EXTRAIT DE L'*Enseignement mathématique*, N° 5, 8e ANNÉE, SEPTEMBRE 1906

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE POUR DÉTERMINER LES ORBITES DES PLANÈTES ET DES COMÈTES.

Les méthodes de détermination des orbites donnent lieu à des calculs fort compliqués et dénués de symétrie. Il en est ainsi à cause de la nécessité d'adapter les formules au calcul numérique. Lorsqu'on veut seulement montrer en quoi consiste la méthode, il y a je crois avantage à procéder différemment. C'est ce que je vais faire pour la méthode donnée par Laplace.

Considérons un astre (planète ou comète) tournant autour du soleil.

Nous observons cet astre de la Terre. Il s'agit de déduire de ces observations les éléments de l'orbite.

Lorsqu'on a la position de l'astre à l'époque t, et sa vitesse en grandeur et direction, sa trajectoire est déterminée. Soit

[illegible]

μ le coefficient d'attraction du soleil, V la vitesse de la planète, r sa distance au soleil, a le demi grand axe de son orbite ; le théorème des forces vives donne :

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

μ est connu, *parce qu'on suppose la masse de la planète négligeable par rapport à celle du soleil.*

V et r étant connus, cette formule donne a.

Le problème revient alors à déterminer une conique connaissant un foyer, une tangente et son point de contact, et la longueur de l'axe focal. C'est là un facile problème de Géométrie.

Pour déterminer l'orbite d'un astre il s'agit de trouver sa position et sa vitesse à une époque donnée, c'est-à-dire les 3 coordonnées x y z de l'astre, et les dérivées par rapport à t de ces 3 coordonnées, l'origine étant supposée le centre du soleil.

J'appelle r la distance de l'astre au soleil ; ρ sa distance à la terre. Laplace appelle ρ la projection de cette distance sur le plan de l'écliptique, nous aurons plus de symétrie dans les calculs en nommant ρ cette distance elle même.

Le plan de xy est supposé être le plan de l'écliptique, en sorte que la terre est dans ce plan. Nous nommerons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de la terre, R sa distance au soleil.

Considérons le vecteur joignant la terre à l'astre. Sa longueur est ρ ; nommons u, v, w les cosinus directeurs de la direction. Tout ce qu'on peut observer de la terre, ce sont les valeurs de u, v, w à différentes époques. On pourra donc calculer u, v, w en fonction du temps, par l'une des méthodes d'interpolation connues ; u, v, w étant connues en fonction de t, on connaîtra pour l'époque considérée les valeurs de u, v, w, de leurs dérivées u', v', w', de leurs dérivées secondes u'', v'', w'', et même des dérivées d'ordre supérieur si cela est nécessaire.

Lorsque w n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire quand le plan de l'orbite n'est pas confondu avec celui de l'écliptique, il suffit de connaître les dérivées jusqu'au 2° ordre, comme on va le voir.

Les projections du vecteur ρ sont $x - x_0$, $y - y_0$ et z et aussi $u\rho$, $v\rho$, $w\rho$, on a donc

$$x = x_0 + u\rho\,, \quad y = y_0 + v\rho \quad z = w\rho\,. \tag{1}$$

d'où en dérivant deux fois par rapport à t et représentant les dérivées par des lettres accentuées

$$\left\{ \begin{aligned} x'' &= x_0'' + u''\rho + 2u'\rho' + u\rho''\,, \\ y'' &= y_0'' + v''\rho + 2v'\rho' + v\rho''\,, \\ z'' &= \phantom{x_0'' +{}} w''\rho + 2w'\rho' + w\rho''\,. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

D'ailleurs la loi de l'attraction universelle donne :

$$x'' = -\frac{\mu x}{r^3}\,, \quad y'' = -\frac{\mu y}{r^3}\,, \quad y'' = -\frac{\mu z}{r^3}\,, \tag{3}$$

et aussi :

$$x_0'' = -\frac{\mu x_0}{R^3}\,, \quad y_0'' = -\frac{\mu y_0}{R^3}\,, \tag{4}$$

après avoir dans les formules (3) remplacé x, y, z par leurs valeurs de tirées de (1) portons les valeurs de x'', y'', z'', x_0'', y_0'', z_0'' dans le système (2). Nous obtenons ainsi le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho\left[u'' + \mu\frac{u}{r^3}\right] + 2\rho' u' + \rho'' u = \mu x_0\left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right], \\ &\rho\left[v'' + \mu\frac{v}{r^3}\right] + 2\rho' v' + \rho'' v = \mu y_0\left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right], \\ &\rho\left[v'' + \mu\frac{w}{r^3}\right] + 2\rho' w' + \rho'' w = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

On a ainsi 3 équations linéaires en $\rho\ \rho'\ \rho''$. Le déterminant des inconnues est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u'' & u' & u \\ v'' & v' & v \\ w'' & w' & w \end{vmatrix}\,; \tag{6}$$

comme on le voit facilement, en retranchant de la 1re colonne les éléments de la 3e multipliés au préalable par $\frac{\mu}{r^3}$.

Ce déterminant ne peut être nul que s'il y a entre u, v, w une relation de la forme :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

C'est là une proposition bien connue, de la théorie des équations différentielles linéaires. Si cette relation avait lieu. c'est que la planète serait dans un plan fixe passant par le centre de la terre. Ceci ne peut avoir lieu que si la planète a une inclinaison nulle sur le plan de l'écliptique ; $w = 0$. [La détermination de l'orbite dans ce cas est compliquée ; elle exige au moins quatre observations. Les ouvrages que je connais traitant de ce sujet n'envisagent pas ce cas.]

Résolvons les équations (5) par rapport à ρ, on trouve

$$\rho = \mathrm{K}\left[\frac{1}{\mathrm{R}^3} - \frac{1}{r^3}\right], \tag{7}$$

en posant :

$$\mathrm{K} = \frac{\mu}{\Delta}\left[x_0(wv' - vw') + y_0(uv' - vu')\right]. \tag{8}$$

L'équation (7) va nous permettre de calculer ρ.

Pour faire ce calcul, Laplace se sert du triangle S T P, c'est-à-dire du triangle ayant pour sommets le soleil, la terre et la planète.

L'angle en T est connu. Le vecteur TP a pour cosinus directeurs u, v, w, le vecteur TS a pour cosinus directeurs $-\frac{x_0}{\mathrm{R}}$, $-\frac{y_0}{\mathrm{R}}$, zéro ;

donc

$$\cos \mathrm{T} = -\frac{ux_0}{\mathrm{R}} - \frac{vy_0}{\mathrm{R}}. \tag{8}$$

On a :

$$r^2 = \rho^2 + \mathrm{R}^2 - 2\rho\,\mathrm{R}\cos \mathrm{T}. \tag{9}$$

L'équation (7) s'écrit :

$$r^3(\mathrm{K} - \rho\mathrm{R}^3) = \mathrm{KR}^3 \tag{7 bis}$$

et élèvant au carré et remplaçant r^2 par sa valeur (9) on a une équation en ρ du 7° degré qu'il faut résoudre.

La méthode de Gauss est préférable; elle consiste à prendre pour inconnue l'angle en P du triangle TSP.

On a :

$$\rho = R\,\frac{\sin(P+T)}{\sin P}\,, \qquad r = R\,\frac{\sin T}{\sin P}\,.$$

en portant dans l'équation (7) on obtient une équation de la forme

$$\sin^4 P = \alpha \sin P + \beta \cos P\,,$$

α et β étant des constantes connues.

En posant $\frac{\beta}{\alpha} = tg\,\varphi$, $\alpha^2 + \beta^2 = s^2$, on a:

$$\sin^4 P = s \sin(P + \varphi)\,. \tag{10}$$

On est ainsi ramené à la résolution de cette équation.

P étant connu, on calcule ρ ; puis ρ étant connu, les équations (5) donnent $\frac{d\rho}{dt}$ ou ρ' ; pour celà on multiple la 1re par u', la seconde par v', la troisième par w', et on ajoute.

On obtient ainsi, en observant que d'une part $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, et que par suite $uu' + vv' + ww' = 0$, et que, d'autre part, on a trouvé

$$\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} = \frac{\rho}{K}\,,$$

on obtient, dis-je, l'équation :

$$\rho(uu'' + vv'' + ww'') + 2\rho'(u'^2 + v'^2 + w'^2) = \frac{\mu\rho}{K}\,(u'x_0 + v'y_0)$$

ρ étant connu, cette équation donne ρ'.

On trouve ensuite x, y, z à l'aide des formules (1) puisque ρ est connu. Par dérivations des mêmes formules on a les dérivées de x, y, z, puisque ρ' est connu.

On obtient donc bien la position et la vitesse de la planète à l'époque considérée.

Le problème est ainsi résolu.

J. Richard (Dijon).