3 · 25	7	2,13	5 720	6 950	10 400	6 000	7 000	8 900
4	3 · 35	7	2,52	7 090	7 890	11 500	7 000	8 200	10 200
5	3 · 50	19	1,83	8 520	9 370	12 000	8 700	10 000	11 900
6	3 · 70	19	2,17	10 030	10 930	13 690	11 000	12 400	14 400
7	3 · 95	19	2,52	11 750	12 710	15 610	13 500	15 100	17 200
8	3 · 120	19	2,84	13 450	14 250	17 260	16 100	17 500	19 800

CALCUL DES CONSTANTES ELECTRIQUES D'UN CABLE 91

TABLEAU VII

Valeurs de  $v$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{v}{R}$  et  $u$  des câbles à 10 000 volts et de la ligne aérienne Lauffen-Francfort.

	N°	$v = a + bi$	$\frac{b}{a}$	$\frac{v}{R}$	$u = \frac{R}{v}$	$u = p + qi$
Câbles à 10 000 volts à 50 périodes/sec.	1	$5,8349 \cdot 10^{-3} + i \cdot 6,3353 \cdot 10^{-3}$	1,0858	$0,0047418 \cdot e^{i \cdot 42^{\circ} 33' 19''}$	$210,89 \cdot e^{-i \cdot 42^{\circ} 33' 19''}$	$155,35 - i \cdot 142,63$
	2	$4,7256 \cdot 10^{-3} + i \cdot 5,3393 \cdot 10^{-3}$	1,1299	$0,0063006 \cdot e^{i \cdot 41^{\circ} 23' 27''}$	$158,71 \cdot e^{-i \cdot 41^{\circ} 23' 27''}$	$119,01 - i \cdot 105,01$
	3	$3,9280 \cdot 10^{-3} + i \cdot 4,6579 \cdot 10^{-3}$	1,1858	$0,008353 \cdot e^{i \cdot 40^{\circ} 3' 53''}$	$119,72 \cdot e^{-i \cdot 40^{\circ} 3' 53''}$	$91,622 - i \cdot 77,057$
	4	$3,3377 \cdot 10^{-3} + i \cdot 4,1823 \cdot 10^{-3}$	1,2530	$0,010158 \cdot e^{i \cdot 38^{\circ} 31' 12''}$	$98,448 \cdot e^{-i \cdot 38^{\circ} 31' 12''}$	$77,025 - i \cdot 61,311$
	5	$2,7796 \cdot 10^{-3} + i \cdot 3,7589 \cdot 10^{-3}$	1,3523	$0,012432 \cdot e^{i \cdot 36^{\circ} 24' 45''}$	$80,436 \cdot e^{-i \cdot 36^{\circ} 24' 45''}$	$64,732 - i \cdot 47,747$
	6	$2,3089 \cdot 10^{-3} + i \cdot 3,4420 \cdot 10^{-3}$	1,4907	$0,014932 \cdot e^{i \cdot 33^{\circ} 47' 33''}$	$66,970 \cdot e^{-i \cdot 33^{\circ} 47' 33''}$	$55,656 - i \cdot 37,248$
	7	$1,9292 \cdot 10^{-3} + i \cdot 3,2060 \cdot 10^{-3}$	1,6618	$0,017464 \cdot e^{i \cdot 30^{\circ} 58' 39''}$	$57,261 \cdot e^{-i \cdot 30^{\circ} 58' 39''}$	$49,094 - i \cdot 29,473$
	8	$1,6584 \cdot 10^{-3} + i \cdot 3,0527 \cdot 10^{-3}$	1,8407	$0,019443 \cdot e^{i \cdot 28^{\circ} 27' 28''}$	$51,431 \cdot e^{-i \cdot 28^{\circ} 27' 28''}$	$45,217 - i \cdot 24,508$
Ligne aérienne.	$v = 40$	$1,07940 \cdot 10^{-3} + i \cdot 1,3736 \cdot 10^{-3}$	1,2725	$0,0012546 \cdot e^{i \cdot 38^{\circ} 9' 44''}$	$797,08 \cdot e^{-i \cdot 38^{\circ} 9' 44''}$	$626,71 - i \cdot 492,50$
	$v = 50$	$1,17200 \cdot 10^{-3} + i \cdot 1,5814 \cdot 10^{-3}$	1,3494	$0,0013918 \cdot e^{i \cdot 36^{\circ} 32' 25''}$	$718,48 \cdot e^{-i \cdot 36^{\circ} 32' 25''}$	$577,26 - i \cdot 427,78$

92 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

Le tableau VII indique les valeurs  $v = a + bi$  et  $\frac{v}{R}$  qui figurent dans les équations fondamentales du chapitre VIII ; leur valeur a été calculée pour 50 périodes par seconde, et pour les câbles de 10 000 volts seulement.

Le tableau VII contient en outre  $u$ , l'inverse de la valeur de  $\frac{v}{R}$ , dont nous aurons à faire un fréquent usage plus tard, ainsi que le quotient  $\frac{b}{a}$ . Afin de faire ressortir combien ces importantes données sont différentes dans les câbles et les lignes aériennes, et en même temps pour montrer l'influence de la fréquence, on a ajouté au bas du tableau les constantes de la ligne Lauffen-Francfort, calculées pour 40 et 50 périodes.

**Termes de correction.** — Nous compléterons cette étude en faisant remarquer que la résistance, la self-induction, la capacité et le courant dérivé dans l'isolant ne sont pas les seules données qui influent sur la manière d'être des câbles. Nous avons déjà vu à la page 46 que l'électrisation alternative de l'isolant se traduit par une perte d'énergie, l'hystérésis diélectrique, et fait que le courant de charge de chaque élément du câble n'est pas décalé exactement de  $90^\circ$  sur la tension, mais d'un peu moins.

Il faut encore ajouter dans les câbles armés de fer une perte par hystérésis magnétique qui provient des lignes de force qui émanent de chacun des conducteurs quand il est parcouru par un courant et aimantent cette armature de fer. Si en outre il y a des masses métalliques dans le voisinage du câble, il s'y induit des courants de Foucault qui réagissent sur les conducteurs et y induisent à leur tour des forces électromotrices.

Notons encore qu'à part des actions inductrices tous les conducteurs voisins exercent sur le câble des effets de capacité provenant de l'influence électrique.

Enfin, lorsque l'on emploie de très hautes tensions, les

lignes aériennes émettent des effluves électriques qui vont se perdre dans l'air<sup>1</sup>.

On pourrait croire que ces actions secondaires enlèvent aux équations fondamentales que nous avons trouvées la généralité et l'exactitude que nous voulions leur donner.

Il n'en est rien ; ces équations embrassent tous les phénomènes qui se produisent dans les transmissions électriques à grande distance ; elles sont tout à fait exactes si l'on donne des constantes  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  une définition un peu plus générale que dans les équations trouvées page 59 et que nous rappelons ici

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= (r + i\omega L) \mathbf{I} dx \\ d\mathbf{I} &= (g + i\omega c) \mathbf{E} dx. \end{aligned}$$

Comme on le voit, la chute de tension dans un élément de ligne est la résultante de deux composantes, l'une  $r\mathbf{I}dx$  qui est en concordance de phase avec l'intensité, l'autre  $i\omega L\mathbf{I}dx$  qui est en avance sur elle de  $90^\circ$ . D'une façon analogue, le courant qui entre dans cet élément est la résultante de deux composantes ; l'une  $g\mathbf{E}dx$  qui est en phase avec la tension et l'autre  $i\omega c\mathbf{E}dx$  qui avance de  $90^\circ$  sur cette tension.

En considérant les effets de  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  comme exprimés par ces composantes, nous pouvons concevoir que les phénomènes accessoires dont nous avons parlé plus haut peuvent être exprimés par des composantes de même sens, de telle sorte qu'il suffit d'apporter de légères corrections à  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  pour en tenir compte.

En effet, il est facile de voir que toute force électromotrice produite en un point quelconque de la ligne peut être décomposée en deux composantes perpendiculaires, dont l'une est en phase avec le courant et l'autre en avance ou en retard de  $90^\circ$ , et que de même un courant passant dans le

<sup>1</sup> Voir le compte rendu de quelques essais dans *E. T. Z.* 1902, p. 1067 et 1904, p. 387.

diélectrique peut se décomposer en une composante en phase avec la tension et en une composante décalée de  $90^\circ$ .

Nous procéderons donc de la façon suivante :

L'hystérésis diélectrique, qui a pour conséquence la production d'un courant de charge dans le diélectrique, courant dont le décalage par rapport à la tension n'est plus de  $90^\circ$  exactement, ajoute à la composante primitive une composante en phase avec la tension ; elle augmente donc la valeur de  $g$ .

L'hystérésis magnétique dont l'effet est de watter la force électromotrice de self-induction induite dans la ligne correspond à une augmentation de  $r$ .

L'induction mutuelle avec les masses métalliques voisines fait sur la ligne, considérée comme un primaire de transformateur, l'effet d'un secondaire en court-circuit. On peut facilement s'en rendre compte en se remémorant l'effet que produit sur le courant primaire d'un transformateur une marche à vide suivie d'une charge subite. D'après le diagramme circulaire classique, ce courant croît de telle sorte que la composante wattée et la composante déwattée augmentent en même temps. Il sera donc facile de tenir compte de l'induction mutuelle par une modification simultanée de  $r$  et de  $L$ .

La condensation électrique produite par l'influence électrostatique de la ligne sur les conducteurs voisins s'interprète tout simplement comme une augmentation de capacité et par conséquent grandit  $c$ .

Enfin l'effluve n'est rien autre qu'une décharge dans les milieux ambiants, qui peut se représenter par un courant proportionnel à la tension et en phase avec elle ; pour en tenir compte il suffira de l'ajouter aux dérivations dans l'isolant et d'augmenter  $g$ .

Il faut bien avouer que la valeur des corrections à introduire sur  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  est difficile à déterminer. Nous montrerons plus tard que les valeurs totales de  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et

$g$  peuvent être déterminées par des mesures très faciles effectuées sur des lignes aériennes ou sur des câbles de longueur moyenne, de sorte que la comparaison de ces mesures avec les valeurs déterminées par le calcul basé sur les dimensions des conducteurs donne une idée des valeurs à introduire à titre de correction. Autant que l'on en peut juger par les mesures qui ont été publiées jusqu'à ce jour, on peut admettre que pour les lignes aériennes (tout au moins jusqu'à la tension de 20 000 volts), il n'y a pas à tenir compte de ces influences accessoires, et que les méthodes données dans ce chapitre suffisent au calcul des constantes.

Il sera cependant nécessaire d'étendre et d'approfondir ces mesures à l'avenir.

---



## CHAPITRE X

### LE CÂBLE DE LONGUEUR INFINIE EN CIRCUIT OUVERT

**Généralités.** — Nous allons aborder les applications des équations fondamentales en commençant par le cas théorique le plus simple, celui du câble de longueur infinie en circuit ouvert.

Rappelons que si l'on joint un conducteur dépourvu de capacité à l'un des pôles d'un générateur, il prend instantanément et sur toute sa longueur le potentiel de ce pôle et en suit sans retard les variations ; par contre le conducteur doué d'une capacité uniformément répartie se comporte tout différemment : il n'y a que le commencement du conducteur qui prenne immédiatement le potentiel du pôle ; les autres points n'y arrivent qu'après un certain temps, ou même pas du tout, si l'on coupe le courant assez tôt.

Considérons d'abord un câble en circuit ouvert dont on relie une des extrémités à l'un des pôles d'une source à courant continu. Le commencement du câble prend immédiatement le potentiel  $P$  ; l'élément voisin ne prend ce potentiel qu'après avoir reçu une charge correspondante à sa capacité. Ce n'est qu'à ce moment que le courant continue son chemin et charge l'élément suivant. L'état de charge électrique ne se propage donc que progressivement d'élément en élément, et l'on observe qu'en chaque point le potentiel croît successivement de  $O$  à  $P$ , et cela d'autant plus lentement que le point considéré est

plus éloigné du commencement du câble. Ce n'est qu'après un temps parfois très appréciable ou pour parler exactement, ce n'est qu'après un temps infiniment long que tous les points sont au potentiel  $P$ ; le courant de charge s'arrête alors et le câble se comporte dorénavant comme un conducteur sans capacité.

Si, par contre, on relie le câble à un alternateur, le câble, même en circuit ouvert, sera parcouru continuellement par un courant alternatif; la tension alternative a pour conséquence une charge alternative qui ne peut se produire que par un flux et un reflux des charges électriques.

La chute de tension que ce courant de charge entraîne, diminue la tension à mesure que l'on s'éloigne du commencement du câble; en même temps que la tension, la charge que peut prendre chacun des éléments du câble diminue ainsi que l'intensité nécessaire. Dans le cas du courant alternatif donc, la tension et le courant ne dépendent pas seulement du temps, mais encore de la distance du point considéré à l'une des extrémités du câble. Le présent chapitre se propose de déterminer la loi de ces variations, la tension au commencement du câble étant donnée.

**Équations fondamentales.** — Il est de toute nécessité d'adopter un système de notations simples et logiques pour les grandeurs alternatives. Tout en continuant à employer les notations  $E$  et  $I$  pour la tension et le courant, nous les munirons des indices  $x$  et  $t$ , caractérisant l'abscisse du point considéré et le temps. Par exemple,  $E_{0,t}$  représentera donc la tension au point  $x = 0$  à l'instant  $t$ , et  $I_{0,\max}$  l'intensité au point  $x = 0$  au moment où elle atteint sa valeur maximale;  $I_{x,\max}$  sera l'intensité en un point d'abscisse  $x$  au moment où elle atteint son maximum, etc. Si la majuscule n'a qu'un index indiquant la position du point, il sera entendu qu'il s'agit de la valeur efficace;  $I_x$  repré-

sente donc la valeur efficace de l'intensité au point  $x$ .

Nous faisons la même convention pour les symboles. Les symboles réduits, où le temps ne figure pas, et qui ne varient que suivant la position, seront donc représentés par  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$ ; d'autres indices tels que  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{I}_l$  représenteront des cas particuliers de  $x$ .

La tension au commencement du câble ( $x = 0$ ) aura pour expression

$$E_{0,t} = E_{0,\max} \sin \omega t. \quad (1)$$

En reprenant les équations générales III de la page 64, que nous répétons ici

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}x} \quad (2)$$

et

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}x}) \quad (3)$$

nous arriverons à déterminer la répartition dans le temps et dans l'espace de la tension et de l'intensité dans le câble.

Nous avons tout d'abord à fixer les constantes  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$ . Nous les trouverons par la réflexion suivante :

L'extrémité du câble opposée au générateur doit être le siège d'une intensité nulle, car elle est en circuit ouvert. Dans le cas des tensions très élevées, il y a à la vérité une perte sous forme d'effluves sortant de la face terminale du câble; nous ne tiendrons pas compte de ces effluves, car les tensions nécessaires pour les produire ne sont pas employées dans la pratique actuelle.

Nous avons donc pour  $x = \infty$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}x}) = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 \cdot 0 - \mathbf{c}_2 \infty) = 0,$$

soit

$$\mathbf{c}_1 \cdot 0 - \mathbf{c}_2 \infty = 0.$$

Cette équation de condition ne peut être satisfaite que

lorsque  $c_1 = \pm \infty$  et en même temps  $c_2$  est compris entre 0 et  $+\infty$  ou 0 et  $-\infty$ , ou lorsque simultanément  $c_2 = 0$  et  $c_1$  est compris entre 0 et  $+\infty$ . La première de ces alternatives ne peut pas être juste, car nous aurions alors d'après l'équation 2 au commencement du câble  $E_0 = \pm \infty$ , ce qui est contraire à l'équation 1; c'est donc la deuxième alternative qui est la bonne. Il suit de  $c_2 = 0$

$$E_x = c_1 e^{-vx} \quad (4)$$

et

$$I_x = \frac{v}{R} c_1 e^{-vx}.$$

Comme la tension qui existe au commencement du câble va être prise pour origine des phases, nous posons  $E_0 = E_{0, \max}$ .

D'autre part, l'équation 4 donne pour  $x = 0$ :  $E_0 = c_1$ .

On aura

$$c_1 = E_{0, \max}$$

soit

$$E_x = E_{0, \max} \cdot e^{-vx} \quad (5)$$

et

$$I_x = \frac{v}{R} E_{0, \max} e^{-vx}. \quad (6)$$

En posant enfin d'après l'équation 13 de la page 61  $v = a + bi$ , nous avons

$$E_x = E_{0, \max} \cdot e^{-ax} \cdot e^{-ibx} \quad (7)$$

et

$$I_x = \frac{a + bi}{R} E_{0, \max} \cdot e^{-ax} \cdot e^{-ibx}. \quad (8)$$

Ces équations donnent sous forme complexe les variations de la tension et du courant le long du câble; nous allons les interpréter.

**Variations de la tension, du courant et du décalage.** — 1°  $E_x$  donne la tension sous la forme symbolique  $A = Ae^{ix}$  où

$A$  représente l'amplitude et  $\alpha$  la différence de phase avec la variable qui sert de point de départ pour le compte des phases.

Dans le cas présent, nous avons  $A = E_{0, \max} e^{-ax}$ , et  $\alpha = -bx$ . Si à un instant précis,  $\omega t$  est la phase de la grandeur origine des phases, le symbole réduit  $\mathbf{A} = Ae^{i\alpha}$  représente en général une grandeur alternative (voir p. 4)

$$A_t = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Dans le cas présent, nous avons

$$E_{x, t} = E_{0, \max} e^{-ax} \cdot \sin(\omega t - bx). \quad (9)$$

On voit qu'en tout point du câble, la tension varie sinusoïdalement dans le temps, mais que les tensions aux différents points du câble possèdent des différences de phase  $bx$  par rapport à la tension qui règne au commencement du câble; ces différences de phase varient donc avec la position du point considéré. On voit encore que l'amplitude  $E_{0, \max} e^{-ax}$  diminue à mesure que  $x$  grandit, c'est-à-dire en marchant du commencement vers la fin du câble. Ce second fait représente donc une oscillation amortie.

La figure 23 *a* donne une courbe I qui représente le facteur  $\sin(\omega t - bx)$  en fonction de  $bx$  à l'instant précis où  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ; ( $bx$  est coté comme angle; il serait facile d'en déduire la valeur de  $x$  en km, une fois  $b$  donné). La courbe II donne les amplitudes  $E_{0, \max} e^{-ax}$  en fonction de  $ax$  quand  $E_{0, \max} = 1$ ;  $ax$  est aussi coté en degrés. Les quantités  $a$  et  $b$ , données par les équations 46 et 47 de la page 62 sont en général différentes; pour fixer les idées on a adopté dans la figure 23 *a* le rapport  $b = 3a$ , de telle sorte que la même abscisse représente à la fois  $ax = 10^\circ$  et  $bx = 30^\circ$ ; l'échelle des  $bx$  est au bas de la figure, celle des  $ax$  au haut. La courbe des amplitudes II se rapproche asymptotiquement de la valeur 0, qu'elle atteint à l'extrémité du câble.

La courbe III a été obtenue en multipliant les ordonnées correspondantes des courbes I et II; cette courbe donne donc la vraie répartition des tensions à l'instant  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ .

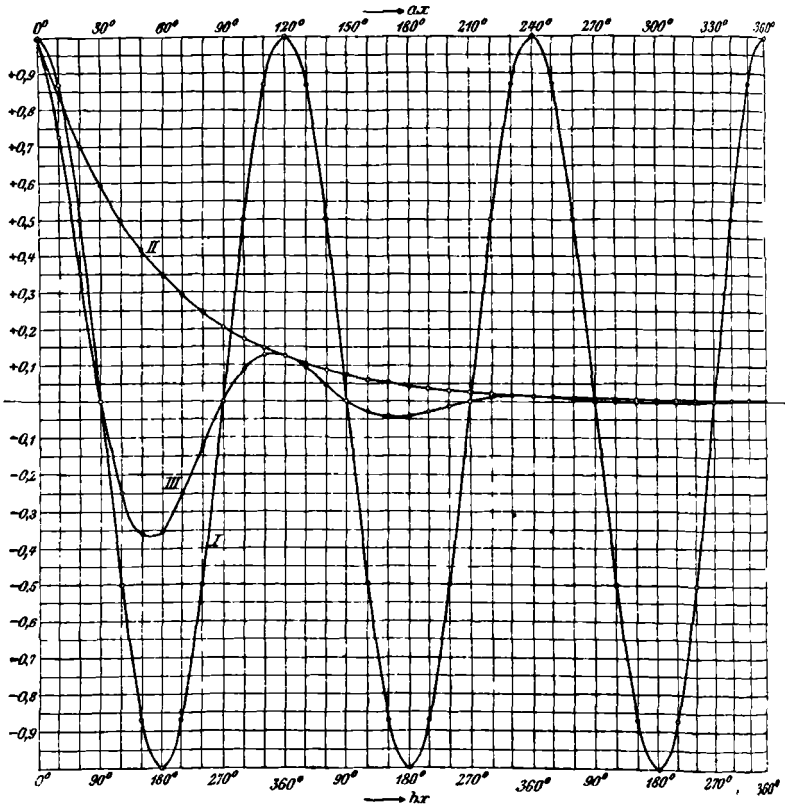


Fig. 23 a.

Cette courbe III est une ligne ondulée d'amplitude décroissante. Le fait que cette courbe a des ordonnées positives et négatives est particulièrement intéressant, en ce sens qu'il indique qu'en des points différents du même câble, il peut y avoir *simultanément* des tensions positives et négatives. La différence de phase entre les tensions de deux

points du câble est donnée par la différence des abscisses des deux points correspondants de la sinusoïde I.

On peut désigner sous le nom de longueur d'onde la distance de deux points pour lesquels les tensions correspondantes sont en phase. Désignons cette longueur d'onde par  $\lambda$ . Quand  $x$  augmente ou diminue de  $\lambda$ ,  $bx$  doit varier de  $2\pi$  dans l'équation 9 ; on peut donc poser

$$b(x \pm \lambda) = bx \pm 2\pi$$

soit 
$$b\lambda = 2\pi$$

ou 
$$\lambda = \frac{2\pi}{b} .$$

Voici quelques valeurs de  $\lambda$  pour la série des câbles à 10 000 volts donnée par les tableaux IV, V et VI, le courant ayant 50 périodes par seconde :

Câble n°	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda$ en km.	992	1177	1349	1502	1672	1826	1960	2058.

Pour la ligne aérienne Lauffen-Francfort,  $\lambda = 3\,973$  km.

Aucun des câbles modernes en fonction n'atteint ces longueurs.

Inutile de dire que le phénomène que nous venons d'examiner n'a rien de commun avec la transmission des ondes électriques dans le vide, car la vitesse de transmission  $v$  des ondes dans le cas du courant alternatif serait, en appelant  $\nu$  la fréquence

$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{2\pi}{b} \cdot \nu,$$

ce qui ferait pour les câbles déjà cités de 50 000 à 100 000 kilomètres et pour la ligne aérienne environ 200 000 kilomètres à 50 périodes par seconde. Cette vitesse  $v$  est donc loin d'être une constante ; on voit aussi qu'elle ne coïncide pas avec la vitesse des ondes électriques dans l'éther, qui est de 300 000 kilomètres par seconde. L'analogie de la courbe III avec celle des ondes électriques est donc toute superficielle.

Une ficelle de très grande longueur, fixée à l'une de ses extrémités, puis soulevée et abaissée alternativement à

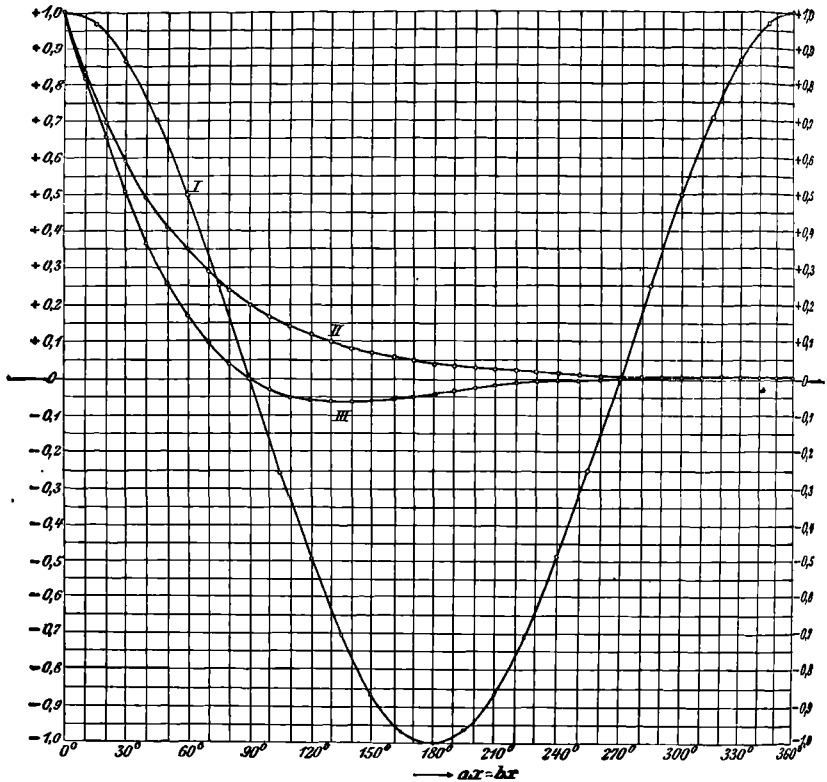


Fig. 23 b.

l'autre extrémité, prendrait la forme représentée par cette courbe III.

La figure 23 a a été construite dans l'hypothèse  $b = 3a$  ; quand par exemple  $b = a$ , la figure prend la tournure de la figure 23 b. La courbe de la variation de la tension a alors une forme ondulatoire beaucoup moins marquée que dans la figure 23 a.

2° Pour la discussion de la variation de l'intensité dans le



câble, il nous faut amener la valeur donnée par l'équation 8 à la forme  $\mathbf{A} = A e^{i\alpha}$ , en transformant l'expression de  $\mathbf{I}_x$  de telle sorte que  $i$  ne figure plus que dans l'exposant de  $e$ . Supposons provisoirement que le coefficient de self-induction  $L$  soit négligeable, de même que le courant dans l'isolant; on aura alors d'après les équations 16 et 17, page 62 et les équations 5, page 59 :

$$a = b = \sqrt{\frac{r^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = r, \quad (10)$$

d'où

$$\mathbf{I}_x = \frac{a}{r} E_{0, \max} \cdot e^{-ax} (1 + i) e^{-iax}. \quad (11)$$

Comme  $a$ ,  $r$  et  $E_{0, \max}$  sont réels, il n'y a plus qu'à mettre  $(1 + i) e^{-iax}$  sous la forme  $e^{i\alpha}$ .

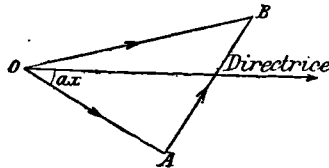


Fig. 24 a.

Nous représentons  $e^{-iax}$  par un vecteur de longueur 1 ( $OA$ , fig. 24 a) formant avec la directrice un angle  $ax$  vers la droite (sens négatif). D'après le théorème 4 de la page 31,  $ie^{-iax}$  représente un vecteur de la même grandeur, mais faisant avec  $OA$  un angle de  $90^\circ$  vers la gauche ( $AB$ , fig. 24 a). La résultante des deux vecteurs est  $OB$ . Cette résultante étant l'hypoténuse du triangle rectangle  $OAB$  a une valeur  $\sqrt{2}$  fois plus grande que celle des vecteurs, et forme un angle de  $(45^\circ - ax)$  avec la directrice, puisque  $AOB = 45^\circ$ . Le vecteur résultant est donc représenté par l'expression

$$\sqrt{2} e^{i(45^\circ - ax)}$$

106 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 et l'on a

$$I_x = \frac{a\sqrt{2}}{r} E_{0, \max} e^{-ax} e^{i(45^\circ - ax)}$$

ou encore, en remplaçant  $a$  par la valeur donnée par l'équation 10

$$I_x = \sqrt{\frac{x}{r}} E_{0, \max} e^{-ax} e^{i(45^\circ - ax)}. \quad (12)$$

Si nous comparons maintenant cette formule avec l'expression générale

$$A = A e^{i\alpha}, \quad (13)$$

on voit que dans le cas présent

$$A = \sqrt{\frac{x}{r}} E_{0, \max} e^{-ax}$$

et

$$\alpha = (45^\circ - ax).$$

Par analogie avec

$$A_i = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (14)$$

on a pour  $I_{x,t}$

$$I_{x,t} = \sqrt{\frac{x}{r}} \cdot E_{0, \max} \cdot e^{-ax} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ - ax). \quad (15)$$

En comparant cette équation avec l'équation 9, on voit que la variation de l'intensité présente les mêmes particularités que la variation de la tension : une amplitude décroissant du commencement à la fin et une différence dans les phases du courant en divers points du câble. Le courant et la tension ont en tous les points du câble un rapport constant  $\sqrt{\frac{x}{r}}$  de leurs amplitudes ; mais leur phase n'est pas la même ; dans le cas spécial où  $a = b$ , le courant a une avance de phase constante de  $45^\circ$  sur la tension, et cela en tous les points du câble.

La figure 23 *b*, qui a précisément été faite dans l'hypo-

thèse  $a = b$ , représente donc à la fois la variation des tensions et celle des courants, à la condition d'admettre que la courbe I est dessinée pour *le courant* à l'instant où  $\omega t + 45^\circ = 90^\circ$ , tandis que nous avons pris pour *la tension* l'instant  $\omega t = 90^\circ$ , en retard sur le premier d'un huitième de période. La courbe III qui représente le produit des courbes I et II peut donc représenter la variation des amplitudes du courant à un moment antérieur d'un huitième de période à celui pour lequel cette même courbe indique les variations de la tension. La courbe III montre que le courant dans un même conducteur peut avoir en des points différents des signes différents, ce qui est encore plus surprenant et plus intéressant que pour la tension, puisque cela signifie que dans *un même conducteur* il peut y avoir *au même moment* des sens de courant différents. Comme le courant dans le fil de retour a la même répartition que dans le fil d'aller, avec la seule différence qu'en chaque point il a un sens opposé, il suffira de dessiner la symétrique de la figure 23 *b* par rapport à l'axe des  $x$  pour obtenir la variation du courant dans l'un des conducteurs quand la figure représente cette variation dans l'autre conducteur.

3° Si nous n'avions pas fait les suppositions  $L = 0$  et  $g = 0$ ,  $\mathbf{I}_x$  aurait conservé la forme donnée par l'équation 8. L'expression complexe  $\frac{a + bi}{\mathbf{R}}$  dans laquelle, d'après l'équation 5 page 59,  $\mathbf{R}$  est lui-même complexe, doit être mise sous la forme  $p + qi$ . Si dans le cas spécial que nous étudions, nous posons  $p = m$  et  $q = n$ , nous avons

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = \frac{a + bi}{\mathbf{R}} = m + ni \quad (16)$$

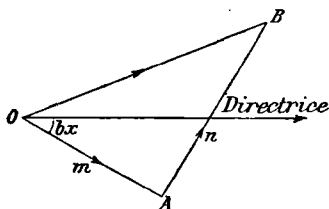
et nous obtenons par le théorème 3 *c*, page 28

$$m = \frac{ar + bs}{r^2 + s^2} \quad n = \frac{br - as}{r^2 + s^2}. \quad (17)$$

Nous pourrions donc écrire l'équation de l'intensité sous la forme

$$I_x = (m + ni) E_{0, \max} e^{-ax} e^{-ibx}$$

et nous aurions à transformer le produit  $(m + ni) e^{-ibx}$  en une quantité complexe de la forme  $e^{-i\alpha}$ . Il suffit pour cela de remarquer que  $me^{-ibx}$  représente un vecteur de longueur  $m$  faisant avec la directrice un angle  $bx$  sur la droite



• Fig. 24 b.

(fig. 24 b) et que  $nie^{-ibx}$  représente un vecteur de longueur  $n$  perpendiculaire (théorème 4, p. 31). Le vecteur résultant a donc d'après la figure 24 b la longueur  $\sqrt{m^2 + n^2}$  et se trouve faire avec la directrice un angle de  $bx - \arctg \frac{n}{m}$  vers la droite.  $I_x$  est donc donné par l'expression

$$I_x = \sqrt{m^2 + n^2} E_{0, \max} e^{-ax} \cdot e^{-i\left(bx - \arctg \frac{n}{m}\right)}. \quad (18a)$$

En comparant cette expression avec la forme générale  $A = Ae^{i\alpha}$ , on trouve :

$$\alpha = \left(\arctg \frac{n}{m} - bx\right) \text{ et } A = \sqrt{m^2 + n^2} E_{0, \max} e^{-ax}.$$

En substituant ces valeurs dans la forme réelle  $A_t = A \sin(\omega t + \alpha)$  de  $A$ , on arrive enfin à l'équation

$$I_{x,t} = \sqrt{m^2 + n^2} E_{0, \max} e^{-ax} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{n}{m} - bx\right) \quad (18b)$$

Le courant admis au commencement du câble est donc,  $x$  valant alors 0

$$I_{0,t} = \sqrt{m^2 + n^2} E_{0,\max} \sin \left( \omega t + \operatorname{arctg} \frac{n}{m} \right)$$

et la relation entre les valeurs efficaces de  $I_0$  et  $E_0$  est donnée par l'équation

$$I_0 = \sqrt{m^2 + n^2} E_0. \quad (18c)$$

Enfin, en comparant l'équation 18 *b* avec l'équation 9, qui donnait  $E_{x,t}$  on voit que dans le cas présent, où  $r$ ,  $c$ ,  $L$  et  $g$  sont quelconques, on a, *en tous les points du câble*, une intensité possédant une avance de phase *constante* sur la tension, et qu'en outre l'intensité et la tension ont un rapport *constant*. Mais cette avance de phase n'est plus de  $45^\circ$  comme dans le cas où  $L = 0$  et  $g = 0$ ; elle vaut maintenant  $\operatorname{arctg} \frac{n}{m}$ . Nous emploierons désormais, pour abrégér, la lettre  $\beta$  pour cette avance de phase; le rapport constant est  $\sqrt{m^2 + n^2}$ . Ce résultat est digne de remarque, car nous verrons plus tard que dans le câble de longueur *finie* en circuit ouvert, le décalage et le rapport des amplitudes sont *différents* en tous les points du câble.

Dans le cas présent les valeurs données par l'équation 17 pour  $m$  et  $n$  amènent à écrire

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{\frac{g^2 + x^2}{r^2 + s^2}} \quad (19)$$

et

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m} = \frac{x \sqrt{r^2 + s^2} - s \sqrt{g^2 + x^2}}{g \sqrt{r^2 + s^2} + r \sqrt{g^2 + x^2}}, \quad (20)$$

expressions dans lesquelles une valeur *positive* de  $\beta$  représente une *avance de phase* de l'intensité sur la tension.

Remarquons que l'équation 20 indique que

$$\operatorname{tg} \beta \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0,$$

110 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
suivant que

$$x' \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} gs.$$

Le courant peut donc être décalé en avant ou en arrière de la tension, suivant les rapports des constantes du câble entre elles.

Quand nous avons des câbles bien isolés, dans lesquels  $g$  est sensiblement nul, le courant est en avance de phase, quelles que soient la résistance, la capacité ou la self. En effet, pour  $g = 0$ , on a

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{r^2 + s^2}}$$

et

$$\tan \beta = \frac{n}{m} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{r^2}} = \frac{s}{r}.$$

Cette dernière équation, transformée par un petit calcul trigonométrique, montre que  $\beta$  est toujours plus petit que  $45^\circ$ , et cela de la moitié de l'angle dont la tangente est  $\frac{s}{r}$ . Les deux dernières équations montrent aussi que pour une tension donnée, la self diminue l'intensité ainsi que l'avance du courant sur la tension. Remarquons aussi que même quand la capacité n'est pas négligeable, son influence est nulle sur le décalage dans les câbles très bien isolés; il n'y a que  $s$  et  $r$  qui influent alors.

4° Nous allons faire quelques exemples numériques à titre d'application. Reprenons le câble déjà traité dans le chapitre VII, page 48, pour lequel  $r = 0,455 \Omega$ ,  $c = 0,17$  microfarads, mais dans lequel  $g$  et  $L$  sont nuls.

Nous aurons pour une fréquence de 50 périodes par seconde,  $x = 2 \pi \cdot 50 \cdot c = 100 \pi \cdot 0,17 \cdot 10^{-6} = 53,4 \cdot 10^{-6}$  et  $\sqrt{\frac{x}{r}} = 0,01082$ . En appliquant au commencement du câble une tension efficace  $E_0$  de 1000 volts, nous aurons

pour le courant entrant (éq. 15)

$$I_0 = \sqrt{\frac{x}{r}} E_0 = 10,82 \text{ amp.}$$

avec, comme on l'a vu, une avance de  $45^\circ$  sur la tension.

Avec une tension de 5 000 volts, nous aurions une intensité quintuple, soit 54,1 ampères.

L'équation 10 donne en outre

$$a = b = \sqrt{\frac{rx}{2}} = 0,0034857;$$

la longueur d'onde devient (page 103)

$$\lambda = \frac{2\pi}{b} = 1\,800 \text{ km.}$$

Chaque longueur de 5 kilomètres, — c'est la distance de deux condensateurs dans le câble artificiel déjà considéré dans les figures 13 et 16 — représente donc les  $\frac{5}{1\,800}$  d'une longueur d'onde, soit :

$$\frac{360^\circ \times 5}{1\,800} = 1^\circ.$$

Si le câble en question a un coefficient de self-induction,  $L = 4,076 \cdot 10^{-4}$  henrys, nous aurons, toujours avec 50 périodes par seconde

$$\sqrt{m^2 + n^2} = 0,010629$$

et

$$\beta = 37^\circ 8'.$$

Dans ce cas, chaque millier de volts de tension au câble donne d'après l'équation 18 c un courant

$$I_0 = 10,63 \text{ amp.}$$

décalé de  $37^\circ 8'$  en avant sur la tension. L'intensité et l'avance de phase sont donc inférieures à ce qu'elles étaient dans le câble dépourvu de self; mais l'influence de la self

112 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 sur l'avance de phase est bien plus considérable que sur  
 l'intensité.

Nous avons en outre pour notre câble, non plus  $a = b$ ,  
 mais

$$a = 0,0030336 \quad \text{et} \quad b = 0,0040052,$$

d'où

$$\frac{b}{a} = 1,3203.$$

La valeur moyenne de  $a$  et de  $b$  est 0,0035194, valeur  
 presque exactement la même que dans le câble sans self.  
 où  $a = b = 0,0034857$ .

Pour la ligne de Lauffen à Francfort (qui à 15° C avait  
 $r = 1,353$  ohms par kilomètre et  $c = 0,00872$  mf. par  
 kilomètre <sup>1)</sup>, nous aurions pour une longueur infinie, et en  
 négligeant provisoirement la self, une intensité de  $I_0 =$   
 1,2727 amp. pour chaque millier de volts du générateur,  
 toujours avec l'avance de 45°. En tenant compte du coeffi-  
 cient observé  $L = 0,00131$  henrys, nous aurions pour  
 chaque 1 000 volts

$$I_0 = 1,2545 \text{ amp.}$$

et un décalage de 38° 10'.

Nous voyons comme plus haut que la self diminue assez  
 peu l'intensité, mais bien plus l'avance de phase. Sans  
 self, les valeurs de  $a$  et de  $b$  sont toutes deux 0,0012176,  
 tandis qu'en tenant compte de  $L$ , on a  $a = 0,0010794$  et  
 $b = 0,0013736$ , ce qui correspond au rapport  $\frac{b}{a} = 1,273$ .  
 Nous retrouvons encore le fait déjà noté que la valeur  
 moyenne de  $a$  et de  $b$  est de 0,0012265, soit presque exac-  
 tement la même que dans le cas où  $a = b$ .

Nous donnons dans le tableau VIII une liste des valeurs  
 de  $\sqrt{m^2 + n^2}$  (qui représentent d'après l'équation 18  $c$  le

<sup>1</sup> Toutes les données numériques concernant la ligne de Lauffen à Francfort indiquées dans ce volume sont empruntées à un article de Breisig. *E. T. Z.*, 1899, p. 418.



courant admis par volt) et de  $\beta$  pour les câbles à 10 000 volts considérés dans les tableaux IV à VII ; rappelons que ces câbles sont tous du même type, mais de section croissante ; le nombre des périodes adopté est de 50 par seconde, sauf pour la ligne aérienne Francfort-Lauffen, où nous avons calculé avec 40 et 50 périodes.

TABLEAU VIII

Valeurs de  $\sqrt{m^2 + n^2}$  et de  $\beta$  dans les câbles à 10 000 volts et la ligne aérienne Lauffen-Francfort.

No	$\sqrt{m^2 + n^2}$	$\beta$
1	$4,7418 \cdot 10^{-3}$	42° 33' 19"
2	$6,3009 \cdot 10^{-3}$	41° 25' 27"
3	$8,3530 \cdot 10^{-3}$	40° 3' 53"
4	$10,1580 \cdot 10^{-3}$	38° 31' 12"
5	$12,4320 \cdot 10^{-3}$	36° 24' 45"
6	$14,9330 \cdot 10^{-3}$	33° 47' 33"
7	$17,4640 \cdot 10^{-3}$	30° 58' 39"
8	$19,4430 \cdot 10^{-3}$	28° 27' 28"
$\nu = 40$	$1,2546 \cdot 10^{-3}$	38° 9' 44"
$\nu = 50$	$1,3918 \cdot 10^{-3}$	36° 32' 25"

Emploi des spirales logarithmiques. — Il est possible de représenter les variations de l'intensité et de la tension dans le câble en circuit ouvert, telles qu'elles sont données par les équations 7 et 18 a.

$$\mathbf{E}_x = E_{0, \max} e^{-ax} e^{-ibx} \tag{21}$$

$$\mathbf{I}_x = \sqrt{m^2 + n^2} E_{0, \max} e^{-ax} e^{-i(bx - \beta)} \tag{22}$$

d'une façon encore plus simple que par les figures 23 a et b.

En effet, l'expression  $\mathbf{E}_x = E_{0, \max} e^{-ax} e^{-ibx}$  représente

un vecteur de longueur  $E_{0,\max} e^{-ax}$  faisant avec la directrice un angle  $bx$  sur la droite. Sa grandeur et sa position ne dépendent donc que de  $x$ . Si nous dessinons une série de ces vecteurs pour des valeurs croissantes de  $x$ , leurs extré-

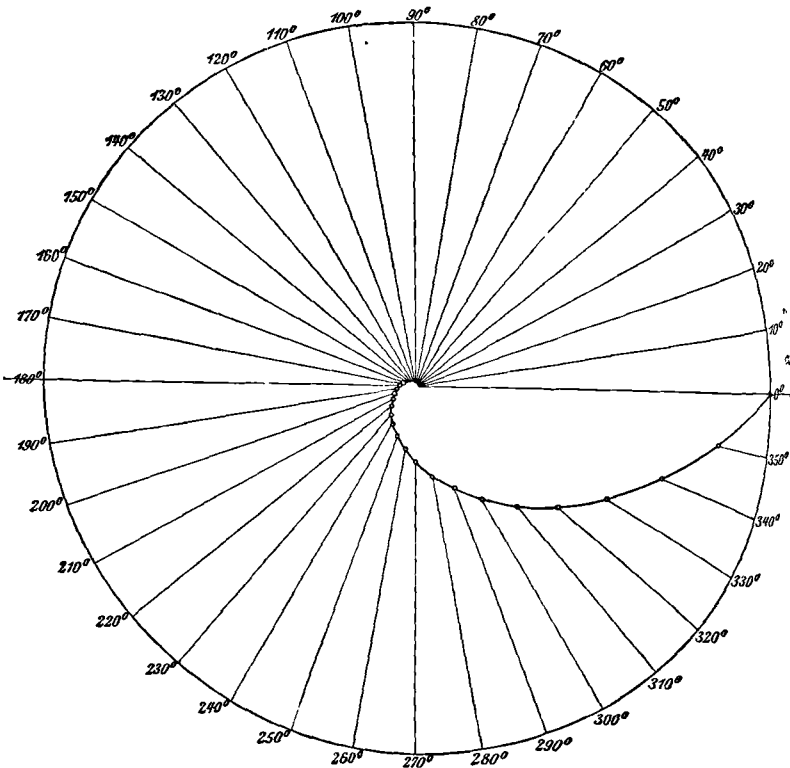


Fig. 25.

mités se trouveront sur une courbe qui représentera la variation des tensions dans le câble. Nous allons déterminer la forme de cette courbe.

En posant  $\alpha$  pour l'angle  $bx$  d'un vecteur et de la directrice, on a

$$x = \frac{\alpha}{b} \tag{23}$$

et 
$$e^{-ax} = e^{-\frac{a}{b} \alpha}.$$

En appelant  $r$  la longueur d'un des vecteurs, on a

$$r = E_{0, \max} e^{-\frac{a}{b} \alpha} \quad (24)$$

qui n'est autre que l'équation d'une spirale logarithmique en coordonnées polaires. La figure 23 représente la spirale, faite dans l'hypothèse  $a = b$  et qui a pour équation

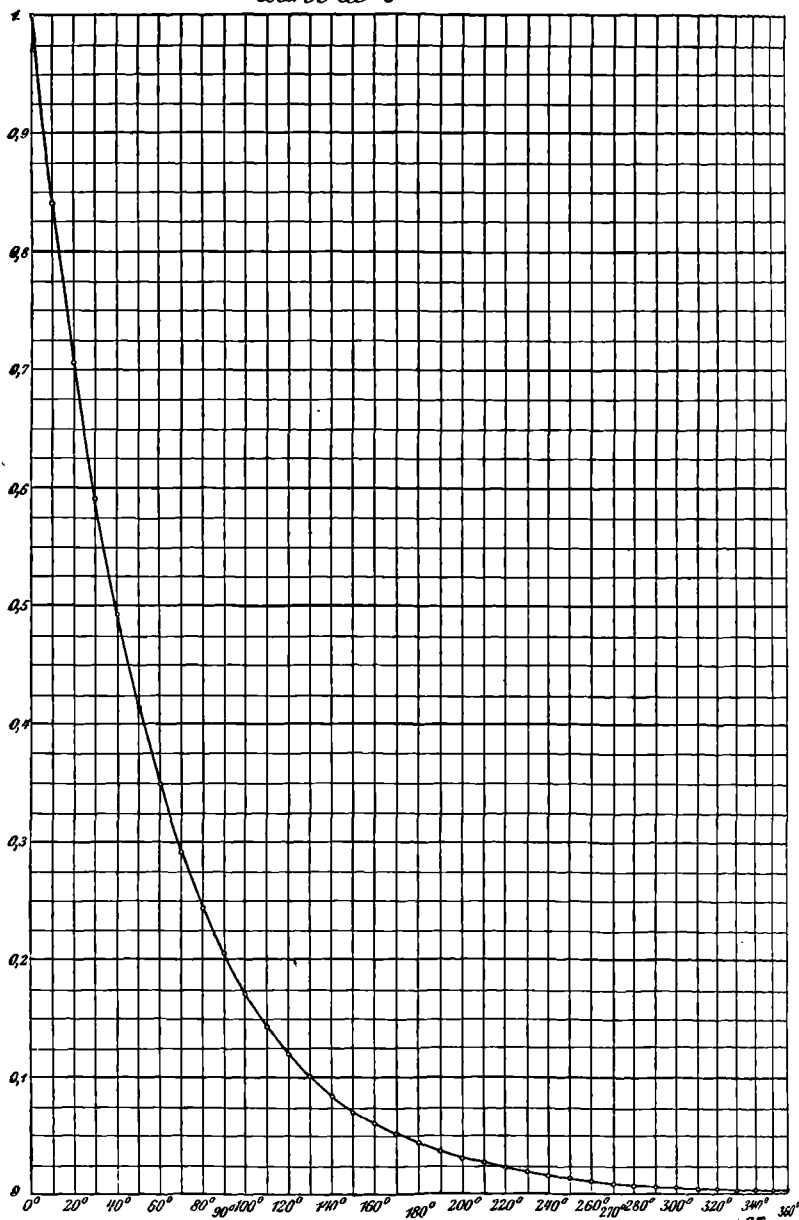
$$r = e^{-\alpha}.$$

Les rayons vecteurs ont été tracés au delà de la spirale jusqu'à une certaine circonférence, d'ailleurs arbitraire, tandis qu'à l'intérieur de la courbe, on les a supprimés pour plus de clarté.

Comme nous nous servons beaucoup de ces spirales dans la suite, nous donnons (fig. 26) une courbe en coordonnées rectangulaires qui représente  $e^{-ax}$  en fonction de  $ax$ ; afin de faciliter la lecture des angles de phase, l'axe des abscisses a été gradué directement en degrés. Comme  $2\pi$  correspond à  $360^\circ$ , la longueur  $ax$  représente  $\left(\frac{360 ax}{2\pi}\right)^\circ$ . Comme en général  $a$  est différent de  $b$  et que la phase n'est pas donnée par  $ax$ , mais par  $bx$ , il sera nécessaire dans chaque cas pratique de multiplier les abscisses par  $\frac{b}{a}$ ; c'est pourquoi la figure indique que  $1^\circ$  sur l'axe des abscisses représente un angle de phase de  $\left(\frac{b}{a}\right)^\circ$ .

En outre, il ne faut pas oublier, dans le cas où il est nécessaire d'indiquer la distance en kilomètres des différents points du câble à partir de son commencement, que c'est le facteur  $x$  du produit  $ax$  qui indique cette distance. Si donc  $ax$  correspond à un angle de  $\left(\frac{360 ax}{2\pi}\right)^\circ$ , il correspond à chaque kilomètre  $\left(\frac{360 a}{2\pi}\right)^\circ$  de l'abscisse; réciproquement un degré d'abscisse représente  $\left(\frac{2\pi}{360 a}\right)$  km.

*Courbe de  $e^{-ax}$*



1° D'abscisse  $\frac{2\pi}{360}$  Km à partir du commencement du câble;  
 1° d'abscisse  $= \left(\frac{b}{a}\right)^\circ$  d'angle de phase.

ERRATUM : lire  $\frac{2\pi}{360 a}$  km au lieu de  $\frac{2\pi}{360}$  km.

Fig. 26.

Un exemple numérique montrera l'emploi de la figure 26. Supposons qu'il s'agisse de dessiner pour  $b = 0,004$  et  $a = 0,003$  une spirale logarithmique répondant à l'équation

$$\mathbf{A} = 1\,000 e^{-ax} e^{-ibx} \quad (25)$$

et que l'on demande de tracer les vecteurs de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  de la différence de phase  $bx$ . Prenons par exemple le point de la courbe pour lequel le décalage vrai est  $bx = 40^\circ$ . Il suffira de chercher sur l'axe des abscisses le point coté  $ax = 40^\circ \frac{a}{b} = 30^\circ$ . La figure 26 donne comme ordonnée correspondante  $e^{-ax} = 0,592$ . Le vecteur cherché vaudra  $1\,000 \cdot 0,592 = 592$ , et il devra être porté à  $40^\circ$  à droite de la directrice. Tous les autres rayons vecteurs se trouveront de la même façon.

Si par exemple l'expression de  $\mathbf{A}$  était

$$\mathbf{A} = 1\,000 \cdot e^{-ax} e^{-ibx - i\gamma} = 1\,000 e^{-ax} e^{-i(bx + \gamma)}$$

le vecteur correspondant au point  $x$  du câble ne ferait pas avec la directrice l'angle  $bx$ , mais bien l'angle  $(bx + \gamma)$  vers la droite; le vecteur correspondant à  $x = 0$  ferait avec cette directrice un angle de  $-\gamma$ ; en un mot toute la spirale effectuerait une rotation de  $\gamma$  vers la droite. Nous marquerons dorénavant cette rotation d'une spirale en prolongeant le vecteur correspondant à  $x = 0$  un peu au delà des autres vecteurs. Et pour distinguer ce vecteur de la directrice, nous l'appellerons *vecteur origine*.

Plus généralement encore l'expression

$$\mathbf{A} = A \cdot e^{\pm ax} e^{i(\pm bx \pm \gamma)}$$

s'interprétera de la façon suivante :

$\pm \gamma$  signifiera que le vecteur origine est incliné de  $\gamma$  sur la directrice sur la gauche *ou* sur la droite.

$\pm bx$  que les angles  $bx$  doivent être comptés à partir du vecteur origine vers la gauche *ou* vers la droite.

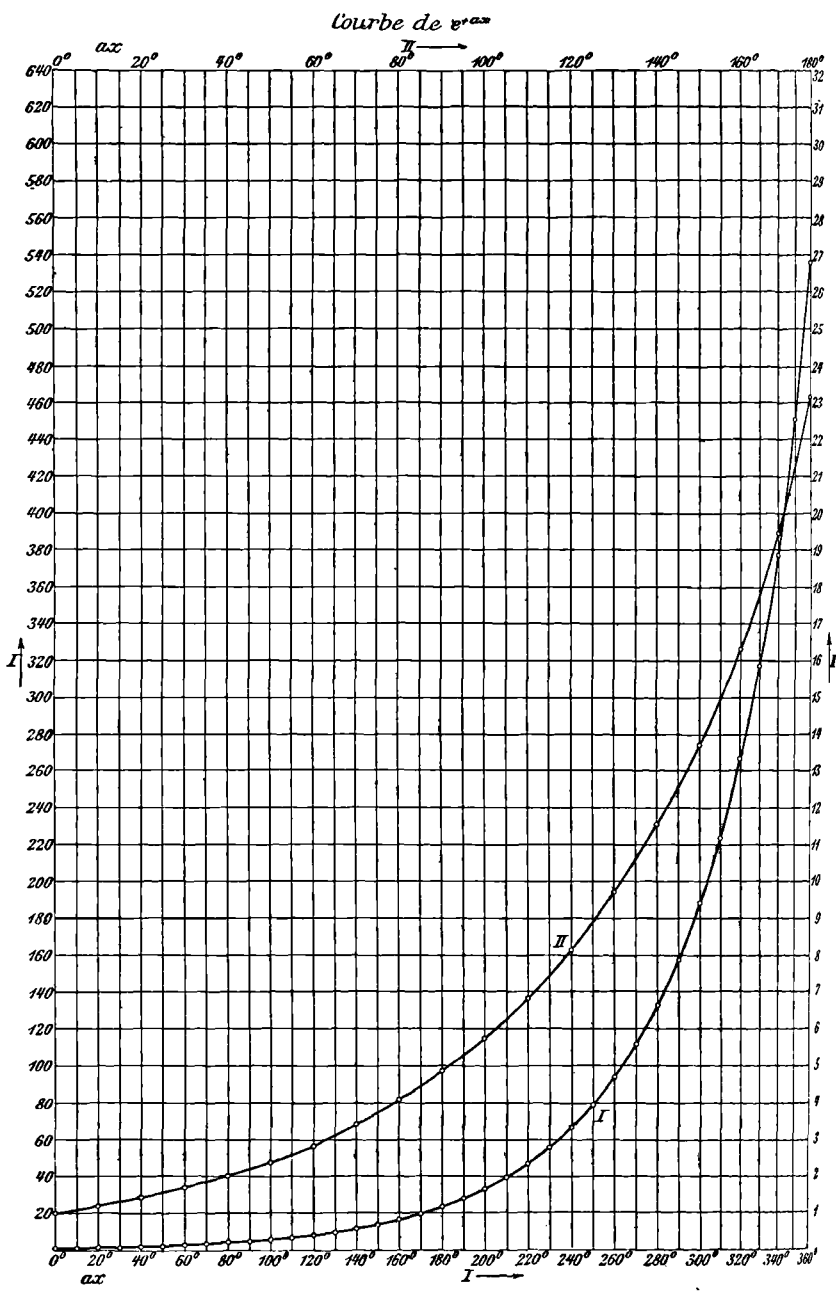


Fig. 27.

TABLEAU IX

$ax^0$	$e^{+ax}$	$e^{-ax}$	$ax^0$	$e^{+ax}$	$e^{-ax}$	$ax^0$	$e^{+ax}$	$e^{-ax}$
0	1,0000	1,00000	120	8,1204	0,12315	250	78,506	0,01274
5	1,0912	0,91643	130	9,6690	0,10342	260	93,498	0,01070
10	1,1907	0,83985	140	11,513	0,08686	270	111,30	0,00898
20	1,4177	0,70535	150	13,706	0,07295	280	132,54	0,00755
30	1,6881	0,59239	160	16,323	0,06126	290	157,83	0,00634
40	2,0099	0,49752	170	19,436	0,05145	300	188,32	0,00532
50	2,3933	0,41784	180	23,142	0,04321	310	223,72	0,00447
60	2,8497	0,35092	190	27,556	0,03629	320	266,44	0,00375
70	3,3931	0,29472	200	32,802	0,03049	330	317,18	0,00315
80	4,0401	0,24752	210	39,068	0,02560	340	377,75	0,00265
90	4,8103	0,20788	220	46,505	0,02150	350	450,71	0,00222
100	5,7277	0,17459	230	55,386	0,01806	360	535,49	0,00187
110	6,8200	0,14663	240	65,948	0,01516			

$\pm ax$  que les vecteurs de la spirale augmentent *ou* diminuent.

La figure 27 représente la courbe  $e^{+ax}$  en fonction de  $ax$ , courbe dont nous aurons à nous servir plus loin. Remarquons que pour la courbe I de cette dernière figure, l'échelle des abscisses se trouve en bas et celle des ordonnées à gauche, tandis que pour la courbe II l'échelle des abscisses est en haut et celle des ordonnées à droite. La courbe II donne comme on le reconnaîtra facilement les valeurs initiales de la courbe I à l'échelle de 20 pour un. De plus, le tableau IX indique les valeurs numériques qui ont servi à l'établissement des figures 26 et 27.

Ces deux figures peuvent servir à des études générales sur les lignes de grande longueur, même aux fréquences élevées. Dans la pratique on n'a guère que de petites valeurs de  $ax$ . Pour 50 périodes, par exemple, la ligne aérienne Luffen-Francfort donne  $a = 1,172 \cdot 10^{-3}$  par km (tableau VII); 100 km de cette ligne font  $ax = 0,1172$  soit  $6,72^\circ$ . Les câbles du même tableau donnent pour  $a$  des valeurs comprises entre  $1,6584 \cdot 10^{-3}$  et  $5,8349 \cdot 10^{-3}$ , de sorte que  $ax$  varie entre  $9,65^\circ$  et  $33,4^\circ$  par 100 kilomètres.

---



## CHAPITRE XI

### LE CABLE DE LONGUEUR FINIE EN CIRCUIT OUVERT

**Équations générales.** — Nous allons considérer maintenant le cas pratique d'un câble de longueur finie  $l$  relié à un alternateur de tension

$$E_{0,t} = E_{0,\max} \sin \omega t, \quad \text{soit } \mathbf{E}_0 = E_{0,\max}.$$

Les équations III de la page 64 sont ici applicables. Les voici :

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}x} \quad (1)$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}x}) \quad (2)$$

dans lesquelles  $x$  est compté à partir du commencement du câble.

Les constantes  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  sont données par les conditions initiales  $\mathbf{E}_0 = E_{0,\max}$  pour  $x = 0$  et  $\mathbf{I}_x = 0$  pour  $x = l$ , puisque pour les raisons déjà citées plus haut, le câble en circuit ouvert est en son extrémité le siège d'un courant nul. On obtient par conséquent

$$E_{0,\max} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

et

$$0 = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{-\mathbf{v}l} - \mathbf{c}_2 e^{+\mathbf{v}l})$$

d'où l'on tire

$$\mathbf{c}_1 = \frac{E_{0,\max}}{1 + e^{-2\mathbf{v}l}} \quad \mathbf{c}_2 = \frac{E_{0,\max}}{1 + e^{+2\mathbf{v}l}}.$$

Comme dans ces équations  $\mathbf{v} = a + bi$ , les constantes  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  sont elles-mêmes des quantités complexes.

On obtient pour  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  des valeurs plus simples en comptant  $x$  à partir de l'*extrémité* du câble.

On a alors d'après les équations I, page 63

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \mathbf{c}_1 e^{+\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{-\mathbf{v}x} \\ \mathbf{I}_x &= \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{+\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{-\mathbf{v}x}). \end{aligned} \quad (3)$$

Supposons maintenant que le câble doive posséder en son extrémité (c'est-à-dire au point  $x = 0$ ) la tension

$$E_{0,t} = E_{0,\max} \sin \omega t \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}_0 = E_{0,\max}.$$

Nous avons alors, maintenant que pour  $x = 0$ ,  $\mathbf{I}_x = 0$

$$E_{0,\max} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

et

$$0 = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)$$

d'où enfin

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \frac{E_{0,\max}}{2}.$$

Les équations qui donnent les variations de la tension et de l'intensité sont donc

$$\mathbf{E}_x = \frac{E_{0,\max}}{2} (e^{+\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}) \quad (4)$$

et

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} \frac{E_{0,\max}}{2} (e^{+\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}). \quad (5)$$

Comme dans l'équation 16 de la page 107 nous posons :

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = m + ni$$

ou sous la forme principale (page 6)

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = \sqrt{m^2 + n^2} e^{i \arctg \frac{n}{m}},$$

ou bien encore en introduisant comme précédemment

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \beta.$$

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = \sqrt{m^2 + n^2} e^{i\beta}.$$

$\mathbf{I}_x$  prend donc finalement la forme

$$\mathbf{I}_x = \frac{E_{0, \max}}{2} \sqrt{m^2 + n^2} e^{i\beta} (e^{+\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}). \quad (6)$$

Une autre de forme de  $\mathbf{I}_x$  a une certaine valeur pratique pour les applications que nous ferons plus tard. En posant

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R} \mathbf{K}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}} = \mathbf{u} \quad (7)$$

nous obtenons

$$\mathbf{I}_x = \frac{1}{\mathbf{u}} \frac{E_{0, \max}}{2} (e^{+\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}),$$

équation dans laquelle

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-i\beta}. \quad (8)$$

$\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  sont donc composés de deux addendes, représentant chacun une onde passant dans le câble. L'expression  $\frac{E_{0, \max}}{2} e^{-\mathbf{v}x}$  est identique à l'équation 5, page 100, au facteur  $\frac{1}{2}$  près; elle représente donc une onde sinusoïdale qui, en marchant dans le sens des  $x$  croissants c'est-à-dire de l'extrémité du câble vers le commencement, est à amplitudes décroissantes et à décalage croissant, comme nous l'avons vu dans le câble de longueur infinie en circuit ouvert (pages 100 à 102).

L'expression

$$\frac{E_{0, \max}}{2} e^{+\mathbf{v}x} = \frac{E_{0, \max}}{2} e^{+ax} e^{+ibx}$$

qui sous la forme réelle s'écrit

$$\frac{E_{0, \max}}{2} \cdot e^{+ax} \sin(\omega t + bx)$$

indique une onde à amplitudes et à avances de phase croissantes, quand on la suit dans le sens des  $x$  croissants. Si l'on considère cette onde dans le sens inverse, en allant du commencement du câble vers la fin, c'est-à-dire si on remplace  $x$  par  $-x$ , les amplitudes décroissent et les décalages croissent, exactement de la même façon que dans l'onde partant de la fin du câble.

L'onde qui arrive à la fin du câble, ainsi que celle qui en revient, possèdent toutes les deux en cette fin du câble l'amplitude  $\frac{E_{0, \max}}{2}$ . L'onde qui revient peut être considérée comme l'onde réfléchie de celle qui va du commencement à la fin du câble. On peut dire aussi : l'alternateur fournit une onde de tension qui entre dans le câble, se réfléchit à son extrémité et revient toujours plus amortie à son point de départ. La tension en chaque point du câble est la résultante de la superposition de ces deux ondes.

L'expression  $\frac{v}{R} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{-vx}$  qui figure dans l'équation 5 est identique, au facteur  $\frac{1}{2}$  près, à l'équation 6 de la page 100. Elle représente donc une onde qui s'amortit en marchant dans le sens des  $x$  croissants (c'est-à-dire de la fin du câble vers le commencement) et possède une différence de phase constante avec l'onde de tension correspondante. L'autre addende  $\frac{v}{R} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{+vx}$  représente pour les raisons déjà énoncées à l'occasion de l'examen du premier terme de l'équation des tensions (équation 4), une onde s'amortissant du commencement du câble à la fin. Le courant est par conséquent composé, lui aussi, d'une onde fournie par le générateur et d'une onde réfléchie par l'extrémité du câble.

Il est peut-être nécessaire de donner une explication du fait que d'après l'équation 5 les deux ondes de l'intensité se soustraient, tandis que d'après l'équation 4 les deux ondes de la tension s'additionnent.

La soustraction des ondes de courant est évidente puisque le courant électrique est un déplacement des charges électriques. L'addition des ondes de tension s'explique de la façon suivante : la différence de potentiel entre deux points représente l'énergie qu'une unité de masse électrique transforme en travail en se déplaçant d'un point à un autre ; c'est *la somme* de ces différences de potentiel pour les deux ondes qui donne la tension totale. Si enfin on considère simultanément l'intensité et la tension, il est facile de reconnaître que leur manière d'être différente n'implique aucune contradiction. Le travail des masses électriques dans leur mouvement à travers les éléments du câble se fait pour ainsi dire aux frais du facteur de l'énergie désigné sous le nom de tension ; la force qui met les masses électriques en mouvement, et qui les pousse dans sa propre direction agit toujours dans le sens de l'énergie décroissante. Si donc les masses électriques se déplacent en sens contraires dans les deux ondes, directe et réfléchie, du courant, cela signifie tout simplement que le *sens* dans lequel l'énergie *décroit* est différent dans les deux cas, mais non pas que le *signe* de l'énergie elle-même est différent. En termes plus brefs, les décroissances d'énergie sont de sens différents, tandis que les énergies elles-mêmes sont de même sens. Il faut reconnaître qu'il est plus difficile de se faire une représentation aussi intuitive de la circulation d'énergie que de celle des masses électriques.

**Emploi des spirales logarithmiques.** — Les deux ondes sinusoïdales qui composent  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  peuvent être réunies en une onde résultante, puisqu'elles ont même période. On peut donc dire que l'intensité et la tension varient sinusoïdalement en tous les points du câble, mais avec des amplitudes et des phases différentes.

1° Nous allons maintenant déterminer la variation des

amplitudes et des phases des ondes résultantes. Prenons d'abord le cas simple où  $g = 0$  et  $L = 0$ , c'est-à-dire où la ligne ne possède que de la capacité et de la résistance. Comme dans ce cas  $a = b$  (et par conséquent  $\mathbf{v} = a(1 + i)$ ) et  $\mathbf{R} = r$ , les équations 4 et 5 prennent pour l'intensité et la tension la forme

$$\mathbf{E}_x = \frac{E_{0, \max}}{2} e^{+ax} e^{+iax} + \frac{E_{0, \max}}{2} e^{-ax} e^{-iax} \quad (9)$$

et

$$\mathbf{I}_x = \frac{a}{r} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{+ax} (1 + i) e^{+iax} - \frac{a}{r} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{-ax} (1 + i) e^{-iax}.$$

La façon la plus simple d'obtenir les amplitudes et les phases de  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  est de représenter chacun des addendes de la somme par une spirale logarithmique. Il suffit pour cela de fondre les quantités  $(1 + i) e^{+iax}$  et  $(1 + i) e^{-iax}$  qui figurent dans l'expression de  $\mathbf{I}_x$  chacune en une seule expression de la forme  $e^{\pm i\alpha}$ . D'après les explications de la page 105, on sait que quand on fait le produit par  $(1 + i)$  d'un vecteur de longueur 1, incliné de  $(ax)^\circ$  vers la droite de la directrice, on obtient un vecteur de longueur  $\sqrt{2}$  avançant de  $45^\circ$  sur le premier.

L'explication donnée page 105 peut se répéter littéralement dans la multiplication de  $e^{iax}$  par  $(1 + i)$ ; en posant comme précédemment  $\frac{a\sqrt{2}}{r} = \sqrt{\frac{\kappa}{r}}$  on arrive à

$$\mathbf{I}_x = \sqrt{\frac{\kappa}{r}} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{+ax} e^{+iax + i45^\circ} - \sqrt{\frac{\kappa}{r}} \frac{E_{0, \max}}{2} e^{-ax} e^{-iax + i.45^\circ}. \quad (10)$$

Si maintenant nous nous reportons aux explications données page 117 à la suite de la formule générale de  $\mathbf{A}$ , nous trouvons que

$$e^{+ax} e^{+iax}$$

représente une spirale dont le vecteur origine coïncide avec la directrice et dont les vecteurs tournent vers la gauche en croissant, tandis que

$$e^{-ax} e^{+iax}$$

représente une spirale de même origine, mais dont les vecteurs tournent vers la droite en décroissant ;  
enfin

$$e^{+ax} e^{+iax + i45^\circ}$$

représentera une spirale dont le vecteur origine est à  $45^\circ$  de la directrice, vers la gauche, et dont les vecteurs tournent vers la gauche en croissant tandis que

$$e^{-ax} e^{-iax + i.45^\circ}.$$

sera une spirale de même origine et dont les vecteurs tournent à droite en décroissant.

Ces spirales sont représentées dans les figures 28 a et 29 a des planches IV et V. Les angles des figures 28 et 29 donnent  $ax$  en degrés ; les valeurs correspondantes de  $e^{+ax}$  et  $e^{-ax}$  sont empruntées au tableau IX.

L'équation 10 indique de former la différence des vecteurs correspondant aux valeurs  $(+ax)$  et  $(-ax)$  ; l'équation 9 pour les tensions indique au contraire qu'il faut former la somme correspondante.

Nous obtenons les *différences* en suivant la figure 8 a, c'est-à-dire en joignant les extrémités des vecteurs à soustraire et en munissant la ligne ainsi obtenue d'une flèche dans le sens du soustrahende (courbe  $e^{-ax}$ ). La courbe I de la figure 28 a est la première des spirales de l'équation 10, la courbe II la deuxième. On n'a pas dessiné les vecteurs partant du centre du cercle ; on s'est borné à joindre directement les points des spirales qui en sont les extrémités. Les droites ainsi obtenues donnent par leur longueur la grandeur des vecteurs de l'intensité, au facteur  $\sqrt{\frac{x}{r}} \frac{E_{0, \max}}{2}$  près, et par

leurs angles avec la directrice le décalage sur la tension à l'extrémité du câble.

Pour former les *sommes* de vecteurs, il faut suivre la figure 8 *b* avec la petite modification suivante : on prolonge le vecteur *B* de sa propre longueur au delà de l'origine des coordonnées ; en joignant l'extrémité de ce prolongement avec l'extrémité de *A*, on obtient une ligne qui donne le vecteur *C* en grandeur et en direction ; cette façon de faire l'addition graphique réunit les avantages des figures 8 *a* et 8 *b*. La figure ne se compose que de trois droites *A*, *B* et *C* et les vecteurs à additionner *A* et *B* partent tous deux de l'origine.

La figure 29 *a* montre une application de ce procédé. I est la première spirale de l'équation 9, II la deuxième spirale, tandis que II' a été trouvé en prolongeant les vecteurs de II de leur propre longueur au delà de l'origine ; nous désignerons cette courbe II' sous le nom de courbe inverse de II. — En joignant les points de I et de II' qui correspondent aux mêmes valeurs de  $\alpha x$ , nous obtenons en grandeur et en phase les tensions aux différents points du câble, au facteur  $\frac{E_{0, \max}}{2}$  près. Afin de rendre les courbes plus générales, on n'a pas tenu compte des facteurs  $\frac{E_{0, \max}}{2}$  pour la tension et  $\sqrt{\frac{\alpha}{r}} \frac{E_{0, \max}}{2}$  pour l'intensité ; de la sorte elles peuvent servir pour tous les cas qui peuvent se présenter ; il suffit de connaître  $E_{0, \max}$ ,  $r$  et  $\alpha$ . Afin de simplifier le langage nous désignerons dorénavant les vecteurs non multipliés donnés par ces courbes, sous le nom de vecteurs *réduits* ; cela revient à supposer que les facteurs supprimés valent 1.

Afin de représenter encore plus clairement ces résultats, les figures 28 *b* et 29 *b* ont été dessinées en portant à partir d'une origine commune les vecteurs réduits du courant et de la tension ; les angles  $\alpha x$  correspondants aux vecteurs ont été portés sur ces figures, qui donnent une image



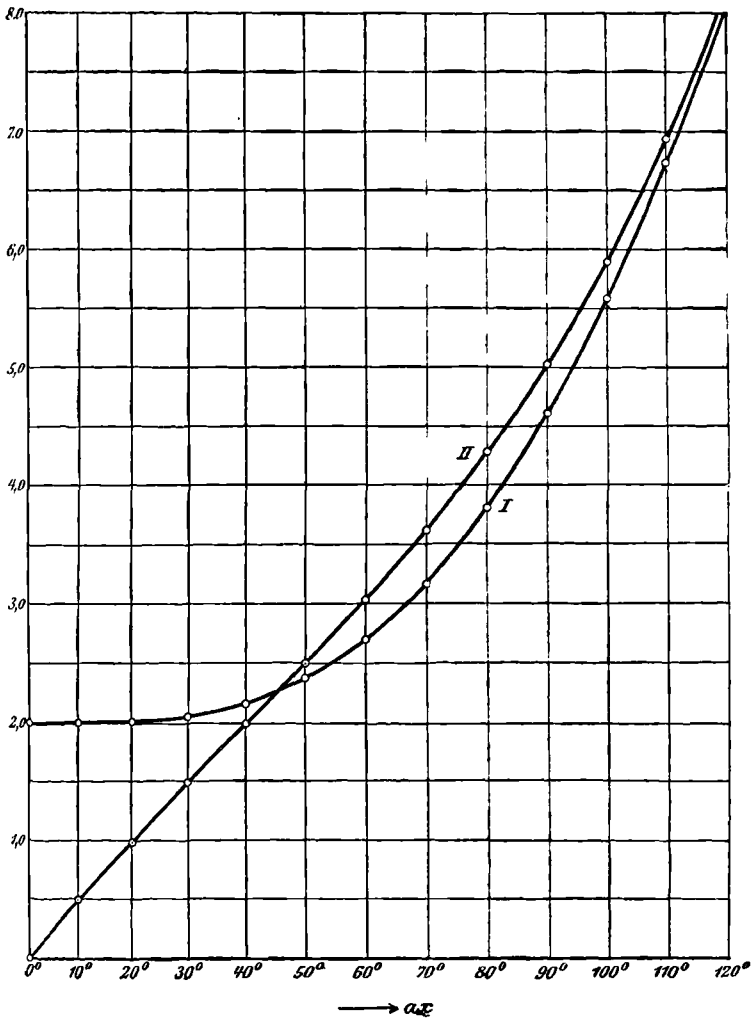


Fig 30 a.

intuitive de la phase et de la grandeur de la tension et de l'intensité en chacun des points du câble.

La figure 30 a montre les variations de la tension

130 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 (courbe I) et de l'intensité (courbe II) que l'on rencontrerait en se déplaçant le long du câble ; les vecteurs réduits de la tension et de l'intensité ont été portés cette fois

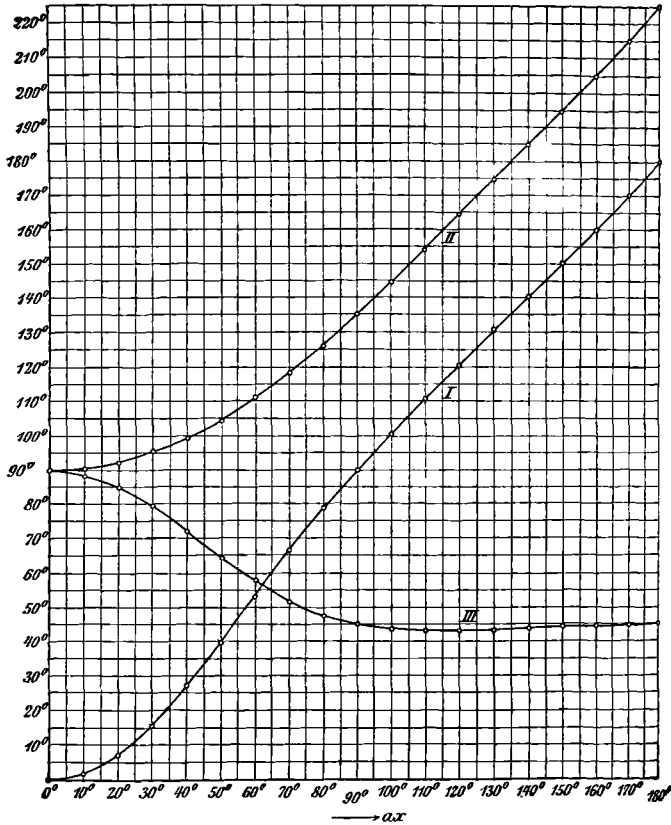


Fig. 30 b.

en coordonnées rectangulaires.

La figure 30 b représente de la même façon les décalages de  $E_{x,t}$  (courbe I) et de  $I_{x,t}$  (courbe II) sur la tension  $E_{0,t}$  qui règne à l'extrémité du câble. La courbe III de la figure 30 b, représente les *différences* des décalages

de  $E_{x,t}$  et de  $I_{x,t}$  : c'est donc la courbe de la variation des différences de phases entre la tension et le courant le long du câble <sup>1</sup>.

Toutes les courbes que nous venons de tracer sont applicables à n'importe quel câble, quelles que soient sa résistance et sa capacité. Elles peuvent se spécialiser pour chaque cas particulier en utilisant la note placée au bas de la figure 26, qui dit que chaque point de l'axe des abscisses représente un point du câble dont la distance à l'extrémité est  $\frac{2\pi}{360 a}$  km., soit  $\frac{0,017453}{a}$  km.

Les courbes de différences de phase de la figure 30 *b* sont alors immédiatement applicables, indépendamment des valeurs absolues de la tension et de l'intensité. Pour obtenir ces valeurs elles-mêmes en un point quelconque du câble, il suffit de multiplier les ordonnées de la courbe I de la figure 30 *a* par  $\frac{E_0}{2}$  et celles de la courbe II par  $\sqrt{\frac{x}{r}} \frac{E_0}{2}$ .

Dans le câble cité page 110 par exemple, pour lequel  $a = 0,0034857$  et  $\sqrt{\frac{x}{r}} = 0,01082$ , chaque degré des abscisses de la figure 30 *a* représenterait 5 kilomètres. Dans le cas d'une tension de 1 000 volts à la fin du câble, il faudrait multiplier les ordonnées de la courbe I par 500, celles de la courbe II par  $0,01082 \cdot 500$ , soit 5,41.

Si nous supposons le câble coupé en un point quelconque, d'abscisse  $x$ , puis relié par cette coupure à l'alternateur,  $x$  représente la longueur totale du câble, et les ordonnées des figures 30 qui correspondent à une abscisse quelconque  $ax = al$  donnent l'état électrique au commencement du câble, en d'autres termes la charge imposée au générateur.

2° Si enfin nous prenons le cas où la ligne possède de la

<sup>1</sup> Comme la construction indirecte basée sur les spirales entraîne naturellement de petites inexactitudes, les courbes des figures 30 *a* et 30 *b* ont été calculées directement par les formules indiquées plus loin pages 133 et 134.

self-induction en même temps qu'un certain courant dérivé dans l'isolant, nous nous trouvons amenés à poser  $\mathbf{v} = a + bi$  dans les équations qui donnent  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  (p. 122);  $a$  et  $b$  ont les valeurs données par les équations 16 et 17 de la page 62. On a alors

$$\mathbf{E}_x = \frac{E_{0, \max}}{2} (e^{+ax} e^{+ibx} + e^{-ax} \cdot e^{-ibx}) \quad (11)$$

et en amenant l'expression  $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}}$  de l'équation 5 à la forme  $m + ni$ , comme on l'a fait dans l'équation 18 *a*, page 108 :

$$\mathbf{I}_x = \sqrt{m^2 + n^2} \frac{E_{0, \max}}{2} \left[ e^{+ax} e^{+i\left(bx + \operatorname{arctg} \frac{n}{m}\right)} - e^{-ax} e^{-i\left(bx - \operatorname{arctg} \frac{n}{m}\right)} \right] \quad (12)$$

équation dans laquelle  $\sqrt{m^2 + n^2}$  et  $\operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m}$  ont les valeurs données par les équations 19 et 20, page 109.

L'amplitude et la phase de l'intensité en chaque point du câble peuvent être trouvées graphiquement en dessinant quatre spirales logarithmiques, d'une façon tout à fait analogue à ce qui a été fait pour les équations 9 et 10. On remarquera que ces dernières se distinguent des équations 11 et 12 en ce que pour  $\mathbf{E}_x$  nous avons ici  $e^{+ibr}$  et  $e^{-ibx}$  tandis que dans les premières, nous avons  $e^{+ia}$  et  $e^{-iax}$ .

Les nouvelles spirales logarithmiques de  $\mathbf{E}_x$  diffèrent par conséquent des anciennes en ce que les vecteurs  $e^{+ax}$  et  $e^{-ax}$  doivent sans changer de longueur être portés sous les angles  $(bx)$  et  $(-bx)$  au lieu de  $(ax)$  et  $(-ax)$ . Ce changement dans les angles modifie la position et les longueurs des lignes de jonction des points correspondants; il semble à première vue que ce simple changement n'ait pas grande importance et qu'il soit facile d'en voir à l'avance les conséquences. Il n'en est pas ainsi : le caractère des spirales est complètement modifié. Ceci nous amène

à constater que la représentation par spirales ne permet pas de prévoir facilement l'influence de la variation de certaines constantes du câble sur sa manière d'être. Il vaut mieux, dans ce cas, déterminer directement les amplitudes et les phases des tensions et des intensités par des formules mathématiques, dont la discussion est plus facile.

**Variation de la tension et de l'intensité le long du câble.**

— Nous obtenons les amplitudes résultantes  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$  en amenant les symboles  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  à la forme principale  $\mathbf{A} = Ae^{i\alpha}$ . Nous prenons pour cela les équations 11 et 12, dans lesquelles nous développons par la formule connue les termes qui contiennent  $i$  en exposant. Nous écrivons  $\mathbf{A}$  sous la forme  $\mathbf{A} = p + qi$ , puis nous transformons cette forme accessoire en la forme principale en posant l'amplitude  $A = \sqrt{p^2 + q^2}$  d'après le théorème 2 de la page 26; l'angle de phase  $\alpha$  est donné par  $\text{tg } \alpha = \frac{q}{p}$ . On obtient alors pour l'amplitude de la tension globale en n'importe quel point du câble

$$E_{x, \max} = \frac{E_{0, \max}}{2} \cdot \sqrt{e^{+2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}, \quad (13)$$

et pour le décalage entre cette tension et la tension à la fin du câble

$$\text{tg de l' } \sphericalangle (E_{x, \max}, E_{0, \max}) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \text{tg } bx; \quad (14)$$

puis enfin l'amplitude de l'intensité

$$I_{x, \max} = \sqrt{m^2 + n^2} \frac{E_{0, \max}}{2} \sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}. \quad (15)$$

Le décalage de l'intensité sur la tension à la fin du câble s'exprime par

$$\begin{aligned} & \text{tg de l' } \sphericalangle (I_{x, \max}, E_{0, \max}) \\ &= \frac{e^{ax} \sin (bx + \beta) + e^{-ax} \sin (bx - \beta)}{e^{ax} \cos (bx + \beta) - e^{-ax} \cos (bx - \beta)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Avant de passer à la discussion des formules qui donnent la tension et l'intensité, nous allons les comparer avec les formes sous lesquelles elles se présentent dans les équations 4 et 6, et en tirer quelques relations qui nous serviront plus tard.

Posons dans l'équation 4

$$\frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}) = ce^{i\gamma};$$

on en tire immédiatement par comparaison avec les équations 13 et 14

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx} \quad (17)$$

et

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \operatorname{tg} bx. \quad (18)$$

Si nous posons de même dans l'équation 6

$$\frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}) = de^{i\delta},$$

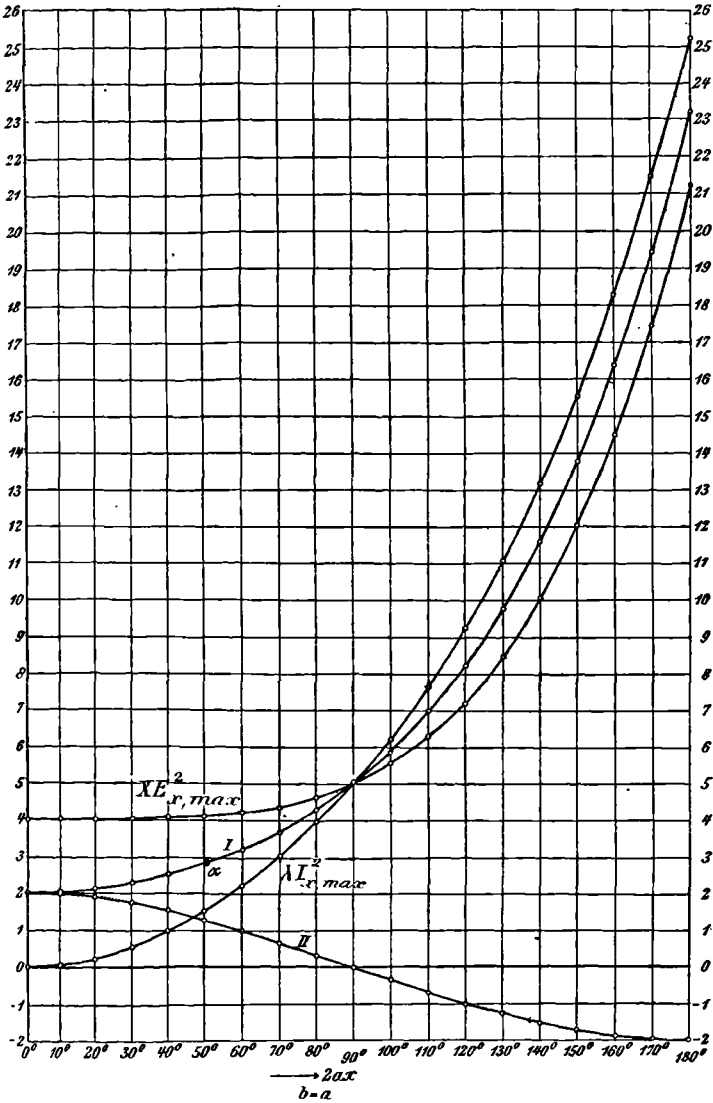
la comparaison avec les équations 15 et 16 montre que

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx} \quad (19)$$

et

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{e^{ax} \sin (bx + \beta) + e^{-ax} \sin (bx - \beta)}{e^{ax} \cos (bx + \beta) - e^{-ax} \cos (bx - \beta)} - \beta. \quad (20)$$

Les équations 13 et 15 donnent immédiatement la variation de  $E_{x, \max}$  et de  $I_{r, \max}$  le long du câble. Ce sont les expressions sous le signe radical qui donnent l'allure générale de cette variation et c'est leur représentation graphique qui nous en montrera le mieux la marche. Pour cela nous poserons tout d'abord  $a = b$  comme c'est le cas par exemple dans les câbles dépourvus de self et sans courant dérivé dans l'isolant; dans ce cas les radicaux ne sont



ERRATUM : lire  $\chi E_{x,max}^2$  au lieu de  $XE_{x,max}^2$ .

Fig. 31.

plus fonction que de  $2 ax$ , et comme tels peuvent être dessinés sans ambiguïté (fig. 31).

La figure montre tout d'abord la courbe  $[e^{+2ax} + e^{-2ax}]$  en fonction de  $2 ax$ , calculée au moyen du tableau IX (courbe I); la courbe II est celle de la variation de  $(+ 2 \cos 2 ax)$ . La somme des ordonnées de I et II est proportionnelle à  $E^2_{x, \max}$  d'après l'équation 13; la différence des ordonnées est proportionnelle à  $I^2_{x, \max}$  (éq. 15). Ces courbes ont été portées dans la figure 31. Elles sont désignées par  $\chi E^2_{x, \max}$  et par  $\lambda I^2_{x, \max}$ ,  $\chi$  et  $\lambda$  étant les facteurs de proportionnalité.

$\chi E^2_{x, \max}$  et  $\lambda I^2_{x, \max}$  peuvent servir à donner une idée de la variation de  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$  eux-mêmes, tout au moins en ce sens que la variation des carrés est corrélative de la variation des valeurs elles-mêmes.

Le tableau X donne les valeurs des radicaux

$$\sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} \pm 2 \cos 2 ax}$$

dans l'intervalle  $2 ax = 0$  à  $2 ax = 360^\circ$ . Ces valeurs qui d'après les équations 13 et 15 représentent la variation de la tension et de l'intensité le long du câble en circuit ouvert pour lequel  $b = a$ , aux facteurs  $\frac{1}{2} E_{o, \max}$  et  $\frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2} E_{o, \max}$  près, ont déjà été dessinées dans la figure 30 a en fonction de  $ax$ .

Ce même tableau X contient en outre les angles  $(E_{x, \max}, E_{o, \max})$  et  $(I_{x, \max}, E_{o, \max})$  d'après les équations 14 et 16, toujours dans l'hypothèse  $b = a$ , ainsi que la différence angulaire  $(I_{x, \max}, E_{x, \max})$  qui indique le décalage entre le courant et la tension en un point quelconque du câble. La figure 30 b contient ces angles.

**Maxima et minima du courant et de la tension.** — Comme l'indiquent les figures 30 a et 31  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$  augmentent d'une façon continue de l'extrémité vers le commencement



TABIEAU X

$2ax^0$	$\sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{1 + 2 \cos 2ax}}$	$\sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{-2 \cos 2ax}}$	$\sphericalangle (E_x, \max, E_0, \max)$	$\sphericalangle (I_x, \max, E_0, \max)$	$\sphericalangle (E_{p_x}, \max, I_x, \max)$
0	2,0000	0,0000	0°	90°	90°
10	0,2469	0,2469	1° 43'	90° 33'	88° 50'
20	2,0006	0,4936	3° 00'	90° 17'	85° 40'
30	2,0033	0,7411	6° 58'	95° 14'	79° 43'
40	2,0093	0,9864	15° 31'	99° 47'	72° 23'
50	2,0240	1,2351	39° 57'	104° 29'	64° 32'
60	2,0496	1,4834	53° 31'	110° 44'	57° 43'
70	2,0909	1,7332	66° 35'	118°	51° 23'
80	2,1520	1,9854	78° 44'	126° 08'	47° 24'
90	2,2402	2,2402	90°	135°	43°
100	2,3569	2,4999	100° 37'	144° 23'	43° 48'
110	2,5065	2,7660	110° 48'	154° 15'	43° 25'
120	2,6914	3,0403	120° 46'	164° 15'	43° 59'
130	2,9132	3,3254	130° 36'	174° 24'	43° 48'
140	3,1730	3,6238	140° 26'	184° 35'	44° 09'
150	3,4709	3,9384	150° 16'	194° 46'	44° 30'
160	3,8083	4,2737	160° 08'	204° 53'	44° 43'
170	4,1854	4,6322	170° 03'	214° 57'	44° 54'
180	4,6026	5,0181	180°	225°	45°
200	5,3636	5,8919			
220	6,7078	6,9324			
240	8,0600	8,1832			
260	9,6520	9,6880			
280	11,5979	11,5979			
300	13,7597	13,6868			
320	16,3701	16,2762			
340	19,4845	19,3875			
360	23,1842	23,0974			

d'un câble en circuit ouvert pour lequel  $g = 0$  et  $L = 0$ ; ils diminuent donc d'une façon continue quand on suit le sens de la transmission de l'énergie. Cette variation continue de  $E_{x, \max}$  et de  $I_{x, \max}$  n'est pas évidente par elle-même; elle n'est rendue possible que par le fait que la courbe  $(2 \cos 2ax)$  décroît plus lentement que la courbe  $(e^{2ax} + e^{-2ax})$  ne croît aux points où la première de ces courbes doit être soustraite ou additionnée à la seconde.

Le moyen le plus simple de vérifier s'il est possible que dans certaines circonstances les courbes  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$  ne croissent pas d'une façon continue, mais suivent une marche ondulatoire, est de former les dérivées des fonctions qui représentent  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$ . Dérivons par exemple

$$\chi E_{x, \max}^2 = e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx = y,$$

nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = 2a (e^{2ax} - e^{-2ax}) - 4b \sin 2bx$$

et nous constatons que pour n'importe quelle valeur de  $\frac{b}{a}$ .

quand  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx}$  est nul aussi.

Il en résulte que pour  $x = 0$  la courbe  $E_{x, \max}^2$  commence toujours par une longueur infiniment petite parallèle à l'axe des abscisses. En d'autres termes, le dernier élément d'un câble en circuit ouvert a une tension constante, quelles que soient ses autres constantes électriques. Pour juger de la variation de la tension dans l'élément voisin, il suffit de former la dérivée seconde  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , comme nous allons le voir tout de suite par les figures 32a, 32b et 32c.

Si par exemple la tension doit décroître depuis l'avant-dernier élément du câble pour remonter ensuite, il suffit que la dérivée de la fonction  $y$  (fig. 32 a) devienne négative

immédiatement après sa valeur initiale  $\frac{dy}{dx} = 0$  pour remonter ensuite, dans le domaine positif (fig. 32 b.)

C'est au point d'inflexion  $a$  de la courbe  $y$  que la courbe

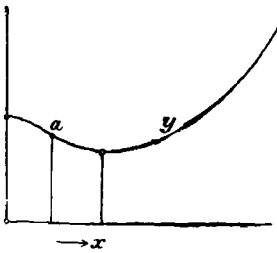


Fig. 32 a.

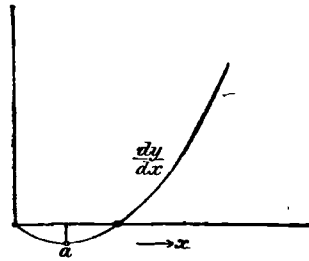


Fig. 32 b.

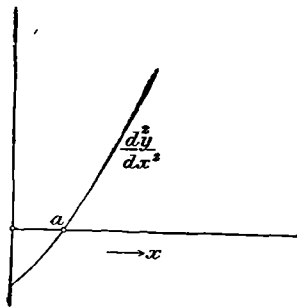
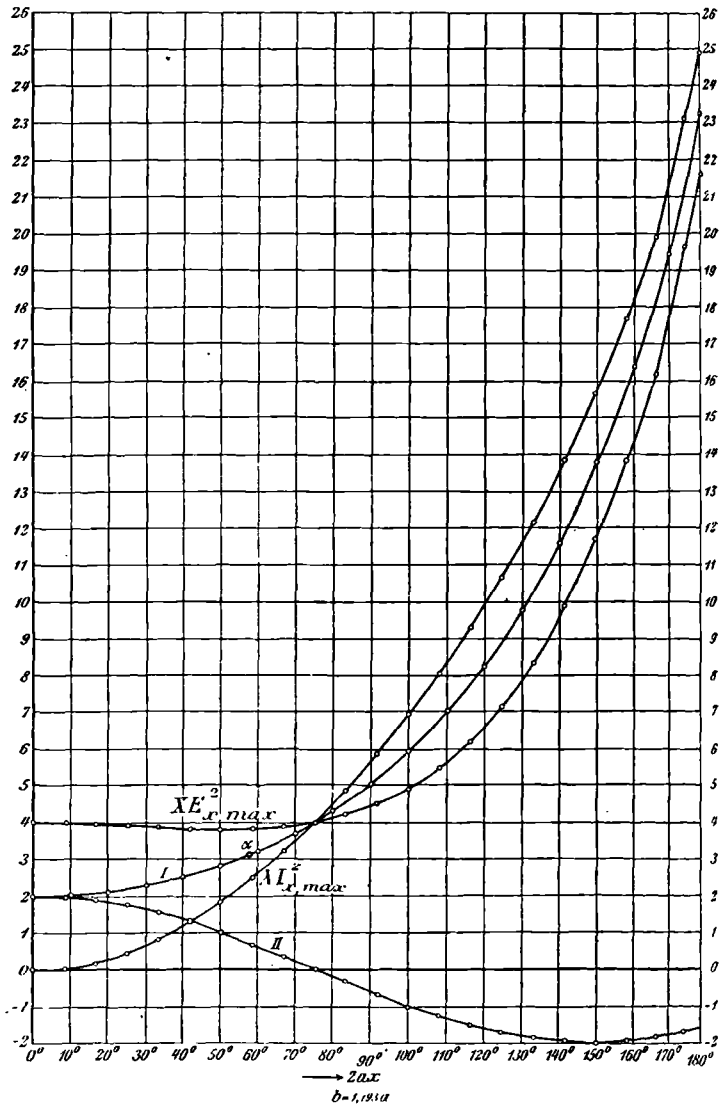


Fig. 32 c.

de  $\frac{dy}{dx}$  passe par son minimum. La courbe représentative de la dérivée seconde  $\frac{d^2y}{dx^2}$  (fig. 32c) commence par conséquent par des valeurs négatives, passe par 0 au moment où la dérivée première passe par son minimum, puis s'élève au-dessus de l'axe des abscisses. L'inégalité

$$\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0 \text{ quand } x = 0,$$

peut donc servir de critère pour savoir si  $y = \chi E^2_{x, \max}$  descend ou monte après l'élément infiniment petit qui com-



ERRATUM : lire  $\gamma E_{x, \max}^2$  au lieu de  $XE_{x, \max}^2$ .

Fig. 33.

mence à  $x = 0$ . Ici nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4a^2 (e^{2ax} + e^{-2ax}) - 8b^2 \cos 2bx;$$

en posant  $x = 0$  on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8a^2 - 8b^2$$

la courbe  $\gamma. E_{x, \max}^3$  descend ou monte par conséquent suivant que

$$a \lesseqgtr b.$$

Si la courbe descend, cette descente est d'autant plus rapide et le minimum de  $\gamma. E_{x, \max}^3$  est d'autant plus bas que  $b$  surpasse  $a$ . La figure 33, par exemple, dans laquelle  $\frac{b}{a} = 1,93$  montre un minimum très peu marqué pour la tension; la figure 34 avec  $\frac{b}{a} = 1,78$ , montre déjà mieux le minimum; la figure 35 dans laquelle  $\frac{b}{a} = 3,58$  montre un premier minimum très marqué suivi de l'ébauche d'un second qui n'arrive pas à se produire. Dans la figure 36 enfin où  $\frac{b}{a} = 5,35$  la courbe II des cosinus a des ondulations si rapides que le deuxième groupe de ses valeurs négatives se trouve encore au-dessous d'une montée si faible de  $e^{+2ax}e^{-2ax}$  que la courbe additive arrive à redescendre encore une fois, ce qui donne un deuxième minimum pour  $\gamma. E_{x, \max}^3$ .

Il est facile d'imaginer que pour des valeurs encore plus grandes de  $\frac{b}{a}$ , il peut se produire un plus grand nombre de maxima et de minima.

La quantité  $E_{x, \max}$ , représentant la tension dans un câble quelconque au point situé à la distance  $x$  de l'extrémité du câble donne la tension au commencement du câble quand on pose  $x = l$ . Si par exemple le câble a comme longueur

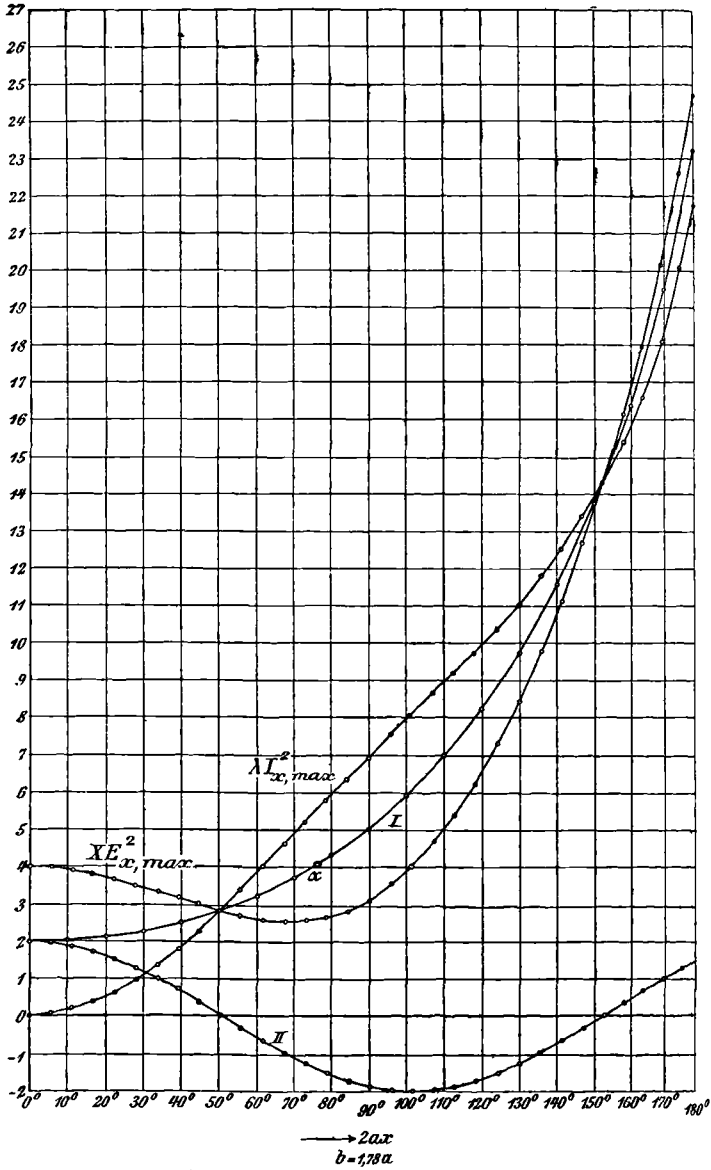


Fig. 34.

celle qui est représentée dans la figure 36 (si donc l'extrémité de droite des courbes représente les données électriques du commencement du câble) on voit qu'en suivant ce dernier du générateur vers l'extrémité, la tension descend d'abord rapidement, puis plus lentement dans le voisinage du point d'inflexion de la courbe  $\gamma E^2_{x, \max}$ , puis continue à tomber plus rapidement pour remonter ensuite, redescendre encore et remonter jusqu'à l'extrémité du câble. Si au contraire, le commencement du câble se trouve dans le deuxième minimum à partir de l'extrémité, la tension commence par monter pour redescendre ensuite et remonter jusqu'à l'extrémité du câble. Si enfin le câble commence au maximum de la courbe des tensions, la tension commence par descendre pour remonter jusqu'à l'extrémité du câble.

Ces quelques observations suffisent pour montrer que la répartition des tensions dans un câble en circuit ouvert peut être très différente suivant la longueur de ce câble, même quand le rapport  $\frac{b}{a}$  (qui comme on le sait ne dépend que des constantes du câble) reste constant. Mais quand  $b$  est plus grand que  $a$  on a toujours un relèvement de la tension vers l'extrémité du câble, puisqu'il a été prouvé plus haut qu'il y a toujours une chute de tension quand on suit le câble en marchant vers le générateur.

Dans les câbles au contraire où  $b$  serait  $\leq a$ , nous aurions à partir de l'extrémité du câble une augmentation continue de la tension, en d'autres termes une chute de tension en marchant du générateur vers l'extrémité du câble.

Le premier cas :  $b > a$  est de règle dans les câbles modernes; il n'y a qu'à se reporter au tableau VII. L'examen des équations 16 et 17 page 62 montre que  $b$  est toujours plus grand que  $a$  quand le câble est bien isolé; en effet la condition  $b > a$  revient à celle-ci :

$$*s - gr > 0,$$

soit

$$zs > gr$$

ou enfin

$$4\pi^2 v^2 L . c > gr.$$

La possibilité d'une oscillation de la tension dans un câble est donc d'autant plus grande que la capacité et la self sont plus grandes par rapport à la résistance du cuivre et à la conductibilité de l'isolant.

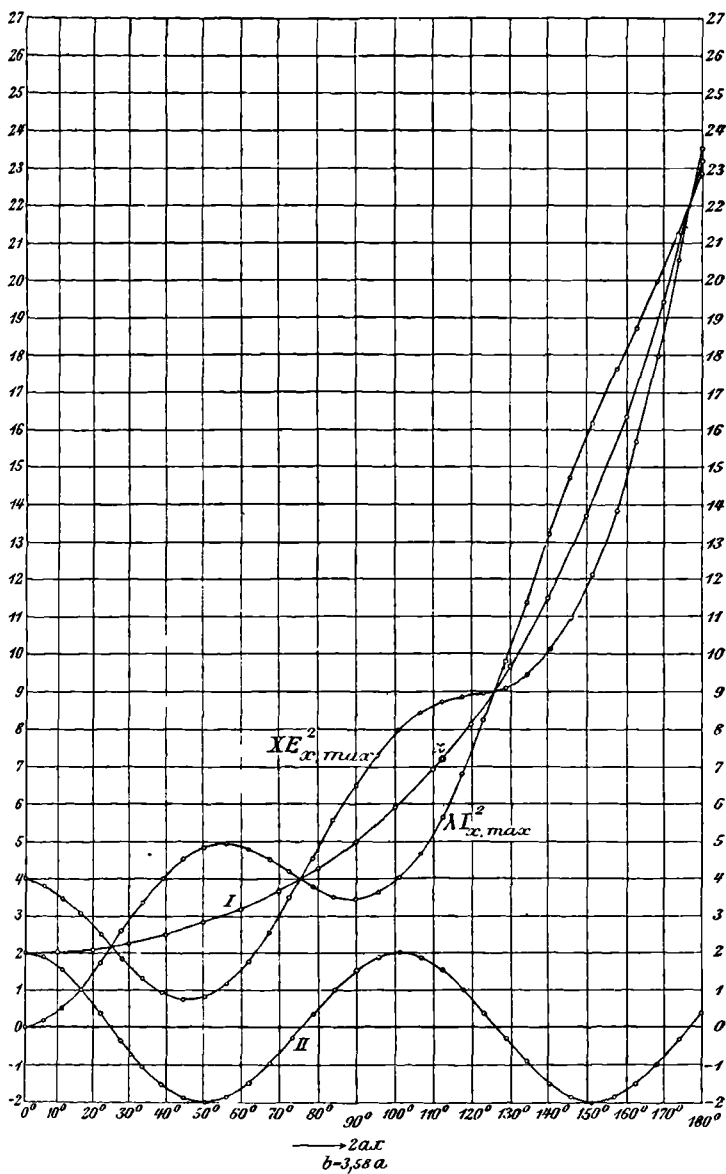
Un conducteur à isolant parfait ( $g = 0$ ), si sa longueur est suffisante, doit donc toujours présenter des maxima et des minima, quelles que soient sa capacité et sa self-induction, pourvu pourtant que ces dernières aient des valeurs finies.

*Tous les conducteurs à isolant parfait doivent donc présenter le phénomène du relèvement de la tension vers leur extrémité.*

La dernière inégalité montre que les effets de la capacité et de la self sont d'autant plus marqués que la fréquence du courant alternatif est plus élevée. La production des maxima et des minima de la tension et de l'intensité est donc une particularité marquée des courants à haute fréquence et présente une importance particulière pour leurs applications pratiques, par exemple pour la télégraphie sans fil. Comme le but de cet ouvrage est l'étude du transport à grande distance des courants de grande intensité, dont la fréquence est relativement petite, nous ne poursuivrons pas ici l'étude des hautes fréquences.

Il est très intéressant de déterminer dans le cas où  $b > a$  jusqu'à quelle distance de l'extrémité du câble il se produit des oscillations de la valeur de la tension, où se trouvent les maxima et minima et à partir de quel point le relèvement ininterrompu commence. En effet, la discussion de ces sujets nous amènera à connaître la répartition de la tension dans des câbles de différentes longueurs. Voici quelques considérations sur ce point :





Erratum : Lire  $\gamma E_x^2, \max$ , au lieu de  $XR_x^2, \max$ .

Fig. 35.

La courbe  $\chi E_{x, \max}^2$  ne peut se mettre à descendre que pour les valeurs de  $ax$  pour lesquelles la courbe  $(e^{2ax} + e^{-2ax})$  monte plus lentement que la courbe  $2 \cos 2bx$  ne descend. Si l'on considère par conséquent le point de la courbe  $(e^{2ax} + e^{-2ax})$  pour lequel la montée de cette courbe est précisément égale à la descente de la courbe  $2 \cos 2bx$  au moment de sa chute la plus rapide, on reconnaît qu'à partir de ce point (c'est-à-dire pour un  $ax$  plus grand), il ne peut plus se produire un mouvement descendant de la courbe  $\chi E_{x, \max}^2$ .

Comme on le sait, la pente d'une courbe peut être mesurée par la dérivée première de la fonction qu'elle représente. Pour la courbe  $(2 \cos 2bx)$  on a

$$\frac{d(2 \cos 2bx)}{dx} = -4b \cdot \sin 2bx$$

dont la valeur maxima est  $4b$ ; le point en question de la courbe  $(e^{2ax} + e^{-2ax})$  sera celui pour lequel

$$\frac{d(e^{2ax} + e^{-2ax})}{dx} = 4b.$$

Nous donnerons le nom d'*angle critique* à l'angle correspondant  $\alpha = 2ax$ . On obtient sa valeur par le calcul suivant.

On effectue la dérivation et l'on a

$$2a(e^{2ax} - e^{-2ax}) = 4b,$$

soit

$$e^{2ax} - e^{-2ax} = \frac{2b}{a}$$

si l'on pose pour simplifier

$$\frac{b}{a} = p$$

et

$$e^{2ax} = z$$

on a

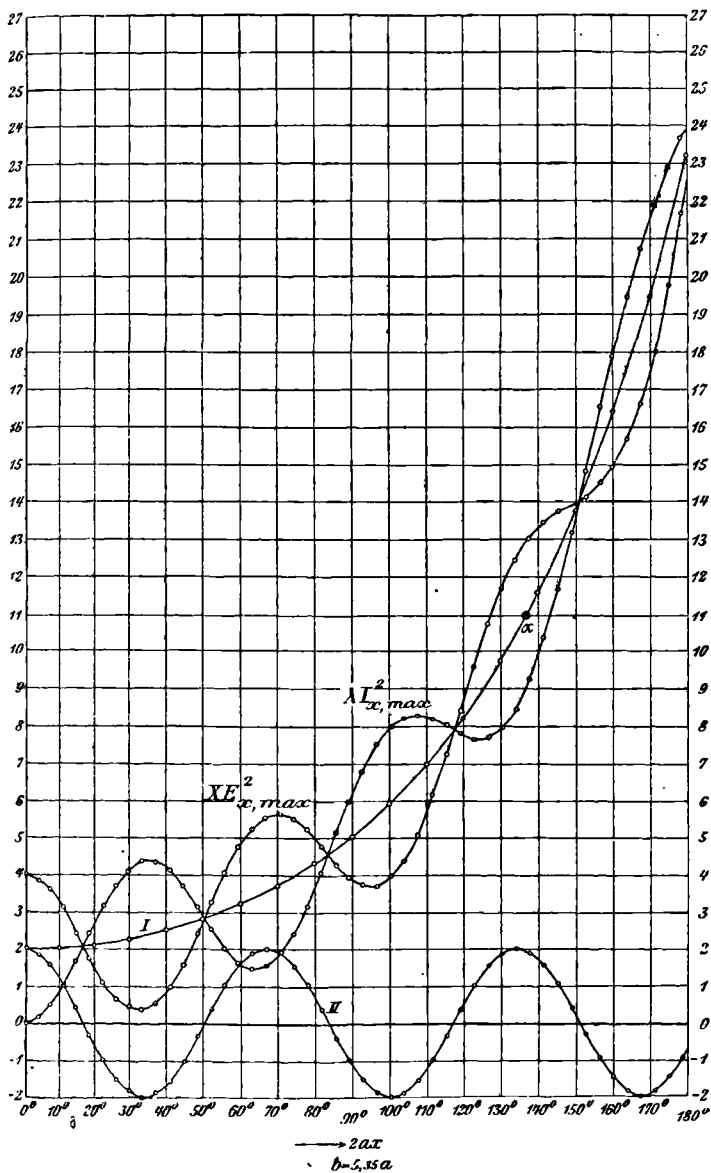
$$z - \frac{1}{z} = 2p,$$

soit

$$e^{2ax} = z = p + \sqrt{p^2 + 1}$$

et par conséquent

$$2ax = \frac{1}{\log e} \cdot \lg(p + \sqrt{p^2 + 1}) = 2.303 \log(p + \sqrt{p^2 + 1})$$



Erratum : Lire  $\gamma E_x^2, \max$ , au lieu de  $XE_x^2, \max$ .

Fig. 36.

$$\alpha = 2ax = 2,303 \frac{360}{2\pi} \log(p + \sqrt{p^2 + 1})$$

$$= 131,9 \log(p + \sqrt{p^2 + 1}). \quad (21)$$

Les points de la courbe exponentielle qui correspondent à l'angle  $\alpha = 2ax$  ont été indiqués sur les courbes I des figures 31 et 33 à 36 par des cercles plus forts et la lettre  $\alpha$ . On voit qu'à droite des points  $\alpha$  il n'y a plus de minimum sur le trajet des courbes  $\chi E_{x, \max}^2$ .

L'angle de la courbe des cosinus qui correspond à  $\alpha = 2ax$  de la courbe exponentielle s'exprime par

$$\beta = 2bx = \frac{b}{a} \alpha = px = 131,9 p \log(p + \sqrt{p^2 + 1}) \quad (22)$$

Il permet de trouver facilement le nombre des maxima et des minima.

En effet tous les points (situés avant l'angle critique) où la courbe des cosinus coupe en descendant l'axe des abscisses, doivent être suivis par un minimum de  $\chi E_{x, \max}^2$ , puisqu'en cet endroit cette courbe doit descendre à cause de la chute rapide de la courbe des cosinus. Il doit y avoir en tout autant de minima qu'il y a d'intersections (avant le point critique) de la partie descendante de la courbe des cosinus avec l'axe des abscisses.

Comme la courbe des cosinus coupe l'axe des abscisses une fois par période dans le sens indiqué, on obtient le nombre des intersections en comptant le nombre des périodes entières à partir de la première de ces intersections (pour laquelle  $bx = 90^\circ$ ) et en comptant cette première intersection à part. Le nombre des minima de la courbe des tensions s'exprimera donc, quand  $b > a$ , par

$$\frac{\beta - 90^\circ}{360^\circ} + 1. \quad (23)$$

Comme d'après la démonstration donnée plus haut, il y a toujours au moins un minimum quand  $b > a$ , il en suit que la fraction  $\frac{\beta - 90^\circ}{360^\circ}$  ne doit pas être prise en considération quand elle devient négative; en un mot, on ne doit tenir compte que de ses valeurs entières et positives.

Le nombre des intersections descendantes de la courbe des cosinus avec l'axe des abscisses détermine aussi le nombre des maxima de la courbe  $\chi E_{x, \max}^2$ ; en effet chacune de ces intersections doit être pré-

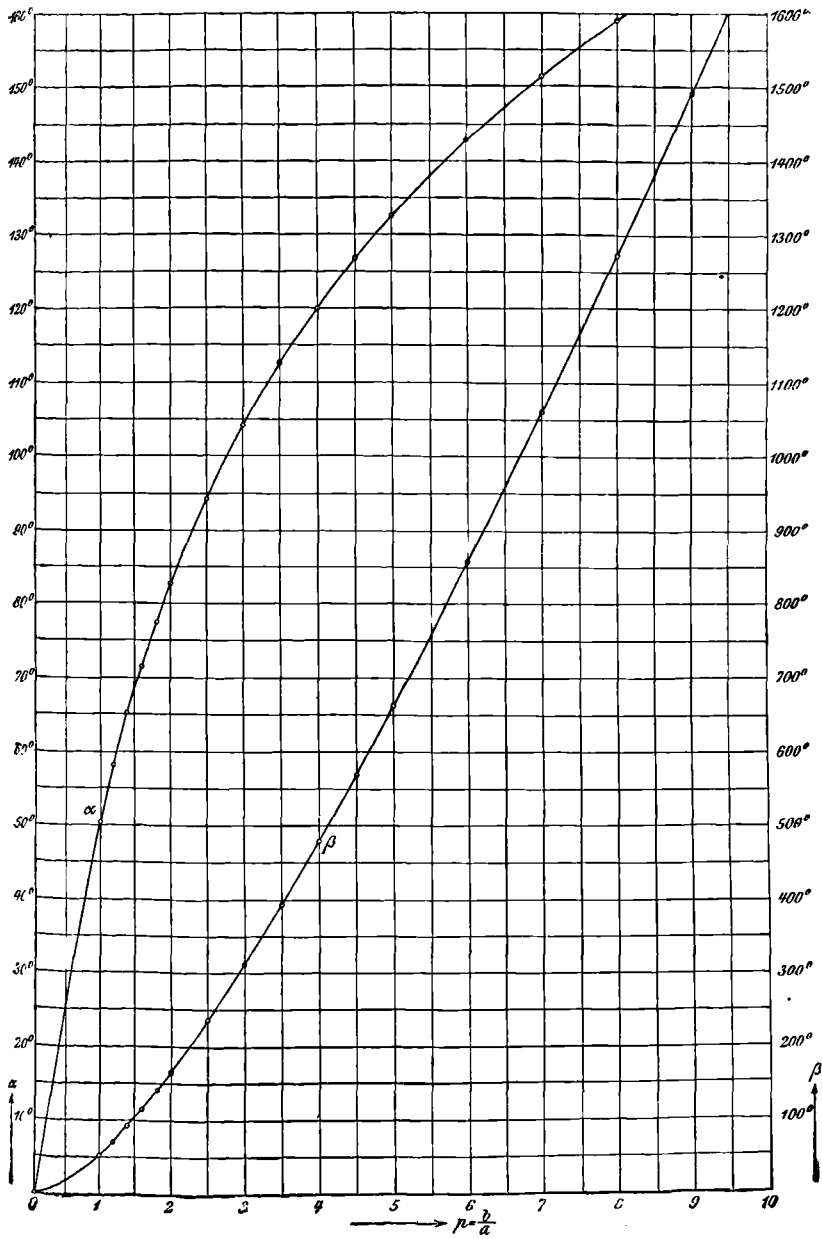


Fig. 37.

cédée d'un maximum. Il n'y a que le dernier minimum avant le point critique qui ne soit pas suivi d'un maximum. En considérant la valeur de la tension à l'extrémité du câble comme un maximum, on peut dire que chaque minimum est précédé d'un maximum et que par conséquent leur nombre est le même. L'équation 23 donne donc aussi le nombre des maxima.

Le nombre des minima de la courbe des *intensités* se trouvera d'une façon analogue ; il suffit de tenir compte du fait qu'elle a été trouvée en soustrayant de la courbe exponentielle la courbe des cosinus. Il faudrait donc prendre les courbes symétriques des courbes des cosinus portés dans les figures 31 et 33 à 36, si l'on tenait à procéder comme pour la courbe des tensions (obtenue, comme on le sait, en additionnant la courbe des exponentielles et la courbe des cosinus). On voit tout de suite que cette courbe symétrique a des intersections descendantes aux points où se trouvent les intersections ascendantes de la vraie courbe des cosinus. Il suffit donc de déterminer le nombre des intersections *ascendantes* pour obtenir le nombre des minima. Pour cela nous comptons de nouveau combien il y a de périodes pleines en partant de la première intersection ascendante, qui se produit à  $\beta x = 270^\circ$ . On aura comme nombre des minima

$$\frac{\beta - 270^\circ}{360^\circ} + 1 = \frac{\beta + 90^\circ}{360^\circ} \quad (24)$$

Remarquons que pour la courbe des intensités il n'y a pas obligatoirement un minimum quand  $b > a$ , comme c'était le cas pour  $\chi E_{x, \max}^2$  ; en effet les figures 31, 33 et 34 ne présentent aucun minimum d'intensité ; il faut donc, comme on l'a fait dans l'équation 24, incorporer 1 à la fraction  $\frac{\beta - 270^\circ}{360^\circ}$  et lui donner la forme  $\frac{\beta + 90^\circ}{360^\circ}$

Le nombre des entiers contenu dans cette fraction donne celui des minima : la valeur nulle du courant à l'extrémité du câble ne compte pas comme un minimum. Enfin, comme à part ce dernier, chaque minimum de la courbe  $\lambda I_{x, \max}^2$  est précédé d'un maximum, la formule 24 donne aussi le nombre des maxima.

Pour rendre plus utiles les considérations qui précèdent, nous donnons dans le tableau XI un certain nombre d'angles critiques et le nombre de maxima et de minima qui se produisent pour diverses valeurs pratiques du rapport  $p = \frac{b}{a}$ . La figure 37 donne, en outre, une représentation graphique de  $\alpha$  et de  $\beta$  en fonction de  $p$ .

Dans toutes les installations de la pratique faites sur la base de 50 périodes par seconde, l'angle  $\alpha x$  varie entre  $5^\circ$  et  $10^\circ$  pour 100 kilo-

TABLEAU XI

$p$	$\alpha$	$\beta$	NOMBRE DES MAXIMA ET MINIMA DE	
			$E$	$I$
1,0	50° 29' 16"	50° 29' 16"	0	0
1,2	58° 41' 55"	69° 50' 18"	1	0
1,4	65° 11' 14"	91° 45' 43"	1	0
1,6	71° 32' 42"	114° 28' 16"	1	0
1,8	77° 21' 24"	139° 14' 31"	1	0
2,0	82° 41' 48"	165° 23' 35"	1	0
2,5	94° 21' 29"	235° 53' 42"	1	0
3,0	104° 9' 50"	312° 29' 35"	1	1
3,5	112° 36' 00"	394° 6' 36" = 360° + 34° 6' 36"	1	1
4,0	119° 59' 38"	479° 58' 41" = 360° + 119° 58' 41"	2	1
4,5	126° 33' 32"	569° 30' 43" = 360° + 209° 30' 43"	2	1
5,0	132° 27' 36"	662° 18' 50" = 360° + 302° 18' 50"	2	2
6,0	142° 44' 20"	856° 25' 12" = 2 · 360° + 136° 25' 12"	3	2
7,0	151° 27' 36"	1060° 13' 12" = 2 · 360° + 340° 13' 12"	3	3
8,0	159° 2' 38"	1272° 21' 00" = 3 · 360° + 192° 21' 00"	4	3
9,0	165° 44' 46"	1491° 41' 24" = 4 · 360° + 51° 41' 24"	4	4
10,0	171° 44' 53"	1717° 28' 48" = 4 · 360° + 277° 28' 48"	5	5

LE CABLE DE LONGUEUR FINIE EN CIRCUIT OUVERT 151

mètres de ligne aérienne et entre 10° et 40° pour 100 kilomètres de câble à haute tension. Il en résulte que les mesures de l'intensité ne montrent ni maximum ni minimum ; l'intensité croît d'une façon continue de la fin du câble au commencement. La tension, par contre, a son maximum à l'extrémité du câble, et elle diminue à mesure qu'on se rapproche du commencement pour augmenter ensuite ; ce minimum n'existe même pas quand les câbles sont de faible longueur.

**La chute de tension dans la ligne.** — Il a été démontré plus haut que ce n'est que dans les cas où  $b = a$  ou  $b < a$  que l'on observe une montée continue de la tension de l'extrémité de la ligne vers le commencement, tandis que dans le cas usuel où  $b$  est  $> a$ , la tension décroît d'abord depuis l'extrémité du câble pour remonter ensuite. L'étude des variations que la tension et le décalage subissent le long du câble présente un grand intérêt comme préparation aux méthodes qui seront exposées plus tard pour le calcul des câbles dans la pratique.

La tension  $E_l$  au début d'un câble de  $l$  km. de longueur est donnée en fonction de la tension efficace  $E_0$  qui règne à l'extrémité par l'équation 4, page 122 :

$$E_l = E_0 \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{2}.$$

Posons comme à la page 134 le rapport des tensions au début et à la fin du câble.

$$\frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{2} = C = ce^{i\gamma},$$

expression dans laquelle (équations 17 et 18, page 134).

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl} \quad (25)$$

et

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{e^{al} - e^{-al}}{e^{al} + e^{-al}} \operatorname{tg} bl. \quad (26)$$

Quand  $b = a$ ,  $C$  ne dépend que de  $ax$ , et l'on obtient



pour  $c$  et  $\gamma$  les valeurs données par le tableau XII. Ce tableau contient en outre les valeurs de  $de^{i\delta}$  calculées par les équations 19 et 20, p. 134.

$$\frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{2} de^{i\delta}.$$

TABLEAU XII

$$b = a$$

$ax^0$	$\frac{(e^{\nu l} + e^{-\nu l})}{2} = ce^i$		$\frac{(e^{\nu l} - e^{-\nu l})}{2} = de^{i\delta}$	
	$c$	$\gamma$	$d$	$\delta$
0	1,0000	0°	0,0000	0°
5	1,0000	—	0,1233	—
10	1,0003	1° 44' 40"	0,2468	45° 34'
15	1,0017	—	0,3706	—
20	1,0047	6° 57' 50"	0,4932	47° 19' 41"
25	1,0120	—	0,6176	—
30	1,0248	15° 30' 30"	0,7417	50° 13' 28"
35	1,0455	—	0,8666	—
40	1,0765	26° 54' 8"	0,9927	54° 13' 21"
45	1,1201	—	1,1201	—
50	1,1785	39° 57'	1,2500	59° 28' 25"
55	1,2533	—	1,3830	—
60	1,3457	53° 31'	1,5202	65° 44' 12"
65	1,4566	—	1,6627	—
70	1,5865	66° 34' 30"	1,8119	72° 59' 47"
75	1,7335	—	1,9692	—
80	1,9043	78° 43' 30"	2,1369	81° 8' 5"
85	2,0927	—	2,3161	—
90	2,3013	90°	2,5092	90°
100	2,7818	100° 37'	2,9460	99° 25' 10"
110	3,3539	110° 48'	3,4662	109° 13' 17"
120	4,0300	120° 46'	4,0916	119° 15' 10"
130	4,8260	130° 36'	4,8440	129° 23' 51"
140	5,7640	140° 26'	5,7490	139° 34' 25"
150	6,8799	150° 16'	6,8434	149° 44' 8"
160	8,1852	160° 8'	8,1381	159° 51' 40"
170	9,7423	170° 3'	9,6938	169° 56' 55"
180	11,5921	180°	11,5487	180°

Il en suit que dans les lignes dépourvues de self,  $\gamma$  et  $c$  croîtraient d'une façon continue de l'extrémité du câble au commencement.

Dans les lignes aériennes, pour lesquelles nous avons trouvé que  $ax$  vaut de 5° à 10° par 100 kilomètres,  $c$  s'écarterait fort peu de 1 dans le cas d'une self négligeable, et  $\gamma$  serait presque nul; il n'en est pas de même dans les câbles, pour lesquels  $ax$  vaut de 10 à 40° par 100 kilomètres; le rapport des tensions au début et à la fin du câble peut s'écarter sensiblement de 1; l'avance de phase de la tension au début sur celle qui règne à l'extrémité peut atteindre une certaine valeur. Pour  $ax = 40^\circ$ , par exemple la différence des tensions se monte à 7,6 p. 100 de la tension au commencement et celle-ci aurait sur l'autre une avance de près de 27°.

Afin de donner une idée des conditions de la pratique, l'auteur a rassemblé dans le tableau XIII les valeurs de  $c$  et de  $\gamma$  calculées d'après les équations 25 et 26 pour diverses longueurs des câbles à 10 000 volts et pour la ligne aérienne de Lauffen à Francfort.

Nous allons interpréter ce tableau XIII en partant du commencement du câble, et notons, puisque  $c = \frac{E_l}{E_0}$  représente le rapport de la tension au commencement du câble à celle qui existe à la fin, que lorsque

$$c = \frac{E_l}{E_0} > 1,$$

nous avons une *diminution* de la tension du commencement vers la fin et quand

$$c = \frac{E_l}{E_0} < 1,$$

nous avons une *augmentation* de la tension du commencement vers la fin.

Le tableau montre d'une façon très nette,  $b$  étant  $> a$ ,

TABLEAU XIII

Valeurs du rapport  $C$  des tensions au commencement et à la fin de la ligne, en circuit ouvert, dans les câbles à 40 000 volts et la ligne aérienne Lauffen-Francfort (50 périodes à la seconde).

$C = e e^{i\tau}$					
	N°	50 km.	100 km.	150 km.	200 km.
Câbles à 40 000 volts.	1	$0,99528 \cdot e^{i \cdot 3^{\circ} 18' 51''}$	$1,0151 \cdot e^{i \cdot 21^{\circ} 5' 50''}$	$1,1493 \cdot e^{i \cdot 44^{\circ} 34' 29''}$	$1,4811 \cdot e^{i \cdot 69^{\circ} 9' 41''}$
	2	$0,99366 \cdot e^{i \cdot 3^{\circ} 37' 48''}$	$0,9907 \cdot e^{i \cdot 14^{\circ} 35' 21''}$	$1,0378 \cdot e^{i \cdot 32^{\circ} 10' 26''}$	$1,1938 \cdot e^{i \cdot 53^{\circ} 17' 0''}$
	3	$0,99284 \cdot e^{i \cdot 2^{\circ} 38' 1''}$	$0,98015 \cdot e^{i \cdot 10^{\circ} 38' 28''}$	$0,9877 \cdot e^{i \cdot 23^{\circ} 58' 18''}$	$1,0540 \cdot e^{i \cdot 41^{\circ} 25' 31''}$
	4	$0,99250 \cdot e^{i \cdot 2^{\circ} 0' 36''}$	$0,97504 \cdot e^{i \cdot 8^{\circ} 8' 31''}$	$0,96323 \cdot e^{i \cdot 18^{\circ} 32' 34''}$	$0,98230 \cdot e^{i \cdot 32^{\circ} 52' 15''}$
	5	$0,99225 \cdot e^{i \cdot 1^{\circ} 30' 18''}$	$0,97185 \cdot e^{i \cdot 6^{\circ} 0' 19''}$	$0,94790 \cdot e^{i \cdot 14^{\circ} 0' 6''}$	$0,93586 \cdot e^{i \cdot 23^{\circ} 16' 25''}$
	6	$0,99200 \cdot e^{i \cdot 1^{\circ} 8' 42''}$	$0,96978 \cdot e^{i \cdot 4^{\circ} 38' 58''}$	$0,93868 \cdot e^{i \cdot 10^{\circ} 42' 31''}$	$0,90843 \cdot e^{i \cdot 19^{\circ} 32' 49''}$
	7	$0,99195 \cdot e^{i \cdot 0^{\circ} 53' 27''}$	$0,96866 \cdot e^{i \cdot 3^{\circ} 37' 14''}$	$0,93388 \cdot e^{i \cdot 8^{\circ} 21' 28''}$	$0,89368 \cdot e^{i \cdot 15^{\circ} 21' 1''}$
	8	$0,99190 \cdot e^{i \cdot 0^{\circ} 43' 44''}$	$0,96820 \cdot e^{i \cdot 2^{\circ} 57' 51''}$	$0,93152 \cdot e^{i \cdot 6^{\circ} 51' 2''}$	$0,88626 \cdot e^{i \cdot 12^{\circ} 37' 21''}$
Ligne aérienne.		$0,99860 \cdot e^{i \cdot 0^{\circ} 15' 56''}$	$0,99450 \cdot e^{i \cdot 1^{\circ} 3' 37''}$	$0,98794 \cdot e^{i \cdot 2^{\circ} 24' 33''}$	$0,97943 \cdot e^{i \cdot 4^{\circ} 18' 31''}$

de quelle manière la tension commence à décroître à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité pour croître ensuite. Dans le câble n° 1 nous trouvons une augmentation d'environ 1/2 p. 100 quand  $l = 50$  km., une diminution de 1 1/2 p. 100 quand  $l = 100$  km. et une diminution de 48 p. 100 quand  $l = 200$  km., de telle sorte que ce câble relié en circuit ouvert à un alternateur ne manifesterait plus à 200 kilomètres de là que les 2/3 de la tension du générateur. Dans le câble n° 2, qui est un peu plus fort, cette diminution ne serait plus que de 19 p. 100 pour 200 kilomètres, tandis que pour le câble n° 8 qui est le plus fort de tous, il se manifeste une *augmentation* de 11 p. 100 du commencement à la fin.

Le tableau XIII montre aussi très bien l'existence d'un minimum de la tension. Nous trouvons ce minimum avant 100 kilomètres dans le câble 1, entre 50 et 150 kilomètres dans les n° 2 et 3, entre 100 et 200 kilomètres dans le n° 4 et vers 150 à 200 kilomètres dans les câbles 5 à 8. Comme conclusion pratique, on peut dire que des feeders de même longueur, mais de section inégale, se comportent très différemment et ne pourraient pas sans autre être mis en parallèle. Il est juste de dire que jusqu'à 50 kilomètres la différence est peu visible. Pour la ligne aérienne, la différence entre la tension initiale et la tension finale est très faible; il n'y en a pas moins une *augmentation* de 2 p. 100 entre la tension du début et la tension au bout de 200 kilomètres<sup>1</sup>.

Les variations de la phase de la tension ne présentent pas une marche spécialement intéressante. Comme  $\gamma$  grandit à mesure que le câble s'allonge, nous constatons que la phase de la tension au commencement du câble avance d'autant plus sur la tension à la fin que le câble est plus long; cette avance diminue cependant à mesure

<sup>1</sup> Ne pas oublier que dans le tableau XIII, les distances sont comptées à partir du commencement du câble.

que le câble devient plus fort. En effet le câble le plus faible, le n° 1, manifeste pour 200 kilomètres une avance considérable, 69°, tandis que le câble le plus fort, le n° 8, ne montre que 12°5 et la ligne aérienne 4° seulement. Ajoutons que ce décalage des tensions n'a aucune importance pratique : il n'en est pas de même du décalage du courant sur la tension, sujet important que nous traiterons en détail plus loin.

Cette augmentation de la tension du commencement à la fin d'un câble en circuit ouvert est connue sous le nom de phénomène de Ferranti ; elle fut découverte en 1890 lors de l'établissement de la grande station centrale Ferranti à Deptfort, au moment où les feeders furent posés jusqu'à Londres. On vérifiait la pose du câble en mesurant la tension finale à mesure qu'une nouvelle section était posée, et ce fut alors qu'on observa avec étonnement que la tension augmentait à mesure que l'on s'éloignait de Deptfort. Le phénomène fut même mis en doute par le Professeur Fleming, qui se livra à diverses mesures quand les câbles furent définitivement posés et présenta un rapport très complet à l'Institution of Electrical Engineers<sup>1</sup>.

**Dépendance entre le courant admis et la longueur du câble.** — L'équation 18 c page 109 démontre qu'un câble de longueur infinie en circuit ouvert, soumis en son commencement à une tension efficace  $E_0$ , admet une intensité

$$I_0 = E_0 \sqrt{m^2 + n^2},$$

expression dans laquelle  $m$  et  $n$  sont réels et constants et donnés par l'équation 17, page 107.

Le seul problème qui ait de l'importance dans la pratique est celui de l'intensité admise par un câble de longueur finie ; la question se pose de savoir si cette

<sup>1</sup> Voir *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, t. XX, 1894, p. 362.

intensité peut être exprimée par une formule aussi simple que celle qui précède, ou même si cette dernière peut servir telle quelle. Nous allons examiner cette question de plus près, car au point de vue technique il est important de savoir quelle charge les câbles en circuit ouvert ou faiblement chargés imposent aux générateurs.

En divisant les équations 13 et 15 p. 133 l'une par l'autre, et en y remplaçant les valeurs maximales  $E_{x, \max}$  et  $I_{x, \max}$  par les valeurs efficaces  $E_x$  et  $I_x$  on obtient

$$I_x = E_x \sqrt{m^2 + n^2} \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}}$$

Si  $x$  représente la longueur du câble,  $E_x$  et  $I_x$  sont les données électriques du commencement du câble, puisqu'il a été convenu que dans le câble de longueur finie  $x$  est compté à partir de l'extrémité.

Dans la formule rappelée à la page précédente pour le câble de longueur infinie, les valeurs de  $E$  et de  $I$  portent l'indice 0 pour le commencement du câble, au lieu de l'indice  $x$ , tout simplement parce que nous avons convenu de compter les  $x$  à partir du générateur dans le cas du câble infini. Cette différence dans la façon de compter les longueurs n'a aucun inconvénient pour ce qui va suivre.

Quand les tensions de début  $E_x$  du câble fini et  $E_0$  du câble infini sont égales, on a comme rapport des intensités correspondantes

$$\frac{I_x}{I_0} = \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}} = f,$$

expression dans laquelle nous allons chercher l'influence de la longueur  $x$  du câble.

Quand  $bx$  est un multiple impair de  $90^\circ$ ,  $\cos 2bx = 0$  et  $f = 1$ . Quand  $2bx$  est compris entre  $90^\circ$  et  $270^\circ$ ,  $f > 1$ ; quand  $2bx$  est compris entre  $270^\circ$  et  $360^\circ + 90^\circ$ ,  $f < 1$ ; enfin chaque fois que  $2bx$  croît de  $180^\circ$  la valeur de  $f$

TABLEAU XIV

Comparaison entre les câbles de longueur finie et le câble de longueur infinie au point de vue du courant  $I_1$  admis en circuit ouvert.

	N°	$I_1$					$2 b I_1$			
		$l = 50 \text{ km.}$	$l = 100 \text{ km.}$	$l = 150 \text{ km.}$	$l = 200 \text{ km.}$	$l = \infty$	$l = 50 \text{ km.}$	$l = 100 \text{ km.}$	$l = 150 \text{ km.}$	$l = 200 \text{ km.}$
Câbles à 10 000 volts.	1	20,471	39,947	52,913	55,591	47,418	36° 18'	72° 36'	108° 54'	145° 12'
	2	22,530	44,946	63,906	73,900	63,009	30° 35' 32"	61° 11' 4"	91° 46' 36"	122° 22' 8"
	3	25,564	51,423	75,783	93,742	83,530	26° 41' 16"	53° 22' 32"	80° 3' 48"	106° 45' 4"
	4	27,311	55,181	82,824	106,80	101,580	23° 57' 44"	47° 55' 28"	71° 53' 12"	95° 50' 56"
	5	29,243	59,185	89,896	119,46	124,320	21° 32' 16"	43° 4' 32"	64° 36' 48"	86° 9' 4"
	6	31,111	63,140	96,572	130,72	149,330	19° 43' 16"	39° 26' 32"	59° 9' 48"	78° 53' 4"
	7	32,849	66,727	102,44	140,13	174,640	18° 22' 8"	36° 44' 16"	55° 6' 24"	73° 28' 32"
	8	33,960	69,010	106,15	145,99	194,430	17° 29' 28"	34° 58' 56"	52° 28' 24"	69° 57' 52"
Ligne aérienne		1,3709	2,7495	4,142	5,553	13,918	9° 3' 38"	18° 7' 16"	27° 10' 54"	36° 14' 32"

oscille autour de 1. Les écarts entre  $f$  et 1 diminuent d'autant plus que  $x$  grandit, car alors le terme  $2 \cos 2bx$  s'efface toujours plus vis-à-vis de  $e^{2ax} + e^{-2ax}$ . Comme, d'autre part, les plus grands écarts de  $f$  et 1 se produisent pour des valeurs d'autant plus petites de  $x$  que  $b$  est plus grand, et qu'en même temps  $e^{2ax} + e^{-2ax}$  a des valeurs d'autant plus petites que  $a$  est plus faible, les écarts entre  $f$  et 1 grandissent d'autant plus que  $b$  est lui-même plus grand que  $a$ . On le reconnaît d'ailleurs immédiatement en considérant les figures 33 à 36 dans lesquelles

$$\chi E_{x, \max}^2 = e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx$$

et

$$\lambda I_{x, \max}^2 = e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx.$$

On en déduit

$$\frac{\lambda I_{x, \max}^2}{\chi E_{x, \max}^2} = f^2.$$

Les points d'intersection de  $E_{x, \max}^2$  et  $I_{x, \max}^2$  sont ceux pour lesquels  $f = 1$ ; entre ces points se trouvent les portions de courbes pour lesquelles  $f$  est plus grand ou plus petit que 1.

Si nous considérons les figures 34 à 36 simultanément, on voit que le rapport de  $\lambda I_{x, \max}^2$  et  $\chi E_{x, \max}^2$  s'écarte beaucoup plus de 1 dans la figure 36 que dans la figure 34; ce rapport commence toujours par 0, monte à 1 et oscille à partir de là autour de cette limite en s'en écartant toujours moins. On en déduit que l'intensité se rapproche de la limite de l'intensité qui a été trouvée pour des câbles de longueur infinie, à mesure que les longueurs de câble augmentent; mais ce rapprochement ne se fait pas d'une façon continue; il se produit par oscillations de part et d'autre avec des amplitudes toujours plus petites.

*Il se peut donc qu'un câble plus court joint à un géné-*



*rateur puisse admettre un courant plus élevé qu'un câble plus long du même type et de la même section; un câble de longueur finie pourra admettre plus de courant qu'un câble infini.*

Pour se rendre compte de quelle façon ce résultat influence les cas pratiques, l'auteur a rassemblé dans le tableau XIV les intensités admises par les câbles à 10 000 volts déjà cités et la ligne aérienne du type Lauffen-Francfort, en admettant une tension initiale de 10 000 volts.

Le tableau XIV contient en outre les intensités empruntées au tableau VIII et se rapportant aux lignes de longueur infinie, ainsi que les angles  $2bl$  d'après les valeurs données pour  $b$  dans le tableau VII.

On constate que pour 150 kilomètres déjà le courant admis par les câbles 1 et 2 est supérieur à celui qui correspond à la longueur infinie; pour les câbles 3 et 4 ce fait se produit vers 200 kilomètres et dans les autres câbles et la ligne aérienne plus loin seulement. La deuxième moitié du tableau XIV montre que les angles  $2bx$  dépassent  $90^\circ$  au moment où cette augmentation du courant admis se produit.

On voit aussi qu'un allongement des câbles et de la ligne aérienne, par suite de l'extension d'un réseau par exemple, aurait pour conséquence d'augmenter l'admission de courant dans la ligne, tout au moins quand la longueur de 200 kilomètres ne se trouverait pas dépassée à la suite de cet allongement. En dépassant les 200 kilomètres on s'apercevrait qu'il y a une limite au delà de laquelle le courant admis diminuerait; pour le câble 1, par exemple, cela se produirait pour une ligne de  $200 \cdot \frac{180^\circ}{145^\circ 12'} = 248 \text{ km.}$ ,  $f$  commençant alors à diminuer. Avec les câbles plus forts cette diminution se produirait beaucoup plus tard.

Un allongement de la ligne dans les installations actuellement existantes, soit en câbles, soit en lignes aériennes,

ne produira en général pas une diminution du courant admis, ou une augmentation sur la valeur admise quand la longueur est infinie. C'est cette dernière alternative cependant qui risque de se produire plus facilement que la première.

Il est facile de se rendre compte de l'erreur commise en employant pour les longueurs actuellement usitées en pratique l'équation 18 c de la page 109.

En effet, il est évident que  $f$  s'écarte le plus de 1 quand  $\cos 2bx = \pm 1$ . Si donc on pose, afin de mettre les choses au pire,  $\cos 2bx = -1$ , par exemple, on obtient en admettant une erreur de 1 p. 100 sur l'intensité calculée

$$f = 1,01 = \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2}{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2}}$$

expression d'où l'on peut facilement tirer  $ax$  et,  $a$  étant donné, la longueur de la ligne en kilomètres.

Pour donner une idée de la grandeur de l'erreur relative, nous allons prendre pour  $a$  (d'après le tableau VII) les limites  $5,8349 \cdot 10^{-3}$  pour les câbles et  $1,7200 \cdot 10^{-3}$  pour les lignes aériennes. On obtiendra les longueurs qui correspondent à une erreur de 1 p. 100 et à une erreur de 5 p. 100 (tableau XV).

$x_1$  se rapporte au câble le plus faible,  $x_2$  au câble le plus fort.

TABLEAU XV

$f$	LONGUEUR EN KILOMÈTRES	
	Câble.	Ligne aérienne.
1,01	$x_1 = 454$ $x_2 = 1599$	$x = 2263$
1,05	$x_1 = 318$ $x_2 = 1197$	$x = 1584$

Le tableau XV démontre que pour les longueurs des lignes actuelles, les erreurs que l'on peut commettre en employant la formule simplifiée sont assez considérables. Il est juste de dire que le tableau XV indique les erreurs les plus élevées qui puissent se produire. Lorsque  $2bx$  se trouve près de  $90^\circ$ , les erreurs sont très faibles.

Variations du décalage. — L'étude du décalage  $\varphi_x$  qui existe entre la tension et le courant en un point  $x$  quelconque du câble présente un certain intérêt, en particulier au commencement du câble ( $x = l$ ). Ce dernier décalage, qui est précisément celui qui existe dans le générateur, a une très grande importance pour le réglage de la tension.

L'équation générale 23, page 9, nous donne  $\varphi_x$ . Amenons les quantités  $E_x$  et  $I_x$  des équations 11 et 12, page 132, à la forme des équations 14 et 15 des pages 7 et 8, qui ont elles-mêmes servi à l'obtention de l'équation 23, page 9. Il suffit de séparer les quantités réelles et les quantités imaginaires. On pose, pour abrégé

$$\operatorname{arctg} \frac{n}{m} = \beta \tag{28}$$

et l'on a

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{E_{0, \max}}{2} (e^{ax} + e^{-ax}) \cos bx \\ q_e &= \frac{E_{0, \max}}{2} (e^{ax} - e^{-ax}) \sin bx \\ p_i &= \sqrt{m^2 + n^2} \frac{E_{0, \max}}{2} \left[ e^{ax} \cos (bx + \beta) - e^{-ax} \cos (bx - \beta) \right] \\ q_i &= \sqrt{m^2 + n^2} \frac{E_{0, \max}}{2} \left[ e^{ax} \sin (bx + \beta) + e^{-ax} \sin (bx - \beta) \right] \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

En introduisant ces différentes valeurs dans l'équation 23, page 9, et en simplifiant quelque peu les termes en sinus et en cosinus, on arrive à

$$\varphi_x = - \left[ \beta + \operatorname{arctg} \frac{2 \sin 2bx}{e^{2ax} - e^{-2ax}} \right]. \tag{30}$$

Rappelons qu'une valeur positive de  $\varphi_x$  représente une *avance* de la tension sur le courant (voy. éq. 23, p. 9); si donc nous supprimons le signe moins de l'équation 30, une valeur positive de l'angle  $\varphi_x$  représentera une avance de l'intensité sur la tension.

En remplaçant  $x$  par la valeur 0 qu'il a à la fin du câble l'expression de  $\varphi_x$  prend une forme indéterminée; mais il est alors facile de calculer directement l'angle  $\varphi_x = \varphi_0$ . En effet, l'élément infiniment court qui forme l'extrémité du câble ne fait que recevoir du courant sans le débiter plus loin; il se comporte donc comme un condensateur infiniment petit soumis à la tension finale  $\mathbf{E}_0$ , et où un certain courant se perd dans l'isolant.

L'équation 8, page 44, montre que le courant  $y$  possède une avance  $\varphi_0$  sur la tension déterminée par l'équation :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \omega c \rho. \quad (31)$$

On peut arriver au même résultat en dérivant par rapport à  $x$  la fraction contenue dans l'équation 30. En introduisant l'angle auxiliaire  $\psi$  défini par l'équation

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}, \quad (32)$$

on a

$$\frac{2 \cos 2 bx}{e^{2ax} + e^{-2ax}} \operatorname{tg} \psi. \quad (33)$$

Pour  $x = 0$ , on obtient

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} (\beta + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \psi}. \quad (34)$$

En introduisant pour  $\operatorname{tg} \beta$  et  $\operatorname{tg} \psi$  les valeurs  $m$  et  $n$  données par l'équation 17, page 107 et l'équation 32, on obtient après quelques transformations

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2abr - (a^2 - b^2)s}{2abs + (a^2 - b^2)r}$$

et en utilisant les équations 14 et 15 de la page 62

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x}{g} \frac{r^2 + \rho^2}{r^2 + \rho^2} = \frac{x}{g}.$$

En substituant à  $x$  la quantité  $\omega c$  et à  $g$ , qui est l'inverse de  $\rho$  (valeur de la résistance d'isolement du câble par kilomètre) la valeur  $\rho$  elle-même, on obtient

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \omega c \rho$$

qui est l'équation 31 trouvée plus haut.

On peut aussi arriver à l'équation 34 d'une façon plus intuitive.

Voici : Nous représentons  $L_c$  (d'après l'équation 12) par deux spirales comme dans la figure 28 a. Dans le cas présent, le vecteur origine des deux spirales doit se trouver à gauche de la directrice, et former avec cette dernière un angle  $\beta$  au lieu de  $45^\circ$ . De même que dans la figure 29 a, les intensités sont représentées par les cordes qui joignent les extrémités de deux rayons vecteurs pris l'un dans une spirale, l'autre dans la seconde, et formant à droite et à gauche du vecteur origine le même angle  $\alpha$ ; les angles formés par ces cordes avec la directrice (pas avec le vecteur origine) indiquent les décalages sur la tension à la fin du câble.

A l'extrémité du câble, où  $\alpha = 0$ , cette corde devient infiniment petite et sa direction est celle d'une tangente commune aux deux spirales en leur intersection avec le vecteur origine. L'équation des deux spirales, rapportées au vecteur origine  $e'$ , d'après l'équation 12, page 132 et d'après la page 115

$$r = \frac{E_{o, \max}}{2} \sqrt{m^2 + n^2} e \pm \frac{a}{b} \alpha = ce \pm \frac{a}{b} \alpha. \quad (35)$$

L'angle  $\delta l$  que forme la tangente avec le vecteur origine s'exprime pour la spirale à gauche

$$r = ce + \frac{a}{b} \alpha \quad (36)$$

par la figure 38 a, dans laquelle  $ds$  représente un élément infiniment petit de la spirale dans le voisinage du vecteur origine  $e'$  et  $r$  le rayon vecteur correspondant. On a  $\operatorname{tg} \delta l = \frac{r d\alpha}{dr}$

<sup>1</sup> Pour gagner de la place, le vecteur origine a été dessiné « horizontalement » dans les figures 38 a et 38 b, dans la position qu'occupe ordinairement la directrice.

Comme d'autre part on a, en dérivant l'équation 36

$$\frac{dr}{d\alpha} = + \frac{a}{b} ce + \frac{a}{b} \alpha = + \frac{a}{b} r,$$

il en suit

$$\operatorname{tg} \delta_l = + \frac{b}{a}.$$

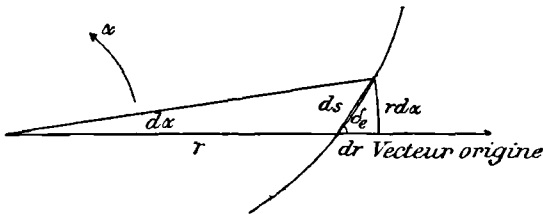


Fig. 38 a.

Quant à l'inclinaison  $\delta_r$  de la tangente de la spirale à droite

$$r = ce^{-\frac{a}{b} \alpha}. \quad (37)$$

la figure 38 b donne

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{rd\alpha}{-dr} = -\frac{rd\alpha}{dr}.$$

Comme d'après l'équation 37

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{a}{b} ce^{-\frac{a}{b} \alpha} = -\frac{a}{b} r$$

il suit

$$\operatorname{tg} \delta_l = + \frac{b}{a}.$$

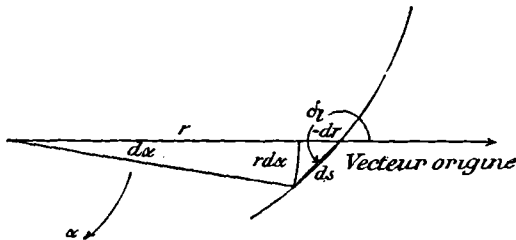


Fig. 38 b.

Il suit de la relation  $tg \delta_l = \frac{b}{a} = tg \delta_r$  et des figures 38 a et 38 b que

$$\delta_r = \delta_l + 180^\circ.$$

La tangente de la spirale à droite est donc le prolongement de la tangente de la spirale à gauche ; les deux tangentes coïncident donc ; la droite qu'elles forment fait, avec le vecteur origine, un angle  $\delta_r = \delta$  compté dans le sens de la tangente de la spirale à gauche, et un angle  $(\delta + \beta)$  avec la directrice. L'angle  $(\delta + \beta)$  représente donc le décalage du courant sur la tension finale ; il a la même valeur que l'angle  $\varphi_0 = \beta + \psi$  donné par l'équation 34, car il suit de l'équation 32 que  $tg \psi = \frac{b}{a}$  ; d'autre part  $tg \delta = \frac{b}{a}$  ; par conséquent  $\delta = \psi$ .

L'angle  $\varphi_0$  qui exprime l'avance de phase à la fin du câble se rapproche d'autant plus de  $90^\circ$  que la capacité et la résistance d'isolement sont plus grandes.  $\varphi_0$  est petit quand la résistance d'isolement est petite ; il atteint par contre  $90^\circ$  quand l'isolement est bon et la capacité appréciable. D'autre part  $\varphi_0$  doit avoir une valeur comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  ; il n'est donc pas possible que le courant ait un retard de phase sur la tension. La résistance ohmique et la self n'ont aucune influence sur  $\varphi_0$ . La quantité  $\omega c \rho$  vaut dans les 100 000 et même plus dans les câbles bien isolés que l'on fabrique actuellement ; il en suit que  $\varphi_0$  est très proche de  $90^\circ$ .

Plus on s'éloigne de l'extrémité du câble, plus le dénominateur de l'équation 30 grandit, et plus  $\varphi_x$  se rapproche de  $\beta$ .

En d'autres termes, plus un câble en circuit ouvert est long, plus l'avance de phase du courant sur la tension en son commencement se rapproche de la valeur constante qu'elle a dans un câble semblable de longueur infinie (voir p. 109).

Le fait que l'avance de phase à la fin du câble de longueur finie est plus petite ou plus grande que l'avance dont il vient d'être question n'a aucune influence.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur l'équation 30 pour se rendre compte de la façon dont  $\varphi_x$  passe de la valeur  $\varphi_0$  à la limite  $\beta$ . En effet, le dénominateur ( $e^{2ax} - e^{-2ax}$ ) croît d'une façon continue avec  $x$ ; il en suit que la fraction dont le numérateur contient  $\sin 2bx$  doit prendre des valeurs qui oscillent du positif au négatif avec des amplitudes décroissantes. Quand  $2bx$  arrive à être un multiple exact de  $\pi$ , la fraction s'annule, et  $\varphi_x = \beta$  (fig. 39).

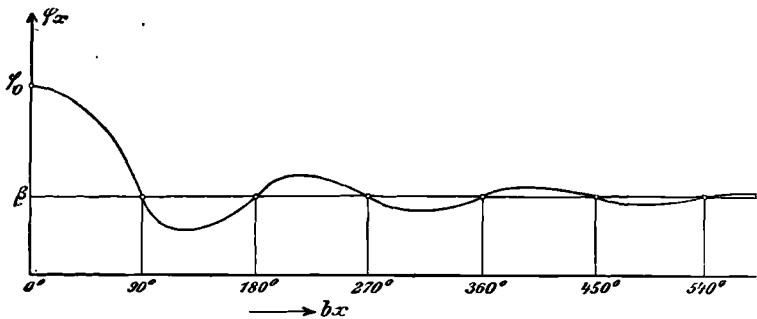


Fig. 39.

En résumé, le décalage qui existe à l'extrémité d'un câble ouvert de longueur finie, et qui est exprimé par l'angle  $\varphi_0$  défini par l'équation  $\operatorname{tg} \varphi_0 = x\rho$ , s'approche d'abord continuellement de la valeur  $\varphi_x = \beta$  qu'elle atteint quand  $2bx = \pi$  ou  $bx = 90^\circ$ . Après  $bx = 90^\circ$ ,  $\varphi_x$  tombe au-dessous de  $\beta$  pour remonter à cette valeur quand  $bx = 180^\circ$ , et ainsi de suite.  $\varphi_x$  oscille autour de la valeur  $\beta$  avec des amplitudes décroissantes qui s'annulent pour  $x = \infty$ .

Nous avons trouvé plus haut un phénomène analogue pour le courant; ce dernier, qui est nul dans un câble infiniment court, se rapproche de la valeur qu'il prend dans une ligne de longueur infinie à mesure que le câble s'allonge; ce rapprochement se fait par oscillations d'amplitude décroissante. Mais tandis que pour le décalage la



valeur limite est atteinte quand  $2bx = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \text{etc.}$ , le courant atteint sa limite propre pour  $2bx = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, \text{etc.}$

Les points où la valeur limite est atteinte se trouvent donc pour le courant juste au milieu entre les points correspondants à la valeur limite du décalage.

Le tableau X et la figure 30 *b* montrent la variation du décalage dans le cas spécial où  $a = b$ ,  $ax$  ou  $bx$  étant compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ .

Pour donner une idée des décalages qui peuvent exister en pratique *au commencement* d'un câble en circuit ouvert, le tableau XVI donne les avances de phase du courant sur la tension pour différentes longueurs des câbles à 10 000 volts et la ligne aérienne du type Lauffen-Francfort.

On constatera que ce décalage en circuit ouvert est très voisin de  $90^\circ$  pour les longueurs actuellement employées en pratique. Mais il n'en serait pas toujours ainsi avec de plus grandes longueurs. Le câble n° 1 montre par exemple un décalage de  $76^\circ$  pour 100 kilomètres, de  $61^\circ$  pour 150 kilomètres et de  $49^\circ$  pour 200 kilomètres.

Il en suit que le décalage du courant sur la tension dans le générateur qui alimente un câble ouvert ne dépend pas seulement du type du câble, mais encore, et essentiellement, de sa longueur ; le prolongement d'un câble peut donc modifier profondément la manière d'être de l'alternateur dans la marche à vide.

**Puissance absorbée à vide par le câble.** — La puissance en un point quelconque  $x$  de la ligne est exprimée par la formule générale

$$A_x = \frac{E_{x, \max} I_{x, \max}}{2} \cos \varphi_x.$$

Pour en obtenir la valeur d'après l'équation 21, page 9, il suffit de prendre les valeurs de  $p_e, p_i, q_e$  et  $q_i$  données par les formules 29, page 163.

TABLEAU XVI

Avances de phase  $\varphi_l$  de l'intensité sur la tension au commencement des câbles à 10 000 volts et de la ligne aérienne, en circuit ouvert. Fréquence : 50 périodes par seconde.

	N°	$\varphi_l$				
		$l = 50 \text{ km.}$	$l = 100 \text{ km.}$	$l = 150 \text{ km.}$	$l = 200 \text{ km.}$	$l = \infty$
Câbles à 10 000 volts.	1	86° 21' 37"	75° 53' 36"	61° 16' 26"	48° 55' 36"	42° 33' 19"
	2	87° 29' 17"	80° 9' 41"	68° 39' 16"	56° 3' 32"	41° 25' 27"
	3	88° 10' 8"	82° 47' 32"	73° 52' 39"	62° 38' 50"	40° 3' 53"
	4	88° 34' 55"	84° 27' 43"	77° 26' 6"	67° 52' 35"	38° 31' 12"
	5	88° 55' 25"	85° 49' 59"	80° 27' 45"	72° 46' 4"	36° 24' 45"
	6	89° 10' 23"	86° 48' 35"	82° 40' 35"	76° 33' 57"	33° 47' 33"
	7	89° 20' 25"	87° 30' 38"	84° 15' 59"	79° 23' 53"	30° 58' 39"
	8	89° 26' 58"	87° 57' 11"	85° 7' 30"	81° 15' 26"	28° 2' 28"
Ligne aérienne.		89° 49' 47"	89° 17' 17"	88° 23' 12"	87° 6' 21"	36° 32' 25"

On a, après quelques simplifications,

$$A_x = \frac{E_{0, \max}^2}{8} \sqrt{m^2 + n^2} [(e^{2ax} - e^{-2ax}) \cos \beta - 2 \sin 2bx \sin \beta]. \quad (38)$$

La relation qui existe entre la puissance  $A_x$  et la position du point  $x$  ne dépend que du facteur entre crochets. Posons, pour abréger

$$(e^{2ax} - e^{-2ax}) \cos \beta - 2 \sin 2bx \sin \beta = N \quad (39)$$

de sorte que  $A_x$  devient

$$A_x = \frac{E_{0, \max}^2}{8} \sqrt{m^2 + n^2} \cdot N. \quad (40)$$

Il est facile de démontrer que  $N$  croît à mesure que  $x$  croît, quelles que soient les constantes électriques du câble, résumées comme on sait par les quantités  $a$  et  $b$ . Il suffit de former la dérivée  $\frac{dN}{dx}$  et de montrer qu'elle ne peut pas devenir négative. On aura d'après l'équation 39

$$\frac{dN}{dx} = 2a (e^{2ax} + e^{-2ax}) \cos \beta - 4b \cos 2bx \sin \beta.$$

L'affirmation que  $\frac{dN}{dx}$  ne peut pas devenir négatif s'explique par l'inégalité

$$(e^{2ax} + e^{-2ax}) \geq \frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta \cdot 2 \cos 2bx.$$

Comme  $+2$  est la plus grande valeur que puisse prendre  $2 \cos 2bx$ , en même temps que la plus petite qu'admette  $e^{2ax} + e^{-2ax}$ , cette inégalité sera vérifiée, même pour les plus petites valeurs de  $x$ , pourvu que

$$\frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta \leq 1.$$

En posant d'après l'équation 28,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m}$  et en donnant à

172 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
*m* et *n* les valeurs tirées des équations 17, page 107,  
on arrive à la condition

$$\frac{b}{a} \frac{br - as}{ar + bs} \leq 1$$

ou encore en tenant compte des équations 14 et 15 de la  
page 62 :

$$g (r^2 + s^2) \cong 0,$$

expression indépendante de la capacité. Or dans tous les  
cas pratiques *g* et *r*, ou *g* et *s* ont des valeurs différentes  
de 0 ; l'inégalité est donc vérifiée. Dans le cas idéal d'un  
câble parfaitement isolé, *g* = 0 ; on aurait alors

$$g (r^2 + s^2) = 0,$$

$$\frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta = 1,$$

et  $\frac{dN}{dx}$  serait nul pour  $x = 0$ , et positif pour toute autre  
valeur de  $x$  ; même dans ce cas extrême, la courbe des *N*  
serait ascendante.

Ce qui vient d'être démontré prouve que *A<sub>x</sub>* croît d'une  
façon *continue* avec  $x$ . La puissance transmise va donc en  
décroissant d'une façon *continue* du commencement à la  
fin du câble, et atteint la valeur 0 à cette extrémité.

Cette décroissance *continue* de la puissance est une  
nécessité physique ; la puissance ne saurait avoir des  
oscillations comme *E<sub>x</sub>* et *I<sub>x</sub>*. Il suffit d'ailleurs pour s'en  
assurer de considérer la dérivée  $\frac{dA}{dx}$  qui représente, en  
partant de l'extrémité, l'augmentation de puissance par  
unité de longueur du câble ; sous la forme  $\frac{-dA}{-dx} = \frac{dA}{dx}$   
elle représente la *diminution* de puissance par unité de  
longueur, en marchant du *commencement* vers la *fin* du  
câble.

Cette diminution ne peut avoir d'autre cause que la  
transformation d'énergie électrique en chaleur, chaque

élément de longueur  $dx$ , ainsi que l'isolant qui l'environne, absorbant la puissance  $dA$ .

Si  $A_x$  avait des fluctuations,  $\frac{dA}{dx}$  deviendrait négatif aux points où, en marchant du générateur vers l'extrémité du câble, on observerait une augmentation de la puissance. Cela signifierait que le courant, au lieu de produire de la chaleur, en soutirerait du câble, et le refroidirait, ce qui est en contradiction avec la loi de Joule.

Comme la self et la capacité n'occasionnent pas de perte d'énergie, il en suit que, dans les câbles à isolement parfait ( $g = 0$ ) la valeur de  $\frac{dA}{dx}$  doit être équivalente à celle de la chaleur de Joule  $r \frac{I_{x, \max}^2}{2}$  produite dans le cuivre. Il est facile de vérifier cette assertion en calculant d'une part la chaleur par seconde  $r \frac{I_{x, \max}^2}{2}$  par l'équation 49, page 109 et l'éq. 15, page 133, et d'autre part  $\frac{dA}{dx}$  par l'équation 38.

Le tableau XVII donne la puissance absorbée à la tension de 10000 volts par les câbles et la ligne aérienne. Il suffit de calculer la formule

$$A_l = E_l \cdot I_l \cos \varphi_l$$

en recourant aux tableaux XIV pour  $I_l$  et XVI pour  $\varphi_l$ .

On constate tout d'abord le fait paradoxal que la puissance absorbée par les câbles de forte section est plus petite que celle des câbles faibles, tandis que l'inverse se produisait pour le courant admis (Tab. XIV).

La différence provient évidemment du fait que la puissance est absorbée par le cuivre surtout et que dans les gros câbles la résistance beaucoup plus faible contrebalance et au delà l'effet de l'intensité plus grande qu'ils admettent.

La puissance perdue dans l'isolant ne peut pas être

174 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
déterminée exactement sans faire un calcul compliqué;  
mais il est facile de s'assurer qu'elle est beaucoup plus  
petite que celle que le cuivre absorbe.

TABLEAU XVII

*Puissance admise en circuit ouvert par les câbles et la ligne aérienne,  
sous une tension de phase de 10 000 volts et 50 périodes par seconde.*

	N°	50 km.	100 km.	150 km.	200 km.	∞
		kw.	kw.	kw.	kw.	kw.
Câbles à 10000 volts.	1	12,996	97,362	254,306	365,250	349,292
	2	9,883	76,800	232,616	412,610	472,455
	3	8,169	64,521	210,440	430,709	639,267
	4	6,759	53,254	180,183	402,218	794,750
	5	5,488	43,005	148,953	353,892	1000,489
	6	4,490	35,138	123,103	303,713	1241,030
	7	3,782	28,983	102,340	257,817	1497,310
	8	3,263	24,649	87,132	221,900	1709,384
Ligne aérienne		0,0407 kw.	0,3416 kw.	1,166 kw.	2,804 kw.	111,823 kw

En effet, si la tension initiale  $E_l$  se maintenait tout le long du câble, on aurait pour le courant dérivé dans l'isolant, par kilomètre, l'expression  $I_i = E_l g$ , dans laquelle  $g = 6,67 \cdot 10^{-8}$  (p. 88). On trouve

$$I_i = 10000 \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} = 6,67 \cdot 10^{-4}$$

et pour la puissance perdue dans l'isolant

$$E_l I_i = 6,67 \text{ watts par km.}$$

soit 333 watts pour 50 kilomètres, ce qui est le 10 p. 100 environ de la plus faible des puissances indiquées au tableau XVII.

Ce tableau montre encore que la perte en ligne croît beaucoup plus vite que la longueur; dans les lignes de grande longueur, l'augmentation de la perte par kilo-

mètre est relativement plus faible que dans les lignes courtes. Ce n'est guère que pour la ligne aérienne et pour les câbles les plus forts que la perte s'accroît fortement entre 200 kilomètres et l'infini, tandis que pour les câbles faibles, l'augmentation est petite dans le même intervalle; dans le câble n° 1, même, la perte dans la ligne infinie est *plus faible* que sur 200 kilomètres. L'équation 38 permet d'expliquer facilement ce phénomène paradoxal.

L'équation 38 exprime  $A_x$  par la tension *finale*  $E_{0, \max}$ . Exprimons cette fois  $A_x$  en fonction de la tension *initiale*  $E_l$ , qui est constante dans le cas présent; il suffit de prendre l'équation 13 de la page 133 qui donne le rapport entre  $E_0$  et  $E_l$  et qui en posant  $x = l$  devient

$$\frac{E_l}{E_0} = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl}.$$

Le rapport des valeurs maximales et des valeurs efficaces étant  $\sqrt{2}$  on a

$$E_0 = \frac{E_{0, \max}}{\sqrt{2}}$$

et enfin

$$A_l = E_l^2 \sqrt{m^2 + n^2} \cos \beta \frac{e^{2al} - e^{-2al} - 2 \sin 2bl \operatorname{tg} \beta}{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl} \quad (40a)$$

La longueur  $l$  figure seulement dans la fraction; il suffira donc de montrer que cette fraction peut *diminuer* quand  $l$  *grandit* pour montrer que  $A$  peut suivre la même marche.

Posons

$$f' = \frac{e^{2al} - e^{-2al} - 2 \sin 2bl \operatorname{tg} \beta}{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl} = \frac{N}{M}$$

Les limites de  $f'$  sont :

$$\begin{aligned} f' &= 0 \text{ quand } l = 0, \\ f' &= 1 \quad \gg \quad l = \infty. \end{aligned}$$

Si nous arrivons à montrer que  $f'$  peut avoir des valeurs supérieures à 1, le phénomène présenté par le câble n° 1 sera expliqué, car alors  $A_x$  aura avant l'infini une valeur maximale qui décroîtra ensuite.

Si nous posons

$$e^{2al} - e^{-2al} - 2 \sin 2bl \operatorname{tg} \beta > e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl,$$

il en suit

$$e^{-2al} + 2 \cos 2bl + 2 \sin 2bl \operatorname{tg} \beta < 0$$

qui est évident quand ( $n$  étant un entier quelconque)

$$2bl = n \cdot 2\pi + 180^\circ$$

et quand, pour de plus grandes valeurs de  $al$ ,

$$2bl = n \cdot 2\pi + 270^\circ.$$

$f'$  peut donc être plus grand que 1 pour certaines valeurs de  $l$ .  $A_l$  est donc, par places, plus grand que la puissance qui se dissiperait dans le câble infini; en d'autres points  $A_l$  est plus petit; ceci arrive quand

$$2bl = n \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad 2bl = n \cdot 2\pi + 90^\circ.$$

Il est donc démontré que la puissance absorbée à vide par un câble oscille autour d'une limite à mesure que le câble s'allonge, les écarts étant toujours plus faibles: l'équation 40  $a$  le montre, le terme  $e^{2al}$  finissant par prendre une valeur prépondérante à mesure que  $l$  grandit.

La marche oscillatoire trouvée pour l'intensité et le décalage se retrouve ainsi pour la puissance.

Le tableau XVIII donne les valeurs de  $f'$  pour plusieurs longueurs des câbles 1 et 2. Nous voyons ainsi que  $N$  croît d'une façon continue (p. 171) tandis que  $M$  décroît jusqu'à  $al = 20^\circ$  pour croître ensuite. L'augmentation du numérateur  $N$  coïncide avec une diminution du dénominateur  $M$ ; il en suit que la fraction  $f'$  croît tout d'abord; cette coïn-



TABLEAU XVIII

<i>al</i>	CABLE 4					CABLE 2				
	<i>2 bl</i>	<i>N</i>	<i>M</i>	<i>f'</i>	<i>2 bl</i>	<i>N</i>	<i>M</i>	<i>f'</i>		
0°	0°	0	4,0000	0	0°	0	4,0000	8		
10°	21° 42,96'	0,03295	3,9811	0,008277	2° 35,88'	0,03423	3,9695	0,008629		
20°	43° 25,92'	0,2500	3,9598	0,06313	45° 11,76'	0,2604	3,9166	0,06648		
30°	65° 8,88'	0,8326	4,0410	0,2060	67° 47,64'	0,8648	3,9562	0,2186		
40°	86° 51,84'	1,9594	4,3970	0,4455	90° 23,52'	2,0276	4,2737	0,4745		
50°	108° 34, 8'	3,8127	5,2651	0,7241	112° 59, 4'	3,9281	5,4213	0,7670		
60°	130° 17,76'	6,5969	6,9499	0,9492	135° 35,28'	6,7623	6,8150	0,9922		
70°	152° 0,12'	10,5643	9,8339	1,074	158° 11,16'	10,7703	9,7431	1,4035		
80°	173° 43,68'	16,0604	14,3963	1,116	180° 47,04'	16,286	14,3845	1,1325		
90°	195° 26,64'	23,588	21,2574	1,110	203° 22,92'	23,799	21,3494	1,115		

cidence se montre même au delà de  $al = 20^\circ$ , car  $N$  grandit plus vite que  $M$ .

C'est à l'endroit du tableau XVIII où  $2bl$  est le plus rapproché de  $180^\circ$  que se trouve la plus grande valeur calculée  $f'$ , soit :

Pour le câble 1 :

$$2bl = 173^\circ 43,68',$$

Pour le câble 2 :

$$2bl = 180^\circ 47,04'.$$

$f'$  diminue de nouveau quand  $2bl$  a dépassé  $180^\circ$ .

Le tableau XIV qui donne  $2bl$  en fonction de  $l$  montre que les deux valeurs indiquées ci-dessus correspondent à plus de 200 kilomètres. Il en suit que dans le tableau XVII, toutes les valeurs  $A_l$  jusqu'à 200 kilomètres vont en croissant. Pour voir une diminution de  $A_l$ , il faudrait prolonger ce tableau au delà de 200 kilomètres.

Revenons au tableau XVIII;  $f'$  dépasse la valeur 1 quand

pour le câble 1  $2 bl = 150^\circ 0,12'^1$  ou plus

— 2 2  $bl = 158^\circ 11,16'^1$  ou plus.

Ceci correspond bien au tableau XVII, dans lequel la première valeur de  $A_l$  qui dépasse la limite se montre pour le câble 1 à 200 kilomètres, distance pour laquelle  $2 bl = 143^\circ 12'$ , tandis que pour le câble 2 cette limite n'est pas atteinte à 200 kilomètres ( $2 bl = 122^\circ 22' 8''$ ). En effet le tableau XVIII montre que pour  $2 bl = 135^\circ$ ,  $f' = 0,9922$  seulement; une petite prolongation du câble 2 ferait dépasser la limite.

Faisons remarquer en terminant qu'il n'y a pas contradiction entre les deux résultats trouvés dans le présent chapitre : 1° que dans toute ligne  $A_x$  va en décroissant d'une façon continue du commencement à la fin, et 2° que

<sup>1</sup> Ce n'est pas là la valeur qui fait  $f' = 1$ .

l'allongement d'une ligne ne fait pas croître  $A_x$  d'une façon continue, mais lui donne une allure oscillatoire.

En effet, quand le câble en circuit ouvert est relié à un générateur de tension constante, un wattmètre placé au commencement du câble indiquera, à mesure que l'on allonge le câble, des puissances alternativement croissantes et décroissantes, jusqu'à une certaine limite; tandis que pour n'importe quelle longueur de câble, un wattmètre se déplaçant *le long du câble*, du commencement vers la fin, indiquera des puissances décroissantes.



## CHAPITRE XII

### LE CABLE EN CHARGE

**Les équations fondamentales.** — Nous n'avons considéré dans les chapitres précédents que des câbles en circuit ouvert; nous allons prendre maintenant le cas d'un câble dont l'extrémité est reliée à un récepteur qui exige à ses bornes une différence de potentiel  $\mathbf{E}_0$  et prend un courant  $\mathbf{I}_0$ . Nous ne fixons pas pour le moment la valeur et la phase de  $\mathbf{I}_0$ .

Si nous comptons  $x$  à partir de l'extrémité du câble, nous savons que d'après les équations **I**, page 63, la tension et le courant sont donnés par

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{c}_1 e^{\mathbf{v}x} + \mathbf{c}_2 e^{-\mathbf{v}x} \quad (1)$$

et

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 e^{\mathbf{v}x} - \mathbf{c}_2 e^{-\mathbf{v}x}) \quad (2)$$

dans lesquelles nous avons d'après l'équation **13 a** page 61.

$$\mathbf{v} = a + bi = \sqrt{(r + is)(g + ix)} = \sqrt{\mathbf{RK}}. \quad (3)$$

Pour déterminer les constantes  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$ , nous introduisons les conditions énoncées plus haut : lorsque  $x = 0$

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_x = \mathbf{I}_0.$$

Nous obtenons

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

et

$$\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)$$

d'où enfin

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} \mathbf{I}_0 \right]$$

et

$$c_2 = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} \mathbf{I}_0 \right]$$

ou bien en posant pour abrégier l'écriture, comme dans l'équation 7, page 123,

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R}\mathbf{K}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}} = \mathbf{u} \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}\mathbf{I}_0)$$

et

$$c_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{u}\mathbf{I}_0)$$

Les équations pour la tension et l'intensité en un point quelconque du câble deviennent alors

$$\mathbf{E}_x = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}\mathbf{I}_0] e^{\mathbf{v}x} + \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 - \mathbf{u}\mathbf{I}_0] e^{-\mathbf{v}x} \quad (5)$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{1}{2\mathbf{u}} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{u}\mathbf{I}_0] e^{\mathbf{v}x} - \frac{1}{2\mathbf{u}} [\mathbf{E}_0 - \mathbf{u}\mathbf{I}_0] e^{-\mathbf{v}x} \quad (6)$$

ou en ordonnant

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}) + \mathbf{I}_0 \mathbf{u} \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}) \quad (7)$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}) + \mathbf{E}_0 \frac{1}{\mathbf{u}} \cdot \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}). \quad (8)$$

Nous allons comparer ces formules avec les formules correspondantes du câble en circuit ouvert (équations 4 et 5, p. 122). Pour faciliter cette comparaison, nous allons remplacer dans cette dernière  $\mathbf{E}_x$  par  $\mathbf{E}'_x$  et  $\mathbf{I}_x$  par  $\mathbf{I}'_x$  : en outre,  $E_{0,\max}$ , qui nous servait de point de départ dans notre étude du câble en circuit ouvert, sera remplacé par  $\mathbf{E}_0$  ;

482 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 nous aurons

$$\mathbf{E}'_x = \mathbf{E}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x})$$

$$\mathbf{I}'_x = \frac{1}{\mathbf{u}} \mathbf{E}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}),$$

et

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}'_x + \mathbf{I}_0 \mathbf{u} \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x})$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}'_x + \mathbf{I}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}).$$

Ces équations montrent que si la charge imposée au câble en son extrémité est donnée, il faut lui fournir au commencement en premier lieu la tension et le courant qui seraient nécessaires si le câble était en circuit ouvert, et en outre une tension et un courant qui sont déterminés par le courant exigé par l'appareil d'utilisation, et qui lui sont proportionnels.

Dans tout ce qui suivra, nous prendrons comme point de départ la tension à l'extrémité du câble, c'est-à-dire la tension exigée par le récepteur ; cette tension peut s'écrire sous forme réelle

$$E_{0,t} = E_{0,\max} \sin \omega t$$

et sous forme complexe

$$\mathbf{E}_0 = E_{0,\max}.$$

Pour exprimer que le courant à l'extrémité du câble est encore indéterminé en grandeur et en phase, nous posons

$$I_{0,t} = I_{0,\max} \sin (\omega t \pm \varphi_0)$$

soit sous forme complexe

$$\mathbf{I}_0 = P \pm Qi$$

de sorte que

$$I_{0,\max} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

et

$$\text{tg } \varphi_0 = \pm \frac{Q}{P}.$$

Le premier problème qui se pose, celui dont l'importance pratique est considérable, est de déterminer la variation des décalages et la variation du rapport des amplitudes de la tension et du courant tout le long du câble. Il n'est pas facile de s'en faire une idée générale d'après les équations assez complexes que nous avons pour  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$ . Mais il est facile de trouver les valeurs de ces deux quantités en des points situés à une très grande distance de l'extrémité du câble. En effet, les termes en  $e^{-vx}$  des équations 3 et 6 s'annulent pour de grandes valeurs de  $x$  et nous avons alors tout simplement

$$\frac{\mathbf{I}_x}{\mathbf{E}_x} = \frac{1}{\mathbf{u}}.$$

Comme d'après l'équation 16, page 107 et l'équation 4, on sait que

$$\frac{1}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = m + ni \quad (9)$$

on obtient

$$\frac{\mathbf{I}_x}{\mathbf{E}_x} = m + ni. \quad (10)$$

Nous en déduisons que le rapport des amplitudes  $\sqrt{m^2 + n^2}$  de  $\mathbf{I}_x$  et  $\mathbf{E}_x$  est une constante, ainsi que la différence de phase de  $\mathbf{I}_x$  et  $\mathbf{E}_x$ . Cette dernière est donnée par  $\varphi = \arctg \frac{n}{m}$ ; nous retrouvons les valeurs mêmes données par les équations 19 et 20, page 109 pour un câble de longueur infinie en circuit ouvert. Nous pouvons donc conclure que quelles que soient les valeurs et les différences de phase du courant et de la tension exigées par l'appareil placé à l'extrémité d'un câble en charge, le rapport des amplitudes et le décalage se rapprochent toujours plus des valeurs qu'ils auraient dans le câble en circuit ouvert, et cela d'autant plus que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble. Comme on le sait, le courant est toujours en avance de  $\beta = \arctg \frac{n}{m}$  sur la tension dans un

câble de longueur infinie en circuit ouvert; il en suit que même si le courant est en retard sur la tension à l'extrémité du câble, ce retard diminue à mesure que l'on s'éloigne de cette extrémité et tend à se transformer en avance. Cette circonstance est très favorable au bon fonctionnement des générateurs.

La complication des équations 5 et 6 ne permet pas de se rendre compte facilement des variations de  $\mathbf{E}_x$  et de  $\mathbf{I}_x$ , quand  $x$  est compris entre les deux limites  $O$  et  $\infty$  que nous venons d'examiner. Cette forme compliquée des équations donne dans les applications numériques des calculs si longs et si fatigants que l'on ne peut pas songer à les entreprendre dans la pratique. Nous allons le montrer rapidement en essayant de décrire la marche du calcul de  $\mathbf{E}_x$ , la tension  $\mathbf{E}_0 = E_{0,\max}$  et le courant  $\mathbf{I}_0 = P + Qi$  exigés à l'extrémité du câble étant donnés.

Il s'agit d'écrire  $\mathbf{E}_x$  sous la forme  $p + qi$  ou  $Ae^{ix}$ . Pour cela il faut amener les trois quantités

$$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}} = \sqrt{\frac{r + si}{g + xi}} \quad (11)$$

$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \mathbf{I}_0)$  et  $(\mathbf{E}_0 - \mathbf{u} \mathbf{I}_0)$  à la forme accessoire  $p + qi$ . Si l'on obtient alors par exemple

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \mathbf{I}_0) = y' + z'i \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{u} \mathbf{I}_0) = y'' + z''i, \quad (13)$$

nous aurons d'après l'équation 5, en décomposant

$$e^{\pm vx} = e^{\pm(a+bi)x}$$

de la façon habituelle

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x = & [(y' \cos bx - z' \sin bx) e^{ax} + (y'' \cos bx + \\ & z'' \sin bx) e^{-ax}] \quad (14) \\ & + i [(z' \cos bx + y' \sin bx) e^{ax} + (z'' \cos bx - \\ & y'' \sin bx) e^{-ax}]. \end{aligned}$$



Il est facile de voir tout d'abord que le calcul de  $\mathbf{E}_x$  d'après cette formule représente un travail considérable, même s'il ne s'agit que d'une seule valeur de  $x$ ; ce travail devient énorme dès qu'on veut le faire pour toutes les valeurs de  $x$ . Aussi ne l'aborderons-nous pas; nous le remplacerons par la représentation graphique par spirales logarithmiques, employée déjà dans le problème du câble en circuit ouvert.

**Méthode des spirales logarithmiques.** — En écrivant  $\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{uI}_0)$  et  $\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{uI}_0)$  sous la forme principale

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{uI}_0) = Be^{i\beta}$$

et

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{uI}_0) = Ce^{i\gamma}$$

l'équation 5 devient

$$\mathbf{E}_x = Be^{ax} e^{i(bx + \beta)} + Ce^{-ax} e^{i(-bx + \gamma)}. \quad (15)$$

Nous obtenons de même pour  $\mathbf{I}_x$ , en posant dans l'équation 6

$$\frac{1}{2\mathbf{u}}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{uI}_0) = B'e^{i\beta'}$$

et

$$\frac{1}{2\mathbf{u}}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{uI}_0) = C'e^{i\gamma'}$$

l'équation

$$\mathbf{I}_x = B'e^{ax} e^{i(bx + \beta')} - C'e^{-ax} e^{i(-bx + \gamma')}. \quad (16)$$

On voit que  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$  peuvent être exprimés par deux termes additifs ou soustractifs dont chacun représente une spirale logarithmique. Les premiers termes de  $\mathbf{E}_x$  et de  $\mathbf{I}_x$ , qui contiennent  $(+ ax)$  et  $(+ bx)$  sont des spirales à gauche à vecteurs croissants; les deux seconds termes sont des spirales à droite à vecteurs décroissants (voir p. 117).

$\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont les angles formés par les vecteurs origines de ces spirales avec la directrice commune; ces angles doivent être portés à droite ou à gauche de cette directrice, suivant leurs signes.

Comme  $\mathbf{I}_x$  se présente sous la forme d'une différence de vecteurs, ses valeurs sont obtenues comme dans le câble en circuit ouvert (fig. 28), tout simplement en joignant les extrémités des vecteurs; pour  $\mathbf{E}_x$  au contraire, qui se présente sous la forme d'une somme de vecteurs, il est nécessaire de dessiner la courbe inverse de la deuxième spirale comme dans la figure 29. Nous pouvons représenter cela en écrivant l'expression  $\mathbf{E}_x$  sous la forme d'une différence :

$$\mathbf{E}_x = B e^{ax} e^{i(bx + \beta)} - C e^{-ax} e^{i(-bx + \gamma - 180^\circ)}. \quad (17)$$

Il suffit alors de *soustraire* les deux spirales en joignant les extrémités des vecteurs homologues.

Pour plus de clarté, nous allons faire un exemple numérique :

Reprenons le câble déjà étudié aux pages 48, 110 et 131, pour lequel nous avons

$$\begin{aligned} r &= 0,455 \text{ ohms par Km,} \\ c &= 0,17 \text{ mf.} \quad \text{»} \\ g &= L = 0. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé, p. 110,

$$\alpha = 2 \pi \nu c = 53,4. 10^{-6}$$

et

$$a = b = 0,0034857.$$

Supposons comme dans le premier exemple traité page 48, que l'appareil d'utilisation exige une tension

$$\mathbf{E}_0 = 1\,000 \text{ volts.}$$

et un courant

$$\mathbf{I}_0 = 10 - 20i.$$

La valeur efficace de ce courant est donc

$$I_0 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36 \text{ amp.},$$

et sa différence de phase avec la tension vaut

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-20}{10} = -63^{\circ} 26'.$$

Le facteur de puissance est

$$F = \cos 63^{\circ} 26' = 0,447.$$

Il s'agit de déterminer la variation de la tension et du courant le long du câble. Comme nous avons déjà résolu ce problème graphiquement dans la figure 14 (pl. I), nous pourrions comparer les résultats des deux méthodes.

Nous aurons tout d'abord, d'après l'équation 11, en utilisant les règles données dans le chapitre IV pour la transformation des quantités complexes

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{r}{ix}} = \sqrt{\frac{r}{2x}} - i \sqrt{\frac{r}{2x}} = \sqrt{\frac{0,455}{2 \cdot 53,4 \cdot 10^{-6}}} \\ &\quad - i \sqrt{\frac{0,455}{2 \cdot 53,4 \cdot 10^{-6}}} \quad (18) \\ &= 65,27 - 65,27i = 92,31 e^{-45^{\circ}i}, \end{aligned}$$

puis

$$uI_0 = (65,27 - 65,27i)(10 - 20i) = -652,7 - 1958,1i,$$

soit

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{uI}_0) = 173,6 - 979,0i = 994 e^{-79^{\circ}54'i} = B e^{i\beta}$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{uI}_0) = 826,4 + 979,0i = 1281 e^{+49^{\circ}50'i} = C e^{i\gamma}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2u} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{uI}_0) &= 994 e^{-79^{\circ}54'i} : 92,31 e^{-45^{\circ}i} \\ &= 10,77 e^{-34^{\circ}54'i} = B' e^{i\beta'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2u} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{uI}_0) &= 1281 e^{+49^{\circ}50'i} : 92,31 e^{-45^{\circ}i} \\ &= 13,88 e^{+94^{\circ}50'i} = C' e^{i\gamma'}. \end{aligned}$$

On aura par conséquent (éq. 16 et 17).

$$\mathbf{E}_x = 994 e^{ax} e^{i(ax - 79^{\circ}54')} - 1281 e^{-ax} e^{i(-ax - 130^{\circ}10')}$$

et

$$\mathbf{I}_x = 10,77 e^{ax} e^{i(ax - 34^\circ 54')} - 13,88 e^{-ax} e^{i(-ax + 94^\circ 50')}.$$

La figure 40, planche VI donne les deux spirales de  $\mathbf{E}_x$ ; la grande spirale tourne à gauche : son vecteur origine  $OA$  (non représenté dans la figure) est à  $79^\circ 54'$  à droite de la directrice, ses rayons vecteurs valent  $994 e^{ax}$ ; la petite spirale tourne à droite; son vecteur origine  $OB$  est à  $130^\circ 10'$  à droite de la directrice; ses rayons vecteurs valent  $1281 e^{-ax}$ . Pour ne pas charger les figures, les rayons vecteurs n'ont pas été dessinés, comme dans les figures 28 et 29; on n'a représenté que leurs extrémités, marquées par de petits cercles.

Les rayons qui partent de ces extrémités sont les prolongements des vecteurs; les indications d'angles qu'ils portent valent  $ax - 79^\circ 54'$  pour la grande spirale, et  $(-ax - 130^\circ 10')$  pour la petite. La ligne  $AB$  qui joint les origines des deux spirales donne la tension  $\mathbf{E}_0$ ; elle est parfaitement parallèle à la directrice, ce qui est tout naturel puisque la phase  $\mathbf{E}_0$  a servi d'origine des phases. Les lignes qui joignent les points homologues des deux spirales (points qui correspondent à des valeurs égales de  $ax$ ) donnent les valeurs de  $\mathbf{E}_x$  en grandeur et en phase. Afin de faciliter les comparaisons, on a déplacé, parallèlement à eux-mêmes, tous ces vecteurs en amenant toutes leurs origines à coïncider au point  $O$  (fig. 40 *b*, pl. VI). Les cotes en degrés inscrites sur la courbe ainsi obtenue sont les valeurs de  $ax$ .

La figure 41 *a*, planche VII, montre la construction des  $\mathbf{I}_x$ . La grande spirale, dont les rayons vecteurs mesurent  $10,77 e^{ax}$  tourne à gauche, et son vecteur origine  $OA$  fait avec la directrice un angle de  $34^\circ 54'$  vers la droite. Les cotes angulaires donnent les valeurs de  $(ax - 34^\circ 54')$ . La petite spirale, à vecteurs mesurant  $13,88 e^{-ax}$  tourne à droite, et son vecteur origine  $OB$  fait avec la directrice un angle de  $94^\circ 50'$  vers la gauche.

Le vecteur qui joint les origines des deux spirales donne la valeur de  $I_0$ ; les lignes qui relient les points correspondants des deux spirales indiquent les autres intensités.

La figure 41 *b*, planche VII a été construite d'une façon analogue à la figure 40 *b*, planche VI. Les cotes de la courbe obtenue sont les valeurs de  $ax$ .

Comme  $a = 0,0034837$  dans notre problème, il en suit que chaque degré de  $ax$  correspond à une valeur de  $x$  de 5 kilomètres. Les dix degrés qui séparent deux points des figures 40 *b* et 41 *b* représentent donc chaque fois 50 kilomètres. Il est facile de comparer ces deux figures avec les figures 14 *c* et 14 *d*, planche I, qui se rapportent au même problème, et dans lesquelles on a placé les points dix fois plus rapprochés, de 5 en 5 kilomètres seulement.

La comparaison révèle une coïncidence fort acceptable si l'on tient compte du fait que les figures 14 *c* et 14 *d* ont été construites point par point, de telle sorte que les inexactitudes se cumulent, et qu'en outre elles ont été faites dans l'hypothèse de la capacité concentrée en des points éloignés de 5 kilomètres et non dans celle de la capacité uniformément répartie.

Le vecteur des tensions, par exemple, est tangent à la courbe des tensions de la figure 14 *c* au point  $31^\circ$ , tandis que dans la figure 40 *b*, le point de tangence est vers  $30^\circ$ <sup>1</sup>.

La figure 40 *b* s'étend en outre plus loin que la figure 14 *c*, qui ne va que jusqu'à  $41^\circ$ .

Les figures 14 *d* et 41 *b* coïncident assez bien; toutes deux montrent la décroissance de  $I_0$  et sa croissance subséquente, avec le minimum vers  $ax = 31^\circ$  dans les deux figures.

La figure 41 *b* est plus complète que la figure 14 *d*, qui s'arrête à  $40^\circ$ .

Pour faciliter une vue d'ensemble du problème, la figure 42 *a* donne en coordonnées rectangulaires les

<sup>1</sup> La réduction des figures originales, imposée par le format adopté pour ce livre, a malheureusement enlevé à cette vérification un peu de sa netteté.

Fig. 42 a.

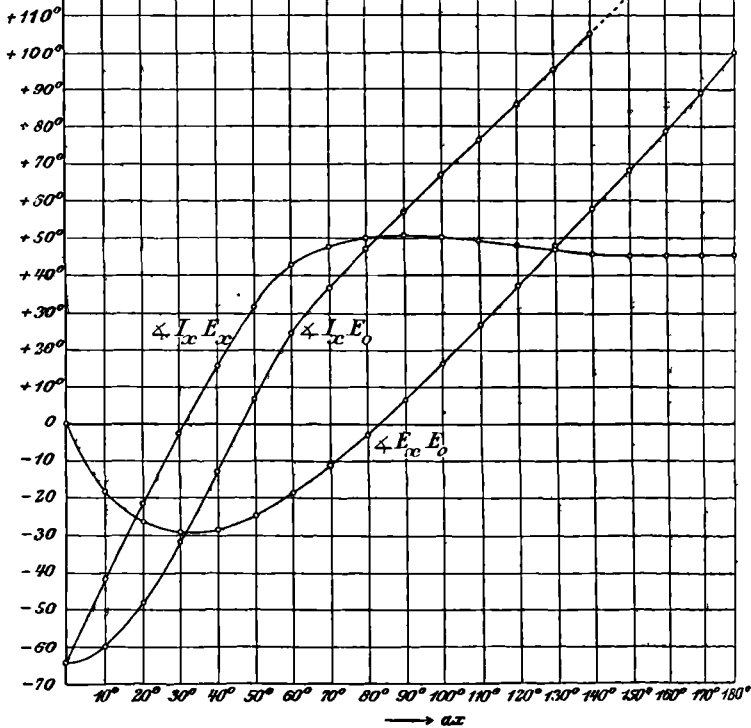
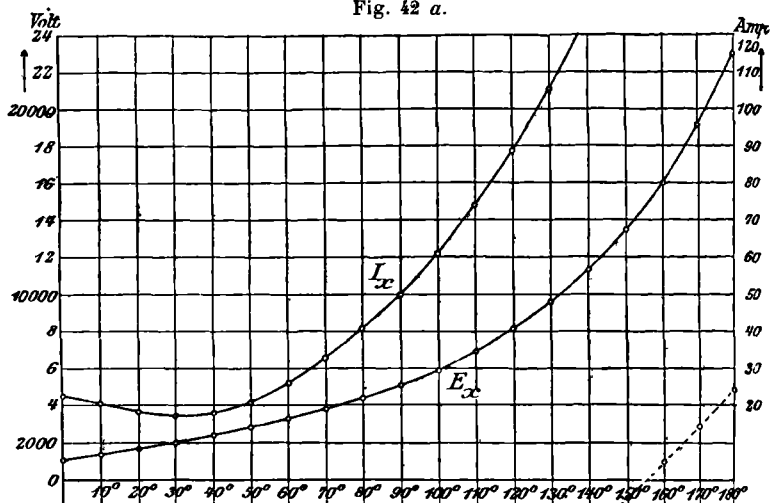


Fig. 42 b.

valeurs de  $I_x$  et  $E_x$  en fonction de  $ax$  d'après les figures 40 *b* et 41 *b*. La figure 42 *b* représente de la même façon les différences de phase de  $I_x$  avec  $E_0$  et de  $E_x$  avec  $E_0$  en fonction de  $ax$ . Elle a été construite en prenant les angles des différents vecteurs des figures 40 *b* et 41 *b* avec la directrice. On a aussi porté la différence de phase entre le courant  $I_x$  et la tension  $E_x$  pour chaque point du câble, tout simplement en formant la différence des ordonnées des courbes représentatives des angles de  $I_x$  avec  $E_0$  et de  $E_x$  avec  $E_0$ . Dans les trois courbes, les valeurs positives représentent des avances de phase de la quantité désignée en premier lieu sur celle qui est désignée en second, et vice-versa.

On voit distinctement que le retard de phase de  $I_x$  sur  $E_x$  qui se monte à  $63^\circ 26'$  à l'extrémité du câble va toujours en décroissant à mesure que l'on se rapproche du commencement; au point  $ax =$  environ  $31^\circ$ , ce retard devient nul et passe de là à une avance de phase qui tend vers  $45^\circ$ . La courbe de l'angle de  $I_x$  avec  $E_x$  dépasse même cette valeur, mais pour bientôt revenir au-dessous. La figure démontre à l'évidence que la différence de phase tend vers une valeur limite, qui ici est  $45^\circ$ , absolument comme dans le câble en circuit ouvert traité page 168; comme là-bas aussi, la valeur de cet angle dépasse un instant  $45^\circ$ , tombe au-dessous, repasse au-dessus, et ainsi de suite, mais avec des écarts de plus en plus petits. Nous donnerons plus tard (p. 206) un raisonnement qui démontrera que ce phénomène se produit dans tous les câbles en charge.

Avant que fussent découvertes les méthodes simplifiées qui sont exposées plus loin, quelques-uns des élèves de l'auteur ont pris la peine de faire les calculs numériques d'après la formule 14, qui donne  $E_x$  et la formule correspondante pour  $I_x$ . Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau XIX.

La comparaison de ce tableau et des figures 42 montre la coïncidence qu'on était en droit d'attendre.

TABLEAU XIX

$x$ km.	$E_x$	$I_x$	$\varphi_x$
0	1000	22,36	— 63° 26'
50	1302,7	20,034	— 39° 11'
100	1677	18,11	— 20° 20'
150	2067	17,17	— 1° 50'
200	2458	17,98	+ 16° 33'
250	2856	20,94	+ 31° 47'
300	3276	26,22	+ 43° 23'
350	3744	32,57	+ 47° 19'
400	4292	40,59	+ 49° 34'
450	4955	50,02	+ 49° 55'
500	5772	60,90	+ 49° 14'
550	6779	73,50	+ 48° 10'
600	8021	88,13	+ 47° 6'
650	9524	113,90	+ 46° 25'
700	11345	125,10	+ 45° 29'
750	13531	148,70	+ 45° 8'
800	16144	176,70	+ 44° 54'
850	19265	210,00	+ 44° 49'
900	22962	249,70	+ 44° 47'
950	27367	297,00	+ 44° 49'
1000	32604	353,40	+ 44° 52'
1050	38834	420,70	+ 44° 59'
1100	46240	500,80	+ 44° 57'
1150	55056	596,40	+ 44° 59'
1200	65554	710,10	+ 45° —
1250	78046	845,60	+ 45° —
1300	92920	1007,00	+ 45° —
1350	110633	1199,00	+ 45° —
1400	131400	1428,40	+ 45° —
1450	156811	1700,00	+ 45° —
1500	186742	2024,20	+ 45° —
1550	222353	2355,10	+ 45° —
1600	264753	2869,80	+ 45° —
1650	315246	3417,10	+ 45° —
1700	375355	4068,50	+ 45° —
1750	440930	4844,30	+ 45° —
1800	532143	5768,10	+ 45° —



Nous allons compléter cette étude en supposant maintenant que la charge imposée à l'extrémité du câble n'est pas inductive; puis nous prendrons le cas d'un courant à avance de phase sur la tension, ce qui peut par exemple arriver avec des moteurs synchrones.

Nous avons déjà résolu ces problèmes pour le câble artificiel (fig. 15 et 16, pl. II et III) avec les données suivantes :

Pour le cas du courant en avance de phase

$$I_0 = 10 + 20 i \text{ amp.} \quad (\text{II})$$

Pour le cas de la charge non inductive, en phase avec  $E_0$

$$I_0 = 22,36 \text{ amp.} \quad (\text{III})$$

Remarquons que l'avance de phase du courant du cas II mesure  $63^\circ 26'$  absolument comme le retard du problème que nous venons de faire. Les problèmes des figures 15 et 16 ont été refaits par l'auteur au moyen des spirales logarithmiques; les résultats obtenus concordent

Sans vouloir entrer dans tous les détails du calcul, nous donnerons ici les équations pour  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{I}_x$ .

Pour le cas II

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= 1429,9 e^{ax} e^{i(ax - 30^\circ 41')} - 765 e^{-ax} e^{i(-ax - 72^\circ 31')} \\ \mathbf{I}_x &= 15,49 e^{ax} e^{i(ax + 14^\circ 19')} - 8,287 e^{-ax} e^{i(-ax + 152^\circ 28')} \end{aligned}$$

Pour le cas III

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= 1514,6 e^{ax} e^{i(ax + 12^\circ 27')} - 579,6 e^{-ax} e^{i(-ax + 34^\circ 16')} \\ \mathbf{I}_x &= 16,41 e^{ax} e^{i(ax + 57^\circ 27')} - 6,279 e^{-ax} e^{i(-ax + 259^\circ 16')}. \end{aligned}$$

La figure 43 donne les résultats de ces deux problèmes ainsi que ceux du cas à charge inductive; ils sont particulièrement instructifs et valent la peine d'être étudiés de plus près. On reconnaît tout d'abord que ce n'est que dans le cas d'une charge inductive ( $\varphi_0 < 0$ ) que le courant décroît à partir de l'extrémité du câble pour croître ensuite,

tandis que quand la charge n'est pas inductive (cas III) ou quand il y a un décalage positif du courant  $I_0$  sur la tension  $E_0$  (cas II), le courant  $I_x$  croît d'une façon continue à partir de l'extrémité du câble. Les intensités sont très notablement différentes dans les trois cas ;  $I_x$  a sa plus grande valeur dans le cas où  $\varphi_0 > 0$  (courant en avance sur la tension) ; sa valeur est au contraire bien plus petite dans le cas où  $\varphi_0 < 0$  (courant en retard sur la tension) ; il a enfin une valeur intermédiaire pour la charge non inductive. Quant à la tension, elle croît dans les trois cas ; sa variation est assez rapide dans le cas où le courant est en avance, plus lente dans le cas où il est en retard. La charge inductive a donc comme propriété intéressante une variabilité relativement faible du courant et de la tension.

Quand on compare les différences de phase, on constate qu'elles tendent toutes vers la valeur  $\varphi_x = + 45^\circ$ , quelle que soit la valeur de  $\varphi_0$  à l'extrémité du câble. Dans tous les cas, l'angle  $\varphi_x$  a une variation ondulatoire autour de  $45^\circ$ , avec des écarts qui vont en décroissant.

Remarquons que cette marche ondulatoire ne se manifeste pas dans les longueurs usuelles des câbles. Il suffit, pour la pratique, de noter ce résultat important que  $\varphi_x$  tend vers  $45^\circ$  à mesure que l'on se rapproche du commencement du câble.

Les figures montrent aussi très distinctement ce que nous avons déjà remarqué dans l'étude du câble artificiel, c'est-à-dire que le courant atteint son minimum pour  $\varphi_x = 0$ . D'après ce que nous venons de dire sur les charges inductives, l'angle  $\varphi_x$  qui est négatif à l'extrémité du câble tend à se rapprocher de  $+ 45^\circ$  ; il doit donc s'y rencontrer un point où le courant passe par un minimum.

La figure 43 porte encore trois courbes en pointillé marquées  $I_0 = 0$  qui indiquent la variation de  $I_x$ ,  $E_x$  et  $\varphi_x$  pour un câble en circuit ouvert possédant les mêmes constantes de construction. Les ordonnées de ces trois courbes

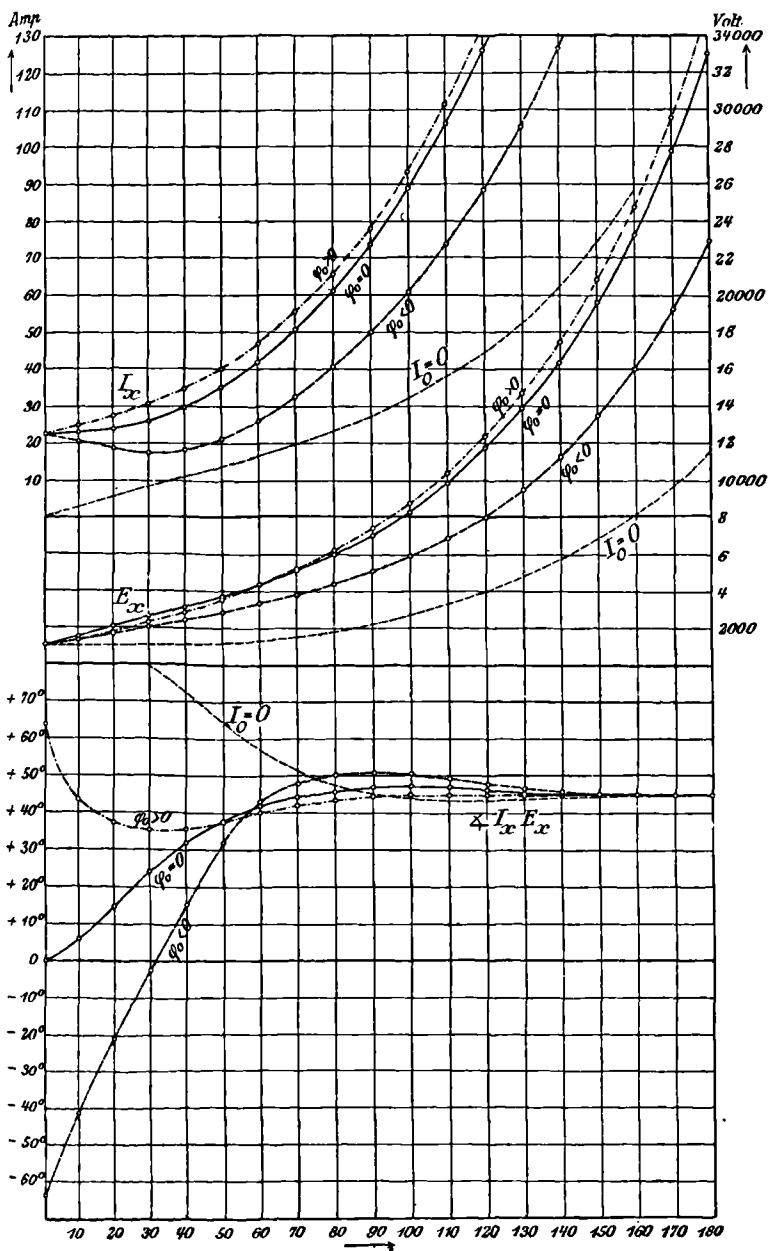


Fig. 43.

montrent de quelle façon le courant de charge influe sur la tension, le courant et la phase dans le câble.

Les ordonnées des courbes  $I_x$ , par exemple, comptées à partir de la courbe pointillée au lieu d'être comptées à partir de l'axe des abscisses, indiquent la part que prend le courant de charge du câble *en circuit ouvert* au courant total du câble *en charge*.

Pour simplifier la figure, la courbe des différences de phase du câble en circuit ouvert n'a été dessinée qu'à partir de  $ax = 30^\circ$ ; son prolongement vers la gauche amènera  $\varphi_x$  à valoir  $+ 90^\circ$  quand  $ax = 0$ .

La courbe de  $E_x$  pour le câble en circuit ouvert présente un certain intérêt pour la suite de cette étude. Nous voyons qu'elle croît très lentement, et que même en des points où la tension du câble en charge a atteint des valeurs plus que doubles de celle qu'elle a à l'extrémité du câble,  $E_x$  n'a que très peu augmenté. Le calcul exact d'après l'équation 13, page 133, donne sur la base du tableau X les valeurs suivantes pour le câble en circuit ouvert.

Quand $ax = 0^\circ$	$E_x = 1000,0$ volts,
$= 10^\circ$	$= 1000,3$ —
$= 20^\circ$	$= 1004,7$ —
$= 30^\circ$	$= 1024,8$ —

(Les valeurs  $\sqrt{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2ax}$  du tableau X ont été multipliées par 1 000 et divisées par 2).

Si l'on considère qu'en pratique on n'admet pas de chutes de tension supérieures à 10 à 15 p. 100, même à pleine charge, on reconnaît que la chute de tension du câble *en circuit ouvert* est tout à fait négligeable,  $ax$  ne valant jamais que quelques degrés<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Les figures 15, pl. II, montrent que dans le cas du câble en charge avec avance du courant sur la tension au récepteur ( $\varphi_0 > 0$ ), la chute de tension atteint 10 p. 100 pour  $ax = 2^\circ$ . Il est juste de dire que c'est le cas où cette chute est la plus forte.

Remarquons pour terminer que nous n'avons jusqu'à présent considéré que le câble ouvert sans self-induction ; nous renvoyons à l'étude faite pages 152 à 157 pour le câble en circuit ouvert possédant de la self.

#### Résistance du câble en circuit ouvert et en court-circuit.

— Quoique la méthode des spirales logarithmiques soit plus simple que le calcul numérique, elle est encore trop compliquée pour les applications techniques. Il est facile d'imaginer un procédé graphique qui n'est pas plus compliqué que celui que l'on emploie dans certains problèmes de courant alternatif, pour les transformateurs par exemple. Le point de départ de cette nouvelle méthode est la considération des résistances que présente le câble en *circuit ouvert* et en *court-circuit* ; sous ce nom de résistance, nous entendons le rapport des quantités  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{I}_x$  observées au commencement du câble, suivant que celui-ci est en circuit ouvert à l'autre bout, ou au contraire fermé sur une résistance infiniment petite. Désignons ces résistances par  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  ; il est facile de démontrer qu'elles sont complètement déterminées par les constantes  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$  et qu'elles peuvent les remplacer avantageusement dans tous les problèmes de câbles.

$\mathbf{R}_0$  est la résistance à *vide*, c'est-à-dire quand  $\mathbf{I}_0 = 0$  ; la résistance  $\mathbf{R}_c$  est au contraire celle du *court-circuit*, qui se produit donc quand  $\mathbf{E}_0 = 0$ . Si l'on introduit ces deux conditions successivement dans les équations 7 et 8, on a en appelant  $l$  la longueur du câble ( $x = l$  au commencement).

$$\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{E}_l}{\mathbf{I}_l} = u \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{e^{\nu l} - e^{-\nu l}} \quad (19)$$

et

$$\mathbf{R}_c = \frac{\mathbf{E}_l}{\mathbf{I}_l} = u \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} \quad (20)$$

Il est facile de voir que  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  sont données par les

quatre constantes  $r$ ,  $L$ ,  $c$ ,  $g$ , puisque  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont elles-mêmes des fonctions de ces constantes (éq. 11 et 3).  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  étant des quantités complexes,  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  le sont aussi. Désignons  $\mathbf{R}_0$  désormais sous le nom de résistance à vide,  $\mathbf{R}_c$  sous celui de résistance de court-circuit, en supposant pour simplifier que  $\mathbf{E}_l$  et  $\mathbf{I}_l$  soient données sous les formes principales

$$\mathbf{E}_l = A e^{i\alpha z}$$

et

$$\mathbf{I}_l = B e^{i\beta z}$$

$\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  auront la forme

$$\mathbf{R} = \frac{A}{B} e^{i(\alpha - \beta)z} = R e^{i\xi z}. \quad (21)$$

Un angle  $\xi$  positif signifie que  $\alpha > \beta$ , donc une avance de phase de la tension sur le courant.

Il est facile de mesurer  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  sur un câble existant. En effet, le rapport  $R = \frac{A}{B}$ , représentant le rapport des amplitudes de la tension et du courant, est en même temps le rapport des valeurs efficaces ; on le détermine facilement par le voltmètre et l'ampèremètre.  $(\alpha - \beta)$  est la différence de phase entre la tension et le courant ; on la déterminera en plaçant au commencement du câble un wattmètre en même temps que le voltmètre et l'ampèremètre ; le rapport entre la puissance vraie donnée par le premier instrument et la puissance apparente qui est le produit des deux autres lectures donnera le cosinus de la différence de phase.

Le mesure de  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  étant faite, on peut en tirer facilement les constantes  $r$ ,  $L$ ,  $c$ ,  $g$ , par les équations 19 et 20. En effet en multipliant ces deux équations on a

$$\mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_c} \quad (22)$$

et en les divisant

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2l} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{R}_0} + \sqrt{\mathbf{R}_c}}{\sqrt{\mathbf{R}_0} - \sqrt{\mathbf{R}_c}}. \quad (23)$$

Ce dernier résultat se justifie ainsi :

En posant provisoirement

$$\sqrt{\frac{\mathbf{R}_c}{\mathbf{R}_0}} = \mathbf{Z},$$

on a

$$\mathbf{Z} = \frac{e^{\mathbf{v}l} - e^{-\mathbf{v}l}}{e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}} = \frac{e^{2\mathbf{v}l} - 1}{e^{2\mathbf{v}l} + 1}$$

et encore

$$e^{2\mathbf{v}l} = \frac{1 + \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{Z}}.$$

En utilisant les relations connues :

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{R}\mathbf{K}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}}$$

on tire

$$\mathbf{R} = \mathbf{u}\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}},$$

puis en mettant  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$  sous les formes accessoires

$$\mathbf{R} = r + i\omega L \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = g + i\omega c,$$

obtient finalement par la séparation des quantités réelles des quantités imaginaires, les constantes cherchées  $r$ ,  $L$ ,  $c$  et  $g$ .

Cette méthode permet de vérifier les résultats obtenus d'après les dimensions du câble par les formules données au début de cet ouvrage pour  $r$ ,  $L$ ,  $c$ ,  $g$ .

Le problème inverse, qui consiste à déterminer  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  par le calcul en partant des constantes du câble, n'offre pas de difficultés. Si on néglige la self-induction et le courant dans l'isolant (si donc  $b = a$ ), le tableau XII donne pour n'importe quel  $ax$  les valeurs de  $e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}$  et de  $e^{\mathbf{v}l} - e^{-\mathbf{v}l}$ . Le facteur  $\mathbf{u}$  des équations 19 et 20 ayant, dans

ce cas spécial, la valeur

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} &= \frac{r + i\omega L}{a + bi} = \frac{r}{a} \frac{1}{1 + i} = \sqrt{\frac{2r}{x}} \frac{1}{1 + i} \\ &= \sqrt{\frac{r}{2x}} (1 - i) = \sqrt{\frac{r}{x}} e^{-i 45^\circ}. \quad (24) \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  peuvent être facilement tirés du tableau XII pour des valeurs quelconques de  $r$  et  $x$ .

Le tableau XX contient les valeurs ainsi obtenues pour  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$ , au facteur  $\sqrt{\frac{r}{x}}$  près. On remarquera que nous avons mis  $\mathbf{R}_0$  sous la forme

$$\mathbf{R}_0 = R_0 e^{i\varphi_{0,x}}$$

et  $\mathbf{R}_c$  sous la forme

$$\mathbf{R}_c = R_c e^{i\varphi_{c,x}}.$$

L'emploi du tableau XX est évident. Pour le câble parfaitement isolé et dépourvu de self que nous avons considéré à la page 186, nous avons

$$\sqrt{\frac{r}{x}} = 92,31.$$

Pour  $ax = 10^\circ$  par exemple on obtient

$$\mathbf{R}_0 = 92,31 \cdot 4,053 \cdot e^{-i 88^\circ 50' 18''} = 374,1 \cdot e^{-i 88^\circ 50' 18''}$$

et

$$\mathbf{R}_c = 92,31 \cdot 0,2467 \cdot e^{-i 1^\circ 9' 42''} = 22,77 \cdot e^{-i 1^\circ 9' 42''}.$$

Les figures 44 *a* et 44 *b* donnent une représentation graphique de  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  : les longueurs des vecteurs représentent les amplitudes de  $R_{0,\max}$  et  $R_{c,\max}$  ; les inclinaisons de ces vecteurs sur la ligne  $OO^\circ$  indiquent les 'angles des différences de phases. Les chiffres placés à côté des différents points correspondent à ceux du tableau XX.

Les équations 19 et 20 donnent une relation qui rend les courbes 44 *a* et 44 *b* particulièrement utiles ainsi que



TABLEAU XX

No	$ax$	$R_o = R_o e^{i\tau_o, x}$		$R_c = R_c e^{i\tau_c, x}$	
		$R_o \sqrt{\frac{x}{r}}$	$\varphi_{o, x}$	$R_c \sqrt{\frac{x}{r}}$	$\varphi_{c, x}$
0	0°	$\infty$	— 90° 0' 0"	0,00000	0° 0' 0"
1	10°	4,05300	— 88° 50' 18"	0,24673	— 1° 9' 42"
2	20°	2,03690	— 85° 21' 51"	0,49094	— 4° 38' 9"
3	30°	1,38162	— 79° 42' 58"	0,72378	— 10° 17' 2"
4	40°	1,08455	— 72° 19' 13"	0,92204	— 17° 40' 47"
5	50°	0,94282	— 64° 21' 25"	1,06063	— 25° 38' 35"
6	60°	0,88524	— 57° 13' 12"	1,12964	— 32° 46' 48"
7	70°	0,87560	— 51° 25' 17"	1,14205	— 38° 34' 43"
8	80°	0,89116	— 47° 24' 35"	1,12213	— 42° 35' 25"
9	90°	0,91715	— 45° 0' 0"	1,09033	— 45° 0' 0"
10	100°	0,94430	— 43° 48' 10"	1,05900	— 46° 11' 50"
11	110°	0,96760	— 43° 25' 18"	1,03350	— 46° 34' 42"
12	120°	0,98496	— 43° 29' 10"	1,01526	— 46° 30' 50"
13	130°	0,99630	— 43° 47' 51"	1,00372	— 46° 12' 9"
14	140°	1,00261	— 44° 8' 25"	0,99740	— 45° 51' 35"
15	150°	1,00533	— 44° 28' 8"	0,99470	— 45° 31' 52"
16	160°	1,00579	— 44° 43' 40"	0,99424	— 45° 16' 20"
17	170°	1,00500	— 44° 53' 54"	0,99503	— 45° 6' 6"
18	180°	1,00377	— 45° 0' 0"	0,99625	— 45° 0' 0"

LE CABLE EN CHARGE

le tableau XX. En effet, en posant

$$\frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{e^{\nu l} - e^{-\nu l}} = Ae^{i\alpha}$$

et en tenant compte de la valeur que donne pour  $\alpha$  l'équation 24, on obtient

$$\mathbf{R}_o = \sqrt{\frac{r}{x}} A e^{i\alpha - i45^\circ}$$

et

$$\mathbf{R}_c = \sqrt{\frac{r}{x}} \frac{1}{A} e^{-i\alpha - i45^\circ}.$$

On constate que les amplitudes, le facteur  $\sqrt{\frac{r}{x}}$  étant mis à part, sont inverses l'une de l'autre, et que les angles de phase ( $\alpha - 45^\circ$ ) et ( $-\alpha - 45^\circ$ ) ont pour somme constante  $90^\circ$ ; il est facile de le vérifier sur le tableau XX. Les propriétés caractéristiques de  $\mathbf{R}_o$  étant déjà connues par le chapitre qui traite du câble en circuit ouvert, il est facile d'en tirer l'allure de  $\mathbf{R}_c$ . Reprenons en conséquence le câble en circuit ouvert.

Nous avons démontré page 168 que dans le câble en circuit ouvert la différence de phase du *courant* sur la *tension* est de  $+90^\circ$  à l'extrémité du câble et qu'elle tend vers  $+45^\circ$  à mesure que l'on se rapproche du générateur, mais toutefois en oscillant autour de cette dernière valeur. Ici l'angle de décalage  $\varphi_x$  qui figure dans les expressions de  $\mathbf{R}_o$  et  $\mathbf{R}_c$  donne la différence de phase entre la *tension* et le *courant*, puisque nous avons divisé  $\mathbf{E}_x$  par  $\mathbf{I}_x$ . Cet angle possède par conséquent le signe contraire de celui qui indique la différence de phase entre le *courant* et la *tension* dans le câble en circuit ouvert.

Dans le tableau XX on voit par conséquent que pour  $\mathbf{R}_o$ ,  $\varphi_{o,x}$  part de  $-90^\circ$  et tend vers  $-45^\circ$  en oscillant autour de cette valeur; le crochet de la figure 44a provient de ce fait.

Si nous prolongions le tableau, le crochet se continuerait par une spirale dont les tangentes issues du point  $O$

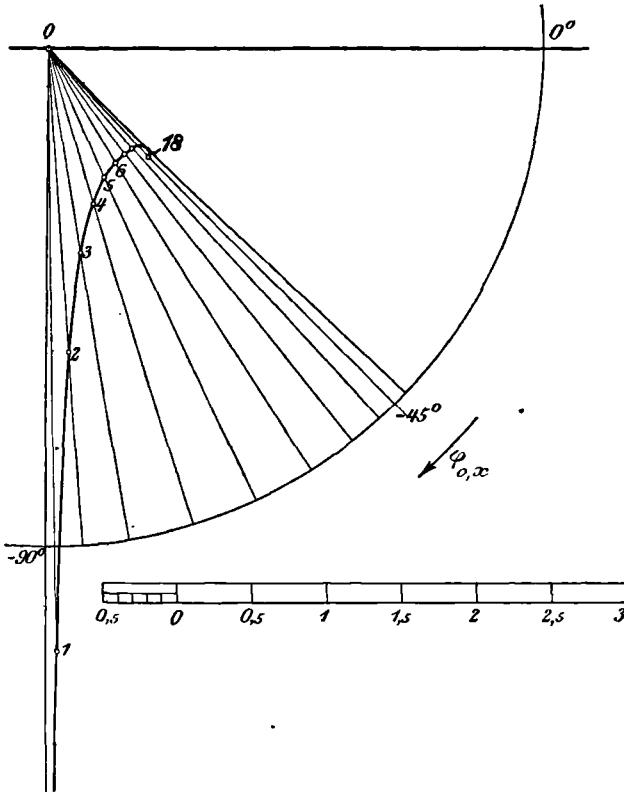


Fig. 44 a.

seraient alternativement de part et d'autre du vecteur  $-45^\circ$ , et s'en rapprocheraient d'une façon continue.

On aurait de même pour la figure 44 b une spirale dont les tangentes successives se rapprocheraient d'une façon analogue du vecteur  $-45^\circ$  puisque les décalages des points correspondants de  $R_o$  et  $R_c$  se complètent à  $(-90^\circ)$ .

Si maintenant nous considérons un câble avec self-

204 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 induction et courant dérivé dans l'isolant, nous avons  
 d'après l'équation 9

$$u = \frac{1}{m + ni} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{n}{m}} \equiv \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-i\beta}$$

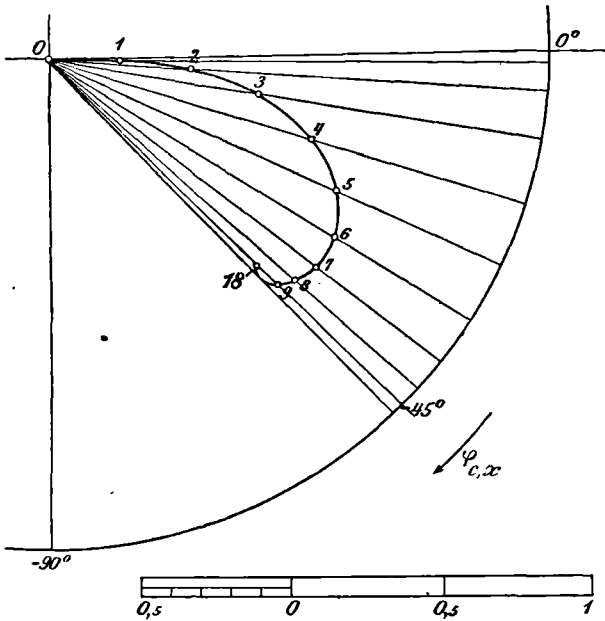


Fig. 44 b.

en posant comme dans l'équation 20, page 109

$$\operatorname{arctg} \frac{n}{m} = \beta.$$

On obtiendra finalement, en employant les mêmes notations  
 abrégées que plus haut

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} A e^{+i\alpha - i\beta} = R_0 e^{+i\alpha - i\beta} \quad (25)$$

$$R_c = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{1}{A} e^{-i\alpha - i\beta} = R_c e^{-i\alpha - i\beta}. \quad (26)$$

Ces équations montrent qu'en un point quelconque du câble, les angles de phase de  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  ont pour somme constante ( $-2\beta$ ).

Nous avons montré (éq. 34, p. 164) qu'à l'extrémité du câble  $\mathbf{R}_0$  a pour angle de phase  $\varphi_{0,0} = -(\psi + \beta)$ <sup>1</sup>; l'angle de phase de  $\mathbf{R}_c$  a donc pour valeur  $\varphi_{c,0} = \psi - \beta$  et celui de  $\mathbf{R}_0$  (p. 164) :

$$\varphi_{0,0} = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (27)$$

comme on peut le voir d'après les équations 20, page 109, pour  $\operatorname{tg} \beta$  et les équations 14 et 15, page 162 pour  $\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}$ . En substituant dans l'équation  $\varphi_{c,0} = \psi - \beta$  à  $\operatorname{tg} \psi$  et  $\operatorname{tg} \beta$  les valeurs données par les équations que nous venons de rappeler, nous obtenons pour l'angle de phase de  $\mathbf{R}_c$  à l'extrémité du câble

$$\psi_{c,0} = +\operatorname{arctg} \frac{s}{r}.$$

On voit donc que si dans le tableau XX (câble ne possédant que de la résistance et de la capacité) on a  $\varphi_{0,0} = -90^\circ$  et  $\varphi_{c,0} = 0^\circ$ , il n'en est pas de même dans le cas d'un câble en circuit ouvert à isolement défectueux, et qu'alors l'avance de phase ( $-\varphi_{0,0}$ ) du courant sur la tension descend au-dessous de  $90^\circ$ ; l'existence de la self-induction a même pour conséquence que l'égalité de phases à l'extrémité du câble en court-circuit disparaît et que le courant prend un retard de phase sur la tension. La capacité et l'isolement défectueux n'ont pas d'influence sur l'état électrique du câble en court-circuit; la résistance et la self

<sup>1</sup> Si on se reporte à l'équation 34, page 164, on voit que l'on a posé  $\varphi_0 = +(\psi + \beta)$ ; mais il faut se souvenir qu'à l'endroit cité, il avait été convenu que l'on prendrait pour positive l'avance de phase du courant sur la tension, tandis qu'ici, l'observation à la suite de l'équation 21 (p. 198) fait justement la convention contraire.

n'en ont pas sur l'état électrique du câble en circuit ouvert.

Dans les figures 45 *a* et 45 *b*, la directrice représente la phase de la tension au commencement du câble, endroit où l'on mesure  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$ . Le vecteur OA donne la phase de  $\mathbf{R}_0$ , le vecteur OB celle de  $\mathbf{R}_c$ , toutes deux à l'extrémité du câble ; la figure 45 *a* s'applique au cas du câble où  $L = 0$  et  $g = 0$ , la figure 45 *b* à celui du câble avec self et courant dérivé dans l'isolant.

Nous avons démontré à la page 167 qu'en un point très éloigné de l'extrémité du câble en circuit ouvert (par exemple pour le commencement de ce câble)  $\varphi_{0,x} = -\beta^1$ , c'est-à-dire que le courant a une avance de phase  $\beta$  sur la tension. Comme les angles de phase de  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  ont pour somme constante ( $-2\beta$ ), nous aurons de même au commencement du câble de grande longueur court-circuité à son extrémité  $\varphi_{c,x} = -\beta$ . Le vecteur OC de la figure 45 *b* fait avec la directrice un angle ( $-\beta$ ) ; il indique donc par sa position la phase du courant au commencement du câble, qu'il s'agisse du câble ouvert ou du câble en court-circuit.

Comme l'angle  $\text{ROC} = (-\beta)$  et l'angle  $\text{ROA} = -(\psi + \beta)$ , il en suit que  $\text{COA} = (-\psi)$ . Comme d'autre part  $\text{ROB} = (\psi - \beta)$ , COB doit être égal à  $\psi$ . Les rayons vecteurs OA et OB doivent donc être tracés de façon à faire individuellement l'angle  $\psi$  avec OC.

On peut donc se représenter de la façon suivante la variation de la différence de phase entre la tension et le courant à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité, qu'il s'agisse du câble ouvert ou du câble court-circuité :

Dans le câble court-circuité, la tension à l'extrémité a une avance de phase sur le courant (OB), qui ne disparaît que dans le câble parfaitement isolé et dépourvu de self ; à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité, l'avance de

<sup>1</sup> Voir la remarque page précédente.

phase de la tension diminue, s'annule et est remplacée par une avance de phase du courant, avance qui atteint

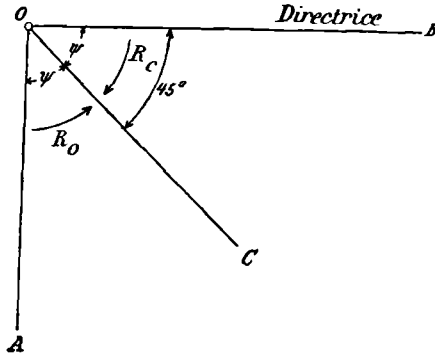


Fig. 45 a.

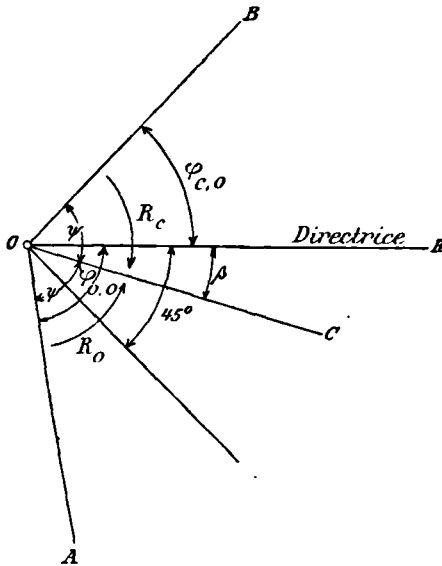


Fig. 45 b.

finalment la valeur  $\beta$  (OC), et qui dans le cas spécial que nous étudions se monte à  $45^\circ$ .

Dans le câble ouvert, par contre, nous avons à l'extrémité une avance de l'intensité (OA) qui vaut presque  $90^\circ$  (pour  $g = 0$  et  $s = 0$  exactement  $90^\circ$ ) et qui diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité du câble jusqu'à atteindre aussi la valeur  $\beta$  (OC).

A mesure que la longueur du câble augmente, les deux vecteurs OB et OA tendent vers une position limite qui est celle du vecteur OC. Nous avons démontré à la page 168 que dans le câble ouvert la valeur  $\beta$  n'est pas atteinte directement, mais par oscillations d'amplitude décroissante autour de cette valeur  $\beta$  ; cette conclusion est vraie aussi pour le câble court-circuité dont la différence de phase fait en tout point une somme constante de  $(-2\beta)$  avec celle du câble ouvert. Les vecteurs OA et OB se rapprocheront donc de leur position limite OC par un mouvement pendulaire.

Comme l'on peut évidemment considérer les cas limites déterminés par  $R_0$  et  $R_c$  comme des cas spéciaux du câble en charge, et que d'autre part il a été démontré à la page 183 que dans ce dernier, pour un point suffisamment éloigné de l'extrémité, il se produit la différence de phase  $\beta$ , il est clair que dans un câble à charge quelconque la différence de phase se rapprochera de la valeur  $\beta$  par oscillations pendulaires.

La figure 45 b permet de se faire une idée de la valeur de l'angle limite  $\beta$ . L'équation 27,  $\varphi_{0,0} = -\arctg \frac{x}{g}$ , montre que  $\varphi_{0,0}$  est toujours plus petit que  $-90^\circ$  quand l'isolement n'est pas parfait ; comme d'autre part  $\varphi_{0,0} = -(\psi + \beta)$  et que dans les câbles modernes bien isolés,  $b$  est toujours plus grand que  $a$  (voir tableau VII), il en suit  $\psi = \arctg \frac{b}{a} > 45^\circ$  et enfin  $\beta < 45^\circ$ .

Un exemple numérique confirmera ce que nous venons de dire sur l'influence de la self-induction. Reprenons le



câble de la page 200 qui avait

$$\begin{aligned} r &= 0,455 \text{ ohms par km.}, \\ c &= 0,17 \text{ mf.} \quad \gg \\ L &= g = 0, \end{aligned}$$

et prenons

$$\begin{aligned} l &= 200 \text{ km.} \\ \nu &= 50 \text{ périodes par seconde.} \end{aligned}$$

nous aurons

$$\mathbf{R}_0 = 114,27 e^{-i 77^{\circ}0'2''} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_c = 74,55 e^{-i 12^{\circ}59'58''}.$$

Si par contre  $L$  n'est pas nul, mais que par exemple la vaillance  $4,076 \cdot 10^{-4}$  henrys, nous aurons

$$\mathbf{R}_0 = 107,35 e^{-i 75^{\circ}45'51''} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_c = 82,45 e^{+i 1^{\circ}29'39''}.$$

Les tableaux XXI et XXII, donnant les valeurs de  $\mathbf{R}_0$  et de  $\mathbf{R}_c$  pour la ligne aérienne et pour différentes longueurs des câbles à 10 000 volts, permettront de se faire une idée des valeurs pratiques de ces deux quantités.

Les résistances  $\mathbf{R}_0$  donnent l'état du câble ouvert avec tous les détails importants en pratique. D'après la définition de  $\mathbf{R}_0$  le câble ouvert admet sous la tension initiale  $E_l$ , un courant

$$\mathbf{I}_l = \frac{\mathbf{E}_l}{\mathbf{R}_0} = \frac{E_l}{R_0} e^{-i \varphi_0, l}.$$

Les valeurs  $\frac{E_l}{R_0}$  et  $-\varphi_0, l$  sont par conséquent la répétition des valeurs données pour les courants et les phases dans les tableaux XIV et XVI.

La résistance  $\mathbf{R}_c$  présente un intérêt particulier en ce sens qu'elle peut être considérée comme la résistance apparente du câble, d'une façon analogue à ce qui se passe en courant continu, où la résistance de la ligne est le quotient de la tension par le courant quand la ligne est court-circuitée à son extrémité.

TABLEAU XXI

Valeurs de  $R_0$  dans les câbles à 10000 volts et la ligne aérienne Lauffen-Francfort;  
fréquence 50 périodes par seconde.

	N°	$R_0$			
		$l = 50$ km.	$l = 100$ km.	$l = 150$ km.	$l = 200$ km.
Câbles à 10 000 volts.	1	$488,50 \cdot e^{-i \cdot 80^\circ 21' 37''}$	$250,33 \cdot e^{-i \cdot 75^\circ 53' 36''}$	$188,99 \cdot e^{-i \cdot 61^\circ 16' 26''}$	$179,88 \cdot e^{-i \cdot 48^\circ 55' 36''}$
	2	$443,46 \cdot e^{-i \cdot 87^\circ 29' 17''}$	$222,49 \cdot e^{-i \cdot 80^\circ 9' 41''}$	$156,48 \cdot e^{-i \cdot 68^\circ 39' 16''}$	$135,32 \cdot e^{-i \cdot 56^\circ 3' 32''}$
	3	$391,17 \cdot e^{-i \cdot 88^\circ 10' 8''}$	$194,46 \cdot e^{-i \cdot 82^\circ 47' 32''}$	$131,96 \cdot e^{-i \cdot 73^\circ 52' 39''}$	$106,68 \cdot e^{-i \cdot 62^\circ 38' 50''}$
	4	$366,15 \cdot e^{-i \cdot 88^\circ 34' 55''}$	$181,22 \cdot e^{-i \cdot 84^\circ 27' 43''}$	$120,74 \cdot e^{-i \cdot 77^\circ 26' 6''}$	$93,628 \cdot e^{-i \cdot 67^\circ 52' 35''}$
	5	$342,32 \cdot e^{-i \cdot 88^\circ 55' 25''}$	$168,96 \cdot e^{-i \cdot 85^\circ 49' 59''}$	$111,24 \cdot e^{-i \cdot 80^\circ 27' 43''}$	$83,706 \cdot e^{-i \cdot 72^\circ 40' 4''}$
	6	$321,42 \cdot e^{-i \cdot 89^\circ 10' 23''}$	$158,38 \cdot e^{-i \cdot 86^\circ 48' 35''}$	$103,55 \cdot e^{-i \cdot 82^\circ 40' 35''}$	$76,497 \cdot e^{-i \cdot 76^\circ 33' 57''}$
	7	$301,42 \cdot e^{-i \cdot 89^\circ 20' 25''}$	$149,87 \cdot e^{-i \cdot 87^\circ 30' 38''}$	$97,62 \cdot e^{-i \cdot 81^\circ 15' 59''}$	$71,363 \cdot e^{-i \cdot 70^\circ 23' 53''}$
	8	$294,46 \cdot e^{-i \cdot 89^\circ 26' 58''}$	$144,91 \cdot e^{-i \cdot 87^\circ 57' 11''}$	$94,21 \cdot e^{-i \cdot 85^\circ 17' 30''}$	$68,477 \cdot e^{-i \cdot 81^\circ 15' 26''}$
Ligne aérienne.		$7294,3 \cdot e^{-i \cdot 89^\circ 49' 47''}$	$3637,1 \cdot e^{-i \cdot 89^\circ 17' 17''}$	$2414,3 \cdot e^{-i \cdot 88^\circ 23' 12''}$	$1800,8 \cdot e^{-i \cdot 87^\circ 6' 21''}$

TABLEAU XXII

Valeurs de  $R_c$  dans les câbles à 40 000 volts et la ligne aérienne Lauffen-Francfort : fréquence 50 périodes par seconde<sup>1</sup>.

	N°	$R_c$				arctg $\frac{s}{r}$
		$l = 50$ km.	$l = 100$ km.	$l = 150$ km.	$l = 200$ km.	
Câbles à 40 000 volts.	1	$91,046 \cdot e^{i \cdot 1^\circ 14' 59''}$ (90,50) [90,820]	$177,67 \cdot e^{-i \cdot 9^\circ 13' 2''}$ (181,00) [181,640]	$235,33 \cdot e^{-i \cdot 23^\circ 50' 12''}$ (271,50) [272,460]	$247,25 \cdot e^{-i \cdot 36^\circ 11' 2''}$ (362,00) [363,28]	4° 48' 7"
	2	$56,806 \cdot e^{i \cdot 4^\circ 38' 23''}$ (56,15) [56,580]	$113,22 \cdot e^{-i \cdot 2^\circ 41' 13''}$ (112,30) [113,160]	$160,98 \cdot e^{-i \cdot 14^\circ 11' 38''}$ (168,45) [169,740]	$186,16 \cdot e^{-i \cdot 26^\circ 47' 22''}$ (224,6) [226,32]	7° 3' 52"
	3	$36,639 \cdot e^{i \cdot 8^\circ 2' 22''}$ (35,94) [36,472]	$73,702 \cdot e^{i \cdot 2^\circ 39' 46''}$ (71,88) [72,943]	$108,62 \cdot e^{-i \cdot 6^\circ 15' 7''}$ (107,82) [109,416]	$134,35 \cdot e^{-i \cdot 17^\circ 28' 56''}$ (143,76) [145,89]	9° 47' 42"
	4	$26,471 \cdot e^{i \cdot 11^\circ 32' 31''}$ (25,675) [26,339]	$53,483 \cdot e^{i \cdot 7^\circ 25' 19''}$ (51,35) [52,678]	$80,275 \cdot e^{-i \cdot 0^\circ 23' 42''}$ (77,03) [79,017]	$103,52 \cdot e^{-i \cdot 9^\circ 9' 49''}$ (102,70) [105,36]	12° 53' 18"
	5	$18,900 \cdot e^{i \cdot 16^\circ 3' 55''}$ (17,97) [18,802]	$38,292 \cdot e^{i \cdot 13^\circ 0' 29''}$ (35,94) [37,604]	$58,163 \cdot e^{i \cdot 7^\circ 38' 15''}$ (53,91) [56,406]	$77,293 \cdot e^{-i \cdot 0^\circ 3' 26''}$ (71,88) [75,21]	17° 6' 9"
	6	$13,953 \cdot e^{i \cdot 21^\circ 35' 17''}$ (12,835) [13,878]	$28,318 \cdot e^{i \cdot 19^\circ 13' 29''}$ (25,67) [27,756]	$43,312 \cdot e^{i \cdot 15^\circ 5' 29''}$ (38,51) [41,634]	$58,630 \cdot e^{i \cdot 8^\circ 58' 51''}$ (51,34) [55,51]	22° 21' 10"
	7	$10,771 \cdot e^{i \cdot 27^\circ 23' 7''}$ (9,46) [10,713]	$21,879 \cdot e^{i \cdot 25^\circ 33' 20''}$ (18,92) [21,426]	$33,588 \cdot e^{i \cdot 22^\circ 18' 41''}$ (28,38) [32,139]	$45,946 \cdot e^{i \cdot 17^\circ 26' 35''}$ (37,84) [42,85]	27° 59' 2"
	8	$8,983 \cdot e^{i \cdot 32^\circ 32' 2''}$ (7,49) [8,934]	$16,255 \cdot e^{i \cdot 31^\circ 2' 15''}$ (14,98) [17,868]	$28,078 \cdot e^{i \cdot 28^\circ 23' 34''}$ (22,47) [26,802]	$38,618 \cdot e^{i \cdot 24^\circ 20' 30''}$ (29,96) [35,74]	33° 1' 45"
Ligne aérienne.		$70,770 \cdot e^{i \cdot 16^\circ 44' 57''}$ (67,63) [70,712]	$141,94 \cdot e^{i \cdot 16^\circ 12' 27''}$ (135,30) [141,424]	$213,82 \cdot e^{i \cdot 15^\circ 18' 22''}$ (202,95) [212,136]	$286,66 \cdot e^{i \cdot 14^\circ 1' 31''}$ (270,6) [282,848]	16° 55' 7"

<sup>1</sup> Voir page 214 l'explication des petits caractères.

On remarquera tout d'abord que cette résistance apparente n'est pas proportionnelle à la longueur comme c'est le cas dans la ligne qui ne possède que de la résistance ohmique et de la self-induction.

Comme le courant dérivé dans l'isolant est insignifiant dans les câbles modernes, la seule cause de ce fait doit être la capacité uniformément répartie le long du câble.

Prenons par exemple le câble n° 1 ; le fait de prendre 100 kilomètres au lieu de 50 fait passer  $R_c$  de 91,046 à 177,67 ; ici  $R_c$  double presque de valeur ; de 100 kilomètres à 200,  $R_c$  passe de 177,67 à 247,25 ; ici le doublement de la longueur n'amène plus qu'une augmentation de 40 p. 100 sur  $R_c$ .

Il est facile de reconnaître la loi de variation de  $R_c$  avec la longueur ; il suffit de remplacer dans les équations 19 et 20 les amplitudes des trois termes  $u$ ,  $e^{vt} + e^{-vt}$ ,  $e^{vt} - e^{-vt}$ , par les valeurs tirées des équations 8, page 123, 17 et 19 page 134 ; on obtient alors

$$R_c = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}}$$

et d'une façon analogue

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}}$$

Nous retrouvons dans l'expression de  $R_c$  la fraction représentée par  $f$ , page 138 ; mais dans le passage cité  $f$  est caractéristique pour le courant admis par un câble en circuit ouvert, tandis qu'ici il montre de quelle façon  $R_c$  dépend de  $x$ . Il a été démontré à la page 160 que pour des  $x$  croissants,  $f$  part de 0 et se rapproche par oscillations pendulaires décroissantes de la limite 1. Il en suit pour la résistance  $R_c$  qu'elle ne croît pas régulièrement avec la longueur du câble, mais qu'elle oscille en se rapprochant

de la limite  $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ , de la même façon que son angle de phase  $\varphi_c$  se rapproche de la limite  $\beta$ .

Nous avons de même dans l'expression de  $R_0$  la valeur inverse de  $f$ , qui, comme  $f$  lui-même s'approche de la limite 1 par oscillations pendulaires. La limite de  $R_0$  est par conséquent la même que celle de  $R_c$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ ; cette limite est d'après la page 183 celle de la résistance du câble à charge quelconque.

Le tableau VII donne dans la colonne  $u$  la valeur de cette limite pour le câble de longueur infinie; en effet, l'équation 8, page 123, montre que  $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$  est l'amplitude de  $u$ . Une première réflexion semble indiquer que la résistance d'un câble *ouvert* de longueur finie doit être plus grande que cette limite, puisque à tension égale plus un câble est court moins, il paraît qu'il doive admettre de courant de charge en circuit ouvert; dans le câble de longueur finie en *court-circuit*, au contraire, il semble que la résistance doit être plus petite que dans le câble de longueur infinie en court-circuit. Ces conclusions sont confirmées par le tableau pour des câbles relativement courts; mais à mesure que l'on considère des câbles plus longs, les oscillations pendulaires retournent le sens des écarts; dans les câbles 1 et 2 ce retournement se produit vers 150 kilomètres, pour les câbles 3 et 4 vers 200 kilomètres: en considérant des longueurs de câble plus grandes, les écarts changeraient de sens à intervalles réguliers.

Ce que nous venons de dire pour  $R_0$  est déjà contenu implicitement dans ce que nous avons dit de  $I_l$  pour le câble ouvert (p. 157 à 168).

La comparaison directe de la résistance apparente  $R_c$  du câble avec la valeur que l'on obtiendrait en ne considérant que la résistance ohmique, ou la résistance et la self

seulement est très intéressante, car cette comparaison va faire ressortir l'influence de la capacité uniformément répartie.

La résistance ohmique vaut  $rl$  pour la longueur  $l$ ; la résistance apparente due à la résistance ohmique et à la self vaut

$$l\sqrt{r^2 + s^2}.$$

Le tableau XXII indique les valeurs de  $rl$  et de  $l\sqrt{r^2 + s^2}$ ;  $rl$  est représenté par les nombres entre parenthèses,  $l\sqrt{r^2 + s^2}$  par les nombres entre crochets.

On constate du premier coup d'œil que ces deux séries de nombres ne présentent entre elles que très peu de différences, et cela non seulement dans les câbles, mais aussi dans la ligne aérienne dont la self est pourtant plus considérable. Par contre on voit que l'effet de la capacité est très important, tout au moins dans les câbles de grande longueur. En général, la résistance en est augmentée; ce n'est qu'à partir de 100 kilomètres pour le câble 1, à partir de 150 kilomètres pour les câbles 2 et 3, et à partir de 200 kilomètres pour les câbles 4 et suivants que la capacité se manifeste par une *diminution* de résistance. Cette diminution tient, comme nous l'avons déjà vu, aux oscillations de la valeur de  $R_c$ .

Le tableau XXII indique encore la différence de phase entre la tension et l'intensité, dont la valeur est exprimée par arc  $\operatorname{tg} \frac{s}{r}$  pour toutes les longueurs des câbles court-circuités n'ayant que de la résistance et de la self; cette donnée est importante, car elle indique aussi la différence de phase entre la *chute de tension* et l'intensité de la ligne en charge; nous avons vu d'ailleurs qu'elle est utilisée dans le calcul de la tension au commencement du câble en partant de la tension exigée à la fin du câble, et dans le calcul inverse (voy. l'angle CAB de la figure 6 a).

Les écarts de  $\varphi_c$  et de arc  $\operatorname{tg} \frac{s}{r}$  sont faibles dans la ligne aérienne ; mais dans les câbles, tout au moins pour les grandes longueurs, ils sont très importants et produisent même parfois des changements de signes ; en effet, nous savons que si on considère des longueurs de câble de plus en plus considérables, le courant tend à avancer sur la tension, tandis que dans la ligne dépourvue de capacité le courant est toujours en retard de phase.

C'est pourquoi nous constatons dans les câbles les plus faibles des différences déjà considérables pour des longueurs relativement petites.

S'il fallait amener la résistance apparente des câbles, calculée sans tenir compte de la capacité, à la même forme que  $\mathbf{R}_c = R_c e^{i\varphi_c}$  il suffirait dans chaque cas particulier de remplacer  $R_c$  par la valeur placée entre crochets et de substituer à  $\varphi_c$  la valeur arc  $\operatorname{tg} \frac{s}{r}$ .

Nous aurions par exemple pour 50 kilomètres du câble 1 sans la capacité 90,820.  $e^{+i \cdot 4^\circ 48' 7''}$  au lieu de  $\mathbf{R}_c = 91,046 e^{+i \cdot 1^\circ 14' 59''}$ . Pour 150 kilomètres du câble 2, sans la capacité, 169,740  $e^{+i \cdot 7^\circ 3' 52''}$ , au lieu de  $\mathbf{R}_c = 160,98 e^{-i \cdot 14^\circ 11' 38''}$ , etc.

Les comparaisons de cette nature montrent de façon très évidente l'influence de la capacité sur la résistance apparente.

Pour terminer, nous allons calculer au moyen de l'équation 22, page 9, la puissance absorbée par le câble ouvert et le câble en court-circuit.

D'après l'équation 20, p. 197, nous avons pour le câble en court-circuit

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{I}_{c,l} \mathbf{R}_c.$$

En prenant  $\mathbf{I}_{c,l}$  comme origine des phases, de telle sorte

216 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
 que  $\mathbf{I}_{c,l} = I_{c,l}$ , nous obtenons

$$\mathbf{E}_l = I_{c,l} y_c + i U_{c,l} z_c,$$

en posant

$$\mathbf{R}_c = y_c + iz_c.$$

Grâce à ces transformations  $\mathbf{I}_{c,l}$  et  $\mathbf{E}_l$  se présentent maintenant sous la forme des équations 14 et 15, pages 7 et 8, ce qui nous donne  $p_e$ ,  $q_e$ ,  $p_i$  et  $q_i$ . En introduisant ces valeurs dans l'équation 22, page 9, nous avons pour la puissance absorbée par le *câble en court-circuit*

$$A_{c,l} = I_{c,l}^2 \cdot y_c.$$

Dans le cas du *câble en circuit ouvert*, nous avons par un calcul analogue, dans lequel on pose

$$\frac{1}{\mathbf{R}_0} = y_0 + iz_0$$

la valeur

$$A_{0,l} = E_l^2 y_0.$$

**Détermination de l'état électrique au commencement du câble, la charge à l'extrémité étant donnée.** — Ce calcul a une grande importance, puisqu'il indique la charge imposée au générateur quand le récepteur exige une tension  $\mathbf{E}_0$ , une intensité  $\mathbf{I}_0$  et a un facteur de puissance donné.

Le calcul est tout à fait analogue à celui qui donne l'état du primaire d'un transformateur, la charge du secondaire étant donnée; dans les deux cas, en effet, il y a trois données et trois inconnues. Nous allons montrer que les valeurs  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  que nous venons de calculer permettent de traiter le problème d'une façon tout aussi simple que celui du transformateur.

Dans ce but nous allons transformer les équations 7 et 8 en éliminant le facteur  $\frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x})$ ; il suffit pour



cela d'utiliser les équations 19 et 20 en posant  $x = l$ ; nous aurons

$$\mathbf{E}_l = (\mathbf{E}_0 + \mathbf{I}_0 \mathbf{R}_c) \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}) \quad (28)$$

et

$$\mathbf{I}_l = \left( \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{R}_0} \right) \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}). \quad (29)$$

Le facteur commun aux deux seconds membres

$$\frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}) = \mathbf{C} = ce^{i\tau} \quad (30)$$

a déjà été discuté en détail précédemment (p. 152 et suivantes). Afin de simplifier les calculs, nous le laisserons provisoirement de côté et nous l'introduirons plus tard à titre de correction; mais afin de conserver le souvenir de cette future correction, nous donnerons à  $\mathbf{E}_l$  et  $\mathbf{I}_l$  l'indice supplémentaire  $c$ ; nous avons donc

$$\mathbf{E}_l^c = \mathbf{E}_0 + \mathbf{I}_0 \mathbf{R}_c \quad (31)$$

et

$$\mathbf{I}_l^c = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{R}_0}, \quad (32)$$

les valeurs exactes étant

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_l^c \quad (33)$$

et

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}_l^c. \quad (34)$$

Prenons d'abord  $\mathbf{E}_l^c$ .

L'équation 31 a tout à fait la forme de la loi d'Ohm en courant continu; elle permet une représentation très simple de la quantité  $\mathbf{E}_l^c$ . Posons pour cela

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_0 &= I_0 \\ \mathbf{E}_0 &= E_0 \cdot e^{i\tau_0} \\ \mathbf{E}_l^c &= E_l^c \cdot e^{i\tau} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

La figure 46 donne le graphique de l'exemple numérique traité aux pages 186 à 190, pour le cas spécial où la

longueur du câble correspond à  $ax = 40^\circ$ . Nous avons  $E_0 = 1000$ ;  $I_0 = 10 - 20 i = 22,36 e^{-i \cdot 63^\circ 26'}$ ; d'autre part la page 200 indique que pour  $ax = 40^\circ$ ,  $R_c = 22,77 e^{-i \cdot 1^\circ 9,7'}$ .

Comme d'après l'équation 35 ci-dessus, c'est  $I_0$  qui sert d'origine des phases, nous avons à poser  $I_0 = I_0 = 22,36$ ;  $E_0$ , qui avance de  $63^\circ 26'$  sur  $I_0$  devient  $1000 \cdot e^{i \cdot 63^\circ 26'}$ . L'équation 31 donnera

$$\begin{aligned} E_i^c e^{i\delta} &= 1000 e^{i \cdot 63^\circ 26'} + 22,36 \cdot 22,77 e^{-i \cdot 1^\circ 9,7'} \\ &= 1000 e^{i \cdot 63^\circ 26'} + 509,1 e^{-i \cdot 1^\circ 9,7'}. \end{aligned} \quad (36)$$

En graphique, nous portons (fig. 46)  $I_0$  comme directrice, puis faisant un angle de  $1^\circ 9,7'$  sur la droite  $I_0$ ,  $R_c =$

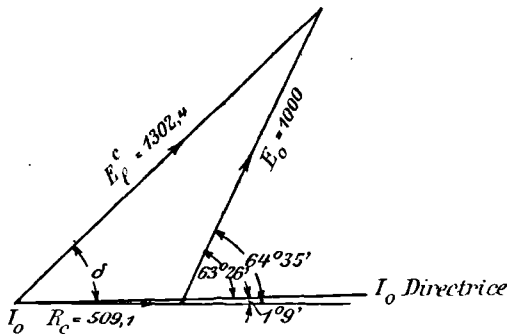


Fig. 46.

$509,1$ ; à l'extrémité de ce vecteur, nous portons  $E_0 = 1000$  faisant sur la gauche de la directrice un angle de  $63^\circ 26'$ . La ligne de fermeture du triangle donne  $E_i^c = 1302,4$  volts et un angle de  $42^\circ 45' 25''$ .

Ce dernier angle est la différence de phase de  $E_i^c$  et de  $I_0$ ; il n'a pas de signification concrète.

La coïncidence du résultat  $E_i^c = 1302,4$  trouvé par le graphique avec la valeur indiquée pour  $E_x$  dans le tableau XIX ( $E_x = 1302,7$  quand  $x = 50$  km., soit  $ax$

$= 40^\circ$ ) d'après l'équation 14, montre la supériorité du graphique sur le calcul d'après cette équation.

Il va sans dire que la valeur  $E_i^c = 1\,302,4$  a été calculée, le graphique ne pouvant pas donner autant de chiffres exacts; mais ce calcul a été fait d'après l'équation 36 et il ne nous paraît pas plus long que la construction d'une figure *exacte*.

La figure 46 montre distinctement l'influence de la capacité; si cette dernière était absente,  $R_c$  représenterait la résistance ohmique des conducteurs d'aller et de retour;  $I_0 R_c$  serait la chute ohmique de tension, et coïnciderait avec la directrice, tandis qu'en réalité la figure 46 montre ce vecteur incliné de  $1^\circ 9,7'$  vers la droite.

Quand le câble doué de capacité s'allonge, et que par conséquent le courant  $y$  diminue de façon à conserver à  $I_0 R_c$  la même valeur, l'angle considéré grandit,  $\varphi_c$  grandissant aussi. On reconnaît facilement que l'extrémité supérieure du vecteur  $E_0$  qui doit être placé à la suite du vecteur  $I_0 R_c$  se trouve tomber plus bas dans les câbles, et qu'en conséquence  $E_i^c$ , qui représente la chute de tension dans le câble, diminue.

Inversement, la self-induction dans le câble a pour conséquence une rotation vers la gauche du vecteur  $I_0 R_c$ , et par conséquent une augmentation de la chute de tension.

Enfin une augmentation du courant, sans modification de la longueur du câble, aurait dans les deux cas pour effet d'allonger le vecteur  $I_0 R_c$  dans sa propre direction, en déterminant par là une augmentation de la chute de tension.

Il est très intéressant de considérer l'influence de la différence de phase entre le courant et la tension dans le récepteur sur la chute de tension dans le câble. Les figures 47 représentent cette étude.

Quand le câble n'a que de la résistance ohmique, la chute de tension  $I_0 R_c$  est en phase avec le courant (fig. 47 a)

$I_0 R_c$  est représenté par le vecteur coté  $OA$ . Dans le cas où le récepteur ne provoque en outre pas de différence de phase entre la tension et le courant,  $E_0$  est représenté par le vecteur  $AB$  placé dans le prolongement de  $OA$ . Dans le cas de la charge inductive (pour laquelle  $E_0$  est en avance de phase sur le courant), le vecteur  $AB$  s'éloigne toujours plus du vec-

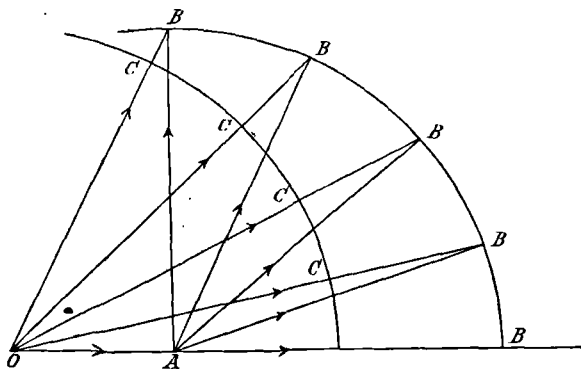


Fig. 47 a.

teur  $OA$  en tournant vers la gauche, à mesure que cette avance prend des valeurs plus grandes, et les points  $B$  ont pour lieu une conférence de centre  $A$ ; les vecteurs  $OB$  représentent alors les tensions  $E_i^c$  au commencement du câble. Une circonférence tracée du point  $O$  comme centre avec le rayon  $E_0$  détermine sur les vecteurs  $OB$  les points  $C$ ; les longueurs  $CB$  représentent les chutes de tension; la figure montre que celles-ci diminuent à mesure que l'avance de phase de  $E_0$  sur  $I_0$  augmente.

La figure 47 b représente le cas d'un câble possédant de la résistance ohmique et de la capacité. Le vecteur  $OA$  représentatif de  $I_0 R_c$  se trouve alors décalé vers la droite sur la directrice  $I_0$ . Les vecteurs  $AB$ , égaux à  $E_0$ , représentent de nouveau les tensions à l'extrémité du câble, les vecteurs  $OB$  les tensions  $E_i^c$  au commencement du câble.

Si, comme dans la figure 47 a, on trace une circonfé-

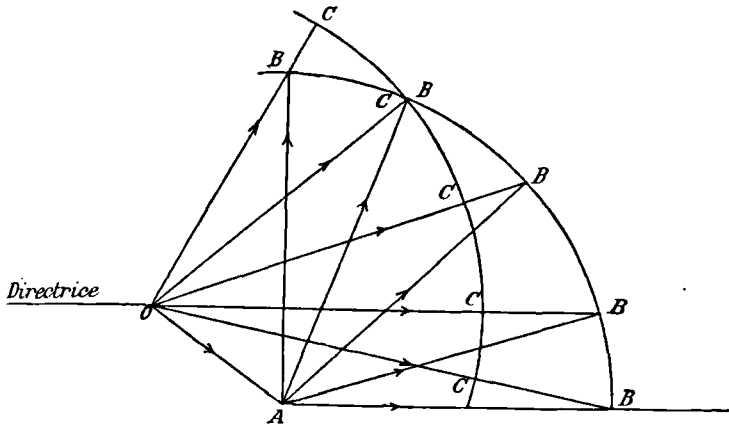


Fig. 47 b.

rence de centre  $O$ , de rayon  $OC = E_0$ , les vecteurs  $CB$

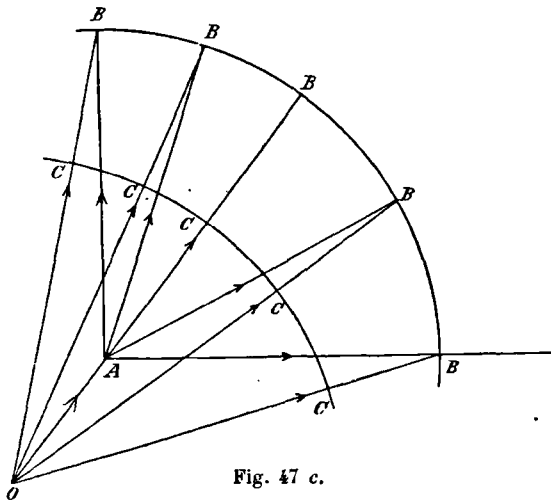


Fig. 47 c.

représenteront la chute de tension. On constate, de même que dans le premier cas, que ces chutes diminuent à

mesure que l'inductance de la charge croît, qu'elles atteignent même la valeur 0 pour une certaine avance de phase de la tension correspondant au point où les deux circonférences se coupent, et qu'elles deviennent négatives pour une avance plus grande de la tension.

*Si donc l'appareil d'utilisation détermine un fort retard du courant sur la tension, la chute de tension dans le câble peut devenir négative, c'est-à-dire que la tension au récepteur peut devenir plus forte qu'au générateur.*

La figure 47 c enfin représente l'influence de la self-induction du câble ; le vecteur  $OA$ , représentant  $I_0 R_c$ , est maintenant dirigé vers le haut. Dans ce cas les chutes de tension  $CB$  augmentent d'abord à mesure que la différence de phase de la tension et du courant dans le récepteur augmente, et cela jusqu'au moment où  $AB$  se trouve dans le prolongement de  $OA$  ; à partir de ce moment, les chutes de tension diminuent.

De même que l'équation 31 pour  $\mathbf{E}_i^c$ , l'équation 32 peut servir à une représentation très simple de  $\mathbf{I}_i^c$ . Le plus simple est de prendre la quantité  $\mathbf{E}_0$  comme origine des phases. Posons donc

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= E_0 \\ \mathbf{I}_0 &= I_0 \cdot e^{-i\tau} \\ \mathbf{I}_i^c &= I_i^c e^{i\tau} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

La figure 48 correspond au cas de la figure 46, dans laquelle nous avons

$$ax = 10^\circ, \mathbf{E}_0 = 1\,000 \text{ volts et } \mathbf{I}_0 = 10 - 20i = 22,36 e^{-i63^\circ 26'}$$

En nous reportant à la page 200, nous retrouvons

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= 374,1 e^{-i \cdot 88^\circ 50' / 187}, \\ \text{puis } \frac{1}{\mathbf{R}_0} &= 0,002673 e^{i \cdot 88^\circ 50' / 187}, \\ \text{et } \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{R}_0} &= 2,673 e^{i \cdot 88^\circ 50' / 187}, \end{aligned}$$

d'où enfin

$$I_i^c = + 22,36 e^{-i 63^{\circ} 26'} + 2,673 e^{i 88^{\circ} 50' 18''}.$$

D'après cela nous portons (fig. 48)  $E_0$  comme directrice, puis avec la même origine le vecteur  $\frac{E_0}{R_0}$  sous un angle de  $88^{\circ} 50' 18''$  vers la gauche et à la suite un vecteur

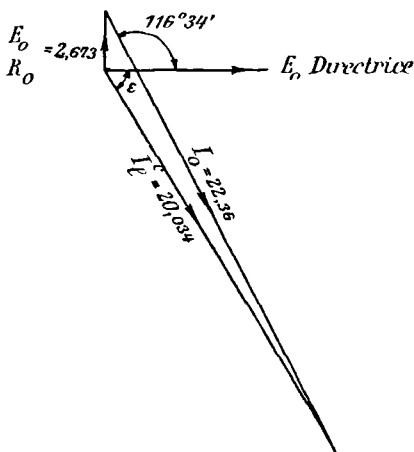


Fig. 48.

$I_0 = 22,36$  sous un angle de  $63^{\circ} 26'$  avec la directrice vers la droite. La ligne qui joint l'extrémité de ce dernier vecteur avec l'origine donne  $I_i^c = 20,034$  amp.; cette valeur qui est plus petite que  $I_0$  concorde parfaitement avec le résultat inscrit au tableau XIX pour  $ax = 10^{\circ}$  ( $x = 50$  km.);  $\epsilon$  mesure  $-59^{\circ} 52' 37''$ .

La figure 48 montre de nouveau très clairement l'influence de la capacité; en l'absence de celle-ci, on aurait  $R_0 = \infty$ ; le vecteur  $\frac{E_0}{R_0}$  serait nul et  $I_i^c$  coïnciderait avec  $I_0$ . C'est la présence du vecteur montant  $\frac{E_0}{R_0}$  qui diminue  $I_i^c$  par rapport à  $I_0$ ; en effet, remarquons que  $\varphi_{0,0}$  décroît à mesure que  $g$  grandit (éq. 31, p. 164); dans ce

224 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS  
cas le vecteur  $\frac{E_0}{R_0}$  s'écarte moins de la directrice ; on peut donc affirmer que l'influence de la capacité, qui se manifeste par une diminution du courant, est en partie contre-

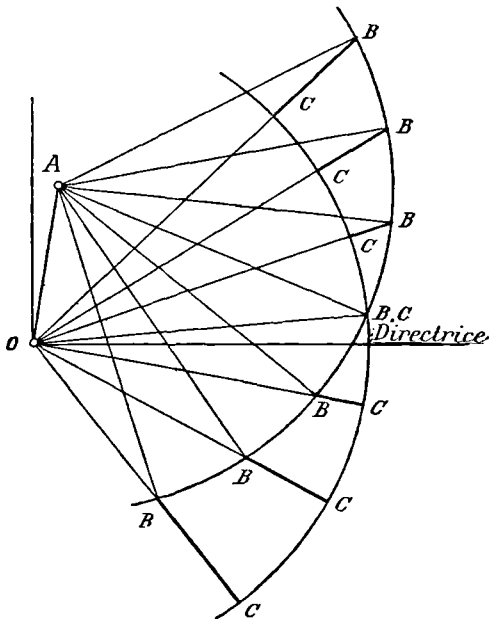


Fig. 49.

balancée par un isolement défectueux. La self du câble agit de la même façon, puisque d'après la figure 43 *b* cette dernière amène au-dessous de  $90^\circ$  l'angle de  $R_0$  par rapport à la directrice  $E_0$ .

Nous allons étudier maintenant l'influence du décalage dans le récepteur sur la répartition des intensités dans le câble. Pour cela, nous portons dans la figure 49 le vecteur  $OA = \frac{E_0}{R_0}$  ; à partir du point A nous traçons différents vecteurs  $AB = I_0$  de plus en plus inclinés sur la directrice  $E_0$  ; ces vecteurs  $AB$  représentent les intensités dans



le récepteur, la directrice représentant la tension exigée par cet appareil. Les vecteurs  $OB$  donnent les valeurs de l'intensité  $I_i^c$  au générateur. Pour faciliter la comparaison des vecteurs  $AB$  et  $OB$ , nous traçons un arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $AB$ . Les longueurs  $CB$ , en d'autres termes  $(OB - AB)$  représentent la différence entre l'intensité à la fin du câble et celle qui existe au commencement.

Au-dessus du point de rencontre des deux circonférences, nous avons  $I_i^c > I_0$ ; au-dessous au contraire  $I_i^c < I_0$ . On peut en déduire que l'intensité croît de la fin du câble au commencement lorsque le courant à l'extrémité du câble est en avance sur la tension, ou quand il est en concordance de phase, ou même quand il retarde sur la tension, mais seulement jusqu'à une certaine valeur de ce retard; au delà de ce retard critique, le courant au commencement du câble est plus faible qu'à son extrémité.

Remarquons aussi que l'angle  $\epsilon$  du diagramme des courants (fig. 48) n'a pas de signification physique, pas plus que l'angle  $\delta$  du diagramme des tensions (fig. 46). Il est cependant intéressant de les considérer simultanément, car, comme nous allons le montrer, cette étude permet de calculer l'angle si important de la différence de phase entre la tension et le courant au commencement du câble (angle de  $E_i^c$  et de  $I_i^c$ ). La figure 50 donne  $I_0$  comme directrice, et les vecteurs  $E_0$  et  $E_i^c$  y figurent en faisant avec cette directrice les angles  $\varphi_0$  et  $\delta$  de la figure 46. En outre, le vecteur  $I_i^c$  fait avec  $E_0$  l'angle  $\epsilon$  que donne la figure 48 pour ces deux vecteurs. Les inclinaisons des quatre vecteurs de la figure 50 représentent donc dans leur *vraie position relative* les quatre vecteurs  $E_0$ ,  $E_i^c$ ,  $I_0$ ,  $I_i^c$ .

On tire de la figure 50 la relation évidente

$$\sphericalangle E_i^c, I_i^c = E_i^c, I_0 + \sphericalangle E_0, I_i^c - \sphericalangle E_0, I_0.$$

En introduisant dans cette relation les données numériques déjà calculées

$$\sphericalangle E_l^c, I_0 = \delta = 42^\circ 45' 25''$$

$$\sphericalangle E_0, I_l^c = \varepsilon = 59^\circ 52' 37'',$$

ainsi que le décalage du récepteur  $\sphericalangle E_0, I_0 = \varphi_0 = 63^\circ 26'$ , on obtient

$$\sphericalangle E_l^c, I_l^c = \varphi_l^c = 39^\circ 12'.$$

Ce résultat coïncide absolument avec le résultat donné par le tableau XIX (voy.  $ax = 10^\circ$ , soit  $x = 50$  km.).

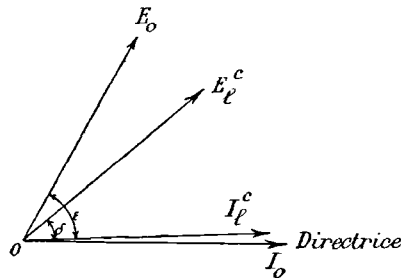


Fig. 50.

Les constructions graphiques des figures 46 et 48 déterminent les données nécessaires au fonctionnement du générateur quand on connaît celles de l'appareil d'utilisation.

Le câble débite dans notre exemple numérique une puissance de

$$E_0 I_0 \cos \varphi_0 = 1\,000 \times 22,36 \times \cos 63^\circ 26' = 10\,000 \text{ watts}$$

au récepteur, tandis qu'il lui a été fourni par le générateur

$$E_l^c \cdot I_l^c \cos \varphi_l^c = 1302,4 \times 20,04 \times \cos 39^\circ 12' = 20\,226 \text{ watts.}$$

Le rendement est de

$$\eta = \frac{10\,000}{20\,226} = 0,4944.$$

Il ne nous reste plus qu'à tenir compte du facteur de

correction

$$\frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}) = \mathbf{C} = ce^{i\gamma}.$$

Nous avons déjà discuté (pages 152 à 156) les valeurs de  $\mathbf{C}$  possibles en pratique ( $\mathbf{C}$  signifie le rapport des tensions au commencement et à la fin du câble en circuit ouvert). Rappelons que le tableau XIII a démontré que pour les longueurs moyennes des câbles, jusqu'à 50 kilomètres environ, valeurs qui ne sont guère dépassées aujourd'hui,  $\mathbf{C}$  ne s'écarte de 1 que de 1 p. 100 au plus. Cet écart peut être négligé dans les calculs techniques. Pour les lignes aériennes, même assez longues, il en est de même; mais pour les câbles de grande longueur, les écarts peuvent devenir très importants; ils se montent pour le câble n° 1, par exemple, à presque 50 p. 100 pour 200 kilomètres.

Si nous voulons continuer à déduire toute la manière d'être d'un câble de la simple mesure des résistances  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$ , même dans les cas où  $\mathbf{C}$  s'écarte passablement de 1, il nous faut trouver un moyen de calculer  $\mathbf{C}$  par  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$ . L'équation 23 p. 198 nous le donne. En effet, on reconnaît facilement qu'en désignant par  $\mathbf{Y}$  la fraction dont on a pris le logarithme, on a

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\mathbf{Y}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Y}}} \right) = \sqrt{\frac{\mathbf{R}_0}{\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_c}} \quad (38)$$

En amenant cette expression à la forme principale, nous déterminerons  $c$  et  $\gamma$ ; il ne nous restera plus, pour effectuer la correction annoncée page 217, qu'à multiplier les vecteurs  $E_i^c$  et  $I_i^c$  des figures 46, 48, et 50 par  $c$  et à les faire tourner de l'angle  $\gamma$  vers la gauche. Cette rotation, s'appliquant à la fois aux deux vecteurs  $E_i^c$  et  $I_i^c$  ne modifie pas leur différence de phase, et par conséquent :

*La différence de phase donnée par les équations 31, 32 et suivantes n'a pas besoin d'être corrigée : le calcul de  $\gamma$  devient inutile.*

Il ne nous reste donc plus qu'à déterminer  $c$  pour la correction des amplitudes ou des valeurs efficaces  $E_i^c$  et  $I_i^c$ .

Posons dans l'équation 38  $\mathbf{R}_0 = R_0 e^{i\varphi_0}$  et  $\mathbf{R}_c = R_c e^{i\varphi_c}$ ; on en tire

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 - 2 \frac{R_c}{R_0} \cos(\varphi_c - \varphi_0)}}.$$

La forme du radical montre que la valeur  $\frac{1}{c}$  peut être facilement déterminée par le dessin : il suffit de considérer le triangle de la figure 51, où  $AB = 1$ ,  $AC = \frac{R_c}{R_0}$  et où ces lignes ont un angle  $(\varphi_c = \varphi_0)$ . Le troisième côté  $BC$  donne la valeur de  $\frac{1}{c}$ .  $c$  lui-même se trouvera en portant  $CB' = 1$  sur  $CB$  et en menant  $B'A'$  parallèle à  $BA$ ;  $B'A'$  donne  $c$ .

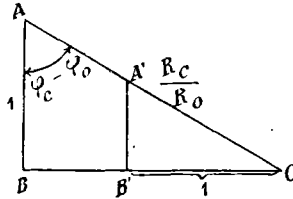


Fig. 51.

La correction que nous venons de faire rend un peu compliquée la représentation graphique de  $E_i^c$  et de  $I_i^c$  par les figures 46 et 48; remarquons cependant qu'en soi la correction est facile. Comme dans la plupart des cas pratiques,  $c$  est très peu différent de 1, il suffira souvent de se faire une idée de la grandeur de cette correction au lieu de l'exécuter. Pour cela on peut partir de l'idée que l'écart entre  $c$  et 1 est l'une des formes sous lesquelles s'exprime l'influence de la self et de la capacité uniformément répartie, et qu'il est peut-être possible de mesurer cet écart par l'une des autres formes sous lesquelles on peut tenir compte de ces données.

Prenons par exemple l'équation 31, et supprimons par la pensée la self et la capacité dans la ligne : la loi d'Ohm est alors valable et l'on a

$$E_l = E_0 + I_0 R$$

expression dans laquelle  $R$  est la résistance ohmique. La suppression de la self et de la capacité a donc pour conséquence que

$$c = 1 \quad \text{et} \quad R_c = R.$$

En suivant le même ordre d'idées, nous allons maintenant chercher si l'écart entre  $c$  et 1 n'est pas une *première* conséquence de l'action de la self et de la capacité, et si elle ne peut pas être déduite de l'écart qui existe entre  $R_c$  et  $R$ , écart qui serait une *seconde* conséquence. La mesure de  $R_c$  étant toujours faisable et la mesure ou le calcul de  $R$  étant très faciles, la relation que nous supposons donnerait une base pour la détermination de  $c$ .

Dans ce but l'auteur a rassemblé dans le tableau XXIII les écarts relatifs de  $R_c$  de 50 à 200 kilomètres en se basant sur  $R = rl$  calculé d'après le tableau V.

Il a juxtaposé les valeurs  $\Delta R$  de ces écarts et celles des écarts relatifs  $\Delta c$  de  $c$ . Le tableau démontre que l'espoir de déterminer la variation  $\Delta c$  d'après  $\Delta R$  est chimérique; l'auteur doute qu'on puisse trouver un autre moyen.

Maintenant que nous avons terminé l'exposé des méthodes *exactes* de calcul des câbles, il nous paraît intéressant de rechercher en quelle mesure ces méthodes donnent des résultats différents de ceux que l'on obtiendrait en négligeant l'effet de la capacité uniformément répartie, donc en ne tenant compte que de la résistance ohmique, ou bien de la résistance ohmique et de la self. Nous allons pour cela faire le calcul d'un cas extrême :

Supposons que le câble 1 ait une longueur de 200 kilomètres et qu'il lui soit imposé de travailler à son extrémité avec une tension composée de 10 000 volts (tension de phase 5 773 volts); admettons en outre une chute de tension d'environ 11 p. 100. D'après le tableau V le câble aura une résistance de  $1,81 \cdot 200$ , soit 362 ohms. Si nous voulons qu'il fournisse à son extrémité un courant non décalé de 1,732 ampères, nous aurons, d'après la loi d'Ohm, une chute de tension de  $362 \cdot 1,732$  soit 627,0 volts; d'après cela nous aurions au commencement du câble 6 400 volts de tension de phase, ou 11 085 volts de tension composée;

TABLEAU XXIII

Valeurs de  $\Delta R$  et  $\Delta c$  dans les câbles à 10 000 volts et la ligne aérienne Lauffen-Francfort;  
 fréquence 50 périodes par seconde.

	N°	50 km.		100 km.		150 km.		200 km.	
		$\Delta c$	$\Delta R$	$\Delta c$	$\Delta R$	$\Delta c$	$\Delta R$	$\Delta c$	$\Delta R$
Câbles à 10000 volts.	1	-0,472 ‰	-0,5997 ‰	+1,51 ‰	+1,874 ‰	+14,93 ‰	+15,37 ‰	+48,11 ‰	+46,41 ‰
	2	-0,634 ‰	-1,153 ‰	-0,93 ‰	-0,8126 ‰	+3,78 ‰	+4,640 ‰	+19,38 ‰	+20,65 ‰
	3	-0,716 ‰	-1,908 ‰	-1,985 ‰	-2,472 ‰	-1,23 ‰	-0,7366 ‰	+5,40 ‰	+7,004 ‰
	4	-0,750 ‰	-3,007 ‰	-2,496 ‰	-3,988 ‰	-3,677 ‰	-4,042 ‰	-1,77 ‰	-0,7921 ‰
	5	-0,775 ‰	-4,921 ‰	-2,815 ‰	-6,142 ‰	-5,210 ‰	-7,312 ‰	-6,414 ‰	-7,003 ‰
	6	-0,800 ‰	-8,012 ‰	-3,022 ‰	-9,351 ‰	-6,132 ‰	-11,09 ‰	-9,157 ‰	-12,43 ‰
	7	-0,805 ‰	-12,17 ‰	-3,134 ‰	-13,52 ‰	-6,612 ‰	-15,51 ‰	-10,632 ‰	-17,64 ‰
	8	-0,810 ‰	-16,62 ‰	-3,180 ‰	-17,94 ‰	-6,818 ‰	-19,97 ‰	-11,374 ‰	-22,42 ‰
Ligne aérienne.		-0,140 ‰	-4,409 ‰	-0,550 ‰	-4,678 ‰	-1,206 ‰	-5,084 ‰	-2,017 ‰	-5,603 ‰

ces deux nombres correspondraient à une chute de tension de 10,9 p. 100.

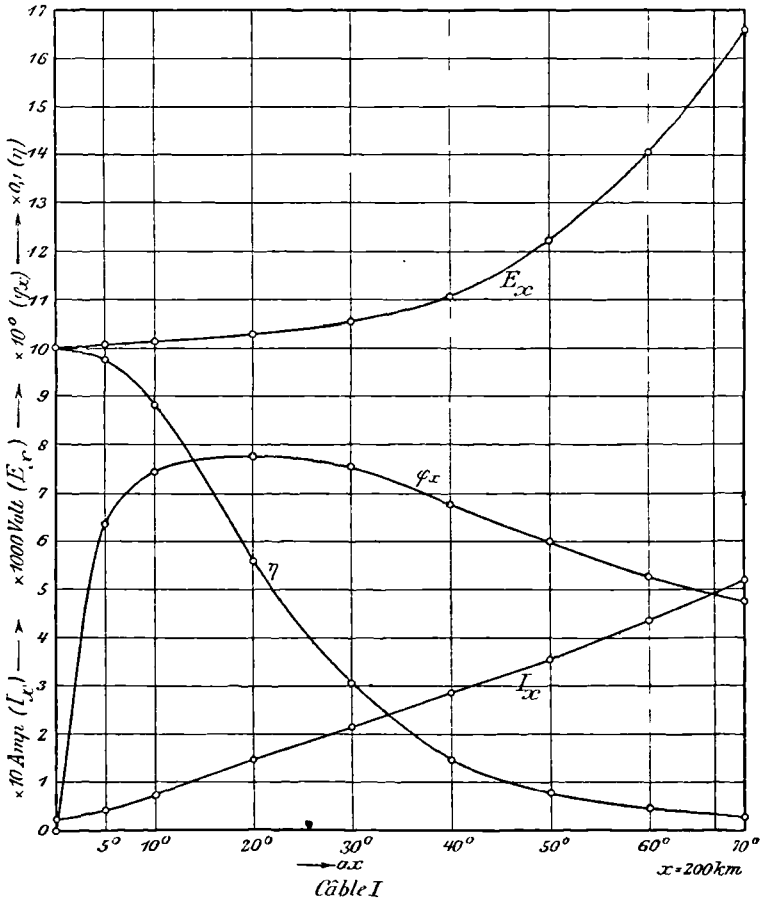
La puissance à l'extrémité du câble sera  $A_0 = 3773 \cdot 1,732$ , soit 10 kilowatts par phase ; toujours en tenant compte de la loi d'Ohm, nous aurons au commencement du câble une puissance  $A_1$  de  $6\,400 \cdot 1,732$  soit 11,08 kw. environ ; rendement 89 p. 100. (L'auteur a admis une intensité de 1,732 amp. simplement parce que ce nombre lui a servi pour d'autres calculs d'où il a tiré les résultats du présent exemple.)

Si maintenant on tient compte de la résistance et de la self en même temps, on reconnaît que celle-ci n'augmente pas sensiblement la chute de tension et qu'elle détermine une différence de phase d'à peine  $0^\circ 40'$  entre la tension et le courant au commencement du câble. Dans le cas où cette méthode si simple de calcul serait exacte, il suffirait d'avoir au commencement d'un câble de 200 kilomètres une tension d'environ 11 100 volts et un courant non décalé de 1,732 amp. pour obtenir à la fin du câble le même courant de 1,732 amp. en phase avec une tension de 10 000 volts. Le rendement serait égal au rapport des tensions (environ 89 p. 100).

Dans la réalité, les résultats obtenus dans le câble 1 pour cette charge ne sont pas du tout aussi simples. La figure 52, dans laquelle toutes les variables du câble ont été portées en fonction de  $ax$ , le montre suffisamment. (L'ordonnée placée entre  $60^\circ$  et  $70^\circ$ , vers  $67^\circ$ , donne le  $ax$  qui correspond à 200 kilomètres.) On voit qu'il faut fournir au commencement du câble une tension composée de 13 700 volts au lieu de 11 100 ; l'intensité à fournir par le générateur est d'environ 49 ampères quand on veut avoir 1,732 amp. à la fin ; la puissance à fournir est de 293 kw au lieu de 11 et le rendement n'est que de 31,2 p. 100 au lieu de 89 p. 100.

*Dans le transport d'énergie considéré, le fait de ne tenir compte que de la résistance et de la self donne une*

*idée absolument fausse des phénomènes. Le câble devra avoir des dimensions beaucoup plus fortes que celles que donne le calcul négligeant la capacité.*



Récepteur.

Fig. 52.

Générateur.

Dans le cas où la chute de tension de 11 p. 100 serait imposée, la figure montre que le câble ne pourrait avoir tout au plus que 120 kilomètres ( $ax =$  environ  $40^\circ$ ) ; le cou-



rant du générateur se monterait alors à 29 ampères ; le rendement serait de 15 p. 100.

*Même en employant les méthodes exactes, il est absolument insuffisant de calculer le câble en ne tenant compte que de la chute de tension ; il est nécessaire de déterminer en même temps la chute de l'intensité, le rendement et la variation du décalage  $\varphi_x$ .*

La marche de  $\varphi_x$  dans l'exemple traité est particulièrement intéressante. A partir de l'extrémité du câble, où il est nul, il grandit très rapidement jusqu'à 78° environ pour retomber à 49° vers 200 kilomètres et osciller ensuite, comme nous le savons, autour de sa valeur limite.

La figure 52 permet aussi de se rendre compte de la manière d'être du câble quand sa longueur est petite. Pour 13 kilomètres par exemple ( $ax = 3^\circ$ ), on aurait une chute de tension inférieure à 1 p. 100 et un rendement d'environ 97 1/2 p. 100 ; par contre le câble qui, ne l'oublions pas, doit débiter à son extrémité un courant de 1,732 amp. en phase avec la tension, exige du générateur un courant de 4,04 amp. en avance de 64° sur la tension, ce qui correspond à un facteur de puissance d'à peu près 0,44.

*Nous voyons donc que même les câbles de longueur moyenne que l'on emploie actuellement doivent être calculés en tenant compte de la capacité uniformément répartie. Les méthodes simples qui ne tiennent compte que de la self et de la résistance sont insuffisantes.*

Il convient de remarquer que la perte d'intensité du commencement du câble vers la fin ainsi que le rendement très faible du câble ne proviennent pas du courant dérivé dans l'isolant ; en effet, même en supposant que la tension composée de 13 700 volts (tension de phase de 9 064 volts) existe sur toute la longueur du câble, nous aurions sur 200 kilomètres un courant dans l'isolant d'environ  $9\,000 \cdot 0,0667 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 0,12$  amp., soit une perte de  $9\,000 \cdot 0,12 = 1,12$  kw (voy. p. 88  $g = 0,0667 \cdot 10^{-6}$ ).

Nous avons donc simultanément un courant dans l'isolant de 0.12 amp. une perte de courant de  $49 - 1,73 = 47$  ampères et une puissance perdue dans l'isolant de 1,12 kw. vis-à-vis d'une perte totale de puissance de  $293 - 10 = 283$  kw. Ce simple calcul prouve que la capacité est à très peu de chose près la cause unique des phénomènes décrits.

Pour la ligne aérienne de 200 kilomètres soumise à la même charge que le câble l'influence de la capacité, quoique moins sensible, est encore considérable. En tenant compte de la résistance seulement, on trouve au commencement 10 812 volts, en ajoutant la self 10 814 volts, tandis qu'en tenant compte de la capacité on trouve un résultat plus petit, 10 613 volts; l'intensité finale de 1,732 amp. exige du générateur un courant de 3,64 amp. Le décalage, nul à l'extrémité, devient  $58^{\circ} 18'$  au commencement de la ligne; le rendement au lieu d'être  $10\,000 : 10\,814$ , soit 92 p. 100, tombe à 83 p. 100. Ce résultat montre une fois de plus que l'influence de la capacité n'est pas négligeable.

La marche particulière de la différence de phase  $\varphi_x$ , représentée par la figure 52, est digne d'un examen plus serré. Il est vrai que le calcul de  $\varphi_x$  est faisable sur la base des équations 31 et 32 (voy. p. 217): mais comme l'angle  $\varphi_x$  se présente sous la forme d'une différence entre deux angles eux-mêmes très variables, il n'est pas facile de se rendre compte de quels facteurs il dépend.

Il est possible de le calculer directement et d'en donner une représentation graphique.

En divisant l'équation 31 par l'équation 32 et en posant

$$\frac{\mathbf{E}_l}{\mathbf{I}_l} = \mathbf{P}_l = P_l e^{i\tau l} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{I}_0} = \mathbf{P}_0 = P_0 e^{i\tau_0} \quad (39)$$

on obtient

$$\frac{\mathbf{P}_l}{\mathbf{R}_0} = \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{R}_r}{\mathbf{P}_0 + \mathbf{R}_0} \quad (40)$$

Cette équation détermine sans ambiguïté le décalage  $\varphi_l$  au commencement du câble par  $\mathbf{P}_l = P_l e^{i\tau l}$ , les constantes du câble et du récepteur étant données par  $\mathbf{R}_r$ ,  $\mathbf{R}_0$ ,  $P_0$  et  $\varphi_0$ . Une valeur posi-

tive de l'angle  $\varphi_l$  indique une avance de phase de la tension sur le courant.

Il est facile de donner une représentation graphique de l'équation 40. La figure 53 porte  $OA = \mathbf{R}_c$  et  $OB = \mathbf{R}_o$ , conformément aux explications données à l'occasion de la figure 45 *b*. La ligne dirigée vers la

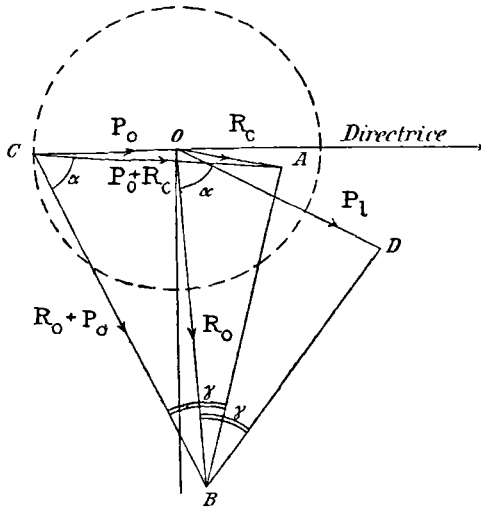


Fig. 53.

droite est la directrice. En tenant compte de l'hypothèse de la concordance de phase du courant avec la tension à l'extrémité du câble ( $\varphi_o = 0$ ),  $CO = \mathbf{P}_o$  tombe sur la directrice. Le vecteur  $CA$  donne  $(\mathbf{R}_c + \mathbf{P}_o)$ , le vecteur  $CB$  ( $\mathbf{R}_o + \mathbf{P}_o$ ). La proportion (40) signifie d'après le paragraphe 5 de la page 31 que les triangles formés sur  $CA$  et  $CB$  d'une part, sur  $\mathbf{P}_l$  et  $\mathbf{R}_o$  d'autre part, doivent être semblables.  $\mathbf{P}_l$  doit donc faire avec  $\mathbf{R}_o$  un angle égal à  $ACB = \alpha$ . On obtient la longueur de  $\mathbf{P}_l$  en portant l'angle  $ABC = \gamma$  à partir de  $\mathbf{R}_o$ : le côté libre détermine en  $OD$  la valeur de  $\mathbf{P}_l$ ; les triangles  $ACB$  et  $DOB$  sont semblables comme la proportion l'exige.

L'angle que forme  $\mathbf{P}_l$  avec la directrice détermine  $\varphi_l$  qui est l'avance de phase de la tension sur l'intensité; comme  $\mathbf{P}_l$  est ici à droite de la directrice, il en suit que  $\varphi_l$  est négatif; cela signifie qu'au commencement du câble le courant est en avance sur la tension, phénomène auquel on pouvait s'attendre vu la concordance des phases à l'extrémité.

La figure 53 permet de déduire facilement les relations suivantes :

En conservant constante la charge ( $\mathbf{P}_0$  constant en grandeur et en direction), mais en allongeant le câble toujours plus comme dans la figure 52, on sait que  $\mathbf{R}_c$  tourne vers la droite,  $\mathbf{R}_0$  vers la gauche, et qu'ils vont en se rapprochant, non seulement en direction, mais encore en grandeur, jusqu'à coïncider. Rappelons que les figures 44 a et 44 b ont déjà montré la variation de  $\mathbf{R}_c$  et  $\mathbf{R}_0$ , quand par exemple  $b = a$ .

Dans un câble infiniment court ( $ax = 0$ ), on a

$$\begin{aligned} R_0 &= \infty \\ \varphi_0 &= -90^\circ \\ R_c &= 0 \\ \varphi_c &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent l'angle  $OCB$  de la figure 53 devient droit, et  $OCA$  s'annule; à mesure que le câble s'allonge,  $R_0$  diminue considérablement, tandis que  $R_c$  augmente, sans que l'un et l'autre tournent d'abord d'une façon sensible. Il en suit que dans la figure 53,  $CB$  tourne très rapidement vers la gauche, tandis que  $CA$  se déplace fort peu vers la droite. L'angle  $\alpha$  doit par conséquent diminuer rapidement, sans que pour cela  $OB$  tourne beaucoup, tandis que  $\mathbf{P}_l$  doit tourner rapidement vers la droite. (Au commencement ce dernier vecteur coïncidait avec la directrice,  $\alpha$  valant  $90^\circ$ ). La rotation rapide de  $\mathbf{P}_l$  vers la droite signifie une avance subite du courant sur la tension au commencement du câble, tandis que la différence de phase dans le câble infiniment court était encore nulle.

Quand le câble a une longueur plus considérable, il y a lieu de considérer non seulement la variation de  $\mathbf{R}_0$ , mais encore sa rotation; l'angle  $\alpha$ , il est vrai, diminue d'autant plus que  $\mathbf{R}_c$  tourne. La rotation vers la gauche de  $\mathbf{R}_0$ , vecteur à partir duquel il faut porter l'angle  $\alpha$ , a pour conséquence que  $\mathbf{P}_l$  tourne vers la gauche avec une vitesse plus faible qu'auparavant; il en suit, comme l'indique déjà la figure 52, que l'angle  $\varphi_c$  augmente d'abord plus lentement pour diminuer ensuite.

On peut se rendre compte de ce qui se passe dans les câbles en considérant d'autres longueurs du câble 1, toujours en partant de la chute de tension de 11 p. 100 qui résulte de l'application de la loi d'Ohm. Pour conserver constante cette chute de tension, malgré la variation de longueur du câble, il suffit d'adopter des intensités inversement proportionnelles aux longueurs, c'est-à-dire pour

200 kilomètres 1,732 amp. pour 150 kilomètres 1,732 amp. par  $\frac{4}{3}$ , pour 100 kilomètres 1,732 amp. par 2 et pour 50 kilomètres 1,732 amp. par 4. En conservant la tension finale à 10 000 volts et le décalage nul, les puissances  $A_0$  débitées à la fin du câble sont inversement proportionnelles aux longueurs.

Le tableau XXIV donne les valeurs calculées pour le câble 1 et la ligne aérienne en négligeant la capacité;  $E_{l_1}$  provient de l'application de la loi d'Ohm;  $E_{l_2}$  a été obtenu en additionnant algébriquement à la chute de tension ohmique celle qui résulte de la self;  $E_{l_3}$  enfin est le résultat exact de l'addition graphique des deux chutes de tension;  $\gamma_3$  est le rendement dans ce dernier cas et  $\varphi_3$  la différence de phase produite au commencement de la ligne par sa self-induction. Comme les tensions  $E_{l_1}$  au commencement du câble, calculées d'après la loi d'Ohm, sont égales quelle que soit la longueur, il en suit l'égalité des tensions  $E_{l_2}$  et  $E_{l_3}$ ; il en est de même pour les rendements et les décalages. Le tableau montre en outre que la chute de tension est fort peu influencée par la self, et que cette dernière ne produit qu'un très faible décalage.

Le tableau XXV donne les grandeurs électriques telles qu'elles sont dans la réalité, c'est-à-dire en considérant la capacité et le courant dérivé dans l'isolant. On voit tout de suite que l'influence de la capacité se traduit par des différences assez notables pour les tensions au générateur, suivant la longueur de la ligne.

La chute de tension augmente à mesure que le câble 1 s'allonge. En effet, tandis que pour 200 kilomètres la tension du générateur est de 15 711 volts, elle tombe à 11 099 volts pour 50 kilomètres; cette dernière valeur est sensiblement égale à celle que l'on obtient en négligeant la capacité (comparez avec la colonne  $E_{l_3}$  du tableau XXIV).

On peut remarquer que l'effet de la capacité sur toutes les variables est incomparablement plus faible dans le

TABLEAU XXIV

État électrique fictif au commencement du câble 1 et de la ligne aérienne, la tension et l'intensité au récepteur étant données et la capacité ayant été négligée.

	DISTANCE km.	$E_0$	$I_0$	$El_1$	$El_2$	$El_3$	$\eta_3$	$\varphi_3$
Câble n° 1.	50	10000	$6,928 = 4 \cdot 1,732$	11086	11090	11087	0,90196	— 0° 28,3'
	100		$3,464 = 2 \cdot 1,732$					
	150		$2,309 = \frac{4}{3} \cdot 1,732$					
	200		$1,732 = 1 \cdot 1,732$					
Ligne aérienne	50	10000	$6,928 = 4 \cdot 1,732$	10812	10849	10814	0,92472	— 1° 18,5'
	100		$3,464 = 2 \cdot 1,732$					
	150		$2,309 = \frac{4}{3} \cdot 1,732$					
	200		$1,732 = 1 \cdot 1,732$					

TABLEAU XXV

État électrique réel au commencement du câble 1 et de la ligne aérienne.

	km.	$E_0$ tension composée.	$I_0$	$\varphi$	$A_0$ en kw.	$El$ tension composée	$Il$	$\varphi l$	$Al$ en kw.	$\eta$
Câble n° 1.	50	10000	$6,928 = 4 \cdot 1,732$	0	40	11039	13,416	$57^\circ 3' 33''$	46,473	0,86028
	100		$3,464 = 2 \cdot 1,732$							
	150		$2,309 = \frac{4}{3} \cdot 1,732$							
	200		$1,732 = 1 \cdot 1,732$							
Ligne aérienne.	50	10000	$6,928 = 4 \cdot 1,732$	0	40	10801	6,9657	$5^\circ 13' 8''$	43,257	0,92472
	100		$3,464 = 2 \cdot 1,732$							
	150		$2,309 = \frac{4}{3} \cdot 1,732$							
	200		$1,732 = 1 \cdot 1,732$							

câble le plus court que dans le câble le plus long. Par exemple, le rapport des intensités au commencement et à la fin du câble est de 49 : 1,73, soit 29 pour 200 kilomètres, tandis qu'il est de 13,4 : 6,9 soit 2 pour 50 kilomètres. Le rendement, qui d'après le tableau XXIV s'élève pour toutes les longueurs à 0,90 quand on néglige la capacité tombe à 0,034 pour le câble le plus long et reste à 0,86 pour le plus court quand on tient compte de la capacité. Seul le décalage est plus considérable dans le câble de 50 kilomètres que dans celui de 200 kilomètres; en effet  $\varphi_1$  atteint 57° pour 50 kilomètres et 49° seulement pour 200 kilomètres; entre ces deux valeurs se trouve un maximum comme l'indique la courbe  $\varphi_x$  de la figure 52.

Cette diminution de l'influence de la capacité avec la longueur s'explique non seulement par le raccourcissement lui-même, mais encore par l'intensité relativement plus grande admise par le câble le plus court. En effet le courant utile du câble le plus court est quatre fois plus grand que dans le plus long, tandis que le courant de charge du câble en circuit ouvert est presque trois fois plus grand pour le câble de 200 kilomètres que pour celui de 50 kilomètres (voy. tableau XIV, 55,591 amp. contre 20,471); le courant de charge comparé avec le courant débité au récepteur est donc proportionnellement beaucoup plus faible dans le câble de 50 kilomètres que dans celui de 200 kilomètres, et cela non seulement à cause de la longueur plus petite mais aussi par suite de la plus forte densité de courant. Il n'en subsiste pas moins cette conclusion que l'influence de la capacité sur les diverses variables électriques est très différente, même dans le câble le plus court.

Nous concluons donc : *Le calcul de la chute de tension peut à la rigueur se faire en négligeant la capacité; mais le courant à fournir par le générateur et son décalage sur la tension sont si différents des valeurs correspondantes à*

*l'extrémité du câble qu'il faut absolument tenir compte de la capacité dans les calculs.*

Les conditions sont déjà plus favorables pour la ligne aérienne. Les tableaux XXIV et XXV montrent que le fait de négliger la capacité d'une ligne de 50 kilomètres n'a aucune influence sur la valeur de la tension au générateur et sur le rendement; il n'y a que l'intensité à l'entrée du câble qui soit un peu supérieure à celle qui règne à la fin, ce qui provient d'une petite avance de phase sur la tension.

L'influence considérable que la capacité exerce dans le câble 1, même pour 50 kilomètres, trouve son explication dans le fait que le courant de charge, quoique relativement faible vis-à-vis du courant utile, a déjà une très grande valeur. Le tableau XIV donne ces courants de charge pour les longueurs de 50, 100, 150, 200 kilomètres, quand la tension est de 10 000 volts; le tableau XXVI donne le courant utile et le courant de charge calculés pour les tensions au générateur indiquées dans la colonne  $E_l$  du tableau XXV; on constate du premier coup d'œil que le courant de charge est le double du courant utile dans le plus court, et que le rapport des deux courants se monte à près de 30 pour le câble le plus long.

TABLEAU XXVI

LONGUEUR DU CÂBLE	COURANT UTILE	COURANT DE CHARGE
50 km.	6.93 amp.	13,12 amp.
100 —	3,46 —	25,88 —
150 —	2,31 —	38,16 —
200 —	1,73 —	50,43 —

Il semble que l'on puisse déduire des considérations précédentes que dans les câbles de plus forte section l'effet



de la capacité est moins important, puisqu'il est possible d'augmenter le courant utile par rapport au courant de charge. Nous allons traiter un exemple numérique afin de voir si dans ce cas nous pouvons négliger la capacité.

Dans ce but nous avons calculé le tableau XXVII qui correspond exactement au tableau XXV, mais qui s'applique cette fois au câble 8, le plus fort de la série. Afin d'obtenir pour les quatre longueurs étudiées la même chute ohmique de tension, nous avons adopté des courants inversement proportionnels aux longueurs; la chute ohmique de tension est uniformément de 898,8 volts.

Nous avons alors dans tous les cas, en admettant une tension composée de 10.000 volts à l'extrémité du câble et une charge non inductive, une tension au générateur de 10 899 volts en ne tenant compte que de la loi d'Ohm, et une tension au générateur de 11 603 volts en tenant en outre compte de la self. On voit que celle-ci exige une élévation de tension d'environ 700 volts, c'est-à-dire de 7 p. 100, tandis que pour le câble n° 1, son influence était quasi-négligeable. Cette élévation de tension a son explication dans le fait que le rapport de la self et de la résistance est plus grand dans le câble 8 que dans le câble 1 à cause de la différence de section et de la distance plus grande des conducteurs du n° 8 (voy. tableau IV). Ce rapport se montre aussi dans l'expression  $\text{arc tg } \frac{s}{r}$  du tableau XXII. Le décalage produit au commencement du câble par la self-induction se monte à 3° 20', ce qui est un peu plus que dans le câble 1, et le facteur de puissance correspondant est de 0,996.

Le tableau XXVII montre tout d'abord pour le câble 8, comme c'était déjà le cas pour le câble 1, que les tensions au générateur sont en réalité très différentes suivant les longueurs des lignes. Mais l'effet de la capacité n'est pas le même dans les deux câbles. En effet, tandis que dans le n° 1 toutes les valeurs de la tension au commencement du

TABLEAU XXVII

État électrique du câble n° 8, la charge au récepteur étant donnée et  $\varphi_0 = 0$ .

km.	$E_0$ tension composée.	$I_0$	$A_0$ en kw.	$E_l$ tension composée.	$I_l$	$\varphi_l$	$A_l$ en kw.	$\eta$
50	10 000	120	692,82	11 523	120,79	4° 19' 24"	801,36	0,86455
100	10 000	60	346,41	11 293	70,870	28° 8' 36"	407,54	0,85000
150	10 000	40	230,94	10 943	70,686	49° 5' 15"	292,49	0,78935
200	10 000	30	173,21	10 508	83,010	58° 48' 6"	260,88	0,66396

TABLEAU XXIX

État électrique du câble n° 8 sous diverses charges pour  $\varphi_0 = 0$  et 50 périodes par seconde.

km.	$E_0$ tension composée.	$I_0$	$A_0$ en kw.	$E_l$ tension composée.	$I_l$	$\varphi_l$	$A_l$ en kw.	$\eta$	$\gamma\Omega$
200	10 000	30	173,21	10 508	83,010	58° 48' 6"	260,88	0,66396	0,86530
200	10 000	40	230,94	11 066	87,420	52° 33' 40"	339,53	0,68017	0,82812
200	10 000	60	346,41	12 192	98,060	41° 56' 27"	513,43	0,67470	0,76257
200	10 000	120	692,82	13 622	138,93	21° 16' 54"	1167,7	0,59331	0,61626
200	10 000	150	866,02	17 353	162,02	14° 54' 27"	1569,4	0,55181	0,56230
200	10 000	180	1039,2	19 099	186,15	10° 3' 17"	2021,0	0,51421	0,51707
200	10 000	210	1212,4	20 816	210,82	6° 15' 5"	2522,2	0,48071	0,47853
200	10 000	240	1385,6	22 599	235,91	3° 11' 59"	3073,2	0,45088	0,44535
200	10 000	270	1538,8	24 357	261,29	0° 41' 55"	3674,3	0,42427	0,41646
200	10 000	300	1732,0	26 116	286,89	—1° 23' 13"	4324,4	0,40053	0,39112

câble, calculées en tenant compte de la capacité, sont plus grandes que celles que l'on obtient avec la résistance et la self seulement, on remarque au contraire que pour le câble 8 elles sont toutes plus petites ; en outre elles diminuent quand la longueur du câble 8 augmente, tandis qu'elles grandissent avec les longueurs de ligne pour le n° 1. L'effet de la capacité est donc pour le câble 8 précisément l'inverse de l'effet produit dans le câble 1.

*Ce résultat montre qu'après avoir effectué les calculs complets d'un câble d'une certaine section, il n'est pas possible de déterminer la manière d'être d'un câble du même type mais de section différente, même dans des conditions d'exploitation identiques ; il démontre à l'évidence qu'il est nécessaire de faire, dans chaque cas particulier, un calcul complet en tenant compte de la capacité.*

La différence entre les câbles 1 et 8 s'explique par les valeurs différentes du facteur **C** dans l'équation

$$E_t = (E_0 + I_0 R_c) C. \quad (40)$$

Le tableau XIII montre que **C** augmente de 48 p. 100 quand le câble 1 passe de 50 à 200 kilomètres, tandis qu'il diminue de 41 p. 100 dans le câble 8. C'est pour les plus faibles longueurs que, dans les deux câbles, la tension initiale se rapproche de celle que l'on a en ne tenant pas compte de la capacité ; cette tension ainsi calculée diffère de la tension réelle d'au plus 1 p. 100 dans le câble 8, et de presque rien dans le câble 1.

De même que dans le câble 1, le courant initial que le câble 8 peut admettre s'accroît par le fait de la capacité, et cela d'autant plus que le câble est long. Le courant est, pour 200 kilomètres, par exemple, de 83 ampères au commencement et de 30 à la fin ; pour 50 kilomètres les deux valeurs sont presque égales (120,79 amp. contre 120). Remarquons que dans le câble 1 nous avons pour 50 kilomètres 13,4 amp. au commencement et 6,9 amp. à la

fin. Nous voyons que l'hypothèse faite plus haut (que la valeur relativement plus faible du courant de charge par rapport au courant utile aurait cette conséquence pour les câbles les plus gros) se trouve confirmée.

Le tableau XXVIII donne les valeurs de ces deux courants pour le câble 8.

TABLEAU XXVIII

LONGUEUR DU CÂBLE	COURANT UTILE	COURANT DE CHARGE
50 km.	120 amp.	22,59 amp.
100 —	60 —	43,00 —
150 —	40 —	67,06 —
200 —	30 —	88,58 —

Pour ce qui est du décalage au commencement dans le câble 8, nous remarquons qu'il est fort peu différent de 0° pour 50 kilomètres, tandis qu'il se monte à 58° 48' pour 200 kilomètres.

Quand on ne tient pas compte de la capacité, le rendement est de 0,86530 pour toutes les longueurs du câble 8. Le rendement vrai pour 50 kilomètres est 0,86433, ce qui représente une différence insignifiante, la capacité n'influençant que fort peu la tension, le courant ou le décalage au commencement du câble. Pour 200 kilomètres, par contre, le rendement exact n'est plus que de 0,66396 ; il y a un déchet de 20 p. 100. On peut conclure de là que la capacité ne diminue pas le rendement du câble de forte section dans la même mesure que dans le câble le plus faible ; mais son influence est cependant considérable et ne doit pas être négligée dès que la longueur du câble devient un peu grande. Tandis que le câble 1 est absolument inutilisable pour la fourniture des courants indiqués au tableau XXV, dès que sa longueur est un peu considé-

nable, le câble 8 peut à la rigueur servir ; cependant les inconvénients de la grande intensité nécessaire seraient si forts pour le générateur et le câble, le rendement serait si faible, qu'on n'exécuterait pas en pratique les transports de force qui sont indiqués comme exemple.

Les considérations que nous venons d'exposer et particulièrement celles que l'on peut déduire des tableaux XXVI et XXVIII pourraient amener à la conclusion qu'il serait peut-être possible de restreindre les effets de la capacité en diminuant le rapport du courant de charge au courant utile. Afin de vérifier cette conclusion, l'auteur a établi le tableau XXIX (p. 242) qui montre la manière d'être du câble 8 (le plus avantageux de tous sous le rapport des grandeurs relatives du courant de charge et du courant utile, à densité égale de courant), quand on lui fait transporter l'énergie à 200 kilomètres.

Les figures 54 et 55 donnent un graphique de ce tableau XXIX.

On a fait varier le courant final de 30 à 300 ampères ; cette dernière valeur n'a rien d'exagéré, car elle correspond à une densité de courant de 2,5 amp. par millimètre carré ; il ne conviendrait cependant pas de dépasser cette densité, eu égard à l'échauffement, surtout pour un câble à haute tension de 120 millimètres carrés. A mesure que le courant utile augmente, on voit que la grande différence qui existait entre le courant initial et celui que l'on recueille à l'extrémité du câble va en diminuant ; il arrive même pour d'assez grandes intensités (vers 210 amp. environ) que le courant du générateur devient plus faible que le courant dans l'appareil d'utilisation et que par conséquent le rendement dépasse celui que donnerait l'application pure et simple de la loi d'Ohm. Mais il faut remarquer tout de suite que les courants qui donnent ces valeurs avantageuses sont si considérables que la chute de tension dépasse le 100 p. 100 de la tension à l'extrémité

du câble, et que le rendement devient plus faible que 0,50.

Nous concluons : *Il est possible de diminuer dans une forte mesure l'influence de la capacité en augmentant le*

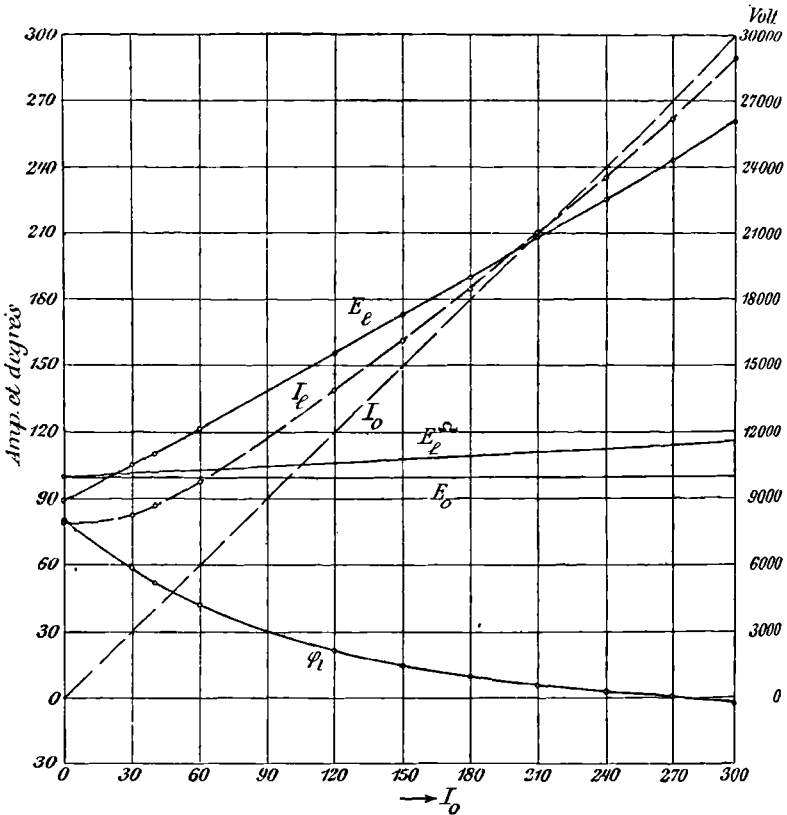


Fig. 54.

*courant utile par rapport au courant de charge ; mais dans ce cas le courant transporté par le câble est si considérable que le rendement devient trop faible pour une exploitation rémunératrice. Un transport de force avec les câbles et les courants alternatifs actuellement employés*

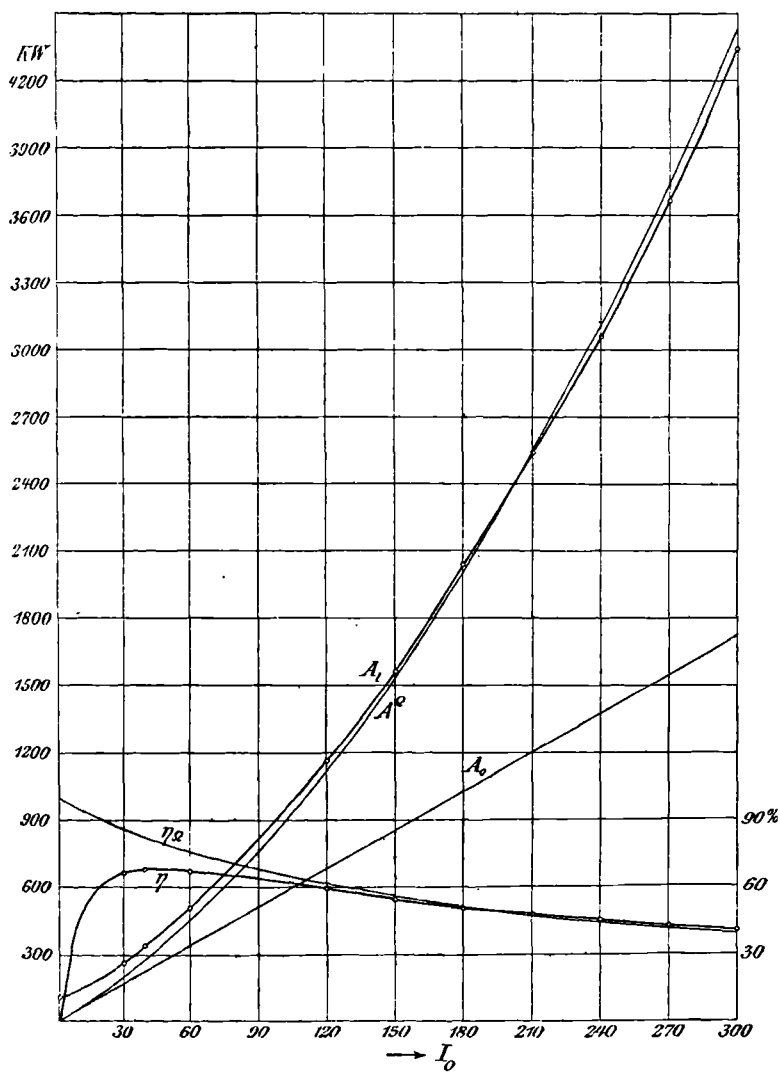


Fig. 55.

*n'est possible que jusqu'à 50, tout au plus 100 kilomètres.*

TABLEAU XXX

État électrique du câble n° 8 sous les mêmes charges que dans le tableau XXIX, avec 25 périodes par seconde.

km.	$E_0$ tension composée.	$I_0$	$A_0$ en kv.	$E_l$ tension composée.	$I_l$	$A_l$ en kv.	$\varphi_l$	$\eta$	$r_l \Omega$
200	10 000	30	173,21	11 288	49,976	216,38	48° 22' 1"	0,80049	0,86530
200	10 000	40	230,94	11 816	56,665	295,10	40° 14' 20"	0,78258	0,82812
200	10 000	60	346,41	12 877	72,133	470,18	28° 44' 47"	0,73076	0,76257
200	10 000	120	692,82	16 072	125,32	1136,2	12° 16' 33"	0,60977	0,61626
200	10 000	150	866,04	17 676	153,30	1548,6	8° 9' 44"	0,55923	0,56226
200	10 000	180	1039,2	19 282	181,65	2013,8	5° 12' 51"	0,51604	0,51707
200	10 000	210	1212,4	20 889	210,20	2534,7	2° 59' 20"	0,47889	0,47853
200	10 000	240	1385,6	22 502	238,90	3102,8	1° 14' 46"	0,44656	0,44535
200	10 000	270	1558,8	24 113	267,69	3726,5	-0° 9' 41"	0,41830	0,41646
200	10 000	300	1732,0	25 723	296,55	4403,4	-1° 19' 21"	0,39336	0,39112

Toutes les mesures qui tendraient à diminuer le courant de charge rapprocheraient les conditions du transport d'énergie par courants alternatifs de celles du transport par courant continu. Il faudrait pour cela construire les câbles de manière à diminuer leur capacité ; on pourrait encore essayer de diminuer la fréquence du courant alternatif.

L'auteur a rassemblé dans le tableau XXX les résultats du calcul fait sur le câble 8 avec 25 périodes par seconde, toutes les autres conditions étant semblables à celles du tableau XXIX.

La comparaison des tableaux XXIX et XXX montre que la chute de tension est en général plus



grande pour 25 périodes que pour 50 ; ce n'est que pour des courants dépassant 180 ampères qu'elle devient plus petite. Pour 30 ampères par exemple la chute de tension est de 5 p. 100 pour 50 périodes et de 13 p. 100 pour 25 périodes. Pour le courant le plus fort des deux tableaux, 300 ampères, la tension initiale est à peine de 2 p. 100 plus faible pour 25 périodes que pour 50. La marche à 25 périodes est donc moins favorable, en ce qui concerne la chute de tension, pour les intensités que l'on transporterait en pratique avec le câble 8.

Toutes les grandeurs électriques autres que la chute de tension se comportent différemment ; l'intensité initiale par exemple, qui se montait à 83 ampères pour 50 périodes, passe à 50 ampères pour 25 périodes, le courant à la fin du câble étant dans les deux cas de 30 ampères ; le décalage monte à 48° au lieu de 58° et le rendement à 80 p. 100 au lieu de 66 p. 100. A mesure que la puissance à transmettre augmente, les différences entre les nombres correspondants diminuent ; elles changent même de signe vers 240 ampères pour  $I_1$  et vers 210 ampères pour  $A_1$  et  $\tau_1$  ; il n'y a que le décalage qui dans tous les cas reste plus petit à faible fréquence qu'à fréquence élevée.

Il semble qu'il y a contradiction entre le fait que la diminution de la périodicité entraîne une diminution du courant de charge, et par suite une diminution des effets de capacité, et le fait que la chute de tension dans le câble 8 est plus grande pour 25 périodes que pour 50. Mais nous avons vu (p. 243) que dans le câble 8 la capacité *diminue* la chute de tension par rapport au cas où l'on ne considère que la résistance et la self ; mais cette diminution *diminue* à son tour avec la périodicité et il en suit que la chute de tension doit être plus grande à périodicité faible.

Dans le câble 4, au contraire, où nous avons trouvé que l'effet de la capacité était d'augmenter la chute de tension,

nous observerions que cette chute diminuerait par l'abaissement de la fréquence.

Concluons : *Dans le transport d'énergie, la diminution de la fréquence n'a donc pas que des avantages ; il est nécessaire d'examiner de très près chaque cas particulier et de juger chaque fois si les avantages dépassent les inconvénients.*

Pour faciliter des calculs qui se présenteront plus loin, nous donnons ici un résumé des constantes électriques du câble 8 pour une longueur de 200 kilomètres, à 25 et à 50 périodes.

$\nu = 25$	$\nu = 50$
$a = 1,3574 \cdot 10^{-3}$	$a = 1,6584 \cdot 10^{-3}$
$b = 1,8647 \cdot 10^{-3}$	$b = 3,0527 \cdot 10^{-3}$
$u = 68,293 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$	$u = 51,43$
$\beta = 35^{\circ} 56' 23''$	$\beta = 28^{\circ} 27' 28''$
$c = 0,97098$	$c = 0,88626$
$\gamma = 5^{\circ} 55' 10''$	$\gamma = 12^{\circ} 37' 21''$
$d = 0,45638$	$d = 0,66546$
$\delta = 55^{\circ} 53' 20''$	$\delta = 65^{\circ} 25' 19''$
$d \cdot u = 31,17$	$d \cdot u = 34,22$
$\frac{d}{u} = 0,006683$	$\frac{d}{u} = 0,01294$
$R_0 = 145,3 \cdot e^{-i 85^{\circ} 54' 33''}$	$R_0 = 68,497 \cdot e^{-i 81^{\circ} 15' 26''}$
$R_c = 32,10 \cdot e^{+i 14^{\circ} 1' 47''}$	$R_c = 38,618 \cdot e^{+i 24^{\circ} 20' 30''}$
$\text{arc tg } \frac{s}{r} = 18^{\circ} 0' 34''$	$\text{arc tg } \frac{s}{r} = 33^{\circ} 1' 45''$
$R\sqrt{1 + \frac{s^2}{r^2}} = 31,504$	$R\sqrt{1 + \frac{s^2}{r^2}} = 35,74$

Pour la définition de  $u$  et de  $\beta$  voir l'équation 8, page 123 ; pour celle de  $c$ ,  $\gamma$ ,  $d$ ,  $\delta$  voir le tableau XII, p. 153.

Il est possible de diminuer l'effet nuisible du courant de charge, tout au moins pour le générateur, en employant des bobines d'induction montées sur le générateur en parallèle au câble et calculées de façon à absorber un courant déwatté sensiblement égal au courant de charge. Il a été fait récemment des essais dans ce sens ; mais ce procédé n'a aucune influence sur le courant dans le câble lui-même. Il n'y a possibilité de contre-balancer l'effet du courant de charge dans le câble qu'en plaçant ces bobines à la façon des bobines de Pupin dans les lignes téléphoniques, non seulement au commencement du câble, mais en des points convenablement choisis le long du câble. Malheureusement, quand il s'agit du transport de force à haute tension, il est nécessaire de compenser des courants de charge très considérables, et les frais d'installation des bobines deviennent énormes.

**Le rendement maximum.** — Le rendement d'une ligne à courant alternatif est limité encore par une autre raison que voici :

Une transmission par courant continu, dont le câble possède la résistance  $r$ , et qui reçoit un courant  $I$  sous une tension  $E_t$ , possède à son extrémité une tension  $E_0$ . Le rendement est alors en régime permanent

$$\eta = \frac{E_0 I}{E_t I} = \frac{E_0}{E_t} = \frac{E_t - rI}{E_t}. \quad (41)$$

Ce rendement diffère de 1 d'une quantité qui est proportionnelle à  $I$ . En mettant le câble en court-circuit, ce qui donnerait  $E_t = rI$ , puis en remplaçant le court-circuit par une résistance croissante, tout en maintenant constante la tension  $E_t$  du générateur, le rendement croîtrait de 0 jusqu'à la valeur 1, atteinte au moment où la résistance devient infinie.

Pour un câble alimenté par un courant alternatif, par

contre, le rendement est nul non seulement en court-circuit mais encore en circuit ouvert ; dans ce dernier cas, en effet, le câble reçoit de l'énergie et n'en rend point à son extrémité. Il doit donc exister, entre ces deux limites nulles, une valeur maximale du rendement. Nous allons chercher dans quelles conditions ce maximum se produit, et à combien il peut se monter.

La charge du câble qui produit ce rendement maximum  $\eta_{max}$  est définie sans ambiguïté par la résistance apparente  $R'_0$  qui ferme le circuit à l'extrémité du câble, et par le décalage  $\varphi_0$  entre  $E_0$  et  $I_0$  que cette résistance provoque. Nous définirons cette résistance par l'expression complexe

$$\frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{I}_0} = \mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0}; \quad (42)$$

ici un  $\varphi_0$  positif représente une avance de phase de la tension sur le courant à l'extrémité du câble.  $\mathbf{R}'_0$  peut encore être exprimé sous la forme

$$\mathbf{R}'_0 = y_r + iz_r. \quad (43)$$

On sait que l'on a en général

$$\eta = \frac{A_0}{A_l} = \frac{E_0 I_0 \cos \varphi_0}{E_l I_l \cos \varphi_l}. \quad (44)$$

Nous allons chercher à amener  $A_0$  et  $A_l$  l'un après l'autre à une forme sous laquelle il sera facile de déterminer les conditions qui font que  $y_r$  et  $z_r$  donnent à  $\eta$  sa valeur maximale.

Exprimons  $E_0$  par l'équation

$$\frac{E_0}{I_0} = R'_0$$

et substituons dans

$$A_0 = E_0 I_0 \cos \varphi_0$$

nous obtenons

$$A_0 = I_0^2 R'_0 \cos \varphi_0. \quad (45)$$

Amenons l'équation 42 à la forme

$$\mathbf{R}'_0 = R'_0 \cos \varphi_0 + i R'_0 \sin \varphi_0 \quad (46)$$

d'où par comparaison avec l'équation 43

$$R'_0 \cos \varphi_0 = y_r.$$

L'équation 45 devient

$$A_0 = I_0^2 y_r. \quad (47)$$

Pour la transformation de

$$A_l = E_l \cdot I_l \cos \varphi_l \quad (48)$$

nous utilisons les équations connues (p. 217)

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{C} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{I}_0 \mathbf{R}_c) \quad (49)$$

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{C} \left( \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{R}_0} \right).$$

Écrivons pour simplifier

$$\frac{1}{\mathbf{R}_0} = \mathbf{G}_0$$

d'où enfin

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{C} (\mathbf{I}_0 + \mathbf{E}_0 \mathbf{G}_0). \quad (50)$$

En tenant compte de l'équation 42, et en tirant des équations 49 et 50 la valeur de  $\mathbf{I}_0$ , nous avons

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{C} \mathbf{I}_0 (\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_c) \quad (51)$$

et

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{C} \mathbf{I}_0 (1 + \mathbf{G}_0 \mathbf{R}'_0) \quad (52)$$

Prenons  $\mathbf{C} \mathbf{I}_0$  comme quantité origine des phases ; nous avons alors

$$\mathbf{C} \mathbf{I}_0 = c I_0$$

de sorte que

$$\mathbf{E}_l = c I_0 (\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_c) \quad (53)$$

et

$$\mathbf{I}_l = c I_0 (1 + \mathbf{G}_0 \mathbf{R}'_0) \quad (54)$$

En amenant  $\mathbf{R}_c$  et  $\mathbf{G}$  à la forme accessoire, on a

$$\mathbf{R}_c = y_c + iz_c \quad (55)$$

et

$$\mathbf{G}_0 = y_0 + iz_0. \quad (56)$$

Les éq. 14 et 15, pages 7 et 8, donnent pour  $\mathbf{E}_l$  et  $\mathbf{I}_l$

$$\mathbf{E}_l = p_e + iq_e$$

et

$$\mathbf{I}_l = p_i + iq_i.$$

Enfin en tenant compte de l'équation 22, page 9

$$A_l = p_e p_i + q_e q_i$$

nous avons

$$\left. \begin{aligned} A_l &= c^2 I_0^2 [y_r + y_0 y_r^2 + y_0 y_c y_r + y_r z_0 z_c \\ &\quad + y_0 z_r^2 - y_c z_0 z_r + y_0 z_c z_r + y_c] \\ &= c^2 I_0^2 Q \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

et enfin

$$\tau_i = \frac{A_0}{A_l} = \frac{y_r}{c^2 Q}. \quad (58)$$

Il nous reste à déterminer les valeurs de  $z_r$  et  $y_r$  qui donnent  $\tau_{i,max}$ . Égalons d'abord la dérivée  $\frac{d\tau_i}{dz_r}$  à 0; nous avons

$$z_r = \frac{y_c z_0 - y_0 z_c}{2y_0}. \quad (59)$$

En égalant à 0 l'autre dérivée  $\frac{d\tau_i}{dy_r}$ , nous avons

$$y_c = y_0 (y_r^2 + z_r^2) = y_0 R_0^2$$

comme, d'autre part, d'après les équations 42 et 46

$$z_r = R'_0 \sin \varphi_0,$$

nous avons finalement dans l'expression de la résistance amenant le rendement maximum

$$\mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0}$$

les valeurs

$$R'_0{}^2 = \frac{y_c}{y_0} \quad (60)$$

et

$$\sin \varphi_0 = \frac{y_c z_0 - y_0 z_c}{2\sqrt{y_0 y_c}}. \quad (61)$$

On obtiendra la valeur maximale du rendement sous sa forme la plus simple en posant  $y = R'_0 \cos \varphi_0$  expression dans laquelle on donnera à  $R'_0$  la valeur tirée de l'équation 60 ; on aura

$$\eta_{\max} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{1 + y_0 y_c + z_0 z_c + 2\sqrt{y_0 y_c} \cos \varphi_0}; \quad (62)$$

$\cos \varphi_0$  est calculé au moyen de l'équation 61.

Le tableau XXXI donne pour les 8 câbles et pour la ligne aérienne les rendements les plus élevés que l'on puisse atteindre, la longueur de pose étant 50, 100, 150 et 200 kilomètres. Ces valeurs sont calculées d'après l'équation 62. Comme cette dernière l'indique, ces valeurs sont indépendantes de la tension et constituent des caractéristiques de la ligne. On a ajouté entre parenthèses et en chiffres plus petits les courants que le générateur arriverait à fournir en appliquant une tension composée de 10 000 volts ; ces valeurs donnent la mesure de l'utilisation du cuivre dans le cas du rendement maximum.

L'examen du tableau montre qu'il n'y a guère que les câbles les plus forts employés pour les plus grandes distances qui donnent des rendements admissibles.

Pour tous les types de câbles, la perte en ligne est encore acceptable tant qu'on ne dépasse pas 50 kilomètres ; le n° 1 perd un peu plus de 10 p. 100, le n° 8 pas tout à fait 2 p. 100.

Sur 100 kilomètres le n° 1 perd déjà 35 p. 100, le n° 8 seulement 6 p. 100 ; tous les câbles de 1 à 5 perdent plus de 10 p. 100.

TABLEAU XXXI

Rendement maximum des câbles à 10000 volts et de la ligne aérienne;  
fréquence 50.

CABLES		50 km.	100 km.	150 km.	200 km.
N°	section en mm <sup>2</sup> .				
1	3 · 10	0,89402 (6,898)	0,65211 (13,603)	0,39581 (19,845)	0,21332 (24,700)
2	3 · 16	0,92498 (7,027)	0,74506 (15,045)	0,52499 (22,290)	0,33269 (28,760)
3	3 · 25	0,94468 (8,667)	0,80698 (17,092)	0,62416 (25,488)	0,44269 (33,472)
4	3 · 35	0,95638 (9,320)	0,84820 (18,295)	0,70243 (27,353)	0,53334 (36,221)
5	3 · 50	0,96638 (10,037)	0,88340 (19,602)	0,76183 (29,348)	0,62231 (39,068)
6	3 · 70	0,97396 (10,074)	0,90912 (20,930)	0,81238 (31,325)	0,69593 (41,812)
7	3 · 95	0,97875 (11,482)	0,92845 (22,123)	0,85010 (33,134)	0,75333 (44,278)
8	3 · 120	0,98210 (11,984)	0,94044 (22,919)	0,87524 (34,287)	0,79256 (45,851)
Ligne aérienne 3 · 12,57 mm <sup>2</sup>		0,99513 (0,44733)	0,97834 (0,91405)	0,95273 (1,3729)	0,91782 (1,8332)

Sur 150 kilomètres les pertes deviennent très importantes, même pour les câbles les plus puissants; à 200 kilomètres, le n° 8 lui-même perd 21 p. 100.

La ligne aérienne se comporte mieux; elle ne perd que 8 p. 100 sur 200 kilomètres.

Mais il ne faut pas oublier que cette perte est la plus petite qui puisse se produire et qu'en général elle est



beaucoup plus grande. En effet, le tableau XXV nous montre que la ligne aérienne perd déjà 17 p. 100 quand le courant qui lui est imposé est de 1,7 amp. (voy. aussi tabl. XXVIII et XXIX).

Les courants indiqués entre parenthèses dans le tableau XXXI montrent combien l'utilisation du cuivre est faible dans le cas du rendement maximum. Nous reconnaissons donc : 1° qu'un rendement acceptable ne peut être obtenu pour un transport de force à grande distance que par des câbles de forte section ; 2° que même dans ce cas l'utilisation du cuivre doit être très faible.

*Avec les câbles actuels et des courants à 50 périodes par seconde, on se trouve dans l'alternative de travailler avec un rendement favorable, mais avec une mauvaise utilisation du cuivre, ou de charger convenablement le cuivre, mais en dissipant beaucoup d'énergie dans le câble.*

L'auteur a calculé le rendement maximum du câble n° 8 sur 200 kilomètres pour 25 périodes par seconde, en tenant compte des chiffres donnés à la page 250. Le rendement s'élève alors à 88, 4 p. 100 au lieu de la valeur 79 p. 100 qu'il a quand la périodicité est de 50. On voit de suite que l'abaissement du courant de charge corrélatif de la diminution de la fréquence amène le rendement maximum passablement plus près de 1. Il n'en faudrait pas déduire que ce résultat a une très grande importance pour le choix de la fréquence car, comme nous l'avons vu plus haut, il se peut fort bien que pour des courants admissibles en pratique, la fréquence de 25 soit moins avantageuse que celle de 50.

La comparaison des grandeurs électriques au commencement et à la fin de la ligne travaillant avec le rendement maximum est très intéressante. C'est ce qui a été fait dans le tableau XXXII pour les 8 câbles en admettant une tension composée de 10 000 volts au générateur et une ligne de 50 kilomètres ; le tableau XXXIII donne les

mêmes valeurs pour la ligne aérienne, les longueurs étant de 50, 100, 150 et 200 kilomètres.

Nous remarquerons tout d'abord qu'à l'extrémité de la ligne le courant  $I_0$  et la puissance  $A_0$  varient du simple au double entre le câble 8 et le câble 1, quoique les sections soient dans le rapport de  $120 : 10 = 12$ . La chute de tension est plus grande dans le câble 1 que dans le 8, la densité de courant étant plus forte ; c'est ce qui diminue le rendement du n° 1.

Dans tous les câbles, l'intensité au commencement est très peu supérieure à celle qui existe à la fin ; c'est là une suite nécessaire de la condition du rendement maximum.

Remarquons en outre que dans la ligne aérienne les intensités  $I_0$  et les puissances  $A_0$  débitées à l'extrémité sont presque exactement proportionnelles à la longueur de la ligne. La chute de tension à 200 kilomètres est beaucoup plus grande qu'à 50 kilomètres, ce qui s'explique par l'augmentation de distance et la plus forte densité de courant. L'intensité au commencement est de très peu supérieure à celle de la fin, et cela pour toutes les distances ; la différence entre les deux valeurs est pourtant un peu plus forte dans les grandes longueurs.

C'est le décalage entre la tension et le courant qui est le plus remarquable. Il présente au commencement et à la fin du câble les mêmes valeurs absolues, *mais en sens contraire*. Les valeurs de  $\varphi_0$  et de  $\varphi_1$  indiquées dans les tableaux XXXII et XXXIII ont été calculées indépendamment les unes des autres ; on pourra juger de l'exactitude des calculs par la grandeur des différences entre les deux valeurs.

On reconnaît facilement que  $\varphi_1$  doit être égal à  $-\varphi_0$  en exprimant  $R'_1$  comme quotient de  $E_1$  et  $I_1$  d'après les équations 49 et 50 ; on obtient

$$R'_1 = \frac{R'_0 + R_c}{1 + G_0 R'_0}. \quad (63)$$

TABLEAU XXXII

Rendement maximum et état électrique des câbles à 10 000 volts de 50 km., sous 10 000 volts de tension au générateur.

CABLE N°	$R_0$	$\varphi_0$	$\cos \varphi_0$	$E_0$ volts.	$I_0$ amp.	$A_0$ kw.	$E_l$ volts.	$I_l$ amp.	$A_l$ kw.	$\varphi_l$	$\eta$
1	836,93	58° 37' 9"	0,52073	9455,2	6,523	18,541	10 000	6,893	20,739	-58° 37' 11"	0,89402
2	756,90	58° 10' 8"	0,52741	9617,8	7,336	21,485	10 000	7,627	23,227	-58° 9' 47"	0,92498
3	666,44	57° 56' 52"	0,53070	9719,4	8,420	25,076	10 000	8,667	26,544	-57° 56' 50"	0,94468
4	619,47	57° 17' 8"	0,54044	9779,4	9,114	27,812	10 000	9,320	29,080	-57° 17' 13"	0,95638
5	575,24	56° 40' 8"	0,54946	9830,6	9,867	30,770	10 000	10,037	31,841	-56° 40' 8"	0,96638
6	537,55	56° 14' 7"	0,55579	9868,8	10,599	33,567	10 000	10,074	34,463	-56° 14' 11"	0,97396
7	502,85	55° 10' 38"	0,57104	9892,8	11,358	37,047	10 000	11,482	37,850	-55° 10' 45"	0,97875
8	481,76	54° 23' 20"	0,58228	9909,8	11,876	39,563	10 000	11,984	40,283	-54° 23' 25"	0,98210

LE CABLE EN CHARGE

TABLEAU XXXIII

Rendement maximum et état électrique de la ligne aérienne sous 10 000 volts de tension initiale dans chaque phase.

LON- GUEUR	$R_0$	$\varphi_0$	$\cos \varphi_0$	$E_0$ volts.	$I_0$ amp.	$A_0$ kw.	$E_l$ volts.	$I_l$ amp.	$A_l$ kw.	$\varphi_l$	$\eta$
50 km	12907,0	62° 7' 0"	0,4677	9975,6	0,7729	3,6038	10 000	0,7748	3,623	-62° 7' 2"	0,99513
100 —	6316,7	59° 54' 15"	0,5015	9893,5	1,5663	7,7702	10 000	1,5831	7,939	-59° 54' 13"	0,97874
150 —	4205,4	59° 45' 26"	0,5038	9761,6	2,3212	11,412	10 000	2,3778	11,976	-59° 45' 28"	0,95290
200 —	3149,5	59° 34' 26"	0,5064	9580,5	3,0419	14,761	10 000	3,1753	16,080	-59° 34' 30"	0,91784

259

En exprimant  $\mathbf{R}'_0$ ,  $\mathbf{R}_c$  et  $\mathbf{G}_0$  par les équations 43, 55 et 56 et en utilisant les relations 60 et 61, on trouve

$$\mathbf{R}'_l = y_r - iz_r$$

d'où

$$\mathbf{R}'_l = R'_l e^{iz_l} = R'_0 e^{-iz_0}$$

ce qui signifie

$$\varphi_l = -\varphi_0 \quad (64)$$

et

$$R'_0 = R'_l.$$

Cette dernière équation signifie que la tension et le courant ont le même rapport au commencement et à la fin du câble. On a donc :

$$\frac{E_l}{I_l} = \frac{E_0}{I_0}$$

soit

$$\frac{E_l}{E_0} = \frac{I_l}{I_0} \quad (65)$$

ce qui peut se dire : Le courant et la tension ont une même chute relative du commencement à la fin du câble.

En reprenant l'équation 44, qui donne le rendement et en tenant compte des équations 64 et 65, on a

$$\eta_{\max} = \frac{E_0^2}{E_l^2} = \frac{I_0^2}{I_l^2}.$$

Dans les tableaux XXXII et XXXIII, les valeurs positives de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  représentent un retard de phase du courant sur la tension. Il peut sembler intéressant de vérifier si dans les applications pratiques, le rendement maximum exige comme dans ces tableaux un retard du courant sur la tension ou si le cas contraire peut se produire. En reprenant l'équation 61, nous voyons qu'il peut y avoir un retard du courant lorsque

$$y_c z_0 - y_0 z_c > 0,$$

c'est-à-dire quand

$$\frac{\tilde{z}_0}{y_0} > \frac{\tilde{z}_c}{y_c}$$

ou encore

$$\operatorname{tg}(-\varphi_0) > \operatorname{tg} \varphi_c$$

et enfin

$$\varphi_0 + \varphi_c < 0.$$

Comme d'après la page 205, nous avons

$$\varphi_0 + \varphi_c = -2\beta,$$

la condition posée se réalise quand  $\beta > 0$ , ce qui arrivera (voy. p. 109), quand

$$x^r > g_s.$$

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée quand l'isolement est bon ; nous en concluons que dans les transports de force à grande distance, le rendement maximum sera toujours accompagné d'un retard du courant sur la tension à l'extrémité du câble.

L'équation 60 fournit encore une relation intéressante ; si on y remplace  $R_0$  par  $\frac{E_l}{I_l}$ , on obtient

$$E_l^2 y_0 = I_l^2 y_c$$

Or d'après la page 216,  $E_l^2 y_0$  est la puissance consommée à vide par le câble, quand on lui applique la tension  $E_l$  (qui est ici celle qui correspond au rendement maximum).  $I_l^2 y_c$  représenterait la puissance absorbée par le câble en court-circuit, dans le cas où  $I_l$  serait l'intensité de court-circuit. Hâtons-nous d'ajouter que  $I_l$  n'a pas cette signification. Il est possible cependant d'amener le courant de court-circuit à posséder cette valeur, tout simplement en choisissant une tension convenable au générateur. On peut donc dire que  $I_l^2 y_c$  est la puissance absorbée par le câble quand ce dernier est mis en court-circuit et se trouve alimenté par une tension capable de produire le courant qui correspond en réalité au rendement maximum.

L'équation considérée est valable pour un câble à courant continu aussi ; nous avons en effet montré que ce dernier a un rendement maximum égal à 1 quand il est en circuit ouvert. Le courant qui

entre alors est nul. Le membre de gauche de l'équation, qui représente la puissance absorbée par le câble en circuit ouvert sous la tension normale, est donc nul. La tension qu'il faut appliquer au commencement du câble pour que ce dernier soit parcouru par un courant nul lors du court-circuit, doit être nulle aussi ; le puissance indiquée par le membre de droite de l'équation est nulle.

Il est d'ailleurs évident que cette équation doit s'appliquer au câble à courant continu, puisqu'en somme ce dernier peut être considéré comme un cas spécial du câble à courant alternatif. L'expression étudiée est donc l'équation de condition du cas le plus général, qui comprend tous ceux qui sont possibles en pratique.

Les relations simples que nous venons de trouver entre les états électriques au commencement et à la fin du câble nous engagent à essayer de déterminer de quelle façon les grandeurs électriques varient en des points intermédiaires. La figure 56 s'applique au câble n° 4 pour 200 kilomètres. La fin du câble se trouve au point  $ax = 0^\circ$  ; le commencement a été marqué spécialement par la cote  $x = 200$  kilomètres ;  $\varphi_0$  est positif au commencement, négatif à la fin du câble.

Afin de rendre cette figure comparable aux figures précédentes, telles que 42 et 52 par exemple, on a admis qu'une avance de phase du courant sur la tension serait indiquée par un angle *positif*, ce qui est contraire à la convention faite dans ces dernières pages et en particulier dans l'expression  $\mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0}$ . Comme  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont de même valeur, mais de signes contraires, il doit se trouver un point du câble où  $\varphi_x = 0$  ; mais ce point ne se trouve pas au milieu ; il est plus près de la fin que du commencement. On peut se rendre compte de la façon suivante du fait que  $\varphi_x$  doit passer par 0 en un point situé près du milieu du câble : Pour obtenir un rendement aussi élevé que possible, le décalage du courant et de la tension doit avoir en tous les points la plus petite valeur possible, car alors pour une puissance donnée il suffit d'un courant relativement petit (ce qui diminue la perte dans le cuivre). Mais comme

on a montré plus haut qu'il doit se produire à l'extrémité du câble un retard du courant sur la tension, il en suit que le décalage doit tendre vers  $0^\circ$  à mesure que l'on se rapproche du commencement du câble, et cela de telle façon

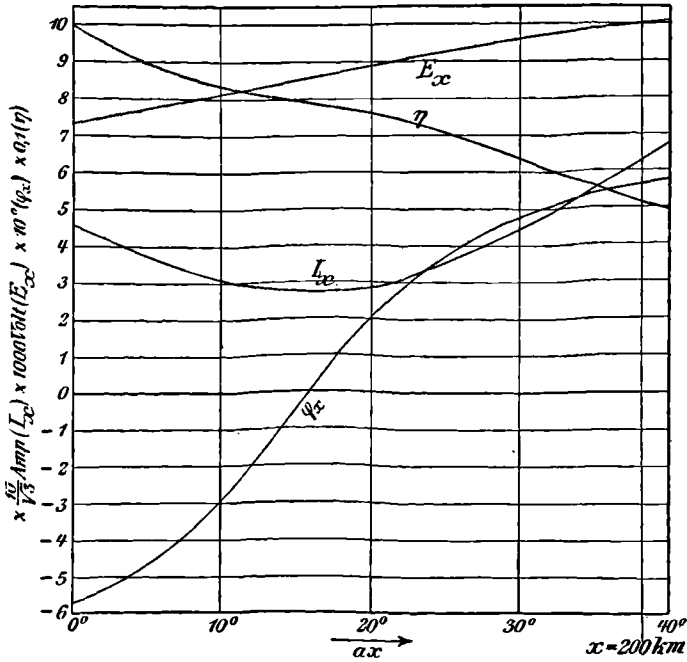


Fig. 56.

que le câble contienne le plus possible de points à faible décalage ; ceci se produira quand le point de décalage nul se trouvera à peu près au milieu de la longueur, car alors il y aura *de part et d'autre* de ce point des points à faible décalage ; le nombre de ces points à faible décalage se trouvera plus grand que si le point de décalage nul était près de l'une des extrémités. Si, partant de la fin du câble, on dépasse son milieu, le décalage doit changer de signe et arriver au commencement du câble à donner une

avance du courant sur la tension. Quoique l'avance ait au commencement la même valeur que le retard à la fin, la répartition des décalages n'est pas régulière aux environs du milieu du câble ; le point de décalage nul, comme le montre la figure 56, se trouve à quelque distance du milieu.

Le fait établi par l'équation 65, que les rapports des tensions et des courants au commencement et à la fin sont égaux, pourrait peut-être amener à croire que ces rapports conservent leur égalité en tous les autres points du câble. Ce n'est pas le cas ; la figure 56 montre que  $E_x$  croît de la fin jusqu'au commencement, tandis que  $I_x$  descend vers un minimum pour remonter ensuite. Les variations de la tension et du courant correspondent exactement à celles qui se produisent dans le câble artificiel à charge inductive (fig. 14, pl. I) ; en particulier le minimum de courant coïncide avec le décalage nul.

**La puissance maximale.** — La tendance à diminuer l'influence de la capacité des câbles, par l'augmentation aussi grande que possible du courant utile par rapport au courant de charge, se trouve limitée non seulement par la diminution du rendement, mais encore par le fait que la puissance qu'un câble peut débiter à son extrémité possède un maximum bien déterminé pour une tension donnée du générateur.

Ce fait est bien connu dans les transmissions à courant continu. Soit une ligne de résistance  $r$ , reliée à un générateur de tension  $E_t$  et débitant à son extrémité un courant  $I$  sous une tension  $E_0$  ; on aura comme puissance utilisée

$$A_0 = E_0 I$$

et comme d'après la loi d'Ohm

$$E_t - E_0 = Ir$$



on a

$$A_0 = \frac{E_0 (E_l - E_0)}{r}.$$

La puissance  $A_0$  est nulle aussi bien dans le cas du circuit ouvert ( $E_0 = E_l$ ) que dans le cas du court-circuit ( $E_0 = 0$ ) ; elle doit donc posséder un maximum entre ces deux limites. En dérivant la fonction  $A_0$  par rapport à  $E_0$  et en égalant à 0 on a

$$\frac{dA_0}{dE_0} = \frac{E_l - E_0 - E_0}{r} = 0,$$

ce qui donne comme condition du maximum de  $A_0$

$$E_0 = \frac{E_l}{2}.$$

La puissance débitée dans le récepteur est alors

$$A_{0, \max} = \frac{E_l^2}{4r} = \frac{E_l I}{2}, \quad (66)$$

tandis que celle que fournit le générateur est

$$A_l = E_l I.$$

Le rendement de la ligne est donc pour la puissance maximum

$$\eta = \frac{1}{2}$$

résultat bien connu.

Les câbles doués de capacité et parcourus par des courants alternatifs doivent aussi présenter le phénomène de la puissance maximum tel qu'il vient d'être décrit ; en effet, la puissance débitée est nulle dans les cas du court-circuit et du circuit ouvert. Nous allons définir le récepteur comme dans l'étude du rendement maximum par la résistance sous forme complexe  $\mathbf{R}'_0$  placée à l'extrémité du câble

$$\mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0} = y_r + iz_r.$$

Calculons  $\mathbf{R}'_0$ .

L'équation 47 donne comme puissance débitée

$$A_0 = I_0^2 y_r.$$

Comme d'autre part l'équation 53 donne

$$\mathbf{E}_i = cI_0 (\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_c) = cI_0 [(y_r + y_c) + i(z_r + z_c)]$$

on a

$$E_i^2 = c^2 I_0^2 [(y_r + y_c)^2 + (z_r + z_c)^2]$$

et enfin

$$A_0 = \frac{E_i^2}{c^2} = \frac{y_r}{(y_r + y_c)^2 + (z_r + z_c)^2}. \quad (67)$$

En dérivant par rapport à  $z_r$ , on obtient la condition

$$z_r = -z_c \quad (68)$$

et en dérivant par rapport à  $y_r$

$$y_r = y_c. \quad (69)$$

La valeur de  $\mathbf{R}'_0$  est donc

$$\mathbf{R}'_0 = y_c - iz_c = R_c e^{-i\varphi_c}. \quad (70)$$

En introduisant les relations 68 et 69 dans l'équation 67, on obtient pour la puissance maximale

$$A_{0, \max} = \frac{E_i^2}{4c^2 y_c}. \quad (71)$$

Le tableau XXXIV donne les valeurs de  $A_{0, \max}$  pour 10000 volts de tension composée aux câbles et à la ligne aérienne. On y a ajouté en plus petits caractères et entre parenthèses le courant initial et entre crochets le rendement.

On constate que pour la distance de 50 kilomètres, la puissance maximale correspond presque exactement à celle qu'indique l'équation 66 pour le courant continu ; mais à mesure que la ligne s'allonge, les écarts augmentent.

TABLEAU XXXIV

*Puissance maximale des câbles à 10 000 volts et de la ligne aérienne sous une tension composée initiale de 10 000 volts.*

CABLE N°	50 km.	100 km.	150 km.	200 km.
1	92,42 kw. (32,75) [0,49688]	46,113 kw. (20,981) [0,43735]	29,309 kw. (22,291) [0,34223]	19,035 kw. (25,566) [0,20401]
2	149,06 kw. (52,20) [0,49844]	75,076 kw. (30,048) [0,47906]	49,579 kw. (28,441) [0,41153]	33,187 kw. (31,245) [0,29953]
3	233,02 kw. (81,18) [0,49921]	117,820 kw. (44,231) [0,48870]	79,112 kw. (37,428) [0,44915]	58,539 kw. (39,135) [0,37016]
4	326,19 kw. (113,4) [0,49947]	165,280 kw. (60,109) [0,49328]	111,890 kw. (47,207) [0,47264]	84,506 kw. (46,571) [0,41522]
5	466,10 kw. (161,8) [0,49970]	236,480 kw. (84,234) [0,49619]	160,890 kw. (62,989) [0,48204]	123,100 kw. (57,836) [0,44856]
6	652,67 kw. (226,4) [0,49981]	331,390 kw. (116,69) [0,49771]	226,160 kw. (84,372) [0,48940]	174,370 kw. (73,463) [0,46884]
7	885,53 kw. (307,0) [0,49984]	449,940 kw. (157,42) [0,49867]	307,500 kw. (111,56) [0,49347]	238,040 kw. (93,60) [0,48059]
8	1118,37 kw. (387,7) [0,49983]	568,340 kw. (198,21) [0,49903]	388,740 kw. (138,96) [0,49539]	301,540 kw. (114,08) [0,48676]
Ligne aérienne.	123,32 kw. (42,72) [0,50000]	61,820 kw. (21,433) [0,49986]	41,399 kw. (14,407) [0,49940]	31,236 kw. (10,975) [0,49816]

L'équation 66, qui montre qu'en continu la puissance maximale est inversement proportionnelle à la longueur, ne se vérifie pas en alternatif : le câble le plus faible, le n° 1, débite au bout de 200 kilomètres bien moins que le quart de ce qu'il débite après 50 kilomètres, tandis que le plus fort, le n° 8, débite à 200 kilomètres plus du quart de la puissance maximale qu'il est capable de transporter à 50 kilomètres.

Les intensités admises sont toutes plus faibles que celles que les câbles pourraient porter sans trop chauffer, sauf peut-être pour la distance de 50 kilomètres.

Les rendements sont tous inférieurs à 50 p. 100 ; ils s'en éloignent d'autant plus que les câbles sont plus longs et plus faibles (voy. la deuxième colonne du tableau XXXIV).

En résumé, on constate qu'il ne faut pas songer à charger les lignes au maximum de puissance qu'elles pourraient transporter, le rendement étant alors trop faible. Ce n'est donc pas la charge maximale qui imposera une limite aux applications des câbles à courant alternatif ; ce sera bien plutôt, comme en continu, la chute de tension et le rendement.

Ainsi que nous l'avons fait pour le rendement maximum, nous allons comparer les différentes variables électriques au commencement et à la fin du câble dans le cas de la puissance maximale. Les tableaux XXXV et XXXVI montrent les résultats du calcul dans les mêmes hypothèses que les tableaux XXXII et XXXIII, c'est-à-dire pour une tension composée de 10 000 volts et 50 kilomètres pour les 8 câbles, et 50, 100, 150 et 200 kilomètres pour la ligne aérienne.

Nous trouvons dans tous les cas un rendement très peu inférieur à 50 p. 100, comme en continu. Des deux facteurs de la puissance, nous constatons que c'est la tension qui subit à elle seule presque toute la perte de 50 p. 100, tandis que le courant diminue fort peu, dans les câbles

TABLEAU XXXV

*Puissance maximale et état électrique des câbles à 10000 volts de 50 km., sous 10000 volts de tension au générateur.*

CABLE N°	$\varphi_0$	$E_0$ volts.	$I_0$ amp.	$A_0$ kw.	$E_l$ volts.	$I_l$ amp.	$A_l$ kw.	$\varphi_l$	$\eta$
1	— 1° 14' 59"	5024,9	31,86	92,42	10 000	32,73	186,01	— 10° 21' 33"	0,49688
2	— 4° 38' 23"	5018,3	51,31	149,06	10 000	52,20	299,05	— 7° 7' 51"	0,49844
3	— 8° 2' 22"	5086,0	80,14	213,02	10 000	81,48	466,80	— 5° 11' 22"	0,49921
4	— 11° 52' 31"	5141,8	112,1	326,19	10 000	113,4	653,07	— 3° 57' 57"	0,49947
5	— 16° 5' 35"	5214,8	160,2	466,10	10 000	161,8	932,77	— 2° 58' 20"	0,49970
6	— 21° 35' 17"	5420,5	224,3	652,67	10 000	226,4	1305,83	— 2° 13' 38"	0,49981
7	— 27° 23' 7"	5676,8	304,3	885,53	10 000	307,0	1771,67	— 1° 45' 33"	0,49984
8	— 32° 32' 2"	5979,0	318,3	1118,37	10 000	387,7	2237,37	— 1° 26' 22"	0,49985

TABLEAU XXXVI

*Puissance maximale et état électrique de la ligne aérienne sous 10000 volts de tension initiale par phase.*

LON- GUEUR	$\varphi_0$	$E_0$ volts.	$J_0$ amp.	$A_0$ kw.	$E_l$ volts.	$J_l$ amp.	$A_l$ kw.	$\varphi_l$	$\eta$
50 km.	— 16° 44' 57"	5228,9	42,66	123,32	10 000	42,72	246,63	— 0° 31' 51"	0,50000
100 —	— 16° 12' 27"	5235,8	21,30	61,82	10 000	21,44	123,67	— 2° 6' 51"	0,49989
150 —	— 15° 18' 22"	5247,1	14,17	41,40	10 000	14,41	82,90	— 4° 43' 18"	0,49939
200 —	— 14° 1' 31"	5262,0	10,60	31,24	10 000	10,97	62,70	— 8° 16' 54"	0,49816

faibles et dans la ligne aérienne tout au moins. Dans le câble le plus fort, le courant diminue d'environ 10 p. 100 et la tension d'environ 40 p. 100. Nous allons maintenant étudier en détail la différence de phase.

La valeur  $\varphi_0$  du décalage à l'extrémité du câble est donnée par l'équation 70. En effet comme nous posons  $\mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0}$ , nous avons

$$R'_0 = R_c \quad \text{et} \quad \varphi_0 = -\varphi_c$$

Le décalage à l'extrémité est toujours égal, au signe près, au décalage au commencement du câble en court-circuit.

Comme le montre le tableau XXII,  $\varphi_c$  peut avoir les valeurs les plus diverses, positives ou négatives, suivant la section et la longueur des câbles; il en suit que pour la puissance maximale, il peut y avoir à l'extrémité du câble les décalages les plus variés. La relation  $\varphi_0 = -\varphi_c$  est intéressante en ce sens qu'elle permet de se faire une idée des moyens que la nature emploie pour permettre aux câbles de transmettre une grande puissance. Amenons  $\mathbf{E}_l$  à la forme de l'équation 51 en prenant  $\mathbf{R}'_0$  dans l'équation 70; nous obtenons

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{I}_0 \mathbf{C} \cdot 2 y_c \quad (72)$$

En adoptant  $\mathbf{I}_0$  comme origine des phases, nous sommes amenés à poser  $\mathbf{I}_0 = I_0$ ; d'autre part  $\mathbf{C} = c e^{i\gamma}$  d'après la page 152; on a alors

$$\mathbf{E}_l = 2 c y_c I_0 e^{i\gamma}.$$

La tension  $\mathbf{E}_l$  au commencement du câble est donc décalée sur le courant  $\mathbf{I}_0$  qui existe à l'extrémité du câble de l'angle  $\gamma$ , angle qui est précisément le même que celui qui exprime le décalage entre les tensions au commencement et à la fin du câble dans la marche en circuit ouvert. Si donc on imagine que le câble *en circuit ouvert* soit soumis à la tension  $\mathbf{E}_l$  et que l'on observe la phase de la tension finale  $\mathbf{E}'_0$ , la tension au commencement ayant une phase constante donnée, et qu'ensuite on ferme le câble sur la résistance  $R'_0$ , il se trouve que le courant  $\mathbf{I}_0$  qui circule dans cette résistance  $R'_0$  adopte la phase de  $\mathbf{E}'_0$ . Cet  $\mathbf{E}'_0$ , qui représente la tension à la fin du câble en circuit ouvert soumis à la tension  $\mathbf{E}_l$ , doit être considéré comme la tension disponible pour obtenir dans la résistance  $R'_0$ , qui est prête à être mise en circuit, la puissance maximale; le courant que cette tension  $\mathbf{E}'_0$  produit dans  $R'_0$ , adopte la phase de  $\mathbf{E}'_0$ , tandis que  $\mathbf{E}'_0$ , lui-même passe en grandeur et en phase à la valeur  $\mathbf{E}_0$  par suite de la chute de tension qui se produit par le fait du nouveau courant circulant maintenant dans le câble.

Dans le cas représenté par les tableaux XXXV et XXXVI,  $\varphi_0$  est négatif puisque le tableau XXII indique un  $\varphi_c$  positif. Le courant final nécessaire pour l'obtention de la puissance maximale a donc une avance de phase sur la tension à la fin du câble; ce décalage en avant se trouve aussi au commencement du câble; il vaut alors  $\varphi_l$ . L'avance  $\varphi_l$  est plus petite que celle qui existe à la fin des câbles de forte section ou à la fin des lignes aériennes; dans les câbles plus faibles, par contre, elle est plus grande.

Voici de quelle façon on peut calculer les quantités qui figurent dans les tableaux XXXV et XXXVI;

$E_l$  étant donné, nous pouvons écrire d'après l'équation 72 et en adoptant  $\mathbf{CI}_0$  comme origine des phases

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l &= cI_0 \cdot 2 y_c, \\ I_0 &= \frac{E_l}{2cy_c} \quad \text{et} \quad \sphericalangle E_l, cI_0 = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

Les équations 42 et 70 donnent

$$\mathbf{E}_0 = I_0 R_c e^{-izc} \quad \text{et} \quad \sphericalangle E_0, I_0 = -\varphi_c$$

L'équation 52 devient, en posant  $\mathbf{G}_0 = y_0 + iz_0$  et en y introduisant la valeur de  $\mathbf{R}'_0$  d'après l'équation 70,

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{CI}_0 [1 + (y_0 + iz_0)(y_c - izc)]$$

ou en prenant  $cI_0$  comme origine des phases

$$\mathbf{I}_l = cI_0 [(1 + y_0 y_c + i(y_c z_0 - y_0 zc))] \quad (74)$$

Nous avons ici  $\mathbf{I}_l$  sous la forme accessoire; en amenant cette dernière à la forme principale, on obtient  $I_l$  et  $\sphericalangle I_l, cI_0$ ; cette dernière valeur, et celle trouvée plus haut pour  $\sphericalangle E_l, cI_0$  donnent

$$\sphericalangle E_l, cI_0 - \sphericalangle I_l, cI_0 = \sphericalangle E_l, I_l = \varphi_l \quad (75)$$

Il est maintenant possible d'exprimer la puissance introduite dans le câble en son commencement par l'équation 22 de la page 9, en prenant dans les équations 73 et 74 les quantités  $p_e$ ,  $q_e$ ,  $p_i$  et  $q_i$  définies aux équations 16 et 17 de la page 8. On arrive à l'expression

$$A_l = \frac{E_l^2}{2y_c} (1 + y_0 y_c + z_0 zc)$$

et en tenant compte de l'équation 71 à

$$n = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2(1 + y_0 y_c + z_0 zc)}$$

Les équations que nous venons d'écrire déterminent toutes les données électriques.

Il est possible de donner une expression plus compacte pour l'angle  $\varphi_l$ .

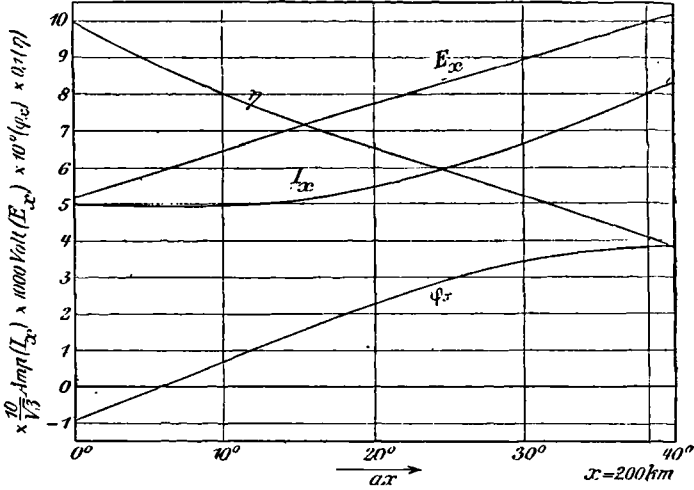


Fig. 57.

qui se présente dans l'équation 75 sous la forme d'une différence d'angles. Il suffit d'introduire dans l'équation 63 les valeurs

$$R_c = y_c + iz_c = R_c e^{i\varphi_c}$$

$$G_0 = y_0 + iz_0 = \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0},$$

$$R'_0 = y_c - iz_c = R_c e^{-i\varphi_c},$$

en se souvenant que  $\varphi_c + \varphi_0 = -2\beta$  (page 205); on peut alors amener  $R'_l$  et  $\varphi_l$  à la forme

$$R'_l = \frac{2y_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_c}{R_0}\right)^2 + \frac{2R_c}{R_0} \cos 2\beta}}$$

et

$$\text{tg } \varphi_l = \frac{\frac{R_c}{R_0} \sin 2\beta}{1 + \frac{R_c}{R_0} \cos 2\beta}$$



La figure 57 montre la variation des données électriques du câble 4 jusqu'à 200 kilomètres, dans le cas de la puissance maximale (la figure 56 représente le même câble dans le cas du rendement maximum). Nous voyons ici que la tension croît d'une façon continue, et même assez rapidement, de la fin vers le commencement du câble, tandis que l'intensité commence par diminuer pour augmenter ensuite. Le tableau XXII donne dans le cas présent pour les décalages à l'extrémité du câble les valeurs  $\varphi_0 = -\varphi_c = 9^\circ 9' 49''$ ; la tension est donc en avance sur le courant. De même que dans la figure 56, on a considéré le décalage comme positif quand le courant était en avance sur la tension; c'est pourquoi  $\varphi_0$  est marqué négativement au point  $ax = 0^\circ$ . Remarquons encore que le retard de la tension à l'extrémité du câble se transforme en une avance assez notable au commencement.

**Manière d'être du câble quand la tension initiale est donnée.** — Les figures 46 et 48 ont été construites en partant de la tension à l'extrémité du câble; elles peuvent aussi servir quand on possède les données suivantes: la tension au générateur, ainsi que le courant et le décalage exigés par le récepteur.

Quand le problème se pose ainsi, il s'agit de déterminer quelle tension reste disponible pour le récepteur, quel courant le générateur doit fournir au câble pour que celui qui est exigé par le récepteur soit disponible à l'extrémité du câble, et avec quel facteur de puissance le générateur travaille. Bref, on donne  $E_l$ ,  $I_0$  et  $\varphi_0$  et l'on cherche  $E_0$ ,  $I_l$  et  $\varphi_l$ . On peut aussi se donner  $E_l^2$  au lieu de  $E_l$  et chercher alors  $I_l^2$  au lieu de  $I_l$ .

La solution graphique du problème est donnée par les figures 58 et 59, qui correspondent aux figures 46 et 48. La figure 58 représente l'équation 31, la figure 59 l'équation 32 (p. 217).

Les données de la figure 58 sont  $E_i^c$ ,  $I_0$  et  $\varphi_0$ , ainsi que  $R_c$  et  $\varphi_{c,l}$ , qui sont des constantes du câble; il faut trouver  $E_0$  et  $\delta$ . On prend d'abord le vecteur  $OI_0$  comme directrice, puis on porte le vecteur  $OA = I_0 R_c$  sous l'angle  $\varphi_{c,l}$ . Du point  $O$  comme centre on trace un arc de cercle de

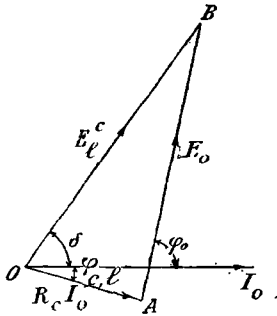
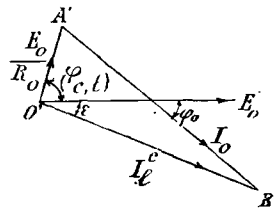


Fig. 58.



ERRATUM : lire  $(-\varphi_{0,l})$  au lieu de  $(\varphi_{c,l})$ .  
Fig. 59.

rayon  $E_i^c$ ; on fait partir de  $A$  une droite inclinée de  $\varphi_0$  sur la directrice. Le point  $B$  obtenu par l'intersection de cette dernière droite avec l'arc de cercle, détermine le vecteur  $AB$  représentatif de  $E_0$ ; l'angle  $\delta$  est donné par  $I_0 O B$ .

Les données de la figure 59 sont  $I_0$  et  $\varphi_0$ , ainsi que le  $E_0$  que nous venons de trouver; on possède en outre  $R_0$  et  $\varphi_{0,l}$  qui sont des constantes du câble. Il faut trouver  $I_i^c$  et  $\varepsilon$ . On prend  $O' E_0$  comme directrice, puis on porte le vecteur  $O' A' = \frac{E_0}{R_0}$  sous l'angle  $(-\varphi_{0,l})$ ; à la suite de  $O' A'$  on trace le vecteur  $A' B'$  représentatif de  $I_0$  et formant avec la directrice l'angle  $\varphi_0$ ; le vecteur  $O' B'$  donne  $I_i^c$ , et  $E_0 O' B'$  l'angle  $\varepsilon$ .

On peut obtenir  $E_0$  et  $\delta$  par le calcul en introduisant les expressions 35 dans l'équation 34. On obtient

$$E_i^c e^{i\delta} = E_0 e^{i\tau_0} + I_0 R_c e^{i\varphi_{c,l}}$$

qui donne

$$E_i^c \cos \delta = E_0 \cos \varphi_0 + I_0 R_c \cos \varphi_{c,l}$$

et

$$E_l^c \sin \delta = E_0 \sin \varphi_0 + I_0 R_c \sin \varphi_{c,l}.$$

En élevant au carré et en additionnant ces deux dernières équations, on arrive à

$$E_l^{c2} = E_0^2 + I_0^2 R_c^2 + 2 E_0 I_0 R_c \cos (\varphi_0 - \varphi_{c,l}),$$

équation du deuxième degré qui détermine  $E_0$ .

Le quotient des deux équations donne  $\operatorname{tg} \delta$ . Le calcul de  $I_l^c$  et de  $\varepsilon$  se fait en combinant les équations 37 et 32.

On a

$$I_l^c e^{i\varepsilon} = I_0 e^{-i\varphi_0} + \frac{E_0}{R_0} e^{-i\varphi_{0,l}}$$

qui donne

$$I_l^c \cos \varepsilon = I_0 \cos \varphi_0 + \frac{E_0}{R_0} \cos \varphi_{0,l}$$

et

$$I_l^c \sin \varepsilon = -I_0 \sin \varphi_0 - \frac{E_0}{R_0} \sin \varphi_{0,l},$$

dans lesquelles les deux seules inconnues sont  $I_l^c$  et  $\varepsilon$ ,  $E_0$  ayant déjà été trouvé plus haut. Enfin la dernière des inconnues,  $\varphi_l$ , se trouvera par l'équation

$$\varphi_l = \delta - \varepsilon - \varphi_0.$$

Un problème qui peut se présenter dans la pratique consiste à déterminer les grandeurs électriques à l'extrémité du câble, quand la tension du générateur et la résistance (sous forme complexe) du récepteur sont données. C'est le problème qui se pose par exemple dans la téléphonie à grande distance quand un récepteur téléphonique d'inductance donnée doit être relié à un câble. C'est aussi le problème qui s'est présenté lors de l'établissement des tableaux XXXI à XXXVI.

Nous allons en donner ici la solution générale :

Les données sont  $E_l^c$  et  $R'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0} = y_r + iz_r$ . On cherche  $E_0$ ,  $I_l^c$  et  $\varphi_l$ , qui est l'angle de  $E_l$  et de  $I_l$ .

La solution graphique est donnée par les figures 58 et 59, dans lesquelles nous connaissons  $E_l^c, \frac{E_0}{I_0}$  et  $\varphi_0$  ainsi que les constantes  $R_c$  et  $\varphi_c$  du câble. Nous calculons d'abord  $OAB = \varphi_0 - \varphi_{c,l}$ , formons au moyen du rapport  $\frac{E_0}{I_0}$  le rapport  $\frac{E_0}{I_0 R_c}$  et dessinons un angle  $OAB$  avec un côté  $AB$  de longueur quelconque et un côté  $OA$  de longueur  $\frac{I_0 R_c}{E_0} \cdot AB$ . Puis nous tirons la droite  $OB$  qui doit représenter  $E_l^c$  et déterminons l'échelle à laquelle il faut mesurer  $OB$  pour obtenir  $E_l^c$ . Cette échelle nous permet de mesurer  $AB$  et  $OA$ , qui nous donne  $E_0$  et  $I_0 R_c$ , d'où enfin nous tirons  $I_0$ .

Si par hasard  $E_l^c$  doit être représenté à une échelle imposée, il suffit d'agrandir le triangle dans un certain rapport de façon à amener  $OB$  à représenter convenablement la tension  $E_l^c$ . La figure 59 donne  $I_l^c$  exactement de la même façon que précédemment;  $\varphi_l$  se tire de l'équation  $\varphi_l = \delta - \varepsilon - \varphi_0$ , comme ci-dessus.

L'équation 53 (p. 253) peut servir à déterminer  $I$  par le calcul. On a

$$E_l = cI_0 (\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_c) = cI_0 \left[ \underbrace{y_r + y_c}_{y'} + i \underbrace{(z_r + z_c)}_z \right].$$

d'où

$$I_0 = \frac{E_l}{c \sqrt{y'^2 + z'^2}} \quad \text{et} \quad \sphericalangle E_l, I_0 = \text{arc tg } \frac{z'}{y'}.$$

Quant à  $I_l$  nous le tirons de l'équation 52, p. 253.

$$I_l = cI_0 (1 + \mathbf{G}_0 \mathbf{R}'_0) = cI_0 \left[ \underbrace{(1 + y_0 y_r - z_0 z_r)}_{y''} + i \underbrace{(y_r z_0 + y_0 z_r)}_{z''} \right],$$

d'où

$$I_l = cI_0 \sqrt{y''^2 + z''^2} \quad \text{et} \quad \sphericalangle I_l, I_0 = \text{arc tg } \frac{z''}{y''}.$$

Enfin  $E_0$  et  $\varphi_l$  se trouvent par les équations

$$E_0 = I_0 R'_0 \quad \text{et} \quad \varphi_l = \sphericalangle E_l, I_l = \sphericalangle E_l I_0 - \sphericalangle I_l, I_0.$$

**Choix de la section du câble dans un projet.** — Jusqu'à présent nous avons calculé les caractéristiques de câbles donnés, travaillant dans certaines conditions. Dans la pratique, le problème qui se présente n'est pas de déterminer par avance les propriétés d'un câble à poser, mais bien le problème inverse, qui consiste à trouver le type de câble qui répond le mieux aux données d'un projet. La question se pose habituellement de la façon suivante à l'ingénieur : On impose la tension, le courant et le décalage des récepteurs ; trouver dans les types de câble du commerce celui qui peut transmettre l'énergie de l'usine centrale aux récepteurs sans dépasser une chute de tension donnée.

En courant continu, la solution du problème est très simple, puisque l'intensité et la chute de tension déterminent la résistance du câble ; il est alors facile, la longueur étant donnée, de trouver la section du câble. Mais tandis qu'en continu il suffit de connaître les sections couramment fabriquées pour trouver tout de suite le câble qui répondra le mieux au problème, il est nécessaire, pour la transmission à grande distance par l'alternatif à haute tension de connaître non seulement la section du cuivre, mais encore la self-induction, la capacité et la perte dans l'isolant.

Il est naturellement très important de déterminer sous quelle forme toutes ces quantités doivent être données pour que leur emploi soit le plus simple possible dans l'établissement d'un projet. D'après tout ce que nous avons vu, cette forme s'impose d'elle-même ; il suffit de connaître les données  $R_0$  et  $R_c$  des divers types offerts par les fabriques pour la longueur de câble imposée par le projet, pour arriver à choisir le modèle le plus convenable et déterminer dans tous ses détails la manière d'être du transport d'énergie.

C'est aux fabriques de câbles qu'il appartient de fournir des tables de  $R_0$ ,  $R_c$  et  $C$  pour les modèles de câbles à

haute tension qu'elles établissent, et cela pour diverses longueurs. On en tirera d'abord les valeurs de  $R_c$  qui correspondent à la longueur de la ligne projetée et on multipliera ces valeurs par le courant  $I_0$  à fournir au récepteur. On peut maintenant résoudre l'équation

$$E_t = (E_0 + I_0 R_c) C.$$

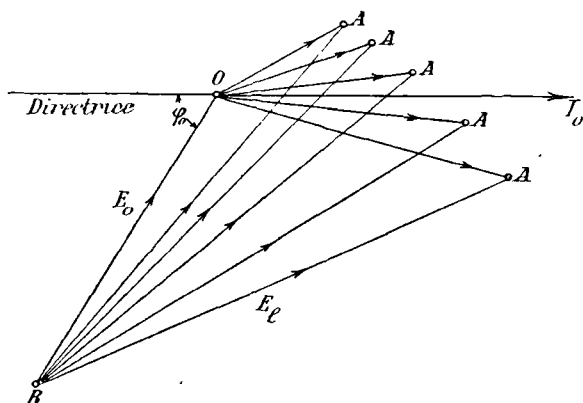


Fig. 60.

On prendra ensuite, comme dans la figure 58,  $I_0$  comme origine des phases et par conséquent comme directrice. Puis on portera (fig. 60), les diverses grandeurs  $I_0 R_c$  (vecteurs  $OA$ ); on tracera la tension  $E_0$  exigée par le récepteur sous forme un vecteur  $OB$  faisant l'angle  $\varphi_0$  avec la directrice; les vecteurs  $BA$  représenteront alors les tensions  $E_t$  nécessaires au générateur pour chacun des câbles. On calculera ensuite la chute de tension admise, et on tracera avec cette chute comme rayon un arc de cercle de centre  $B$ . On n'a plus qu'à choisir le câble pour lequel le point  $A$  est le plus rapproché de l'arc de cercle, la mesure de cette distance se faisant dans la direction  $BA$ .

Au besoin, il faut tenir compte du terme de correction  $C$  extrait de la table fournie par la fabrique.

Il va sans dire que, ce choix une fois fait, il y a lieu de calculer par l'équation

$$I_l = \left( I_0 + \frac{E_0}{R_0} \right) C$$

le courant  $I_l$  au générateur, puis l'angle  $\varphi$ , la puissance fournie par le générateur et le rendement, et de contrôler si les pertes dans le câble ne sont pas trop importantes. Ces calculs n'offrent pas de difficulté puisque les tables donnent immédiatement  $R_0$  pour chacun des câbles. Ces déterminations doivent être faites *en tout cas*, que ce soit par le dessin ou numériquement, car, ainsi que le prouvent les quelques exemples que nous avons traités en détail, il se peut fort bien que même dans des conditions d'exploitation apparemment très simples, il se manifeste des conséquences tout à fait inattendues. En outre, il y a lieu de faire des calculs comparés au point de vue du rendement financier, qui permettront de juger s'il n'est pas plus avantageux peut-être de consentir à des pertes en ligne plus considérables en achetant des câbles de section plus faible et par conséquent meilleur marché.

Toutes ces déterminations sont très simples quand les tables de  $R_0$ ,  $R_c$  et  $C$  sont fournies par la fabrique de câbles. Nous allons montrer qu'il suffit de déterminer  $R_0$  et  $R_c$  pour chaque type de câble par *une seule mesure* faite sur une longueur *quelconque* de câble (par exemple celle que l'on fabrique en une fois).

Une fois ce résultat obtenu  $R_0$  et  $R_c$  peuvent se *calculer* pour toute autre longueur d'après la méthode suivante :

Désignons par  $R_{0,l}$  et  $R_{c,l}$  les valeurs mesurées sur une longueur  $l$ . On demande les valeurs correspondantes  $R_{0,x}$  et  $R_{c,x}$  pour une longueur  $x$ . D'après l'équation 19, page 197, on a

$$R_{0,l} = u \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}$$

et

$$\mathbf{R}_{0,x} = u \frac{e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}}{e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}}$$

Pour exprimer  $\mathbf{R}_{0,x}$  par  $\mathbf{R}_{0,l}$ , il n'y a qu'à reprendre les équations 22 et 23, page 198

$$u = \sqrt{\mathbf{R}_{0,l} \cdot \mathbf{R}_{c,l}}$$

et

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2l} \ln \frac{\sqrt{\mathbf{R}_{0,l}} + \sqrt{\mathbf{R}_{c,l}}}{\sqrt{\mathbf{R}_{0,l}} - \sqrt{\mathbf{R}_{c,l}}}$$

Posons pour abrégé

$$\frac{\sqrt{\mathbf{R}_{0,l}} + \sqrt{\mathbf{R}_{c,l}}}{\sqrt{\mathbf{R}_{0,l}} - \sqrt{\mathbf{R}_{c,l}}} = \mathbf{q}. \quad (76)$$

soit

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2l} \ln \mathbf{q}.$$

On a alors

$$e^{\mathbf{v}x} = \mathbf{q}^{\frac{x}{2l}}$$

$$\mathbf{R}_{0,x} = \sqrt{\mathbf{R}_{0,l} \mathbf{R}_{c,l}} \frac{\mathbf{q}^{\frac{x}{2l}} + \mathbf{q}^{-\frac{x}{2l}}}{\mathbf{q}^{\frac{x}{2l}} - \mathbf{q}^{-\frac{x}{2l}}} = \sqrt{\mathbf{R}_{0,l} \cdot \mathbf{R}_{c,l}} \frac{\mathbf{q}^{\frac{x}{l}} + 1}{\mathbf{q}^{\frac{x}{l}} - 1}. \quad (77)$$

et d'après l'équation 20, page 197, l'expression analogue

$$\mathbf{R}_{c,x} = \sqrt{\mathbf{R}_{0,l} \cdot \mathbf{R}_{c,l}} \frac{\mathbf{q}^{\frac{x}{l}} - 1}{\mathbf{q}^{\frac{x}{l}} + 1}. \quad (78)$$

Les équations 76, 77 et 78 permettent de calculer  $\mathbf{R}_{0,x}$  et  $\mathbf{R}_{c,x}$  d'après  $\mathbf{R}_{0,l}$  et  $\mathbf{R}_{c,l}$ .

La fabrication de câbles n'a donc, comme nous le disions, qu'à mesurer  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{R}_c$  pour une seule longueur de chaque type de câble, et à remettre à l'ingénieur chargé du projet ces deux valeurs, ainsi que toutes les constantes des câbles nécessaires pour le calcul du transport de force.



Une question d'ordre pratique est de savoir s'il est plus rationnel de faire faire ces calculs par l'ingénieur projetant ou par la fabrique de câbles. Il nous semble que cette dernière solution est la meilleure, car le travail qui en résulte est en somme en rapport direct avec la fabrication des câbles; c'est aussi à l'usine qu'il sera le plus facile de grouper et d'occuper d'une façon suivie les personnes capables de faire ce travail correctement.

---



# FORMULAIRE

---

## NOTATIONS EMPLOYÉES DANS TOUT LE COURS DE L'OUVRAGE

- E**, différence de potentiel (tension) sous forme complexe.  
**I**, intensité sous forme complexe.  
**E**, amplitude (ou parfois valeur efficace) d'une différence de potentiel.  
**I**, amplitude (ou parfois valeur efficace) d'une intensité.  
**r**, résistance.  
**L**, coefficient de self-induction.  
**c**, capacité. } À partir du chapitre VII,  
 page 48, ces cinq lettres  
 représentent les valeurs *par*  
 $g = \frac{1}{\rho}$ , conductibilité d'un isolant. } *kilomètre de ligne simple*.  
 $\rho$ , résistance de l'isolant.  
**A** indique en général l'amplitude d'une fonction sinusoïdale; il signifie aussi la puissance.  
**t**, le temps.  
 $\varphi$ , angle de phase.  
 $\omega = 2\pi\nu$ , pulsation du courant alternatif.  
 $\nu$ , fréquence du courant alternatif.  
 $\eta$ , rendement.  
 Ne pas confondre **R**, **R<sub>o</sub>**, **R<sub>c</sub>**, **R'<sub>o</sub>**, **R'<sub>t</sub>** dans le chapitre XII.
- 

## CHAPITRE PREMIER

	Pages.
<i>Fonctions sinusoïdales :</i>	
Forme réelle : $A \sin (\omega t \pm \alpha)$ . . . . .	1
Formes complexes : $\mathbf{A} = A e^{i\alpha}$ (forme <i>réduite</i> ) . . . . .	3 et 5
$\mathbf{A} = A e^{i(\omega t + \alpha)}$ (forme <i>complète</i> ) . . . . .	5
$\mathbf{A} = p + qi$ (forme <i>accessoire</i> ) . . . . .	5

284 THÉORIE ET CALCUL DES LIGNES A COURANTS ALTERNATIFS

$p = A \cos \alpha$	$q = A \sin \alpha$	6
$A^2 = p^2 + q^2$	$\text{tg } \alpha = \frac{q}{p}$	6
Puissance $A = p_e p_i + q_e q_i$ ( $p$ et $q$ se rapportant aux efficaces).		9
Décalage $\text{tg } (\hat{\phi} - \lambda) = \text{tg } \varphi = \frac{p_i q_e - p_e q_i}{p_e p_i + q_e q_i}$		9

CHAPITRE II

$E_{gt} = E_t + rI_t + L \frac{di}{dt}$	10
$\mathbf{E}_g = \mathbf{E} + r\mathbf{I} + \mathbf{S}$	12
$\mathbf{S} = i\omega L I_{\max}$	12
$\mathbf{R} = r + i\omega L$	15
$\mathbf{E}_g = \mathbf{E} + \mathbf{IR}$	15

CHAPITRE III

$I_{\max} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$	18
$\text{tg } \varphi = -\frac{\omega L}{r}$	18
$I_t = \frac{E_{\max}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left( \omega t - \text{arc tg } \frac{\omega L}{r} \right)$	18

CHAPITRE VI

$\mathbf{I}_1 = ic\omega \mathbf{E}$ (courant de charge)	43
$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\varphi} \mathbf{E}$ (courant dérivé dans l'isolant)	44
$\varphi_0 = \text{arc tg } c\omega\varphi$ (avance du courant sur la tension)	44

CHAPITRE VII

L'indice <b>O</b> indique les données relatives au récepteur.	48
---	----

CHAPITRE VIII

$\frac{1}{\rho} = g$ . . . . .	58
$s = \omega L$ . . . . .	59
$x = c\omega$ . . . . .	59
$\mathbf{R} = r + i\omega L$ . . . . .	59
$\mathbf{K} = g + i\omega c$ . . . . .	59
$\mathbf{v} = +\sqrt{\mathbf{RK}} = a + bi = \sqrt{(r + is)(g + ix)}$ . . . . .	60 et 61
$a = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (g^2 + x^2)(r^2 + s^2) + gr - sx \}}$ . . . . .	62
$b = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (g^2 + x^2)(r^2 + s^2) - gr + sx \}}$ . . . . .	62
<b>Tableau des équations fondamentales</b> . . . . .	63 et 64

CHAPITRE IX

$c = c_0 + 2c'$ , capacité d'un conducteur d'une ligne à 2 fils . . . . .	74
$c = c_0 + 3c'$ — — — — — triphasée . . . . .	75
$u = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{K}}} = \sqrt{\frac{r + is}{g + ix}}$ . . . . .	93

CHAPITRE X

<b>Les distances sont comptées à partir du commencement du câble</b> . . . . .	97
$\mathbf{E}_x = E_0, \max . e^{-ax} . e^{-ibx}$ . . . . .	100
$\mathbf{I}_x = \frac{a + bi}{\mathbf{R}} . E_0, \max . e^{-ax} . e^{-ibx}$ . . . . .	100
$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{R}} = \frac{a + bi}{\mathbf{R}} = m + ni$ . . . . .	107
$m = \frac{ar + bs}{r^2 + s^2}$ $n = \frac{br - as}{r^2 + s^2}$ . . . . .	107
$\mathbf{I}_x, t = \sqrt{m^2 + n^2} E_0, \max e^{-ax} \sin \left( \omega t + \arctg \frac{n}{m} - bx \right)$ . . . . .	108

$I_0 = E_0 \sqrt{m^2 + n^2} \dots \dots \dots$	109
$\text{tg } \beta = \frac{n}{m} = \frac{x \sqrt{r^2 + s^2} - s \sqrt{g^2 + x^2}}{g \sqrt{r^2 + s^2} + r \sqrt{g^2 + x^2}} \dots \dots \dots$	v. tabl. VIII, p. 443. 109
$A e^{\pm ax} e^{i(\pm bx \pm \dots)}$ , forme générale d'une spirale logarithmique.	117

CHAPITRE XI

Sauf pour les équations 1 et 2, page 121, **x est compté à partir de la fin du câble** . . . . .

$E_x = \frac{E_{0, \text{max}}}{2} (e^{+vx} + e^{-vx}) \dots \dots \dots$  121

$I_x = \frac{v}{R} \frac{E_{0, \text{max}}}{2} (e^{+vx} - e^{-vx}) =$   
 $\frac{E_{0, \text{max}}}{2} \sqrt{m^2 + n^2} e^{iz} (e^{+vx} - e^{-vx}) \dots \dots \dots$  122 et 123

$I_x = \frac{1}{u} \frac{E_{0, \text{max}}}{2} (e^{+vx} - e^{-vx}) \dots \dots \dots$  123

$u = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{-iz} \dots \dots \dots$  123

$E_{x, \text{max}} = \frac{E_{0, \text{max}}}{2} \sqrt{e^{+2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx} \dots \dots \dots$  133

$I_{x, \text{max}} = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \frac{E_{0, \text{max}}}{2} \sqrt{e^{+2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx} \dots \dots \dots$  133

$C = ce^{iz} = \frac{e^{vl} + e^{-vl}}{2} \dots \dots \dots$  134 et 152

$c = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl} \dots \dots \dots$  134 et 152

$\text{tg } \gamma = \frac{e^{al} - e^{-al}}{e^{al} + e^{-al}} \text{tg } 2bl \dots \dots \dots$  134 et 152

$f = \frac{I_x}{I_0} = \sqrt{\frac{e^{2ax} + e^{-2ax} - 2 \cos 2bx}{e^{2ax} + e^{-2ax} + 2 \cos 2bx}} \dots \dots \dots$  158

Angles de décalage :

$\varphi_x = - \left[ \beta + \text{arc tg } \frac{2 \sin 2bx}{e^{2ax} - e^{-2ax}} \right] \dots \dots \dots$  163

$\text{tg } \varphi_0 = \omega c \rho = \frac{2abr - (a^2 - b^2)s}{2abs + (a^2 - b^2)r^2} \dots \dots \dots$  164

$\text{tg } \varphi_0 = \text{tg } (\beta + \psi) \quad \text{ou } \text{tg } \psi = \frac{b}{a} \dots \dots \dots$  164

$$A_x = \frac{E_0^2 \max}{8} \sqrt{m^2 + n^2} \cdot N = \text{Puissance} \dots \dots \dots 171$$

$$N = (e^{2ax} - e^{-2ax}) \cos \beta - 2 \sin 2bx \sin \beta. \dots \dots \dots 171$$

$$f' = \frac{e^{2al} - e^{-2al} - 2 \sin 2bl \operatorname{tg} \beta}{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl} \text{ (tabl. XVIII)}. \dots \dots \dots 175$$

CHAPITRE XII

**x est compté à partir de la fin du câble** . . . . . 180

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} + e^{-\mathbf{v}x}) + \mathbf{I}_0 \mathbf{u} \cdot \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}x} - e^{-\mathbf{v}x}) \dots \dots \dots 181$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_0 \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}r} + e^{-\mathbf{v}r}) + \mathbf{E}_0 \frac{1}{\mathbf{u}} \cdot \frac{1}{2} (e^{\mathbf{v}r} - e^{-\mathbf{v}r}) \dots \dots \dots 181$$

$$\mathbf{E}_c = B e^{ax} e^{i(bx+\beta)} + C e^{-ax} e^{i(-bx+\gamma)} \dots \dots \dots 185$$

$$\mathbf{I}_r = B' e^{ax} e^{i(bx+\beta)} - C' e^{-ax} e^{i(-bx+\gamma)}. \dots \dots \dots 185$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{u} \frac{e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}}{e^{\mathbf{v}l} - e^{-\mathbf{v}l}} = R_0 e^{i\varphi_0, x}. \dots \dots \dots 197 \text{ et } 200$$

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{u} \frac{e^{\mathbf{v}l} - e^{-\mathbf{v}l}}{e^{\mathbf{v}l} + e^{-\mathbf{v}l}} = R_c e^{i\varphi_c, x}. \dots \dots \dots 197 \text{ et } 200$$

$$\mathbf{R}_c = y_c + iz_c \quad \frac{1}{\mathbf{R}_0} = y_0 + iz_0 \dots \dots \dots 216$$

$$\mathbf{E}_l^c = \mathbf{E}_0 + \mathbf{I}_0 \mathbf{R}_c \quad \mathbf{E}_l = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_l^c \dots \dots \dots 217$$

$$\mathbf{I}_l^c = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{R}_0} \quad \mathbf{I}_l = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}_l^c \dots \dots \dots 217$$

Résistance apparente du câble lors du rendement maximum :

$$\mathbf{R}'_0 = R'_0 e^{i\varphi_0} = y_r + iz_r. \dots \dots \dots 252$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}'_0} = \mathbf{G}_0 = y_0 + iz_0 \text{ (voir aussi p. 216)}. \dots \dots \dots 253 \text{ et } 254$$

Rendement maximum :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{C^2} \frac{1}{1 + y_0 y_c + z_0 z_c + 2\sqrt{y_0 y_c \cos \varphi_0}} \dots \dots \dots 255$$

$$\mathbf{R}'_l = \frac{\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}_c}{1 + \mathbf{G}_0 \mathbf{R}_0} = y_r - iz_r = R'_l e^{i\varphi_l}. \dots \dots \dots 258 \text{ et } 260$$

Dans le cas de la puissance maximale :

$$\mathbf{R}'_0 = y_c - iz_c = R_c e^{-i\varphi_c}. \dots \dots \dots 266$$

$$q = \frac{\sqrt{R_{0,l}} + \sqrt{R_{c,l}}}{\sqrt{R_{0,l}} - \sqrt{R_{c,l}}} \dots\dots\dots 280$$

$$R_{0,x} = \sqrt{R_{0,l} \cdot R_{c,l}} \cdot \frac{q^{\frac{x}{l}} + 1}{q^{\frac{x}{l}} - 1} \dots\dots\dots 280$$

$$R_{c,x} = \sqrt{R_{0,l} \cdot R_{c,l}} \cdot \frac{q^{\frac{x}{l}} - 1}{q^{\frac{x}{l}} + 1} \dots\dots\dots 280$$



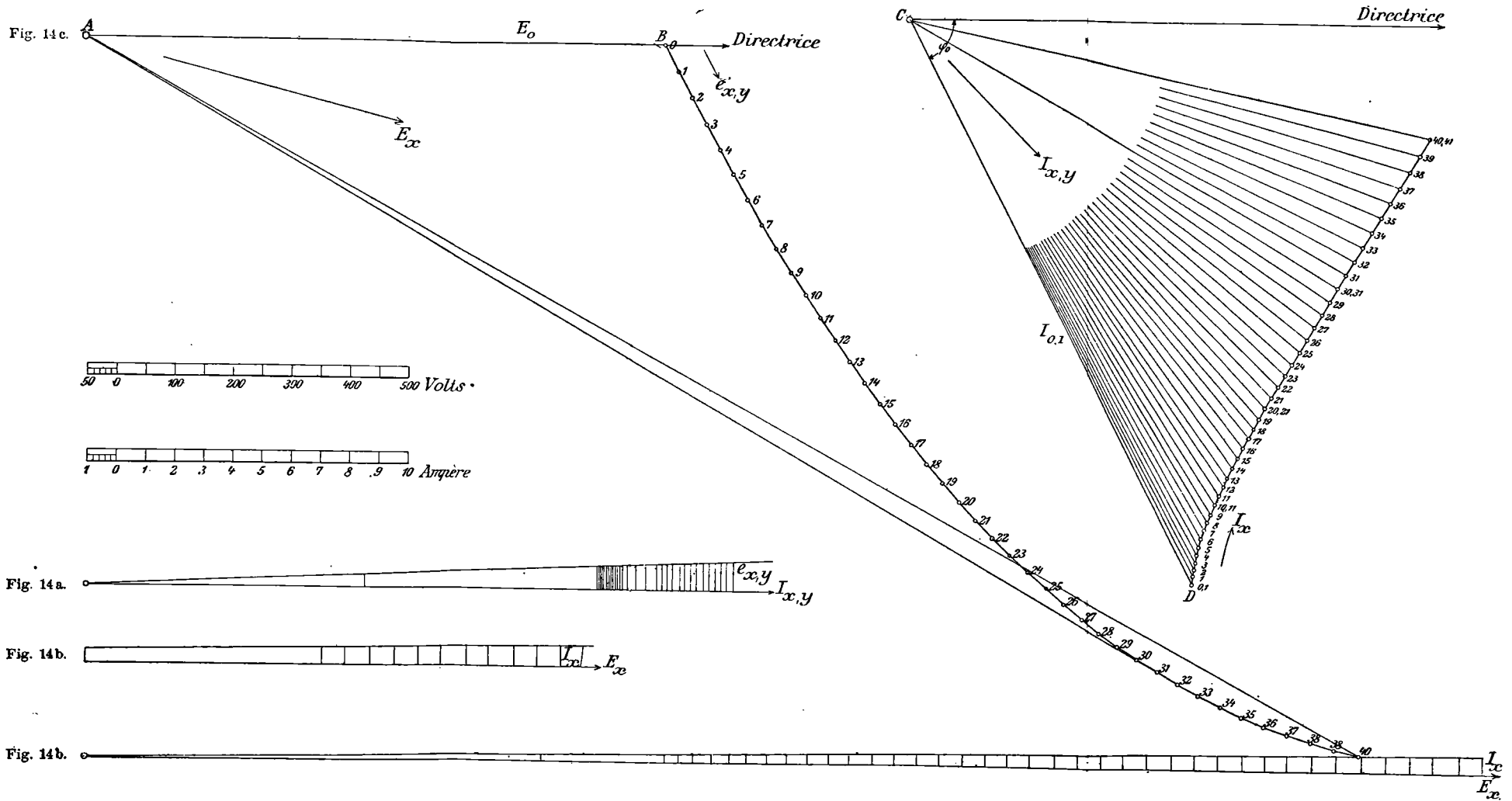
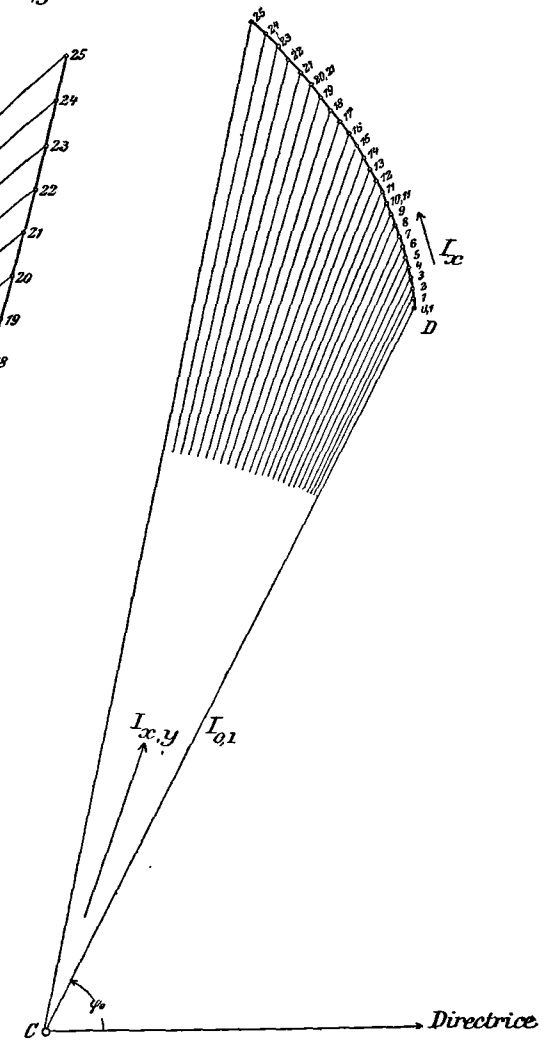
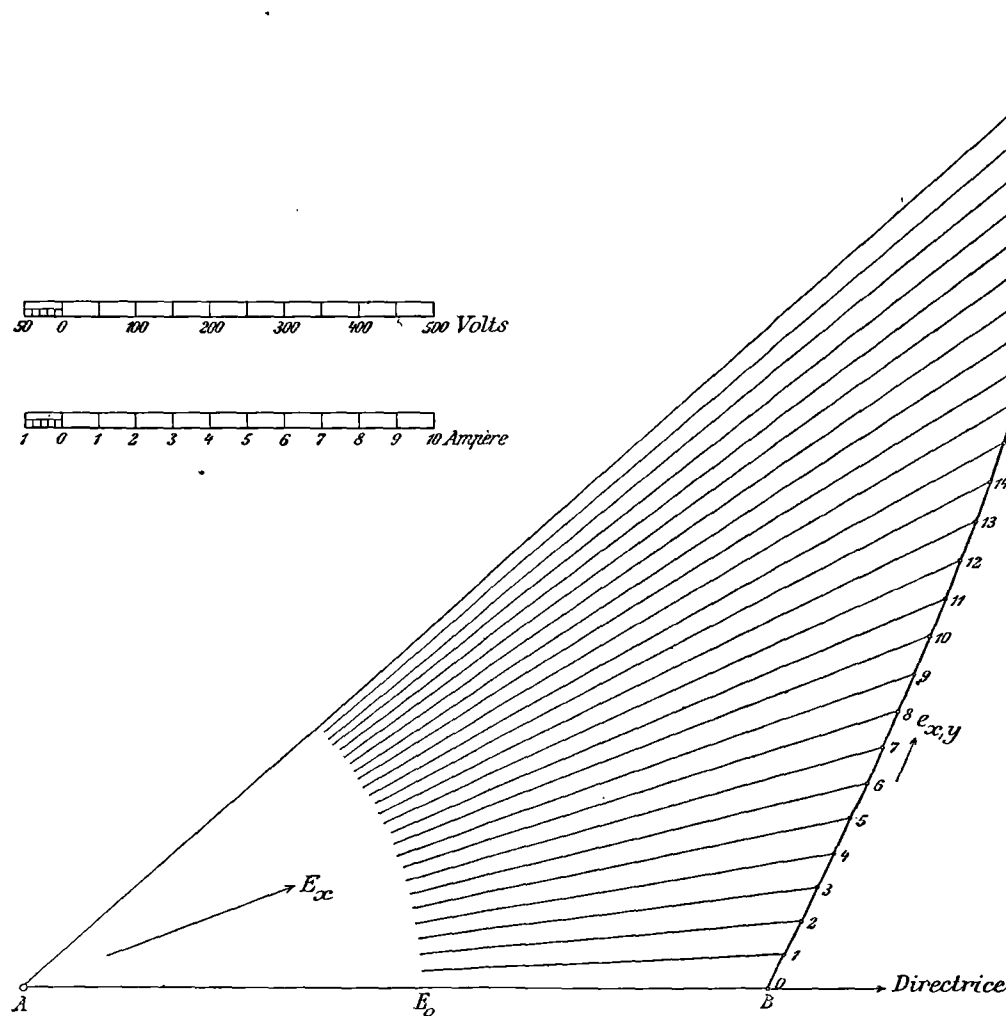
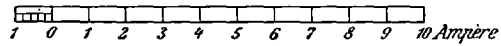
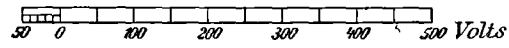


Fig. 14d.







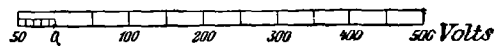
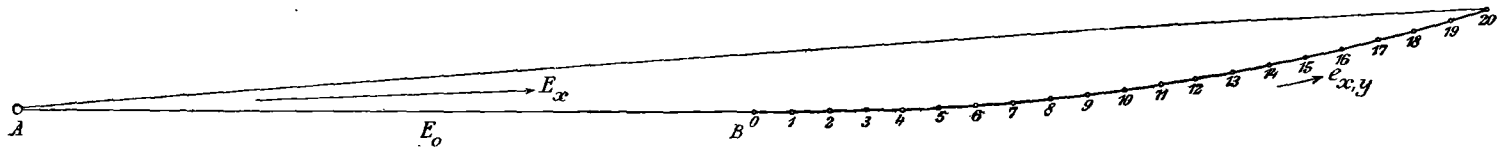
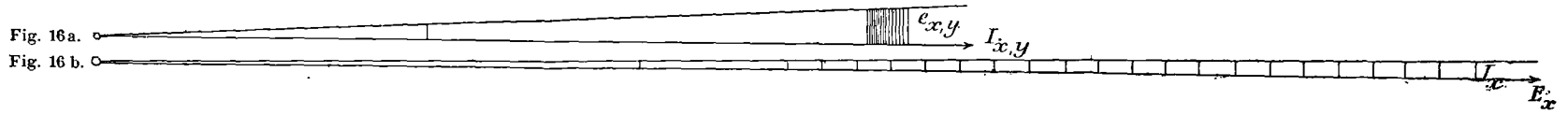


Fig. 16 e.

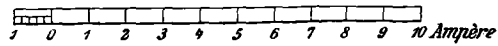
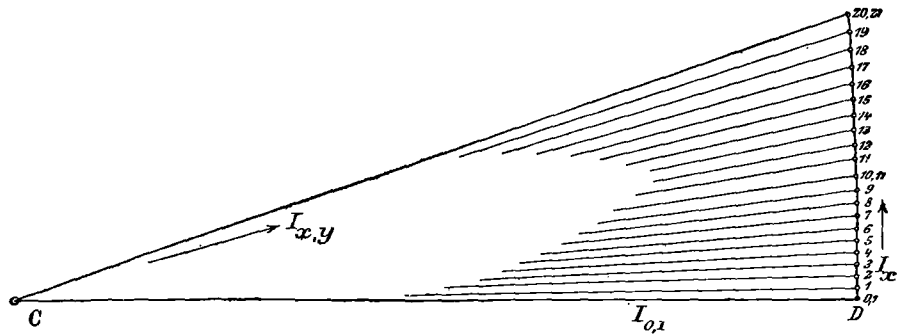
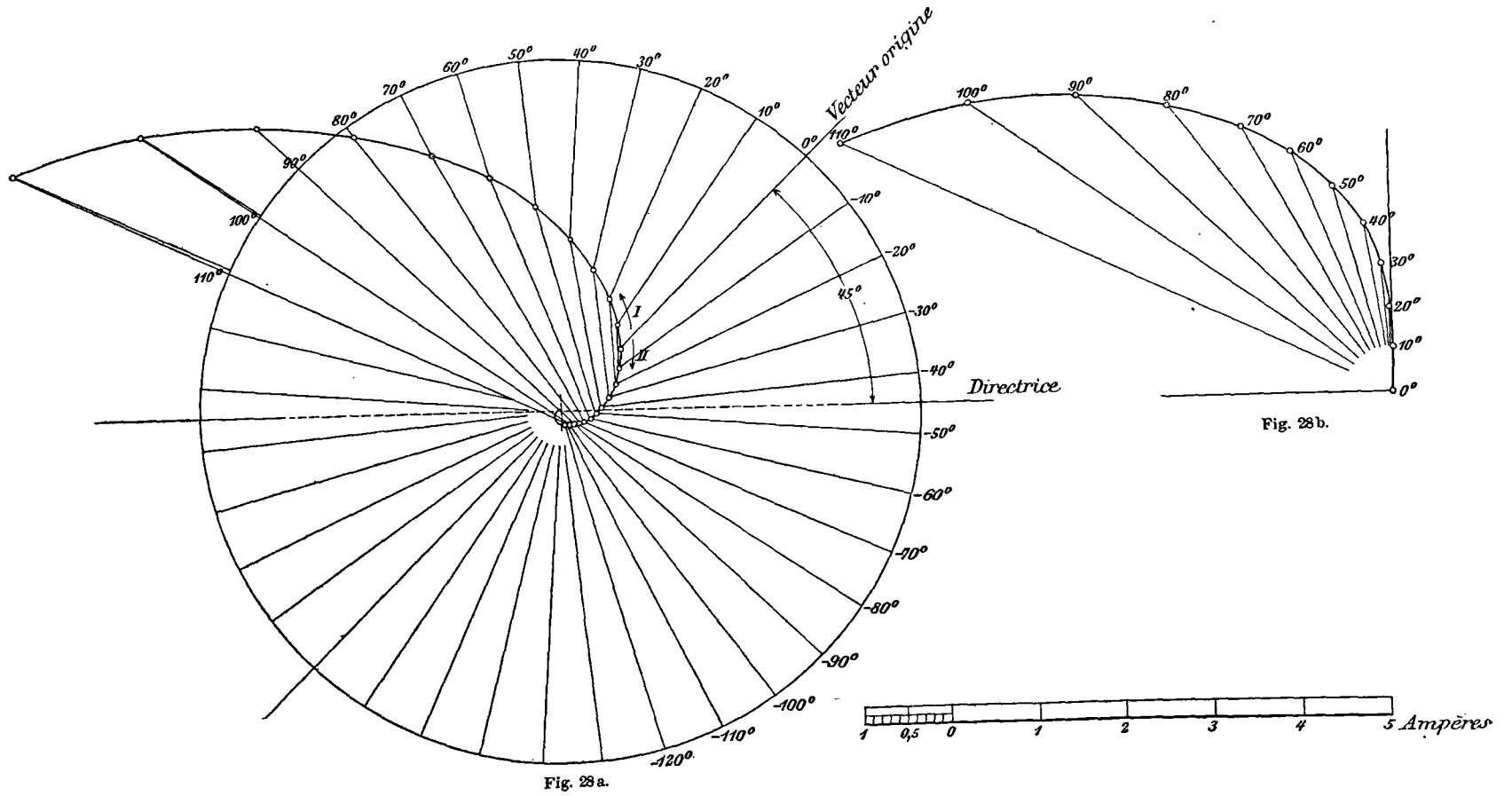


Fig. 16 f.

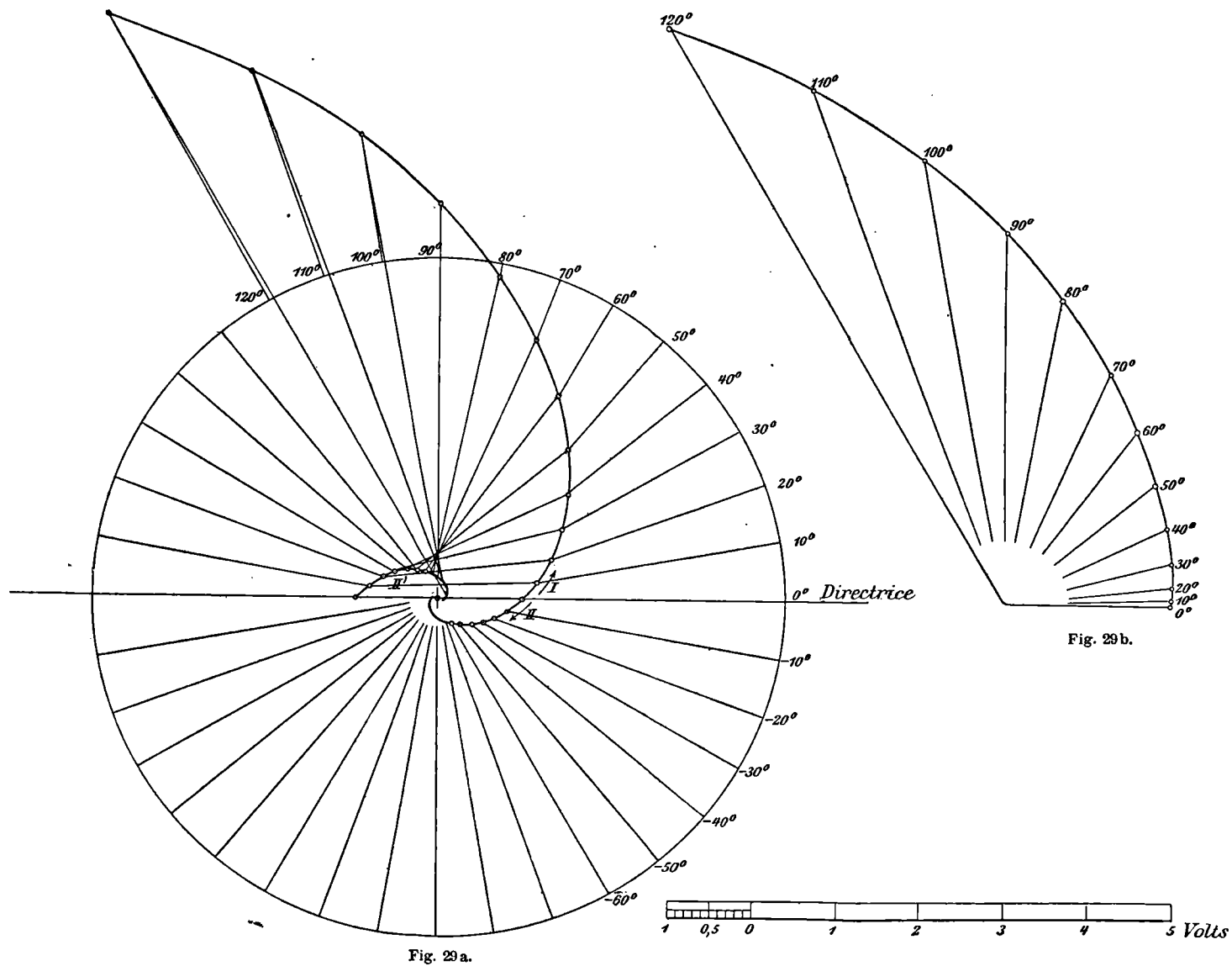














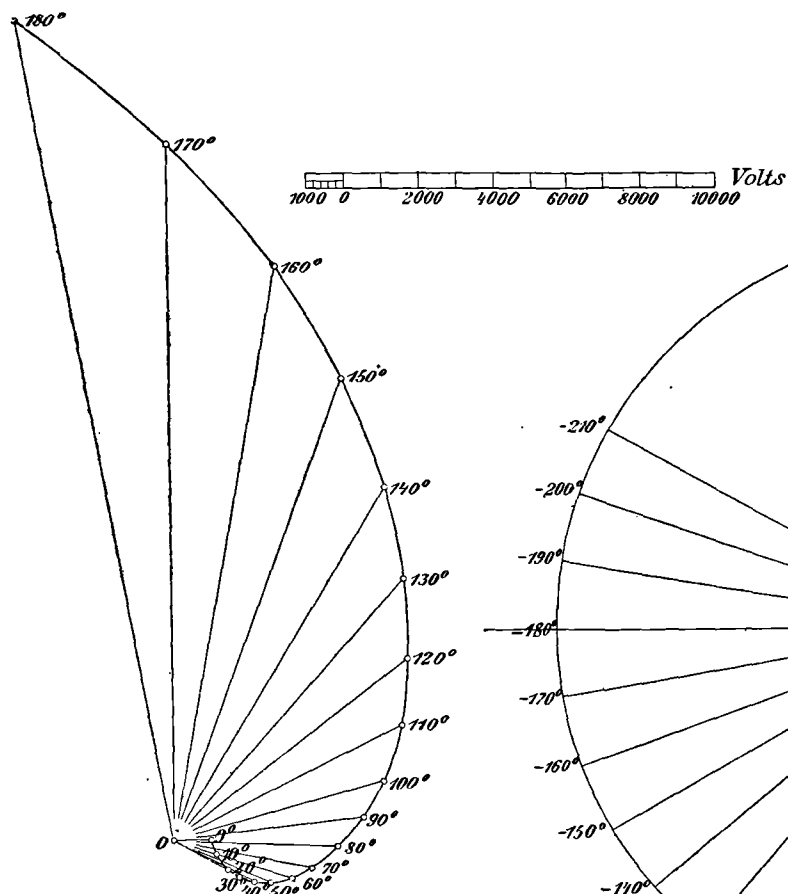


Fig. 40 b.

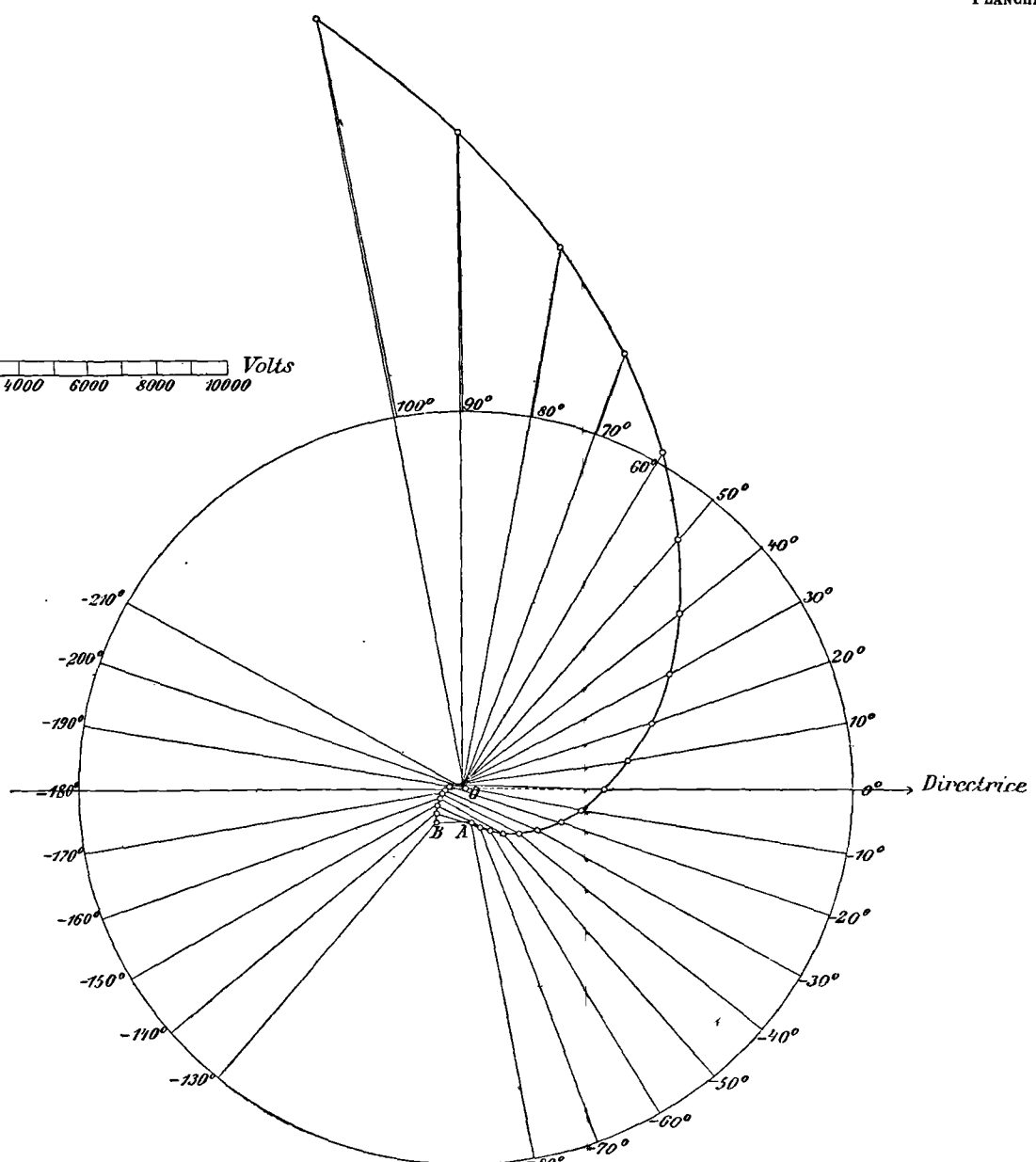


Fig. 40 a.



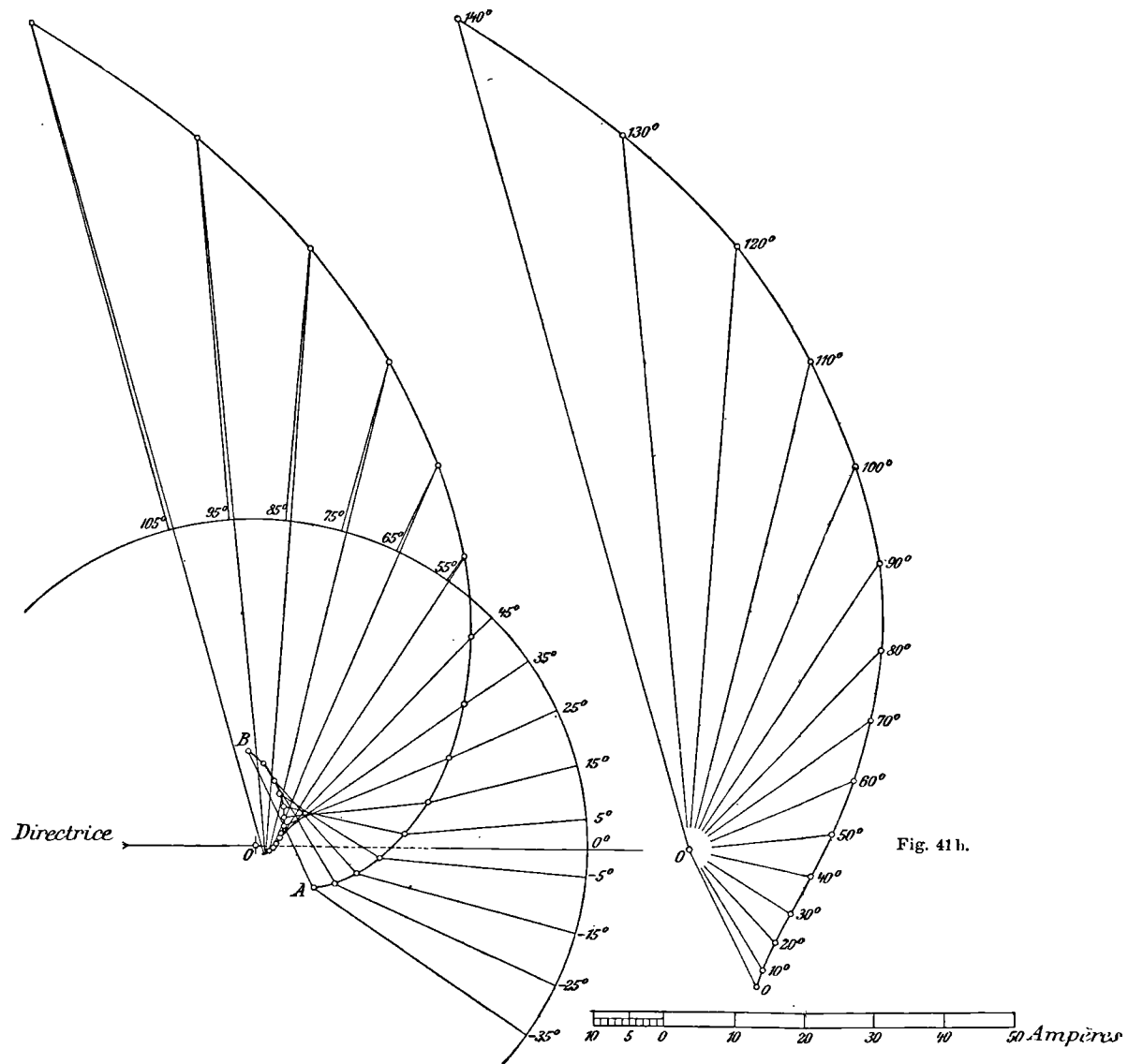


Fig. 41a.

Fig. 41b.

CH. BÉRANGER, ÉDITEUR, A PARIS.



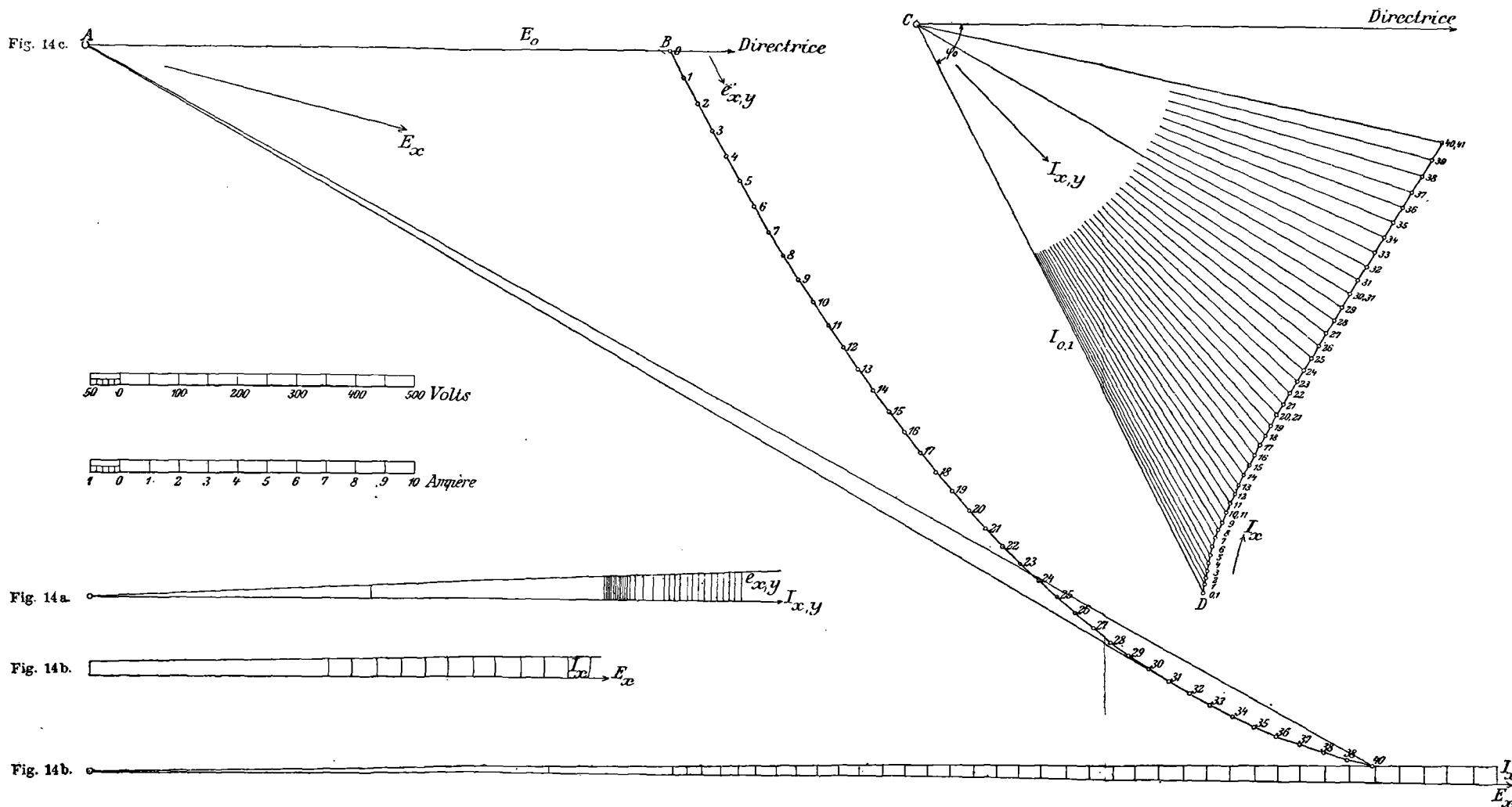


Fig. 14d.





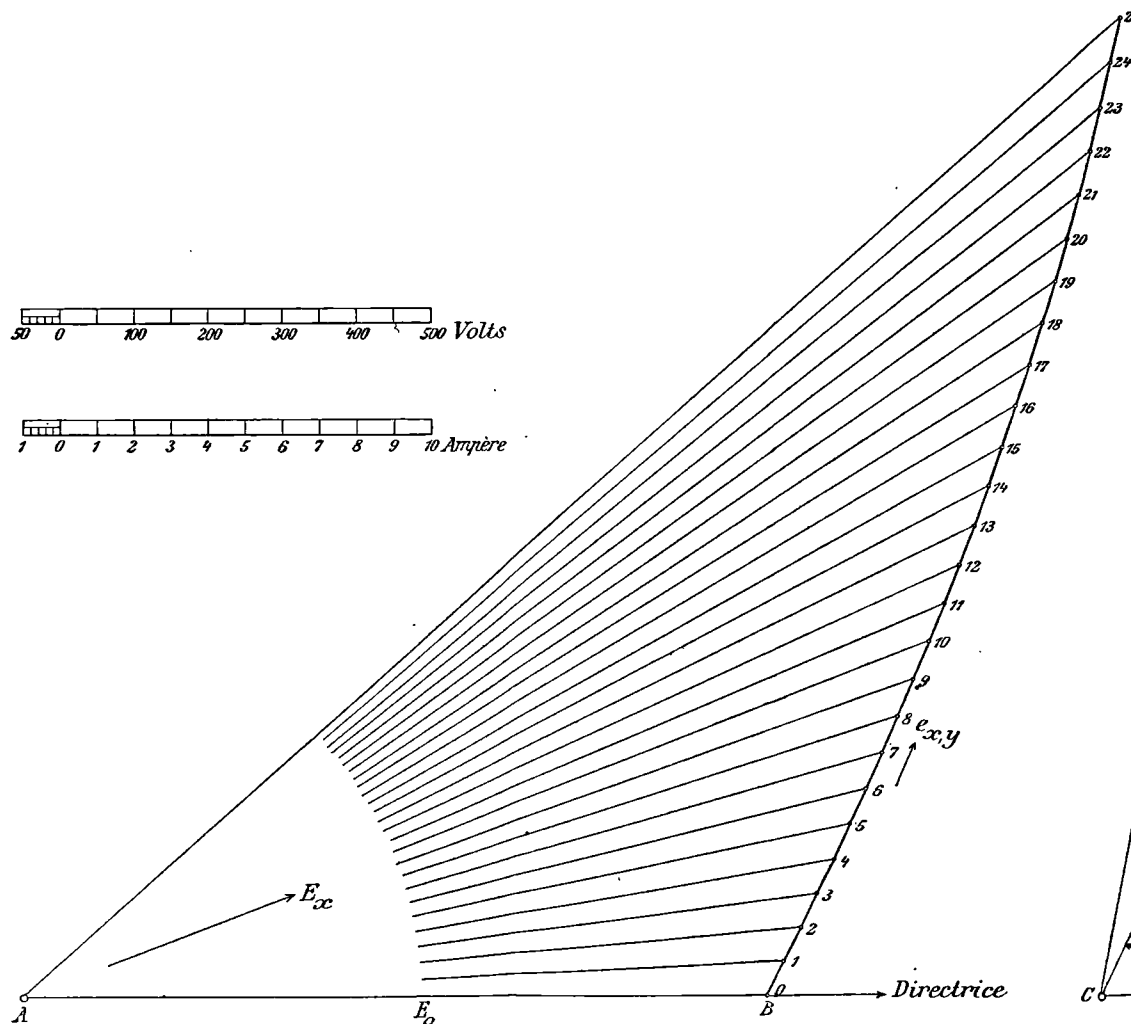


Fig. 15c.

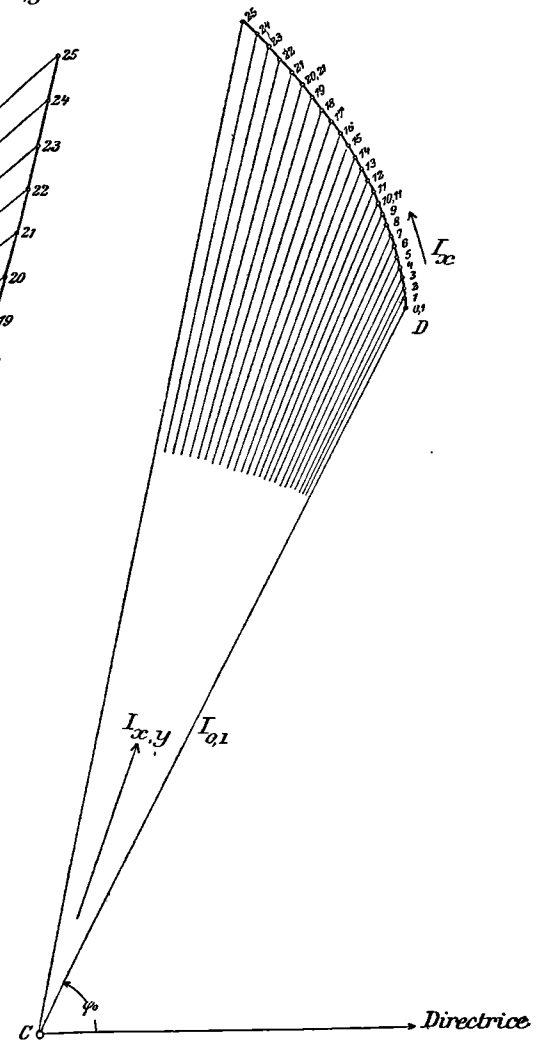
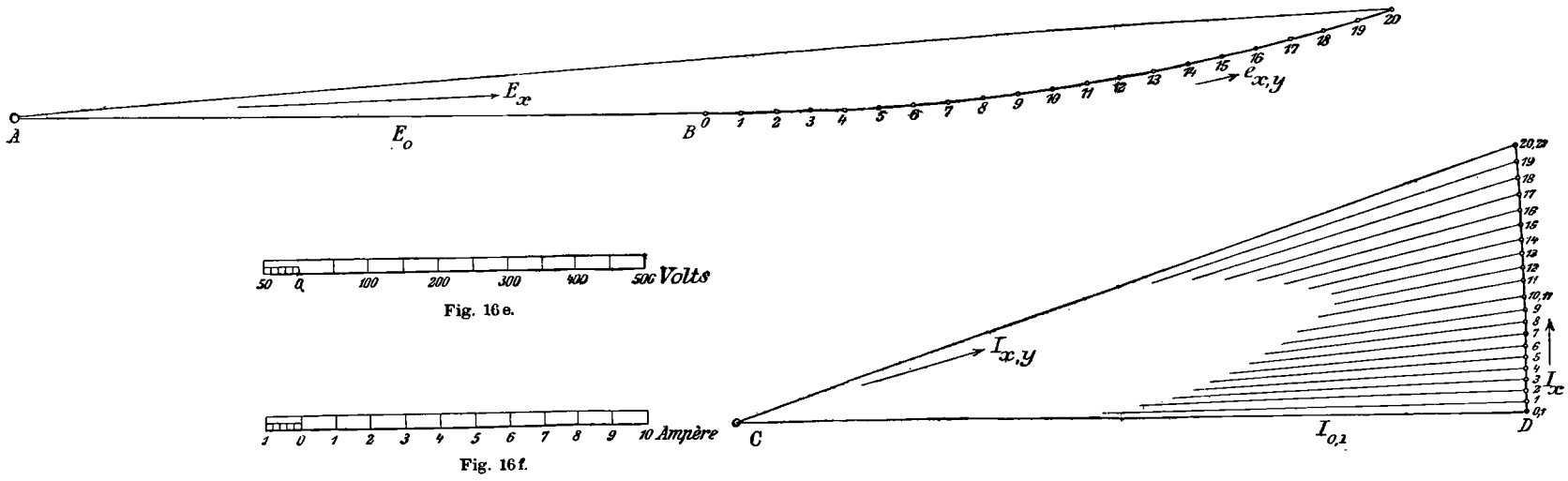
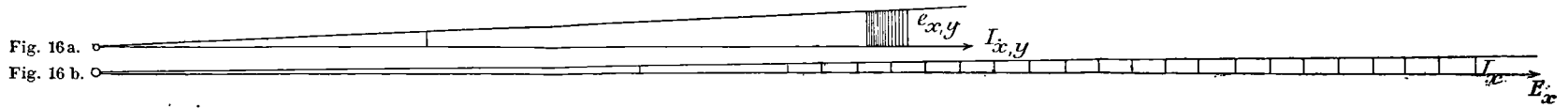


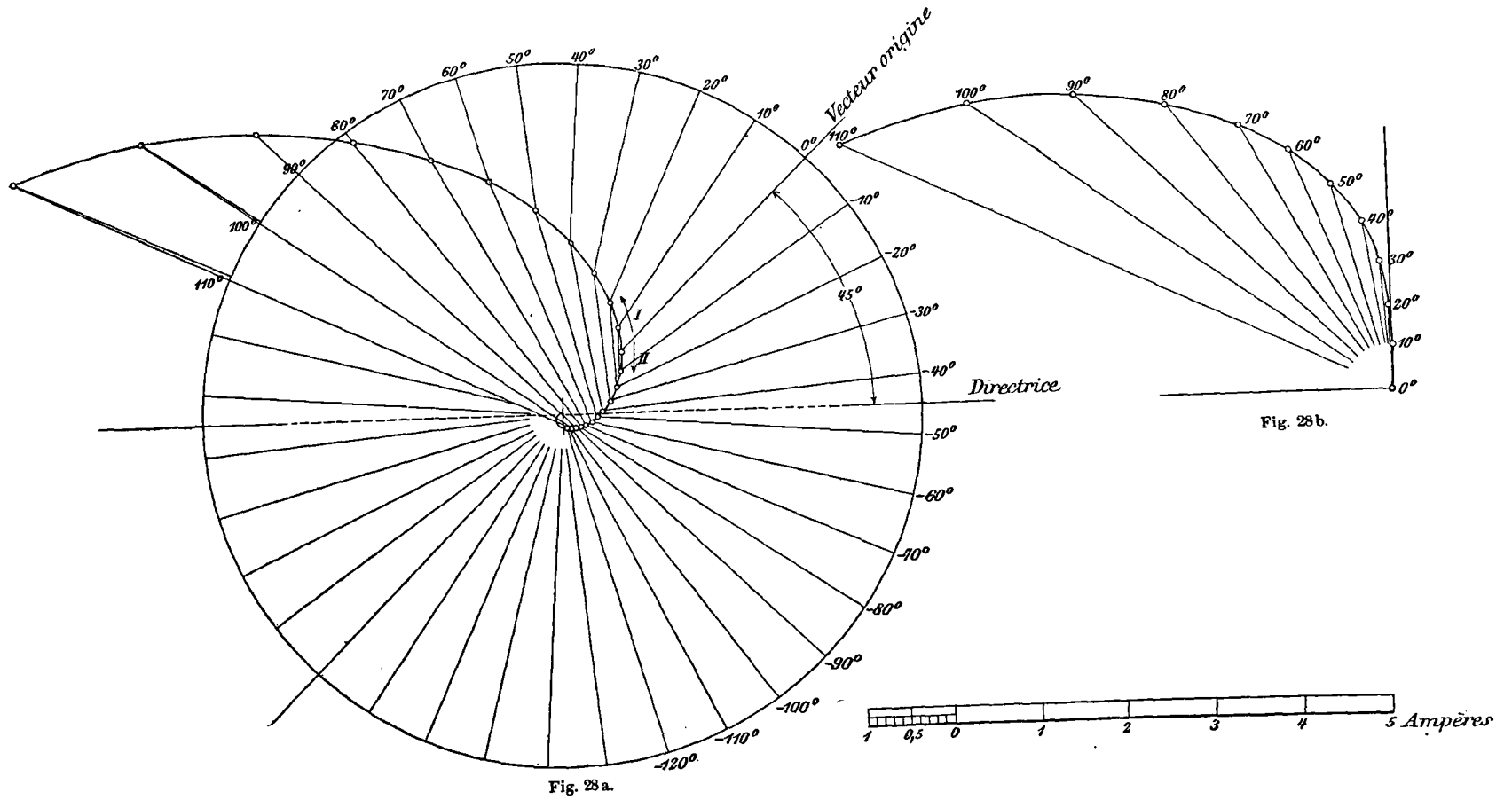
Fig. 15d.



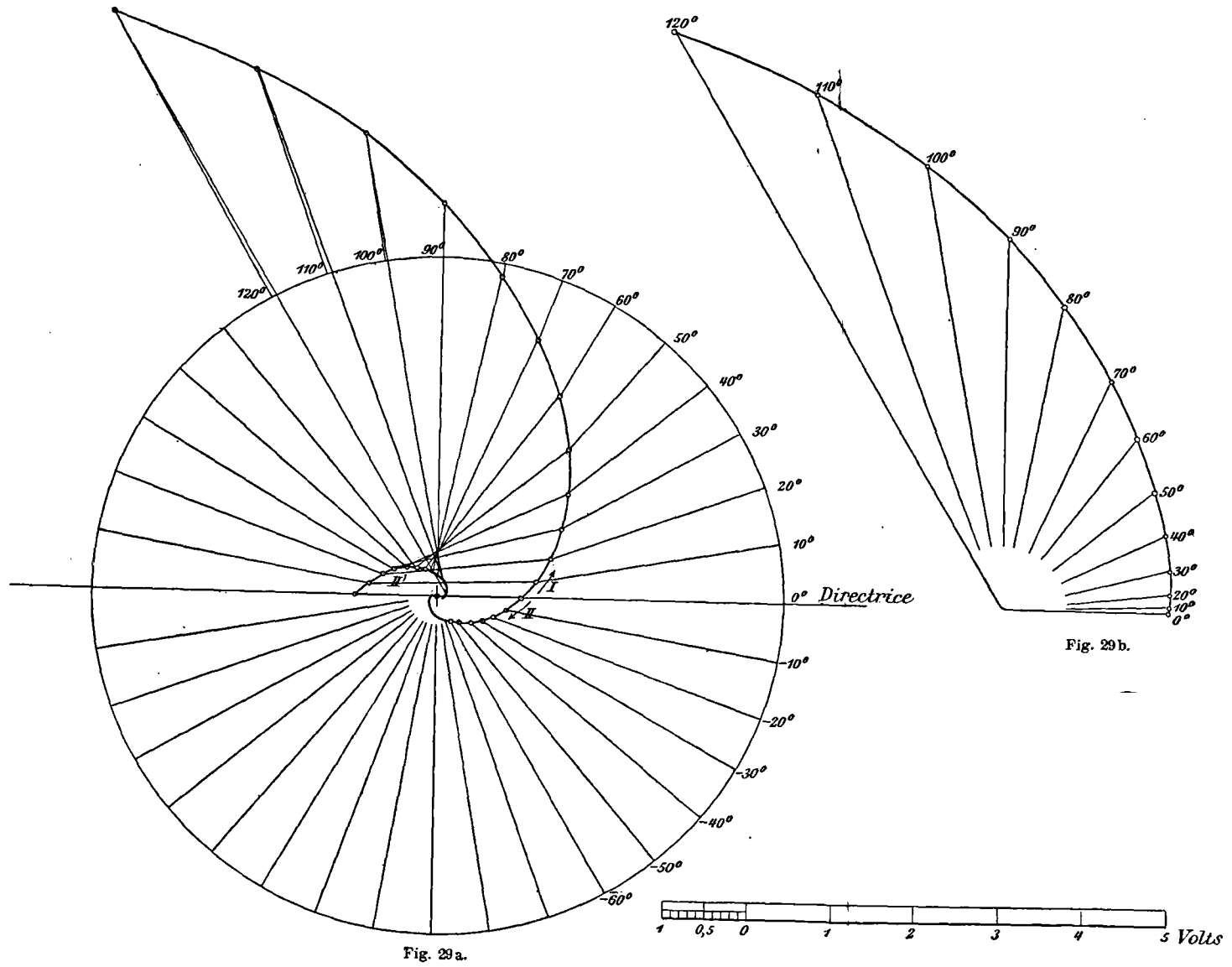


CH. BÉRANGER, ÉDITEUR, A PARIS.













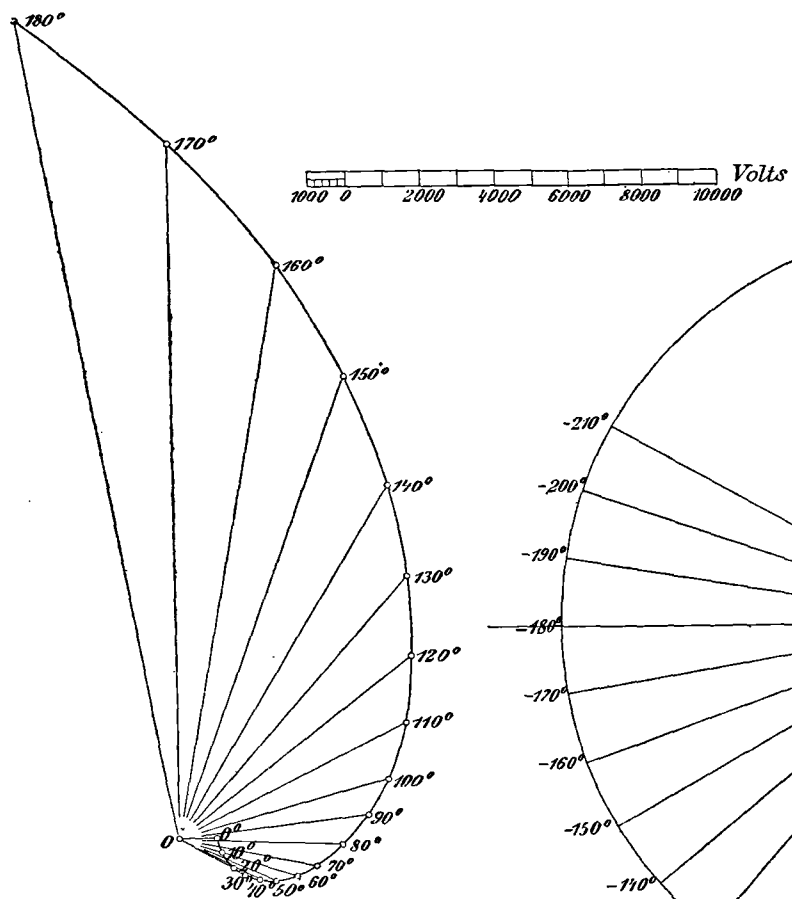


Fig. 40 b.

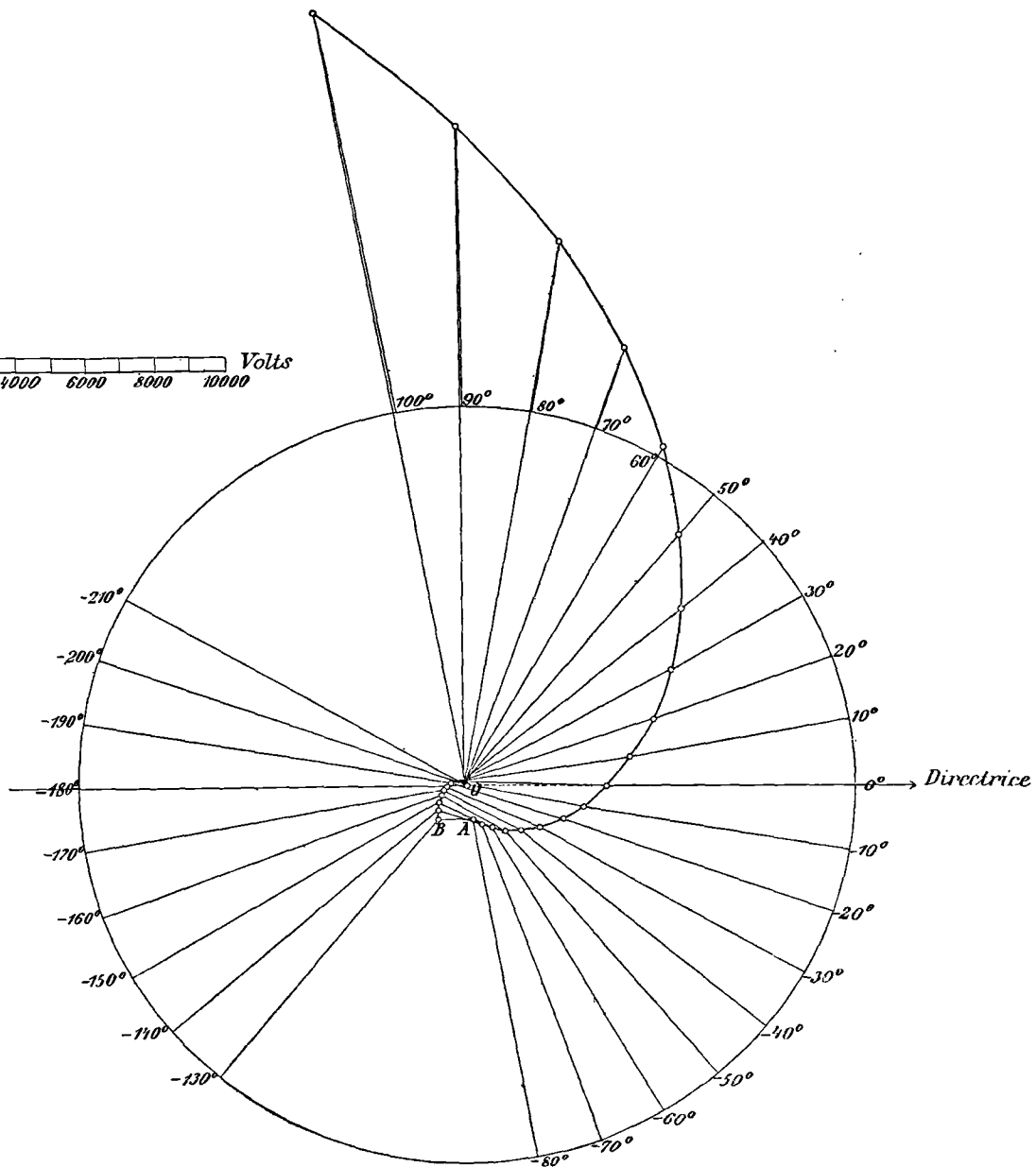


Fig. 40 a.



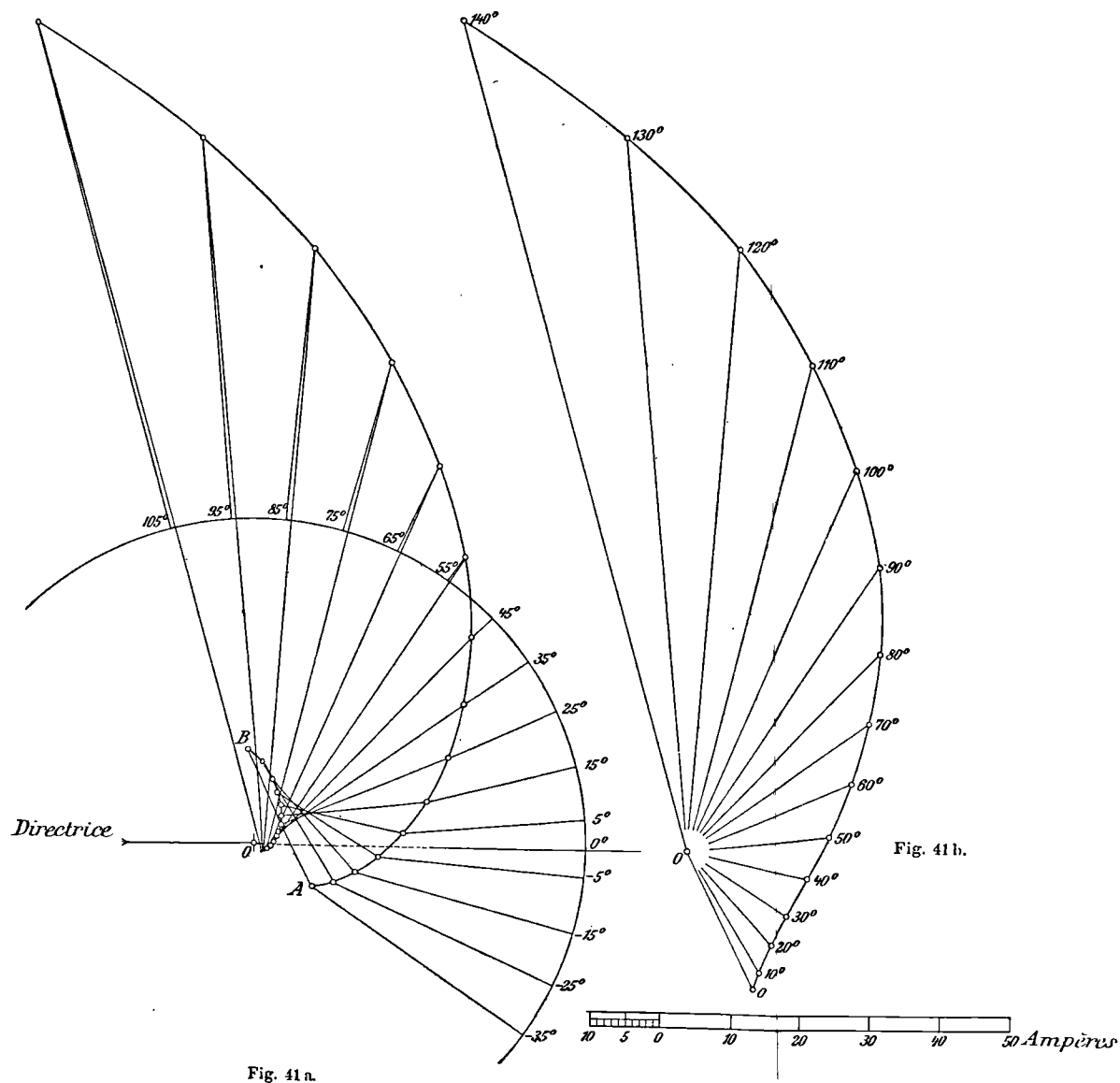


Fig. 41 a.

Fig. 41 b.



# CATALOGUE DE LIVRES

SUR

## L'ÉLECTRICITÉ

PUBLIÉS PAR

*La Librairie Polytechnique CH. BÉRANGER*

Successesseur de BAUDRY et C<sup>ie</sup>

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, A PARIS

21, RUE DE LA RÉGENCE, A LIÈGE

---

*Le catalogue complet est envoyé franco sur demande.*

---

### Leçons d'électricité.

Leçons d'électricité professées à l'Ecole pratique d'Electricité industrielle. Le courant électrique. Distribution des courants et des forces électromotrices. Electro-magnétisme. Induction électromagnétique. Electrostatique, par E. CARVALLO, docteur es sciences, agrégé de l'Université, examinateur à l'Ecole polytechnique. 1 volume grand in-8° contenant 203 figures dans le texte. Relié. . . . . 10 fr.

### Électricité industrielle.

Traité pratique d'électricité industrielle. Unités et mesures ; piles et machines électriques ; éclairage électrique ; transmission électrique de l'énergie ; galvanoplastie et electro-métallurgie ; téléphonie, par E. CADIAU et L. DUBOIS. 6<sup>e</sup> édition, 1 volume grand in-8° avec 291 gravures dans le texte, relié. . . . . 16 fr. 50

### Manuel pratique de l'électricien.

Manuel pratique de l'électricien. Guide pour le montage et l'entretien des installations électriques. Production de l'électricité. Transformation des courants électriques. Eclairage électrique. Transmission électrique de l'énergie. Sonneries électriques. Signaux. Téléphones. Inflammation des torpilles et des mines. Galvanoplastie, par E. CADIAU. 4<sup>e</sup> édition, 1 volume in-12 avec 243 figures dans le texte, relié. . . . . 7 fr. 50

### Manuel pratique d'électricité industrielle.

Manuel pratique d'électricité industrielle. Théorie et applications à l'usage des contremaîtres, monteurs, ouvriers électriciens et mécaniciens s'occupant d'électricité, par Ch. GRUET, ingénieur électricien. 1 volume in-18 jésus contenant 259 figures dessinées par l'auteur. Relié. . . . . 5 fr.

### Aide-mémoire de poche de l'électricien.

Aide-mémoire de poche de l'électricien. Unités. Machines électriques. Machines à courants continus et à courants alternatifs. Self-induction. Capacités. Transformateurs. Conducteurs d'énergie. Canalisations électriques. Moteurs électriques. Eclairage électrique. Distribution de l'énergie. Traction électrique. Electro-métallurgie. Sonneries. Téléphones. Prescriptions administratives ; guide pratique à l'usage des ingénieurs, monteurs, amateurs électriciens, etc., par FR. PICARD et A. DAVIN, ingénieurs des arts et manufactures. 2<sup>e</sup> édition par A. DAVIN. 1 volume, format oblong de 0 m. 125 × 0 m. 08, relié en maroquin, tranches dorées. 6 fr. 50

## Traité d'électricité et de magnétisme.

Traité d'électricité et de magnétisme. Système d'unités absolues. Electrostatique. Electrocinétique. Magnétisme. Electromagnétisme. Application de l'Electromagnétisme. Instruments de mesure électrique. Méthodes générales de mesure électrique. Méthodes de mesures spéciales aux lignes électriques. Détermination des unités électriques. Détermination de l'ohm. Cours professé à l'École supérieure de Télégraphie, par A. VASCAN, ingénieur des télégraphes. 2 volumes grand in-8° avec figures dans le texte . . . . . 25 fr.

## Théorie de l'électricité.

Théorie de l'électricité. Exposé des phénomènes électriques et magnétiques fondé uniquement sur l'expérience et le raisonnement, par A. VASCAN, ingénieur des télégraphes. 1 volume grand in-8° avec 74 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

## Traité pratique d'électricité.

Traité pratique d'électricité à l'usage des ingénieurs et constructeurs. Théorie mécanique du magnétisme et de l'électricité, mesures électriques, piles, accumulateurs et machines électrostatiques, machines dynamo-électriques génératrices, transport, distribution et transformation de l'énergie électrique, utilisation de l'énergie électrique, par FELIX LUCAS, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 278 figures dans le texte. . . . . 15 fr.

## Électricité industrielle.

Traité d'électricité industrielle, théorique et pratique, par MARCEL DEPREZ, membre de l'Institut, professeur d'électricité industrielle au Conservatoire national des arts et métiers, professeur suppléant au Collège de France.

Tomc I contenant les fascicules 1 et 2) : Electricité statique et magnétisme. Electrométrie. Magnétométrie. Electrocinétique. Electro-magnétisme. Electro dynamique. Introduction électromagnétique. 1 vol. grand in-8° avec 205 figures. 24 fr.  
Fascicule 3 : Electrométrie, 1 vol. in-8° avec 190 fig. dans le texte . . . . . 12 fr.

## Contrôle des installations électriques.

Contrôle des installations électriques au point de vue de la sécurité. Le courant électrique, production et distribution de l'énergie, mesures, effets dangereux des courants, contrôle à l'usine, contrôle du réseau, des installations intérieures et des installations spéciales, résultats d'exploitation, règlements français et étrangers, par A. MOYMERQUE, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 2<sup>e</sup> édition revue et augmentée. 1 volume in-8° avec 227 figures dans le texte, relié . . . . . 15 fr.

## Canalisations électriques.

Les canalisations électriques, 1<sup>re</sup> partie. Fonctionnement et calcul des canalisations à courant continu, par TRICHMULLER, directeur de l'Institut Electrotechnique de Karlsruhe, traduit de l'allemand avec autorisation de l'auteur, par P. BREUIN, ingénieur électricien. 1 vol. grand in-8° avec 153 figures dans le texte, relié. 15 fr.

## Canalisations électriques.

Essais et vérifications des canalisations électriques en fabrication à la pose et en exploitation, par G. CHARPENTIER, ingénieur-électricien. 1 volume grand in-8° avec 250 figures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

## Contrôle des réseaux électriques.

Nouvelle méthode générale de contrôle de l'isolement et de recherche des défauts sur les réseaux électriques pendant le service, par P. CHARPENTIER, ingénieur-électricien. 1 brochure in-8° avec figures dans le texte . . . . . 2 fr. 50

## L'Électricité et ses applications. — Piles électriques.

L'électricité et ses applications, 1<sup>re</sup> partie. Les piles électriques. Principes généraux d'électricité et de magnétisme. Applications domestiques, industrielles et médicales. Notions de mécanique et de physique. — Production de l'électricité statique. — Influence et condensation. — Machines électrostatique; leurs effets. — Les piles voltaïques et thermo-électriques. — Effets et lois des courants. — Magnétisme. — Electromagnétisme. — Applications des électro-aimants. — Télégraphie électrique. — Couants d'induction. — Bobine de Ruhmkorff. — Les rayons X. —

Téléphone. — Courants de haute fréquence. — Télégraphie sans fil, par A. REBOT, licencié es sciences mathématiques, professeur de physique et de chimie. 1 volume in 8° contenant 225 figures dans le texte, relié. . . . . 7 fr. 50

### L'Électricité et ses applications. — Machines d'induction.

L'électricité et ses applications 2<sup>e</sup> partie. Les machines d'induction. Production, distribution et utilisation industrielle de l'énergie électrique, par A. REBOT, licencié es sciences mathématiques et es sciences physiques. 1 volume in-8° contenant 190 figures dans le texte, relié. . . . . 10 fr.

### L'Électricité dans l'industrie.

L'électricité dans l'industrie. Rapport présenté à l'Association des anciens élèves des Ecoles supérieures de commerce et d'industrie de Rouen, par RAOUL LEMOINE, ingénieur. 1 volume in-8° avec gravures dans le texte. . . . . 6 fr.

### L'Année électrique.

L'année électrique. Electrothérapie et radiographique. Revue annuelle des progrès électriques. Electro-chimie, éclairage, chauffage électrique, Télégraphie, téléphonie, télégraphie et téléphonie sans fil, traction électrique. L'électricité à la guerre, etc., électrothérapie, radiographie, par FOYFAU DE COURMELLES, médecin-électricien. 1 volume in-18. Chaque année. . . . . 3 fr. 50  
*Cette publication a commencé à paraître en 1900.*

### Électrolyse.

Électrolyse; renseignements pratiques sur le nickelage, le cuivrage, la dorure, l'argenture, l'affinage des métaux et le traitement des minerais au moyen de l'électricité, par HIPPOLYTE FONTAINE. 2<sup>e</sup> édition, 1 volume grand in-8° avec gravures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

### Électro-chimie.

Traité théorique et pratique d'électro-chimie. Constantes chimiques, mécaniques et électriques. Systèmes électrolytiques. Lois générales de l'électrolyse. Théorie de l'électrolyse. Traitement électrolytique des composés chimiques. Electrolyse appliquée à la chimie organique. Réaction chimique de l'étincelle et de l'effluve électriques, par ADOLPHE MINET, directeur du journal *l'Electro-Chimie*. 1 volume grand in 8° contenant 206 figures dans le texte, relié. . . . . 18 fr.

### Électro-Métallurgie.

Traité théorique et pratique d'électro-métallurgie. Galvanoplastie, analyses électrolytiques. Electro-métallurgie par voie humide, méthodes électrolytiques, calcul des conducteurs, chauffage électrique. L'arc voltaïque et charbons électriques, travail électrique des métaux, les fours électriques, électro-métallurgie par voie sèche, méthodes électrolytiques et électro-thermiques, électro-thermie, par ADOLPHE MINET, directeur du journal *l'Electro-chimie*. 1 volume grand in-8° contenant 205 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

### Dictionnaire électrotechnique.

Dictionnaire électrotechnique Français-Allemand-Anglais, par PAUL BLASCHKE, 3 volumes in-8° . . . . . 22 fr. 50  
On vend séparément :  
Français-Allemand-Anglais, 1 volume. . . . . 7 fr. 50  
Allemand-Anglais-Français, 1 volume. . . . . 7 fr. 50  
Anglais-Allemand-Français, 1 volume. . . . . 7 fr. 50

### Rhéostats.

Rhéostats de démarrage et de réglage pour moteurs et générateurs électriques. Théorie. Construction. Montage, par RUDOLF KRAUSE, ingénieur, traduit de l'allemand par P. BÉNAUD, ingénieur-électricien. 1 vol. in-8°, 97 fig. dans le texte. Ref. 6 fr.

### Essai des machines électriques.

Pratique des essais des machines électriques à courant continu et alternatif. Planche d'essais. Essais de laboratoire. Essais des machines dynamo à courant continu. Moteurs à courant continu. Essais des moteurs de tramways. Mesure et

transformation de la puissance. Alternateurs Moteurs synchrones. Commutatrices. Moteurs d'induction. Transformateurs, par E. DUQUESNE, ingénieur à la Société *Maison Beer*, Jemeppe-sur-Meuse, et U. ROUVIER, ingénieur à la Société Electricité-Hydraulique, Jeumont (Nord). 1 volume in-8° contenant 233 figures dans le texte, relié . . . . . 15 fr.

### Moteurs pour dynamo.

Moteurs pour dynamo. Moteurs à vapeur. Moteurs hydrauliques. Moteurs à gaz et à pétrole par Ch. GRUET, ingénieur électricien. 1 volume in-12 avec 167 figures dans le texte, relié. . . . . 7 fr. 50

### Machines dynamo.

Les machines dynamo-électriques à courant continu et à courants alternatifs, par GISEBERT KAPP, traduit de l'allemand par P. LEGLER, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-8° avec 200 figures dans le texte, relié. . . . . 16 fr.

### Machines dynamo à courant continu.

La machine dynamo à courant continu. Théorie, construction, calcul, essais et fonctionnement, par E. ARNOLD, professeur, directeur de l'Institut électrotechnique à l'école technique supérieure grand-ducale de Karlsruhe, traduction française, par E. BOISREL, électricien, expert près les cours et tribunaux, et E.-J. BRASSICA, électricien, ingénieur des arts et manufactures.

Tome I. *Théorie de la machine à courant continu*. Production d'un courant. Enroulements, armatures en anneau, armatures en tambour, armatures en disque, armatures à enroulement ouvert, excitation, système inducteur, forces magnétomotrices. Réaction d'induit, commutation, caractéristiques, causes de diminution du rendement. 1 volume in-8° contenant 421 figures dans le texte. Relié . . . 25 fr.

### Machines dynamo-électriques. — Enroulements.

Des enroulements et de la construction des induits des machines dynamo-électriques à courants continus. Enroulements fermés, en anneau, en tambour, ouverts. Exécution des enroulements, construction des induits, par E. ARNOLD, professeur et directeur de l'Institut électro-technique de Karlsruhe. Traduit de l'allemand par BOY DE LA TOUR, ingénieur. 1 vol. in-8° avec 418 fig. dans le texte et 12 pl. relié. 20 fr.

### Machines dynamo-électriques.

Traité théorique et pratique des machines dynamo-électriques, par R.-V. PICOU, ingénieur des arts et manufactures. 1 vol. gr. in-8° avec 198 fig. dans le texte. 12 fr. 50

### Machines dynamo-électriques.

Traité théorique et pratique des machines dynamo-électriques. Eléments. Principes. Théorie. Induits. Enroulement des induits. Dynamo à courant continu. Dynamos diverses. Alternateurs. Moteurs asynchrones. Transformateurs. Moteurs dynamo. Transmission de l'énergie. Régulateurs. Epreuves de machines. Conduite des dynamos, par SILVANUS P. THOMPSON, traduit par E. BOISREL. 3<sup>e</sup> édition, 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte, relié. . . . . 30 fr.

### Machines dynamo-électriques.

La machine dynamo-électrique, exposé théorique, calculs, applications pratiques, par FRIEDRICH, traduit de l'allemand par E. BOISREL. 1 volume grand in-8° avec 62 figures dans le texte . . . . . 10 fr.

### Moteurs asynchrones polyphasés.

Méthode pratique pour calculer les moteurs asynchrones polyphasés. Champ tournant, forces électromotrices induites par le champ tournant, coupe électromagnétique, actions magnétisantes des enroulements, résistance des bagues du court circuit, des induits en cage d'écureuil, diagramme de fonctionnement des moteurs polyphasés. Applications pratiques, par BOY DE LA TOUR, ingénieur. 1 volume in-8° contenant 70 figures dans le texte. . . . . 12 fr. 50

### Constructions électro-mécaniques.

Constructions électro-mécaniques ; recueil d'exemples de construction et de calculs de machines dynamos et appareils électriques industriels, par GISEBERT KAPP,



traduit de l'allemand par A.-O. DUBSKY et P. GRUAULT, ingénieurs-électriciens. 1 volume in-4° avec 54 figures dans le texte et 25 planches, relié. . . . . 30 fr.

### Éclairage électrique.

Traité pratique des installations d'éclairage électrique, adaptation française de l'ouvrage de MM. HENZOG et FELDMMANN (*Handbüch der Elektrischen Beleuchtung*) par H. BOY DE LA TOUR, ingénieur, chef du service électrique de la compagnie de Fives-Lille. 1 volume grand in-8° avec 413 figures dans le texte et 5 planches hors texte. Relié. . . . . 25 fr.

### Éclairage électrique.

Installations d'éclairage électrique. Manuel pratique. Unités, mesures, compteurs industriels, machines dynamos, accumulateurs, transformateurs, lampes électriques, canalisation, conducteurs aériens, conducteurs souterrains. Appareils auxiliaires, systèmes de distribution, coût des installations. Lois et règlements, par E. PIAZZOLI, ingénieur civil. Traduit de l'italien par G. UCCERLIO et E. A. DELLA SANTA, ingénieurs. 1 volume in-8° contenant 264 figures dans le texte et 90 tableaux, relié. . . . . 16 fr.

### Éclairage électrique.

Eclairage électrique de l'Exposition universelle de 1889. Monographie des travaux exécutés par le syndicat international des électriciens, par HIPPOLYTE FOUSTAINÉ. 1 volume in-4° avec 29 planches tirées à part et 32 gravures dans le texte relié. . . . . 25 fr.

### Éclairage électrique.

Etude pratique sur l'éclairage électrique des gares de chemins de fer, ports, usines, chantiers et établissements industriels, par GEORGES DUMONT, avec la collaboration de GUSTAVE BAIGNIÈRES. 1 volume grand in-8° avec 2 planches. . . . . 5 fr.

### Éclairage à Paris.

L'éclairage à Paris. Étude technique des divers modes d'éclairage-employés à Paris sur la voie publique, dans les promenades et jardins, dans les monuments, les gares, les théâtres, les grands magasins, etc., et dans les maisons particulières. — Gaz, électricité, pétrole, huile, etc.; usines et stations centrales, canalisations et appareils d'éclairage; organisation administrative et commerciale, rapports des compagnies avec la ville; traités et conventions, calcul de l'éclairage des voies publiques; prix de revient, par HENRI MARÉCHAL, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 221 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

### Éclairage des voitures de Chemins de fer.

Eclairage des voitures de chemins de fer. Huile, pétrole, gaz de houille, gaz d'huile, acétylène, gaz mixte. Electricité, par J. CARLIER, ingénieur des mines. 1 volume in-8° contenant 100 figures intercalées dans le texte. . . . . 6 fr.

### Électricité.

Manuel élémentaire d'électricité, par FLEMING JENKIN, professeur à l'Université d'Edimbourg; traduit de l'anglais par N. DE TÈDESCO. 1 volume in-12 avec 32 gravures. . . . . 2 fr.

### Courants polyphasés.

Courants polyphasés et alerno-moteurs. Théorie, construction, mode de fonctionnement et qualités des générateurs et des moteurs à courants alternatifs et polyphasés, transformateurs polyphasés et mesure de la puissance dans les systèmes polyphasés, par SYLVANUS P. THOMPSON, directeur du collège technique de Finsbury, à Londres, traduction par E. BOISTEL, ingénieur-expert près le tribunal de la Seine, 2<sup>e</sup> édition, 1 volume in-8° contenant 360 figures dans le texte et 12 planches hors texte et en couleurs, relié. . . . . 25 fr.

### Courants alternatifs.

Éléments du calcul et de la mesure des courants alternatifs, par OMER DE BAST, ingénieur. Professeur à L'École industrielle de Liège. 1 volume in-8° contenant 75 figures dans le texte, relié. . . . . 7 fr. 50

### **Courants alternatifs d'électricité.**

Les courants alternatifs d'électricité, par T. H. BLAKESLEY, professeur au Royal Naval Collège de Greenwich, traduit de la 3<sup>e</sup> édition anglaise et augmenté d'un appendice, par W. C. RECHNIEWSKI. 1 vol. in-12, avec fig. dans le texte, relié. 7 fr. 50

### **Vecteurs rotatoires et alternatifs.**

Théorie des vecteurs rotatoires et des vecteurs alternatifs, et sur une application de cette théorie aux moteurs à courants alternatifs, par GALILEO FERRARIS, professeur à l'Académie royale des Sciences de Turin, traduit par Ed. FRANCKEN, ingénieur. 1 brochure in-8<sup>o</sup> avec figures. . . . . 1 fr. 50

### **Transformateurs.**

Les transformateurs à courants alternatifs simples et polyphasés. Théorie, construction, applications, par GISEPPE KAPP, traduit de l'allemand par A. O. DUNSKY et G. CHENEY, ingénieurs-électriciens. 1 volume in-8<sup>o</sup>, avec 132 figures dans le texte, relié. . . . . 12 fr.

### **Courant électrique différentiel.**

Le courant électrique différentiel, par EMILE MANGON. 1 brochure in-8<sup>o</sup>, avec figures dans le texte . . . . . 2 fr. 50

### **Problèmes sur l'électricité.**

Problèmes sur l'électricité. Recueil gradué comprenant toutes les parties de la science, par le D<sup>r</sup> ROBERT WEFER, professeur à l'Académie de Neuchâtel, 3<sup>e</sup> édition. 1 volume in-12, avec figures dans le texte. . . . . 6 fr.

### **Problèmes d'électricité.**

Recueil de problèmes d'électricité, par A. RAUOOR, ingénieur. 1 volume gr. in-8<sup>o</sup>, contenant de nombreuses figures dans le texte, relié . . . . . 8 fr.

### **Tramways électriques.**

Les tramways électriques. Dispositions générales, voie, tramways à conducteurs aériens, souterrains, à contacts superficiels, tramways à accumulateurs, matériel roulant, dépôt, ateliers, production et transformation de l'énergie, exploitation, dépenses, concessions, réglementation, par H. MARECHAL, ingénieur des ponts et chaussées, 2<sup>e</sup> édition. 1 volume in-8<sup>o</sup>, avec 188 figures dans le texte . . . 10 fr.

### **Chemins de fer électriques.**

Les chemins de fer électriques. Dispositions générales. Production de l'électricité. Voie. Distribution de l'électricité. Alimentation des lignes. Moteurs. Traction. Automotrices. Locomotives. Chemins de fer divers. Exploitation et dépenses, par HENRI MARECHAL, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8<sup>o</sup> avec 516 figures dans le texte. Relié . . . . . 25 fr.

### **Traction électrique.**

La traction électrique sur voies ferrées. Types de voie. Exécution des voies. Adaptation des moteurs électriques à la traction sur les voies ferrées. Moteurs de traction. Voitures automobiles. Locomotives électriques. Matériel applicable à des cas spéciaux, services à grande vitesse, monorails, lignes à fortes rampes. Fonctionnement des moteurs de traction à courant continu et à courants alternatifs. Régulation de la vitesse des voitures. Conduite, entretien et essais des moteurs et du matériel roulant. Résistance et traction du matériel roulant électrique. Puissance et énergie électrique consommées sur les voitures et à la station génératrice. Projet de traction. Freinage des voitures électriques. Dépenses d'établissement et d'exploitation des lignes électriques. Conditions de sécurité, réglementation et contrôle technique, par ANDRÉ BLONDEL et F.-PAUL DUBOIS, ingénieurs des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8<sup>o</sup>, contenant plus de 1700 pages et 1014 figures dans le texte. Reliés . . . . . 50 fr.

### **Production et distribution de l'énergie électrique.**

Production et distribution de l'énergie électrique. Puissance et organisation des stations centrales, chaudières, machines à vapeur. Stations centrales au gaz pauvre.

Stations centrales hydrauliques. Machines électriques employées pour la traction. Machines à courant continu. Emploi des accumulateurs dans les stations centrales. Sous-stations de transformation. Moyens d'éviter ou de remédier aux accidents de personnes, dépenses d'établissement des stations centrales. Feeders. Lignes aériennes, Trolleys. Montage des lignes aériennes. Parafoudres, appareils accessoires des lignes aériennes. 3<sup>e</sup> rail. Cauiveaux. Contacts superficiels. Retour du courant, par H. MARTIN, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in-8<sup>e</sup>, avec 870 figures dans le texte. Relié. . . . . 25 fr.

### Distribution d'énergie électrique.

Les distributions d'énergie électrique dans les petites localités, par RICHARD BERGER, ingénieur mécanicien, ingénieur électricien. 1 brochure grand in-8<sup>e</sup> avec figures dans le texte. . . . . 2 fr. 50

### Transport et distribution de l'énergie.

Transport et distribution de l'énergie par courants continus et alternatifs, description du matériel, calcul des lignes aériennes, par CH. GRUET, ingénieur électricien. 1 volume in-8<sup>e</sup> contenant 48 figures dans le texte. Relié. . . . . 4 fr.

### Accumulateur voltaïque.

Traité élémentaire de l'accumulateur voltaïque, par EMILE REYNIER, 1 volume grand in-8<sup>e</sup>, avec 62 figures dans le texte et un portrait de M. G. Planté. . . . . 6 fr.

### L'accumulateur électrique.

L'accumulateur électrique et ses applications industrielles. Traité pratique à l'usage de l'ingénieur. L'accumulateur au plomb. Appareillage auxiliaire. Applications, par LAMAR LYNDON, traduit de l'anglais par CH. LE VALBLANC, ingénieur à la Société française de l'accumulateur Tudor. 1 volume grand in-8<sup>e</sup> contenant 184 figures dans le texte et 2 planches. Relié. . . . . 17 fr. 50

### Accumulateur au plomb.

La théorie de l'accumulateur au plomb. Théories de la production du courant. Variation de la force électromotrice. Variation du potentiel. Coefficient de température. Influence de la pression. Allure de charge et de décharge. Réversibilité. Phénomènes du circuit. Résistance intérieure. Capacité, Rendement. Phénomènes de formation. Méthodes de mesure. Table des densités, etc., par le D<sup>r</sup> FR. DOLEZALSKY, traduit de l'allemand par CH. LIAGRE. 1 volume in-8<sup>e</sup> avec 40 figures dans le texte. . . . . 8 fr.

### Téléphone.

Le téléphone. Théorie. Induction. Transmetteurs à charbons. Téléphones spéciaux. Lignes téléphoniques. Appareils auxiliaires. Stations terminales. Stations intermédiaires. Bureaux centraux français et étrangers. Tableaux commutateurs. Stations téléphoniques publiques. Téléphones multiplex. Application du téléphone au service de la télégraphie. Télégraphie militaire. Applications diverses, par WILLIAM HENRI PEARCE, électricien en chef du *British Post-Office*, et JULIUS MAIER, docteur ès sciences physiques. 1 vol. grand in-8<sup>e</sup>, avec 290 gr. dans le texte. 15 fr.

### Télégraphie électrique.

Traité de télégraphie électrique. Production du courant électrique. Organes de réception. Premiers appareils. Appareil Morse. Appareils accessoires. Installation des postes. Propriétés électriques des lignes. Lois de la propagation du courant. Essais électriques, recherches des dérangements. Appareils de translation, de décharge et de compensation. Description des principaux appareils et des différents systèmes de transmission. Etablissement des lignes aériennes, souterraines et sous-marines, par H. THOMAS, ingénieur des télégraphes. 1 volume grand in-8<sup>e</sup>, avec 702 figures dans le texte, relié. . . . . 25 fr.

### Télégraphie sous-marine.

Traité de télégraphie sous-marine. Historique. Composition et fabrication des câbles télégraphiques. Immersion et réparation des câbles sous-marins. Essais électriques. Recherche des défauts. Transmission des signaux. Exploitation des lignes sous-marines, par WUSSCHENDORFF, ingénieur des télégraphes. 1 volume grand in-8<sup>e</sup> avec 460 gravures dans le texte. . . . . 40 fr.

### Tirage des mines par l'électricité.

Le tirage des mines par l'électricité, par PAUL-F. CHALON, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-18 Jésus, avec 90 figures dans le texte. Prix relié. . . . . 7 fr. 50

### Électricité médicale.

Traité théorique et pratique d'électricité médicale. Précis d'électricité. Appareils et instruments électro-médicaux. Applications thérapeutiques, par FÉLIX LUCAS et ANDRÉ LUCAS. 1 volume in-18 Jésus, avec 120 figures dans le texte, relié. . . . . 10 fr.

### La télégraphie sans fil.

La télégraphie sans fil. L'œuvre de Marconi, de l'origine aux premières expériences publiques, étapes parcourues jusqu'à ce jour, manière dont les ondes se propagent dans les transmissions à longue distance, côté commercial, par E. GUARINI. 1 brochure in-5° avec 88 figures dans le texte. . . . . 2 fr. 50

### Installations électriques. Mesures de précaution.

Installations électriques d'éclairage et de transport d'énergie. Commentaires sur les mesures de précaution prescrites par l'Union des Compagnies allemandes d'Assurance contre l'incendie, par le Dr OSCAR MAY, traduit de l'allemand sous la direction de PH. DELAHAYE. 1 brochure grand in-8°, avec 13 figures dans le texte. . . . . 1 fr. 50

### Charbons électriques.

La fabrication des charbons électriques : cette étude a paru dans les livraisons d'avril et mai 1902 du *Portefeuille des machines*. Prix de ces deux livraisons . . . . . 4 fr.

### Transmission de force.

*N.-B.* — Les études suivantes ont paru dans le *Portefeuille des machines* et se vendent avec la livraison qui les renferme au prix de 2 fr. la livraison.

Transmission de force par l'électricité appliquée à l'usine de fabrication d'engrais chimiques de P. Linet à Aubervilliers. Livraison de juin 1896. . . . . 2 fr.

Distribution d'énergie électrique par la dérivation du Rhône à Jonaze avec 2 planches doubles. Livraisons de juillet, août et septembre 1896 des *Annales de la construction* . . . . . 6 fr.

Transmission de force par courants diphasés des mines de Sheba (Transvaal) avec une planche. Livraison de décembre 1899. . . . . 2 fr.

Transport de la force par l'électricité. Ponts roulants électriques de la Société internationale d'électricité à Liège avec 6 planches. Livraisons de janvier et février 1900 . . . . . 4 fr.

Usine électrique de Bercy, pour la production de l'énergie électrique du chemin de fer métropolitain de Paris, avec 2 planches doubles, livraison de mai 1900 et juin 1904. . . . . 4 fr.

Sous-station électrique du chemin de fer métropolitain de Paris, à la place de l'Étoile, avec 2 planches. Livraison de juin 1900. . . . . 2 fr.

Utilisation des chutes d'eau à la production d'énergie électrique, avec 2 planches doubles, livraison de juillet 1901 . . . . . 2 fr.

L'énergie hydro-électrique, sa production, ses applications. Livraison d'octobre 1904 des *Annales de la construction* . . . . . 2 fr.