

ÉLÉMENTS
DE
CRISTALLOGRAPHIE PHYSIQUE

IMPRIMERIE AUBERT-SCHUCHARDI
GENÈVE, PÉLISSEUR, 48

ÉLÉMENTS
DE
CRISTALLOGRAPHIE
PHYSIQUE

PAR

CHARLES SORET

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE

AVEC 1 PLANCHE ET 538 FIGURES DANS LE TEXTE



GENÈVE
H. GEORG, ÉDITEUR
BALF: MÊME MAISON

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
GRANDS-AUGUSTINS, 55

1893

Tous droits réservés.

AVANT-PROPOS

J'ai essayé de résumer dans ce volume les principaux chapitres de la Physique des cristaux ; j'ai tâché de le faire sous une forme assez élémentaire pour être utile à d'autres qu'aux cristallographes de profession, et assez complète en même temps pour donner une idée de l'état actuel de la science.

A mesure que la Physique se développe, le rôle des théories basées sur des conceptions moléculaires précises semble perdre un peu de son importance ; on tend à les regarder moins comme l'expression la plus probable de la réalité que comme des représentations schématiques servant seulement à fixer les idées. Les relations mutuelles des phénomènes paraissent trouver leur explication moins dans le choix de telle ou telle hypothèse particulière que dans l'application d'un petit nombre de principes plus généraux et plus abstraits. De là proviennent les analogies formelles si remarquables qui s'observent souvent entre des domaines très différents de la Physique.

Nulle part ces analogies ne sont aussi frappantes qu'en Cristallographie, et cela, parce qu'à côté de quelques données très générales, telles que les deux principes fondamentaux de la thermodynamique, qui interviennent ici comme partout, ou telles que la continuité, dont le rôle a été si remarquablement indi-

qué par M. Mallard, les lois géométriques et logiques de la symétrie prennent en Cristallographie une importance prépondérante, et impriment un caractère particulier à toutes les propriétés physiques des cristaux.

J'ai donc exposé avec le plus grand soin tout ce qui a trait à la symétrie cristalline, et j'ai fait tous mes efforts pour familiariser peu à peu le lecteur avec cette notion fondamentale et avec les conséquences qui en résultent.

Je n'ai pas craint de consacrer souvent quelques pages au rappel des notions générales de Physique qui me paraissaient de nature à éclaircir mon sujet. En revanche, j'ai laissé de côté, ou réduit à quelques indications sommaires, les questions purement techniques, dessins, projections, calculs, détails expérimentaux, etc., qui n'ont pas grande utilité pour le commençant, et risquent, au contraire, de le rebuter en lui faisant perdre de vue ce qui offre un caractère plus général et un réel intérêt.

J'ai tâché d'alléger le texte principal de l'ouvrage en rejetant autant que possible dans des paragraphes spéciaux marqués d'un astérisque, les démonstrations un peu longues, les compléments et les explications qu'il m'a semblé nécessaire ou préférable de conserver, mais sur lesquels le lecteur peut, sans inconvénient, se borner à jeter un coup d'œil en passant.

Les notes au bas des pages contiennent quelques remarques précisant la signification des énoncés du texte, quelques renseignements succincts sur des travaux dont l'étude aurait exigé des développements trop spéciaux ; on y trouvera, de plus, des indications bibliographiques, presque toutes de première main, fort incomplètes sans doute, mais cependant assez nombreuses pour faciliter des recherches ultérieures. J'ajouterai seulement que, pour être juste, j'aurais dû, presque à chaque page, citer les beaux Traités de M. Groth, de M. Mallard et de M. Liebisch.

Je n'ai abordé les théories relevant de la Physique mathématique proprement dite que dans la mesure où il le fallait absolument pour définir les constantes caractéristiques des phénomènes, et pour faire comprendre le sens général des recherches expérimentales. Seul, le chapitre relatif à la polarisation diélectrique a été traité d'une manière un peu moins abrégée, tout en restant élémentaire par les notations employées et par la disposition des paragraphes. Je me suis borné à marquer la place de certains sujets, tels que la réflexion cristalline par exemple, qui ne peuvent être exposés d'une manière suffisante sans des développements analytiques sortant absolument du cadre que je m'étais tracé.

Je tiens à remercier ici tous ceux de mes collègues et de mes amis qui m'ont aidé de diverses manières, en particulier M. le prof. Ch. Cailler, qui a bien voulu revoir les épreuves d'une partie des calculs, et M. le prof. L. Duparc, à qui j'ai eu souvent recours et qui n'a cessé de suivre mon travail avec le plus obligeant intérêt.

Genève, 1^{er} décembre 1892.

Ch. SORET.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CRISTALLOGRAPHIE GÉOMÉTRIQUE

Chapitre I^{er}. De la symétrie des cristaux.

1. Cristallisation. — 2. Structure intérieure des cristaux. Homogénéité et anisotropie. — 3, 4. Formes géométriques des cristaux. Constance des angles. — 5. Éléments de symétrie des polyèdres cristallins. — 6. Centre de symétrie. — 7. Plans de symétrie. — 8. Axes de symétrie de divers ordres. — 9. Systèmes de symétrie. — 10. Formes simples et formes composées. — 11, 12, 13. Symétrie de la structure intérieure des cristaux. — 14, 15. Loi de symétrie. — 16. Systèmes cristallographiques..... Pages 3 à 18

Chapitre II. Des formes holoédriques.

SYSTÈME CUBIQUE.

17. Symétrie du système cubique. — 18. Formes simples holoédriques du système cubique. — 19. Formes composées du système cubique..... Pages 19 à 27

SYSTÈME QUADRATIQUE.

20. Symétrie du système quadratique. — 21. Formes simples du système quadratique. — 22. Formes composées du système quadratique. Pages 28 à 33

SYSTÈME HEXAGONAL.

23. Symétrie du système hexagonal. — 24. Formes simples holoédriques du système hexagonal. — 25. Formes composées du système hexagonal..... Pages 33 à 37

SYSTÈME RHOMBIQUE.

26. Symétrie du système rhombique. — 27. Formes simples holoédri-

*

ques du système rhombique. — 28. Formes composées du système rhombique..... Pages 37 à 41

SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.

29. Symétrie du système clinorhombique. — 30. Formes simples du système clinorhombique..... Pages 41 à 44

SYSTÈME TRICLINIQUE.

31. Symétrie et formes du système triclinique..... Pages 44 à 45

Chapitre III. Loi de dérivation des formes secondaires.

32, 33. Loi de dérivation. — 34. Notation de Miller. — 35, 36, 37, 38, 39. Détermination des cristaux. — *40, *41, *42, *43, *44, *45. Choix des axes et nombre des inconnues dans les divers systèmes cristallographiques. — *46. Notation de Weiss. — *47. Notation de Naumann. — *48. Notation de Lévy. — *49. Tableau des formes simples des six systèmes cristallographiques et de leurs notations.... Pages 46 à 67

Chapitre IV. Symétrie géométrique et symétrie physique.

50. Relations entre la loi de dérivation et la symétrie cristallographique. — 51. Symétrie et syngonie. — *52. Centre de syngonie. — *53. Système triclinique. — *54, *55. Axes de syngonie. — *56. Axes binaires. — *57. Système clinorhombique. — *58. Système rhombique. — *59. Cas d'un seul axe d'ordre supérieur à deux. — *60. Système quadratique. — *61, *62. Système hexagonal. — *63. Cas de plusieurs axes d'ordre supérieur à deux. — *64. Axes ternaires. — *65. Axes quaternaires. — *66. Axes ternaires. — 67. Phénomène général de la méroédrie. — 68, 69, *70. Des méroédries possibles. — 71. Remarque.

Pages 68 à 87

Chapitre V. Des formes méroédriques.

72. Polyèdres hémicédriques conjugués. — 73. Divers genres de méroédries..... Pages 88 à 91

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME CUBIQUE.

74. Remarques générales. — 75. Hémicédrie plagiédrique (énantiomorphe). — 76. Hémicédrie pentagonale (paramorphie). — 77. Hémicédrie tétraédrique (antimorphie). — 78. Tétartoédrie (énantiomorphie).

Pages 91 à 103

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME QUADRATIQUE.

79. Remarques générales..... Pages 103 à 104

1^o Méroédries principales.

*80. Hémicédrie trapézoédrique (énantiomorphe). — *81. Hémicédrie

pyramidale (paramorphie). — *82. Hémiédrie hémimorphe. — *83. Tétartoédrie hémimorphe ou pyramidale (énantiomorphie)..	Pages 104 à 106
2° <i>Mérocédries sphénoïdales.</i>	
84. Hémiédrie sphénoïdale (antimorphie). — *85. Tétartoédrie sphénoïdale.....	Pages 107 à 108
MÉROCÉDRIES DU SYSTÈME HEXAGONAL.	
86. Remarques générales.....	Page 109
1° <i>Mérocédries principales.</i>	
*87. Hémiédrie trapézoédrique (énantiomorphie). — *88. Hémiédrie pyramidale (paramorphie). — *89. Hémiédrie hémimorphe. — *90. Tétartoédrie hémimorphe ou pyramidale (énantiomorphie)..	Pages 110 à 112
2° <i>Mérocédries sphénoïdales.</i>	
*91. Hémiédrie sphénoïdale (antimorphie). — *92. Tétartoédrie sphénoïdale (antimorphie).....	Pages 112 à 114
3° <i>Mérocédries rhomboédriques.</i>	
93. Hémiédrie rhomboédrique (paramorphie). — 94. Tétartoédrie trapézoédrique (énantiomorphie). — *95. Tétartoédrie rhomboédrique (paramorphie). — 96. Tétartoédrie rhomboédrique hémimorphe. — *97. Ogdoédrie (énantiomorphie).....	Pages 114 à 121
MÉROCÉDRIES DU SYSTÈME RHOMBIQUE.	
98. Hémiédrie sphénoïdale (énantiomorphie). — 99. Hémiédrie hémimorphe.....	Pages 122 à 123
MÉROCÉDRIES DU SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.	
100. Hémiédrie hémimorphe (énantiomorphie). — *101. Hémiédrie antimorphe.....	Pages 124 à 125
MÉROCÉDRIE DU SYSTÈME TRICLINIQUE.	
*102. Hémiédrie énantiomorphe.....	Page 125
*103. Tableau des systèmes de symétrie holoédriques et mérocédriques. — 104. Formes composées mérocédriques. — 105. Structures hémicédriques conjuguées.....	Pages 126 à 131

Chapitre VI. Groupements et imperfections des cristaux.

106. Groupements accidentels. — 107. Groupements parallèles. — 108, 109, 110, 111, 112. Macles. — 113, 114. Macles multiples, mimésie. — 115. Groupements de cristaux de natures différentes. — 116, 117. Imperfections des cristaux.....	Pages 132 à 142
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------

Chapitre VII. Mesure des angles des cristaux.

118. Définitions. — 119. Goniomètre de Carangeot. — 120. Gonio-

mètre de Wollaston. — 121. Goniomètres de Mitscherlich et de M. Mallard. — 122. Goniomètre de Babinet. Pages 143 à 151

DEUXIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS MOLÉCULAIRES

Chapitre VIII. Théories de la structure des cristaux.

123. Théorie de Hatty. — 124, 125, 126. Réseaux parallépipédiques de points analogues. — 127. Théorie de Bravais. — 128, *129. Les quatorze modes de Bravais. — 130. Influence de la symétrie des molécules. — 131, *132. Théorie de M. Sohncke. — *133. Extension de la théorie de M. Sohncke. — *134. Théories générales de M. de Fedorow et de M. Schönflies. — *135. Remarques. Pages 155 à 180

Chapitre IX. Notions de cristallographie chimique.

FORMATION DES CRISTAUX.

136. Cristallisation par fusion. — 137. Cristallisation par sublimation. — 138. Cristallisation par dissolution. — 139. Cristallisation par réaction chimique. — 140. Cristallisation par électrolyse. — 141. Cristallisation par transformations moléculaires. — 142. Influence du milieu ambiant sur le développement des formes cristallines. — 143. Cristallisations imparfaites Pages 181 à 187

POLYMORPHISME.

144. Exemples de corps polymorphes. — 145. Considérations théoriques. Pages 188 à 192

ISOMORPHISME.

146. Faits généraux. — 147. Analogie des formes cristallines dans les corps isomorphes. — 148. Analogie chimique des corps isomorphes. — 149. Morphotropie. — 150. Cristallisation simultanée des corps isomorphes. — 151. Volumes moléculaires des corps isomorphes.

Pages 192 à 200

Chapitre X. De la cohésion.

152, 153. Principes fondamentaux de la Cristallographie physique.

Pages 201 à 203

RÉSISTANCE AUX ACTIONS MÉCANIQUES. TÉNACITÉ.

154. Ténacité. Clivages. — 155. Lois du clivage. — *156. Théorie du

clivage. — 157. Plans de séparation. — 158. Plans de choc. — 159.
Plans de glissement Pages 203 à 211

DURETÉ.

160. Échelles de dureté. — 161. Scléromètres. — 162. Résultats expérimentaux. — *163, *164. Essais de théorie..... Pages 211 à 219

RÉSISTANCE AUX ACTIONS CHIMIQUES.

165, 166, 167. Figures de corrosion. — 168. Figures d'efflorescence ou de décomposition. — *169. Développement des faces cristallines.
Pages 219 à 225

Chapitre XI. De l'élasticité.

170. Forces élastiques. — 171. Composantes de la force élastique. — 172. Relations générales entre les composantes X_x ... X_y ... et la déformation. — 173, *174. Influence de la symétrie cristalline. — 175. Modules d'élasticité. — 176. Détermination expérimentale des modules d'élasticité. — 177. Mesures de flexion et de torsion. — 178. Expériences de Savart. — 179. Déformation sous une pression uniforme..... Pages 226 à 238

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS OPTIQUES

Chapitre XII. Du mouvement vibratoire.

180. Introduction. — 181. Mouvement vibratoire d'un point. — 182, *183. Composition de deux mouvements vibratoires rectilignes, de même période et perpendiculaires l'un à l'autre. — 184. Propagation des mouvements vibratoires. — 185. Longueur d'onde. — 186, 187. Vitesse de propagation. — 188. Propagation dans un milieu indéfini. Surface de l'onde. — 189, 190. Superposition des mouvements vibratoires. — 191. Interférences. — 192. Franges de Young. — 193. Mesure des longueurs d'onde des vibrations lumineuses..... Pages 241 à 259

Chapitre XIII. De la construction d'Huygens.

194. Principe d'Huygens. — 195. Chemin de plus prompte arrivée. — *196. Grandeur des zones élémentaires. — *197. Effets des diverses zones élémentaires. — *198. Généralisation du théorème. — *199, *200. Application au phénomène de la réflexion. — *201, *202. Application à la réfraction simple. — *203. Phénomènes de diffraction. — 204. Propa-

gation d'une onde plane dans un milieu homogène quelconque. — 205. Direction du rayon lumineux. — 206. Construction d'Huygens.

Pages 260 à 275

Chapitre XIV. Transversalité des vibrations lumineuses.

207. Hypothèse de Fresnel. — 208. Polarisation de la lumière. — 209. Lumière naturelle. — 210. Définition expérimentale du plan de polarisation. — 211. Conséquences qui résultent de la transversalité des vibrations. — 212. Double réfraction. — 213. Lois des rayons. Ellipsoïde direct. — 214. Lois des ondes planes. Ellipsoïde inverse. Pages 276 à 284

Chapitre XV. De la réfraction simple.

215. Surface de l'onde. — 216, 217. Application de la construction d'Huygens. — 218. Dispersion. — 219. Remarque générale.

Pages 285 à 289

Chapitre XVI. De la double réfraction à un axe optique.

220. Définitions. — 221, 222. Faits généraux. — 223. Surface de l'onde. — 224. Application de la construction d'Huygens. — 225. Cas particuliers. — 226. Cas où le plan d'incidence est parallèle à l'axe. — 227. Cas où le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe. — 228. Dispersion..... Pages 290 à 299

Chapitre XVII. De la double réfraction à deux axes optiques.

229. Faits généraux. — 230, 231. La surface de l'onde. — 232. Application de la construction d'Huygens. — 233. Réfraction conique intérieure. — 234. Réfraction conique extérieure. — 235. Signe des cristaux biaxes. — 236. Polarisation des rayons. — 237. Dispersion. — 238. Dispersion dans le système rhombique. — 239. Dispersion dans le système clinorhombique. — 240. Dispersion dans le système triclinique.

Pages 300 à 310

Chapitre XVIII. De la réflexion totale.

241. Introduction. — 242. Application de la construction d'Huygens. — 243. Réflexion totale à la surface des corps monoréfringents. — 244, 245. Réflexion totale à la surface des cristaux uniaxes. — 246. Réflexion totale à la surface des cristaux à deux axes. — 247, 248, 249. Mesure des indices de réfraction par la réflexion totale. — 250. Réfractomètre de M. F. Kohlrausch. — 251. Réfractomètre de M. C. Soret. — 252. Réfractomètre de M. Pulfrich. — 253. Réfractomètre de M. Abbe. — *254. Remarque..... Pages 311 à 333

Chapitre XIX. Réfraction à travers les prismes.

255. Réfraction des ondes planes. — 256. Réfraction dans un prisme. — 257. Mesures spectrométriques. — 258. Formules de prisme. — 259. Cas d'un prisme monoréfringent observé sous l'incidence normale. — 260. Cas d'un prisme monoréfringent observé au minimum de déviation. — 261. Procédé de l'incidence normale dans le cas des cristaux à un axe. — 262. Procédé de l'incidence normale dans le cas des cristaux à deux axes. — 263. Procédé de la déviation minimum dans le cas des corps biréfringents. — 264. Étude de la dispersion. — 265. Spectre ultra-violet. — 266. Spectre intra-rouge. — 267. Influence de la température. — 268. Valeurs de quelques indices de réfraction..... Pages 334 à 352

Chapitre XX. Polarisation chromatique.

APPAREILS DE POLARISATION.

269. Polariseurs par double réfraction. — 270. Expérience des deux spaths. — 271. Prisme biréfringent. — 272. Prisme de Nicol. — 273. Polariseurs par absorption. — 274. Polariseurs par réflexion. — 275. Appareils de polarisation. — 276. Pince à tourmalines. — 277. Microscope polarisant à lumière parallèle. — 278. Microscope polarisant à lumière convergente..... Pages 353 à 361

OBSERVATION EN LUMIÈRE PARALLÈLE.

279. Extinction en lumière parallèle. — 280. Effet d'une lame monoréfringente. — 281. Effet d'une lame biréfringente. — 282. Effet d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal uniaxe. — 283. Application aux déterminations cristallographiques. — 284. Calcul de l'intensité de la lumière rétablie. — 285. Discussion de la formule. Lignes d'extinction. — 286. Coloration de la lumière transmise. — *287. Rotation de la lame cristalline seule. — *288. Rotation de l'analyseur seul. — 289. Mesure de la biréfringence par le compensateur de M. Michel Lévy. — 290. Mesure de la biréfringence par le compensateur de Babinet. — 291. Spectres cannelés. — 292. Procédés pour reconnaître de faibles biréfringences. — 293. Stauroscopes. — 294. Détermination des lignes d'extinction.

Pages 361 à 377

OBSERVATION EN LUMIÈRE CONVERGENTE.

295. Figure produite en lumière convergente par une lame taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal uniaxe. — *296. Détermination du signe des uniaxes. — 297. Figures produites par les cristaux à deux axes en lumière convergente monochromatique. — 298, 299. Mesure de l'angle des axes optiques. — *300. Détermination du signe des cristaux biaxes. — 301. Observation en lumière blanche. — 302. Dispersion dans les cristaux rhombiques. — 303. Dispersion dans les cristaux clinorhombiques. — 304. Dispersion dans les cristaux tricliniques. Pages 377 à 390

PHÉNOMÈNES DIVERS.

305. Double réfraction accidentelle. — 306, 307, 308, *309. Modifications apportées par les actions mécaniques à la double réfraction des cristaux. — 310. Anomalies optiques Pages 390 à 398

Chapitre XXI. Polarisation rotatoire.

FAITS GÉNÉRAUX.

311. Découverte de la polarisation rotatoire dans le quartz. — 312. Lois de Biot. — 313. Phénomènes observés en lumière blanche. — 314. Teinte sensible. — 315. Mesure des rotations. — 316. Appareils à pénombre. — 317. Méthode de Broch. — 318. Interprétation de Fresnel. — 319. Vérification expérimentale de la double réfraction circulaire du quartz. — 320. Conditions de possibilité de la polarisation rotatoire. — 321. Caractère fondamental de la polarisation rotatoire naturelle. — 322, 323. Énantiomorphie des milieux actifs. — 324. Remarque. — 325. Les trois cas possibles de structures dissymétriques..... Pages 399 à 413

DISSYMMÉTRIE MOLÉCULAIRE.

326. Polarisation rotatoire des liquides. — 327. Symétrie des liquides actifs. — 328. Dissymétrie et pouvoir rotatoire dans les acides tartriques. — 329. Dissymétrie et pouvoir rotatoire des acides maliques. — 330. Carbone asymétrique. — 331. Réactions dissymétriques. — 332, 333. Dissymétrie moléculaire des cristaux Pages 414 à 429

DISSYMETRIE NON MOLÉCULAIRE DES CRISTAUX.

334. Caractères généraux. — 335. Cristaux énantiomorphes du système cubique. — 336. Cristaux énantiomorphes du système quadratique. — 337. Cristaux énantiomorphes du système hexagonal. — 338. Cinabre et quartz. — 339. Polarisation elliptique du quartz. — 340. Forme de la surface de l'onde dans le quartz. — 341. Figure produite en lumière convergente par une lame de quartz perpendiculaire à l'axe. — 342. Cristaux énantiomorphes à deux axes. — *343. Remarque. — 344. Polarisation rotatoire dans les groupements cristallins..... Pages 429 à 438

Chapitre XXII. De l'absorption.

345. Faits généraux. — 346. Absorption dans les corps monoréfringents. — 347. Absorption dans les cristaux biréfringents. — 348. Procédés d'étude. — 349. Absorption dans les cristaux à un axe. — 350, 351. Absorption dans les cristaux à deux axes. — 352. Pléochroïsme artificiel. — 353. Phénomène des houppes Pages 439 à 447

Chapitre XXIII. De la réflexion.

354. Réflexion vitreuse. — 355. Formules de Fresnel. — 356. Polaris

sation elliptique du rayon réfléchi aux environs de l'angle de polarisation. — 357. Réflexion métallique. — 358. Corps à couleurs superficielles. — 359. Réflexion cristalline..... Pages 448 à 456

QUATRIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS THERMIQUES

Chapitre XXIV. De la dilatation par la chaleur.

360. Dilatation des corps isotropes. — 361, 362. Détermination du coefficient de dilatation cubique. — 363. Détermination directe du coefficient de dilatation linéaire. — 364. Méthode de Pfaff. — 365. Méthode de M. Fizeau. — 366. Dilatation des corps cristallisés. — 367. Influence de la symétrie. — 368. Dilatation cubique des corps cristallisés. — 369, 370. Détermination expérimentale des axes thermiques et des dilata-tions principales. — *371. Démonstration des formules. — 372. Constantes thermiques de quelques corps. — 373. Remarque de M. Schrauf.

Pages 459 à 477

Chapitre XXV. De la conductibilité pour la chaleur.

374. Flux de chaleur. — 375. Surfaces isothermes. — 376, 377. Coeffi-cient de conductibilité intérieure dans les corps isotropes. — 378. Propa-gation de la chaleur tout autour d'un point dans un milieu isotrope indéfini. — 379. Coefficients de conductibilité intérieure dans les corps cristallisés. — 380. Conductibilité normale. — 381. Axes de conducti-bilité. — 382. Conductibilité linéaire. — 383. Ellipsoïde principal. — 384. Influence de la symétrie cristalline. — 385, 386, 387. Cas où les coefficients rotationnels sont nuls. — 388. Conductibilité extérieure. — 389, 390, 391. Méthode expérimentale de Senarmont. — 392. Mesure des conductibilités normales. — 393. Expériences de M. Tuchschnid. — 394. Expériences de M. Bäckström. — *395, *396, *397. Cas général où les coefficients rotationnels ne seraient pas nuls. — *398. Conductibilité uni-latérale dans les méroèdres non centrés..... Pages 478 à 504

CINQUIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES

Chapitre XXVI. Des actions électriques.

399. Loi de Coulomb. — 400. Force résultante. — 401, 402. Potentiel électrique. — 403. Flux de force. — 404. Théorème de Gauss. — 405. Tubes de force. — 406. Équilibre des conducteurs. — 407. Force résultante au voisinage d'un conducteur. — 408. Tension électrique. — 409. Éléments correspondants Pages 507 à 520

Chapitre XXVII. De la polarisation diélectrique.

NOTIONS GÉNÉRALES.

410. Électrisation par influence. — 411. Influence dans les diélectriques. — 412. Intensité d'électrisation ou moment diélectrique. — 413. Coefficient d'électrisation ou susceptibilité électrique. — 414. Constante diélectrique. — *415. Force résultante produite par une masse électrique unique dans un diélectrique isotrope polarisable. — *416, *417. Action réciproque de deux masses électriques dans un diélectrique isotrope polarisable..... Pages 521 à 534

CONDENSATEURS PLANS.

418. Condensateur plan à diélectrique isotrope non polarisable. — 419. Condensateur plan à diélectrique isotrope polarisable. — 420. Condensateur plan à diélectrique anisotrope. — 421. Rôle de la symétrie cristalline. — 422. Charge et décharge du condensateur. — 423. Recherches de M. J. Curie. — *424, *425, *426, *427. Théorie du condensateur plan à diélectrique anisotrope..... Pages 534 à 546

PHÉNOMÈNES D'ORIENTATION.

428. Polarisation d'une sphère dans un champ électrique uniforme. — 429, 430. Orientation d'une sphère cristallisée dans un champ uniforme. — 431. Influence de la forme. — 432. Influence de la conductibilité. — 433. Expériences de M. Knoblauch. — 434. Expériences de M. Root. — *435, *436. Calcul de l'intensité d'électrisation d'une sphère cristalline. — *437. Ellipsoïde d'orientation. — *438. Moment du couple directeur. Pages 546 à 557

PHÉNOMÈNES D'ATTRACTION.

439. Attraction d'une sphère diélectrique dans un champ à peu près uniforme. — 440. Expériences de M. Boltzmann Pages 557 à 559

INFLUENCE DU DIÉLECTRIQUE AMBIANT.

441. Susceptibilité apparente. — *442. Calcul de la susceptibilité apparente. — *443. Énergie d'une sphère cristalline polarisable placée dans un diélectrique polarisable. Pages 559 à 565

RELATION DE MAXWELL.

444. Induction et déplacement électrique de Maxwell. — 445. Constantes diélectriques et indices de réfraction. — 446. Résultats expérimentaux. Pages 565 à 571

Chapitre XXVIII. De la conductibilité électrique.

447. Cas des corps bons conducteurs. — 448. Conducteurs isotropes. — 449. Conducteurs cristallisés. — 450. Recherches expérimentales. — 451, 452. Phénomènes de conductibilité dans les diélectriques. — 453. Conductibilité superficielle des diélectriques cristallisés. Pages 572 à 579

Chapitre XXIX. Des propriétés magnétiques des cristaux.

454. Actions magnétiques. — 455. Intensité d'aimantation. — 456. Susceptibilité et perméabilité magnétiques. — 457. Induction magnétique. — 458. Corps cristallisés. — 459. Orientation d'une sphère cristallisée dans un champ uniforme. — 460. Corps magnétiques et diamagnétiques. 461, 462, 463. Recherches expérimentales. — 464. Attractions et répulsions dans un champ variable. — 465. Mesure absolue des susceptibilités. — 466. Influence du magnétisme sur la cristallisation. — 467. Pouvoir rotatoire magnétique Pages 580 à 594

Chapitre XXX. De la thermoélectricité.

468. Forces électromotrices thermoélectriques. — 469. Phénomènes thermiques réversibles. — 470. Thermoélectricité des cristaux. — 471, 472, 473. Recherches expérimentales. — *474. Thermoélectricité de la pyrite et de la cobaltine. Pages 595 à 605

Chapitre XXXI. Pyroélectricité et piézoélectricité.

PYROÉLECTRICITÉ.

475. Pyroélectricité de la tourmaline — 476. Recherches quantitatives de Gaugain et de M. Riecke. — 477. Méthode expérimentale de Riess, de Rose et de M. Hankel. — 478. Méthode expérimentale de M. Kundt. — 479. Méthode expérimentale de M. Friedel. — 480. Cas simples principaux. — 481. Conditions de symétrie de la pyroélectricité polaire produite par une variation de température homogène. — 482. Cristaux hémimorphes pyroélectriques. — 483. Conditions de symétrie de la pyroélectricité axiale.

— 484. Cristaux pyroélectriques à plusieurs axes. — 485. Pyroélectri-
cité des cristaux conducteurs. — 486. Relation de la pyroélectricité
polaire et des formes cristallines..... Pages 606 à 626

PIÉZOÉLECTRICITÉ.

487. Faits généraux. — 488. Conditions de symétrie de la piézoélectri-
cité. — 489. Cristaux piézoélectriques. — 490, 491. Déterminations
quantitatives. — 492. Quartz piézoélectrique employé comme instrument
de mesures. — 493. Déformation électrique des cristaux. Principe de
M. Lippmann. — 494, 495. Déformation électrique du quartz. — 496.
Mesure optique des déformations électriques du quartz. Pages 626 à 638

RECHERCHES THÉORIQUES.

497. Théorie de Sir W. Thomson. — 498. Théorie de la piézoélectricité.
— *499. Modules piézoélectriques du quartz et de la tourmaline. — 500.
Théorie piézoélectrique de la pyroélectricité. — 501, 502. Théories thermo-
électriques de la pyroélectricité Pages 638 à 646

PREMIÈRE PARTIE



CRISTALLOGRAPHIE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER

DE LA SYMÉTRIE DES CRISTAUX

1. Cristallisation. — La plupart des composés chimiques définis sont susceptibles de *cristalliser* ; lorsqu'ils prennent l'état solide dans des conditions telles que leurs molécules soient libres d'obéir à leurs actions réciproques, ils acquièrent une structure régulière qui est complètement déterminée pour chacun d'eux, et qui se traduit extérieurement par des formes géométriques également caractéristiques. Cette structure représente l'état d'équilibre stable et complet à l'égard des forces moléculaires. On peut dire qu'un cristal est un corps solide à l'état parfait.

2. Structure intérieure des cristaux. Homogénéité et anisotropie. — Un cristal, supposé parfait, est d'abord un corps solide *homogène* ; sa nature et sa structure sont identiquement les mêmes en tous ses points. Mais cette homogénéité est bien différente de celle que possèdent les corps solides non cristallisés. Les métaux, les verres, beaucoup de corps solidifiés après fusion, peuvent aussi être homogènes, sans que cependant ils soient assimilables à des cristaux.

Pour mieux faire comprendre cette distinction qui est à la base de toute la Cristallographie, nous prendrons un exemple grossier.

Considérons d'abord une rame de papier blanc dont les feuilles, toutes identiques entre elles, et pressées les unes contre les autres, peuvent être regardées comme formant un tout homogène, puisque leur nature et leur disposition sont les mêmes partout. Cette rame de papier n'a pas la même structure dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Tandis qu'elle se partagera facilement suivant un plan horizontal, parallèlement aux feuilles, il faudra un effort énorme pour la rompre dans une direction perpendiculaire. Une aiguille placée verticalement dans son intérieur entamera des centaines de feuilles, placée horizontalement elle n'en entamera qu'une ou deux. La constitution de cette rame de papier, tout en étant la même en chaque point, varie donc d'une direction à l'autre autour d'un même point; les différentes directions ont des significations différentes, et l'on exprime ce caractère en disant que le corps est homogène, mais *anisotrope*.

Si nous remplaçons au contraire notre rame composée de feuillets superposés par une masse égale de pâte de papier non divisée, nous aurons un corps qui, non seulement sera homogène et aura partout la même constitution, mais qui, de plus, sera formé de la même manière dans toutes les directions; rien ne distinguera plus les directions verticales des directions horizontales ou des directions obliques; on dira alors que cette masse est *isotrope*.

Ce second cas nous donne une image grossière d'un corps homogène non cristallisé, tel qu'un bloc de verre ou de métal obtenu dans des conditions convenables; les liquides ont le même caractère et sont aussi des corps isotropes.

Le premier cas, celui des feuillets superposés, peut au con-

traire nous représenter en quelque mesure le caractère général et fondamental de la structure cristalline. *Nous devons considérer un cristal comme un corps homogène anisotrope, dont la structure est la même en chaque point, reste la même suivant chaque direction donnée, mais varie d'une direction à l'autre autour d'un même point.*

Toutes les propriétés physiques, lesquelles résultent de la structure, auront naturellement le même caractère; c'est ainsi que toutes les parties d'un cristal agiront de la même manière sur un rayon de lumière qui les traversera dans une même direction, mais cette action pourra varier avec la direction du rayon; toutes les parties d'un cristal offriront la même résistance à la rupture dans une direction déterminée, mais la ténacité pourra changer d'une direction à l'autre.

3. Formes géométriques des cristaux. Constance des angles. — Prenons un composé bien connu, le chlorure de sodium ou sel marin; par l'évaporation lente de sa dissolution dans l'eau, on l'obtient à l'état cristallisé, et ses cristaux, loin d'être limités par des surfaces quelconques, ont toujours la forme de blocs cubiques, ou des formes décomposables en blocs cubiques. Nous n'entendons pas dire par là que ces morceaux de sel soient toujours des cubes géométriques parfaitement réguliers, ayant leurs six faces égales ainsi que leurs douze arêtes; mais toujours ils sont terminés par des faces planes, parallèles aux faces d'un cube.

Prenons un autre minéral, le quartz ou cristal de roche, qui est de la silice à l'état cristallisé. Le quartz se présente sous la forme de prismes hexagonaux réguliers terminés par des pyramides hexagonales. Et ici encore, en parlant de prismes hexagonaux réguliers, nous ne voulons pas dire que les faces aient nécessairement la même étendue comme dans un prisme hexa-

gonal régulier géométrique, mais seulement qu'elles forment toujours entre elles des angles de 120° et qu'elles sont ainsi parallèles aux faces d'un prisme hexagonal régulier géométrique.

Cette propriété, que nous venons d'observer dans le sel gemme et dans le quartz, est une propriété générale des cristaux. Toujours *les cristaux affectent des formes géométriques régulières, définies pour chaque corps par un certain caractère de symétrie*. Cette symétrie cristallographique ne se manifeste pas dans les dimensions des faces planes qui limitent ces polyèdres, mais seulement dans leurs directions.

Ainsi, dans le quartz dont nous parlions tout à l'heure, nous

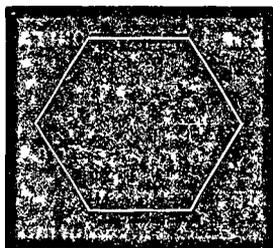


Fig. 1.

pouvons rencontrer des cristaux d'apparences très différentes, tels par exemple, que la section droite du prisme hexagonal ait une des formes représentées par les figures 1, 2, 3 et 4. Les faces de ces cristaux ont des dimensions très inégales, mais elles sont toujours parallèles aux faces d'un prisme hexagonal régulier.

Nous pouvons toujours considérer ces prismes comme résultant d'un prisme hexagonal régulier géométrique, dont les

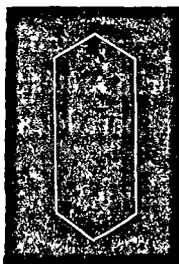


Fig. 2.

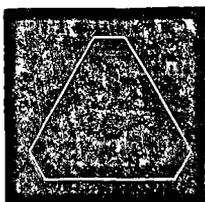


Fig. 3.

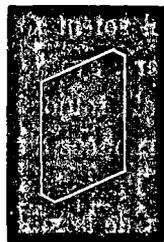


Fig. 4.

faces se seraient déplacées d'une quantité arbitraire et variable d'un échantillon à l'autre, en restant parallèles à leurs directions primitives.

Les formes cristallines sont donc déterminées seulement par les angles que les faces comprennent entre elles et qui se retrouvent les mêmes sur tous les cristaux de même nature¹.

4. Cette particularité des formes cristallines s'explique facilement. Un cristal possède, avons-nous dit, une structure différente dans les différentes directions; on comprend dès lors qu'une face puisse se former plus facilement dans une direction que dans une autre; mais le cristal ayant partout même structure, il n'y a pas de raison pour que cette face se forme en un point plutôt qu'en un autre. Tandis que sa direction est fixée par la structure intime du cristal, sa position absolue ne dépend au contraire que des conditions accidentelles dans lesquelles le cristal s'est développé.

Supposons que dans une solution saturée de sel marin, par exemple, nous suspendions un cristal de sel déjà formé, et admettons, pour fixer les idées, que ce cristal ait la forme d'un cube géométrique parfait (fig. 5). Lorsque le liquide s'évaporerait, les molécules de chlorure de sodium viendraient successivement se déposer par couches parallèles sur toutes les faces du cube qui sont en contact avec la solution; le cristal s'accroîtra donc et, s'accroissant également dans toutes les directions, il gardera sa forme cubique parfaite.

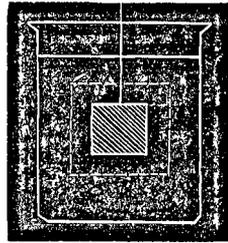


Fig. 5.

Supposons, d'autre part, que le même cristal soit plongé

¹ D'après MARX, *Geschichte der Krystallkunde*, Carlsruhe 1825, la découverte de la loi de la constance des angles doit être attribuée à NICOLAS STENO, *De solido intra solidum naturaliter contento*, Florence 1669. Cette loi, bien que confirmée par les recherches d'ÉRASME BARTHOLIN, *Experimenta crystalli Islandici*, Amsterdam 1670, et de HUYGENS, *Traité de la Lumière*, Leyde 1690, sur la calcite; de LÆWENHOEK, *Arcana naturæ detecta*, Delft 1695, sur le gypse, n'était pas connue ou pas admise généralement à la fin du siècle dernier. Elle

dans la même solution, mais qu'au lieu d'y être suspendu, il repose simplement au fond du vase (fig. 6). Sa face inférieure étant protégée contre l'action du liquide par la paroi sur laquelle elle s'appuie, et le dépôt des molécules s'effectuant comme précédemment sur les autres faces, il est clair que le cristal croîtra deux fois plus vite dans le sens horizontal que dans le sens vertical, et qu'il perdra rapidement la forme d'un cube parfait pour prendre celle d'une table car-

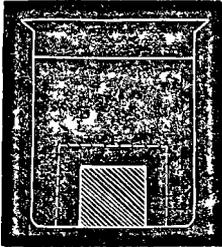


Fig. 6.

rée aplatie. Le rapport des arêtes verticales et horizontales de cette table, le déplacement parallèle des faces horizontales, variera suivant que le cristal sera resté plus ou moins longtemps dans cette position.

5. Éléments de symétrie des polyèdres cristallins. —

Puisque les formes polyédriques, variables dans les dimensions de leurs faces et de leurs arêtes, qui se rencontrent sur divers cristaux d'une même substance, peuvent toujours être considérées comme résultant du déplacement parallèle des faces d'un même polyèdre géométrique régulier, nous pourrions faire constamment abstraction de ce déplacement accidentel, et considérer seulement le polyèdre géométrique qui possède, avec une forme complètement déterminée, tous les caractères communs aux polyèdres cristallographiques correspondants. Ainsi, au lieu des divers prismes à six pans figurés pour le quartz au

fut prouvée définitivement par les nombreuses observations de ROMÉ DE LISLE. *Cristallographie*, Paris 1783.

Les angles des cristaux peuvent du reste subir des variations régulières, quoique faibles, par suite des variations de température, et aussi des variations accidentelles résultant de défauts de structure, dus en partie à l'action de la pesanteur. Voyez en particulier BAUDRIMONT, *C. R.* 1847, XXV, 668; F. PFAFF, *Sitzungsb. Erlangen*, 1878, 59; R. BRAUNS, *N. Jahrb.* 1887, I, 138.

§ 3, nous considérerons simplement le prisme hexagonal régulier de la géométrie qui a les mêmes angles.

Nous pourrions ensuite classer ces divers polyèdres en tenant compte de leurs éléments de symétrie, qui sont le *centre de symétrie*, les *plans de symétrie* et les *axes de symétrie*¹.

6. Centre de symétrie. — Un polyèdre quelconque est dit avoir un *centre de symétrie* en un point O (fig. 7), si toutes les droites que l'on peut mener par ce point rencontrent la surface du polyèdre à des distances égales de part et d'autre.

Il résulte de cette définition qu'un polyèdre centré a toujours ses faces parallèles deux à deux. Soient, en effet, deux droites quelconques AA' et BB', passant par le centre O, et rencontrant les deux mêmes faces CE et DF. D'après la définition du centre de symétrie, on a $OA = OA'$, $OB = OB'$. Les deux triangles AOB et A'OB', ayant un angle égal O compris entre deux côtés égaux, sont égaux. L'angle OAB est égal à l'angle OA'B', et, par suite, la droite AB est parallèle à la droite A'B'; il en serait de même quelles que fussent les lignes AA' et BB', et l'on en conclut que les faces CE et DF sont parallèles.

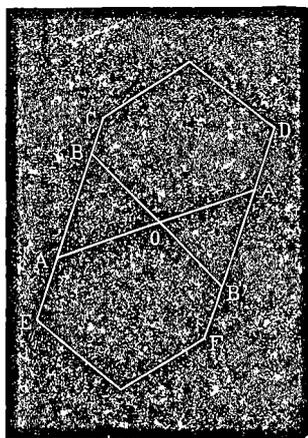


Fig. 7.

Si nous passons maintenant aux divers polyèdres cristallographiques qui résultent du polyèdre géométrique considéré par le déplacement arbitraire des diverses faces sans changement de direction, nous voyons que le centre de symétrie proprement

¹ BRAVAIS, *J. de Liouville*, 1849, XIV, 141.

dit disparaîtra en général; mais les faces, gardant leur orientation, continueront à être parallèles deux à deux. Nous conviendrons donc de considérer comme ayant un centre de symétrie les cristaux qui sont limités par des couples de faces parallèles deux à deux.

7. Plans de symétrie. — Dans un polyèdre quelconque, un plan MM (fig. 8) est un *plan de symétrie*, si toute droite AB

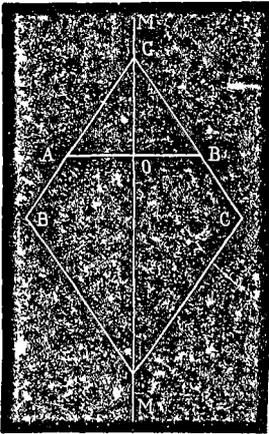


Fig. 8.

perpendiculaire à ce plan rencontre la surface du polyèdre à des distances égales de part et d'autre. On en déduit immédiatement l'égalité des triangles AGO , BGO , et l'on en conclut que les deux faces AG et BG sont également inclinées à gauche et à droite du plan MM .

Dans les polyèdres cristallographiques, il n'y aura plus en général de plan de symétrie proprement dit, mais les faces seront toujours deux à deux symétriquement inclinées sur la direction du plan de symétrie du polyèdre géométrique correspondant.

8. Axes de symétrie de divers ordres. — En général, lorsqu'on fait tourner une figure autour d'une droite quelconque, il faut lui faire faire un tour entier pour la ramener à occuper les mêmes points de l'espace. Mais pour certains polyèdres, si l'axe de rotation est convenablement choisi, il peut en être autrement, et la figure peut revenir occuper les mêmes points de l'espace après une rotation qui n'est qu'un sous-multiple de la circonférence entière.

Ainsi, en faisant tourner le prisme rectangulaire projeté en ABCD (fig. 9) d'une demi-circonférence autour d'un axe projeté en O, les côtés AB et CD changent simplement de place, chaque élément du polyèdre est remplacé par un élément semblable. On dit dans ce cas que l'axe de rotation O est un *axe de symétrie*, et le remplacement s'effectuant après une rotation d'une demi-circonférence on dit que cet axe est de l'ordre deux, ou plus simplement que c'est un *axe binaire*.

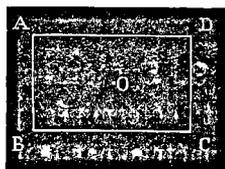


Fig. 9.

De même dans le prisme triangulaire équilatéral projeté en ABC (fig. 10), une rotation d'un tiers de circonférence amène chaque angle et chaque arête dans la position qu'occupaient d'abord un angle et une arête identiques, l'axe projeté en O est un axe de symétrie de troisième ordre, ou *ternaire*.

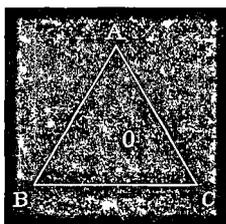


Fig. 10.

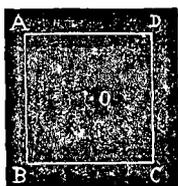


Fig. 11.

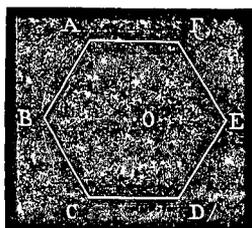


Fig. 12.

Dans le prisme carré ABCD (fig. 11), dans le prisme hexagonal ABCDEF (fig. 12), le remplacement de chaque élément par un élément identique se produit après une rotation d'un quart ou d'un sixième de tour autour de l'axe projeté en O, et cet axe est un axe de symétrie *quaternaire* ou *sénaire*.

Dans les polyèdres cristallographiques, un axe de symétrie binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire (ce sont les seuls que l'on ait à considérer) sera simplement la direction d'une ligne droite telle qu'en faisant tourner autour d'elle le cristal d'une

moitié, d'un tiers, d'un quart, ou d'un sixième de circonférence, on amène les diverses faces dans des positions parallèles à celles qui étaient primitivement occupées par des faces semblables.

9. Systèmes de symétrie. — La symétrie d'un polyèdre est déterminée par la présence ou l'absence d'un centre de symétrie, par le nombre et la position de ses plans de symétrie, par le nombre, la position et l'ordre de ses axes de symétrie.

L'ensemble des polyèdres qui offrent les mêmes éléments de symétrie, constitue un *Système de symétrie*.

Par exemple un prisme droit à base carrée (fig. 13) et une

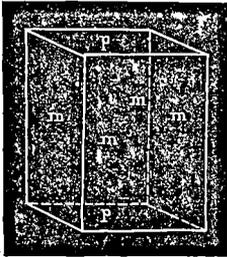


Fig. 13.

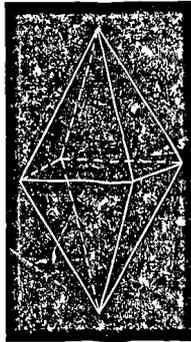


Fig. 14.

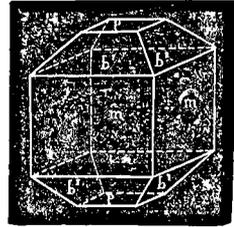


Fig. 15.

double pyramide à base carrée (fig. 14) ont la même symétrie et appartiennent au même système.

10. Formes simples et formes composées. — Parmi les polyèdres qui constituent un système de symétrie, on distingue des *formes simples* et des *formes composées*.

Les formes simples n'ont que des faces semblables ou de même espèce, dont le nombre et la position sont déterminés par la symétrie même du polyèdre. Ainsi la pyramide carrée (fig. 14) est formée de huit faces identiques entre elles, dont nous ne pourrions supprimer aucune sans détruire la symétrie.

Les formes simples peuvent d'ailleurs être *fermées* ou *ouvertes* ; c'est-à-dire limiter complètement un certain espace fermé de tous côtés, c'est le cas de notre double pyramide ; ou ne limiter l'espace que dans certaines directions, c'est le cas de la figure formée par les quatre faces latérales du prisme carré (fig. 13) lesquelles ne peuvent constituer à elles seules, quelque extension qu'on leur donne, qu'un tube ouvert aux deux bouts.

Les formes composées ont des faces de plusieurs espèces, et peuvent toujours être considérées comme résultant de la superposition de deux ou de plusieurs formes simples appartenant au même système. Ainsi notre prisme carré (fig. 13) est une forme composée résultant de la superposition de deux formes simples ouvertes, dont l'une comprend les quatre faces latérales m et dont l'autre se réduit aux deux bases p . La figure 15 représente une forme composée du même système résultant de la superposition de trois formes simples de même symétrie : 1° les quatre faces m ; 2° les deux bases p ; 3° les huit faces b' qui, à elles seules et convenablement prolongées, donneraient une double pyramide à base carrée.

11. Symétrie de la structure intérieure des cristaux. — Les diverses faces qui appartiennent à une même forme simple étant identiques dans toutes leurs propriétés, on doit en conclure qu'elles correspondent à des directions de structure identique dans le cristal.

Lorsqu'il y a un centre de symétrie, avons-nous vu, les faces doivent être parallèles deux à deux ; c'est dire que le cristal se forme exactement de la même manière sur le plan MM (fig. 16) qui le limite à droite et sur le plan NN qui le limite à gauche ;

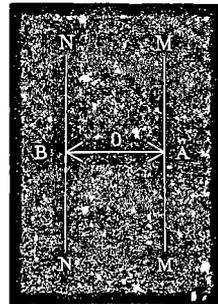


Fig. 16.

que le cristal se présente pour ainsi dire au milieu ambiant exactement de la même manière sur ces deux surfaces. Cela suppose que sa structure soit la même dans la direction OA et dans la direction OB, ou en d'autres termes, puisque le cristal est homogène, qu'il soit en tous ses points constitué de la même manière dans les deux sens opposés d'une même droite.

12. Nous pouvons figurer schématiquement une structure de ce genre, en supposant que le cristal soit formé de files de molécules disposées régulièrement sur des droites parallèles et équidistantes (fig. 17). Si ces molécules sont toutes sphériques, il sera indifférent de parcourir une de ces files dans un sens ou dans l'autre, le plan MM aura exactement la même

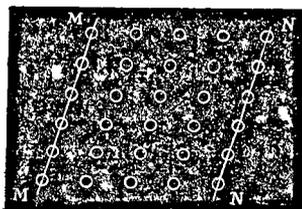


Fig. 17.

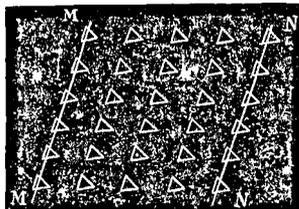


Fig. 18.

structure que le plan NN et ces deux faces parallèles n'auront aucune raison pour ne pas se former en même temps. Chaque molécule est un centre géométrique par rapport à la structure du milieu tout autour d'elle.

Supposons au contraire que les molécules, au lieu d'être sphériques, soient conformées différemment à leurs deux extrémités, qu'elles aient par exemple la forme représentée à la figure 18, tout en gardant les mêmes positions relatives que dans le premier cas. Il est clair que l'on n'est plus dans les mêmes conditions, lorsqu'on parcourt une rangée dans un sens ou dans l'autre, et que le plan NN sur lequel les molécules pré-

sentent leurs pointes, peut ne pas avoir les mêmes propriétés que le plan MM formé par leurs bases; ces deux plans pourront agir différemment sur le milieu dans lequel le cristal se forme, et ne prendront plus du tout nécessairement naissance en même temps.

13. Le même mode de représentation schématique nous permet de nous rendre compte de ce que signifient, pour la structure intérieure du cristal, les notions de plans et d'axes de symétrie.

Nous pouvons supposer (fig. 19) les molécules rangées de telle sorte que leurs distances réciproques soient les mêmes sur

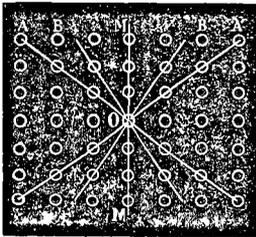


Fig. 19.

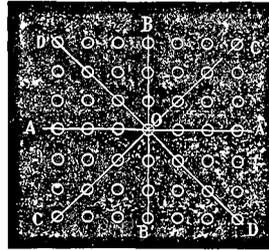


Fig. 20.

deux files quelconques telles que OA et OA', ou telles que OB et OB', également inclinées en sens inverse sur une même direction MM. La direction OA a alors la même structure que la direction OA', la direction OB la même structure que la direction OB'; si une face se forme suivant OA ou OB, il s'en formera en même temps une autre suivant OA' ou OB', la direction MM sera un plan de symétrie aussi bien de la forme extérieure que de la structure intérieure du cristal.

Dans la structure représentée par la figure 20, où les distances des molécules sont les mêmes sur les deux droites rectangulaires AA' et BB' une rotation de 90° autour d'une droite

perpendiculaire au plan de la figure et passant par une molécule quelconque O, amène OA sur OB, OB sur OA', OA' sur OB', OB' sur OA. Chaque direction est remplacée par une direction identique, chaque face du cristal par conséquent est remplacée par une face de même espèce. L'axe de rotation est un axe de symétrie quaternaire de la forme extérieure comme de la structure intérieure.

14. Loi de symétrie. — Nous devons donc considérer la symétrie d'un cristal comme appartenant aussi bien à sa structure intérieure qu'à ses formes extérieures. Celles-ci ne sont qu'une manifestation, une conséquence de la symétrie intérieure ; il en résulte que *sur un même cristal, ou sur les divers cristaux d'une même substance, il ne peut jamais se rencontrer que des formes simples ou composées appartenant à un même système de symétrie.*

15. Pour obtenir ces différentes formes, il est commode de choisir, dans chacun des systèmes de symétrie que l'on a à considérer, un polyèdre particulier que l'on prend comme type, comme *forme primitive* du système, puis d'en déduire les autres formes par des *troncatures*, obtenues en coupant par des plans convenables les angles et les arêtes de cette forme primitive.

Pour que la symétrie ne soit pas altérée, il faudra faire ces troncatures de manière que tous les éléments semblables, faces, angles, arêtes de la forme primitive soient modifiés en même temps et de la même manière¹, tandis que les éléments d'es-

¹ A. G. WERNER, *Von den äusserlichen Kennzeichen der Fossilien*, Leipzig 1774, paraît avoir employé le premier les troncatures et pointements pour faire dériver d'une même forme primitive les diverses formes qu'affectent les cristaux d'une même substance.

La loi de symétrie qui détermine le nombre et la position de ces troncatures,

pièces différentes seront modifiés indépendamment les uns des autres.

16. Systèmes cristallographiques. — Les systèmes de symétrie qui ont été observés dans les cristaux, ou qui paraissent possibles sont assez nombreux. On en distingue trente-deux. Toutefois, pour éviter la confusion résultant de ce que beaucoup de formes simples sont compatibles à la fois avec plusieurs systèmes, il est utile de rattacher d'abord les polyèdres cristallographiques à six systèmes principaux, auxquels s'applique spécialement le nom de *Systèmes cristallographiques*¹. Les formes qui appartiennent réellement à ces six systèmes, et se déduisent de leurs formes primitives par l'application complète et rigoureuse de la loi énoncée à la fin du paragraphe précé-

a été exprimée d'une manière nette et complète par HAÛY, *Traité de minéralogie*, Paris 1801, I, 113; et *Mém. du Muséum*, 1815, I.

La déduction des formes cristallines peut être faite aussi par la méthode des axes cristallographiques due à C. S. WEISS, *Dynamische Ansicht der Krystallisation* dans la traduction allemande de la *Minéralogie* de Haüy, Leipzig 1804; et *Diss. de indagando formarum crystallinarum caractere geometrico principali*, Leipzig 1809.

¹ La notion des systèmes cristallographiques, ou de la réduction des formes cristallines à un petit nombre d'entre elles dont chacune donne naissance à une série de polyèdres présentant entre eux des relations géométriques déterminées, a été développée successivement par BERNHARDI, *J. de Gehlen*, 1808, V, 151, 492, 625; — C. S. WEISS, *Abh. Akad. Berlin*, 1814-15, 290; — J. E. L. HAUSMANN, *Untersuchungen über die Formen der leblosen Natur*, Göttingen 1821; — F. MOHS, *Die Charaktere der Klassen, Ordnungen, Geschlechter und Arten, oder die Charakteristik des naturhistorischen Mineral-Systems*, Dresde 1820; et *Grundriss der Mineralogie*, Dresde 1822; — HAÛY, *Traité de cristallographie*, Paris 1822; et *Traité de minéralogie*, 2^{me} éd. Paris 1822; — NAUMANN, *Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie*, Leipzig 1829; — BEUDANT, *Traité élémentaire de minéralogie*, Paris 1830.

Beaucoup d'auteurs ont admis et admettent encore la séparation du système hexagonal en un système hexagonal proprement dit et un système rhomboédrique. Cette distinction, justifiée à certains égards, n'est cependant pas conforme aux principes de classification que nous adoptons ici.

dent sont appelées formes *holoédriques*. On trouve ensuite que les formes des systèmes d'abord laissés de côté peuvent être considérées comme résultant de la suppression convenablement effectuée d'une partie, en général de la moitié, des faces des formes holoédriques. Ces nouvelles formes sont appelées formes *méroédriques*.

Les six systèmes principaux sont les suivants :

- 1° Le *système du cube*, ou *système cubique*.
 - 2° Le *système du prisme droit à base carrée* ou *système quadratique*.
 - 3° Le *système du prisme hexagonal* ou *système hexagonal*.
 - 4° Le *système du prisme rhomboïdal droit* ou *système rhombique*.
 - 5° Le *système du prisme rhomboïdal oblique* ou *système clinorhombique*.
 - 6° Le *système du prisme doublement oblique* ou *système triclinique*.
-

CHAPITRE II

DES FORMES HOLOÉDRIQUES

SYSTÈME CUBIQUE¹

17. Symétrie du système cubique. — Le système du cube est celui qui possède le plus d'éléments de symétrie. Sa forme primitive, le *cube*, présente (fig. 21) :

Six faces p de même espèce ;

Douze arêtes b de même espèce se coupant à angles droits ;

Huit angles solides a de même espèce.

Ses éléments de symétrie, qui sont en même temps ceux du

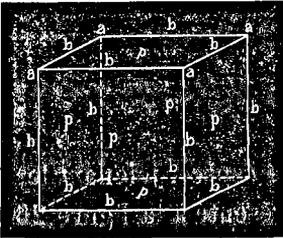


Fig. 21.

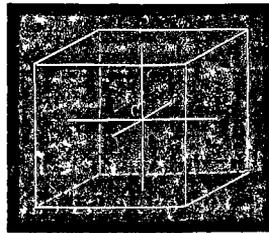


Fig. 22.

système cristallographique dont il est le type, sont les suivants :

Un centre de symétrie C ;

¹ Reguläres, gleichgliedriges, sphäroëdrisches System WEISS. Isometrisches

Trois axes de symétrie quaternaires L_4 de même espèce, joignant les milieux des faces opposées (fig. 22) ;

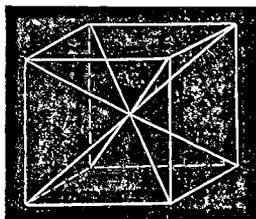


Fig. 23.

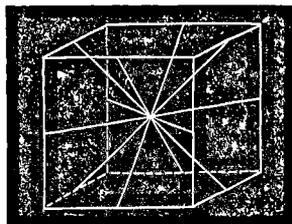


Fig. 24.

Quatre axes de symétrie ternaires L_3 de même espèce joignant les sommets opposés (fig. 23) ;

Six axes de symétrie binaires L_2 de même espèce, joignant les milieux des arêtes opposées (fig. 24) ;

Trois plans de symétrie P de même espèce (plans de symétrie principaux) parallèles aux faces du cube (fig. 25) ;

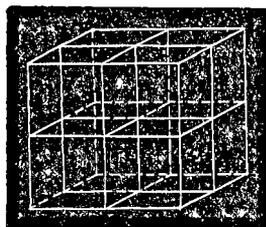


Fig. 25.

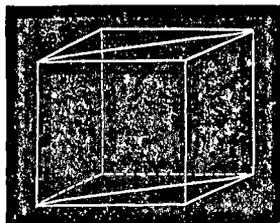


Fig. 26.

Six plans de symétrie P' de même espèce, joignant les arêtes opposées, tels que celui qui est représenté à la figure 26.

S. HAUSMANN. Tessularisches S. MOHS. Tesserales S. NAUMANN. S. cubique, LÉVY. S. tétraédrique, octaédrique BEUDANT. S. terquaternaire BRAVAIS.

Parmi les corps qui cristallisent dans ce système nous citerons le *cuivre*, l'*or*, l'*argent*, le *fer*, la *galène* PbS , l'*argyrose* Ag_2S , la *fluorine* CaF_2 , la *magnétite* Fe_3O_4 , etc.

L'ensemble de ces éléments de symétrie peut donc être représenté par la formule :

$$C, 3L_1, 4L'_1, 6L''_2, 3P, 6P'.$$

Nous remarquerons encore que le cube est un polyèdre unique de son espèce, et que la forme primitive du système est par suite complètement déterminée.

18. Formes simples holoédriques du système cubique. — Soient b_1, b_2, b_3 (fig. 27)

les trois arêtes du cube qui aboutissent à un même angle solide. Une troncature placée sur cet angle est déterminée par les distances aA, aB, aC auxquelles elle coupe ces trois arêtes. La loi de symétrie (§ 15) exige que ces trois arêtes qui sont de même espèce soient traitées de la même manière, et que toutes les troncatures faites sur un angle du cube se répètent identiquement sur les sept autres angles.

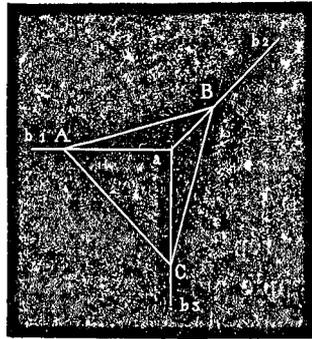


Fig. 27.

Les troncatures possibles seront donc les suivantes :

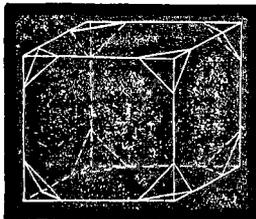


Fig. 28.

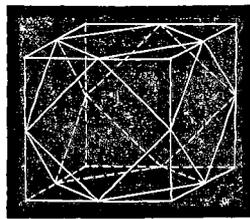


Fig. 29.

a) Une troncature coupant les trois arêtes à des distances égales (fig. 28). Sa répétition sur tous les angles a donne huit

faces dont l'ensemble constitue une forme simple du système cubique. Pour obtenir cette forme simple qui est l'*octaèdre régulier*, il suffit de déplacer ces troncatures parallèlement à elles-mêmes vers le centre du cube jusqu'à ce que les faces de celui-ci aient disparu (fig. 29 et 30).

b) Une troncature coupant les arêtes b_1 et b_2 à des distances égales, et b_3 à une distance différente et plus petite (fig. 31). Pour que la symétrie soit respectée, il faut faire deux nouvelles troncatures placées sur les arêtes b_1 et b_2 , comme la première est placée sur l'arête b_3 (fig. 32). L'ensemble de ces trois troncatures forme un *pointement* à trois faces qui doit ensuite se répéter sur chacun des angles a (fig. 33). La forme simple qui en résulte, et qui s'appelle le *trapézoèdre*, est donc formée de vingt-quatre faces (fig. 34). On remarquera que

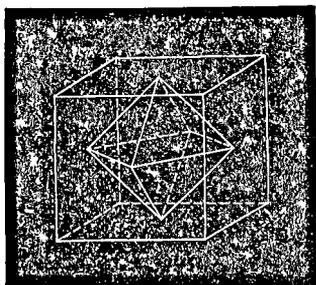


Fig. 30.

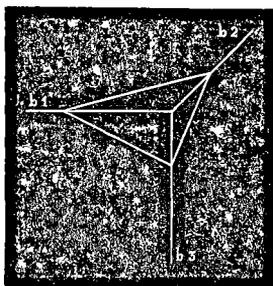


Fig. 31.

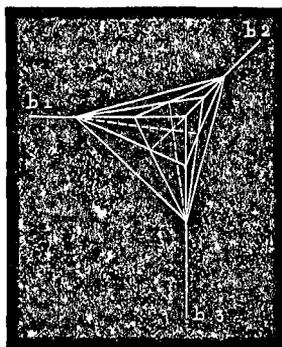


Fig. 32.

tandis qu'il n'y a qu'un seul octaèdre régulier, il existe au contraire une infinité de trapézoèdres qui diffèrent les uns des autres par le rapport des deux distances auxquelles les

arêtes du cube sont coupées par la troncature primitive. Nous aurons à voir plus loin (Chap. III) quels sont ceux de ces

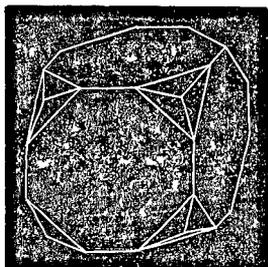


Fig. 33.

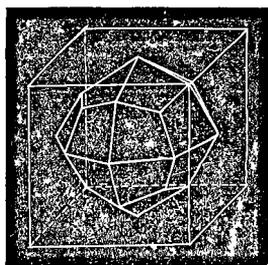


Fig. 34.

trapézoèdres qui se rencontrent réellement sur les cristaux.

c) Une troncature coupant les arêtes b_1 et b_2 à des distances

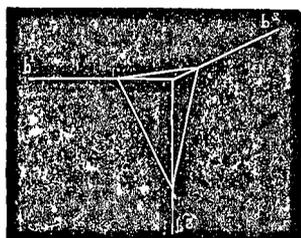


Fig. 35.

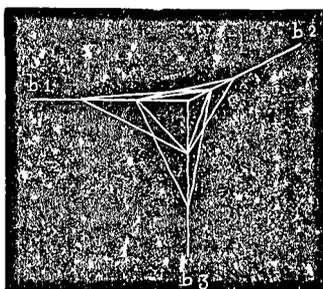


Fig. 36.

égales, et b_3 à une distance différente et plus grande (fig. 35); il en résulte, comme dans le cas du trapézoèdre, la formation

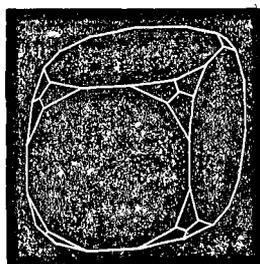


Fig. 37.

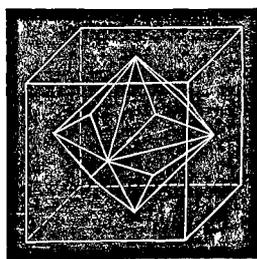


Fig. 38.

de deux troncatures placées sur b_1 et b_2 , comme la première est placée sur b_3 (fig. 36); chaque angle du cube se trouve

remplacé par un pointement à trois faces (fig. 37), dont le développement donne une nouvelle forme simple à vingt-quatre faces, l'*octaèdre pyramidé* ou *trioctaèdre* (fig. 38). Nous pouvons d'ailleurs concevoir une infinité d'octaèdres pyramidés

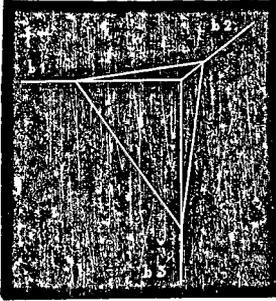


Fig. 39.

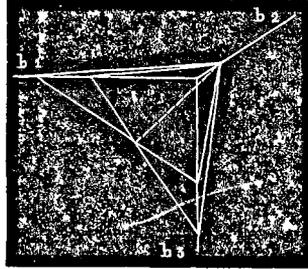


Fig. 40.

qui diffèrent suivant l'inclinaison de la troncature primitive.

d) Une troncature coupant les trois arêtes b_1 , b_2 , b_3 à des distances inégales α_1 , α_2 , α_3 (fig. 39). Pour que b_1 et b_2 soient traitées de la même manière, il faudra faire une deuxième troncature coupant b_2 à la même distance α_1 , b_1 à la distance

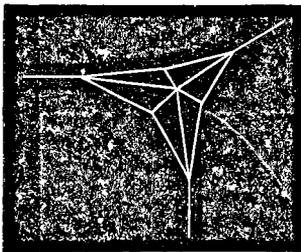


Fig. 41.

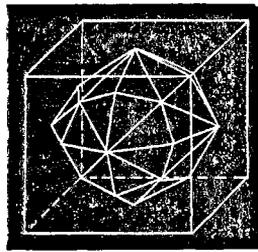


Fig. 42.

α_2 et b_3 à la distance α_1 ; il en résulte un *biseau* (fig. 40) placé sur l'arête b_1 . Ce biseau devra se répéter sur les arêtes b_2 et b_3 , donnant ainsi un pointement à six faces qui se répétera à son tour sur chacun des huit angles α (fig. 41). La forme simple qui

en résulte est un solide à quarante-huit faces, l'*hexakisocétaèdre* (fig. 42), qui est la forme la plus générale du système cubique,

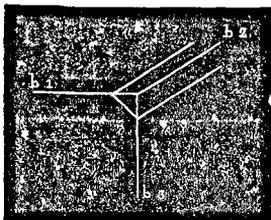


Fig. 43.

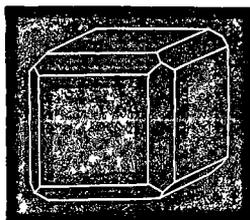


Fig. 44.

et qui peut naturellement varier à l'infini avec les rapports des distances $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

e) Une troncature parallèle à une arête b_1 et coupant les deux autres à des distances égales (fig. 43). Elle devra se répéter sur chacune des douze arêtes du cube (fig. 44), et conduira à un polyèdre à douze faces, le *dodécaèdre rhomboïdal* (fig. 45). Il ne peut y avoir naturellement qu'un seul dodécaèdre rhomboïdal.

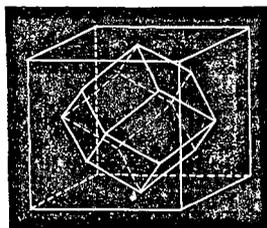


Fig. 45.

f) Une troncature parallèle à l'arête b_1 et coupant les deux autres arêtes à des distances inégales (fig. 46). Nous devons,

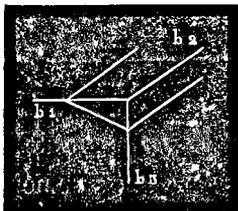


Fig. 46.

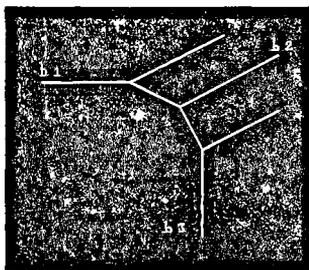


Fig. 47.

pour rétablir la symétrie, ajouter une deuxième troncature également parallèle à b_1 , mais inclinée en sens inverse; l'arête b_1

est ainsi remplacée par un biseau (fig. 47) qui, se répétant sur les autres arêtes (fig. 48), conduit à un solide à vingt-quatre faces, le *cube pyramidé* ou *tetrakishexaèdre* (fig. 49).

Il est à remarquer que toutes les formes simples que nous venons d'énumérer peuvent être considérées comme des cas par-

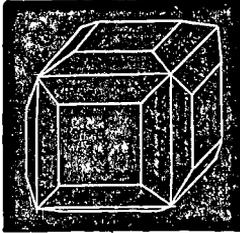


Fig. 48.

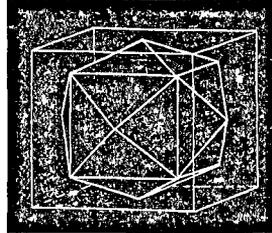


Fig. 49.

ticuliers du solide à quarante-huit faces. Celui-ci est le résultat d'une troncature qui coupe les arêtes à des distances α , β , γ ; si l'une de ces trois distances augmente progressivement jusqu'à devenir infinie, l'hexakisoctaèdre se transforme graduellement et finit par se confondre avec un cube pyramidé; si, en même

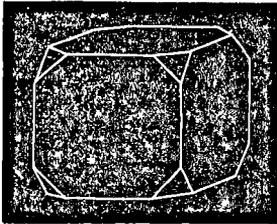


Fig. 50.

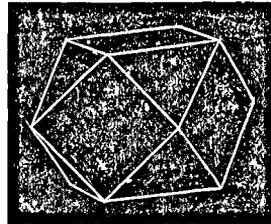


Fig. 51.

temps, les deux autres distances se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à devenir égales, le polyèdre passe progressivement à la forme du dodécaèdre rhomboïdal; si l'une des trois distances devient très petite et s'annule, le solide à quarante-huit faces se confond avec le cube. Si les trois distances tendent vers l'égalité, le solide à quarante-huit faces tend vers l'octaèdre

régulier, etc. C'est là ce qu'on exprime en disant que l'hexakisocétaèdre est la forme la plus générale du système cubique.

19. Formes composées du système cubique. — Ces

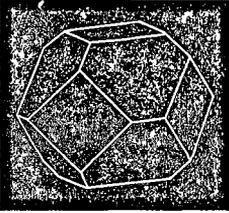


Fig. 52.

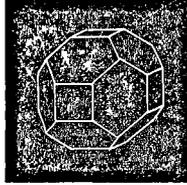


Fig. 53.

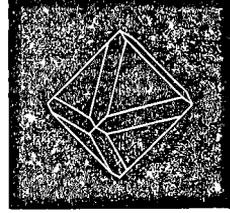


Fig. 54.

formes résultent de la superposition d'un nombre quelconque des formes simples que nous venons d'étudier. Elles diffèrent

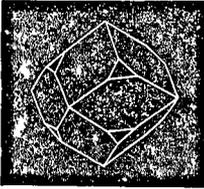


Fig. 55.

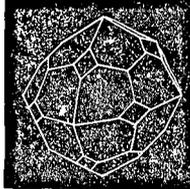


Fig. 56.

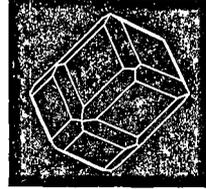


Fig. 57.

suivant le nombre et la nature des formes simples superposées et suivant le développement relatif de leurs faces. Nous en donnerons seulement quelques exemples.

Combinaisons du cube et de l'octaèdre (fig. 50, 51, 52).

Combinaison du cube et du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 53).

Combinaisons de l'octaèdre et du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 54, 55).

Combinaisons du trapézoèdre et du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 56, 57).

Combinaison du cube, de l'octaèdre et du dodécaèdre (fig. 58).

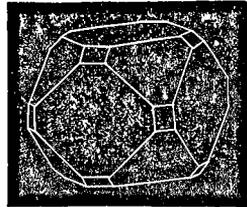


Fig. 58.

SYSTÈME QUADRATIQUE¹

20. Symétrie du système quadratique. — Le *prisme droit à base carrée* (fig. 59) est composé de :

Quatre faces rectangles *m* de même espèce;

Deux faces carrées, *bases* ou *pinacoïdes* *p* de même espèce;

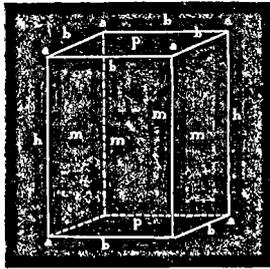


Fig. 59.

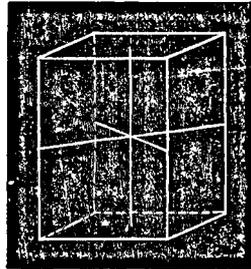


Fig. 60.

Quatre arêtes verticales *h* de même espèce, dont chacune est l'intersection de deux faces *m* qui se coupent à angle droit;

Huit arêtes horizontales *b* de même espèce, intersections à angle droit d'une face *m* et d'une face *p*;

Huit angles solides *a* de même espèce.

Les éléments de symétrie sont :

Un centre de symétrie *C*;

Un axe de symétrie quaternaire Λ_4 , dit *axe principale*, joignant les milieux des bases (fig. 60);

¹ Viergliedriges System WEISS. Monodimetrisches S. HAUSMANN. Pyramidales S. MOHS. Tetragonales S. NAUMANN. S. prismatique droit à bases carrées BEUDANT. Quadratoctaédriques S. KUPFFER. Zwei- und einaxiges S. ROSE. S. du prisme droit à bases carrées LÉVY. Quadratisches S. GLOCKER. S. quaternaire BRAVAIS.

. Exemples : La *cassitérite* SnO_2 , le *rutile* et l'*anatase* TiO_2 , le *zircon* ZrSiO_4 .

Un premier système de deux axes binaires L_2 , dits *de première espèce*, joignant les milieux des arêtes h opposées ;

Un second système de deux axes binaires L'_2 , dits *de seconde espèce*, joignant les milieux des faces m opposées (fig. 61) ;

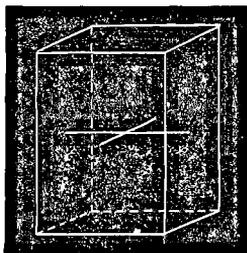


Fig. 61.

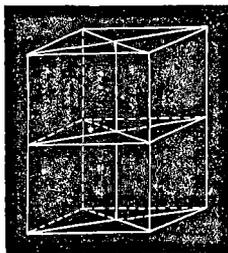


Fig. 62.

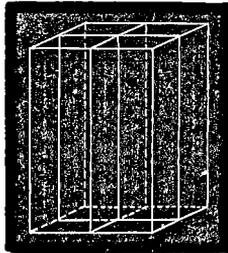


Fig. 63.

Un plan de symétrie Π dit plan de symétrie principal, parallèle aux bases (fig. 62) ;

Deux plans de symétrie P , de même espèce, passant par les arêtes h opposées ;

Deux plans de symétrie P' semblables entre eux, mais différents des précédents, parallèles aux faces m du prisme (fig. 63).

Ces éléments sont donc représentés par le symbole

$$C, \Delta_4, 2L_2, 2L'_2, \Pi, 2P, 2P'.$$

Le prisme à base carrée, tout en ayant ses faces parallèles à celles du cube, tout en lui étant cristallographiquement identique dans sa forme extérieure, en diffère parce que les arêtes verticales ne sont pas, comme dans le cube, semblables aux arêtes horizontales, correspondent à une structure différente et peuvent être modifiées séparément.

21. Formes simples du système quadratique. —

a) Une troncature parallèle à une arête b pourra être inclinée

d'un angle quelconque, puisque les deux faces adjacentes sont d'espèces différentes (fig. 64). Sa répétition sur les autres arêtes b conduit à une *double pyramide à base carrée* (fig. 65 et 66), dite de *première espèce*, ou *protopyramide*, dont chaque face est tournée du côté de l'une des faces du prisme primitif.

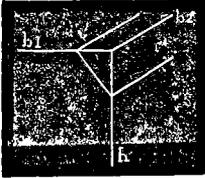


Fig. 64.

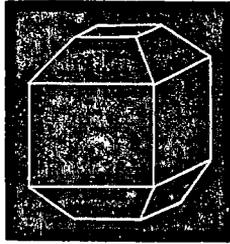


Fig. 65.

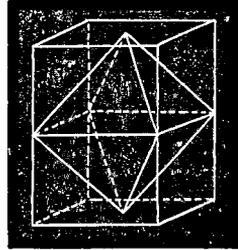


Fig. 66.

b) Une troncature faite sur un angle a , coupant les deux arêtes semblables b_1 et b_2 à la même distance, et l'arête h , qui est d'espèce différente, à une distance quelconque (fig. 67), doit simplement se répéter sur chaque angle a et conduit à une nouvelle *pyramide à base carrée*, dite de *seconde espèce* ou



Fig. 67.

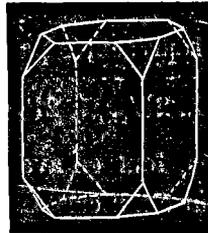


Fig. 68.

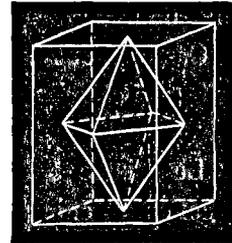


Fig. 69.

deutéropyramide, dont les faces se trouvent en regard des arêtes h du prisme primitif (fig. 68 et 69).

c) Une troncature coupant les deux arêtes b_1 et b_2 à des distances inégales doit se répéter dans une troncature inclinée en sens inverse, et le biseau qui en résulte (fig. 70) conduit à une double *pyramide octogone* ou *diocétaèdre* (fig. 71), qui est la

forme la plus générale du système quadratique. Ses arêtes culminantes sont alternativement de deux espèces avec des angles dièdres différents; les unes résultent de l'intersection de deux

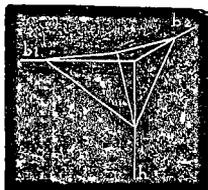


Fig. 70.

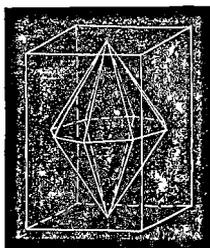


Fig. 71.

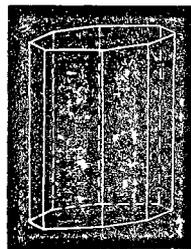


Fig. 72.

faces appartenant au même biseau, et les autres de l'intersection de faces appartenant à des biseaux différents.

d) Une troncature sur les arêtes h , également inclinée sur les deux faces m adjacentes (fig. 72), donne un *prisme à base carrée* (fig. 73), dit *prisme de seconde espèce* ou *deutéoprisme*, qui est tourné de 45° par rapport au prisme primitif. Ce dernier est appelé aussi *prisme de première espèce* ou *protoprisme*.

e) Une troncature parallèle à une arête h , mais inégalement

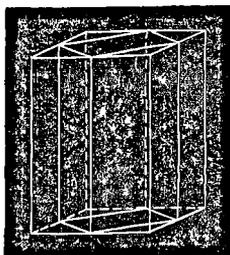


Fig. 73.

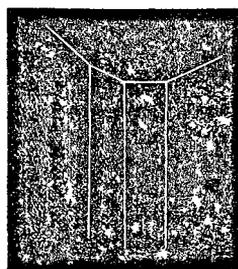


Fig. 74.

inclinée sur les faces m adjacentes, donne d'abord un biseau (fig. 74), puis un *prisme à base octogone* dont les arêtes verticales, comme celles de la pyramide octogone, sont alternative-

ment de deux espèces différentes (fig. 75). Il est clair en effet que, suivant l'inclinaison de la troncature primitive, le prisme octogone pourra se rapprocher plus ou moins du prisme carré de

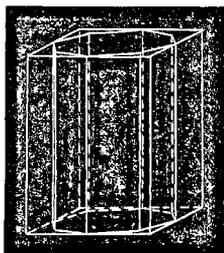


Fig. 75.

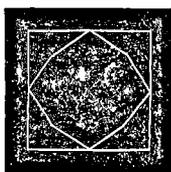


Fig. 76.

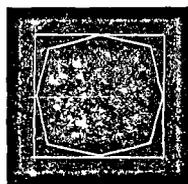


Fig. 77.

seconde espèce (fig. 76) ou du prisme carré de première espèce (fig. 77).

A ces cinq formes nous devons joindre le prisme primitif, ou de première espèce, et le système des deux plans parallèles (*pinacoïde*), qui constituent les bases p ; nous remarquerons qu'à l'exception des prismes carrés et du pinacoïde, chacune de ces formes comprend comme cas particuliers un nombre illimité de polyèdres d'angles différents.

22. Formes composées du système quadratique. —

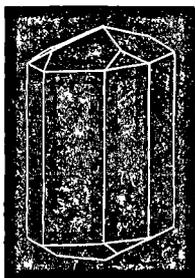


Fig. 78.

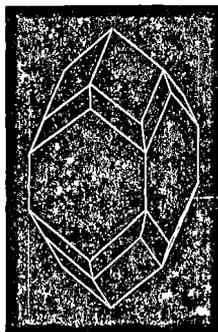


Fig. 79.

Ces formes composées sont généralement faciles à comprendre.
Exemples :

Combinaison du prisme de première espèce, du prisme de seconde espèce, d'une pyramide de première espèce, et d'une pyramide de seconde espèce (fig. 78).

Combinaison du prisme de seconde espèce, d'une pyramide de première espèce, et d'une pyramide octogone (fig. 79). On

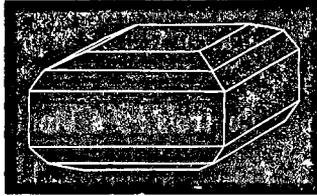


Fig. 80.

peut d'ailleurs toujours considérer les prismes et les pyramides de première espèce comme étant de seconde espèce, et réciproquement, puisque rien n'oblige à prendre le prisme primitif dans une position plutôt que dans l'autre.

Combinaison du pinacoïde p avec un prisme et deux pyramides de même espèce (fig. 80).

SYSTÈME HEXAGONAL¹

23. Symétrie du système hexagonal. — Dans le *prisme hexagonal* qui est le type de ce système, on distingue (fig. 81) :

Six faces verticales m de même espèce dont les normales forment entre elles des angles égaux de 60° ;

Deux bases ou pinacoïdes p ;

¹ Sechsgliedriges System WEISS. Monotrimetrisches S. HAUSMANN. Dihexaëdrisches S. KUPFFER. Dirhombœdrisches S. MOHS. Hexagonales S. NAUMANN. S. rhomboédrique BEUDANT. Drei- und einaxiges S. ROSE. S. du prisme hexagonal LÉVY. Orthohexagonales S. SCHRAUF. S. sénnaire BRAVAIS.

Exemple : L'émeraude ou béryl $Be_3Al_2(SiO_3)_6$.

- Six arêtes verticales h de même espèce ;
 Douze arêtes horizontales b de même espèce entre elles, mais différentes des arêtes h ;
 Douze angles solides semblables a .
 La symétrie est caractérisée par :
 Un centre de symétrie C ;
 Un axe de symétrie sénaire Δ , ou *axe principal*, joignant les milieux des bases ;
 Un premier système de trois axes binaires L , dits *de pre-*

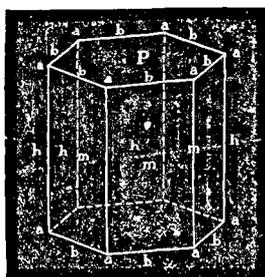


Fig. 81.

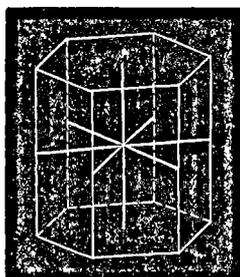


Fig. 82.

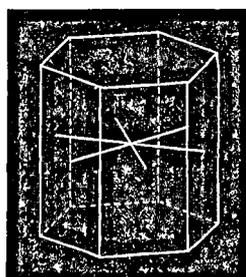


Fig. 83.

- mière espèce*, joignant les milieux des arêtes h opposées (fig. 82) ;
 Un second système de trois axes binaires L' , dits *de seconde espèce*, joignant les milieux des faces m opposées (fig. 83) ;

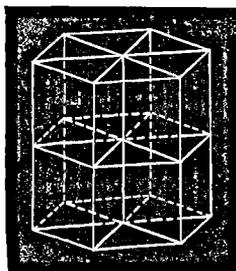


Fig. 84.

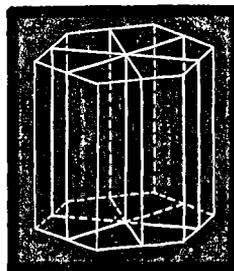


Fig. 85.

- Un plan de symétrie principal Π parallèle aux bases (fig. 84) ;
 Trois plans de symétrie verticaux P semblables joignant les arêtes h opposées ;

Trois plans de symétrie verticaux P' semblables entre eux, mais différents des précédents, passant par les milieux des arêtes b opposées (fig. 85).

La symétrie est donc comprise dans la formule

$$C, \Lambda, 3L, 3L', \Pi, 3P, 3P'.$$

24. Formes simples holoédriques du système hexagonal. — En raisonnant exactement comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous trouverons que les modifications possibles du prisme hexagonal sont les suivantes :

a) Une troncature quelconque sur chaque arête b . On obtient une *double pyramide à base hexagonale dite de première espèce* (fig. 86).

b) Une troncature sur un angle a , coupant les deux arêtes b à la même distance et l'arête h à une distance quelconque. On

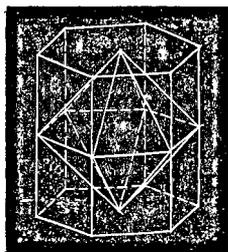


Fig. 86.

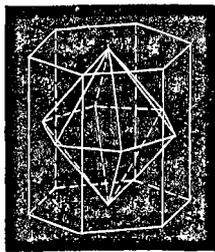


Fig. 87.

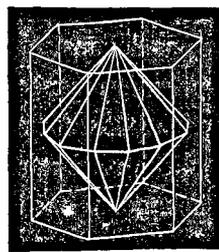


Fig. 88.

obtient une *double pyramide hexagonale dite de seconde espèce* qui est tournée de 30° par rapport à l'autre (fig. 87).

c) Une troncature sur un angle a , coupant les deux arêtes b à des distances différentes, et l'arête h à une distance quelconque. On obtient une *double pyramide dodécagone*, dont les arêtes culminantes sont alternativement de deux espèces différentes (fig. 88).

d) Une troncature sur les arêtes h , également inclinée sur les deux faces m adjacentes, et conduisant à un *prisme hexagonal*, dit *de seconde espèce*, tourné de 30° par rapport au prisme primitif, dit *de première espèce* (fig. 89).

e) Une troncature sur les arêtes h , inégalement inclinée sur les deux faces m adjacentes. On obtient un *prisme dodécagone*

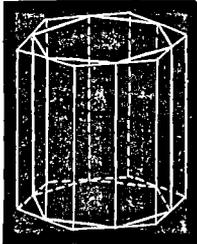


Fig. 89.

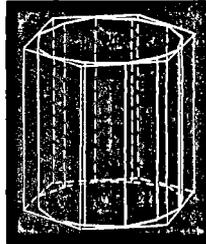


Fig. 90.

dont les arêtes verticales sont alternativement de deux espèces différentes (fig. 90).

Pour avoir toutes les formes simples du système hexagonal, nous devons joindre à ces cinq formes le prisme primitif ou de première espèce, et le système de deux plans parallèles, ou pinacoïde, formant les bases.

On remarquera que la symétrie et les formes du système hexagonal ont beaucoup d'analogie avec celles du système quadratique. La seule différence consiste dans le remplacement de l'axe quaternaire par un axe sénaire et dans les conséquences qui en résultent pour le nombre des éléments semblables.

25. Formes composées du système hexagonal. — Elles sont, comme celles du système quadratique, faciles à comprendre. Exemples :

Combinaison d'un prisme hexagonal, d'une pyramide hexagonale de même espèce et de la base (fig. 91).

Combinaison de deux pyramides hexagonales de la même espèce (fig. 92).

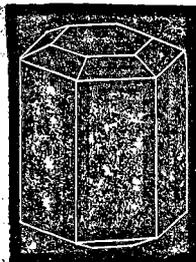


Fig. 91.

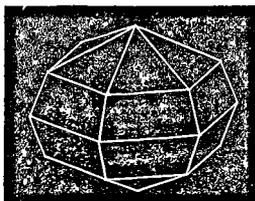


Fig. 92.

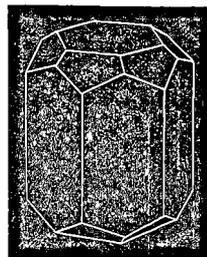


Fig. 93.

Combinaison d'un prisme hexagonal, d'une pyramide hexagonale d'espèce inverse et de la base (fig. 93).

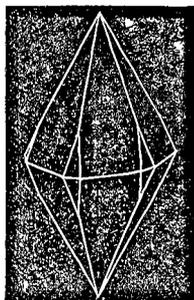


Fig. 94.

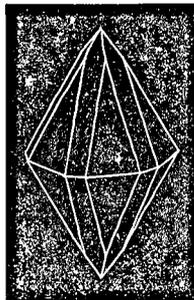


Fig. 95.

Combinaisons de deux pyramides d'espèces différentes (fig. 94, 95).

SYSTÈME RHOMBIQUE ¹

26. Symétrie du système rhombique. — Le *prisme rhomboïdal droit* (fig. 96) est formé de

Deux faces p , bases ou pinacoïde ;

¹ Zwei- und zweigliedriges System WEISS. Trimetrisches, orthorhombisches S. HAUSMANN. Prismatisches, orthotypes S. MOHS. Rhombisches S. NAUMANN. S.

Quatre faces m rectangles, constituant le prisme proprement dit ;

Huit arêtes b , intersections sous des angles droits d'une face m et d'une face p ;

Deux arêtes verticales g , intersections de deux faces m sous des angles aigus ;

Deux arêtes verticales h , intersections de deux faces m sous des angles obtus ;

Quatre angles solides a , formés chacun par l'intersection de deux arêtes b et d'une arête h ;

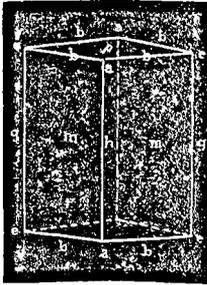


Fig. 96.

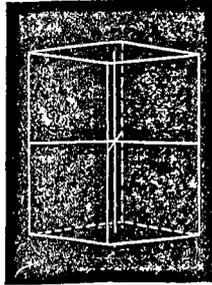


Fig. 97.

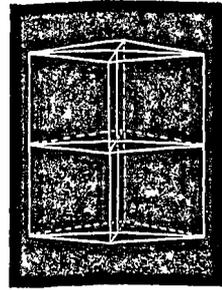


Fig. 98.

Quatre angles solides e , intersections de deux arêtes b et d'une arête g .

Les éléments de symétrie sont :

Un centre de symétrie C ;

Trois axes de symétrie binaires L , L' , L'' , d'espèces différentes et rectangulaires entre eux, dont l'un joint les milieux des bases p , le second les milieux des arêtes g , et le troisième les milieux des arêtes h (fig. 97).

Trois plans de symétrie d'espèces différentes P , P' , P'' (fig. 98),

prismatique rectangulaire droit BEUDANT. Ein- und einaxiges S. ROSE. S. du prisme rhomboïdal droit LÉVY. Isoklines S. FRANKENHEIM. S. terbinaire BRAVAIS. Exemples : le soufre, la stibine Sb_2S_3 , le salpêtre KNO_3 , etc.

l'un parallèle aux bases, l'autre passant par les arêtes g , et par la grande diagonale de la base (macrodiagonale), le troisième passant par les arêtes h et par la petite diagonale de la base (brachydiagonale). La symétrie se trouve ainsi représentée par le symbole

$$C, L_1, L'_1, L''_1, P, P', P''.$$

27. Formes simples holoédriques du système rhombique.

a) Une troncature sur une arête b peut avoir une inclinaison quelconque et conduit à une double *pyramide à base rhombe* (fig. 99).

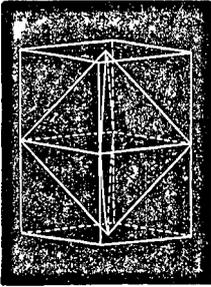


Fig. 99.

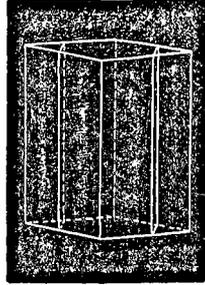


Fig. 100.

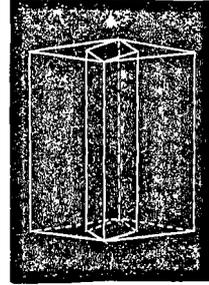


Fig. 101.

b) Une troncature symétrique sur les arêtes g donne un système de deux plans parallèles ou *pinacoïde* (fig. 100).

c) Une troncature sur g , inégalement inclinée sur les faces adjacentes, conduit à un nouveau *prisme vertical* dont l'angle antérieur est plus aigu que celui du prisme primitif (fig. 101).

d) Une troncature symétrique sur h donne un *pinacoïde* parallèle à la grande diagonale des bases (fig. 102).

e) Une troncature oblique sur h donne un *prisme vertical* dont l'angle antérieur est plus obtus que celui du prisme primitif.

f) Une troncature symétrique sur les angles e donne quatre faces parallèles à la petite diagonale des bases, constituant un prisme à base rhombe couché horizontalement d'avant en

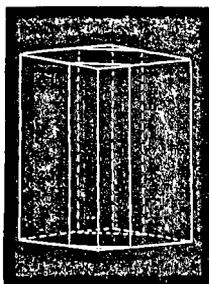


Fig. 102.

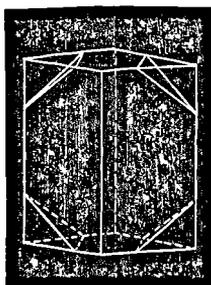


Fig. 103.

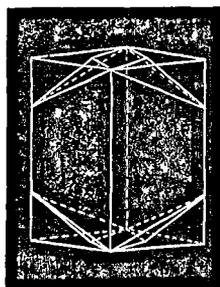


Fig. 104.

arrière. Ces prismes horizontaux sont souvent appelés *dômes*; on leur donne en particulier le nom de *brachydômes* lorsqu'ils sont parallèles à la petite diagonale (fig. 103).

g) Une modification semblable faite sur les angles a conduira de même à un dôme qui sera cette fois parallèle à la grande diagonale de la base (*macrodôme*).

h) Une modification en biseau sur les angles e ou sur les angles a donnera huit faces constituant une *pyramide à base rhombe* d'angles quelconques (fig. 104).

Les formes simples du système rhombique se réduisent donc à des pinacoïdes parallèles aux plans de symétrie, à des prismes ou dômes parallèles aux axes de symétrie, et à des pyramides à base rhombe.

La forme primitive du système peut varier non seulement quant aux rapports des longueurs de ses arêtes, mais aussi quant aux angles qu'elles forment entre elles.

28. Formes composées du système rhombique. —

Exemples : Combinaison du pinacoïde basique p avec un brachydôme et deux pyramides (fig. 105).

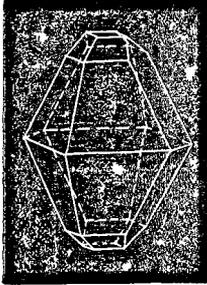


Fig. 105.

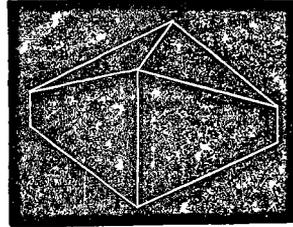


Fig. 106.

Combinaison d'un prisme avec un brachydôme (fig. 106).

SYSTÈME CLINORHOMBIQUE ¹

29. Symétrie du système clinorhombique. — Le *prisme rhomboïdal oblique* (fig. 107) présente :

Quatre faces verticales m semblables qui sont des parallélogrammes obliques et constituent un prisme à axe vertical et à section rhombique ;

Deux bases p inclinées d'arrière en avant ;

Quatre arêtes b , intersections sous des angles aigus égaux, d'une face p avec une face m ;

¹ Zwei- und eingliedriges et ein- und zweigliedriges System WEISS. Orthorhomboidisches S. HAUSMANN. Hemiprismatisches, hemiorthotypes S. MOHS. Hemirhombisches S. BREITHAUPT. Klinorhombisches, monoklinoëdrisches S. NAUMANN. S. du prisme oblique symétrique HAÛY. S. prismatique rectangulaire oblique BEUDANT. S. du prisme rhomboïdal oblique LÉVY. Augitisches S. HAIDINGER. Monoklinisches S. FRANKENHEIM. Oblique S. MILLER. Monoklinometrisches S. KOPP. S. binaire BRAVAIS. Monosymmetrisches S. GROTH.

Exemples : le *gypse* $\text{CaSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$ les sulfates doubles $\text{K}_2\text{Mg}(\text{SO}_4)_2 + 6\text{H}_2\text{O}$; $(\text{NH}_4)_2\text{Mg}(\text{SO}_4)_2 + 6\text{H}_2\text{O}$; $\text{K}_2\text{Zn}(\text{SO}_4) + 6\text{H}_2\text{O}$, etc.

Quatre arêtes d , intersections sous des angles obtus égaux, d'une face p avec une face m ;

Deux arêtes h , antérieure et postérieure, intersections de deux faces m sous un angle quelconque;

Deux arêtes g latérales, intersections de deux faces m sous un angle supplémentaire du précédent;

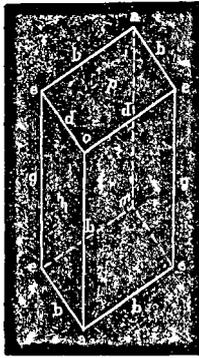


Fig. 107.

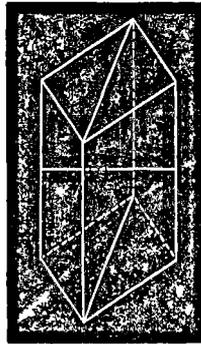


Fig. 108.

Deux angles solides a , intersections de deux arêtes b et d'une arête h , formés chacun d'un angle plan bab quelconque et de deux angles plans bah aigus et égaux entre eux;

Deux angles solides o , intersections de deux arêtes d et d'une arête h , formés chacun d'un angle plan $dod = bab$, et de deux angles plans doh égaux entre eux et obtus;

Quatre angles solides e formés chacun par l'intersection d'une arête g , d'une arête b et d'une arête d .

Les éléments de symétrie (fig. 108) se réduisent à :

Un centre de symétrie C ;

Un axe de symétrie binaire L_2 , joignant les milieux des arêtes g ;

Un plan de symétrie P , passant par les arêtes h et par les diagonales inclinées des bases.

La symétrie est donc représentée par le symbole C, L_2, P .

30. Formes simples du système clinorhombique. —

Les modifications possibles sont les suivantes :

a) Une troncature placée sur une arête h , ou sur un angle a ou o , et coupant les deux arêtes b ou d adjacentes à des distances égales (fig. 109 et 110). On obtient un système de deux

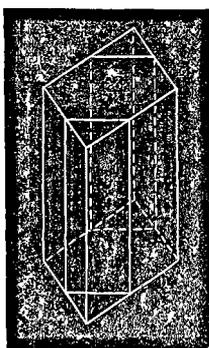


Fig. 109.

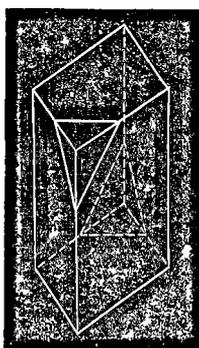


Fig. 110.

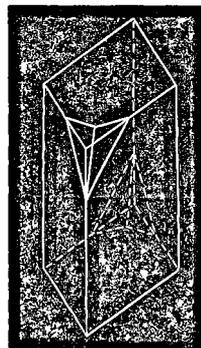


Fig. 111.

plans parallèles entre eux et à l'axe de symétrie, *orthopinacoïde* dans le premier cas et *orthodômes* dans le second.

b) Une modification en biseau sur les arêtes h ou sur les angles a ou o (fig. 111). On obtient un système de quatre plans parallèles deux à deux, constituant un *prisme* à base rhombe dans le premier cas, une *hémipyramide* postérieure ou antérieure dans le second.

c) Une troncature quelconque parallèle aux arêtes b ou aux arêtes d . Il en résulte également quatre faces constituant une hémipyramide.

d) Une troncature symétrique sur l'arête g , donnant un pinacoïde parallèle au plan de symétrie, dit *clinopinacoïde* (fig. 112).

e) Un biseau sur l'arête g , donnant les quatre faces d'un prisme (fig. 113).

f) Une troncature placée d'une manière quelconque sur un

angle e , donnant encore quatre faces (fig. 114) parallèles deux à deux. Cette forme prend le nom de *clinodôme* si ses arêtes

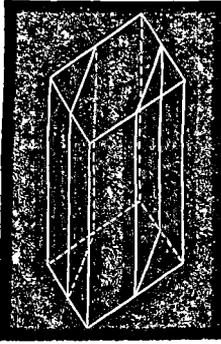


Fig. 112.

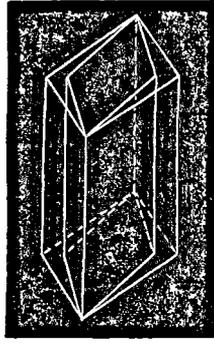


Fig. 113.

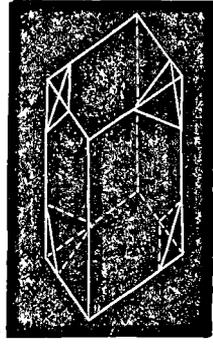


Fig. 114.

sont parallèles à la diagonale inclinée de la base, et est considérée comme une hémipyramide dans les autres cas.

Les formes simples sont donc des systèmes de plans parallèles deux à deux, parallèles ou perpendiculaires au plan de symétrie, et des prismes à base rhombe dont les arêtes sont inclinées d'une manière quelconque, tout en restant parallèles au plan de symétrie.

SYSTÈME TRICLINIQUE ¹

31. Symétrie et formes du système triclinique. —

¹ Ein- und eingliedriges System WEISS; Tritoprismatisches S. KUPFFER. Anorthotypes, tetartoprismatisches S. MOHS. Tetartorhombisches S. BREITHAUPF. Klinorhomboidisches, diklinoédriques, triklinoédriques S. NAUMANN. S. du prisme oblique non symétrique, HAÜY. S. prismatique oblique à bases de parallélogramme obliquangle BEUDANT. S. du prisme doublement oblique LÉVY. Anorthisches S. HAIDINGER. Triklinisches S. FRANKENHEIN. S. asymétrique BRAVAIS.

Exemple : le sulfate de cuivre $CuSO_4 + 5H_2O$; le disthène Al_2SiO_5 ; l'albite $NaAlSi_3O_8$, etc.

MITSCHERLICH, *Pogg. Ann.* 1826, VIII, 427, et après lui NAUMANN dans sa *Cristallographie*, ont admis l'existence distincte d'un système d'iclinoédrique

Le *prisme bioblique* (fig. 115) est un parallélépipède oblique quelconque, composé de :

Six faces, parallèles deux à deux, et de trois espèces différentes, p, m, t ;

Douze arêtes, parallèles et semblables deux à deux, b, c, d, f, g, h ;

Huit angles solides semblables deux à deux, a, e, i, o .

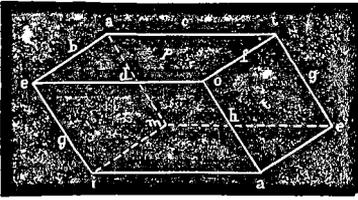


Fig. 115.

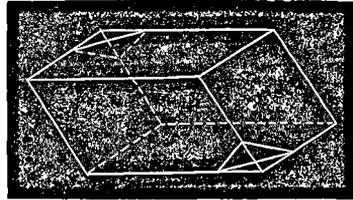


Fig. 116.

Les faces opposées étant parallèles, il y a un centre de symétrie, mais il n'y a ni axes ni plans. On a donc le symbole C.

Une troncature quelconque placée sur un angle ou sur une arête devra simplement se répéter sur l'angle ou l'arête opposée (fig. 116). Il n'y a d'autres formes simples que des systèmes de deux plans parallèles, que l'on peut considérer par analogie avec les autres systèmes comme étant, suivant leurs positions, des moitiés de prismes ou de dômes, ou des quarts de pyramides.

différant du système triclinique parce que deux des axes forment un angle droit. Cette manière de voir n'a pas prévalu, la symétrie et la distribution des faces étant les mêmes dans ces deux systèmes. DUFRENÓY, *Traité de minéralogie*, Paris 1844, I, 149.

CHAPITRE III

LOI DE DÉRIVATION DES FORMES SECONDAIRES

32. Loi de dérivation. — Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, nous ne nous sommes occupés que de la symétrie des polyèdres cristallins. Considérant les formes extérieures comme des manifestations de la structure intérieure des cristaux, nous avons conclu d'une manière générale que les formes simples qui peuvent être associées sur un même cristal, ou qui peuvent se rencontrer isolément sur divers cristaux de même nature, doivent posséder la même symétrie, appartenir par conséquent au même système cristallographique, bien plus, au même type holoédrique ou méroédrique.

Mais il n'en résulte pas que *toutes* les formes de même symétrie puissent ainsi s'associer; le système cubique, par exemple, comprend une infinité de solides à quarante-huit faces résultant de tronçatures qui coupent les arêtes à des distances différentes; le système hexagonal comprend une infinité de pyramides hexagonales régulières, qui diffèrent seulement par leurs angles, ou par l'inclinaison de leurs faces par rapport à celles du prisme primitif. Tous ces hexakisoctaèdres, toutes ces pyramides, peuvent-ils se rencontrer simultanément sur un cristal

cubique ou sur un cristal hexagonal? L'observation montre qu'il n'en est rien, mais que les formes qui s'observent sur les cristaux d'une même espèce sont généralement assez peu nombreuses, et sont toujours liées les unes aux autres par une loi très précise et très simple.

33. Soit un cristal quelconque ; par un point O pris dans son intérieur, menons des parallèles à trois quelconques de ses arêtes non comprises dans un même plan, et prenons ces trois lignes OX , OY , OZ (fig. 117) comme axes de coordonnées. Une face quelconque choisie arbitrairement coupe les axes à des distances a , b , c . Sa position cristallographique est complètement déterminée si l'on connaît les rapports a/b , c/b de deux de ces distances à la troisième, puisque, en multipliant a , b et c par un même facteur, on ne fait que déplacer la face sans modifier sa direction.

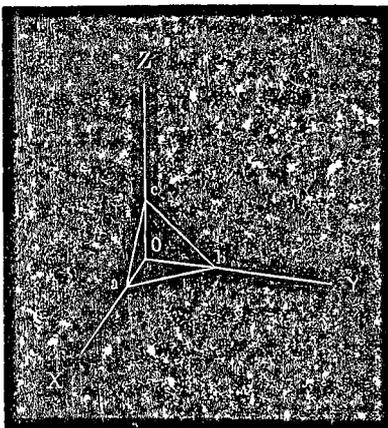


Fig. 117.

Étant donnée cette première face, on observe que toutes celles qui peuvent se trouver sur le même cristal coupent les axes à des distances proportionnelles respectivement à pa , qb , rc ; p , q , r étant des nombres entiers en général très simples. Un ou deux de ces nombres peuvent aussi être infinis ; dans ce cas, la face correspondante est parallèle à un ou à deux des axes de coordonnées¹.

¹ Cette loi, appelée aussi *loi de rationalité des indices*, a été découverte par R.-J. HAÛY, *J. de Phys.* 1782, XIX, 366 ; XX, 33. Dans la première édition de son *Traité de minéralogie*, Paris 1801, I, 90, il remarque que l'on peut toujours substituer à la forme primitive une forme secondaire prise à volonté. La

Les grandeurs a , b et c , dans cette formule, restent donc les mêmes pour toutes les faces du cristal. Ce sont des nombres quelconques dépendant seulement de la nature du cristal, des arêtes choisies comme axes de coordonnées et de la face particulière prise comme point de départ. Ces nombres sont les *paramètres* du cristal relatifs à ces trois arêtes. D'après ce qui précède, leurs rapports importent seuls, et on peut toujours prendre l'un d'entre eux égal à l'unité.

Les quantités p , q , r , au contraire, changent d'une face à l'autre ; ce sont les *longueurs numériques*, qui, une fois les paramètres donnés, définissent la position des diverses faces, et peuvent servir à les désigner. On peut d'ailleurs, comme pour les paramètres, les multiplier toutes les trois par un même facteur, il suffit que leurs rapports soient déterminés. Les longueurs numériques de la face choisie pour fixer les paramètres sont par définition $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$.

34. Notation de Miller ¹. — Dans la notation de Miller,

démonstration que la loi s'applique à trois arêtes quelconques non comprises dans un même plan a été donnée plus complètement par KUPFFER, *Diss. de calculo crystallonomico*, Gœttingen 1821, et *Pogg. Ann.* 1826, VIII, 61.

F.-E. NEUMANN, *De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum*, Berlin 1826, a remarqué le premier que la loi de dérivation est équivalente à la loi des zones donnée par C.-S. WEISS en 1806 dans sa traduction de la *Minéralogie* de HAÛY. Une zone est l'ensemble des faces parallèles à une même droite. Tout plan contenu dans deux zones est une face possible du cristal. Toutes les faces peuvent ainsi se déduire de proche en proche de quatre d'entre elles situées deux à deux dans des zones différentes. Cette loi a été appliquée indépendamment par MONTEIRO, *J. des Mines* 1813, XXXIV, 161 ; et par LÉVY, *Ann. de Chim.* 1822, XXI, 263.

¹ Ce système de notation a été proposé par WHEWELL, *Phil. Trans.* 1825, I, 87 ; *Edinb. J. of Sc.* 1825, II, 312 ; 1827, VI, 1 ; — par GRASSMANN, *Zur physikalischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre*, Stettin 1829 ; — par FRANKENHEIM, *De crystallorum cohesionem*, Breslau 1829, 37. Son emploi s'est répandu à la suite des travaux de W.-H. MILLER, *Phil. Mag.* 1835, VI, 104 ; *Pogg. Ann.* 1835, XXXVI, 575, etc... et *A treatise on Crystallography*. Londres 1839 ; traduit en français par SÉNARMONT, Paris 1842.

la plus commode pour les calculs, on désigne une face non par les longueurs numériques correspondantes, mais par leurs inverses

$$h = \frac{1}{p}, \quad k = \frac{1}{q}, \quad l = \frac{1}{r};$$

h, k, l sont les *indices* ou *caractéristiques* de la face; on représente celle-ci par la notation (hkl) , la première caractéristique se rapportant toujours

à l'axe des X, la seconde à l'axe des Y et la troisième à l'axe des Z, et on ramène toujours les caractéristiques à être des nombres entiers, en les multipliant toutes trois par un même facteur convenable. Les caractéristiques sont sur-

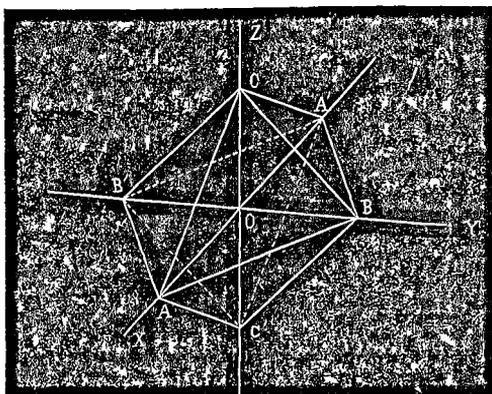


Fig. 118. .

montées du signe $-$, lorsque la face coupe les axes dans leur partie négative. Ainsi (fig. 118) on notera les faces

ABC	(hkl)	AB'C	$(\bar{h}\bar{k}l)$
A'BC	$(\bar{h}kl)$	AB'C'	$(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$
ABC'	$(hk\bar{l})$	A'B'C	$(\bar{h}k\bar{l})$
A'BC'	$(\bar{h}k\bar{l})$	A'B'C'	$(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$

Une face parallèle à l'axe des X, par exemple, correspond à une longueur numérique $p = \infty$ ou à un indice $h = 0$, et sera notée $(0kl)$; une face parallèle à la fois aux axes des X et des Y aura $h = k = 0$ et sera notée $(00l)$ ou, ce qui revient au même, (001) .

Une forme simple est désignée par le symbole, mis entre deux

petites accolades, de l'une des faces qui la constituent. Ainsi l'ensemble des faces qui accompagnent une face (hkl) en vertu de la loi de symétrie est noté $\{hkl\}$. Rien n'empêche, d'ailleurs, lorsque les symboles ci-dessus compliqueraient trop les figures ou le langage, de désigner une face par une lettre quelconque que l'on choisira à volonté dans chaque cas particulier ¹.

Ce système de notation serait parfait sans l'emploi des caractéristiques inverses à la place des longueurs numériques elles-mêmes. On comprendrait très bien qu'une face qui coupe les axes à des distances égales respectivement à deux, trois et quatre fois les paramètres fût notée (234); la notation adoptée ($\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4}$) ou (643) est bien moins naturelle, représente bien moins nettement la position de la face, et cet inconvénient n'est qu'à demi compensé par les quelques simplifications qui en résultent pour le calcul. Mais le grand avantage du système de Miller c'est que, depuis quelques années, il se répand de plus en plus parmi les cristallographes; et, dans l'intérêt d'une unité de langage qui est loin d'exister encore, nous pensons que l'on doit passer par-dessus les petits inconvénients d'une convention qui, après tout, est assez simple.

35. Détermination des cristaux ¹. — La comparaison des divers angles mesurés au goniomètre (Chap. VII) permettra

¹ Les formes hémihédriques dont nous nous occuperons plus loin sont notées $\pi \{hkl\}$ pour l'hémihédrie à faces parallèles; $\kappa \{hkl\}$ pour l'hémihédrie à faces inclinées; et $\lambda \{hkl\}$ pour l'hémihédrie holoaxe.

² Nous nous bornons ici à quelques indications générales, renvoyant pour tout ce qui concerne les calculs, projections, dessins, etc., aux traités spéciaux de Cristallographie géométrique. Parmi les plus récents nous citerons E. MALLARD, *Traité de Cristallographie*, Paris, 1879; — A. BREZINA, *Methodik der Krystalbestimmung*, Vienne, 1884; — T. LIEBISCH, *Geometrische Krystallographie*, Leipzig, 1881; — F. HENRICH, *Lehrbuch der Krystalberechnung*, Stuttgart, 1886; — G. WYROUBOFF, *Manuel pratique de Cristallographie*, Paris, 1889.

de fixer la symétrie du cristal et de trouver le système cristallographique auquel il appartient.

Par exemple (fig. 119), si l'on trouve l'égalité des angles $\widehat{26} = \widehat{51} = \widehat{113} = \widehat{124}$, puis $\widehat{210} = \widehat{19} = \widehat{37} = \widehat{48}$, on en conclut qu'il existe un plan de symétrie passant par les arêtes verticales antérieure et postérieure du prisme; celui-ci a donc au moins la symétrie du prisme rhomboïdal oblique. Si ces huit angles sont tous égaux, il y a encore un plan de symétrie passant par les arêtes latérales et un autre plan de symétrie qui est horizontal. On a affaire alors à un prisme rhomboïdal droit.

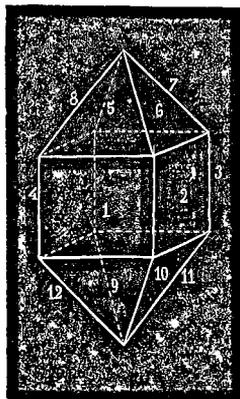


Fig. 119.

Si l'on a de plus $\widehat{56} = \widehat{67} = \widehat{78} = \widehat{85} = \widehat{910} = \widehat{1011}$, etc., puis $\widehat{12} = \widehat{23} = \widehat{34} = \widehat{41} = 90^\circ$, le cristal appartient au prisme droit à base carrée, et ainsi de suite.

36. En général, il sera commode, pour simplifier les figures et les calculs, de supposer le cristal placé au centre d'une sphère l'enveloppant complètement (fig. 120), et de représenter une face par le point P où sa normale vient couper la sphère¹. L'angle des normales à deux faces P et P' est alors égal à l'arc de grand

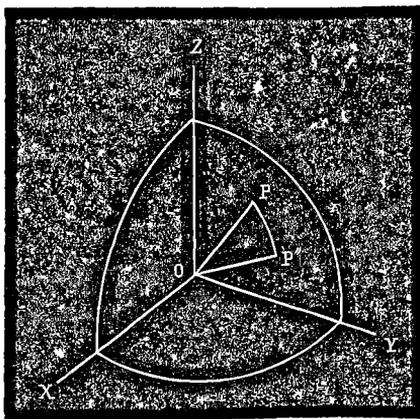


Fig. 120.

¹ L'emploi des projections des faces sur la sphère est dû à NEUMANN, *Beiträge zur Krystallogonomie*, Berlin 1823, ainsi que la détermination des angles par les

cercle PP' , et toutes les questions se résolvent par les formules de la trigonométrie sphérique.

37. Supposons que nous ayons choisi trois arêtes comme axes de coordonnées. Si nous connaissons les angles α, β, γ que ces arêtes comprennent entre elles, et les paramètres a, b, c qui leur correspondent, la position d'une face d'indices donnés (h, k, l) sera complètement déterminée; il en sera de même de l'angle que cette face forme avec une autre face d'indices $(h'k'l')$. On pourra donc dire que l'angle des faces $(hkl), (h'k'l')$ est *fonction* des quantités $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, h, k, l, h', k', l'$, et l'on pourra supposer établie une équation

$$\widehat{(hkl)(h'k'l')} = \varphi(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h, k, l, h', k', l').$$

En attribuant arbitrairement à deux faces des indices quelconques compatibles avec leurs positions par rapport aux axes choisis (§ 34), le premier membre sera donné expérimentalement par la mesure de leur angle, et il restera une équation entre a, b, c , ou simplement $a, b, c/b$ (§ 33), α, β, γ , et des quantités connues. Il suffira donc théoriquement d'établir cinq équations analogues reposant sur cinq mesures d'angles distinctes, pour pouvoir tirer les cinq quantités $\alpha, \beta, \gamma, a/b, c/b$ qui déterminent le cristal.

38. Par exemple, il arrivera fréquemment que l'on prenne pour axes de coordonnées les arêtes d'intersections de trois faces qui existent en réalité sur le cristal. Par suite de ce choix, chacune de ces faces sera parallèle à deux des axes, et on devra leur attribuer les symboles $(001), (010), (100)$ (§ 34). Des angles

normales. *Pogg. Ann.* 1825, IV, 63. Voir aussi BERNHARDI, *J. de Gehlen*, 1809, VIII, (2), 378. ROMÉ DE LISLE et beaucoup d'auteurs après lui se sont servis de l'angle intérieur des faces. L'usage des normales plus commode et plus rationnel est très généralement adopté maintenant.

mutuels de ces trois faces on pourra déduire les angles mutuels de leurs intersections, c'est-à-dire les quantités α, β, γ .

Pour achever la détermination, il faudra attribuer un symbole quelconque (hkl) à une quatrième face; les rapports $a/h : b/k$ et $c/l : b/k$ des distances auxquelles cette face coupe les axes se déduiront aisément des angles qu'elle forme avec les faces choisies en premier lieu; on en tirera les rapports $a/b, c/b$ des paramètres.

En général, les équations signalées théoriquement au § 37 sont trop compliquées pour se prêter à la résolution par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, a/b, c/b$; mais leur existence suffit pour montrer la possibilité du problème. Habituellement, on doit suivre une voie détournée, comme dans l'exemple ci-dessus, où nous remplaçons en définitive trois des équations par la résolution d'un triangle sphérique. On peut en général suivre la marche suivante pour la détermination des paramètres. Soient OX, OY, OZ (fig. 121) les axes, OP la normale à la face (hkl) , qui coupe les axes à des distances $a/h, b/k, c/l$; on a, en projetant ces distances sur OP , les relations

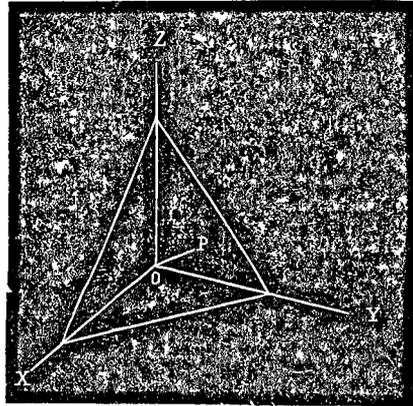


Fig. 121.

$$OP = \frac{a}{h} \cos POX = \frac{b}{k} \cos POY = \frac{c}{l} \cos POZ$$

On déduira les angles POX, POY, POZ des angles directement mesurés, par la résolution d'une série de triangles sphériques convenablement choisis, et, portant leur valeur dans les relations ci-dessus, on aura

$$\frac{a}{b} \frac{k}{h} = \frac{\cos \text{POY}}{\cos \text{POX}} \qquad \frac{c}{b} \frac{k}{l} = \frac{\cos \text{POY}}{\cos \text{POZ}}$$

qui permettront de calculer a/b et c/b , puisque h , k , l ont été arbitrairement choisis.

39. Les constantes du cristal ou, comme l'on dit souvent, sa forme primitive, sont maintenant déterminées. Pour fixer les symboles des diverses faces, on aura ensuite à établir des équations analogues, où a , b , c , α , β , γ seront connus cette fois, et où le premier membre sera l'angle mesuré entre la face d'indices inconnus ($h' k' l'$) et une des faces auxquelles on a déjà attribué des indices (hkl). Deux équations de ce genre pour chaque face permettront de fixer les valeurs de h'/k' , l'/k' , ce qui suffit (§ 33). La remarque faite à la fin du paragraphe précédent est d'ailleurs encore à sa place ici.

*** 40. Choix des axes et nombre des inconnues dans les divers systèmes cristallographiques** ¹. — Dans le prisme bioblique, on prend comme axes de coordonnées trois arêtes quelconques non comprises dans un même plan, en général les intersections de trois faces particulièrement développées ou remarquables par leurs propriétés physiques. On place le cristal de façon que l'une de ces arêtes prise pour axe des Z (paramètre c) soit verticale; sa partie positive est dirigée de bas en haut (fig. 121). Des deux autres arêtes, on prend celle qui a le plus petit paramètre a pour axe des X, et comme direction positive, que l'on dirige en avant, celle qui fait un angle obtus avec OZ. L'axe des Y positif (paramètre b) est pris de gauche à droite. L'angle ZY positif a une valeur quelconque α , l'angle ZX une valeur β , et l'angle XY une valeur γ .

¹ En général le choix des axes doit être tel que les indices des diverses faces d'une même forme simple ne diffèrent que par leurs signes et par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Les quantités qui déterminent la forme primitive du cristal sont donc les trois angles α , β , γ , et les rapports a/b , c/b de deux paramètres au troisième, soit en tout *cinq* quantités. Il faudra donc cinq équations et cinq mesures d'angles au moins.

* 41. Dans le prisme rhomboïdal oblique, il existe un axe de symétrie binaire, normal à un plan de symétrie. On place le cristal de manière que le plan de symétrie soit vertical et dirigé d'avant en arrière (fig. 122). La portion de l'axe binaire qui est dirigée vers la droite est prise comme axe des Y positif. On choisit ensuite pour axes des X et des Z deux arêtes possibles parallèles au plan de symétrie, habituellement les intersections de deux groupes de faces importantes. L'axe des Z est pris vertical, de bas en haut, l'axe des X positif est incliné d'arrière en avant, formant un angle obtus β avec l'axe des Z.

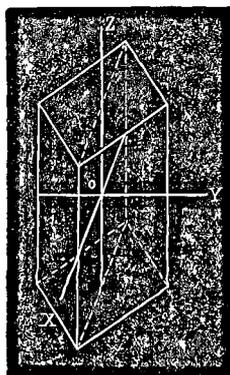


Fig. 122.

On a donc $ZY = \alpha = 90^\circ$; $XY = \gamma = 90^\circ$; il ne reste à déterminer que trois constantes, l'angle β et les rapports a/b , c/b . Il faut au moins trois équations et trois mesures d'angles.

* 42. Dans le prisme rhomboïdal droit, il y a trois axes de symétrie binaires rectangulaires entre eux. On prend l'une de ces lignes comme axe des Z, et des deux autres celle qui a le plus petit paramètre comme axe des X. Cela revient à placer le cristal (fig. 123) de telle sorte que le prisme que l'on regarde comme le plus important ait ses angles obtus en avant et en arrière.

Les trois angles $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ sont ainsi fixés par la symétrie même du cristal, il ne reste à déterminer que les rapports a/b , c/b , c'est-à-dire deux quantités seulement.

* 43. Dans le prisme droit à base carrée, l'axe principal quaternaire est pris comme axe des Z, et l'un des deux systèmes d'axes binaires, pris comme axes de première espèce, forme les axes des X et des Y (fig. 124). Les trois angles valent 90° ; de plus, les axes des X et des Y étant de même espèce, on peut toujours prendre leurs paramètres égaux $a = b$. Il n'y aura

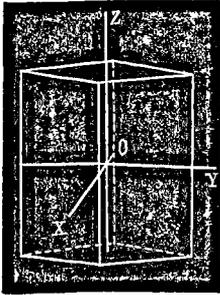


Fig. 123.

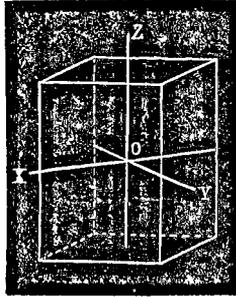


Fig. 124.

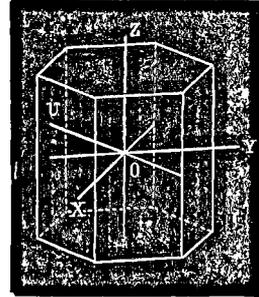


Fig. 125.

d'inconnu que le rapport c/a du paramètre vertical au paramètre horizontal. Une seule mesure d'angle suffira.

* 44. Dans le système hexagonal, l'axe des Z est l'axe sénaire principal, les axes des X et des Y deux des axes binaires considérés comme de première espèce (fig. 125). On a donc $ZY = \alpha = 90^\circ$; $ZX = \beta = 90^\circ$; $XY = \gamma = 120^\circ$. De plus $a = b$, il ne reste à déterminer que le rapport c/a , comme dans le système quadratique.

Souvent pour donner aux formules plus de symétrie, pour que les diverses faces d'une même forme simple soient représentées par les permutations des mêmes indices, on se sert du troisième axe binaire OU comme d'un axe de coordonnées auxiliaire, et on représente chaque face par un symbole à quatre caractéristiques ($hkul$); mais on n'en a naturellement pas besoin pour le calcul¹.

¹ Les notations à quatre caractéristiques ont été introduites par C.-S. WEISS; *Abh. Akad. Berlin*, 1816-17, 321.

Quelquefois, dans les cristaux rhomboédriques ¹ (voyez plus loin Chapitre V), on prend comme axes de coordonnées les trois arêtes culminantes d'un rhomboèdre, les parties positives étant dirigées vers le haut (fig. 126). Ces trois arêtes sont de même espèce, leurs paramètres sont égaux et peuvent être pris = 1. Il n'y a encore qu'une seule constante à déterminer, l'angle que ces arêtes comprennent entre elles, et qui est le même pour toutes trois.

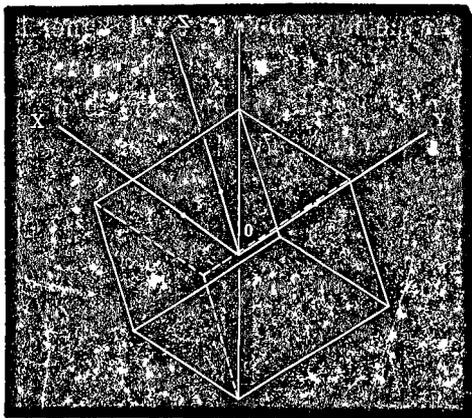


Fig. 126.

* 45. Dans le système cubique, on prend comme axes les trois axes quaternaires; on a donc $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, et $a = b = c = 1$; la forme primitive est toute déterminée par la symétrie même du cristal.

* 46. Notation de Weiss ². — On prend comme indices des faces les longueurs numériques p, q, r (§ 33) elles-mêmes, et non leurs inverses. Les paramètres relatifs aux axes des X, Y et Z étant toujours respectivement a, b et c , une face est notée

$$pa : qb : rc$$

On peut laisser les trois longueurs numériques sous forme

¹ G. LAMÉ, *Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris 1818, 97.

² C.-S. WEISS, *Abh. Akad. Berlin*, 1816-17, 305. Voyez RAMMELSBERG, *Physikalische Chemie*, Leipzig 1881.

entière, ou bien aussi les diviser toutes par l'une d'entre elles, le symbole devient alors

$$a : \frac{q}{p} b : \frac{r}{p} c \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} a : b : \frac{r}{q} c, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{r} a : \frac{q}{r} b : c$$

Le même symbole sert à désigner la forme simple correspondante; et s'il est utile de distinguer une face qui coupe un axe du côté négatif, on accentue le paramètre relatif à cet axe. Ainsi une face $\{hkl\}$ de Miller est notée

$$a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$$

et une face $\{\bar{h}kl\}$ est notée

$$a' : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$$

Les axes de coordonnées sont généralement ceux que nous avons définis aux paragraphes précédents, sauf que, pour le système hexagonal, nos axes OX et OU (fig. 125) sont appelés respectivement OU et — OX; le symbole d'une face, en appelant s la longueur numérique relative à l'axe OU, s'écrit

$$sa : pa : qa : rc$$

*** 47. Notation de Naumann¹.** — Dans le système cubique, une forme quelconque est représentée par le symbole mOn , m et n étant les rapports des deux plus grandes longueurs numériques à la plus petite, et m étant le plus grand de ces rapports. On n'écrit jamais un rapport égal à l'unité; on a donc pour l'octaèdre $\{111\}$, où $p = q = r$, et $m = n = 1$, la notation O; pour le cube $\{100\}$, où $p = 1$, $q = r = \infty$, et $m = \infty$, $n = \infty$, la notation $\infty O \infty$; pour le dodécaèdre rhomboïdal $\{110\}$, où $p = q = 1$, $r = \infty$, et $m = \infty$, $n = 1$,

¹ C.-F. NAUMANN, *Grundriss der Krystallographie*, Leipzig 1826.

la notation ∞O ; pour le trapèzoèdre $\{hkk\}$ avec $h > k : \frac{h}{k} O \frac{h}{k}$; pour l'octaèdre pyramidé $\{hkk\}$ avec $h > k : \frac{h}{k} O$.

Dans les autres systèmes cristallographiques, la lettre O est remplacée par la lettre P; on divise les trois longueurs numériques par la plus petite de celles qui se rapportent aux axes horizontaux, on met à gauche de P le rapport relatif à l'axe des Z vertical, et à droite l'autre rapport qui est plus grand que 1. Ainsi une forme $\{\frac{1}{p} \frac{1}{q} \frac{1}{r}\}$ est notée $\frac{r}{p} P \frac{q}{r}$ si $q > p$, et $\frac{r}{q} P \frac{p}{q}$ si $p > q$.

Dans le prisme droit à base carrée, les deux axes des X et des Y étant de même espèce, cette notation est suffisante. Dans le prisme rhomboïdal droit, les deux faces notées de la même manière appartiennent à des formes simples différentes. On met alors \bar{P} ou \bar{P} au lieu de P, suivant que le rapport qui est à droite est relatif à l'axe des X ou à l'axe des Y. Ainsi la forme $\{\frac{1}{p} \frac{1}{q} \frac{1}{r}\}$ est notée $\frac{r}{p} \bar{P} \frac{q}{p}$ si $q > p$, et $\frac{r}{q} \bar{P} \frac{p}{q}$ si $q < p$.

Dans le prisme rhomboïdal oblique, on opère de même, sauf que le symbole \bar{P} est remplacé par \mathbf{P} pour l'axe des Y horizontal, et le symbole \bar{P} par \mathbf{P} pour l'axe des X incliné. Pour distinguer les formes qui, coupant l'axe des Z dans sa partie positive, rencontrent l'axe des X du côté antérieur, de celles qui le rencontrent du côté postérieur, on met le signe + devant le symbole de ces dernières, et le signe — devant le symbole des premières.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi la forme } \{123\} & \text{ est notée } - \frac{2}{3} \mathbf{P} 2, \\ & \gg \quad \{\bar{1}23\} \quad \gg \quad + \frac{2}{3} \mathbf{P} 2, \\ & \gg \quad \{213\} \quad \gg \quad - \frac{2}{3} \mathbf{P} 2, \\ & \gg \quad \{\bar{2}13\} \quad \gg \quad + \frac{2}{3} \mathbf{P} 2. \end{aligned}$$

Dans le prisme bioblique, la notation s'établit comme dans le

prisme rhomboïdal droit, mais les quatre formes qui coupent l'axe des X dans sa partie antérieure étant alors notées de la même manière, on ajoute, pour les distinguer, un accent à gauche ou à droite, en haut ou en bas de la lettre P.

Ainsi la forme $\} 123 \{$ est notée $\frac{2}{3} \overset{\cdot}{P} 2,$
 » $\} 12\bar{3} \{$ » $\frac{2}{3} \overset{\cdot}{P} 2,$
 » $\} \bar{1}2\bar{3} \{$ » $\frac{2}{3} \underset{\cdot}{P} 2,$
 » $\} \bar{1}23 \{$ » $\frac{2}{3} \overset{\cdot}{P} 2,$
 » $\} 213 \{$ » $\frac{2}{3} \overset{\cdot}{P} 2,$

et ainsi de suite.

Dans le système hexagonal, on prend comme axes de coordonnées l'axe sénnaire vertical et trois axes binaires horizontaux de même espèce. On divise les quatre longueurs numériques par la plus petite de celles qui se rapportent aux axes horizontaux, on écrit, à gauche de P, la fraction relative à l'axe vertical, et à droite le plus petit des deux autres rapports ¹.

* 48. Notation de Lévy². — On définit une forme simple en donnant la position de l'une de ses faces, non plus par rapport à des axes de coordonnées menés par le centre du cristal, mais par rapport aux arêtes mêmes de la forme primitive.

Dans ce but, chaque arête et chaque angle de la forme primitive est désignée par une lettre déterminée ³; ces notations

¹ Pour l'hémiédrie rhomboédrique, on remplace la lettre P par la lettre R, et on distingue les formes directes et inverses par les signes + et — placés devant leurs symboles.

² A. LÉVY, *Description d'une collection de minéraux formée par M. Heuland* Londres 1837. Voir pour plus de détails DES CLOIZEAUX, *Traité de minéralogie*, Paris 1862, I, p. VII, et MALLARD, *Traité de cristallographie*, Paris 1879, I.

³ Ce mode de désignation avait déjà été employé par HAÛY, *J. des Mines*, 1796, IV, 15; et *Traité de Minéralogie*, Paris 1801, I, 109 et 115.

sont celles que nous avons employées au Chapitre II. Les quatre angles différents du prisme bioblique de la fig. 115 sont désignés par les voyelles a, e, i, o ; les six arêtes différentes par les consonnes b, c, d, f, g, h ; le nombre des lettres nécessaires se réduit à mesure que la symétrie augmente, ainsi que l'indiquent les fig. 107, 96, 81, 59, 21.

Une face qui coupe trois arêtes d, f, h aboutissant à un même angle à des distances proportionnelles à p, q, r fois les paramètres de ces arêtes est notée

$$d^p f^q h^r$$

Ce système est complété par des notations abrégées pour les faces les plus fréquentes.

Une face parallèle à une arête, notée par exemple $d^\infty f^q h^r$, est représentée simplement par $d^{q/r}$, q/r étant le rapport de la longueur numérique horizontale à la longueur verticale.

Lorsque, comme dans le système cubique ou dans le système rhomboédrique, les trois arêtes aboutissant à un même angle sont de même espèce, on prend pour q/r le rapport de la plus grande longueur numérique à la plus petite. Ainsi, le dodécaèdre rhomboïdal $\{110\}$ est noté b^1 , un cube pyramidé $\{210\}$ est noté b^2 .

Une face qui donne sur deux arêtes horizontales des longueurs numériques égales, telle que $d^p f^p h^r$, est désignée simplement par la lettre qui représente l'angle solide, avec un exposant égal au rapport de la longueur horizontale à la longueur verticale, c'est-à-dire par $o^{p/r}$. Ainsi, dans le système cubique, on représente l'octaèdre $\{111\}$ par a^1 , le trapézoèdre $\{211\}$ par a^2 , l'octaèdre pyramidé $\{221\}$ par $a^{1/2}$.

* 49. Tableau des formes simples des six systèmes cristallographiques et de leurs notations¹.

SYSTÈME CUBIQUE

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Cube.....	100	$a : \infty a : \infty a$	p	$\infty 0 \infty$
Octaèdre.....	111	$a : a : a$	a^1	0
Dodécaèdre rhomboïdal..	110	$a : a : \infty a$	b^1	$\infty 0$
Cubes pyramidés..... $h > k$	$hk0$	$a : \frac{h}{k} a : \infty a$	$b^{\frac{h}{k}}$	$\infty 0 \frac{h}{k}$
Trapézoèdres..... $h > k$	hkk	$a : a : \frac{k}{h} a$	$a^{\frac{h}{k}}$	$\frac{h}{k} 0 \frac{h}{k}$
Octaèdres pyramidés.... $h > k$	hkk	$a : a : \frac{h}{k} a$	$a^{\frac{k}{h}}$	$\frac{h}{k} 0$
Hexakisoctaèdres..... $h > k > l$	hkl	$a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} a$	$b^{\frac{1}{l}} b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{h}}$	$\frac{h}{l} 0 \frac{h}{k}$

SYSTÈME QUADRATIQUE

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Base.....	001	$\infty a : \infty a : c$	p	0 P
Protoprisme.....	110	$a : a : \infty c$	m	∞P
Deutéoprisme.....	100	$a : \infty a : \infty c$	h^1	$\infty P \infty$

¹ Les notations de MILLER contenues dans ces tableaux se rapportent aux axes et aux formes primitives définis dans les paragraphes précédents et qui sont le plus généralement adoptés actuellement; elles ne concordent pas tou-

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Protopyramides	hhl	$a : a : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P$
Deutéropyramides	hOl	$a : \infty a : \frac{h}{l} c$	$a^{\frac{l}{h}}$	$\frac{h}{l} P \infty$
Prismes octogones $h > k$	$hk0$	$a : \frac{h}{k} a : \infty c$	$h^{\frac{h+k}{h-k}}$	$\infty P \frac{h}{k}$
Pyramides octogones $h > k$	hkl	$a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$

SYSTÈME HEXAGONAL

	BRAVAIS	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Base	0001	$\infty a : \infty a : \infty a : c$	p	0 P
Protoprisme	$10\bar{1}0$	$\infty a : a : a : \infty c$	m	∞P
Deutéoprisme	$11\bar{2}0$	$2 a : a : 2 a : \infty c$	h^1	$\infty P 2$
Protopyramides	$hO\bar{h}l$	$\infty a : a : a : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{l}{h}}$	$\frac{h}{l} P$
Deutéropyramides	$hh\bar{2}hl$	$2 a : a : 2 a : \frac{2h}{l} c$	$a^{\frac{l}{h}}$	$\frac{2h}{l} P 2$
Prismes dodécagones $h > k, u = h + k$	$hku\bar{0}$	$\frac{u}{h} a : a : \frac{u}{k} a : \infty c$	$h^{\frac{h}{k}}$	$\infty P \frac{u}{h}$
Pyramides dodécagones $h > k, u = h + k$	$hku\bar{l}$	$\frac{u}{h} a : a : \frac{u}{k} a : \frac{u}{l} c$	$b^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{h}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{u}{l} P \frac{u}{h}$

jours avec les notations originales de MILLER qui employait des axes différents des nôtres dans le système rhombique et dans le système hexagonal. Pour l'ordre des axes adoptés par les divers auteurs, voyez LIEBISCH, *Geometrische Krystallographie*, chap. XX. Pour les notations adoptées par MILLER, LÉVY, NAUMANN dans le système rhomboédrique, voyez MALLARD, *Cristallographie*, I, 540.

SYSTÈME RHOMBIQUE

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Pinacoïde basique	001	$\infty a : \infty b : \infty c$	p	OP
Brachypinacoïde	010	$\infty a : b : \infty c$	g^1	$\infty \bar{P} \infty$
Macropinacoïde	100	$a : \infty b : \infty c$	h^1	$\infty \bar{P} \infty$
Protoprisme	110	$a : b : \infty c$	m	∞P
Brachyprismes $k > h$	$hk0$	$\frac{k}{h} a : b : \infty c$	$g^{\frac{k+h}{k-h}}$	$\infty \bar{P} \frac{k}{h}$
Macroprismes $h > k$	$hk0$	$a : \frac{h}{k} b : \infty c$	$h^{\frac{h+k}{h-k}}$	$\infty \bar{P} \frac{h}{k}$
Brachydômes	OkL	$\infty a : b : \frac{k}{l} c$	$e^{\frac{l}{k}}$	$\frac{k}{l} P \infty$
Macrodomes	hOl	$a : \infty b : \frac{h}{l} c$	$a^{\frac{l}{h}}$	$\frac{h}{l} P \infty$
Protopyramides	hhl	$a : b : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P$
Brachypyramides $k > h$	hkl	$\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c$	$b^{\frac{1}{k+h}} b^{\frac{1}{k-h}} g^{\frac{1}{l}}$	$\frac{k}{l} P \frac{k}{h}$
Macropyramides $h > k$	hkl	$a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} \bar{P} \frac{h}{k}$

SYSTÈME CLINORHOMBIQUE

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Pinacoïde basique	001	$\infty a : \infty b : c$	p	OP
Clinopinacoïde	010	$\infty a : b : \infty c$	g^1	$\infty P \infty$

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Orthopinacoïde.....	100	$a : \infty b : \infty c$	h^1	$\infty P \infty$
Protoprisme.....	110	$a : b : \infty c$	m	∞P
Clinoprismes..... $h < k$	$hk0$	$\frac{k}{h} a : b : \infty c$	$g^{\frac{h+k}{k-h}}$	$\infty P \frac{k}{h}$
Orthoprismes..... $h > k$	$hk0$	$a : \frac{h}{k} b : \infty c$	$h^{\frac{h+k}{h-k}}$	$\infty P \frac{h}{k}$
Clinodômes.....	$0kl$	$\infty a : b : \frac{k}{l} c$	$e^{\frac{l}{k}}$	$\frac{k}{l} P \infty$
Hémiorthodômes antér...	$h0l$	$a : \infty b : \frac{h}{l} c$	$o^{\frac{l}{h}}$	$-\frac{h}{l} P \infty$
Hémiorthodômes postér..	$\bar{h}0l$	$a' : \infty b : \frac{h}{l} c$	$a^{\frac{l}{h}}$	$+\frac{h}{l} P \infty$
Hémiptopyramides ant..	hhl	$a : b : \frac{h}{l} c$	$d^{\frac{l}{2h}}$	$-\frac{h}{l} P$
Hémiptopyramides post.	$\bar{h}hl$	$a' : b : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{l}{2h}}$	$+\frac{h}{l} P$
Hémiclinopyramides ant.. $h < k$	hkl	$\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c$	$d^{\frac{1}{k-h}} b^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}$	$-\frac{k}{l} P \frac{k}{h}$
Hémiclinopyramides post. $h < k$	$\bar{h}kl$	$\frac{k}{h} a' : b : \frac{k}{l} c$	$b^{\frac{1}{k-h}} d^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}$	$+\frac{k}{l} P \frac{k}{h}$
Hémiorthopyramides ant.. $h > k$	hkl	$a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$	$d^{\frac{1}{h-k}} d^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$-\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$
Hémiorthopyramides post. $h > k$	$\bar{h}kl$	$a' : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$	$b^{\frac{1}{h-k}} b^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$+\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$

SYSTÈME TRICLINIQUE

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN
Pinacoïde basique	001	$\infty a : \infty b : c$	p	OP
Brachypinacoïde	010	$\infty a : b : \infty c$	g^1	$\infty P \infty$
Macropinacoïde	100	$a : \infty b : \infty c$	h'	$\infty P \infty$
Protoprisme droit	110	$a : b : \infty c$	t	$\infty P'$
Protoprisme gauche	$\bar{1}10$	$a : b' : \infty c$	m	$\infty P'$
Brachyprismes droits $h < k$	$hk0$	$\frac{k}{h} a : b : \infty c$	$g^{\frac{h+k}{k-h}}$	$\infty P', \frac{k}{h}$
Brachyprismes gauches $h < k$	$\bar{h}k0$	$\frac{k}{h} a : b' : \infty c$	$g^{\frac{k+h}{k-h}}$	$\infty P', \frac{k}{h}$
Macroprismes droits $h > k$	$hk0$	$a : \frac{h}{k} b : \infty c$	$h^{\frac{h+k}{h-k}}$	$\infty P', \frac{h}{k}$
Macroprismes gauches $h > k$	$\bar{h}k0$	$a : \frac{h}{k} b' : \infty c$	$h^{\frac{h+k}{h-k}}$	$\infty P', \frac{h}{k}$
Brachydômes droits	$0kl$	$\infty a : b : \frac{k}{l} c$	$i^{\frac{l}{k}}$	$\frac{k}{l} P' \infty$
Brachydômes gauches	$0\bar{k}l$	$\infty a : b' : \frac{k}{l} c$	$e^{\frac{l}{k}}$	$\frac{k}{l} P' \infty$
Macrodomes antérieurs	$h0l$	$a : \infty b : \frac{h}{l} c$	$o^{\frac{l}{h}}$	$\frac{h}{l} P' \infty$
Macrodomes postérieurs	$\bar{h}0l$	$a' : \infty b : \frac{h}{l} c$	$a^{\frac{l}{h}}$	$\frac{h}{l} P' \infty$

	MILLER	WEISS	LÉVY	NAUMANN	
Protopyramides supérieures	droites	hhl	$a : b : \frac{h}{l} c$	$f^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P'$
	gauches	$h\bar{h}l$	$a : b' : \frac{h}{l} c$	$d^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P$
Protopyramides inférieures	droites	$hh\bar{l}$	$a : b : \frac{h}{l} c'$	$b^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P,$
	gauches	$h\bar{h}\bar{l}$	$a : b' : \frac{h}{l} c'$	$c^{\frac{l}{2h}}$	$\frac{h}{l} P$
Brachypyramides supérieures $h < k$	droit.	hkl	$\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c$	$c^{\frac{1}{h+k}} f^{\frac{1}{k-h}} g^{\frac{1}{l}}$	$\frac{k}{l} P', \frac{k}{h}$
	gauch.	$h\bar{k}l$	$\frac{k}{h} a : b' : \frac{k}{l} c$	$d^{\frac{1}{k-h}} b^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}$	$\frac{k}{l} P, \frac{k}{h}$
Brachypyramides inférieures	droit.	hkl	$\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c'$	$d^{\frac{1}{k+h}} b^{\frac{1}{k-h}} g^{\frac{1}{l}}$	$\frac{k}{l} P, \frac{k}{h}$
	gauch.	$h\bar{k}l$	$\frac{k}{h} a : b' : \frac{k}{l} c'$	$c^{\frac{1}{k-h}} f^{\frac{1}{k+h}} g^{\frac{1}{l}}$	$\frac{k}{l} P, \frac{k}{h}$
Macropyramides supérieures $h > k$	droites	hkl	$a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$	$d^{\frac{1}{h+k}} f^{\frac{1}{h-k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} P', \frac{h}{k}$
	gauch.	$h\bar{k}l$	$a : \frac{h}{k} b' : \frac{h}{l} c$	$d^{\frac{1}{h-k}} f^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} P, \frac{h}{k}$
Macropyramides inférieures	droites	hkl	$a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c'$	$b^{\frac{1}{h-k}} c^{\frac{1}{h+k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} P, \frac{h}{k}$
	gauch.	$h\bar{k}l$	$a : \frac{h}{k} b' : \frac{h}{l} c'$	$b^{\frac{1}{h+k}} c^{\frac{1}{h-k}} h^{\frac{1}{l}}$	$\frac{h}{l} P, \frac{h}{k}$

CHAPITRE IV

SYMÉTRIE GÉOMÉTRIQUE ET SYMÉTRIE PHYSIQUE

50. Relations entre la loi de dérivation et la symétrie cristallographique ¹. — Nous avons maintenant à signaler un fait extrêmement remarquable. C'est qu'en dehors des six systèmes cristallographiques que nous venons de passer en revue, il ne peut exister aucune forme simple complète, c'est-à-dire comprenant toutes les faces géométriquement semblables qui sont compatibles avec la loi de dérivation. Cette conséquence purement géométrique d'une loi qui est elle-même purement géométrique ne définit naturellement que la symétrie géométrique de l'orien-

¹ La découverte de ces relations paraît avoir son origine dans les travaux de SEEBER, de GAUSS; voyez LIEBISCH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1879, III, 26; et surtout de HESSEL. Hessel a le premier déduit de la loi de dérivation la possibilité des trente-deux systèmes de symétrie qui sont universellement admis actuellement. Article *Krystallographie* dans le *Physikalisches Wörterbuch de Gehler*, 1830; voyez SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1891, XVIII, 486. Le travail de Hessel ne fut pas remarqué et la même question fut reprise indépendamment par FRANKENHEIM, *Nov. Act. Acad. Nat. Cur.* 1842, XIX, 471; par MÖBIUS, *Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss.* 1849, I, 45; 1851, III, 19; et *Œuvres*, II, 567; et par BRAVAIS, *J. de Liouville*, 1849, XIV, 141; *J. de l'École Polyt.* 1850, Cah. XXXIII, 1; 1851, Cah. XXXIV, 101. Ces relations ont été développées depuis lors, soit d'une

tation des faces qui peuvent exister, des angles qu'elles comprennent entre elles. On voit immédiatement par exemple que, quels que soient les axes choisis, si une face les coupe à des distances $pa : qb : rc$, la loi de rationalité des indices implique la possibilité d'une autre face qui les couperait aux distances $-pa : -qb : -rc$, et qui serait par suite parallèle à la première. Le polyèdre cristallographique possible a donc ses faces parallèles deux à deux et possède un centre de symétrie (§ 6).

Mais la loi de rationalité des indices n'implique pas que toutes les faces cristallographiquement possibles aient des structures identiques. L'exemple schématique donné à la fig. 18 (§ 12) nous montre au contraire que l'on peut imaginer une structure telle que les deux faces opposées du cristal, tout en étant parallèles comme le veut la loi de rationalité, aient cependant des structures différentes qui les fassent se développer différemment dans des conditions extérieures identiques. Des considérations analogues s'appliqueraient aux axes et aux plans de symétrie tout aussi bien qu'au centre que nous avons pris pour exemple.

51. Symétrie et syngonie. — Il y a donc lieu de distinguer soigneusement les deux notions de la symétrie extérieure

manière purement géométrique, soit en partant de la supposition, équivalente à la loi de dérivation, que les molécules des corps cristallisés forment des réseaux à mailles parallélépipédiques par v. BEZOLD, *Sitzungsber. Akad. München*, 1863, II, 350; — V. v. LANG, *Lehrb. der Krystallographie*, Vienne, 1866; — SOHNCKE, *Pogg. Ann.* 1867, CXXXII, 75; et *Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur*, Leipzig 1879; — GADOLIN, *Acta Soc. fennic.* 1871, IX, 1; — E. SELLING, *J. de Liouville*, 1877, III, 21; — J.-S. SMITH, *Phil. Mag.* 1877, IV, 18; — G. UZIELLI, *Mem. Acad. Linc.* 1877; — E. MALLARD, *Traité de Cristallographie*, Paris 1879; — P. CURIE, *Bull. Soc. min.* 1884, VII, 89, 418; — FEDOROW, *Soc. min. St-Petersbourg*, 1884, XX, 334; — MINNIGERODE, *N. Jahrb.* 1887, Beilagebd. V, 143. Voyez A. SCHENFLIES, *Krystalssysteme und Krystalstruktur*, Leipzig 1891.

et géométrique de l'orientation des faces, et de la symétrie intérieure et physique de la structure cristalline ¹.

Ce qui a été dit au § 11 montre que la symétrie physique doit entraîner la symétrie géométrique des formes; ce que nous venons de dire montre que l'inverse n'est pas nécessairement vrai, et que la symétrie physique peut être inférieure à la symétrie géométrique.

Pour abrégé et éviter les confusions, nous donnerons dans ce qui suit le nom de *syngonie* à la symétrie géométrique de l'orientation des faces possibles, et réserverons le nom de *symétrie* à la symétrie physique de la structure intérieure. Nous appellerons *système de syngonie*, l'ensemble des polyèdres qui présentent les mêmes éléments de symétrie géométrique (*centre, plans et axes de syngonie*) et nous conserverons le nom de *système de symétrie* à l'ensemble des polyèdres qui ont la même symétrie physique de leur structure. Le théorème énoncé au § 50 consiste donc en ce qu'il n'y a que six systèmes de syngonie qui soient compatibles avec la loi de dérivation, et qu'ils se confondent avec les six systèmes cristallographiques du § 16.

*** 52. Centre de syngonie.** — Nous donnerons ici une démonstration abrégée de ce théorème important ². Nous avons

¹ La distinction entre la symétrie géométrique et la symétrie physique a été comprise seulement depuis les travaux de DELAFOSSE, *Mém. Sav. Étrang.* 1843, VIII, 641; *C. R.* 1840, XI, 394; XII, 205; 1857, XLIV, 229; et de BRAVAIS, *J. de l'École polyt.* 1851, Cah. XXXIV, 101. La symétrie géométrique indépendante des propriétés physiques a été désignée par M. v. LANG sous le nom d'*isoschématisme*; *Lehrb. d. Krystallog.* Vienne 1866, 56. M. BREZINA, *Methodik der Krystalbestimmung*, Vienne 1884, 272, l'appelle *isogonie*. Le premier de ces noms est un peu long; le second est quelquefois employé en cristallographie chimique dans un sens différent.

² Le fond de cette démonstration est tiré principalement du *Traité de Cristallographie* de M. MALLARD et de la *Theorie der Krystalstruktur* de M. СОННЦЕ. Voyez, pour plus de détails, les travaux cités en note au § 50.

déjà remarqué dans l'exemple du § 50 que si une face est donnée, la loi de dérivation permet toujours l'existence de sa parallèle. Le polyèdre complet aura donc ses faces parallèles deux à deux. Il y a toujours un centre de syngonie.

*** 53. Système triclinique.** — Nous observerons ensuite que l'existence d'un plan de syngonie P entraîne nécessairement l'existence d'un axe de syngonie L d'ordre pair qui lui est normal, et réciproquement. En effet, une face quelconque A, doit être accompagnée de sa symétrique A₁ par rapport à P. Chacune d'elles ayant sa parallèle, puisqu'il y a toujours un centre, on obtient quatre faces semblables, également inclinées sur P, et qui se substituent deux par deux les unes aux autres par une rotation de 180° de la figure autour de la normale L. Comme il en est de même pour toutes les faces, L est un axe de syngonie d'ordre pair. La réciproque est évidente.

Il en résulte qu'*une forme simple ne possédant pas d'axe de syngonie rentre nécessairement dans le système triclinique.* Elle ne possède aucun plan de syngonie, mais seulement un centre, et se compose seulement de deux faces parallèles.

*** 54. Axes de syngonie.** — Tout axe de syngonie est parallèle à une arête possible, et perpendiculaire à des arêtes possibles. Soit en effet L un axe, A une arête quelconque de paramètre a , formant avec L un angle quelconque.

Nous supposons toujours les arêtes remplacées par leurs parallèles menées par le centre de la figure.

Si L est d'ordre pair, une rotation de 180° autour de L amènera A à prendre la place d'une arête A' de même paramètre. Les arêtes A et A' sont également inclinées par rapport à L. Toutes les faces possibles qui coupent A à la distance pa , et A'

à la distance $-pa$, sont parallèles à l'axe de syngonie. Celui-ci est donc parallèle à leur intersection, qui est une arête possible. D'autre part, l'intersection de toutes les faces possibles qui coupent A et A' à la même distance $+pa$ est une arête possible, perpendiculaire à L.

Si L est impair d'ordre $(2n + 1)$, une arête quelconque A, est accompagnée de $2n$ arêtes semblables, A_2, A_3, A_n, A_{2n+1} , également inclinées sur L et situées dans des plans équidistants passant par l'axe. Celui de ces plans qui passe par l'arête A_{n+1} , par exemple, bisseque l'angle des arêtes A_1 et A_{2n+1} ; il est parallèle à une face possible parallèle à l'arête A_{n+1} , coupant l'arête A, à la distance pa et l'arête A_{2n+1} à la distance $-pa$. Comme il en est de même des $2n$ autres plans déterminés chacun par L et l'une des arêtes A, on voit que leur intersection L est une arête possible. Une face coupant les diverses arêtes A à des distances égales $+pa$ est possible et perpendiculaire à L. Ses intersections avec d'autres faces quelconques seront des arêtes possibles perpendiculaires à L.

* 55. Soit L un axe d'ordre n , et A la direction d'une arête quelconque contenue dans un plan normal à cet axe. On peut évidemment trouver, dans ce plan, n arêtes de l'espèce A, comprenant entre elles des angles égaux $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, puisque par une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de L tout élément de la figure doit être remplacé par un élément semblable.

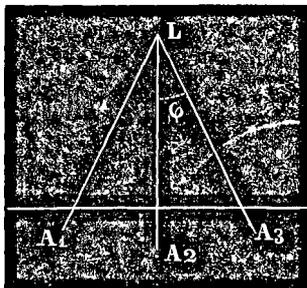


Fig. 127.

Parmi ces arêtes équidistantes qui ont le même paramètre a , prenons-en (fig. 127) trois consécutives A_1, A_2, A_3 . Une face possible coupant la première et la troisième à

une même distance pa coupe la seconde à la distance $pa \cos \varphi$. Or puisque A_2 a le même paramètre a que les deux autres, il faut que $p \cos \varphi$ soit rationnel. Comme $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, cela ne peut avoir lieu que pour les valeurs suivantes :

$\varphi = 0$ ou 2π ;	$\cos \varphi = 1$;	$n = 1$
$\varphi = \pi$;	$\cos \varphi = -1$;	$n = 2$
$\varphi = \frac{2\pi}{3}$;	$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$;	$n = 3$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$;	$\cos \varphi = 0$;	$n = 4$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$;	$\cos \varphi = \frac{1}{2}$;	$n = 6$

En laissant de côté la valeur $n = 1$, qui correspond au cas où la normale au plan considéré ne serait pas un axe de syngonie, on voit que l'ordre d'un axe compatible avec la loi de dérivation ne peut être que 2, 3, 4 ou 6.

*** 56. Axes binaires.** — Soient deux axes binaires L_1 et L'_1 (fig. 128). Une rotation de 180° autour de L'_1 amène L_1 dans une position symétrique L_2 . La droite L_2 , située dans le plan de L_1 et L'_1 , doit être aussi un axe binaire semblable à L_1 . En procédant de même par une rotation autour de L_2 , on obtient un nouvel axe équidistant L'_2 dans le même plan et semblable à L'_1 , et ainsi de suite. Le plan des deux axes proposés contient

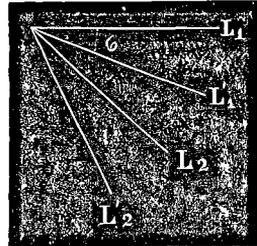


Fig. 128.

donc une série d'axes binaires alternativement semblables à L_1 et L'_1 , comprenant entre eux des angles égaux φ . Si nous avons eu soin de choisir L_1 et L'_1 , de telle sorte que, dans ce plan, il n'existe pas d'axes plus rapprochés, on devra forcément, après avoir fait un tour entier autour de la normale à ce plan, retom-

ber sur l'axe L , ; l'angle 2φ compris entre deux axes L adjacents sera donc un sous-multiple $\frac{2\pi}{n}$ de la circonférence. Si n est pair, la moitié des axes L se confond avec les prolongements de l'autre moitié; les $n/2$ axes L distincts sont alors d'espèce différente des $n/2$ axes L' . Si n est impair, chaque axe L se confond avec le prolongement d'un axe L' . Les axes L et L' sont alors identiques, au nombre de n axes distincts. Si l'on fait tourner successivement la figure de 180° autour de L' , puis de 180° autour de L , on remplace chaque élément de la figure par un élément identique. Or il est facile de voir que cette double rotation équivaut à une rotation unique égale $\frac{2\pi}{n}$ autour de la normale au plan qui contient les n axes binaires. Cette normale est donc un axe d'ordre n .

*** 57. Système clinorhombique.** — Supposons maintenant qu'une forme simple possède un ou plusieurs axes de syngonie, mais qu'elle n'en ait pas d'ordre supérieur à deux. Plaçons-la de manière qu'un de ses axes binaires L soit vertical. Il y a nécessairement alors un plan de syngonie horizontal (§ 53).

S'il n'y a pas d'autre axe binaire, il ne peut y avoir non plus d'autre plan de syngonie. Donc *une forme complète possédant seulement un axe de syngonie binaire rentre forcément dans le système clinorhombique.*

*** 58. Système rhombique.** — S'il existe un second axe binaire L' , il doit former avec le premier un angle $\frac{2\pi}{2n}$, et être accompagné d'un axe d'ordre n , L'' , perpendiculaire au plan des deux autres (§ 56). La figure n'ayant, par hypothèse, aucun axe d'ordre supérieur à 2, il faut que n soit égal à 2, et les deux axes L' et L'' sont perpendiculaires entre eux et contenus dans le plan de syngonie horizontal. Les trois axes sont d'espèces différentes, car des axes de même espèce ne pourraient comprendre qu'un

anglè $\frac{2\pi}{n}$ ou 180° dans le cas de $n = 2$. Leur présence entraîne celle de deux plans de syngonie verticaux qui leur sont perpendiculaires. Il ne peut y avoir d'autres axes en dehors du plan horizontal ; le même raisonnement montrerait qu'il ne peut y en avoir d'autres dans ce plan. *Une forme simple complète ayant plus d'un axe binaire et n'ayant aucun axe d'ordre plus élevé appartient donc nécessairement au système rhombique.*

*** 59. Cas d'un seul axe d'ordre supérieur à deux.** — Si la figure possède des axes d'ordre supérieur au second, nous pouvons supposer d'abord que l'axe L de l'ordre le plus élevé ne soit seul de son espèce, et le prendre comme axe des Z vertical. Dans ce cas, s'il y a d'autres axes, ils ne peuvent être que binaires, et ils doivent être contenus dans le plan horizontal : la présence d'un axe binaire oblique sur L, ou d'axes quelconques d'ordre supérieur à 2, entraînerait évidemment la présence d'un ou plusieurs axes semblables à L et ne se confondant pas avec celui-ci.

*** 60. Système quadratique.** — Supposons que l'axe principal L soit d'ordre 4, et étudions la disposition des arêtes possibles qui sont contenues dans le plan horizontal qui est un plan de syngonie (§ 53). Une arête quelconque A, (fig. 129) implique l'existence d'une seconde arête semblable A', perpendiculaire sur la première. S'il en existe une troisième

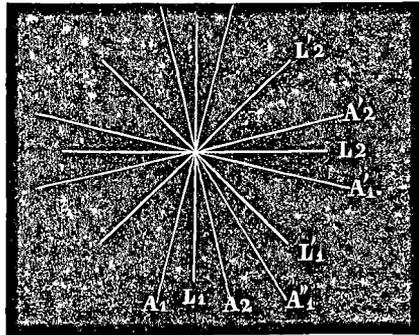


Fig. 129.

A₂ de même espèce, accompagnée naturellement de l'arête égale A', qui lui est perpendiculaire, elle ne pourra pas bis-

séquer l'angle A, A' , puisqu'il ne peut y avoir trois arêtes égales formant entre elles un même angle de 45° (§ 55). Les arêtes semblables A_1, A_2, A'_1, A'_2 , dont chacune forme un angle $\varphi < 45^\circ$ avec l'une de ses voisines, et un angle $90^\circ - \varphi$ avec l'autre, se trouvent toutes dans les mêmes situations relatives. Mais il ne peut exister une seconde arête de même espèce A'' , entre A'_1 et A_2 , car, dans ce cas, trois arêtes consécutives ne pourraient se trouver dans les mêmes situations relatives et être réellement de même espèce que si toutes ces arêtes formaient des angles égaux. Ces angles devraient être de 30° , ce qui est impossible. Les arêtes semblables à A , forment donc deux couples symétriquement disposés par rapport à deux bissectrices rectangulaires L , et L_1 . Ces bissectrices sont des arêtes possibles du cristal, puisqu'elles sont parallèles respectivement aux intersections des faces qui coupent les arêtes A_1 et A_2 , aux distances $+pa$ et $-pa$ pour l'une, $+pa$ et $+pa$ pour l'autre ; et forment un système de deux arêtes semblables et seules de leur espèce. Il en est de même des bissectrices L' , et L'_1 , qui forment un second système analogue à 45° du précédent.

Un raisonnement tout à fait semblable nous montrerait que toutes les autres arêtes horizontales sont disposées par systèmes de deux couples symétriques par rapport aux mêmes bissectrices L , L_1 , L' , L'_1 .

Il en résulte que si l'on fait tourner la figure de 180° autour d'une de ces bissectrices, l'axe vertical est simplement retourné bout pour bout, et chaque arête horizontale est remplacée par une arête identique. Il en est de même des faces quelconques que l'on peut construire conformément à la loi de dérivation sur les axes L , L_1 , et L_2 , ou sur les axes L , L'_1 , L'_2 . Les 4 bissectrices sont donc des axes binaires entraînant l'existence de quatre plans de syngonie verticaux qui leur sont perpendiculaires. Il ne peut pas y avoir d'autres axes binaires ni horizontaux (§ 56), ni

en dehors du plan horizontal (§ 59), et, par conséquent, pas d'autres plans. Donc *une forme simple complète possédant un seul axe quaternaire rentre nécessairement dans le système quadratique.*

*** 61. Système hexagonal.**—Le même raisonnement s'applique exactement au cas où il n'y aurait qu'un seul axe sénaire, sauf que les arêtes vont toujours par groupes de 3 ou de 6, et que les angles à considérer sont de 60° ou de 30° . On aura donc, à côté de l'axe sénaire vertical, un premier système de trois axes binaires égaux et horizontaux, inclinés de 60° les uns sur les autres, un deuxième système de trois axes binaires bisséquant l'angle des précédents, un plan de syngonie normal à l'axe sénaire et deux systèmes de trois plans de syngonie verticaux normaux aux axes binaires, qui, avec le centre, complètent la syngonie hexagonale et ne permettent l'existence d'aucun autre élément de syngonie. *Une forme simple complète qui possède un seul axe sénaire rentre nécessairement dans le système hexagonal.*

*** 62.** Si l'axe des Z est un axe ternaire, une arête quelconque comprise dans le plan horizontal fera partie d'un système d'au moins trois arêtes semblables A_1, A_2, A_3 , se coupant sous des angles de 120° . L'angle des deux arêtes A_1, A_2 est d'ailleurs bisséqué par le prolongement A'_1 de la troisième arête. La distribution des arêtes possibles est donc exactement la même que dans le système hexagonal. Construisons une face M quelconque sur L et sur les arêtes A_1 et A'_3 , par exemple. Par une rotation de 60° autour de l'axe vertical, A_1 aura pris la place de A'_3 qui a même paramètre ; A'_3 aura remplacé A_2 , la face M aura pris la place de la face possible M' que l'on aurait pu construire avec les mêmes indices sur A'_3 et A_2 , c'est-à-dire

d'une face qui lui est géométriquement semblable dans la syngonie hexagonale. Il en est de même par une rotation autour d'un des axes binaires horizontaux du paragraphe précédent. Toutes les faces de la syngonie ternaire appartiennent à la syngonie hexagonale, et réciproquement. Donc il n'y a pas de syngonie ternaire distincte. *Une forme simple complète ne peut avoir un seul axe de syngonie ternaire.*

★ 63. Cas de plusieurs axes d'ordre supérieur à deux.

— Il résulte de ce qui a été dit au § 59 qu'il existe toujours, dans ce cas, plusieurs axes du même ordre. Nous supposons, pour simplifier les raisonnements, qu'une sphère de rayon arbitraire a été décrite autour du centre du cristal, et nous représenterons les divers axes par les points où ils coupent cette sphère.

Soient (fig. 130) L_1 et L_2 deux axes d'ordre n tels qu'il n'y en ait pas de plus rapprochés l'un de l'autre. Une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ autour de L_1 amènera L_2 dans une position L_3 qui doit être dès lors un axe de même espèce. Une rotation $\frac{2\pi}{n}$ autour

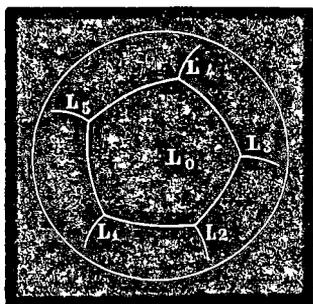


Fig. 130.

de L_3 donnera un nouvel axe L_4 , et ainsi de suite. Les points L_1, L_2, L_3, \dots , où ces axes coupent la sphère sont les sommets d'un polygone sphérique régulier à k angles, qui doit être fermé sur lui-même et non étoilé, sans quoi l'on arriverait à trouver un axe plus rapproché de L_1 que ne l'est L_2 , ce qui ne peut être.

Chacun des côtés de ce polygone peut de même servir de base à un polygone égal obtenu par le même procédé, et la surface de la sphère se trouve ainsi décomposée en une série de poly-

gones réguliers égaux dont chaque sommet correspond à un axe de syngonie d'ordre n . Ces polygones doivent épuiser la surface de la sphère, car sans cela il existerait des axes plus rapprochés que L_1 et L_2 .

Or, la surface P d'un polygone sphérique régulier dont les k angles ont la même valeur $\frac{2\pi}{n}$ est donnée par la formule

$$4 n P = [2n - k(n - 2)] S$$

où S est la surface de la sphère. P devant naturellement avoir une valeur positive et différente de 0, il faut qu'il en soit de même de l'expression

$$\varphi = 2n - k(n - 2)$$

et lorsque n est donné, cela ne peut avoir lieu que pour certaines valeurs déterminées de k , à chacune desquelles correspond un certain polygone sphérique et une certaine distribution des axes possibles.

*** 64. Axes sénaires.** — Si $n = 6$ on a $\varphi = 12 - 4k$ qui n'est positif que pour $k = 2$. Un polygone sphérique ne peut avoir deux sommets seulement que si ceux-ci sont placés aux deux bouts d'un même diamètre de la sphère. Les deux axes sénaires qui leur correspondent sont donc dirigés suivant une même droite et se confondent en un seul. *Aucune forme simple ne peut avoir plus d'un axe sénaire.*

*** 65. Axes quaternaires.** — Si $n = 4$ on a $\varphi = 8 - 2k$ qui est positif pour $k = 2$ et pour $k = 3$. Cette dernière solution donne seule des axes de directions différentes (§ 64), et conduit à $P = \frac{1}{8}S$. Le polygone est un triangle sphérique rectangulaire. Les axes quaternaires possibles, au nombre de trois, sont diri-

gés comme les normales aux faces d'un cube. Il ne peut en exister d'autres, car on ne peut trouver dans l'octant L_1, L_2, L_3 (fig. 131) une direction qui ne fasse pas avec les axes des angles plus petits que ceux que L_1, L_2, L_3 comprennent entre eux.

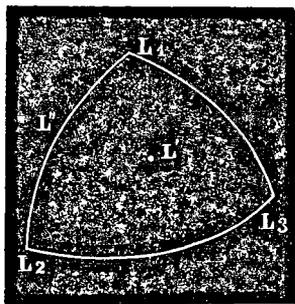


Fig. 131.

Une droite L' passant par le milieu du polygone est un axe ternaire; on voit aisément, en effet, qu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de L' produit le même effet que deux rotations de 90° effectuées successivement autour des directions

L_1 et L_2 , rotations qui sont compatibles avec la syngonie quaternaire de ces axes. Les huit octants donnent donc huit axes ternaires dirigés suivant quatre droites distinctes qui joignent les sommets opposés du cube. Il ne peut y avoir d'autres axes ternaires : leur existence entraînerait celle d'axes quaternaires autres que L_1, L_2, L_3 .

Une rotation permise de 90° autour de la direction L_3 , suivie d'une rotation également permise de 180° autour de la direction L_1 , équivaut à une rotation de 180° autour d'une droite L'' bissectant l'angle L_1, L_2 : cette droite L'' est un axe binaire; il y a donc douze axes binaires tels que L'' se confondant en six directions distinctes qui joignent les milieux des arêtes opposées du cube. Il ne peut y en avoir d'autres, car il en résulterait l'existence d'autres axes quaternaires, ce qui ne peut être. Cet ensemble d'axes quaternaires, ternaires et sénaires qui s'accompagnent nécessairement, joint au centre qui existe toujours, et aux plans de syngonie normaux aux axes d'ordre pair (§ 53), constitue la syngonie cubique. *Toute forme simple qui possède plus d'un axe quaternaire distinct appartient au système cubique.*

* 66. **Axes ternaires.** — Si $n = 3$, on a $\varphi = 6 - k$; les valeurs de k qui rendent φ positif sont $k = 2, 3, 4$ et 5 , dont les trois dernières seules donnent des axes de directions distinctes.

Avec $k = 3$ on a $P = \frac{1}{4}S$. La sphère est partagée en quatre triangles égaux dont les sommets sont ceux d'un tétraèdre régulier. Les quatre rayons aboutissant à ces sommets sont donc des axes ternaires; mais comme il y a toujours un centre de syngonie, les deux sens opposés de ces droites sont identiques, et l'on rentre dans le cas suivant.

La solution $k = 4$ donne $P = \frac{1}{6}S$. La surface de la sphère se résout en six carrés sphériques dont les sommets correspondent à ceux d'un cube. Les huit axes ternaires qui y aboutissent se confondent en quatre droites distinctes joignant les sommets opposés du cube. Un raisonnement tout à fait analogue à celui du § 65 nous montrerait que l'existence de ces axes ternaires entraîne celle de trois axes binaires égaux, normaux aux faces du cube. Sur ces trois arêtes rectangulaires de même paramètre nous pouvons construire une face $pa : qa : ra$. Toutes les faces obtenues en permutant les valeurs positives ou négatives des mêmes indices p, q, r seront aussi des faces possibles et leur ensemble constitue un hexakisocétaèdre. On retombe ainsi sur la syngonie cubique.

La dernière solution $k = 5$, d'où $P = \frac{1}{12}S$, conduit à partager la sphère en douze pentagones réguliers. Mais on voit alors (fig. 131 ci-dessus) que par quatre rotations permises de $\frac{2\pi}{3}$ effectuées successivement autour des directions L_1, L_2, L_4, L_5 , on amène finalement la figure à occuper la même position que par une rotation $\frac{2\pi}{5}$ autour de la ligne L_0 qui passe par le milieu du pentagone. Cette ligne serait donc un axe de cinquième ordre, ce qui ne peut être (§ 55).

Donc, en résumé, *les seules formes simples complètes cristallographiquement possibles qui possèdent plus d'un axe ternaire*

rentrent nécessairement dans le système cubique. Ceci achève la démonstration du théorème énoncé au § 50.

67. Phénomène général de la méroédrie. — Dans les cristaux appartenant aux systèmes holoédriques que nous avons étudiés au Chapitre II, on observe que les diverses faces d'une même forme simple présentent toujours, en moyenne, sur l'ensemble des cristaux de même espèce, des développements égaux. Les variations sont simplement accidentelles et résultent, comme nous l'avons vu, du déplacement parallèle des faces suivant les circonstances accessoires de la cristallisation.

On peut en conclure que ces faces ont des structures identiques et que, dans les cristaux holoédriques, la symétrie physique est égale à la syngonie extérieure (§ 51).

Mais il existe des substances qui se comportent autrement, et dont les cristaux, tout en ayant les angles des formes holoédriques, manifestent une différence constante et régulière dans le développement relatif ou dans l'état physique des diverses faces appartenant à une même forme simple. La forme simple se comporte alors comme une forme composée, comme si elle résultait de la superposition de plusieurs formes simples distinctes se développant séparément, et présentant par conséquent quelque différence dans leur structure.

Il pourra se faire, par exemple, que, dans un cristal appartenant en apparence au système cubique, les huit troncatures sur les angles, qui conduisent à l'octaèdre régulier, se développent toujours inégalement, quatre d'entre elles, par exemple celles qui sont placées sur les angles a de la figure 132, étant toujours plus grandes ou plus nettes que les quatre autres placées sur les angles a' . On devra en conclure que le cristal considéré, tout en ayant la syngonie du système cubique, possède en réalité une symétrie physique inférieure; car la symétrie cubique

exige qu'une rotation de 90° autour d'un axe quaternaire AA amène chaque élément du cristal à la place occupée d'abord par un élément de même structure, tandis que les angles a , que cette rotation substitue aux angles a' , n'ont pas, ne peuvent pas avoir une même structure, puisque des troncatures différentes s'y développent sous l'influence des mêmes conditions extérieures.

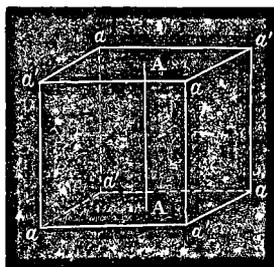


Fig. 132.

Pour obtenir le remplacement d'un angle a par un angle identique, il faut faire tourner la figure autour de AA non pas de 90° , mais de 180° . Dans les cristaux qui présentent cette particularité, l'axe AA n'est donc pas un axe quaternaire, mais seulement un axe binaire. Le cristal n'a pas la symétrie cubique, mais bien une symétrie inférieure qui ne se confond toutefois avec celle d'aucun des systèmes holoédriques que nous avons vus. On est donc amené à reconnaître l'existence de systèmes de symétrie autres que les systèmes holoédriques. Ces nouveaux types sont les systèmes *méroédriques*.

68. Des méroédries possibles. — Chaque système cristallographique, ou système de syngonie, comprend donc non seulement un système holoédrique de symétrie correspondante, mais encore un certain nombre de systèmes méroédriques dont la symétrie est inférieure et s'obtient en réduisant successivement les éléments de symétrie du système holoédrique.

Une forme simple méroédrique est formée seulement d'une partie des faces de la forme simple holoédrique, de celles qui possèdent même structure, et qui dérivent les unes des autres en vertu de la symétrie physique du système méroédrique. Le polyèdre holoédrique est ainsi décomposé en un certain nombre

de formes simples méroédriques qui se développent indépendamment, mais qui doivent toutes posséder une même symétrie, puisqu'elles sont des manifestations extérieures de la structure d'un même cristal. Comment cette décomposition doit-elle s'effectuer? C'est là une question à laquelle on ne peut répondre complètement, car, ignorant à peu près tout relativement aux forces moléculaires, nous ne savons pas à quelles conditions de symétrie la structure des cristaux est astreinte.

69. Tout ce qu'on est en droit d'affirmer *a priori* sans introduire de définitions arbitraires ou d'hypothèses particulières sur la nature et l'arrangement des molécules, c'est que *le polyèdre méroédrique doit être symétrique, c'est-à-dire se présenter de la même manière par rapport à chacune des faces de même espèce qui le constituent*; car autrement ces faces n'auraient pas même structure, ne se formeraient pas en même temps dans les mêmes conditions, et ne seraient pas réellement de même espèce¹.

Cette remarque est importante, parce qu'elle permet de déterminer par un raisonnement purement géométrique les divers types de symétrie que l'on peut s'attendre à rencontrer parmi les cristaux méroédriques. *On trouve, en effet, qu'à côté des six systèmes holoédriques, il ne peut exister que vingt-six systèmes méroédriques de symétries distinctes.* Nous les énumérerons au chapitre suivant, sans nous étendre sur leur déduction

¹ Plusieurs cristallographes allemands admettent de plus que les deux extrémités opposées d'un même axe de symétrie doivent être coupées de la même manière par un même nombre de faces. GROTH, *Physikalische Krystallographie*, 2^e édit. Leipzig 1885, p. 227. Cette définition a le tort de ne pas comprendre les formes dites hémimorphes (§ 73) où, comme dans les autres méroédries, la symétrie physique est inférieure à la syngonie, et il en résulte un certain désordre, un vague complet quant à la place que l'on doit attribuer à certains types de symétrie (voir par exemple *loc. cit.*, p. 228 et les tétratédroédries du système hexagonal, p. 332).

géométrique. Nous ignorons d'ailleurs si tous ces systèmes possibles géométriquement sont également possibles physiquement.

* 70. Diverses lois de réduction d'un polyèdre holoédrique peuvent conduire à des formes symétriques. Ainsi le polyèdre holoédrique peut être décomposé en deux ou plusieurs polyèdres méroédriques qui diffèrent les uns des autres par le nombre ou la disposition de leurs faces. Exemple (fig. 133) : Syngonie hexagonale avec symétrie rhombique; deux faces latérales opposées du prisme hexagonal étant, par leurs propriétés physiques, différentes des quatre autres qui restent identiques entre elles.

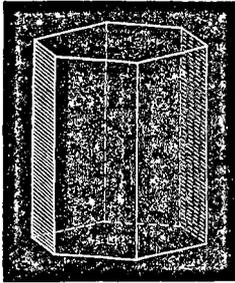


Fig. 133.

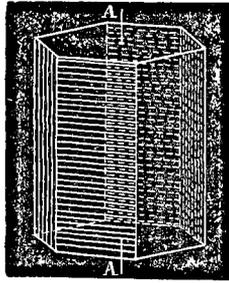


Fig. 134.

— Ou bien le polyèdre holoédrique est décomposé en trois, six, douze, etc., polyèdres méroédriques semblables entre eux. Exemple (fig. 134) : Syngonie hexagonale avec symétrie clinorhombique, l'axe de symétrie étant dirigé suivant AA. — Ou bien enfin le polyèdre holoédrique est décomposé en deux, quatre, huit, ou seize polyèdres méroédriques semblables entre eux. Ce cas est le seul qui soit habituellement pris en considération.

Il arrive souvent en effet qu'un polyèdre méroédrique déduit d'une syngonie donnée rentre, comme cas particulier, dans un système holoédrique ou méroédrique de syngonie inférieure. (Exemples ci-dessus, fig. 133 et 134). Tant que l'on ne fait pas intervenir quelque théorie particulière et plus ou moins hypo-

thétique sur la structure intime des cristaux, l'on n'a aucune raison de séparer de tels polyèdres des autres polyèdres de même symétrie, et d'attribuer à ces méroédries une existence distincte.

Plusieurs auteurs ont cependant admis des subdivisions de ce genre (hémiedrie et tétartoédrie rhombotypes du système quadratique, hémiedrie monosymétrique du système rhombique, etc.). Nous nous bornerons à les indiquer en note à leur place.

Or ce n'est qu'en partageant le polyèdre holoédrique en deux, quelquefois en quatre, plus rarement encore en huit polyèdres semblables que l'on obtient des méroédries de symétries distinctes. Dans un cas cependant (tétartoédrie sphéroïdale du système quadratique, § 85), le polyèdre obtenu, quoique ayant les éléments de symétrie d'un polyèdre de syngonie inférieure, a un nombre de faces plus grand que ne l'exigent ces éléments de symétrie. Les éléments de Bravais, centre, plans et axes, ne sont donc pas suffisants pour définir toutes les formes cristallographiques possibles. C'est ce qui a conduit plusieurs des auteurs cités au § 50 à leur en adjoindre d'autres.

71. Remarque. — Les trente-deux systèmes holoédriques et méroédriques (§ 69), basés sur la symétrie de la structure et de l'ensemble des propriétés physiques, constituent évidemment la seule classification cristallographique qui soit rationnelle et vraie.

Pour toutes sortes de raisons pratiques, il est indispensable, cependant, de grouper ces systèmes en classes moins nombreuses et de caractères plus tranchés. Ce but est parfaitement atteint par les six systèmes cristallographiques fondés sur la syngonie, c'est-à-dire sur la symétrie géométrique de la position de toutes les faces qui peuvent exister simultanément, sans violer la loi de dérivation.

Les formes appartenant à un système de syngonie ne peuvent appartenir en même temps à un autre système que dans des cas très particuliers, pour des valeurs déterminées et exceptionnelles des paramètres et des angles des axes. Les systèmes cristallographiques sont donc aussi distincts qu'il est possible.

D'autre part, les systèmes holoédriques et méroédriques d'une même syngonie ont bien un caractère fondamental en commun. Toutes les faces d'une forme méroédrique existent nécessairement associées dans la forme holoédrique correspondante. Toutes les faces d'une forme holoédrique sont des faces cristallographiquement possibles dans les méroédries correspondantes.

CHAPITRE V

DES FORMES MÉROÉDRIQUES

72. Polyèdres hémioédriques conjugués. — Conformément aux explications données au Chapitre IV, nous ne considérerons ici comme méroédries dérivées d'un système cristallographique, que celles dont la symétrie est incompatible avec la symétrie des systèmes cristallographiques suivants. Par exemple, nous ne ferons pas rentrer dans le système du prisme droit à base carrée, les méroédries qui peuvent être dérivées du prisme rhomboïdal droit, lors même qu'en réalité leur syngonie serait quadratique. Nous adoptons d'ailleurs cette règle sans y attacher aucune idée théorique, et uniquement afin de ne pas multiplier inutilement le nombre des systèmes de symétrie. Une forme simple méroédrique quelconque peut être alors considérée comme dérivant d'une forme holoédrique dont on aurait supprimé la moitié' (*hémioédrie*), les trois quarts (*tétartoédrie*), ou les sept huitièmes des faces (*ogdoédrie*); cette suppression s'effectuant d'ailleurs dans chaque cas suivant une loi déterminée.

L'hémioédrie est le cas le plus fréquent. On supprime la moitié des faces d'un polyèdre holoédrique; les faces qui restent

¹ C.-S. WEISS, *Abh. Akad. Berlin*, 1814-1815, 289.

constituent le polyèdre hémédrique, l'ensemble des faces supprimées constitue un second polyèdre hémédrique *conjugué* ou *inverse* du premier, et ayant le même nombre de faces et les mêmes angles. Un même polyèdre holoédrique donne donc toujours naissance à deux polyèdres hémédriques conjugués, formés chacun d'une moitié de ses faces, et possédant par conséquent une symétrie inférieure à la sienne. La superposition des deux conjugués reconstitue le polyèdre holoédrique dont ils dérivent.

Les polyèdres hémédriques eux-mêmes peuvent, par la suppression de la moitié de leurs faces, donner lieu à de nouvelles formes appartenant à de nouveaux systèmes moins symétriques. Ceux-ci constituent les hémédries de second ordre, ou *tétartoédries*.

L'*ogdoédrie* s'obtient de la même manière, par la suppression de la moitié des faces d'un polyèdre tétrartoédrique.

73. Divers genres de méroédries. — On distingue en général plusieurs genres de méroédries suivant la nature de leur symétrie. Ce sont :

1° Les *énantiomorphies*¹ (méroédries *non superposables*², méroédries *hémisymétriques*³), qui n'ont ni centres, ni plans de symétrie. Les polyèdres conjugués, tout en ayant tous deux même nombre de faces et mêmes angles, offrent une telle disposition de ces éléments qu'ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan, mais que par aucune rotation on ne peut les amener à se superposer exactement l'un à l'autre, à coïncider exactement dans toutes leurs parties⁴.

¹ NAUMANN, *Pogg. Ann.* 1855, XCV, 465.

² PASTEUR, *Ann. de Chim.* 1848, XXIV, 442 ; — MARBACH, *Ueber Hemiedrie non superposable und gewendete Krystallformen*, Progr. Breslau 1861.

³ BRAVAIS, *Études cristallographiques*, *J. de l'École Polytechnique*, 1851, cahier XXXIV, 221.

⁴ Ce que nous disons dans le texte s'applique spécialement aux hémédries

2° les *paramorphies*¹ (*méroédries centrées* ou à *faces parallèles* ou *paraméroédries*) dans lesquelles le centre de symétrie est conservé. Les deux polyèdres conjugués sont alors superposables et ne diffèrent l'un de l'autre que par leur orientation dans l'espace.

3° Les *antimorphies* (*méroédries à faces inclinées*, *antiméroédries*, *méroédries dichosymétriques*) dans lesquelles il existe des plans de symétries, mais pas de centre. Les deux polyèdres conjugués sont, comme dans le cas précédent, superposables l'un à l'autre. Il est commode de distinguer les *antimorphies* proprement dites, où les deux extrémités d'un même axe de symétrie sont coupées sous les mêmes angles par le même nombre de faces de même espèce; et les *hémimorphies*², dans

énantiomorphes, appelées aussi hémioédries *holoaxes*, parce qu'elles ont tous les axes de symétrie de l'holoédrie correspondante. Dans une té tartoédrie énantiomorphe un polyèdre holoédrique A est décomposé en quatre tétartoèdres C₁, C₂, C₃, C₄. Les superpositions C₁ et C₂ d'une part, C₃ et C₄ d'autre part, reconstituent deux polyèdres conjugués B₁ et B₃ hémioédriques de A; de même C₁ et C₃ d'une part, C₂ et C₄ d'autre part, forment deux polyèdres conjugués B₂ et B₄ dérivés de A par un autre mode d'hémioédrie. Si B₁ et B₃, par exemple, sont eux-mêmes énantiomorphes, C₁ et C₃ déduits de B₁ seront superposables l'un à l'autre; de même C₂ et C₄ déduits de B₃; mais C₁ et C₃ ne seront pas superposables à C₂ et C₄. L'inverse aurait lieu si B₁ et B₃ étaient superposables; ce seraient alors les deux tétartoèdres déduits d'un même hémioédre qui seraient énantiomorphes, tandis que chacun des deux tétartoèdres déduits de B₁ serait superposable à l'un des tétartoèdres déduits de B₃.

Dans l'ogdoédrie énantiomorphe, l'holoèdre est décomposé en huit polyèdres ogdoédriques formant deux groupes non superposables l'un à l'autre, comprenant chacun quatre polyèdres superposables entre eux.

¹ M. SCHENFLIES, *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Leipzig 1891, 143, a introduit les noms de paramorphie et d'antimorphie; tout en donnant d'abord le premier de ces mots comme synonyme de l'expression usuelle de parahémioédrie, il a été conduit, par le développement d'un système de classification particulier, à en modifier notablement le sens, (MALLARD, *Traité de Cristallographie*, Paris, 1879, I, 58) et à l'appliquer à toutes les méroédries centrées ou non qui conservent les plans de symétrie normaux aux axes principaux de la forme holoédrique.

² BREITHAUPF, *Handbuch der Mineralogie*, Dresde et Leipzig 1836, I, 140. Voyez plus haut § 69 en note, et SOHNCKE, *Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur*, Leipzig 1879, 199.

lesquelles le cristal porte des faces différentes à ses deux bouts. On donne souvent aussi le nom d'hémimorphies à certaines énantiomorphies qui offrent le même caractère.

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME CUBIQUE

74. Remarques générales. — La symétrie des formes holoédriques ¹, égale à la sygonie du système, est représentée par la formule

$$C, 3L_1, 4L'_3, 6L''_2, 3P, 6P'.$$

Prenons, comme nous l'avons déjà fait, les huit angles solides du cube, et désignons-les alternativement par les lettres différentes a et a' (fig. 135). La forme la plus générale du système cubique, l'hexakisoctaèdre, s'obtient en remplaçant chacun des

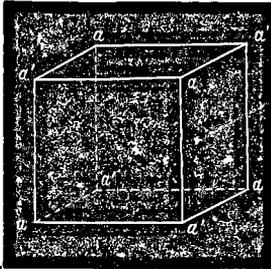


Fig. 135.

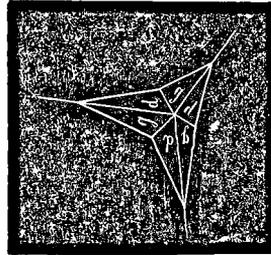


Fig. 136.

angles a et chacun des angles a' par un pointement sextuple. Supposons (fig. 136) qu'un observateur, placé au sommet d'un de ces pointements, regarde dans la direction d'une des arêtes du cube, il aura devant lui deux facettes situées, l'une g à sa gauche, et l'autre d à sa droite; et l'on peut considérer le poin-

¹ Holoaxie centrée BRAVAIS.

tement comme formé de la superposition de trois facettes gauches et de trois facettes droites. Cela posé, les différents types méroédriques s'obtiendront de la manière suivante.

75. Hémiedrie plagiédrique (énantiomorphie)¹. —

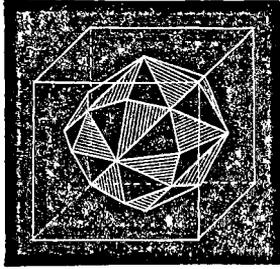


Fig. 137.

On supprime sur les angles a et sur les angles a' toutes les faces gauches en ne conservant que les faces droites (fig. 137) ou l'inverse, et on obtient les deux hémiedres conjugués dérivés du solide à 48 faces. On reconnaît aisément qu'une rotation compatible avec la symétrie du cube ramène toujours une face droite à prendre la place d'une

face droite; le solide hémiedrique qu'elles constituent a donc tous les axes de symétrie du cube; mais aucune rotation ne peut

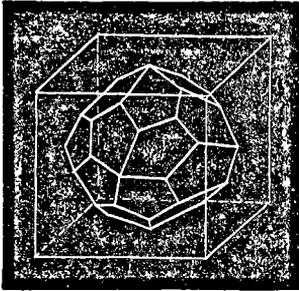


Fig. 138.

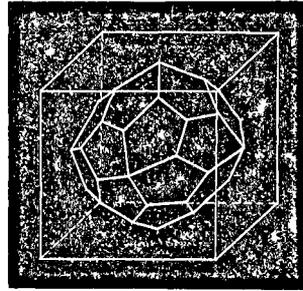


Fig. 139.

amener les faces gauches, striées sur la figure, à prendre la place des faces droites non striées. Les polyèdres conjugués

¹ Holoaxie hémisymétrique BRAVAIS. Gyroïdische Hemiedrie HAIDINGER.

Cette hémiedrie a été observée sur la *cuprite* Cu_2O ; H.-A. MIERS, *Phil. Mag.* 1884, XVIII, 127; — sur le *salmiac* NH_4Cl ; G. TSCHERMAK, *Tscherm. Mitth.* 1883, IV, 531; — sur la *sylvine*, KCl ; R. BRAUNS, *N. Jahrb.* 1886, I, 224; BAUMHAUER, *Das Reich der Krystalle*, Leipzig 1889, 147.

Nous avons réuni dans les notes de ce chapitre les noms des principaux

(fig. 138 et 139) ne sont pas superposables l'un à l'autre. Le symbole de la symétrie est réduit à

$$OC, 3L_4, 4L'_3, 6L''_2, OP, OP'.$$

Si les deux facettes g et d placées sur une même arête du cube se confondent en une seule, le pointement sextuple se

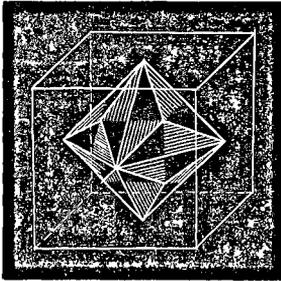


Fig. 140.

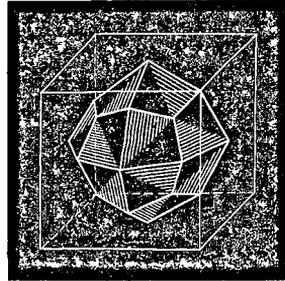


Fig. 141.

réduit à un pointement triple, et le solide à 48 faces se réduit à un octaèdre pyramidé (fig. 140). Chacune des faces de celui-ci est donc à la fois gauche et droite, et appartient aussi

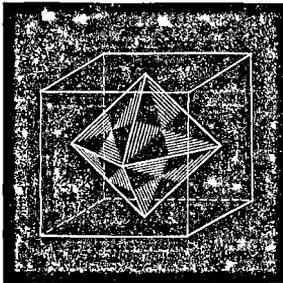


Fig. 142.

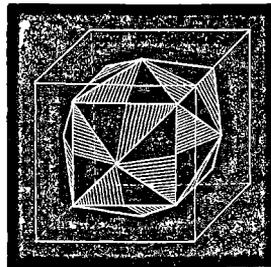


Fig. 143.

bien au polyèdre gauche qu'au polyèdre droit. L'octaèdre pyramidé n'est donc pas modifié par ce genre d'hémiédrie, et

cristaux que l'on a signalés comme rentrant dans les diverses méroédries, particulièrement dans celles qui s'observent rarement. Nous n'entendons du reste émettre aucune opinion sur le plus ou moins de certitude de ces déterminations.

peut se rencontrer avec toutes ses faces sur les cristaux qui en sont affectés¹.

Il en est de même du trapèzoèdre, dont chaque face résulte de la fusion d'une facette gauche avec la facette droite de l'arête voisine (fig. 141); de l'octaèdre, dont chaque face est la

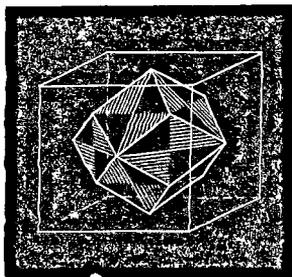


Fig. 144.

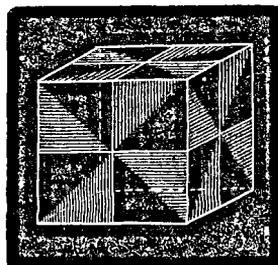


Fig. 145.

réunion des six facettes gauches et droites d'un même pointement (fig. 142); du cube pyramidé (fig. 143), du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 144), du cube (fig. 145), dont les faces sont toutes formées, comme l'indiquent les figures, par la réunion de facettes gauches et de facettes droites du solide à 48 faces.

76. Hémiedrie pentagonale (paramorphie)². — On

¹ L'existence de formes en apparence holoédriques dans les systèmes méroédriques a été reconnue par C.-F. NAUMANN, *Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie*, Leipzig 1830, I, 135.

² Hémiaxie centrée BRAVAIS. Pyritoïdisme HÄIDINGER.

Cette hémiedrie s'observe sur la *pyrite* FeS_2 ; HAÛY, *Minéralogie*, 1822, IV, 45; — la *cobaltine* $(\text{CoFe})\text{AsS}$; *ibid.* 225; — la *smaltine* CoAs_2 et la *cloanthite* NiAs_2 ; P. GROTH, *Pogg. Ann.* 1874, CLII, 249; H. BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XII, 18; — la *gersdorffite* NiAsS , l'*ullmannite* NiSbS ; C. KLEIN et P. JANNASCH, *N. Jahrb.* 1883, I, 180; LASPEYRES, *Zeitsch. f. Kryst.* 1891, XIX, 424; — l'*iodure d'étain* SnI_4 ; GROTH, *Physikalische Krystallographie*, Leipzig 1885, 289; — les *aluns* tels que $\text{K}_2\text{Al}_2(\text{SO}_4)_4, 24\text{H}_2\text{O}$; BEUDANT, *Recherches sur la variation des formes cristallines*, Paris 1817; R. WEBER, *Pogg. Ann.* 1860, CIX, 379; v. HAUER, *J. f. prakt. Chem.* XCIV, 1865, 241; L. WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1881, V, 81; — l'*acide β -méthylbenzhydropyridique* $\text{C}_6\text{H}_5\text{C.NOH.OCH}_3$; B. HECHT, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIV, 328.

supprime sur les angles α les faces gauches, et sur les angles α' les faces droites, ou l'inverse (fig. 146). Les deux polyèdres conjugués, hémiedres à faces parallèles du solide à 48 faces,

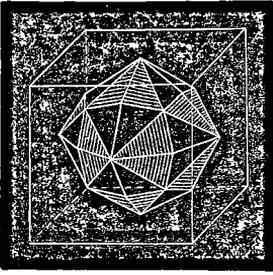


Fig. 146.

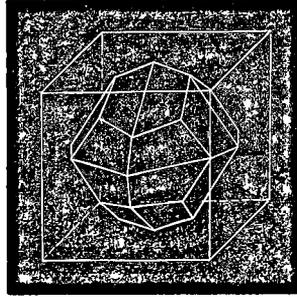


Fig. 147.

portent le nom de *dodécadièdres*; ils se transforment l'un dans l'autre par une rotation de 90° autour d'un des axes quaternaires du cube (fig. 147 et 148). Les axes quaternaires sont réduits à n'être plus que des axes binaires. Les axes binaires

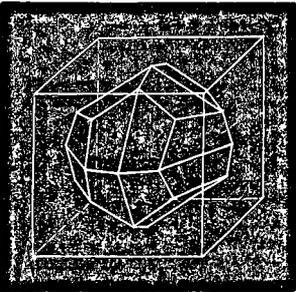


Fig. 148.

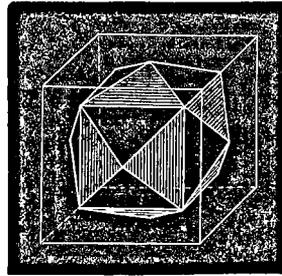


Fig. 149.

du cube sont supprimés, ainsi que les plans de symétrie qui leur sont perpendiculaires. Il ne reste que les plans de symétrie parallèles aux faces du cube. Le symbole de la symétrie est donc

$$C, 3L_1, 4L'_1, 0L''_1, 3P, 0P'.$$

Ce mode d'hémiedrie s'applique au cube pyramidé, dont cha-

que face résulte de la fusion de deux facettes (fig. 149) qui sont conservées ou supprimées en même temps. Le cube pyramidé

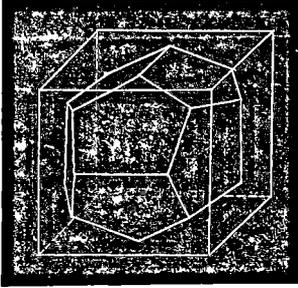


Fig. 150.

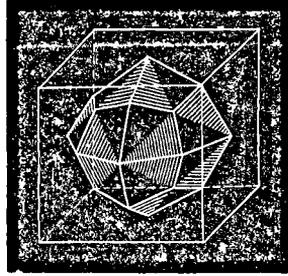


Fig. 151.

perd donc la moitié de ses faces et donne un *dodécaèdre penta-*

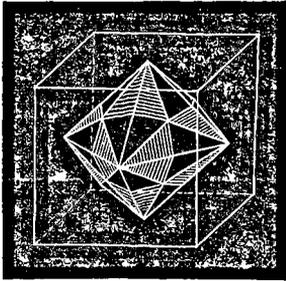


Fig. 152.

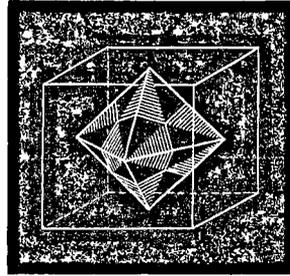


Fig. 153.

gonal (fig. 150). Au contraire, le trapèzoèdre (fig. 151), l'octaè-

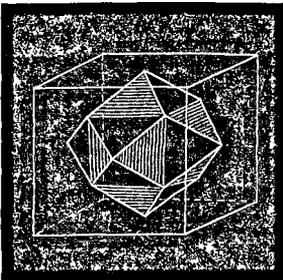


Fig. 154.

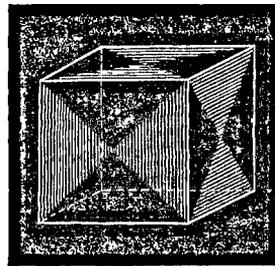


Fig. 155.

dre pyramidé (fig. 152), l'octaèdre (fig. 153), le dodécaèdre

rhomboïdal (fig. 154), et le cube (fig. 155) ne sont pas modifiés par cette hémiedrie, parce que chacune de leurs faces peut être considérée comme appartenant en même temps à l'un et à l'autre des deux polyèdres conjugués.

77. Hémiedrie tétraédrique (antimorphie)¹. — On sup-

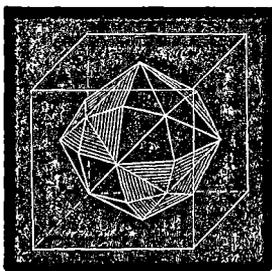


Fig. 156.

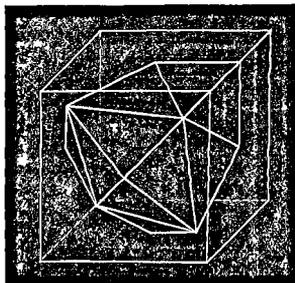


Fig. 157.

prime (fig. 156) toutes les faces gauches et droites sur les angles

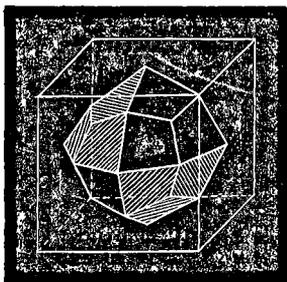


Fig. 158.

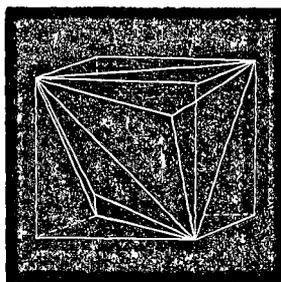


Fig. 159.

α' et on les conserve toutes sur les angles α , ou l'inverse. On

¹ Hémiaxie dichosymétrique BRAVAIS.

Exemples : le diamant C; G. ROSE, *Elemente d. Krystallographie*, Berlin, 1838, 160; GROTH, *Mineraliensamml. d. Univ. Strasb.* 1878, 4; K. MARTIN, *Zeitsch. d. geol. Ges.* 1878, 521; C.-E. WEISS, *N. Jahrb.* 1880, II, 1; — la blende ZnS; SADEBECK, *Zeitsch. d. geol. Ges.* 1869, XXI, 620; GROTH, *loc. cit.*, 23; F. BECKE, *Tscherm. Mitth.* 1883, V, 457; — la binnite $3\text{Cu}_2\text{S} \cdot 2\text{As}_2\text{S}_3$; KENNGOTT, *Die Minerale der Schweiz*, Leipzig 1866, 378; LEWIS, *Phil. Mag.* 1878,

obtient ainsi un troisième couple de polyèdres hémédriques conjugués dérivés du solide à 48 faces (fig. 157). On voit, à

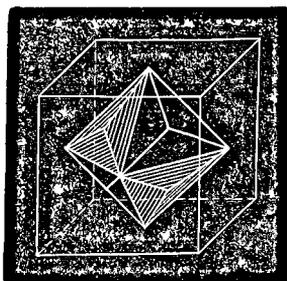


Fig. 160.

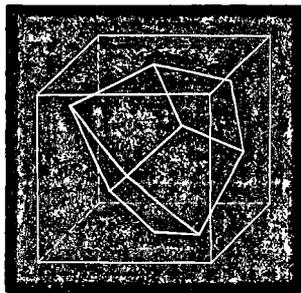


Fig. 161.

l'inspection de la fig. 156, que les axes quaternaires du cube sont réduits à l'ordre deux; les axes ternaires sont conservés, les axes binaires supprimés, ainsi que le centre. Les plans

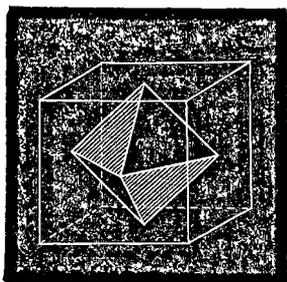


Fig. 162.

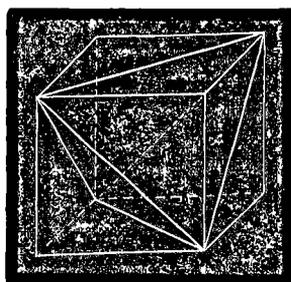


Fig. 163.

parallèles aux faces du cube sont supprimés, les autres sont conservés. Le symbole de la symétrie est

$$0C, 3L_2, 4L'_3, 0L''_2, 0P, 6P'.$$

Cette hémédrie s'applique directement au trapézoèdre

V, 143; — l'eulytine $\text{Bi}_4(\text{SiO}_4)_3$; BREITHAUP, *Pogg. Ann.* 1827, IX, 275; — la pharmacosidérîte $\text{Fe}_4(\text{HO})_3(\text{AsO}_4)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; NAUMANN, *Lehrb. d. Kryst.* Leipzig 1830, I, 113; — l'helvine $(\text{Mn, Be, Fe})_7\text{Si}_3\text{O}_{12}\text{S}$; MOHS, *Grundriss der Mineralogie*, Dresde 1822-1824; — le cuivre gris $4(\text{Cu}_2, \text{Fe, Zn})\text{S} \cdot (\text{As, b})_2\text{S}_3$; — la stannine $\text{Cu}_3\text{S} \cdot \text{FeS} \cdot \text{SnS}_2$; etc.

(fig. 158 et 159), à l'octaèdre pyramidé (fig. 160 et 161), et à l'octaèdre (fig. 162) qui se résout en deux tétraèdres réguliers

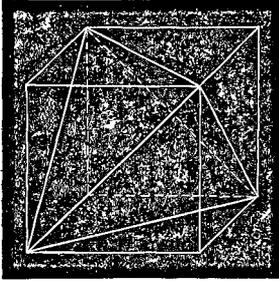


Fig. 164.

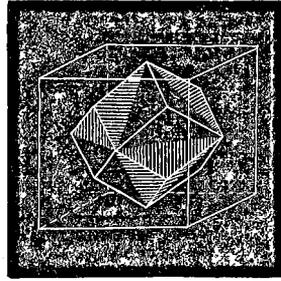


Fig. 165.

(fig. 163 et 164). Comme le montrent les fig. 165, 166 et 167,

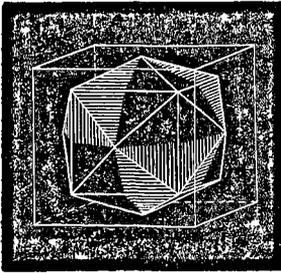


Fig. 166.

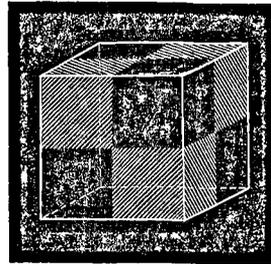


Fig. 167.

elle ne modifie pas le dodécaèdre rhomboïdal, le cube pyramidé, ni le cube.

78. Tétartoédrie (énantiomorphie)¹. — On y arrive

¹ Hémiaxie hémisymétrique BRAVAIS.

Cette méroédrie a été observée sur le chlorate de soude NaClO_3 ; RAMMELSBURG, *Pogg. Ann.* 1853, XC, 15; MARBACH, *ibid.* 1854, XCI, 482; 1855, XCIV, 412; 1856, XCIX, 451; JACOBSEN, *ibid.* 1861, CXIII, 498; BAUMHAUER, *N. Jahrb.* 1876, 606; GROTH, *Pogg. Ann.* 1876, CLVIII, 216; — le bromate de soude NaBrO_3 ; RAMMELSBURG, *Pogg. Ann.* 1841, LII, 85; — l'acétate d'urane et de soude $\text{Na}_2\text{UO}_2(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_6$; V. HAUER, *Pogg. Ann.* CXXV, 149; GRAILICH, *Krystall. Opt. Untersuchungen*, Vienne 1858, 151; MARBACH et BAUMHAUER, *loc. cit.*; —

en superposant deux quelconques des hémipédries que nous venons de considérer. On obtient quatre polyèdres conjugués

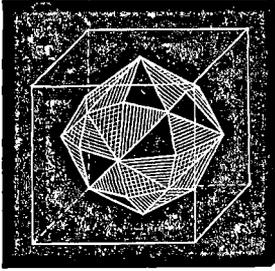


Fig. 168.

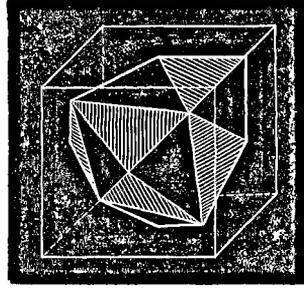


Fig. 169.

dérivés du solide à 48 faces en supprimant : 1° toutes les faces sur les angles α' et les faces gauches sur les angles α (fig. 168,

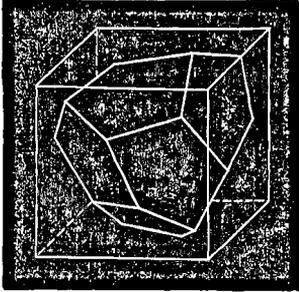


Fig. 170.

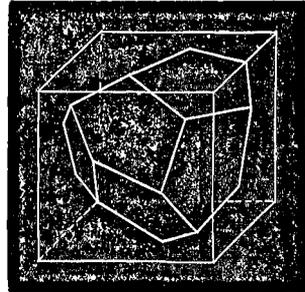


Fig. 171.

169 et 170); 2° toutes les faces sur les angles α' et les faces droites sur α (fig. 171); 3° toutes les faces sur α et les faces gauches sur α' (fig. 172); 4° toutes les faces sur α et les faces

les nitrates de baryum $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$; de strontium $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$; de plomb $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$; SCACCHI, *Nuov. Cim.* 1855, I, 169; *Pogg. Ann.* 1860, CIX, 365; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 51; LEWIS, *ibid.* 1878, II, 64; WULFF, *ibid.* 1880, IV, 12; — le sulfoantimoniate de soude $\text{Na}_3\text{SbS}_4 + 9\text{H}_2\text{O}$; MARBACH, *Pogg. Ann.* 1856, XCIX, 460; — le selenioantimoniate de soude $\text{Na}_3\text{SbSe}_4 + 9\text{H}_2\text{O}$; HO FACKER, *Ann. Chem. Pharm.* 1858, CVII, 6; — l'arséniate de sodium et strontium $\text{AsO}_4\text{SrNa} + 9\text{H}_2\text{O}$; DUFET, *Bull. Soc. min.* 1888, XI, 143.

droites sur a' (fig. 173). De ces polyèdres à 12 faces, le premier

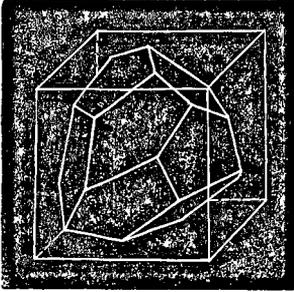


Fig. 172.

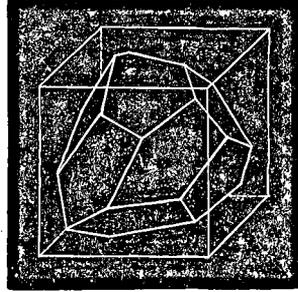


Fig. 173.

et le troisième sont superposables; de même le second et le

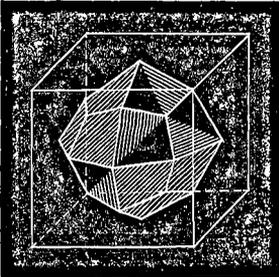


Fig. 174.

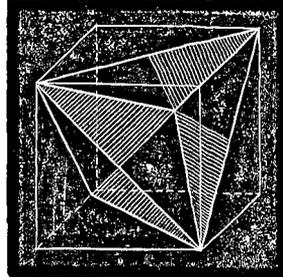


Fig. 175.

quatrième; mais non pas le premier et le second, le troisième et le quatrième.

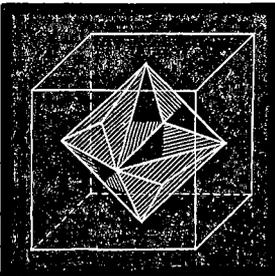


Fig. 176.

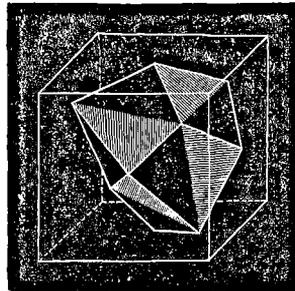


Fig. 177.

Le centre de symétrie, les plans et les axes binaires du cube

sont supprimés, il ne reste que les quatre axes ternaires et les

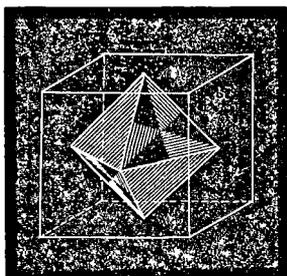


Fig. 178.

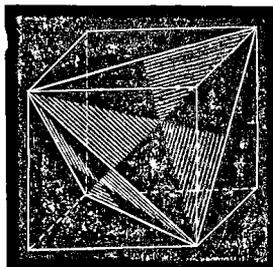


Fig. 179.

trois axes principaux réduits à l'ordre deux; le symbole de la symétrie est donc $OC, 3L, 4L', OL'', OP, OP'$.

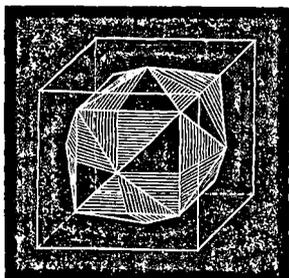


Fig. 180.

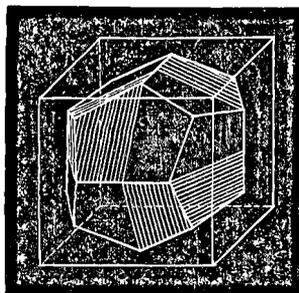


Fig. 181.

Cette tétrartoédrie réduit les trapézoèdres (fig. 174 et 175),

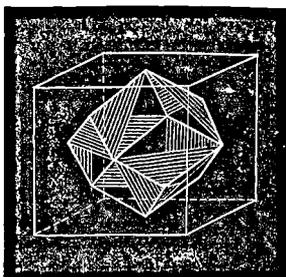


Fig. 182.

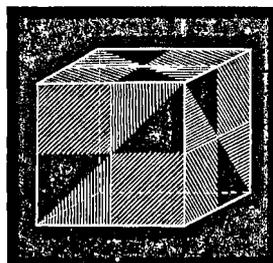


Fig. 183.

les octaèdres pyramidés (fig. 176 et 177), l'octaèdre (fig. 178

et 179) à leurs hémihédres à faces inclinées, transforme le cube pyramidé en dodécaèdre pentagonal (fig. 180 et 181), et n'altère pas le dodécaèdre rhomboïdal (fig. 182), ni le cube (fig. 183).

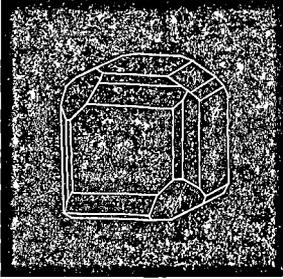


Fig. 184.

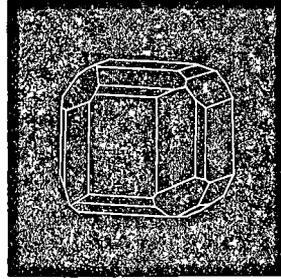


Fig. 185.

Les figures 184 et 185 représentent deux cristaux inverses de chlorate de soude. La tétartoédrie y est accusée par la présence simultanée des faces du tétraèdre et du dodécaèdre pentagonal.

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME QUADRATIQUE

79. Remarques générales. — Les explications détaillées que nous venons de donner sur les méroédries du système cubique nous permettront d'exposer rapidement ce qui concerne les autres systèmes.

Afin de montrer plus clairement les diverses symétries, nous représenterons schématiquement les troncatures qui conduisent à la forme la plus générale de chaque système holoédrique, par de petits cercles placés sur les angles de la forme primitive qui sont modifiés par ces troncatures. Dans les méroédries, les cercles correspondant aux faces supprimées seront remplacés par des points blancs.

La symétrie holoédrique du prisme droit à base carrée¹ est

¹ Holoaxie centrée BRAVAIS.

représentée (fig. 186) par les seize faces de la double pyramide à base octogone, et par la formule

$$C, \Lambda_4, 2L, 2L', \Pi, 2P, 2P'.$$

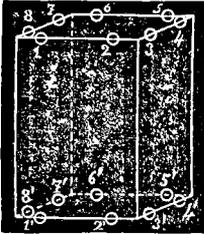


Fig. 186.

Parmi les méroédries nous pouvons distinguer deux groupes. Les unes, que l'on appelle souvent *méroédries principales*, conservent l'axe principal quaternaire du système holoédrique. Dans les autres, appelées *méroédries sphénoïdales*, la symétrie est réduite de telle façon que cet axe principal se transforme en un axe binaire.

1°. Méroédries principales.

* 80. Hémiédrie trapézoédrique (énantiomorphie)¹.

— Symbole :

$$0C, \Lambda_4, 2L, 2L', 0\Pi, 0P, 0P'.$$

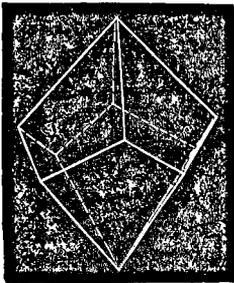


Fig. 188.

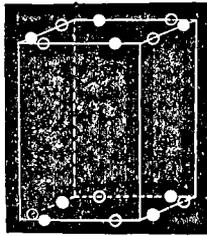


Fig. 187.

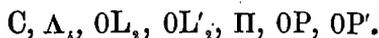
Cette hémiédrie (fig. 187) ne modifie aucune forme simple du système quadratique, à l'exception de la double pyramide octogone qui est décomposée en deux po-

lyèdres non superposables appelés *trapézoèdres tétraonaux* (fig. 188).

¹ Holoaxe hémisymétrique BRAVAIS. Gyroidische H. Haidinger. Hémiédrie holoaxe.

Exemples : le carbonate de guanidine $(CH_5N_3)_2H_2CO_3$; BODEWIG, *Pogg. Ann.* 1876, CLVII, 122; J. MARTIN, *Beiträge zur Kenntniss der optischen Anomalien einaxiger Krystalle*, Göttingen 1890, 26; — le sulfate de strychnine $(C_{21}H_{23}$

* 81. Hémiedrie pyramidale (paramorphie)¹. — Symbole :



La double pyramide octogone est décomposée (fig. 189) en deux pyramides à base carrée placées obliquement par rapport au prisme primitif (*pyramides de troisième espèce*) ; le prisme octogone en deux prismes carrés placés obliquement (*prismes de troisième espèce*).

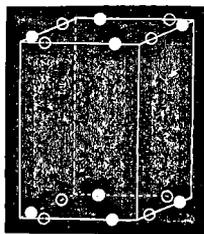


Fig. 189.

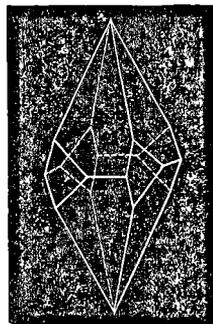


Fig. 190.

La fig. 190 représente la combinaison du prisme primitif avec une pyramide de troisième espèce. Les autres formes ne sont pas modifiées.

$N_2O_2)_2H_2SO_4 + 6H_2O$; DES CLOIZEAUX, *C. R.* 1857, XLIV, 909 ; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1881, V, 577 ; 1890, XVII, 608 ; MARTIN, *loc. cit.* 41 ; — le sulfate d'éthylènediamine $(C_2H_4)_2H_4N_2H_2SO_4$; VON LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1872, LXV, 30 ; — la diacétylphénolphtaléine $C_{20}H_{12}O_4(C_6H_5O)_2$; BODEWIG, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 72 ; — (voir aussi WYROUBOFF, *Ann. de Chim.* 1886, VIII, 340) ; — le sulfate de nickel $NiSO_4 + 6H_2O$; BLASIUS, *Zeitsch. f. Kryst.* 1885, X, 227.

¹ Hémiaxie centrée BRAVAIS.

Exemples : la *scheelite* $CaWO_4$; la *wulfénite* $PbMo_4$; la wulfénite est peut-être hémimorphe et présenterait alors la méroédrie du § 83 ; voyez S. KOCH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 389 ; — la *stolzite* $PbWO_4$, et quelques sels analogues ; T. HIORTDAHL, *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XII, 411 ; — l'*érythrite* $C_4H_{10}O_4$; SCHABUS, *Bestimmung der Krystallgestalten im chem. Laboratorium erzeugter Salze*, Vienne 1855, 26 ; — la *toluolorthosulfamide* $C_6H_4CH_3SO_2NH_2$; O. MUGGE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 332 ; — le *parabromphénol* $C_6H_4Br(OH)$; F. GRÜNLING, *ibid.* 1883, VII, 532 ; — la *pinnoite* $MgB_2O_4 + 3H_2O$; LUEDECKE, *Zeitsch. f. Naturw. Halle*, 1885, LVIII, 645 ; — l'*o-toluolsulfonamide* $NH_2SO_2C_6H_4CH_3$; M. WEIBULL, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XV, 248 ; la *scapolite* $Ca_8Al_8(SiO_4)_6$; FRANKENHEIM, *Act. Acad. Nat. Cur.* 1842, XIX, 513.

* 82. Hémioédrie hémimorphe ¹. — Symbole :

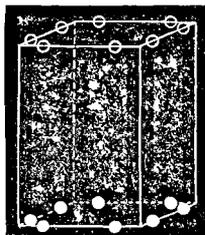


Fig. 191.

$$OC, \Lambda_1, OL_1, OL'_1, O\Pi, 2P, 2P'.$$

Les pyramides octogones, les pyramides carrées de première et de seconde espèce, ainsi que le pinacoïde basique, ne portent de faces qu'à l'une des extrémités du cristal (fig. 191). Les prismes, soit octogones, soit carrés, ne sont pas modifiés.

* 83. Tétartoédrie hémimorphe ou pyramidale (énantiomorphie) ². — Symbole :

$$OC, \Lambda_1, OL_1, OL'_1, O\Pi, OP, OP'.$$

Toutes les faces de l'une des extrémités du cristal sont supprimées dans les pyramides octogones et carrées, et dans le pinacoïde basique ; de plus, l'extrémité conservée de la pyramide octogone est réduite à une pyramide carrée de troisième espèce (fig. 192) ; le prisme octogone à un prisme de troisième espèce ; les prismes carrés ne sont pas modifiés. Les quatre polyèdres conjugués forment deux groupes, non superposables l'un à l'autre, de deux polyèdres chacun.

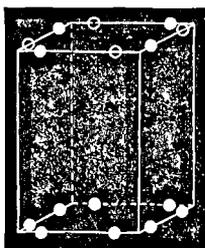


Fig. 192.

¹ Hémiaxie dichosymétrique principale BRAVAIS. Holoédriche Hemimorphie. Exemples : *Iodosuccinimide* $C_4H_4O_2NI$; GROTH, *Physik. Kryst.* 409; — la *penta-érythrite* $C_6H_{12}O_4$; MARTIN, *Beiträge zur Kenntniss d. opt. Anomalien* Stuttgart 1890, 18.

² Hémiaxie hémisymétrique BRAVAIS.

Aucun exemple de cette méroédrie ne peut être indiqué, voir cependant la wulfénite au § 81.

2°. *Méroédries sphénoïdales.*

84. Hémiedrie sphénoïdale (antimorphie)¹. — Symbole :



La double pyramide octogone est décomposée (fig. 193) en deux polyèdres à huit faces appelés *scalénoèdres tétraonaux* (fig. 194), l'octaèdre de seconde espèce en deux tétraèdres irréguliers appelés *sphénoèdres* (fig. 195).

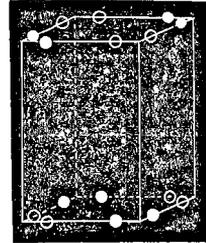


Fig. 193.

La pyramide carrée de première espèce, et les autres formes simples du système quadratique ne sont pas modifiées.

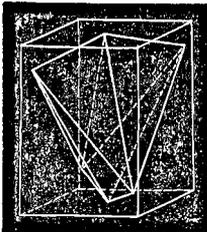


Fig. 194.

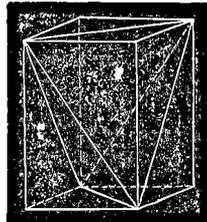


Fig. 195.

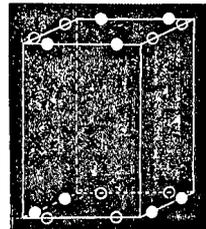


Fig. 196.

L'hémiedrie sphénoïdale de seconde espèce (fig. 196)



ne diffère de la précédente que par le remplacement des axes,

¹ Hémiaxie dichosymétrique BRAVAIS.

Exemples : la *chalcopyrite* CuFeS_2 ; — l'urée $\text{CH}_4\text{N}_2\text{O}$; SCHABUS, *Best. d. Krystallgestalten*, etc., p. 28; voyez § 85; — l'*édingtonite* $\text{BaAl}(\text{AlO})(\text{SiO}_3)_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$; HAIDINGER, *Pogg. Ann.* 1825, V, 193; — l'*acétate d'urane et de strontium* $\text{SrC}_4\text{H}_6\text{O}_4 + \text{UO}_2 \cdot \text{C}_4\text{H}_6\text{O}_4 + 6\text{H}_2\text{O}$; GRAILICH, *Kryst. opt. Unters.* Vienne 1858, 161; — l'*azotite d'argent et d'ammoniaque* $\text{AgNO}_2 \cdot \text{NH}_3$; FOCK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1890, XVII, 180.

plans et formes de seconde espèce, par ceux de première espèce, et réciproquement.

* 85. Tétartoédrie sphénoïdale ¹. — Symbole :

$$0C, \Delta_1, 0L_1, 0L'_1, 0\Pi, 0P, 0P'.$$

La double pyramide octogone est réduite (fig. 197) à un sphénoèdre placé obliquement par rapport au prisme primitif (*sphénoèdre de troisième espèce*). Les pyramides

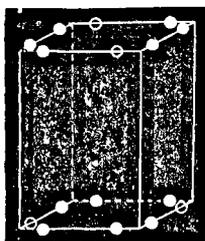


Fig. 197.

de première et de seconde espèce donnent des sphénoèdres de première et de seconde espèce ; le prisme octogone un prisme carré de troisième espèce, les prismes carrés et les bases ne sont pas modifiés. Quoique n'ayant qu'un axe de symétrie binaire, ce système diffère du prisme rhomboïdal oblique dont la symétrie donnerait deux faces seulement au lieu de quatre, et quoiqu'il ne possède ni plans, ni centre de symétrie, ses formes conjuguées sont superposables ¹.

¹ Ce type assez singulier a été signalé par BRAVAIS, *Études cristallographiques*, p. 229, mais n'a pas reçu de nom dans sa classification. Il n'a pas été observé dans la nature.

² a) NAUMANN, *Elem. d. theor. Krystallog.* Leipzig 1856, 154, admet l'existence possible d'une hémiedrie dite *rhombotype* : $C, \Delta_2, 0L_2, 2L'_2, \Pi, 0P, 2P'$, possédant exactement la symétrie du système rhombique holoédrique; les faces conservées de la double pyramide octogone sont les faces 1, 2, 5, 6; 1', 2', 5', 6' de la fig. 186.

b) Au même endroit il parle d'une tétartoédrie à symétrie clinorhombique : $C, 0\Delta_2, 0L_2, L'_2, 0\Pi, 0P, P'$, les faces conservées étant 3, 3', 7', 4'.

c) La tétartoédrie rhombotype, introduite par NAUMANN, *loc. cit.* p. 163, a la symétrie de l'hémiedrie sphénoïdale du système rhombique § 98 : $0C, \Delta_2, L_2, L'_2, 0\Pi, 0P, 0P'$. Les faces conservées sont 1, 5; 2', 6'.

d) Quelques auteurs admettent aussi une tétartoédrie sphénoïdale hémimorphe : $0C, \Delta_2, 0L_2, 0L'_2, 0\Pi, 2P, 0P'$, qui possède la symétrie de l'hémimorphie rhombique § 99; les faces conservées étant 2, 3, 6, 7; l'urée CH_4N_2O appartiendrait à ce groupe. WERTHER, *J. f. prakt. Chem.* 1845, XXXV, 51; voyez § 84.

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME HEXAGONAL

86. Remarques générales. — La symétrie du système holoédrique¹ est représentée par les vingt-quatre faces de la double pyramide dodécagone (fig. 198), et par la formule

$$C, \Lambda_6, 3L_4, 3L'_4, \Pi, 3P, 3P'.$$

Parmi les méroédries, nous pouvons distinguer celles où l'axe sénaire est conservé (*méroédries principales*), et celles où il est transformé en un axe ternaire. Il est avantageux de partager ces dernières en deux groupes,

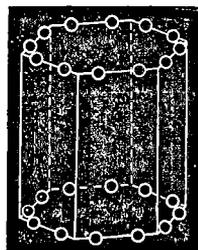


Fig. 198.

les *méroédries sphéroidales* qui ne peuvent être rattachées à la symétrie rhomboédrique, et les *méroédries rhomboédriques* qui forment le *système rhomboédrique* ou *ternaire*, considéré par beaucoup d'auteurs comme un système cristallographique particulier².

¹ Holoaxie centrée hexagonale BRAVAIS.

² Les cristaux rhomboédriques diffèrent des cristaux hexagonaux non par leur syngonie qui est identique, mais par leur symétrie physique, par le développement inégal des différentes faces, par une distribution différente des clivages. Il serait donc contraire à la méthode de classification que nous avons adoptée ici (§ 71) d'en faire un système cristallographique distinct. Dans la théorie de Bravais (Chap. VIII), sur la structure intérieure des cristaux, le système ternaire ou rhomboédrique a seul parmi les autres méroédries une structure réticulaire distincte du système holoédrique correspondant, ce qui peut justifier la séparation. Le groupement des systèmes de symétrie en systèmes cristallographiques est basé, pour nous, sur des raisons d'ordre pratique plutôt que théorique. Il nous semble préférable de ne pas mélanger les caractères géométriques parfaitement nets qui résultent de la loi de dérivation avec les considérations plus ou moins variables et douteuses qui sont relatives à la disposition des molécules dans les cristaux, ou avec les conclusions que l'on peut tirer de la symétrie souvent difficile à reconnaître des propriétés physiques.

M. SCHOENFLIES, *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Leipzig 1891, scinde

1°. *Mérotédries principales.** 87. Hémioédrie trapézoédrique (énantiomorphie)¹. —

Symbole :

$$OC, \Lambda_6, 3L_2, 3L'_2, OII, OP, OP'.$$

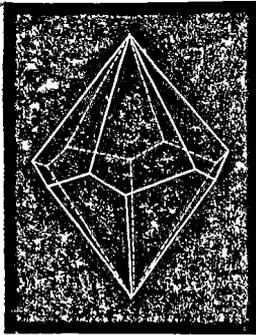


Fig. 200.

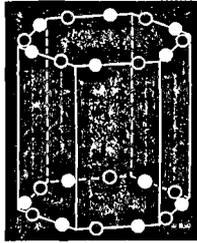


Fig. 199.

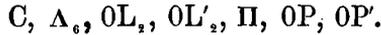
La double pyramide dodécagone se décompose (fig. 199) en deux polyèdres conjugués non superposables, appelés *trapézoèdres hexagonaux* (fig. 200). Les autres formes simples ne sont pas modifiées.

le système hexagonal en un système *hexagonal* proprement dit, formé de l'holoédrie, des quatre mérotédries principales, de l'hémioédrie rhomboédrique et de la tétrartoédrie rhomboédrique, et un système *trigonal*, composé de l'hémioédrie sphénoïdale jouant le rôle d'holoédrie, des trois autres tétrartoédries jouant le rôle d'hémioédries, et de l'ogdoédrie considérée comme tétrartoédrique. Cette distribution introduit il est vrai un ordre assez satisfaisant dans la classification des mérotédries, mais elle nous paraît inférieure à la distribution de Bravais pour le classement des propriétés physiques. En fait l'on ne rencontre en général aucune difficulté à reconnaître qu'un cristal possède la syngonie hexagonale; dans beaucoup de cas, au contraire, on sera embarrassé de dire s'il doit être placé dans le système rhomboédrique ou dans le système trigonal plutôt que dans le système hexagonal. Les cristaux de syngonie hexagonale forment à tout prendre une grande classe naturelle de corps analogues par l'ensemble de leurs caractères géométriques et physiques, un groupement ultérieur des systèmes de symétrie qui rentrent dans cette classe est, par la force des choses, plus ou moins arbitraire et artificiel.

¹ Holoaxie hémisymétrique BRAVAIS.

Il est possible que l'éther triéthylé de l'acide trimésique $C_6H_3(CO_2.C_2H_5)_3$ présente cette hémioédrie, VERNADSKY, *Zeitsch. f. Kryst* 1889, XV, 473.

* 88. Hémioédrie pyramidale (paramorphie)¹. — Symbole :



La double pyramide dodécagone se dédouble (fig. 201) en deux doubles pyramides hexagonales, placées obliquement par rapport au prisme primitif (*pyramides de troisième espèce*); le prisme dodécagone est de même réduit à un *prisme hexagonal de troisième espèce*; les autres formes ne sont pas modifiées.

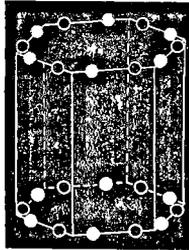


Fig. 201.

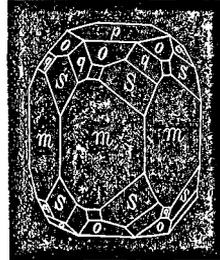
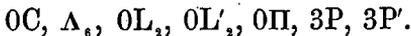


Fig. 202.

La fig. 202 représente un cristal d'apatite portant le prisme *m*, le pinacoïde *p*, une pyramide *s* de troisième espèce et des pyramides *o* et *q* de première et de seconde espèce.

* 89. Hémioédrie hémimorphe¹. — Symbole :



Les pyramides et pinacoïdes ne portent de faces qu'à l'un des bouts du cristal (fig. 203). Les prismes ne sont pas modifiés.

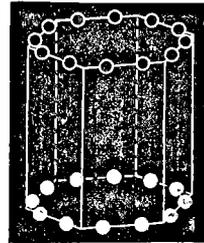


Fig. 203.

¹ Hémiaxie centrée principale BRAVAIS. Pyritoïdische H. HAIDINGER.

Exemples : l'apatite $\text{Ca}_5\text{Cl}(\text{PO}_4)_3$; HAIDINGER, *Edinb. Phil. J.* 1824, X, 140; BAUMHAUER, *Sitzb. Akad. München*, 1875, 169; *Sitzb. Akad. Berlin*, 1887, II, 863; — la *pyromorphite* $\text{Pb}_5\text{Cl}(\text{PO}_4)_3$; G. ROSE, *Pogg. Ann.*, 1827, IX, 208; — la *mimétèse* $\text{Pb}_5\text{Cl}(\text{AsO}_4)_3$; JEREMEJEW, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 191; — la *vanadinite* $\text{Pb}_5\text{Cl}(\text{VO}_4)_3$; VRBA, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 356; WEBSKY, *ibid.* 1881, X, 553.

² Hémiaxie dichosymétrique principale BRAVAIS, Holoédrique Hémimorphie des auteurs allemands.

Exemples : la *würtzite* ZnS ; FRIEDEL, *C. R.* 1861, LII, 983; 1866, LXII, 1002;

* 90. Tétartoédrie hémimorphe ou pyramidale (énantiomorphie)¹. — Symbole :



La double pyramide dodécagone se résout (fig. 204) en quatre simples pyramides hexagonales de troisième espèce, les doubles pyramides hexagonales en deux pyramides simples, le pinacoïde en deux bases distinctes, le prisme dodécagone en deux prismes hexagonaux de troisième espèce, les prismes hexagonaux ne sont pas modifiés.

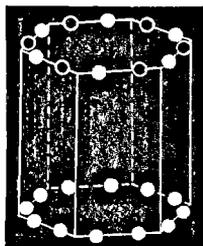


Fig. 204.

2°. Méroédries sphénoïdales.

* 91. Hémioédrie sphénoïdale (antimorphie)¹. — Symbole :



H. FÜRSTNER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1881, V, 363; — la *greenockite* CdS; BREITHAUPT, *Pogg. Ann.* 1840, LI, 507; 1841, LIII, 630; DES CLOIZEAUX, *Ann. de Chim.* 1845, XIII, 326; O. MUGGE, *N. Jahrb.* 1882, II, 18; — la *zincite* ZnO; RINNE, *N. Jahrb.* 1884, II, 164; K. BUSZ, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XV, 621; d'après GROTH, *Phys. Kryst.* 1885, 356, ces minéraux devraient plutôt être considérés comme tétartoédriques (§ 96); — l'*iodure d'argent* AgI; DES CLOIZEAUX, *Ann. de Chim.* 1854, XL, 85; v. ZEPHAROVICH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 119; SELIGMANN, *ibid.* 1882, VI, 230.

¹ Hémiaxie hémisymétrique principale BRAVAIS.

Le seul exemple connu de cette méroédrie est la *néphéline* $3Na_2O, K_2O, 4Al_2O_3, 9SiO_2$; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 209; 1890, XVIII, 611.

² Hémiaxie dichosymétrique BRAVAIS; Trigonotype H. NAUMANN.

Le *sulfate de sodium et de lithium* $NaLiSO_4$ a été indiqué comme cristallisant dans ce système, SOACCHI, *Atti Acad. Napoli*, 1868, VIII; BREZINA, *Tscherm. Mitth.* 1875, I, 26.

La double pyramide dodécagone se décompose (fig. 205) en deux doubles pyramides à base hexagonale semi-régulière (fig. 206), le prisme dodécagone en deux prismes hexagonaux

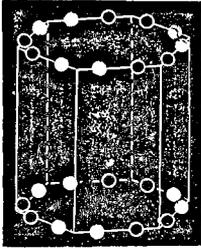


Fig. 205.

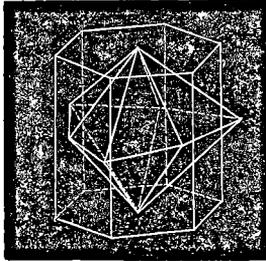


Fig. 206.

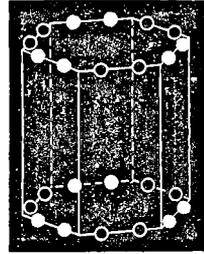


Fig. 207.

à base semi-régulière. Les prismes hexagonaux et pyramides hexagonales de seconde espèce donnent des prismes et pyramides à base triangulaire. Les autres formes ne sont pas modifiées.

L'hémiédrie sphénoïdale de seconde espèce (fig. 207)

$$0C, \Lambda_3, 0L_2, 3L'_2, \Pi, 0P, 3P'.$$

ne diffère de la précédente que par le remplacement des axes et formes de première espèce par les axes et formes de seconde espèce, et réciproquement.

* 92. Tétartoédrie } sphénoïdale (antimorphie) ¹. —
Symbole :

$$0C, \Lambda_3, 0L_2, 0L'_2, \Pi, 0P, 0P'.$$

La double pyramide dodécagonale se décompose (fig. 208) en quatre doubles pyramides triangulaires placées obliquement (*pyramides triangulaires de troisième espèce*); le prisme dodécagone en deux prismes triangulaires de troisième espèce; les prismes et

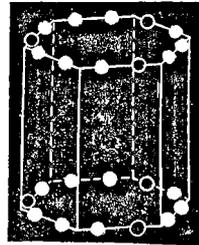


Fig. 208.

¹ Tétartoaxie dichosymétrique principale BRAVAIS.

pyramides hexagonales de première et seconde espèce en deux prismes ou pyramides triangulaires de première et seconde espèce ; le pinacoïde n'est pas modifié.

3° *Méroédries rhomboédriques (Système rhomboédrique).*

93. Hémiedrie rhomboédrique (paramorphie) ¹. —

Symbole :

$$C, \Lambda_3, 3L_2, 0L'_1, 0\Pi, 0P, 3P'.$$

La double pyramide à base dodécagone se décompose (fig. 209 et 210) en deux *scalénoèdres* (fig. 211), solides formés de deux

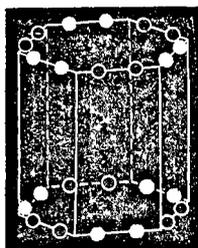


Fig. 209.

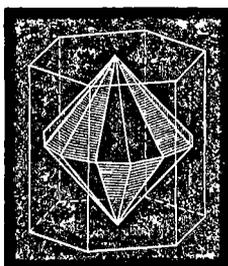


Fig. 210.

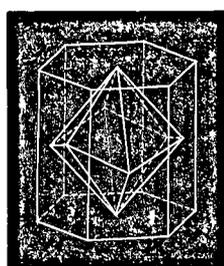


Fig. 211.

pyramides hexagonales dont les arêtes culminantes sont alternativement de deux espèces différentes avec des angles dièdres différents. Ces deux pyramides se raccordent suivant une ligne en zigzag, de sorte que les arêtes longues de la pyramide supérieure se trouvent en regard des arêtes courtes de la pyramide inférieure, et réciproquement.

¹ Hémiaxie centrée de 1^{re} et 2^e espèce du syst. sénaire, et holoaxie centrée du système ternaire BRAVAIS. Dreigliedriges Syst. WEISS. Rhomboëdrisches S. MONS.

Cette hémiedrie est très répandue, le type des minéraux qui la présentent est la *calcite* CaCO_3 .

La pyramide de première espèce se décompose (fig. 212) en deux *rhomboédres*, solides formés (fig. 213) de deux pyramides triangulaires opposées, raccordées par une ligne en zigzag de

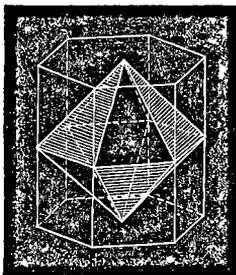


Fig. 212.

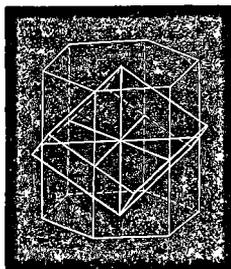


Fig. 213.

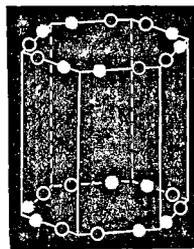


Fig. 214.

six arêtes semblables, de telle sorte que les arêtes culminantes de la pyramide supérieure soient en regard des milieux des faces de la pyramide inférieure, et réciproquement.

Lorsque l'on considère le système rhomboédrique comme constituant un système cristallographique distinct, on prend le rhomboèdre pour forme primitive. La figure 213 montre la disposition de ses axes de symétrie, qui sont : un axe ternaire joignant les sommets des deux pyramides, et trois axes binaires joignant les milieux des arêtes latérales (ce sont les axes binaires de première espèce du système hexagonal). Il y a de plus trois plans de symétrie verticaux passant par les arêtes culminantes opposées.

Les prismes dodécagonaux et hexagonaux¹, et la pyramide de deuxième espèce ne sont pas modifiés par cette hémiedrie non plus que le pinacoïde.

L'hémiedrie rhomboédrique de seconde espèce a les mêmes

¹ Dans les prismes hexagonaux de 1^{re} espèce, les faces peuvent être considérées comme appartenant alternativement aux deux extrémités du cristal, et accusent cette différence par quelques propriétés (figures de corrosion, Chap. X), v. KOBELL, *Sitzb. Akad. München*, 1862, I, 199.

éléments de symétrie, sauf que les axes et les formes de seconde espèce jouent le même rôle que les axes et formes de première espèce dans le type que nous venons d'étudier (fig. 214). Le symbole est alors

$$C, \Lambda_3, 0L_1, 3L', 0\Pi, 0P, 3P'.$$

les pyramides de seconde espèce se dédoublent en rhomboèdres, tandis que les pyramides de première espèce ne sont pas modifiées.

94. Tétartoédrie trapézoédrique (énantiomorphie) ¹.

— Symbole :

$$0C, \Lambda_3, 3L_2, 0L', 0\Pi, 0P, 0P'.$$

La double pyramide dodécagone se décompose (fig. 215 et 216)

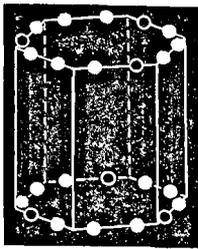


Fig. 215.

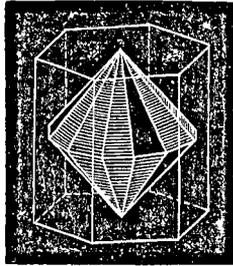


Fig. 216.

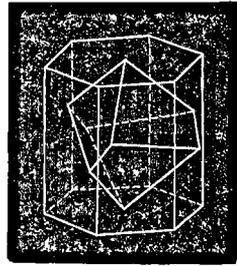


Fig. 217.

en quatre *trapézoèdres trigonaux*, appartenant à deux formes

¹ Hémiaxie hémisymétrique de 1^{re} et 2^e espèce du syst. sénnaire; holoaxie hémisymétrique du syst. ternaire BRAVAIS. Gyroidische H. HAIDINGER.

Exemples : le *quartz* SiO_2 ; HAÛY, *Minéralogie* 1801, II, 60; HERSCHEL, *Camb. Trans.* 1821, I, 43; NAUMANN, *Krystallographie* 1830, I, 491; G. ROSE, *Abh. Akad. Berlin*, 1844, 217; DES CLOIZEAUX, *Ann. de Chim.* 1855, XLV, 129; NAUMANN, *N. Jahrb.* 1856, 146; LEYDOLT, *Sitzb. Akad. Wien*, 1855, XV, 59; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1878, II, 117; MOLENGRAAF, *ibid.* 1888, XIV, 173; 1890, XVII, 137; — le *cinabre* HgS ; DES CLOIZEAUX, *Ann. de Chim.* 1857, LI, 361; A. d'ACHIARDI, *Atti d. Soc. tosc. Pisa*, 1877, III; O. MUGGE, *N. Jahrb.* 1882, II, 18; — l'*hyposulfate de plomb* $\text{PbS}_2\text{O}_8 + 4\text{H}_2\text{O}$; l'*hyposulfate de calcium*

symétriques, mais non superposables (fig. 217, 218). Le prisme

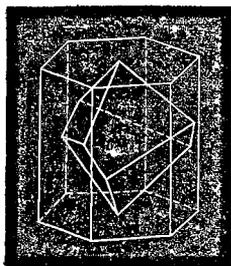


Fig. 218.

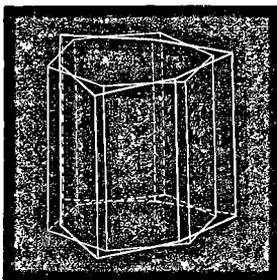


Fig. 219.

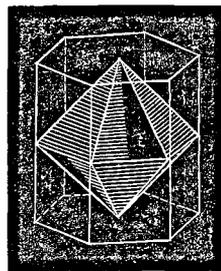


Fig. 220.

dodécagone donne un prisme hexagonal semi-régulier (*prisme*

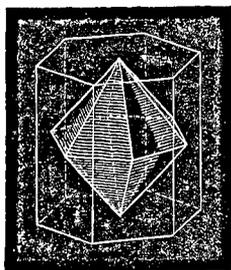


Fig. 221.

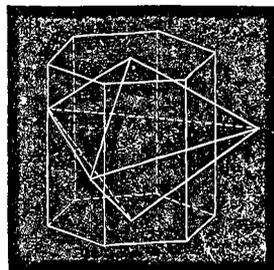


Fig. 222.

di-trigonal, fig. 219). La pyramide de première espèce se dédou-

$\text{CaS}_2\text{O}_6 + 4\text{H}_2\text{O}$; l'*hyposulfate de strontium* $\text{SrS}_2\text{O}_6 + 4\text{H}_2\text{O}$; GROTH, *Pogg. Ann.* 1868, CXXXV, 663; PAPE, *Pogg. Ann.* 1870, CXXXIX, 224; BREZINA, *Sitzb. Akad. Wien*, 1871, LXIV (I), 289; BICHAT, *C. R.* 1873, LXXVII, 1189; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 57; BRAUNS, *N. Jahrb.* 1885, I, 96; WYROUBOFF, *Ann. de Chim.* 1886, VIII, 340; — les *hyposulfates de potassium* $\text{K}_2\text{S}_2\text{O}_6$, de *rubidium* $\text{Rb}_2\text{S}_2\text{O}_6$, de *césium* $\text{Cs}_2\text{S}_2\text{O}_6$; WEISS, *Sitzb. Akad. Wien*, 1859, XXXVII, 371; PICCARD, *J. f. prakt. Chem.* 1862, LXXXVI, 456; PAPE, *loc. cit.*; GROTH, *Phys. Kryst.* 1876, 303; BICHAT, WYROUBOFF, *loc. cit.*; FOCK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 160; — le *benzile* $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{CO} \cdot \text{CO} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$; DES CLOIZEAUX, *C. R.* 1869, LXVIII, 308; 1870, LXX, 1209; WYROUBOFF, *loc. cit.*; MARTIN, *Beiträge zur Kenntniss der opt. Anomalien*, etc. Stuttgart, 1890, 30; — le *maticostéaroptène* $\text{C}_{10}\text{H}_{16}\text{O}$; HINTZE, *Pogg. Ann.* 1876, CLVII, 127; — la *diimide de l'éther éthylique de l'acide succinylsuccinique* $\text{C}_{16}\text{H}_{18}\text{O}_4\text{N}_2$; MUTHMANN, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XV, 62; — le *sulfate de potassium et lithium*, KLiSO_4 ; WULFF, *ibid.* 1890, XVII, 595.

ble en deux rhomboèdres (fig. 220), la pyramide de seconde espèce en deux doubles pyramides à base triangulaire (*pyramide trigonale*, fig. 221, 222). Le prisme hexagonal de seconde

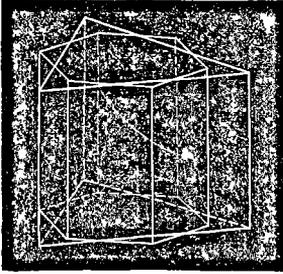


Fig. 223.

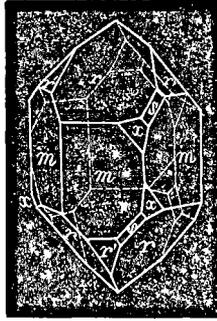


Fig. 224.

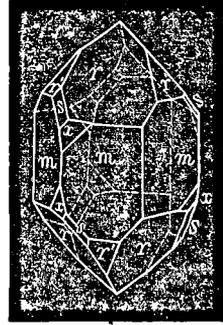


Fig. 225.

espèce est réduit à un prisme triangulaire régulier (*prisme trigonal*, fig. 223). Le prisme hexagonal de première espèce et le pinacoïde ne sont pas modifiés.

Les figures 224 et 225 représentent deux cristaux de quartz portant les faces *m* du prisme de première espèce, les deux rhomboèdres *r* et *r'* qui reconstituent une pyramide de première espèce, la pyramide trigonale *s*, et le trapézoèdre trigonal *x*. Les deux cristaux portent des formes inverses non superposables.

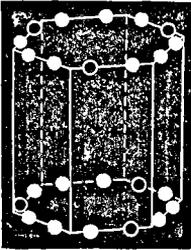


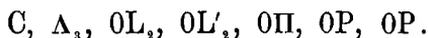
Fig. 226.

La *tétartoédrie trapézoédrique de deuxième espèce*, dont le symbole est

$$0C, \Lambda_3, 0L_3, 3L'_2, 0\Pi, 0P, 0P',$$

ne diffère que par le changement des axes et des formes de première espèce en axes et des formes de seconde espèce (fig. 226).

* 95. Tétartoédrie rhomboédrique (paramorphie) ¹. —
Symbole :



La double pyramide dodécagone se décompose (fig. 227) en quatre rhomboèdres superposables, qui ne sont placés ni en regard des faces du prisme primitif (*rhomboèdres de première espèce*), ni en regard des angles (*rhomboèdres de seconde espèce*), mais obliquement, et sont des *rhomboèdres de troisième espèce*.

La pyramide hexagonale de première espèce donne deux rhomboèdres de première espèce, la pyramide de seconde espèce deux rhomboèdres de seconde espèce.

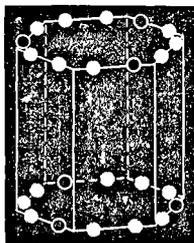


Fig. 227.

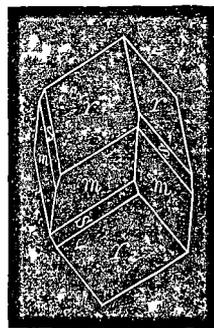


Fig. 228.

Le prisme dodécagonal se dédouble en deux prismes hexagonaux de troisième espèce, les deux prismes hexagonaux et les

¹ Tétartoaxie centrée du syst. sénnaire et hémiaxie centrée du syst. ternaire BRAVAIS.

Exemples: la *diopase* H_2CuSiO_4 ; FRANKENHEIM, *Pogg. Ann.* 1842, LVI, 287; WEBSKY, *ibid.* 1846, LXIX, 543; — la *phénakite* Be_2SiO_4 ; BEYRICH, *Pogg. Ann.* 1837, XLI, 323; G. ROSE, *ibid.* 1846, LXIX, 143; KOKSCHAROW, *Mat. z. Min. Russlands*, Petersbourg, 1854-57, II, 308; 1858, III, 81; — l'*ilménite* $FeTiO_3$; MOHS, *Grundriss der Mineralogie*, 1824, II, 462; LÉVY, *Ann. of Phil.* 1827; NAUMANN, *Kryst.* 1830, I, 493; KOKSCHAROW, *loc. cit.* VI, 350; BÜCKING, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 576; — la *dolomie* $CaCO_3MgCO_3$; LÉVY, *Description d'une collection*, etc. Londres, 1838, I, 115; TSCHERMAK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1883, VII, 510, et *Mineralogie*, Vienne, 1884, 427; HAUSHOFER, *Asterismus und opt. Lichtfiguren*, Munich, 1869; — la *sidérose* $FeCO_3$; la *giobertite* $MgCO_3$; TSCHERMAK, *loc. cit.*; voyez aussi BECKE, *Tscherm. Mitth.* 1888, X, 93; — le *sulfate d' α -amidoisosuccinamide* $(C_4H_9N_3O_2) SO_4H_2 \cdot 2H_2O$; BUCCA, *Mem. Acad. Lincei*, 1887, III; la *pyrrolenhydroptalide* $C_6H_4O \cdot C(C_4H_3N)HC(OH)$; FOCK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1890, XVII, 380.

bases ne sont pas modifiés. La figure 228 représente un cristal de diopside portant le prisme de première espèce m , le rhomboïdre de seconde espèce r et un rhomboïdre de troisième espèce s .

96. Tétartoédrie rhomboédrique hémimorphe¹. —

Symbole :



La double pyramide dodécagonale se décompose (fig. 229) en

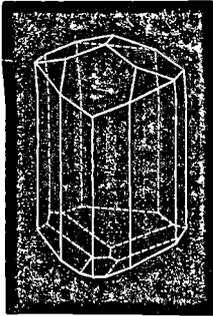


Fig. 230.

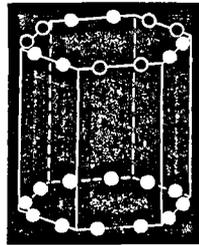


Fig. 229.

quatre pyramides simples ditrigonales ; la double pyramide hexagonale de première espèce en quatre demi-rhomboides de première espèce développés seulement à l'une de leurs extrémités ; le prisme dodécagon en deux prismes ditrigonaux ; le prisme hexagonal de première espèce en deux prismes triangulaires ; le pinacoïde en deux faces indépendantes. La pyramide hexagonale de seconde espèce n'est

¹ Tétartoaxie dichosymétrique de 1^{re} et de 2^e espèce du système sénnaire ; hémiaxie dichosymétrique du syst. ternaire BRAVAIS. Tetraëdrische H. HAIDINGER.

Exemples : la *tourmaline* ($R'R''$) $Al_2BHSi_2O_{10}$; $R' = Li, Na, K$; $R'' = Mg, Fe$; HAÛY, *Minéralogie* 1801, III, 35 ; G. ROSE, *Pogg. Ann.* 1836, XXXIX, 285 ; 1837, XLII, 580. Ce minéral appartient, d'après quelques auteurs, au type suivant (§ 97). SOLLY, *Min. Mag.* 1884, VI, 10 ; W. RAMSAY, *Mitth. Akad. Stockholm*, 1886, XII, II, 1 ; 1887, XIII, II, 1 ; *Zeitsch. f. Kryst.* XI, 177 ; XV, 431 ; — la *pyrargyrite* $Ag_6Sb_2S_6$ et la *proustite* $Ag_6As_2S_6$; voir E. RETHWICH, *N. Jahrb.* 1885, Beilageb. IV, 31 ; M. SCHUSTER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XII, 117 ; MIERS, *ibid.* 1889, XV, 129 ; — la *tolyphénylketone* $C_{14}H_{18}O$; BODEWIG, *Pogg. Ann.* 1876, CLVIII, 232 ; — le *chlorure de platine et d'éthylammonium* $2(NH_3, C_2H_5)Cl + PtCl_4$; SCHABUS, *Sitzb. Akad. Wien*, 1855, XV, 200 ; TOPSOE, *Sitzb. Akad. Wien*, 1876, LXXIII, 87 ; BREZINA, *Tscherm. Mitth.* 1875, I, 26.

développée qu'à un bout; le prisme de seconde espèce n'est pas modifié.

La figure 230 représente un cristal de tourmaline développé hémimorphiquement.

La *tétartoédrie hémimorphe de seconde espèce*, dont le symbole est

$$0C, \Lambda_3, 0L_2, 0L'_2, 0\Pi, 3P, 0P',$$

diffère de la précédente seulement en ce que les axes et formes de première espèce remplacent les axes et formes de seconde espèce, et réciproquement.

* 97. Ogdoédrie (énantiomorphie)¹. — Symbole :

$$0C, \Lambda_3, 0L_2, 0L'_2, 0\Pi, 0P, 0P'.$$

La double pyramide dodécagone se décompose (fig. 231) en deux groupes non superposables de quatre demi-rhomboides de troisième espèce; les doubles pyramides hexagonales de première et seconde espèce en quatre demi-rhomboides de première et de seconde espèce; le prisme dodécagone en quatre prismes triangulaires de troisième espèce; les prismes hexagonaux de première et de seconde espèce en deux prismes triangulaires de première et de seconde espèce; le pinacoïde en deux faces indépendantes.

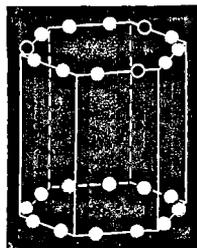


Fig. 231.

¹ Tétartoaxie hémisymétrique du système sénnaire et hémiaxie hémisymétrique du syst. ternaire BRAVAIS. Tétartoédrie rhomboédrique ou hémimorphie plagiédrique BREZINA. Tétartoédrie trapézoédrique avec hémimorphisme GROTH.

Exemple : le *periodate de soude* $\text{NaIO}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$; GROTH, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVII, 436; 1876, CLVIII, 223; WYROUBOFF, *Ann. de chim.* 1886, VIII, 340.

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME RHOMBIQUE

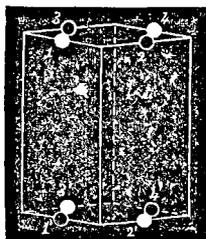


Fig. 232.

98. Hémiédrie sphénoïdale (énantiomorphie)¹. — Symbole :

$0C, L_1, L'_1, L''_1, 0P, 0P', 0P''$.

Les pyramides rhombiques se dédoublent (fig. 232) en deux tétraèdres obliques ou *sphénoèdres* non superposables (fig. 233). Les autres formes simples ne sont pas modifiées. Les figures 234 et 235

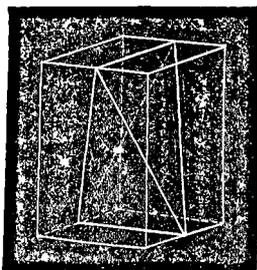


Fig. 233.

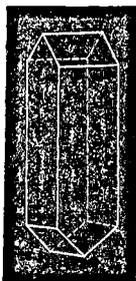


Fig. 234.

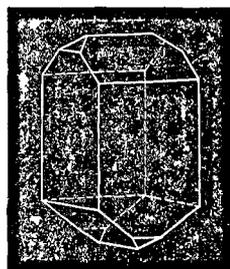


Fig. 235.

représentent des cristaux de sulfate de magnésie portant les faces du prisme et un ou deux sphénoèdres.

¹ Holoaxie hémisymétrique BRAVAIS.

Exemples : le sulfate de magnésie $MgSO_4 + 7H_2O$; BROOKE, *Ann. of Phil.* 1823, XXII, 40; — le tartrate acide de potasse $KHC_4H_4O_6$; BROOKE, *Ann. of Phil.* 1824, XXIII, 161; SCHABUS, *Sitzb. Akad. Wien*, 1850, V, 42; — le formiate de strontiane $SrC_2H_2O_4 + H_2O$; PASTEUR, *Ann. de chim.* 1851, XXXI, 98; JACOBSEN, *Pogg. Ann.* 1861, CXIII, 493. — Cette méroédrie est très répandue parmi les sels organiques.

99. Hémiédrie hémimorphe¹. — Symbole :

$$0C, L_2, 0L'_2, 0L''_2, 0P, P', P''.$$

La pyramide rhombique ne porte que quatre faces à une même extrémité de l'un des axes binaires (fig. 236). Les formes qui ne sont pas parallèles à cet axe se développent de même hémimorphiquement.

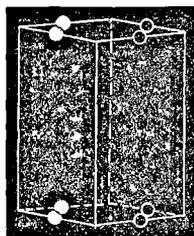


Fig. 236.

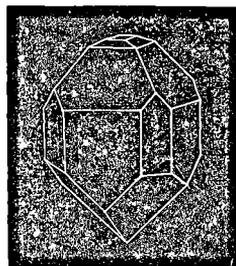


Fig. 237.

Celles qui lui sont parallèles ne sont pas modifiées. La figure 237 représente un cristal de calamine avec axe d'hémimorphie vertical².

¹ Hémiaxe dichosymétrique BRAVAIS.

Exemples : la *calamine* $(ZnOH)_2SiO_3$; MOHS, *Grundriss d. Min.*; — la *struvite* $NH_4MgPO_4 + 6H_2O$; HAUSMANN, *Geät. Nachr.* 1846, VIII, 121; SADEBECK, *Tscherm. Mitth.* 1877, 113; — la *résorcine* $C_6H_6O_2$; GROTH, *Phys. Kryst.*; 1^{re} éd, 1876; CALDERON, *C. R.* 1877, LXXXIV, 779. Cette hémiédrie se rencontre assez fréquemment; l'hémimorphie peut d'ailleurs se produire suivant l'un quelconque des trois axes de symétrie.

² a) NAUMANN, *Elem. d. theoret. Krystallog.* Leipzig, 1856, 279, admet une méroédrie $C, L_2, 0L'_2, P, 0P', 0P''$ dont la symétrie se confond avec celle du système clinorhombique holoédrique, les faces conservées étant (fig. 232) 3, 4, 1', 2', ou 1, 3, 2', 4', ou 1, 1', 4, 4'. Dans le fait, plusieurs substances ont été signalées qui possèdent les angles et certaines propriétés physiques du système rhombique avec un développement clinorhombique des faces. Exemples : le *dinitrochlorobenzol* $C_6H_3.Cl.NO_2.NO_2$ (1.2.4); P. GROTH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 590; — l'*acide chlorolactique* $HOHC.CH_2Cl.COOH$; HAUSHOFER, *ibid.* 1880, IV, 572; — l'*α-dibromopropionate de potassium* CH_2CHBr_2COOK ; HAUSHOFER, *ibid.* 1883, VII, 271; — le *naphate d'éthyle* $C_{10}H_6(COOC_2H_5)_2$; DUPARC et LEROYER, *Bull. Soc. Min.* 1891, XIV, 34; — l'*acide cholique hydraté* $C_{24}H_{40}O_5 + H_2O$; BECKENKAMP, *ibid.* 1887, XII, 170. Ce dernier doit peut-être être rangé dans le groupe suivant. M. BECKENKAMP, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XIV, 375, a été conduit à attribuer à l'*Paragonite* $CaCO_3$ une symétrie identique à celle que nous venons de signaler.

b) Plusieurs auteurs considèrent encore une tétartoédrie résultant par hémi-

MÉROÉDRIES DU SYSTÈME CLINORHOMBIQUE

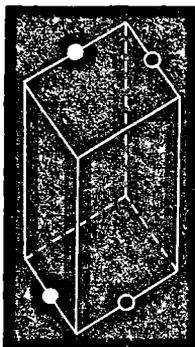


Fig. 238.

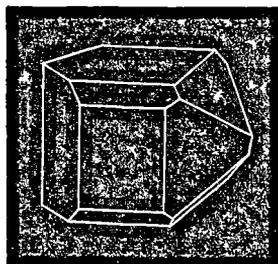


Fig. 239.

100. Hémiedrie hémimorphe (énantiomorphie)¹. — Symbole :

OC, Δ , OII.

Les faces se développent hémimorphiquement d'un seul côté du plan de symétrie du système holoédrique (fig. 238).

Les formes qui sont parallèles à l'axe de symétrie ne sont pas modifiées. La figure 239 représente un cristal de sucre.

morphie de l'hémiedrie holoaxe du § 98, et dont la symétrie se confond avec celle de l'hémimorphie du système clinorhombique, OC, L_2 , OL'_2 , OL''_2 , OP, OP' , OP'' ; les faces conservées sont par exemple 1' et 4. Exemples : le *sucre de lait* $C_{12}H_{22}O_{11}$; SCHABUS, *Best. d. Krystallgest.* Vienne, 1855, 49; — une des formes du *tartrate d'ammoniaque* $(NH_4)_2C_4H_4O_6$; PASTEUR, *Ann. de chim.* 1854, XLII, 418.

M. SCHÖNFLIES (v. § 86) forme un *système digonal* avec le système rhombique, l'holoédrie et l'énantiomorphie clinorhombiques, et l'holoédrie triclinique; et un *système monogonal* avec l'antimorphie clinorhombique et l'hémiedrie triclinique. Les bases de cette classification sont naturellement tout à fait différentes de celles que nous avons adoptées.

¹ Holoaxie hémisymétrique BRAVAIS.

Cette hémiedrie est très fréquente parmi les sels organiques; nous citerons seulement l'*acide tartrique* $C_4H_6O_6$; BROOKE, *Ann. of Phil.* 1823, XXII, 118; LA PROVOSTAYE, *Ann. de chim.* 1841, III, 129; WOLFF, *J. f. prakt. Chem.* 1843, XXVIII, 138; PASTEUR, *Ann. de chim.* 1850, XXVIII, 66; — la *quercite* $C_8H_{12}O_5$; SENARMONT, *Rammelsb. Kryst. Chem.* II, 416; J. LEWIS, *Zeitsch. f. Kryst.* 1878, II, 190; PRUNIER, *C. R.* 1877, CXXXV, 808; — le *sucre de canne* $C_{12}H_{22}O_{11}$; WOLFF, *J. f. prakt. Chem.* 1843, XXVIII, 129; HANKEL, *Pogg. Ann.* 1840, XLIX, 495; BAUMHAUER, *Pogg. Ann.* 1874, CLI, 510. D'après WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XIV, 560, le sucre serait té tartoédrique par la superposition des deux hémiedries et aurait la symétrie OC, OA_2 , OII de l'hémiedrie du système triclinique.

* 101. Hémiédrie antimorphe ¹. — Symbole :



Les formes parallèles et obliques à l'axe A ne gardent que la moitié de leurs faces en conservant le plan de symétrie (fig. 240). Le pinacoïde n'est pas modifié ².

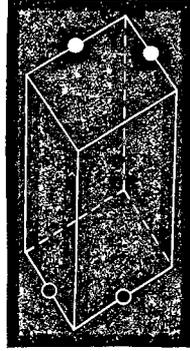


Fig. 240.

MÉROÉDRIE DU SYSTÈME TRICLINIQUE

* 102. Hémiédrie énantiomorphe ³. — Symbole :



Les faces parallèles se développent indépendamment (fig. 241); le centre de symétrie est supprimé.

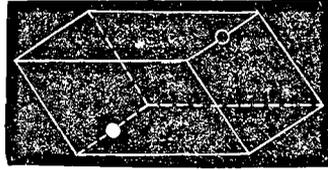


Fig. 241.

¹ Hémiaxie dichosymétrique BRAVAIS.

Exemples : l'hypophosphate de soude $\text{Na}_3\text{HP}_2\text{O}_8 + 9\text{H}_2\text{O}$; HAUSHOFER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1879, III, 606; — le sulfate de strychnine $\text{H}_2\text{O} \cdot \text{C}_{12}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_4\text{SO}_3 + 5\text{H}_2\text{O}$; RAMMELSBERG, *Kryst. Chem.* II, 438; — la heintzite $\text{H}_2\text{KMg}_2\text{B}_{11}\text{O}_{20} + 6\text{H}_2\text{O}$; LUEDECKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1890, XVIII, 481; — le tétrathionate de potassium $\text{K}_2\text{S}_4\text{O}_8$; FOCK, *ibid.* 1891, XIX, 236.

² Quelques sels paraissent posséder les angles et les propriétés des cristaux clinorhombiques, avec un développement des faces par couples indépendants de faces parallèles, et une symétrie triclinique : $C, 0A_2, 0II$. Exemples : la parachlorchinaldine $\text{C}_{10}\text{H}_8\text{ClN}$; HAUSHOFER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1884, IX, 528; — l'acide allylmalonique $\text{CH}(\text{C}_3\text{H}_5)(\text{CO}_2\text{H})_2$; LIWEH, *ibid.* 1887, XII, 154; — la phényloxybutyrolactone $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{CO}(\text{OH}) \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CO}$, et le borotungstate de cadmium $9\text{WO}_3 \cdot 2\text{CdO} \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$; LINCK, *ibid.* 1887, XII, 444 et 448; — le p-tétratolylsilicium $(\text{C}_7\text{H}_7)_4\text{Si}$; ARZRUNI, *Ber. d. deutsch. chem. Ges.* 1886, XIX.

³ Forme non centrée BRAVAIS.

Exemples : l'acétonitrate de strontiane $\text{Sr}_2\text{N}_2\text{O}_8 \cdot \text{C}_4\text{H}_8\text{O}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$; VON ZEPHA-

*** 103. Tableau des systèmes de symétrie holoédriques et méroédriques.**

Système cubique.

Syngonie : C, $3L_4$, $4L'_3$, $6L''_2$, 3P, 6P'.

1. Holoédrie : C, $3L_4$, $4L'_3$, $6L''_2$, 3P, 6P'.
2. Hémiédrie plagiédrique : 0C, $3L_4$, $4L'_3$, $6L''_2$, 0P, 0P'.
3. Hémiédrie pentagonale : C, $3L_2$, $4L'_3$, $0L''_2$, 3P, 0P'.
4. Hémiédrie tétraédrique : 0C, $3L_2$, $4L'_3$, $0L''_2$, 0P, 6P'.
5. Tétartoédrie : 0C, $3L_2$, $4L'_3$, $0L''_2$, 0P, 0P'.

Système quadratique.

Syngonie : C, Λ_4 , $2L_2$, $2L'_2$, Π , 2P, 2P'.

6. Holédrie : C, Λ_4 , $2L_2$, $2L'_2$, Π , 2P, 2P'.

MÉROÉDRIES PRINCIPALES

7. Hémiédrie trapézoédrique : 0C, Λ_4 , $2L_2$, $2L'_2$, 0 Π , 0P, 0P'.
8. Hémiédrie pyramidale : C, Λ_4 , $0L_2$, $0L'_2$, Π , 0P, 0P'.
9. Hémiédrie hémimorphe : 0C, Λ_4 , $0L_2$, $0L'_2$, 0 Π , 2P, 2P'.
10. Tétartoédrie pyramidale : 0C, Λ_4 , $0L_2$, $0L'_2$, 0 Π , 0P, 0P'.

MÉROÉDRIES SPHÉNOÏDALES

11. Hémiédrie sphénoïdale : 0C, Λ_2 , $0L_2$, $2L'_2$, 0 Π , 2P, 0P'.
12. Tétartoédrie sphénoïdale : 0C, Λ_2 , $0L_2$, $0L'_2$, 0 Π , 0P, 0P'.

Système hexagonal.

Syngonie : C, Λ_6 , $3L_2$, $3L'_2$, Π , 3P, 3P'.

13. Holoédrie : C, Λ_6 , $3L_2$, $3L'_2$, Π , 3P, 3P'.

MÉROÉDRIES PRINCIPALES

14. Hémiédrie trapézoédrique : 0C, Λ_6 , $3L_2$, $3L'_2$, 0 Π , 0P, 0P'.

ROWICH, *Sitzb. Akad. Wien*, 1860, XLI, 516; — les bitartrates de strontiane $\text{SrH}_2 \cdot 2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$ et $\text{SrH}_2 \cdot 2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 4\text{H}_2\text{O}$; SCACCHI, *Rammelsb. Kryst. Chem.* II, 133; — le nitrate d'éthylidenargentamin-éthylidenammonium ($\text{C}_4\text{H}_{10}\text{N}_6\text{O}_8\text{Ag}$); DANA, *Sill. J.* 1877, XIV, 198; — l'hyposulfite de chaux $\text{CaO} \cdot \text{S}_2\text{O}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$; v. ZEPHAROVICH, *Sitzb. Akad. Wien*, 1862, XLV, 499; — le sel d'argent dérivé du camphre $\text{C}_8\text{H}_{11}\text{AgO}_4$; v. ZEPHAROVICH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1886, XI, 48.

15. Hémiédrie pyramidale : C, Λ_6 , $0L_2$, $0L'_2$, Π , $0P$, $0P'$.
 16. Hémiédrie hémimorphe : $0C$, Λ_4 , $0L_2$, $0L'_2$, 0Π , $3P$, $3P'$.
 17. Tétartoédrie pyramidale : $0C$, Λ_6 , $0L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $0P'$.

MÉROÉDRIES SPHÉNOÏDALES

8. Hémiédrie sphénoïdale : $0C$, Λ_3 , $3L_2$, $0L'_2$, Π , $3P$, $0P'$.
 19. Tétartoédrie sphénoïdale : $0C$, Λ_3 , $0L_2$, $0L'_2$, Π , $0P$, $0P'$.

MÉROÉDRIES RHOMBOÉDRIQUES

0. Hémiédrie rhomboédrique : C, Λ_3 , $3L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $3P'$.
 1. Tétartoédrie trapézoédrique : $0C$, Λ_3 , $3L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $0P'$.
 22. Tétartoédrie rhomboédrique : C, Λ_3 , $0L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $0P'$.
 23. Tétartoédrie rhomb. hémimorphe : $0C$, Λ_3 , $0L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $3P'$.
 24. Ogdoédrie : $0C$, Λ_3 , $0L_2$, $0L'_2$, 0Π , $0P$, $0P'$.

Système rhombique.

Syngonie : C, L_2 , L'_2 , L''_2 , P, P', P''.

25. Holoédrie : C, L_2 , L'_2 , L''_2 , P, P', P''.
 26. Hémiédrie sphénoïdale : $0C$, L_2 , L'_2 , L''_2 , $0P$, $0P'$, $0P''$.
 27. Hémiédrie hémimorphe : $0C$, L_2 , $0L'_2$, $0L''_2$, $0P$, P', P''.

Système clinorhombique.

Syngonie : C, Λ_2 , Π .

28. Holoédrie : C, Λ_2 , Π .
 29. Hémiédrie hémimorphe : $0C$, Λ_2 , 0Π .
 30. Hémiédrie antimorphe : $0C$, $0\Lambda_2$, Π .

Système triclinique.

Syngonie : C.

31. Holoédrie : C.
 32. Hémiédrie : $0C$.

Il importe de remarquer que chacun de ces types peut être réalisé dans la nature par divers modes de structure très différents, et peut offrir des variétés et des subdivisions (voyez plus loin Chapitre VIII).

104. Formes composées méroédriques. — Les formes

simples qui s'associent pour donner une forme composée doivent toujours satisfaire à la condition générale d'être compatibles avec la symétrie que possède la structure du cristal' (§ 14).

Dans un cristal présentant l'hémiédrie à faces inclinées du

¹ Ce fait n'a été nettement compris que depuis les travaux de Delafosse et de Bravais. DUFRENOY, *Traité de minéralogie*, Paris 1840, t. I, p. 63, s'étonne encore qu'il n'y ait jamais combinaison d'hémiédries différentes.

Les formes inverses d'une même hémiédrie ne s'associent pas toujours entre elles; dans certains cas d'énantiomorphie, elles paraissent même s'exclure plus ou moins complètement; G. ROSE, *Abh. Akad. Berlin*, 1844, 217; voir en particulier GROTH, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVII, 433, et *Physik. Krystallog.* Leipzig, 1885, 306 et 383; WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 263. Mais, comme le développement inégal des diverses formes simples, ce phénomène est déterminé par les particularités les plus intimes de la structure de chaque corps, et ne peut être considéré comme une conséquence nécessaire et générale de la symétrie méroédrique.

Il est souvent difficile de reconnaître avec certitude si une substance est ou non méroédrique, et cela pour les raisons suivantes :

1^o Beaucoup de méroédries n'influent pas sur les formes les plus fréquentes, mais seulement sur des formes obliques d'indices relativement compliqués, que l'on ne rencontre pas toujours.

2^o Les formes inverses sont souvent associées, et ne se développent différemment que dans des conditions de milieu spéciales.

3^o Dans certains cas, les circonstances extérieures produisent un développement méroédrique en apparence des diverses faces d'un polyèdre holoédrique. On rencontre des *fluorines* CaFl, cubiques par toutes leurs propriétés, mais dont les faces ont un développement rhomboédrique suivant l'un des axes ternaires du cube. GRÄLICH, *Krystall. opt. Unters.* Vienne, 1858, 72; la *pyrite* présente des anomalies du même genre, simulant une symétrie quadratique rhombique ou rhomboédrique. NAUMANN, *Lehrb. d. Krystall.* Leipzig, 1830, II, 186; v. LASAULX, *Sitzb. d. niederr. Ges. Bonn*, 1883, 75; PENFIELD, *Sill. J.* 1889, XXXVII, 209. Le plus souvent, les développements inégaux des diverses faces sont tout à fait accidentels et irréguliers, mais il peut en être autrement, comme dans les exemples que nous venons de citer.

4^o Il n'est pas prouvé qu'une même substance, suivant les conditions dans lesquelles elle se forme, ne puisse pas affecter, tantôt la symétrie holoédrique, tantôt des symétries hémiédriques différentes; de même que beaucoup de corps peuvent cristalliser suivant les cas dans des systèmes différents ou dans des formes incompatibles du même système (*dimorphisme*, Chapitre IX).

Ces doutes ne peuvent être levés définitivement que par l'observation de certaines particularités, telles que les figures de corrosion, qui sont liées de la manière la plus intime à la structure de chaque face (Chapitre X).

système cubique (§ 77), par exemple, on pourra rencontrer les tétraèdres direct et inverse reconstituant l'octaèdre, mais avec des faces dont les propriétés physiques et le développement seront généralement différents ; des hémiedres à faces inclinées du trapézoèdre, de l'octaèdre pyramidé, de l'hexakisoctaèdre, directs et inverses. En outre, on trouvera associées avec ces formes hémiedriques des formes en apparence holoédriques, le cube, le dodécaèdre rhomboïdal, le cube pyramidé, dont la symétrie est compatible avec l'hémiedrie à faces inclinées. Nous ne trouverons pas, au contraire, les formes hémiedriques à faces parallèles, dodécadièdre et dodécaèdre pentagonal, dont la symétrie est différente.

De même, dans un cristal tétartoédrique, nous pourrions rencontrer toutes les formes holoédriques et hémiedriques dérivées du système cubique ; le solide à 48 faces et ses trois hémiedres seront seuls développés méroédriquement, le premier se décomposant en quatre, les autres en deux groupes de douze faces dont chacun se comporte comme un polyèdre indépendant.

105. Structures hémiedriques conjuguées. — Les relations entre les polyèdres hémiedriques conjugués impliquent l'existence de rapports de symétrie analogues entre les structures des cristaux hémiedriques. Considérons encore, pour fixer les idées, le cas de l'hémiedrie à faces inclinées dans le système cubique. La structure du cristal est telle que les deux tétraèdres inverses peuvent se développer en même temps, puisqu'ils sont tous deux compatibles avec les éléments de symétrie, mais qu'ils se développent indépendamment comme des formes simples distinctes ayant, en général, des caractères physiques différents. Par exemple, le cristal se formant dans un certain milieu déterminé, le tétraèdre α aura ses faces brillantes, tandis que celles du tétraèdre α' seront mates. Soit un plan MM' parallèle à l'une

des faces du cube; par chacun des atomes qui constituent le cristal proposé abaissons une perpendiculaire sur ce plan, prolongeons-la d'une longueur égale de l'autre côté du plan, et plaçons à son extrémité un atome semblable au premier. Nous formerons ainsi un second cristal (fig. 242), dont la structure sera absolu-

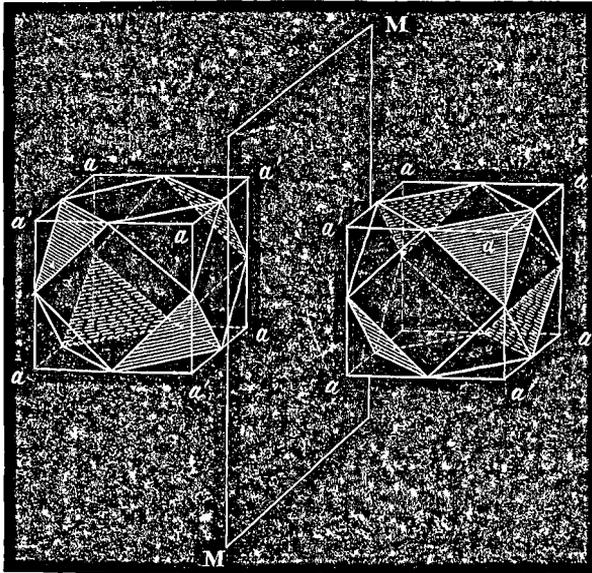


Fig. 242.

ment symétrique de celle du cristal proposé. Toutes les particularités que la première structure présente dans la direction des angles a se retrouveront dans la seconde structure dans la direction symétrique, c'est-à-dire sur les angles a' . Et ce second cristal se développant dans le milieu où le premier prend des faces a brillantes et des faces a' mates, aura forcément des faces a' brillantes et des faces a qui seront mates. On conçoit ainsi l'existence de deux structures hémédriques conjuguées qui, dans des circonstances extérieures identiques, entraînent la formation, l'une de l'un des polyèdres conjugués, l'autre de son inverse.

Ces structures conjuguées ont entre elles les mêmes rapports que les polyèdres conjugués qui en sont la manifestation. Dans le cas que nous venons de considérer, les deux polyèdres conjugués ne diffèrent que par leur orientation dans l'espace, il en est de même des structures correspondantes ; il suffirait de faire tourner l'un des cristaux de 90° autour d'un axe quaternaire du cube pour qu'il pût se superposer exactement, atome à atome, à l'autre cristal.

Mais, dans les énantiomorphies, les deux polyèdres ne sont pas superposables, et il en est de même des structures correspondantes : elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan, mais elles ne peuvent par aucune rotation être amenées à se superposer. Elles sont l'une à l'autre ce qu'une figure quelconque est à son image vue dans un miroir plan, ou ce que la main gauche est à la main droite. Elles ne sont donc pas identiques, elles diffèrent autrement que par leur position dans l'espace, et cette différence pourra entraîner des différences correspondantes dans certaines propriétés physiques.

CHAPITRE VI

GROUPEMENTS ET IMPERFECTIONS DES CRISTAUX

106. Groupements accidentels. — Les cristaux simples que nous avons étudiés jusqu'ici sont toujours des polyèdres convexes. Lorsqu'on rencontre des angles rentrants, on peut être certain d'avoir affaire à des groupements d'individus cristallins distincts.

Quelquefois ces groupements sont absolument fortuits. Deux ou plusieurs cristaux qui ont pris naissance en des points plus ou moins éloignés, arrivent en se développant indépendamment les uns des autres à se rencontrer et à se souder. Leur position relative est tout à fait arbitraire, et leur étude ne présente pas d'intérêt spécial.

107. Groupements parallèles. — Mais dans beaucoup de cas, les individus cristallins sont accolés dès le début de leur formation, ou bien un cristal commence à se former en un point de la surface d'un autre cristal. Si les forces moléculaires sont tout à fait libres d'agir, les deux cristaux se développent alors parallèlement, l'un n'est en quelque sorte que la continuation de l'autre, bien que leurs surfaces puissent rester distinctes, et même présenter des formes différentes, s'il ne se sont pas déve-

loppés simultanément. Les cristaux individuels peuvent être minces et allongés et le minéral apparaît alors comme un ensemble de fibres parallèles.

108. Mâcles. — Souvent aussi, surtout lorsque la cristallisation est plus ou moins gênée, les molécules n'obéissent pas complètement aux forces qui les sollicitent et se placent, relativement aux molécules qui sont déjà déposées, non pas parallèlement, mais seulement symétriquement par rapport à un plan. Le groupement prend alors le nom de *mâcle* ou *hémitropie*¹. Le plan par rapport auquel les deux cristaux sont symétriques est appelé *plan de mâcle*, et l'on peut se représenter commodément leur position relative en supposant qu'un individu unique ait été coupé en deux suivant le plan de mâcle, et que l'une des moitiés ait ensuite tourné de 180° autour d'une *axe de mâcle* perpendiculaire à ce plan. Il est clair que cette supposition n'a aucune signification réelle et n'est qu'un moyen géométrique de concevoir le groupement.

109. Le plan de mâcle est le plus souvent une face possible du cristal. Exemples :

Fig. 243. Deux cristaux de *gypse*, en prismes rhomboïdaux obliques, sont accolés symétriquement par rapport à une face (100); leurs plans de symétrie coïncident, leurs arêtes verticales sont parallèles, mais ils sont placés comme si l'un d'eux avait tourné de 180° autour d'une

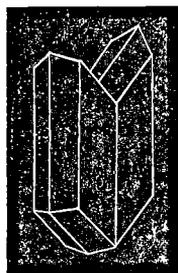


Fig. 243.

¹ Le mot de *mâcle* a été introduit par ROMÉ DE LISLE, *Cristallographie*, Paris 1783, I, 93; celui d'*hémitropie* par HAÜY, *Traité de minéralogie*, Paris 1801, I, 103.

Pour la classification et la théorie moléculaire des groupements cristallins, voyez BRAVAIS, *Études cristallographiques*; MALLARD, *Bull. Soc. min.* 1885, VIII, 452; G. TSCHERMAK, *Tscherm. Mitth.* 1879, II, 499; SCHUSTER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XII, 134.

droite contenue dans le plan de symétrie et perpendiculaire aux arêtes h .

Fig. 244. Deux octaèdres de *spinelle* sont joints symétriquement par rapport à une face de l'octaèdre.

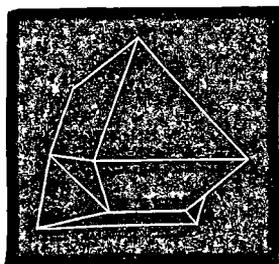


Fig. 244.

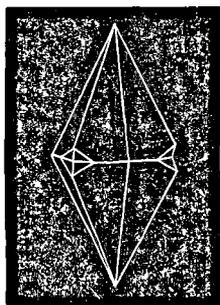


Fig. 245.

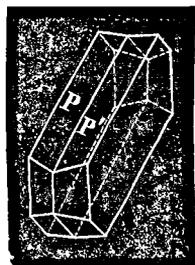


Fig. 246.

Fig. 245. Deux scalénoèdres de *calcite* sont joints symétriquement par rapport à la base du prisme hexagonal.

Fig. 246. Deux prismes biobliques d'*albite* sont mâclés parallèlement à une face (010) du prisme. Les deux faces p et p' , inclinées en sens inverse, forment une sorte de gouttière à la partie supérieure.

Il arrive quelquefois aussi que le plan de môle est perpendiculaire à une arête possible du cristal, sans être lui-même une face possible ; la môle d'anorthite figurée au paragraphe suivant en offre un exemple¹ ; ou que le plan de môle soit perpendiculaire à une face possible et parallèle à une arête possible. Ces deux cas sont beaucoup moins fréquents que le premier.

110. Dans les exemples qui viennent d'être donnés, le plan de môle se trouve être en même temps le plan de jonction des deux cristaux (mâcles par juxtaposition). Mais ce n'est là qu'un cas très particulier ; souvent les cristaux, symétriques par rap-

¹ G. vom Rath, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVIII, 449.

port à un certain plan, sont juxtaposés suivant un autre plan, ou même enchevêtrés complètement l'un dans l'autre (mâcles par pénétration). Exemples :

Fig. 247. Deux cristaux tricliniques d'*anorthite* symétriques par rapport à un plan normal à l'arête *op*, sont joints en réalité par une face (307) indiquée par une ligne ponctuée.

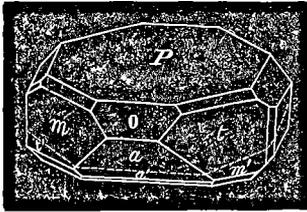


Fig. 247.



Fig. 248.

Fig. 248. Deux cristaux rhomboïdaux obliques d'*orthose*, mâclés comme les cristaux de gypse de la fig. 243, sont accolés parallèlement au plan de symétrie, et enchevêtrés l'un dans l'autre.

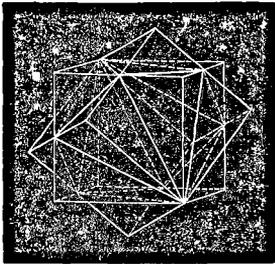


Fig. 249.

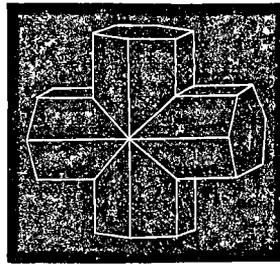


Fig. 250.

Fig. 249. Deux cubes de *fluorine*, mâclés comme les octaèdres de la fig. 244, se pénètrent complètement.

Fig. 250. Deux prismes rhombiques de *staurotide* sont orientés symétriquement par rapport à une troncature sur les angles

e faisant avec la base un angle voisin de 45° , et se pénètrent en formant une croix rectangulaire.

111. Dans les cristaux hémédriques, il arrive souvent que deux individus, présentant chacun l'une des formes conjuguées, soient associés dans la position relative que ces formes ont dans le polyèdre holoédrique correspondant¹. Exemples :

Fig. 251. Mâcle avec pénétration complète de deux dodécaèdres pentagonaux de *pyrite*, symétriques l'un de l'autre par rapport à une face quelconque du dodécaèdre rhomboïdal.

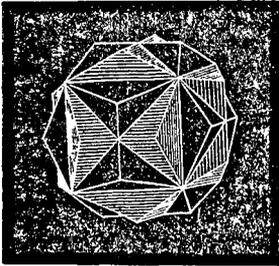


Fig. 251.

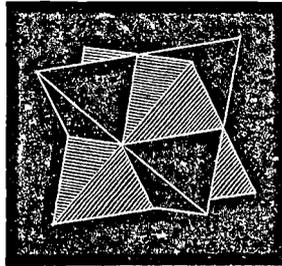


Fig. 252.

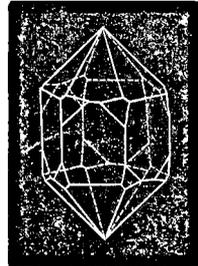


Fig. 253.

Fig. 252. Mâcle avec pénétration complète de deux tétraèdres de *diamant*, symétriques par rapport à une face du cube.

Fig. 253. Mâcle avec pénétration complète de deux cristaux de *quartz* non superposables (§ 94), symétriques par rapport à une face du prisme de deuxième espèce.

Dans ce genre de mâcle, le groupement reproduit la symétrie du polyèdre holoédrique.

112. D'autres fois, les deux cristaux hémédriques appartiennent

¹ Ergänzungszwillinge de Haidinger, *Handb. d. bestim. Mineralog.* Vienne, 1850, 258; Mâcles par hémitropie moléculaire; BRAVAIS, *Études cristallographiques*, 251. Si les deux formes ne sont pas superposables, il n'y a plus d'axe de mâcle proprement dit: Mâcles par inversion moléculaire; BRAVAIS, p. 258.

nent tous deux à la même forme conjuguée, et sont mâclés comme le seraient les polyèdres holoédriques correspondants, par une rotation de 180° autour d'un axe de môle. Les polyèdres holoédriques seraient alors symétriques par rapport au plan de môle, mais il peut en être autrement des hémiedres. Exemples :

Fig. 254. Môle de deux octaèdres développés tétraédriquement.

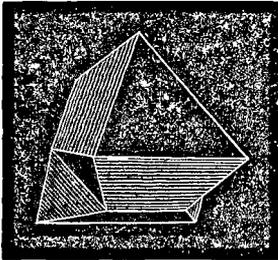


Fig. 254.

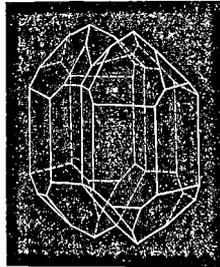


Fig. 255.

Fig. 255. Môle de deux cristaux de *quartz* de même espèce, dont l'un a tourné de 180° autour de l'axe principal.

113. Mâcles multiples. Mimésie ¹. — Tous les groupements que nous venons de voir présentent le caractère commun et général de posséder une symétrie réelle ou apparente plus élevée que celle des cristaux simples dont ils sont formés. L'ensemble des deux cristaux hémiedriques des fig. 251 et 252 reproduit la symétrie du système cubique holoédrique ; le groupement (fig. 243) de deux cristaux rhomboïdaux obliques présente dans son ensemble, non plus un seul, mais bien deux plans de symétrie.

¹ MALLARD, *Ann. des Mines*, 1876, X; TSCHERMAK, *Zeitsch. d. d. geol. Ges.*, 1879, XXXI, 637; DES CLOIZEAUX, *Ann. de chim.* 1876, IX, 433; BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 187. De nombreux travaux, publiés pendant les dix dernières années dans tous les journaux scientifiques, ont montré l'importance des idées émises sur ce sujet par M. Mallard.

Ce fait acquiert une grande importance lorsque les cristaux mâclés sont complètement enchevêtrés, comme dans la fig. 253, le groupement a alors l'apparence d'un cristal unique de symétrie plus élevée. Ce phénomène a reçu le nom de *mimésie*.

114. — En général, d'ailleurs, les groupements ne sont pas aussi simples, mais résultent de la réunion de plusieurs mâcles successives. Exemples : Dans le *feldspath microcline*, la mâcle de la fig. 246 se répète habituellement par la juxtaposition d'une série de cristaux tricliniques réunis suivant le même plan de mâcle. Les cristaux individuels sont très minces, leurs faces à peine perceptibles sous forme de stries sur les faces du cristal total qui offre alors tout à fait la symétrie du prisme rhomboïdal oblique ; cette tendance à la symétrie s'accusant même dans le développement des faces secondaires (fig. 256.)

Le carbonate de chaux *aragonite* cristallise dans le système rhombique ; l'angle des faces antérieures du prisme est de 116° et ne diffère pas beaucoup de l'angle de 120° d'un prisme hexa-

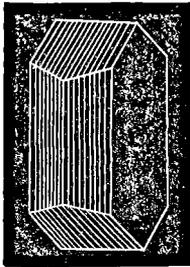


Fig. 256.

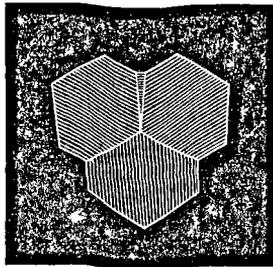


Fig. 257.

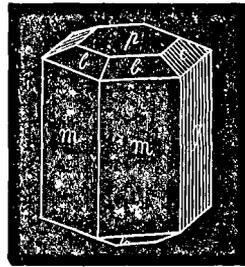


Fig. 258.

gonal. C'est ce que l'on appelle un cristal à *forme limite*. Souvent trois de ces cristaux se mâclent par rapport à une face du prisme, de manière à produire un groupement qui est à peu près un prisme hexagonal (fig. 257).

Dans les cas de ce genre, l'analogie est encore augmentée par

ce que l'on appelle la *pseudosymétrie*. Un cristal rhombique, par exemple, dont les faces forment un angle voisin de 120° , possède une structure moléculaire à peu près hexagonale ; cette similitude de structure entraîne très souvent une similitude dans le développement des diverses faces. A côté des faces *m*, *b*, se développent souvent les faces *g*, *e*, qui complètent la symétrie hexagonale (fig. 258). Lorsque plusieurs de ces cristaux sont mâclés et enchevêtrés les uns dans les autres, les petites différences d'angles se compensent, et il peut être assez difficile de savoir quelle est la véritable symétrie de l'objet que l'on a entre les mains.

Les cristaux de *grenat topazolite* ont extérieurement l'apparence du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 259), mais sont en réalité composés de 48 cristaux tricliniques dont la structure possède à peu près la symétrie cubique, et qui sont groupés autour du centre du cristal de telle manière que quatre d'entre eux viennent former chacune des faces du dodécaèdre.

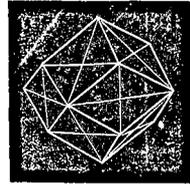


Fig. 259.

Dans ce cas, les cristaux élémentaires sont distincts et simplement juxtaposés, on peut les reconnaître par un examen optique.

Dans le *grenat ouwarowite*, suivant M. Mallard, les quatre cristaux tricliniques aboutissant à une même face du dodécaèdre, seraient complètement enchevêtrés et pénétrés l'un dans l'autre, de façon à donner un cristal mimétique rhomboïdal droit ; le dodécaèdre de grenat serait ainsi formé de 12 cristaux rhombiques en apparence. Dans d'autres grenats, enfin, ces 12 cristaux rhombiques s'enchevêtreraient à leur tour pour donner un cristal résultant qui possède complètement les caractères du système cubique¹.

¹ MALLARD, *loc. cit.* — E. BERTRAND, *Bull. Soc. min.* 1881, IV, 12.

115. Groupements de cristaux de natures différentes.

— Des groupements réguliers se produisent quelquefois entre des cristaux de constitutions chimiques et de systèmes cristallographiques complètement différents. En général, les cristaux ont, dans ce cas, une face parallèle ainsi qu'une arête comprise dans cette face.

C'est ainsi que des prismes biobliques de *disthène* et des prismes rhomboïdaux droits de *staurotide* se présentent sous la forme de cristaux allongés accolés par une de leurs faces ; de petits prismes carrés de *rutile* se disposent sur des cristaux de *fer oligiste* appartenant au système rhomboédrique, de telle sorte qu'une face du prisme est parallèle à la base du rhomboèdre et que les arêtes verticales du prisme sont parallèles ou perpendiculaires aux arêtes qui limitent cette base.

116. Imperfections des cristaux. — Les faces des cristaux, surtout si leurs dimensions sont un peu considérables, ne sont que rarement tout à fait planes. Le plus souvent, elles paraissent formées de plusieurs faces juxtaposées et très peu inclinées les unes sur les autres.

Cette particularité se rencontre presque toujours dans les cristaux mimétiques. Ainsi, dans le grenat représenté à la fig. 259, les quatre cristaux qui aboutissent à une même face du dodécaèdre rhomboïdal ne se terminent pas exactement dans un même plan ; la face est remplacée par une pyramide rhomboïdale très surbaissée. Cette particularité porte le nom de *polyédrie*¹. Dans le microcline de la fig. 256, les faces polyédriques forment des stries parallèles au plan de symétrie apparent du cristal.

Un effet analogue peut se produire, sans mâcle proprement dite, par l'apparition, à la place d'une face d'indices simples, d'un

¹ SCACCHI, *Nuov. Cim.* 1860, XII, 395 ; *Mem. Acad. Torino*, 1865, XXII, 1.

certain nombre de faces très voisines, dites *faces vicinales*, qui souvent se reproduisent périodiquement sur toute l'étendue de la face. Les dessins et les stries résultant de ces faces vicinales ont naturellement une tout autre signification que dans le cas précédent où ils annoncent des groupements multiples.

Aux faces vicinales se rattachent les faces courbes et tordues. Le diamant, cristallisé en solide à 48 faces, a ordinairement des faces convexes, donnant aux cristaux une apparence sphérique. Dans le chlorate de soude, on observe quelquefois les faces d'un tétraèdre régulièrement développées, tandis que celles du tétraèdre inverse sont arrondies ¹.

La surface d'un cristal est quelquefois couverte d'une quantité de petits cristaux groupés parallèlement qui se terminent à peu près dans un même plan. Quelquefois, ce plan est celui d'une face cristallographique régulière, d'autres fois il a une position accidentelle quelconque (*fausses faces*).

De fausses faces d'orientation arbitraire peuvent encore prendre naissance lorsqu'un cristal, en se développant, rencontre un autre cristal déjà formé sur lequel il est obligé de se mouler.

117. — Rien n'est plus rare qu'un cristal parfait, de structure tout à fait homogène. L'examen à l'œil nu, et bien plus encore l'examen au microscope, révèlent toujours l'existence d'un nombre plus ou moins grand de pores et d'inclusions.

Les pores, ou cavités, peuvent être remplis de matières gazeuses, liquides ou vitreuses, restes du milieu dans lequel le cristal s'est formé. On observe quelquefois une bulle de gaz ou de petits cristaux microscopiques dans le liquide qui remplit la cavité. Celle-ci est tantôt absolument irrégulière, tantôt limitée

¹ DE FOULLON, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 532. Nous avons eu l'occasion d'observer la même particularité.

par des parois planes, qui reproduisent en creux la forme du cristal (*cristaux négatifs*).

Les inclusions solides sont en général des cristaux plus ou moins développés de matières étrangères (*microlites*), quelquefois disposés au hasard, d'autres fois orientés et groupés d'une manière plus ou moins en rapport avec la symétrie cristalline de leur hôte.

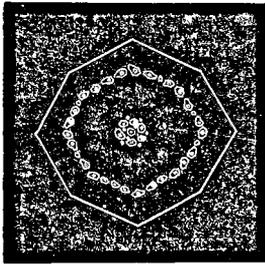


Fig. 260.

La fig. 260 représente, d'après M. Zirkel, une coupe faite au travers d'un cristal trapézoédrique de leucite, renfermant des couches de microlites parallèles à ses faces¹.

¹ F. ZIRKEL, *Die mikroskopische Beschaffenheit der Mineralien und Gesteine*, Leipzig 1873.

CHAPITRE VII

MESURE DES ANGLES DES CRISTAUX

118. Définitions. — Ainsi que nous l'avons vu au § 3, les formes cristallines sont définies seulement par les angles dièdres des diverses faces qui les constituent; et ces angles se retrouvant les mêmes sur tous les cristaux d'une même substance, il importe de pouvoir les mesurer avec exactitude. Les instruments qui servent à cet usage portent le nom de *goniomètres*. Nous décrirons brièvement dans ce chapitre quelques-uns de ceux que l'on emploie le plus fréquemment.

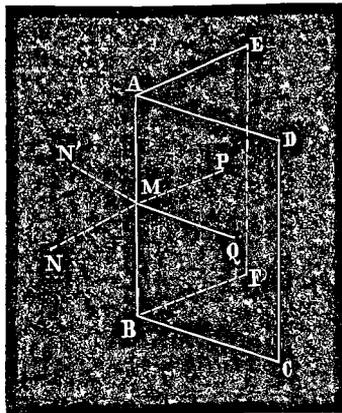


Fig. 261.

L'angle dièdre de deux faces ABCD, ABEF, est mesuré par l'angle plan PMQ (fig. 261) que comprennent entre elles deux droites MP et MQ menées respectivement dans chacune des deux faces perpendiculairement à leur intersection.

Habituellement, il est plus commode, comme nous l'avons dit

(§ 36), de considérer, non pas l'angle PMQ , mais l'angle NMN' des normales aux deux faces. NMN' est d'ailleurs le supplément de PMQ ; on a, en effet (fig. 262) :

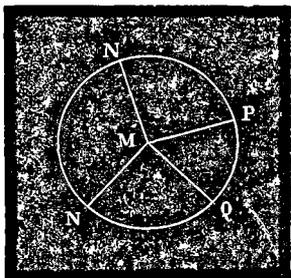


Fig. 262.

$$PMQ + NMN' + NMQ + N'MP = 360^\circ,$$

ou, puisque $N'MP$ et NMQ sont des angles droits

$$PMQ + NMN' = 180^\circ.$$

119. Goniomètre de Carangeot ¹ (fig. 263). — Deux alidades ou règles de métal A et B peuvent tourner autour d'un

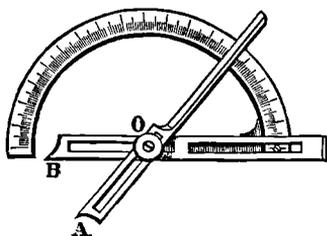


Fig. 263.

axe O , tandis qu'un cercle gradué, ayant son centre en O , permet de mesurer leur écartement. Il suffit alors d'appliquer simultanément leurs extrémités OA et OB , dont la longueur peut être modifiée à volonté, grâce aux rainures indiquées sur la figure, sur les faces de l'angle dièdre

à mesurer, en ayant soin que leur plan soit bien perpendiculaire à l'arête; la valeur de l'angle se mesure ainsi directement.

Ce dispositif est très simple et peu encombrant; les mesures se font rapidement, mais la précision n'est pas bien grande et ne dépasse guère un quart de degré dans les conditions les plus favorables. Le goniomètre de Carangeot rend néanmoins de grands services pour des mesures approximatives, et surtout lorsqu'on a à étudier des cristaux de grandes dimensions, à faces plus ou moins imparfaites.

¹ CARANGEOT, *Journal de physique*, 1783, XXI, 193; 1786, XXIX, 226.

120. Goniomètre de Wollaston ¹. — Soit QMP (fig. 264) l'angle dièdre d'un cristal dont l'arête est supposée perpendiculaire au plan de la figure, A et A' deux points lumineux, ou mires fixes, contenus dans ce plan. On peut évidemment placer l'œil O et le cristal de telle manière que l'image de la mire A, obtenue par réflexion sur la face MP, soit vue dans la direction de la mire inférieure A'. Il suffit pour cela que, l'œil étant

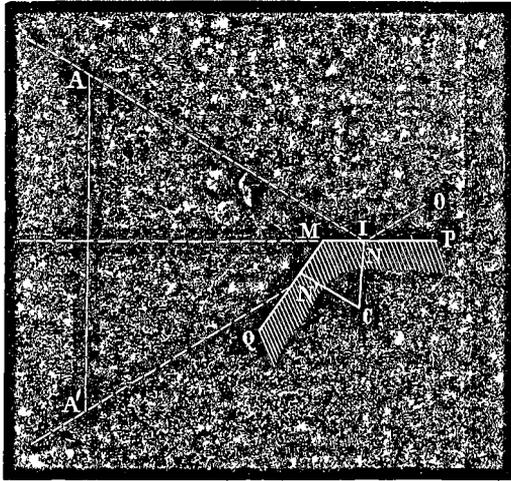


Fig. 264.

sur le prolongement de A'I, la face MP bissecte l'angle AIA'. L'œil restant immobile, si l'on fait tourner le cristal autour d'un axe C parallèle à l'arête M, et situé à égale distance des deux faces, on amène la face MQ à occuper exactement la position qu'avait la face MP avant la rotation, ce que l'on reconnaît à ce que l'image de A réfléchi sur MQ est vue à ce moment en coïncidence avec A'. L'angle dont le cristal a tourné est égal à NCN', l'angle des deux normales ou le supplément de l'angle dièdre considéré.

¹ WOLLASTON, *Phil. Trans.* 1809, 253; *Gilb. Ann.* 1811, XXXVII, 357.

L'exactitude de la mesure exige que la face MQ vienne prendre exactement la place de la face MP, c'est-à-dire que l'œil reste immobile et que le cristal soit parfaitement centré par rapport à l'axe C. L'erreur résultant d'un défaut de centrage est d'ailleurs d'autant plus faible que les mires A et A' sont plus éloignées.

L'appareil de Wollaston (fig. 265), qui est encore très généralement employé, se compose d'un cercle gradué M, pouvant tour-

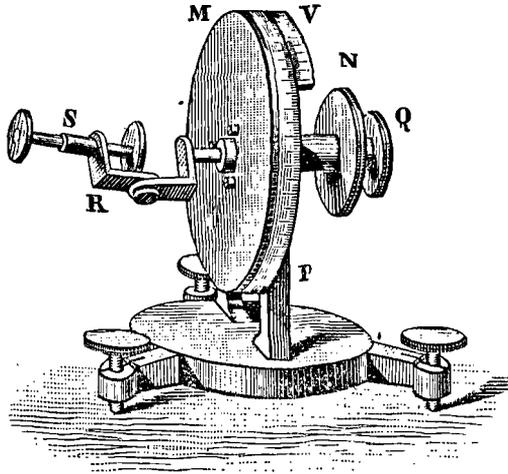


Fig. 265.

ner avec son axe horizontal sur un support P. Un bouton N permet de le manier commodément, et ses déplacements sont mesurés par un vernier V fixé au pied de l'appareil. Un second axe, passant à l'intérieur du premier, porte à l'une de ses extrémités un bouton Q pour le faire tourner, et à l'autre bout un système de pièces articulées R et S sur lesquelles on fixe le cristal avec un peu de cire et qui permettent de l'orienter et de le centrer assez rapidement dans le prolongement de l'axe de rotation du cercle. Grâce à cette disposition, on peut à volonté faire tourner le cristal indépendamment du limbe au moyen du bouton

Q, ou entraîner simultanément, au moyen du bouton N, le cristal et le limbe qui mesure sa rotation.

Pour la mire A, on prend en général un bec de gaz fixé à hauteur convenable, à 4 ou 5 mètres au moins du goniomètre. On remplace la mire A' par l'image de A vue par réflexion dans un miroir de verre noir S que l'on place à quelques centimètres au-dessous du cristal (fig. 266).

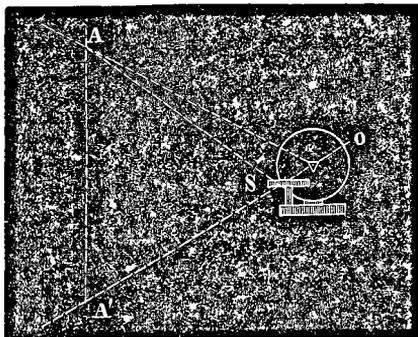


Fig. 266.

n s'assure que le plan du cercle passe bien par le point lumineux A, on règle le miroir S de manière que l'image A' qu'il donne de A soit contenue dans le même plan vertical ; enfin, par le jeu des pièces qui portent le cristal, on donne à celui-ci une position telle que lorsqu'on le fait tourner avec le bouton Q, l'œil placé derrière et très près, voit successivement l'image de A réfléchie sur l'une, puis sur l'autre des deux faces, passer exactement sur l'image A' réfléchie par le miroir. Rien de plus facile alors que de mesurer l'angle dont il faut déplacer le cercle avec le cristal pour passer de l'une à l'autre des deux positions pour lesquelles il y a coïncidence des images.

En opérant dans l'obscurité, on peut ainsi mesurer de très petits cristaux ; si les faces sont bien réfléchissantes, la précision d'un pointé isolé peut atteindre trois à quatre minutes. Il est d'ailleurs aisé de répéter les mesures : la disposition du goniomètre permet d'employer la méthode de la répétition des angles. Ayant placé le limbe au 0° du vernier, on amène le cristal dans la première position de coïncidence au moyen du bouton Q. Puis on fait tourner le limbe et le cristal au moyen du bouton N

jusqu'à la seconde position; on ramène au moyen de Q le cristal dans la première position sans déplacer le limbe; on tourne de nouveau le limbe et le cristal jusqu'à la seconde position, et ainsi de suite. A chaque opération, on fait avancer le limbe d'un angle égal à l'angle cherché, il suffit de lire à la fin l'angle total qu'il a décrit, et de diviser cet angle par le nombre des opérations. Le résultat est le même que si l'on avait pris la moyenne de plusieurs mesures distinctes, et l'on n'a que deux lectures du vernier à faire, une au commencement et une à la fin.

Les instruments que l'on construit actuellement portent pour régler et centrer le cristal un dispositif plus perfectionné que celui de Wollaston, et consistant, pour le centrage, en deux chariots, que des vis de rappel font mouvoir dans deux directions rectangulaires, tandis que l'orientation du cristal est obtenue par deux autres chariots mobiles dans des glissières en arc de cercle. Ce dispositif, d'ailleurs facile à comprendre, est indiqué dans les figures 267 et 268.

121. Goniomètres de Mitscherlich et de M. Mallard.

— Dans la disposition de Mitscherlich¹ le miroir S est supprimé, et on fixe la direction du rayon réfléchi en le recevant dans une petite lunette à grossissement faible ou nul, dont l'axe optique est parallèle au plan du limbe; on amène alors l'image de la mire réfléchie sur le cristal à se former au foyer de la lunette, qui porte un réticule de deux fils croisés.

M. Mallard² a cherché à éliminer, sans recourir à l'emploi peu commode de mires très éloignées, les erreurs provenant d'un défaut de centrage du cristal. Dans ce but le miroir S de la fig. 266 est placé à une petite distance au-dessous du cristal;

¹ MITSCHERLICH, *Abh. Akad. Berlin*, 1843, 189.

² MALLARD, *Bull. Soc. Min.* 1887, X, 231.

devant le goniomètre on dispose un collimateur horizontal ou peu incliné (fig. 267), formé d'une large lentille au foyer principal de laquelle se trouve une fente de forme convenable éclairée d'une manière quelconque. Le faisceau parallèle émer-

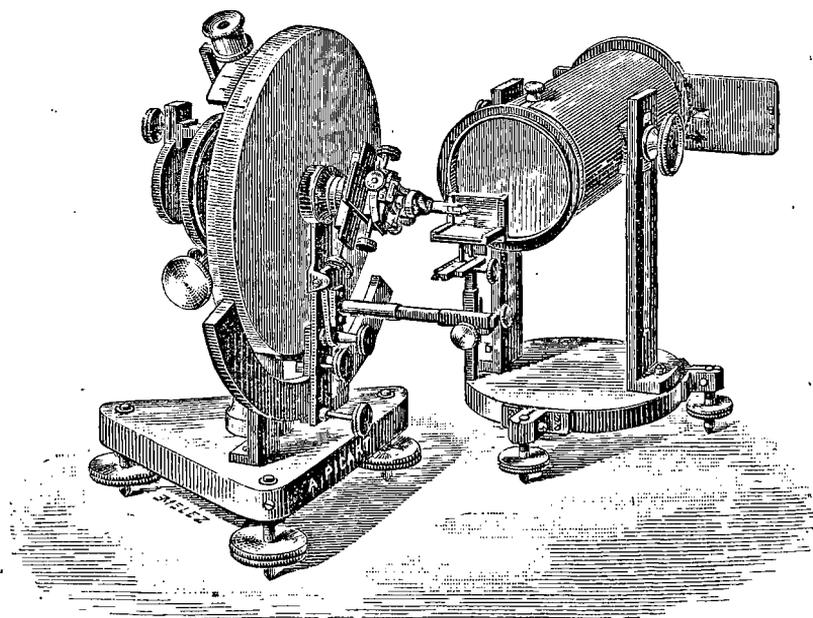


Fig. 267.

Modèle construit par la maison A. PICART, 20, rue Mayet, à Paris.

geant de ce collimateur vient tomber à la fois sur le cristal et sur le miroir et se trouve dans les mêmes conditions que s'il provenait d'une mire infiniment éloignée.

La fente est en général une ouverture allongée dans le sens horizontal, élargie à ses deux bouts pour donner un éclairage suffisant, et rétrécie dans son milieu pour permettre des pointés exacts ¹.

¹ WEBSKY, *Zeitsch. f. Kryst.* 1879, III, 241.

122. **Goniomètre de Babinet**¹. — Le limbe est horizontal (fig. 268), et porte en son centre un axe qui peut se déplacer dans le sens vertical et au sommet duquel est adapté le système de réglage et de centrage du cristal. Deux bras, mobiles autour du pied de l'appareil, portent l'un le collimateur C, qui

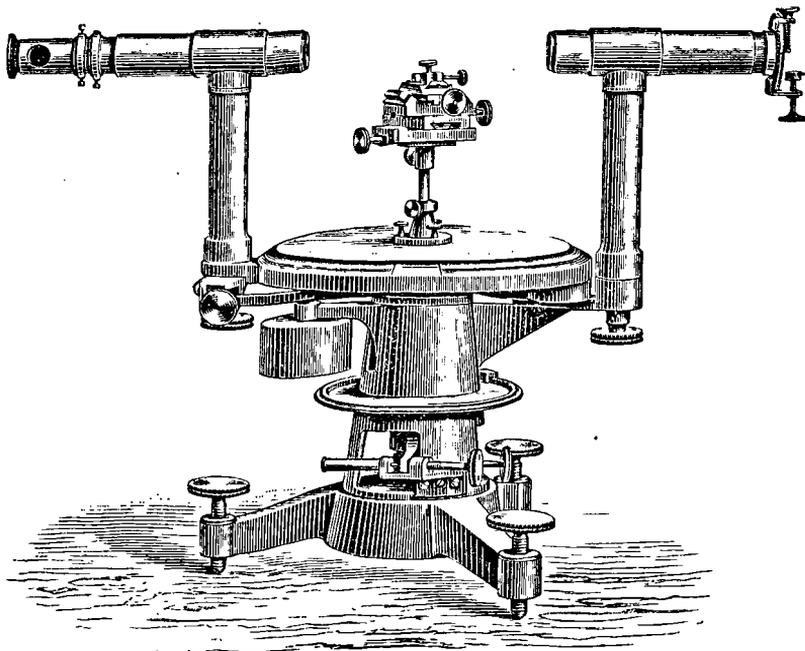


Fig. 268.

Modèle de la *Société genevoise pour la construction d'instruments de physique.*

envoie sur le cristal un faisceau de rayons parallèles, et l'autre une lunette L qui reprend ces rayons après leur réflexion et les rassemble en son foyer, où ils forment une image de la fente du collimateur (fig. 269). Les deux bras étant fixés dans une position relative quelconque, et le cristal ayant son arête verticale, on mesure l'angle dont il faut faire tourner le cercle qui

¹ BAINET, *C. R.* 1839, VIII, 710.

le porte pour amener successivement au foyer de la lunette l'image réfléchiée sur l'une et l'autre face de l'angle dièdre.

La précision n'est alors limitée que par les dimensions du cercle, par la stabilité de l'ensemble de l'appareil, et par la perfection optique des lunettes. Mais on est surtout arrêté par l'imperfection des faces des cristaux. Dans bien des cas, cette imperfection est telle,

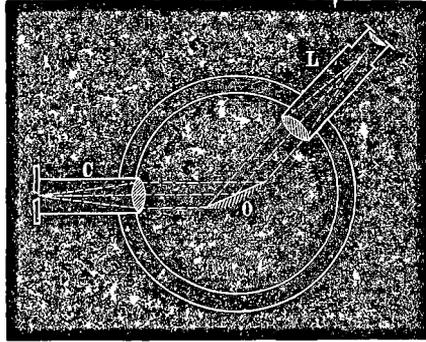


Fig. 269.

que les avantages que l'on peut retirer de l'usage de cet excellent instrument ne compensent pas la durée beaucoup plus grande des mesures, et que le goniomètre primitif de Wollaston ou de Mallard est encore préférable ¹.

¹ Voyez sur la mesure des angles des cristaux, BREZINA, *Methodik der Krystallbestimmung*, Vienne 1884; WEBSKY, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 545.

DEUXIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS MOLÉCULAIRES

CHAPITRE VIII

THÉORIES DE LA STRUCTURE DES CRISTAUX

123. Théorie de Haüy. — Nous avons étudié dans les chapitres qui précèdent les lois géométriques parfaitement précises qui règlent les formes cristallines. Nous avons conclu d'une manière générale que les caractères de symétrie accusés par la forme extérieure sont des manifestations de la symétrie intérieure de la structure du cristal. Nous avons étudié la loi de dérivation des formes secondaires et ses relations avec les six systèmes de syngonie.

On a naturellement cherché à s'expliquer ces lois, et l'on s'est efforcé de trouver des hypothèses sur la structure intérieure des cristaux qui puissent en rendre compte.

Haüy¹, complétant les idées antérieurement émises par Huygens et par Bergman, remarqua que beaucoup de cristaux peuvent se cliver, c'est-à-dire se fendre dans certaines directions bien plus facilement que dans les autres (Chapitre X), en donnant des surfaces de séparation parfaitement planes et régu-

¹ R.-J. HAÜY, *J. de Phys.* 1782, 366; *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux*, Paris 1784. Pour les travaux antérieurs et généralement pour l'histoire de ces théories, voyez СОНСКЕ, *Entwicklung einer Theorie der Krystalstruktur*, Leipzig 1879, 5.

lières. Si l'on brise, par exemple, un cristal de sel gemme, on trouve que les fragments sont toujours limités par des faces planes se coupant à angle droit comme les faces d'un cube. Cette disposition se retrouvant sur les plus petits fragments, Haüy en conclut que le sel gemme cristallisé est formé de la juxtaposition d'une infinité de parcelles ou *molécules soustractives* qui ont elles-mêmes la forme cubique. La formation d'un cristal cubique au moyen de ces particules cubiques est évidente (fig. 270).

Il n'est pas moins facile de se rendre compte, dans cette hypothèse, de la possibilité des autres formes compatibles avec le cube.

Supposons, par exemple, que, dans la couche supérieure du cube précédent, on enlève (fig. 271) un certain nombre de rangées de molécules parallèles à une des arêtes du cube; dans la

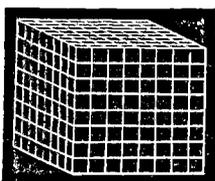


Fig. 270.

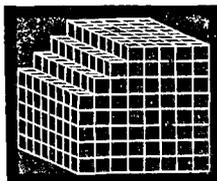


Fig. 271.

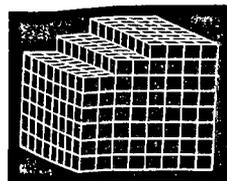


Fig. 272.

couche suivante un nombre de rangées inférieur d'une unité, et ainsi de suite : l'arête se trouvera remplacée par une série de gradins aussi hauts que larges; les molécules soustractives étant extrêmement petites, nous ne distinguerons pas ces gradins, nous aurons simplement l'impression d'une face plane symétriquement placée sur l'arête, également inclinée sur les deux faces adjacentes. En répétant cette opération, ce *décroissement* d'une rangée en hauteur et d'une rangée en largeur, sur chacune des douze arêtes du cube, nous obtiendrons les douze faces du dodécaèdre rhomboïdal.

On peut, de la même manière, enlever à chaque couche deux, trois, quatre rangées de moins qu'à la couche immédiatement supérieure (fig. 272). On obtient ainsi un décroissement d'une rangée en hauteur, et de deux, trois, quatre rangées en largeur; il en résulte une facette parallèle à une arête et interceptant sur les arêtes adjacentes horizontales des longueurs deux fois, trois fois, quatre fois plus grandes que sur les arêtes verticales: c'est une face d'un cube pyramidé.

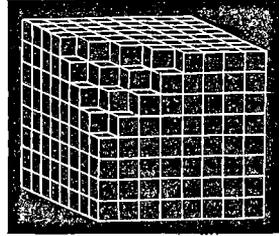


Fig. 273.

L'octaèdre s'obtient de même, en enlevant symétriquement (fig. 273) des molécules sur chacun des angles du cube par un décroissement d'une molécule en hauteur, une en profondeur et une en largeur. Un décroissement de p molécules en profondeur, q en longueur et r en hauteur donnerait lieu évidemment à une face coupant les arêtes à des distances qui seraient entre elles comme les nombres entiers p , q , r . Cette face serait comprise dans la loi de dérivation, telle qu'elle se manifeste dans le système cubique.

Dans les autres systèmes cristallographiques, on attribuera d'autres formes aux molécules soustractives¹. Par exemple, pour le prisme rhomboïdal droit, on peut supposer que ce sont des prismes rectangulaires de côtés a , b , c .

Un décroissement fait sur un angle (fig. 274) par deux molécules en hauteur, une en profondeur, trois en largeur, coupera les arêtes à des distances proportionnelles à a , $3b$, $2c$. Un décroissement quelconque les coupera toujours à des distances

¹ Les molécules soustractives peuvent résulter elles-mêmes de la réunion de plusieurs molécules intégrantes semblables entre elles mais diversement orientées. Cette double notion se retrouve dans les *paralléloèdres* et les *stéroèdres* des théories actuelles (§ 134).

qui seront des multiples entiers des trois dimensions a , b , c de la molécule soustractive. Ces dimensions sont donc proportionnelles à ce que nous avons appelé les paramètres du cristal (§ 33).

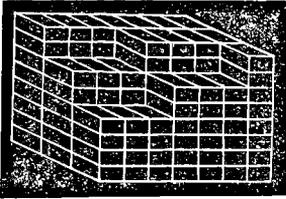


Fig. 274.

L'hypothèse de Haüy rend compte ainsi de la loi de dérivation et rattache la symétrie des systèmes cristallographiques à la forme des molécules soustractives. Pour l'explication des formes hémédriques, il faut admettre, ou bien que les décroissements ne sont pas faits symétriquement sur tous les éléments semblables de la forme primitive, ou bien, ce qui est plus logique, que les molécules elles-mêmes ont des formes hémédriques.

124. Réseaux parallélipédiques de points analogues. — La théorie de Haüy, que nous venons d'esquisser rapidement, ne répond pas aux idées actuelles sur la constitution des corps. Ceux-ci sont susceptibles de se déformer sous l'influence des actions mécaniques, de se dilater sous l'influence de la chaleur, il faut donc admettre que leurs dernières particules ne sont pas en contact les unes avec les autres. On ne s'explique pas non plus très bien la formation des molécules soustractives de Haüy au moyen des molécules chimiques ni la nécessité qu'elles aient une forme géométrique parallélipédique ou autre.

Nous avons posé en principe qu'un cristal est un corps homogène, et cela résulte du fait que ses propriétés sont en chaque point les mêmes parallèlement à une même direction. Mais il est clair que, en raison de l'imperfection de nos sens, il suffit, pour que le cristal se comporte comme un corps homogène, et puisse dans tous les phénomènes observables être considéré comme tel, qu'il renferme un très grand nombre de points très rapprochés

les uns des autres, autour desquels la structure soit identiquement la même. Nous appellerons *points analogues* les points qui satisfont à cette condition. Nous employons ici le mot de point dans son sens purement géométrique.

125. Soient A_0 et A_1 (fig. 275) deux points analogues séparés par une distance a , et supposons que, sur la ligne droite qui passe par ces deux points, il n'y ait pas de points analogues plus rapprochés l'un de l'autre¹. La structure devant être exactement la même autour de A_1 , qu'autour de A_0 , il faudra nécessairement que le point A_1 soit suivi, dans la même direction et à une nouvelle distance a , d'un troisième point analogue A_2 , celui-ci d'un quatrième A_3 , et ainsi de suite. Sur la ligne A_0A_1 , il y a donc une *rangée* de points analogues équidistants d'intervalle a .

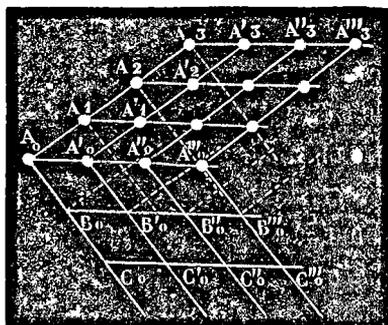


Fig. 275.

Soit A'_0 un point analogue non contenu dans cette rangée. Puisqu'il est analogue à A_0 , il doit y avoir un point A'_1 , placé par rapport à A'_0 comme A_1 l'est par rapport à A_0 , et par suite une rangée $A'_0A'_1$, parallèle et identique à A_0A_1 . Il est clair que l'on peut toujours choisir A_0 de façon que dans le plan $A_1A_0A'_0$ il n'y ait pas de rangée analogue intermédiaire. Nous verrons ensuite que la ligne $A_0A'_0$ doit être aussi une rangée, portant à intervalles égaux $A_0A'_0 = b$ un nombre illimité de points analogues, dont chacun est comme A'_0 l'origine d'une rangée, identique et parallèle à A_0A_1 . Le plan en question est donc couvert

¹ MALLARD, *Traité de Cristallographie*, Paris 1879, I, 7; — SOHNCKE, *Pogg. Ann.* 1867, CXXXII, 75.

par ces deux systèmes de rangées d'un réseau à mailles parallélogrammes dont les sommets représentent tous les points analogues contenus dans ce plan. Un tel plan est un *plan réticulaire*.

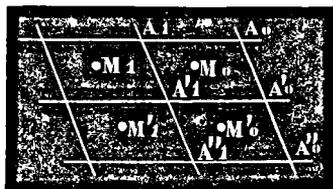


Fig. 276.

Prenant ensuite un point analogue B₀ non contenu dans ce plan, mais tel qu'aucun autre point analogue n'en soit plus rapproché, le même raisonnement nous montrera que la ligne A₀B₀ doit être une rangée de points analogues équidis-

tants d'intervalle c , et que chacun des points de cette rangée doit être l'origine d'un plan réticulaire identique et parallèle au premier. L'ensemble de tous ces plans réticulaires constitue un *réseau parallépipédique*. Tous les points analogues à A₀ doivent coïncider avec les nœuds de ce réseau.

Le milieu se trouve ainsi partagé en cellules parallépipédiques ; dans chaque cellule (fig. 276) la structure pourra varier d'une manière quelconque, mais toutes les cellules devront avoir identiquement la même structure. Au point M₀ la structure peut être quelconque, mais puisque A₀ et A'₀ sont analogues, il doit y avoir un point M'₀ de structure identique à M₀ placé par rapport à A'₀ comme M₀ l'est par rapport à A₀. Les points correspondants des diverses cellules doivent donc former un réseau de points analogues, et ce réseau sera égal et parallèle à celui des points A. La structure la plus générale qui soit compatible avec l'homogénéité est donc représentée par un nombre infini de réseaux parallépipédiques égaux, parallèles, et enchevêtrés les uns dans les autres. Les nœuds de chaque réseau sont des points analogues entre eux, mais les nœuds d'un réseau ne sont pas analogues aux nœuds des autres réseaux.

126. Le cristal ainsi formé devra, en général, être limité

par des faces planes, et ces faces devront être des plans réticulaires; ce sont, en effet, les plans réticulaires qui ont la même structure dans toutes leurs parties et qui doivent par suite éprouver dans toutes leurs parties la même action du milieu ambiant. Le réseau admet d'ailleurs une infinité de plans réticulaires : toute ligne passant par deux points analogues est une rangée, et tout plan passant par deux rangées est un plan réticulaire.

Or il est clair qu'un plan réticulaire quelconque coupera trois rangées OX, OY, OZ non comprises dans un même plan, à des distances qui seront des multiples entiers des intervalles a , b , c des points analogues sur ces trois rangées (fig. 277). La loi de dérivation des formes secondaires se présente ainsi comme une simple conséquence de l'homogénéité cristalline. Les paramètres du cristal sont proportionnels aux distances a , b , c des points analogues dans les directions correspondantes.

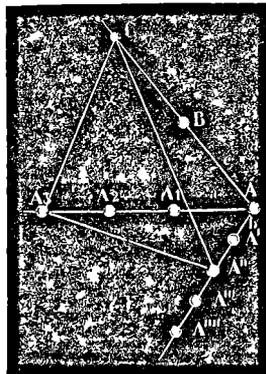


Fig. 277.

127. Théorie de Bravais. — La manière la plus simple de réaliser la structure définie au paragraphe précédent consiste à former le cristal de molécules sphériques toutes identiques entre elles, occupant les nœuds d'un seul et même réseau parallélépipédique. C'est là l'hypothèse qu'a faite Bravais et qui l'a conduit à étudier les propriétés de ces réseaux simples¹.

Ce que nous avons déjà dit au § 13 suffit à faire voir qu'un tel réseau peut avoir des éléments de symétrie. Ainsi, dans la figure 278, une rotation de 90° autour d'une rangée perpendicu-

¹ BRAVAIS, *J. de l'École polyt.* 1850, Cah. XXXIII, 1; 1851, XXXIV, 101.

laire au plan de la figure, ou autour d'une droite parallèle à cette rangée et passant par le milieu d'une maille carrée quelconque, amène chaque rangée du réseau à être remplacée par

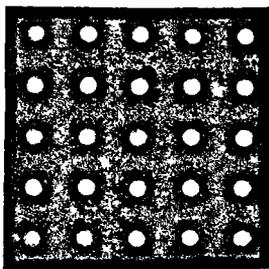


Fig. 278.

une rangée identique. Tout autour d'une de ces droites, on trouve des plans réticulaires symétriquement disposés quatre par quatre ou huit par huit, qui ont même structure et devront généralement se former dans les mêmes conditions extérieures. Le réseau possède donc une infinité de lignes très rapprochées dont chacune est un axe quaternaire. Comme

l'intervalle entre ces axes est imperceptible pour nous, on peut dire que la direction perpendiculaire au plan de la figure est un axe quaternaire. On trouverait de même le centre et les plans de symétrie. Nous saisissons la loi de symétrie beaucoup plus nettement que dans la théorie de Haüy : les faces qui se forment simultanément et appartiennent à une même forme simple correspondent aux plans réticulaires identiques qui se déduisent les uns des autres en vertu de la symétrie du réseau.

128. Les quatorze modes de Bravais. — On peut aller plus loin. Les dispositions possibles d'un réseau parallépipédique ne sont pas en nombre illimité; Bravais a démontré que tous les réseaux de ce genre peuvent être répartis en quatorze *modes* distincts, qui eux-mêmes se groupent, d'après leurs éléments de symétrie, en sept systèmes. Ces systèmes sont respectivement identiques aux six systèmes cristallographiques et au système rhomboédrique. Le système rhomboédrique est géométriquement une hémiedrie du système hexagonal, dont il a la sygonie, mais se présente dans la théorie de Bravais comme formé par un réseau d'espèce particulière.

★ 129. Nous donnons, dans les figures qui suivent, la disposition des quatorze modes réticulaires de Bravais. Dans chaque figure la partie située au-dessous de la ligne OY représente un plan réticulaire horizontal, quelconque dans le système triclinique; perpendiculaire à l'axe de symétrie principal dans les systèmes clinorhombique, hexagonal et quadratique, à un axe de symétrie binaire dans le système rhombique, à un axe de symétrie quaternaire dans le système cubique. Les molécules situées dans ce plan sont figurées par des points blancs. La partie de la figure qui est au-dessus de la ligne OY représente de même un plan réticulaire passant par la rangée OY, plan qui est incliné et passe par une rangée quelconque OZ dans le système triclinique, mais qui est pris vertical ainsi que OZ dans les autres systèmes. Sur ces deux plans on a projeté en outre, sous la forme de petits cercles, les molécules placées sur les plans réticulaires qui leur sont parallèles et adjacents, lorsque ces projections, faites sur le plan horizontal parallèlement à la rangée

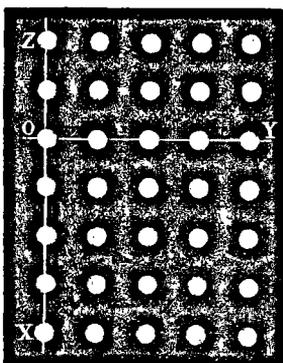


Fig. 279.

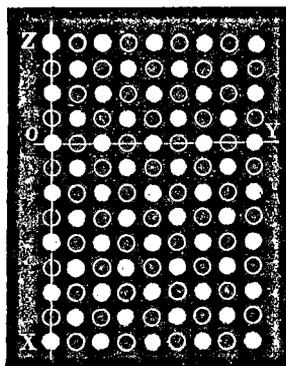


Fig. 280.

OZ, et sur le plan vertical parallèlement à la rangée OX, ne viennent pas se confondre avec les molécules déjà figurées.

Dans le *système cubique* Bravais distingue :

1° Le *mode hexaédral* (fig. 279). La maille du réseau est un cube portant une molécule à chaque angle.

2° Le *mode octaédral* (fig. 280). La maille peut être considérée comme un cube portant des molécules sur ses angles et aux milieux de ses faces.

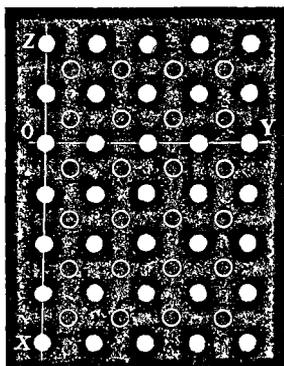


Fig. 281.

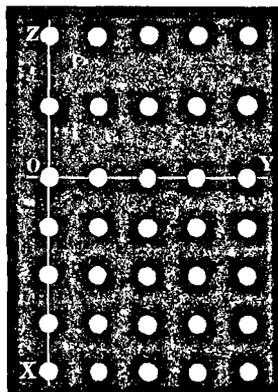


Fig. 282.

3° Le *mode dodécaédral* (fig. 281). La maille est un cube portant des molécules sur ses angles et en son centre.

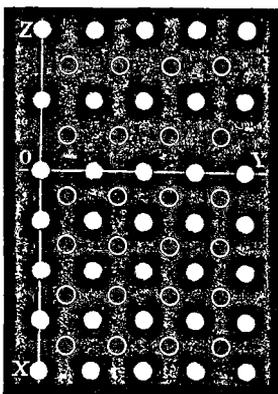


Fig. 283.

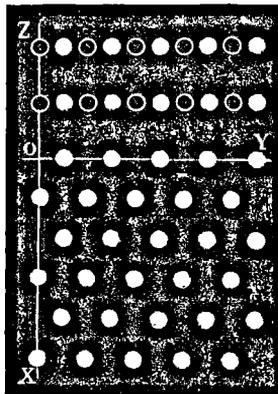


Fig. 284.

Dans le *système quadratique* on trouve :

4° Le *mode hexaédral* (fig. 282). La maille est un prisme droit à base carrée avec une molécule sur chaque angle.

5° Le *mode octaédral* (fig. 283). La maille est un prisme

droit à base carrée portant des molécules sur ses angles et en son centre de figure.

Le *système hexagonal* n'est représenté que par un seul mode :
6° (Fig. 284.) La maille est un prisme triangulaire portant des molécules sur ses angles.

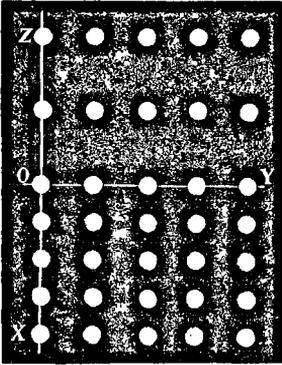


Fig. 285.

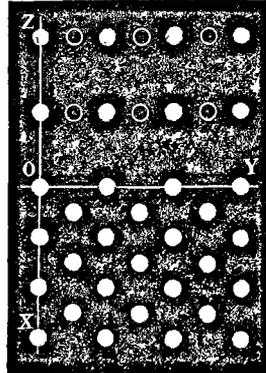


Fig. 286.

Dans le *système rhombique* :

7° Le *mode hexaédral rectangle* (fig. 285). La maille est un prisme droit rectangulaire avec des molécules sur ses angles.

8° Le *mode hexaédral rhombique* (fig. 286). La maille peut

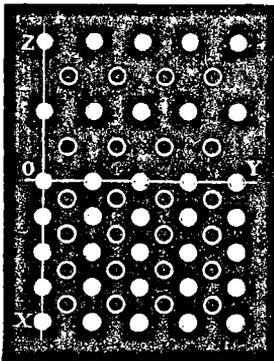


Fig. 287.

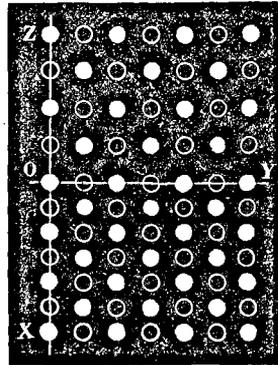


Fig. 288.

être considérée comme un prisme droit rectangulaire portant des molécules sur ses angles et aux milieux de ses bases.

9° Le *mode octaédral rectangle* (fig. 287). La maille est un prisme droit rectangulaire portant des molécules sur ses angles et en son centre.

10° Le *mode octaédral rhombique* (fig. 288). La maille est un

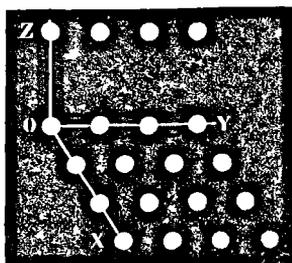


Fig. 289.

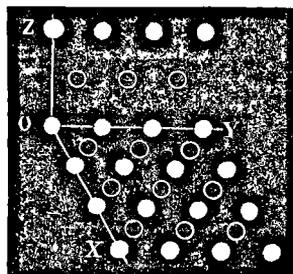


Fig. 290.

prisme droit rectangulaire portant des molécules sur ses angles et aux milieux de ses faces.

Dans le *système clinorhombique* :

11° Le *mode hexaédral* (fig. 289). La maille est un prisme droit à base parallélogramme avec une molécule sur chaque angle.

12° Le *mode octaédral* (fig. 290). La maille est un prisme droit à base parallélogramme, avec des molécules sur les angles et au centre.

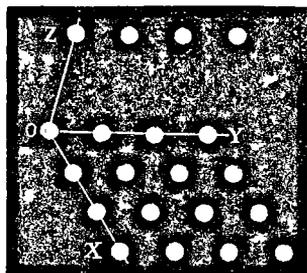


Fig. 291.

Dans le *système triclinique* il n'y a qu'un seul mode :

13° (Fig. 291.) La maille est un parallépipède douplement oblique portant une molécule sur chaque angle.

Enfin le *système rhomboédrique* est représenté par un mode :

14° (Fig. 292.) Ici il y a trois plans réticulaires horizontaux successifs dont les projections sur XOY sont distinctes. Les molécules situées dans le plan XOY sont toujours figurées en

blanc, celles qui sont dans le plan immédiatement supérieur, en gris, celles du troisième plan en noir. Le quatrième plan horizontal se projeterait de nouveau sur le premier. La maille est un rhomboèdre ayant une molécule sur chaque angle.

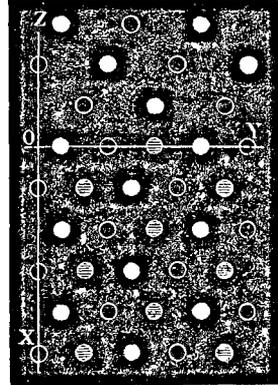


Fig. 292.

130. Influence de la symétrie des molécules. — L'existence des systèmes cristallographiques et de leur symétrie se présente donc comme une conséquence immédiate de la structure réticulaire. Toutefois, en supposant, comme nous venons de le faire, qu'un seul réseau parallélépipédique représente la structure du cristal, nous n'avons pas rencontré la symétrie des types méroédriques, à l'exception du système rhomboédrique.

Or nous ne sortirons pas du résultat général énoncé au § 125, si nous admettons que les molécules placées sur les nœuds des réseaux de Bravais ne sont pas des sphères ou de simples points géométriques, mais que ce sont des polyèdres, ou des groupes d'atomes chimiques ou de molécules plus simples. Ces polyèdres ou ces groupes (*molécules cristallines*) peuvent posséder eux-mêmes une symétrie déterminée. Si la molécule a une symétrie égale ou supérieure à celle du réseau, la symétrie de celui-ci subsistera dans le cristal, mais si la molécule a une symétrie inférieure, le cristal ne pourra posséder que les éléments de symétrie qui sont communs à la molécule et au réseau.

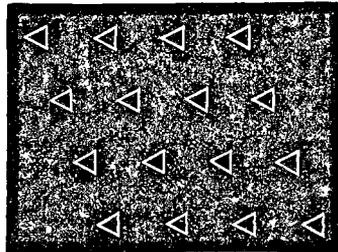


Fig. 293.

Nous répétons ici un exemple, déjà donné au § 12, d'une réduction de symétrie obtenue par ce procédé. Dans l'assemblage de la figure 293, les plans réticulaires restent les mêmes que dans l'assemblage à molécules symétriques ; les faces possibles gardent leur orientation, mais les molécules se présentent différemment sur des faces qui seraient semblables dans le cristal holoédrique : ces faces peuvent alors se comporter comme des faces d'espèces différentes.

Des molécules rhomboédriques disposées suivant un réseau hexagonal forment un cristal à symétrie rhomboédrique, aussi bien que des molécules sphériques, hexagonales ou rhomboédriques disposées suivant un réseau rhomboédrique. Dans l'un et l'autre cas, il ne reste qu'un centre, un axe principal ternaire, trois axes horizontaux binaires et trois plans de symétrie verticaux.

En prenant un réseau quelconque et en y substituant des molécules de moins en moins symétriques, on arrivera ainsi à réduire de plus en plus sa symétrie sans altérer sa syngonie. L'exemple de la figure 133 (§ 70) correspondrait à un réseau hexagonal de molécules rhombiques. Il est du reste assez naturel d'admettre que cette réduction de la symétrie du réseau ne doit pas aller en général jusqu'à donner au cristal les propriétés d'un réseau de syngonie inférieure : le réseau lui-même ne se forme qu'en vertu de forces qui dépendent de la structure des molécules ; on peut penser avec Bravais qu'en règle générale les molécules d'une substance donnée adopteront, parmi les sept systèmes réticulaires, celui dont la symétrie offre le plus d'éléments communs avec la symétrie qu'elles possèdent elles-mêmes. Moyennant cette restriction, la substitution de molécules de moins en moins symétriques dans les divers réseaux simples a conduit Bravais précisément aux trente-deux systèmes que nous avons étudiés (§ 103).

131. Théorie de M. Sohncke. — La théorie de Bravais que nous venons de résumer suppose le cristal formé de molécules toutes identiques et parallèles entre elles, ayant leurs centres de gravité sur les nœuds d'un seul et même réseau parallépipédique. Le cristal se présente de la même manière pour un observateur placé de la même manière dans chaque molécule.

M. Sohncke¹ a cherché d'une manière générale à déterminer tous les systèmes de points identiques entre eux qui satisfont à cette dernière condition. Dans beaucoup de cas, mais non dans tous, on peut considérer ces systèmes plus généraux comme résultant de réseaux de Bravais dont cha-

que molécule serait remplacée par certains groupes déterminés de molécules semblables, mais différemment orientées. Par exemple, dans la figure 282, qui représente un réseau du prisme droit à base carrée, nous pouvons remplacer chaque nœud par un système de quatre molé-

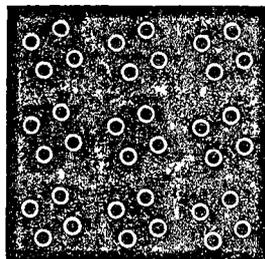


Fig. 294.

cules semblablement placées par rapport à ce nœud dans un plan perpendiculaire à l'axe quaternaire (fig. 294). Ou encore, dans un des trois réseaux du système cubique, nous pouvons remplacer chaque nœud par un système

de vingt-quatre molécules réparties, comme l'indique la figure 295, en six couronnes carrées de quatre molécules, placées chacune sur une face d'un cube

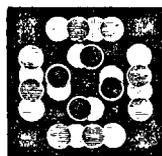


Fig. 295.

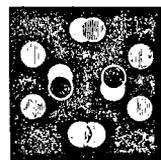


Fig. 296.

ayant ce nœud pour centre. Au lieu du système de vingt-quatre molécules, nous pouvons employer de même un système de

¹ L. SOHNCKE, *Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur*, Karlsruhe 1876; *Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur*, Leipzig, 1879.

douze molécules seulement représenté figure 296. Dans ces figures et dans celles qui suivent, les molécules sont d'autant plus ombrées qu'elles se trouvent dans un plan plus élevé au-dessus du plan de projection.

Plus généralement, on peut considérer un système régulier de Sohncke comme formé de plusieurs réseaux de Bravais égaux et parallèles, enchevêtrés les uns dans les autres. Les molécules appartenant à un même réseau sont parallèles entre elles, mais l'orientation des molécules est différente sur les différents réseaux. Ainsi, dans la figure 294 ci-dessus, un observateur placé successivement sur les quatre molécules d'un même groupe ne verra le système de points se présenter chaque fois de la même manière qu'à condition de se placer lui-même chaque fois de la même manière par rapport au centre du groupe; par exemple de regarder toujours ce centre. M. Sohncke distingue ainsi soixante-cinq systèmes réguliers, dont chacun comprend le plus souvent un certain nombre de cas particuliers, de symétries plus au moins distinctes.

* 132. Ne pouvant les étudier tous, nous nous contenterons, afin de donner une idée plus complète de cette théorie, de passer

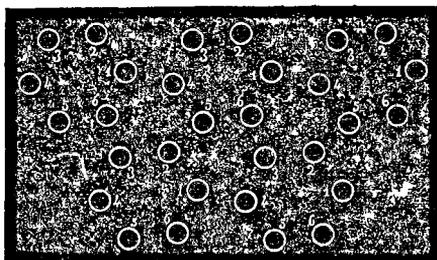


Fig. 297.

en revue les systèmes de points réguliers qui peuvent être considérés comme possédant un axe de symétrie sénaire. Ce sont :

1° Le système du prisme hexagonal. Prenons un réseau hexagonal de Bravais

représenté à la figure 284. Remplaçons chaque nœud par un hexagone régulier, ayant ce nœud pour centre, et orientés d'ailleurs d'une manière quelconque dans le plan horizontal. Nous

obtiendrons le réseau multiple de la figure 297. Chaque point de la figure est la projection d'une infinité de points équidistants situés dans sa verticale. Ce groupement possède dans le cas général l'axe de symétrie sénaire, le plan de symétrie horizontal et le centre de symétrie; il a donc les caractères de l'hémiédrie pyramidale (§ 88). Dans le cas particulier où les hexagones sont symétriques par rapport aux axes du réseau de Bravais, on a de plus les deux systèmes de plans de symétrie verticaux et d'axes de symétrie binaires horizontaux, on rentre dans le système hexagonal holoédrique.

Chaque hexagone peut se réduire à son centre; et d'ailleurs, en considérant chaque hexagone comme une seule molécule complexe, on peut assimiler ce système à un réseau de Bravais; mais, d'autre part, les hexagones voisins peuvent s'étendre et se joindre, et former un système de cellules hexagonales qui n'est pas représenté parmi les systèmes de Bravais (fig. 298).

2° Le système de la triple spirale à six points. Sur chaque hexagone du système précédent, on supprime les molécules 1,

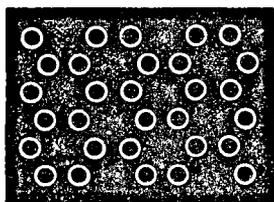


Fig. 298.

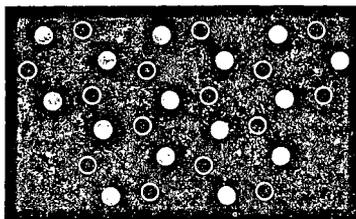


Fig. 299.

3, 5 sur les plans réticulaires de deux en deux, et les molécules 3, 4, 6 sur les plans réticulaires intermédiaires (fig. 299). Ici l'axe de symétrie principal est à proprement parler ternaire; la rotation d'un sixième de tour autour d'une perpendiculaire au plan de projection amènerait un point noir à la place d'un point blanc. Mais, comme M. Sohncke le fait remarquer, cette particularité ne peut se manifester par aucun phénomène phy-

sique¹. Il suffit de joindre à la rotation d'un sixième de tour un déplacement parallèle à l'axe égal à la distance de deux plans réticulaires consécutifs pour obtenir une superposition complète. Le plan supérieur a, dans la direction 1-4, la même structure que le plan immédiatement voisin dans la direction 3-6; comme jamais il n'arrive qu'un phénomène physique n'intéresse qu'un plan réticulaire seulement, ces deux directions se comportent en somme exactement de même, et l'axe a toutes les propriétés physiques d'un axe sénnaire. En considérant en bloc trois plans réticulaires consécutifs, on voit que ce système a la même symétrie que le précédent. On ne peut pas du reste l'assimiler à un réseau de Bravais sans le disloquer d'une manière arbitraire, et il en est de même des autres systèmes à spirales.

3° Le système de la double spirale à six points (fig. 300). Chaque hexagone ne garde que les molécules 1 et 4 sur le premier

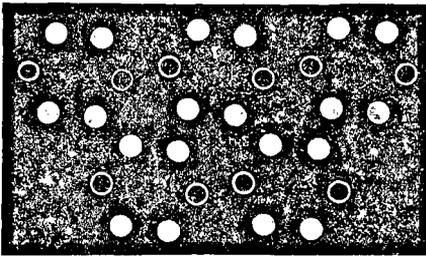


Fig. 300.

plan réticulaire, 2 et 5 sur le second, 3 et 6 sur le troisième. Le quatrième plan réticulaire est de nouveau identique au premier. Chaque hexagone donne lieu ainsi à deux spirales enroulées l'une dans l'au-

tre, dont le pas est égal à six fois la distance de deux plans réticulaires adjacents. L'enroulement peut d'ailleurs se faire tout aussi bien en sens inverse; on arrive ainsi à deux systèmes conjugués non superposables. L'axe principal est en réalité binaire, mais a, comme au cas précédent, les propriétés physiques d'un axe sénnaire. Il n'y a pas d'autre élément de symétrie dans le cas général: c'est la tétartoédrie hémimorphe du § 90.

¹ L. WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 503; — L. SOHNCKE, *ibid.* 1888, XIV, 417.

Si les hexagones sont symétriquement orientés par rapport au réseau de Bravais, leurs axes horizontaux deviennent des axes de symétrie binaire de l'assemblage et l'on a les caractères de l'hémiédrie trapézoédrique (§ 87).

4° Le *système de la spirale à six points* (fig. 301). Sur chaque hexagone du premier plan réticulaire on garde seulement la molécule 1, sur le second plan réticulaire la molécule 2, sur le troisième la molécule 3, et ainsi de suite. Chaque hexagone

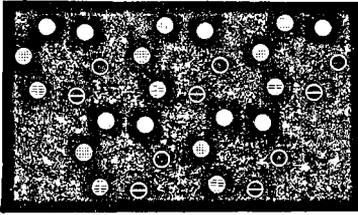


Fig. 301.

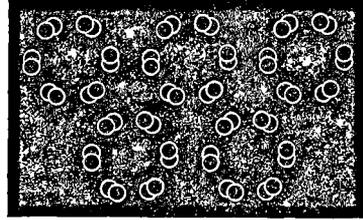


Fig. 302.

donne lieu à une seule spirale qui peut être enroulée dans un sens ou dans l'autre. Les caractères de symétrie sont les mêmes que dans le cas précédent.

5° Le *système du prisme hexagonal composé* (fig. 302). Chaque point du système n° 1 est remplacé par deux points, situés en général dans des plans horizontaux rapprochés, mais distincts, et placés symétriquement par rapport aux axes binaires du réseau de Bravais. La projection sur le plan horizontal est donc un dodécagone semi-régulier. En d'autres termes, chaque nœud du réseau hexagonal de Bravais est remplacé par un système de douze points disposés comme les points blancs de la figure 199, § 87. Sur la figure 302 les deux points formant un couple sont teintés également, celui qui se trouve sur le plan inférieur étant simplement à demi recouvert par l'autre. Dans le cas général, ce système a la symétrie de l'hémiédrie trapézoédrique du § 87; il devient holoédrique si la ligne de

jonction de chaque couple de points est parallèle ou perpendiculaire à l'axe principal, ou bien encore si le point inférieur d'un couple se trouve placé directement au-dessous du point supérieur du couple voisin.

6° Le système de la triple spirale composée à six points (fig. 303),

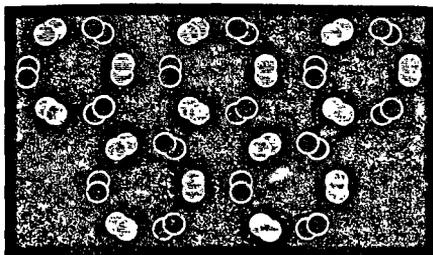


Fig. 303.

7° Le système de la double spirale composée à six points (fig. 304), et

8° Le système de la spirale composée à six points (fig. 305)

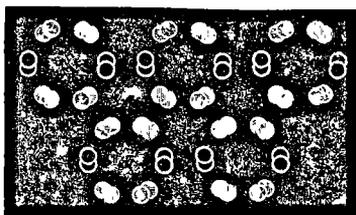


Fig. 304.

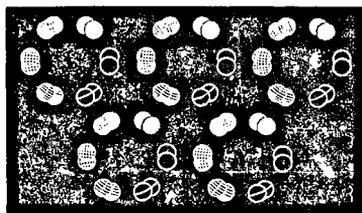


Fig. 305.

se déduisent de la même manière des systèmes n° 2, n° 3 et n° 4. Le premier a la même symétrie que le système n° 5. Les deux autres ont les caractères de l'hémiédrie trapézoédrique.

On voit que l'holoédrie et trois des quatre méroédries à axe sénaire du système hexagonal sont représentées parmi les réseaux de M. Sohncke. Il manque l'hémimorphie principale du § 89. On arrive à des résultats analogues pour les autres systèmes de symétrie.

*** 133. Extension de la théorie de M. Sohncke¹.** — En résumé, la théorie des systèmes réguliers de molécules sphériques toutes de même espèce suffit à rendre compte de la plupart des méroédries étudiées au Chapitre V ; il en est cependant quelques-unes qui lui échappent, en particulier la tétartoédrie rhomboédrique du § 95, et quelques hémimorphies. Pour éviter cette difficulté, M. Sohncke a été forcé de généraliser son système et de rentrer dans la structure générale définie au § 125. Le cristal, pour être homogène, doit simplement être formé d'un nombre quelconque de réseaux parallélipédiques égaux et parallèles ; les atomes placés sur les nœuds de chaque réseau sont identiques et identiquement orientés, mais leur nature et leur orientation peuvent varier d'un réseau à l'autre.

Quelquefois le système dans son ensemble pourra être conçu comme un réseau parallélipédique unique portant à chaque nœud une molécule complexe ; tel est le cas du système représenté à la figure 306, composé d'un réseau de prisme hexagonal de Sohncke de molécules d'une certaine espèce, et d'un réseau hexagonal de Bravais dont chaque nœud occupe le centre d'un des hexagones de l'autre réseau et porte une molécule

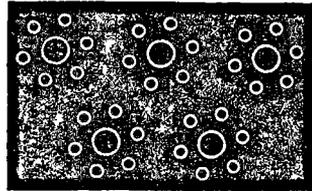


Fig. 306.

d'espèce différente ; ou bien comme un système régulier de Sohncke portant à chaque nœud une molécule complexe, tel serait le cas du système du prisme hexagonal réduit à un réseau de cellules hexagonales, dont chaque angle serait occupé par un couple de deux molécules d'espèce différente superposées sur une parallèle à l'axe de symétrie (fig. 307) ; ce système aurait la symétrie

¹ SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIV, 426 ; — HAAG, *Die regulären Krystallkörper*, Progr. Rottweil 1887 ; — WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 503.

de l'hémimorphie hexagonale principale § 89. D'autres fois, enfin, un tel groupement ne peut pas se faire, tel serait le cas du système de symétrie hexagonale holoédrique, formé d'un réseau de Sohncke à cellules hexagonales de molécules d'une

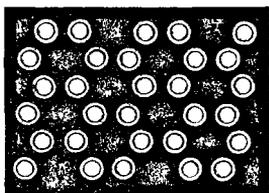


Fig. 307.

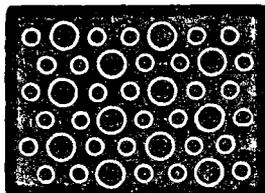


Fig. 308.

certaine espèce, et d'un réseau hexagonal de Bravais, dont les nœuds occuperaient les centres de ces cellules et porteraient des molécules d'une autre espèce (fig. 308). Les arrangements possibles sont en nombre infini. D'une manière générale, les différents atomes qui constituent les réseaux parallépipédiques égaux et parallèles du § 125 pourront être réunis en groupes moléculaires d'une seule espèce ou de plusieurs espèces, et ceux de ces groupes qui sont de même espèce pourront être considérés comme formant un ou plusieurs systèmes réguliers de Sohncke. Ces derniers comprenant les réseaux parallépipédiques de Bravais comme cas particuliers, cette répartition embrasse tous les cas possibles.

*** 134. Théories générales de M. de Fedorow et de M. Schönflies**¹. — Dans les réseaux énantiomorphes de Sohncke la symétrie de l'assemblage n'est pas influencée par celle de la molécule. Ainsi, dans le système de la spirale à six points de la figure 301, les points peuvent être remplacés par

¹ A. SCHÖNFLIES, *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Leipzig 1891; — E. DE FEDOROW, *Mem. Soc. min. St-Petersb.* 1881, XVII, 381; XVIII, 281; voyez *Zeitsch. f. Kryst.* 1892, XX, 25.

des molécules dépourvues de tout élément de symétrie, sans que l'axe principal cesse d'avoir les propriétés d'un axe sénaire. Il faut seulement que ces molécules soient toutes identiques et placées de la même manière par rapport à l'axe.

De même, dans le système du prisme hexagonal composé de la figure 302, on a toujours, si les molécules sont identiques et convenablement orientées, un axe principal sénaire et deux systèmes de trois axes binaires horizontaux qui définissent l'hémiédrie trapézoédrique.

Mais lorsque ces réseaux sont superposables à leur symétrie, il n'en est plus de même. Ainsi le réseau du prisme hexagonal (fig. 297) ne possède le plan de symétrie horizontal de l'hémiédrie pyramidale que si ses molécules sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce plan. Ces molécules peuvent être considérées alors comme formées de deux molécules partielles absolument quelconques mais symétriques l'une de l'autre. Le réseau à symétrie hémiédrique pyramidale doit être équivalent à la superposition de deux réseaux simples à symétrie tétrartoédrique pyramidale, dont l'un serait formé de molécules quelconques identiques entre elles, et l'autre de molécules symétriques des premières et placées symétriquement par rapport au plan horizontal. On voit de même que le réseau de la figure 297 n'acquiert la symétrie holoédrique par une orientation convenable de ses hexagones, que dans le cas où les molécules possèdent elles-mêmes un plan de symétrie horizontal et un plan de symétrie passant par l'axe. Le réseau holoédrique de Sohncke doit être équivalent, en réalité, à l'enchevêtrement de deux réseaux à symétrie hémiédrique pyramidale, ou, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, de quatre réseaux tétrartoédriques, formés de molécules identiques ou symétriques les unes des autres, mais, d'ailleurs, absolument quelconques. On arriverait

au même résultat en enchevêtrant deux réseaux trapézoédriques (fig. 302) symétriques l'un de l'autre.

On est ainsi conduit à considérer des systèmes réguliers, formés de molécules dont la symétrie propre reste indéterminée et n'influe pas sur celle du système; ces molécules peuvent être toutes identiques et superposables les unes aux autres, comme dans la théorie primitive de M. Sohncke; ou bien elles peuvent être de deux espèces, les molécules d'une espèce étant symétriques de celles de l'autre espèce et en nombre égal. L'étude de ces réseaux a fait connaître quelques types qui ne sont pas compris dans ceux de M. Sohncke.

Les molécules étant quelconques, nous pouvons supposer qu'elles croissent et se modifient toutes ensemble de manière à ne laisser aucun vide entre elles. L'espace se trouve ainsi partagé en un certain nombre de concamérations que M. de Fedorow appelle les *stéroèdres* et M. Schœnflies les *domaines fondamentaux*, et dont les molécules employées ci-dessus pour plus de commodité ne sont en somme que les symboles. La structure dans un domaine fondamental est absolument quelconque et ne possède aucun des éléments de symétrie du cristal, car autrement le domaine fondamental pourrait être décomposé lui-même en domaines plus petits. Les domaines fondamentaux, à part leur orientation dans l'espace, laquelle varie de l'un à l'autre, ont tous la même structure en ce sens qu'ils sont superposables les uns aux autres ou symétriques les uns des autres.

On peut, d'autre part, grouper ensemble plusieurs domaines fondamentaux pour en former des domaines doués d'une symétrie propre, tous égaux et parallèles entre eux, qui remplissent complètement l'espace. M. de Fedorow nomme ces domaines complexes les *paralléloèdres*. Les points correspondants des paralléloèdres sont des points analogues du cristal et forment un réseau parallélipédique.

* 135. **Remarques.** — L'influence de la symétrie propre du polyèdre moléculaire est donc complètement différente, suivant que l'on considère un réseau simple de Bravais, ou un réseau plus compliqué.

Dans un réseau de Bravais, l'introduction de molécules hémédriques ou tétartoédriques conjuguées donne des structures hémédriques ou tétartoédriques conjuguées correspondantes.

Dans un réseau de Sohncke, il peut en être autrement. Par exemple, dans un réseau cubique portant à chaque nœud le sys-

tème de douze points décrit au § 131, et disposé de manière à présenter l'hémédrie du dodécaèdre pentagonal, la substitution de molécules tétraédriques directes et inverses donnera

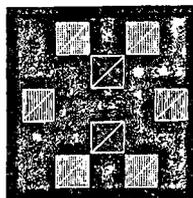


Fig. 309.

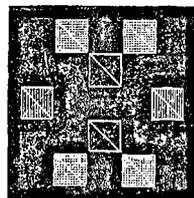


Fig. 310.

lieu à quatre structure tétartoédriques, réparties en deux groupes non superposables (fig. 309 et 310), comprenant chacun deux structures superposables l'une à l'autre. Si la molécule est elle-même hémédrique pentagonale, la symétrie du réseau n'éprouve aucune réduction; mais la substitution des deux molécules conjuguées dans le même assemblage donne deux structures qui ne sont

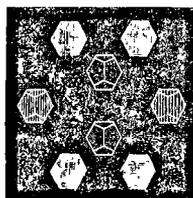


Fig. 311.

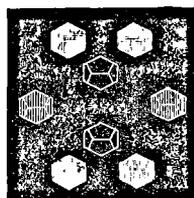


Fig. 312.

ni superposables ni symétriques, et sont, en réalité, tout à fait différentes. Les figures 311 et 312 font voir la chose clairement. Des substitutions de ce genre doivent se produire très rarement, car la structure du réseau doit être en général déterminée par celle de la molécule. Toutefois quelques auteurs ont été conduits à chercher l'explication de certains faits singuliers

dans des relations de symétrie qui ont quelque analogie avec celle dont nous venons de signaler la possibilité ¹.

Dans les systèmes généraux du § 134, il faut, pour passer d'une méroédrie à la méroédrie conjuguée, remplacer chaque domaine fondamental par son symétrique et, en même temps, remplacer l'assemblage de ces domaines par l'assemblage conjugué.

Il résulte de tout ce que nous avons vu dans ce Chapitre, que l'on peut sans difficulté imaginer des structures présentant les caractères de symétrie des divers systèmes holoédriques et méroédriques; que même chaque type de symétrie peut être réalisé par un grand nombre de structures différentes, impliquant sans doute, en général, des différences dans le développement des diverses formes simples, et dans d'autres propriétés physiques. Dans l'état actuel de nos connaissances, ce genre d'influence est difficile à préciser ². D'ailleurs, parmi toutes ces structures géométriquement possibles, nous ignorons complètement quelles sont celles qui peuvent exister réellement. Nous pouvons bien dire *a priori* qu'un système d'atomes groupés d'une certaine manière aura une certaine symétrie; mais nous ne savons pas si ce système peut rester en équilibre et subsister. Il faudrait, pour résoudre ce problème, avoir sur les forces moléculaires des connaissances bien plus étendues que celles que nous possédons actuellement.

¹ PASTEUR, *Sur le dimorphisme dans les substances actives*, *Ann. de Chim.* 1854, XLII, 418; *Note sur la té tartoédrie non superposable*, *ibid.* 1857, L, 157; — J. CURIE, *Sur les propriétés cristallographiques et thermoélectriques de la pyrite de fer et de la cobaltine*, *Bull. Soc. min.* 1885, VIII, 127.

² Des essais dans ce sens ont été faits par BRAVAIS, *Études cristallographiques*, p. 165; — MALLARD, *Cristallographie*, I, 298; — SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 214; — WULFF, *ibid.* p. 263. Voyez plus loin, Chapitre X.

CHAPITRE IX

NOTIONS DE CRISTALLOGRAPHIE CHIMIQUE

FORMATION DES CRISTAUX

136. Cristallisation par fusion. — Les cristaux peuvent prendre naissance et se développer plus ou moins régulièrement dans des circonstances assez variées, dont nous allons indiquer rapidement les principales.

Un corps fondu qui se solidifie par refroidissement prend en général une structure cristalline d'autant plus nette que la solidification s'effectue plus lentement et plus tranquillement. Le soufre, le bismuth s'obtiennent ainsi en cristaux de grandes dimensions. Il suffit de fondre ces corps dans une capsule de porcelaine et de les laisser refroidir lentement. Quand une croûte solide s'est formée à la surface, on la perce, on laisse écouler la matière non encore solidifiée qui se trouve au-dessous, et l'on trouve la paroi de la capsule tapissée de cristaux distincts.

En général, le corps se solidifie et commence à donner des cristaux dès que sa température s'est abaissée jusqu'à son point

de fusion. Beaucoup de corps cependant peuvent, dans des conditions de repos convenables, rester fondus à une température notablement inférieure. Mais cet état de *surfusion* cesse en général par l'ébranlement, et cesse toujours lorsqu'on touche la masse encore liquide avec un cristal de la même substance déjà formé. La solidification se produit alors très rapidement dans toute la masse, et les cristaux qui se développent restent enchevêtrés, formant un tout plus ou moins homogène en apparence.

137. Cristallisation par sublimation. — Certains corps, solides aux températures ordinaires, peuvent se transformer en vapeurs sans subir de modification chimique et sans passer par l'état liquide. Lorsque leurs vapeurs arrivent au contact de parois moins chaudes, elles se condensent de nouveau sous forme de cristaux; le chlorhydrate d'ammoniaque, l'iode cristallisent aisément par ce procédé.

138. Cristallisation par dissolution. — C'est là le procédé le plus important et le plus fréquent. Beaucoup de sels, par exemple, se dissolvent dans l'eau; on observe alors que la proportion du corps dissous ne peut pas dépasser une certaine limite; lorsqu'elle est atteinte, la solution est dite saturée. Si l'on abandonne une solution saturée à l'évaporation, à l'air libre ou dans le vide, l'eau s'évapore seule, et le sel, qui n'a plus assez de dissolvant à sa disposition, se dépose lentement et cristallise.

On arrive souvent au même résultat en refroidissant la solution; en effet, la solubilité du sel diminue en général quand la température s'abaisse. Quelquefois des phénomènes peuvent se produire qui sont analogues à la surfusion; la solution abandonnée à elle-même, en repos et à l'abri de l'air, peut se *sursaturer*,

et dépasser momentanément la limite de concentration normale sans que la cristallisation commence. Mais, pour la provoquer, il suffit souvent d'un ébranlement, et toujours du contact d'une trace même imperceptible du même sel déjà cristallisé. La cristallisation s'effectue alors à partir du point touché, plus ou moins rapidement et plus ou moins abondamment suivant le degré de sursaturation. Ce phénomène s'observe très facilement sur le sulfate de soude.

On peut encore faire cristalliser une solution en modifiant graduellement la composition du dissolvant. Sur une solution aqueuse d'alun de soude, par exemple, on peut verser avec précaution une couche d'alcool absolu, qui, se mélangeant peu à peu à l'eau, diminue son pouvoir dissolvant et force l'alun à se déposer.

L'eau n'est, du reste, pas le seul dissolvant que l'on puisse employer; on peut obtenir des cristallisations de divers corps dans l'alcool, le sulfure de carbone, la benzine, l'acide borique fondu, etc.; le carbone se dissout dans le fer fondu et s'en sépare en partie par le refroidissement sous forme de paillettes cristallines de graphite.

139. Cristallisation par réaction chimique. — Le mélange de deux réactifs peut donner naissance à un composé insoluble ou peu soluble, qui se précipite habituellement à l'état de poudre amorphe ou fournit des cristaux microscopiques. Mais si le mélange s'effectue avec une lenteur suffisante, par diffusion à travers un corps poreux, par exemple, on pourra obtenir par ce procédé des cristaux nettement développés. Ainsi, lorsqu'on laisse deux solutions très étendues de chromate de potasse et de nitrate de plomb diffuser lentement l'une dans l'autre, il se dépose des cristaux de chromate de plomb insoluble.

La réaction peut aussi se produire entre les corps à l'état de vapeurs; ainsi le passage de vapeurs de fluorure de fer sur de l'acide borique à haute température fait naître des cristaux d'oxyde de fer magnétique.

140. Cristallisation par électrolyse. — Les dépôts électrolytiques ont souvent une structure cristalline, d'autant plus prononcée que l'opération est plus lente; par l'emploi de courants très faibles et longtemps prolongés on peut obtenir le cuivre ou l'argent métalliques sous forme de cristaux mesurables.

141. Cristallisation par transformations moléculaires. — Quelquefois un corps solide amorphe peut prendre de lui-même et à la longue un état cristallin plus ou moins prononcé; tel est le cas du verre, du fer, de beaucoup de corps solidifiés par fusion. Les ébranlements mécaniques, les variations de température favorisent en général ces transformations, qui, du reste, ne peuvent guère donner des cristaux nettement définis de dimensions appréciables. D'autres transformations moléculaires se produisent dans les corps polymorphes dont nous parlerons plus loin.

142. Influence du milieu ambiant sur le développement des formes cristallines. — Généralement les cristaux de même provenance présentent le même développement relatif des diverses formes simples, tandis que ce développement est différent dans les cristaux de même espèce, mais d'origine différente. Ce fait est très caractéristique pour les minéraux et s'observe aussi dans les cristallisations artificielles¹. L'alun,

¹ BEUDANT, *Recherches sur les causes qui déterminent les variations des formes cristallines*, Paris 1818.

par exemple, donne des octaèdres un peu tronqués sur leurs arêtes et sur leurs angles dans les solutions aqueuses pures, des cubes dans les solutions alcalines, et prend les faces du dodécaèdre pentagonal associées au cube et à l'octaèdre en présence de l'acide chlorhydrique. On pourrait multiplier à l'infini les exemples de ce genre.

Lorsqu'on modifie la solution dans laquelle le cristal se développe, on voit la forme de celui-ci se modifier d'une manière correspondante. Par exemple, un cristal cubique d'alun étant transporté dans une solution aqueuse, s'accroîtra par le dépôt presque exclusif du sel sur les faces du cube, tandis que les faces de l'octaèdre formant réserve apparaîtront sur les angles et ne subiront pas ou presque pas d'accroissement dans la direction de leur normale. Les faces du cubes disparaîtront ainsi progressivement.

Le même phénomène a lieu lorsqu'on brise ou coupe une partie d'un cristal, les parties blessées se régénèrent avec une grande rapidité et sont le siège d'une cristallisation beaucoup plus active que les faces naturelles du cristal. Pendant cette régénération, il arrive que des faces à indices plus ou moins compliqués se produisent, pour disparaître ensuite le plus souvent. Dans certains corps hémihédriques, on peut ainsi obtenir des faces qui révèlent le manque de symétrie et qui ne se forment pas habituellement d'elles-mêmes. On a observé quelquefois que la formation de ces faces sur un angle lésé est accompagnée de l'apparition de faces correspondantes sur les angles de même espèce qui n'ont pas été touchés.

143. Cristallisations imparfaites. — Il faut, pour qu'un cristal se développe régulièrement, qu'il soit placé dans des circonstances favorables; sa forme est en général d'autant plus anormale que la cristallisation est plus rapide, que la solution

est plus visqueuse et que la substance qui cristallise est moins soluble¹. Au lieu d'être limité par des faces planes formant un polyèdre convexe, le cristal se développe alors surtout par les angles. Ceux-ci s'accroissent rapidement et donnent des prolongements qui se ramifient bientôt par la formation de rameaux secondaires, constituant un squelette cristallin. Ce squelette a d'ailleurs une structure régulière; si les conditions s'améliorent, ses vides se remplissent et il peut se transformer en un cristal normalement constitué. Dans tous les cas, les directions de plus grand accroissement sont toujours celles des angles les plus aigus. M. Lehmann, qui a fait sur ces phénomènes de curieuses études microscopiques, en a donné une explication très simple et très plausible.

Un cristal placé dans une solution exactement saturée ne peut s'accroître, car, par son accroissement, la solution cesserait d'être saturée dans son voisinage et pourrait de nouveau le dissoudre. Il faut nécessairement qu'il y ait une sursaturation, si faible qu'on la suppose. Or, la concentration dans le voisinage du cristal dépend d'une part de la rapidité avec laquelle celui-ci s'accroît en appauvrissant la liqueur, et d'autre part de l'intensité de la diffusion qui tend constamment à rétablir la concentration primitive. Si l'on remarque que la concentration a une certaine valeur uniforme, celle de la saturation, à la surface même du cristal, et une autre valeur uniforme, celle qu'elle a dans la masse du liquide sursaturé, sur une sphère décrite autour du cristal avec un rayon suffisamment grand, on voit aisément que la concentration variera plus rapidement dans le voisinage des angles. Par suite, la diffusion y sera plus

¹ O. LEHMANN, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 462. On trouvera dans le mémoire de M. Lehmann et dans l'ouvrage de M. A. FOCK, *Einleitung in die chemische Krystallographie*, Leipzig 1888, le résumé des travaux antérieurs de VOGEL-SANG, BEHRENS, KNOP, etc., sur les premières phases du développement des cristaux.

forte, et les parties saillantes du cristal pourront s'accroître plus vite que les autres. Cet effet sera d'autant plus marqué que la cristallisation sera plus rapide et la diffusion plus lente.

Cette explication suppose que le cristal en croissant s'entoure d'une aire de faible concentration relative. M. Lehmann a observé différents faits qui prouvent qu'il en est bien ainsi. Par exemple, dans une solution fortement colorée de permanganate de potasse, les petits cristaux qui se forment par un refroidissement rapide sont bordés par une région où la solution est visiblement plus claire; ils cessent de s'accroître lorsqu'ils sont assez rapprochés pour que leurs aires empiètent les unes sur les autres.

Les mêmes causes qui produisent la croissance anormale des angles peuvent aussi gêner la cristallisation et empêcher les molécules de s'orienter tout à fait régulièrement pendant qu'elles se déposent; les cristaux, tant qu'ils sont très minces, obéissent à ces influences perturbatrices et sont souvent courbés ou tordus. A mesure qu'ils croissent, l'action des forces moléculaires normales reprend le dessus, et ils se redressent. Parfois alors il subsiste dans leur intérieur des tensions qui peuvent même être suffisantes pour provoquer leur rupture spontanée.

On voit, en résumé, que la cristallisation, pour être régulière, devra s'opérer lentement, à l'abri des variations de température ou des ébranlements mécaniques qui pourraient faire cesser brusquement l'état de sursaturation de la solution. L'ébranlement mécanique, cependant, s'il est ininterrompu, de manière que la solution ne puisse pas se sursaturer, exerce parfois une influence favorable en facilitant le renouvellement régulier du liquide qui est au contact du cristal¹.

¹ L. WULFF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1886, XI, 120. Nous avons aussi obtenu d'assez bons résultats par une agitation continuelle du cristal dans la solution.

POLYMORPHISME

144. Exemples de corps polymorphes. — Haüy¹ croyait qu'un même composé chimique ne peut jamais cristalliser que dans des formes compatibles avec une seule et même forme primitive. L'observation a montré que ce n'est pas le cas, et qu'un même corps peut souvent affecter des formes complètement distinctes suivant les circonstances dans lesquelles il cristallise. Cette propriété porte le nom de *polymorphisme*².

Le carbone, par exemple, donne dans le *diamant* des cristaux cubiques, et dans le *graphite* des cristaux clinorhombiques. Le diamant et le graphite diffèrent d'ailleurs autant qu'il est possible par toutes leurs propriétés physiques et même par quelques-uns de leurs caractères chimiques.

L'oxyde de titane TiO, possède quatre formes distinctes, le *rutile* et l'*anatase*, toutes deux quadratiques, mais avec des paramètres et des caractères physiques différents; la *brookite* et l'*édisonite*, qui sont rhombiques.

Le soufre³ cristallise à une température supérieure à 90 ou 100°, soit par fusion, soit par l'évaporation d'une solution, en aiguilles clinorhombiques; par évaporation à une température

¹ Haüy admettait bien qu'un corps de composition déterminée peut cristalliser de diverses manières, mais il croyait que dans ce cas il devait y avoir une différence dans l'arrangement des atomes dans la molécule chimique, ou ce que l'on appelle aujourd'hui une isomérisation. Voyez PASTEUR, *Ann. de Chim.* 1848, XXIII, 267.

² MITSCHERLICH, *Ann. de Chim.* 1823, XXIV, 264. — Voyez GROTH, *Ueber die moleculare Beschaffenheit der Krystallen*, Munich 1888; — A. FOCK, *Einleitung in die chemische Krystallographie*, Leipzig 1888.

³ MITSCHERLICH, loc. cit.; — Ch. SAINTE-CLAIRE DEVILLE, *C. R.* 1852, XXXIV, 561; — DERRAY, *C. R.* 1858, XLVI, 576; — GERNEZ, *C. R.* 1874, LXXIX, 219; 1876, LXXXIII, 217; 1884, XCVIII, 810, 915; 1885, CI, 313.

plus basse il donne des pyramides rhombiques. Entre certaines limites de température ces deux formes sont stables ; au-dessus, les cristaux rhombiques se décomposent en une multitude de fragments clinorhombiques ; au-dessous, les cristaux clinorhombiques deviennent opaques et tombent en une poussière de cristaux rhombiques. La transformation est accélérée lorsqu'on touche ces aiguilles avec un cristal rhombique déjà formé.

Le carbonate de chaux ¹ existe sous deux formes cristallines, une forme rhomboédrique, la *calcite*, et une forme rhombique, l'*aragonite*. La calcite se forme à basse température, ou dans une solution chargée d'acide carbonique en présence d'un silicate alcalin ; l'aragonite se dépose dans les solutions chaudes, ou à froid en présence de carbonates de plomb ou de strontium. Aux environs du rouge, l'aragonite se transforme en une poussière de calcite.

L'iodure d'argent ² existe à la température ordinaire en cristaux rhomboédriques d'un jaune clair, fortement biréfringents. Par une élévation de température, sa forme se rapproche de la forme cubique en même temps que son volume diminue, et, aux environs de 146°, il passe du jaune au rouge en devenant subitement monoréfringent. Aux températures supérieures, il reste cubique et se dilate normalement.

On pourrait multiplier presque indéfiniment les exemples de corps dimorphes, trimorphes ou même tétramorphes, dont les diverses formes ont des propriétés plus ou moins différentes ³. Quelquefois une partie de ces formes sont très instables et ne peuvent s'obtenir que par des procédés spéciaux, par exemple l'action d'un cristal isomorphe (§ 146) sur une solution sursatu-

¹ G. ROSE, *Pogg. Ann.* 1860, CXI, 156 ; 1861, CXII, 43 ; — CREDNER, *J. f. prakt. Chem.* 1870, II, 292.

² MALLARD et LE CHATELIER, *Bull. Soc. min.* 1883, VI, 181 ; 1884, VII, 478.

³ Voyez en particulier les nombreux travaux de M. LEHMANN publiés dans le *Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie*.

rée¹. On remarque cependant que dans la plupart des cas les angles des différentes formes d'un même corps sont assez analogues ; et que l'une des formes rentre dans la classe des formes limites² (§ 114). Lorsqu'il en est ainsi, on doit admettre que les réseaux moléculaires sont à peu près les mêmes, quoique leur symétrie puisse être différente.

145. Considérations théoriques. — Il est naturellement extrêmement difficile de savoir quelle modification moléculaire intervient dans chaque cas particulier, mais la possibilité de semblables modifications est facile à comprendre.

On admet en chimie que les atomes des corps simples se groupent pour former les molécules chimiques des divers composés. Or on connaît, surtout en chimie organique, un grand nombre de composés dont les molécules sont formées des mêmes atomes groupés dans les mêmes proportions relatives, mais d'une manière différente ou en nombres absolus différents. Ces composés, appelés corps *isomères*, se comportent en tout comme des corps absolument différents, tellement que dans la plupart des cas on ne s'étonnera pas qu'ils n'aient pas d'analogie dans leurs formes cristallines : la question du polymorphisme ne se posera pas.

Cependant, dans les corps simples, il est plus que probable que la molécule chimique se compose aussi le plus souvent de plusieurs atomes ; suivant le nombre de ces atomes et la manière dont ils sont arrangés, le même corps simple pourra avoir des propriétés physiques et chimiques fort différentes et des formes dissemblables (*allotropie*). Le dimorphisme du carbone doit sans doute s'expliquer ainsi.

¹ LECOQ DE BOISBAUDRAN, *C. R.* 1866, LXIII, 95 ; 1867, LXIV, 1249 ; — GERNEZ, *C. R.* 1874, LXXIX, 219.

² PASTEUR, *Ann. de Chim.* 1848, XXIII, 267 ; — MALLARD, *Bull. Soc. min.* 1884, VII, 349.

De même que les atomes se groupent pour former les molécules, de même, suivant toute probabilité, les molécules chimiques se groupent pour former les particules physiques ou molécules cristallines qui interviennent dans les divers réseaux que nous avons étudiés au Chapitre précédent. Ces particules physiques pourront être formées d'un certain nombre de molécules chimiques semblables entre elles, ou au contraire, dans certains sels doubles ou hydratés, de molécules chimiques de diverses espèces. On conçoit dès lors la possibilité de phénomènes d'allotropie ou d'isomérisie, modifiant les propriétés de ces particules cristallines sans changement dans leur composition ou dans leurs caractères chimiques fondamentaux.

Enfin, les particules cristallines elles-mêmes se groupent pour former les réseaux. Dans les réseaux de Bravais, dans les réseaux primitifs de Sohncke, les particules sont toutes semblables entre elles. Il n'y a rien d'absurde à supposer qu'elles puissent se trouver en équilibre dans diverses positions relatives; en général, l'une de ces positions sera beaucoup plus stable que les autres et le réseau correspondant se formera seul; mais, cependant, les autres arrangements, une fois formés à la faveur de quelque circonstance spéciale, pourront quelquefois subsister. Ainsi une même particule pourra éprouver, suivant la température, des changements trop peu importants pour la modifier d'une manière durable dans ses diverses propriétés, mais suffisants néanmoins pour faciliter la formation de tel ou tel réseau de préférence aux autres. Ce réseau, une fois formé, pourra être plus ou moins stable, il pourra persister même à des températures différentes, ou au contraire se modifier tantôt graduellement, tantôt brusquement.

M. Mallard a remarqué que si, dans un réseau de Bravais à forme limite, on modifie périodiquement d'une manière convenable les orientations des molécules qui se suivent sur chaque

rangée, on peut obtenir un arrangement régulier de symétrie supérieure. Ces nouveaux réseaux, qui sont en fait des cas particuliers des réseaux de Sohncke, peuvent donc être considérés comme les termes extrêmes auxquels aboutissent des mâcles complexes à pénétration complète des réseaux de Bravais primitifs, et comme réalisant des mimésies absolues. Une des formes dimorphes serait ainsi le résultat d'une mâcle mimétique à pénétration complète de l'autre forme dimorphe.

Cette explication du dimorphisme paraît admissible dans beaucoup de cas; elle est d'accord avec ce que nous avons dit de l'analogie des angles dans les différentes formes du même corps. Cependant elle implique entre ces formes des relations de densités qui ne sont pas toujours réalisées.

On peut ainsi concevoir de diverses manières la possibilité d'allotropies dans le réseau cristallin. Nous concevrons de même la possibilité d'isoméries réticulaires dans les réseaux plus complexes où interviennent des particules cristallines d'espèces différentes.

ISOMORPHISME

146. Faits généraux. — Mitscherlich a reconnu, en 1819, que dans beaucoup de cas les corps de formules chimiques analogues cristallisent dans des formes identiques ou très peu différentes, et a donné à cette propriété le nom d'*isomorphisme*¹. On observe fréquemment que les corps isomorphes peuvent cristalliser ensemble en toutes proportions, et que l'on peut provoquer la cristallisation d'une solution sursaturée en la touchant avec un cristal déjà formé d'un corps isomorphe du corps dis-

¹ MITSCHERLICH, *Ann. de Chim.* 1820, XIV, 172; 1821, XIX, 350.

sous. On trouve enfin que les volumes moléculaires des cristaux isomorphes sont souvent à peu près les mêmes.

Il est évident d'ailleurs que l'analogie dans les formules chimiques ou dans les formes cristallines peut être plus ou moins prononcée, et que par suite la notion de l'isomorphisme ne peut pas être une notion absolument et complètement définie.

Si nous admettons, relativement à la structure intérieure des cristaux, les idées que nous avons exposées au chapitre précédent, nous serons conduits avec M. Sohncke à considérer comme isomorphes et comparables les cristaux dont les réseaux moléculaires sont analogues. D'après les exemples schématiques qui ont été donnés plus haut, il ne suffit pas, pour que deux réseaux soient isomorphes, qu'ils aient simplement même symétrie et mêmes paramètres, ce qui entraînerait l'égalité de leurs angles (*isogonie*); des structures fort différentes pourraient satisfaire à cette condition, sans qu'il en résultât aucune autre relation entre les cristaux. Il faut, pour que deux réseaux soient réellement comparables, que leurs molécules soient réparties à peu près de la même manière.

147. Analogie des formes cristallines dans les corps isomorphes. — Sauf, bien entendu, dans le système cubique, où la forme primitive est complètement déterminée *a priori* (§ 17), les angles de deux corps isomorphes ne sont jamais absolument les mêmes; mais les limites de leurs variations sont naturellement impossibles à fixer d'une manière générale.

Dans la série des carbonates rhomboédriques isomorphes de la *calcite*, les angles¹ du rhomboèdre sont les suivants :

Calcite CaCO_3 ,	$74^\circ 55'$
Giobertite MgCO_3 ,	$72^\circ 40'$

¹ Angles des normales.

Smithsonite $ZnCO_3$	72°30'
Sidérose $FeCO_3$	73°0'
Dialogite $MnCO_3$	73°9'
Dolomie $(CaMg)CO_3$	73°45'

Dans la série des sulfates doubles clinorhombiques à six molécules d'eau, on trouve :

	Angle du prisme.	Angle ZX des axes.
$(NH_4)_2Mg.2SO_4 + 6H_2O$	70°30'	108°10'
$K_2Mg.2SO_4 + 6H_2O$	71°15'	105°8'
$Tl_2Mg.2SO_4 + 6H_2O$	70°54'	106°24'
$(NH_4)_2Zn.2SO_4 + 6H_2O$	70°18'	106°44'
$K_2Zn.2SO_4 + 6H_2O$	71°20'	105°27'
$Tl_2Zn.2SO_4 + 6H_2O$	70°48'	106°21'
$K_2Ni.2SO_4 + 6H_2O$	70°50'	105°6'
$(NH_4)_2Mn.2SO_4 + 6H_2O$	70°16,	107°2' etc.

Il peut arriver que les réseaux, malgré de petites différences dans les valeurs de leurs paramètres, conservent la même symétrie à la fois géométrique et physique. C'est le cas de la seconde des deux séries de cristaux isomorphes que nous venons de mentionner.

D'autres fois, les deux réseaux possèdent seulement la même syngonie, mais avec des symétries différentes. Ainsi, dans la première série ci-dessus, la *calcite* est hémihédrique rhomboédrique, tandis que la *dolomie* est tétartoédrique. De même le *fer oligiste* Fe_2O_3 est rhomboédrique et le *fer titané* $FeTiO_3$ est tétartoédrique. Il est probable que dans les cas de ce genre les réseaux sont les mêmes, mais que les molécules physiques qui composent ces réseaux ont des symétries différentes.

La différence des angles, lorsqu'elle est un peu considérable, laisse le plus souvent une zone à peu près inaltérée et modifie

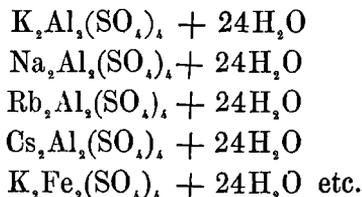
plus ou moins les autres zones¹. Ainsi, dans l'*orpiment* As_2S_3 , et dans la *stibine* Sb_2S_3 , tous deux rhombiques, les paramètres ont les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{As}_2\text{S}_3 & a : b : c = 0,9044 : 1 : 1,0113 \\ \text{Sb}_2\text{S}_3 & \text{» » » } 0,9844 : 1 : 1,0110 \end{array}$$

Il en résulte que les angles de ces deux cristaux sont presque identiques dans la zone YZ, et diffèrent au contraire notablement dans les autres. C'est là un cas très fréquent.

Il peut arriver aussi que deux corps cristallisent dans des systèmes de syngonie différents, bien que leurs angles soient très voisins². Ainsi le bromate de potasse KBrO_3 forme des rhomboédres de 94° , très voisins du cube de l'iodate de potasse KIO_3 .

148. Analogie chimique des corps isomorphes. — L'isomorphisme s'observe dans des corps de formules chimiques analogues. Ainsi le chlorate et le bromate de soude NaClO_3 et NaBrO_3 sont tous deux cubiques tétrartoédriques, et ne diffèrent chimiquement que par le remplacement d'un atome de chlore par un atome de brome, c'est-à-dire par un atome d'un corps qui, par toutes ses propriétés chimiques, est extrêmement voisin du chlore. De même les aluns



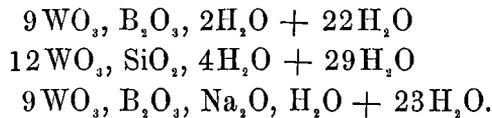
¹ NICKLÈS, *C. R.* 1848, XXVII, 611; — PASTEUR, *Ann. de Chim.* 1848, XXIV 442.

² LAURENT, *C. R.* 1843, XX, 357; 1848, XXVII, 134; — NICKLÈS, *ibid.* 1855 XL, 980; — MARIIGNAC, *ibid.* 1857, XLV, 650.

forment une grande série isomorphe de cristaux cubiques à hémiedrie pentagonale, où le potassium peut être remplacé par le sodium, le rubidium, le césium et le thallium; et l'aluminium par le fer, le chrome, le gallium, l'indium.

Souvent un atome métallique peut être remplacé par un radical complexe ayant le même rôle chimique; ainsi l'ammonium AzH_4 est, dans presque tous ses sels, isomorphe du potassium. Ou bien un atome peut être remplacé par un autre atome ayant une fonction chimique assez différente en général. Ainsi, dans les sulfures analogues à la pyrite FeS_2 , l'arsenic remplace isomorphiquement le soufre. Dans le cas extrême, il pourra arriver que les deux corps isomorphes aient simplement le même nombre d'atomes dans leur molécule, sans que ces atomes aient d'analogie entre eux. Par exemple, la calcite $CaCO_3$ a la plus grande analogie cristallographique avec le nitrate de sodium $NaNO_3$. M. Marignac¹ a observé un isomorphisme complet dans les sels $CuTiF_6 \cdot 4H_2O$; — $CuNbF_5 \cdot O \cdot 4H_2O$; — $CuWF_4 \cdot O_2 \cdot 4H_2O$.

Quelquefois enfin, on observe tous les caractères principaux de l'isomorphisme dans des corps qui paraissent n'avoir aucune analogie chimique assignable. D'après M. D. Klein, il y a isomorphisme complet entre les composés



Ces substitutions paraissent en général se produire d'autant plus facilement que la molécule est elle-même plus grosse et éprouve par suite moins de changement relatif (*isomorphisme de masse*). Ainsi plusieurs ammoniacques composées, $NH_3 \cdot CH_3$,

¹ MARIGNAC, *Ann. des Mines*, 1859, XV, 221; *Ann. de Chim.* 1863, LXIX, 5; 1866, VIII, 5; *C. R.* 1864, LVIII, 809; — D. KLEIN, *Bull. Soc. min.* 1882, V, 260.

$\text{NH}_3, \text{C}_2\text{H}_5$, etc., pourront remplacer le potassium et l'ammonium dans les grosses molécules des aluns, et ne leur seront pas en général isomorphes dans des sels plus simples.

149. Morphotropie. — M. Groth¹ a cherché à démêler ces relations complexes entre la constitution chimique et la forme cristalline par une voie un peu différente. Il a étudié les modifications introduites dans les formes cristallines et dans les propriétés physiques des cristaux par la substitution de divers atomes ou radicaux complexes à la place des atomes d'hydrogène dans un certain nombre de corps organiques. Les cas d'isomorphisme plus ou moins complet que nous avons indiqués rentrent évidemment comme cas particuliers dans les transformations morphotropiques.

150. Cristallisation simultanée des corps isomorphes. — Les corps isomorphes ont en général la faculté de cristalliser ensemble et de provoquer réciproquement la cristallisation de leurs solutions sursaturées. Beaucoup d'auteurs considèrent cette propriété comme le caractère fondamental de l'isomorphisme ; ce point de vue nous paraît exagéré : la propriété de cristalliser simultanément en toutes proportions est en général d'autant plus nette que l'isomorphisme chimique et cristallographique est plus complet, mais elle dépend aussi d'autres circonstances. Ainsi deux corps de solubilités très différentes ne cristallisent guère ensemble, quelle que puisse être d'ailleurs l'analogie de leurs autres propriétés (alun de soude et alun de potasse par exemple).

Si deux sels de formules analogues, mélangés dans une solution, ont, à la température où l'on opère, à peu près la même solubi-

¹ GROTH, *Pogg. Ann.* 1870, CXLI, 31.

lité, s'ils sont susceptibles de former des réseaux cristallins non seulement semblables, mais encore à peu près de mêmes dimensions absolues, il pourra se faire qu'ils cristallisent ensemble en toutes proportions, en donnant des cristaux d'ailleurs parfaitement développés; tel est le cas des aluns ammoniacaux de chrome et d'alumine.

On peut admettre dans ce cas, ou bien que les molécules chimiques des deux sels peuvent se substituer les unes aux autres dans les molécules cristallines, ou bien que les molécules cristallines, formées chacune uniquement de l'un des deux sels, peuvent se juxtaposer indifféremment dans les réseaux cristallins. M. Fock, qui a proposé la première de ces deux hypothèses, a montré qu'elle explique mieux que la seconde un certain nombre de faits observés.

Des composés chimiques très analogues peuvent être dimorphes ou bien cristalliser à la température ordinaire avec des proportions différentes d'eau de cristallisation, et n'affecter des formes isomorphes stables qu'à des températures différentes. Souvent alors la présence de l'un des sels dans la solution déterminera la cristallisation de l'autre dans des formes qui ne lui sont pas habituelles. Ainsi le sulfate de cuivre CuSO_4 est en général triclinique avec $5\text{H}_2\text{O}$, le sulfate de fer FeSO_4 clinorhombique avec $6\text{H}_2\text{O}$, et le sulfate de zinc ZnSO_4 rhombique avec $7\text{H}_2\text{O}$. Beudant¹ a reconnu qu'une solution de sulfate de zinc, contenant moins de 15 % de sulfate de fer, donne des cristaux mêlés des deux sulfates, ayant la forme du premier avec sept molécules d'eau; tandis que, pour des proportions supérieures de sulfate de fer, les cristaux ont la forme et l'hydratation de ce dernier sel. De même le sulfate de cuivre cristallise avec le sulfate de fer et dans les formes de celui-ci quand la solution en renferme plus de 9 %.

¹ BEUDANT, *Ann. des Mines*, 1817, II, 1.

M. Lecoq de Boisbaudran¹ a obtenu des cristaux de sulfate de cuivre à six molécules d'eau, isomorphes de ceux du sulfate de fer, en touchant avec un cristal déjà formé du sel de fer une solution sursaturée du sel de cuivre.

Il peut arriver que les deux sels mélangés ne cristallisent ensemble qu'entre certaines limites de concentration ou de température; il peut arriver enfin que ces limites se resserrent de plus en plus et que les cristaux mixtes aient une composition à peu près fixe, formant ainsi la transition aux sels doubles proprement dits. Quelquefois l'analogie des réseaux moléculaires se traduit dans la cristallisation simplement par l'orientation des cristaux de l'un des corps sur ceux de l'autre. Tel est le cas de l'azotate de soude lorsqu'il cristallise en présence d'un cristal de calcite. Nous avons vu (§ 115) que des effets de ce genre peuvent se produire même lorsque les cristaux appartiennent à des systèmes différents.

151. Volumes moléculaires des corps isomorphes.

— On observe fréquemment que, dans les divers termes d'une même série de cristaux isomorphes, les volumes moléculaires, obtenus en divisant le poids moléculaire par le poids spécifique, ont des valeurs identiques ou très voisines².

Il est assez probable que cette condition est nécessaire pour que les divers termes de cette série puissent cristalliser ensemble en toutes proportions; mais on n'en peut pas moins très bien concevoir une analogie complète de toutes les autres propriétés, un isomorphisme parfait sous tous les autres rapports entre des réseaux semblables, mais de dimensions absolues différentes. Or les volumes moléculaires paraissent dépendre assez directement de la nature chimique des atomes : la substitution d'un même

¹ LECOQ DE BOISBAUDRAN, *C. R.* 1867, LXIV, 1249.

² KOPF, *Ann. Chem. Pharm.* 1840, XXXVI, 1; *Pogg. Ann.* 1841, LII, 262.

atome à un autre, dans une série de molécules de formules semblables, produit en général une même variation du volume moléculaire. Si celui-ci est grand, cette variation est relativement négligeable : c'est le cas des aluns, par exemple; mais il en sera autrement si le volume moléculaire est petit, comme dans les chlorures alcalins; l'isomorphisme sera peut-être alors moins complet, mais ne disparaîtra cependant pas entièrement.

En somme, il est facile de concevoir que, entre le cas de deux réseaux identiques et celui de deux réseaux complètement différents, il y ait une infinité d'intermédiaires, soit quant au groupement des molécules chimiques dans les molécules cristallines, soit quant au groupement de celles-ci dans les réseaux cristallins. Les analogies paraissent d'ailleurs devoir dépendre principalement de la structure des molécules cristallines plutôt que des particularités des molécules chimiques elles-mêmes¹.

¹ MARIGNAC, *Archives d. Sc. phys. et nat.* 1851, XVII, 33; — RAMMELSBERG, *N. Jahrb.* 1884, II, 67.

Quelques essais ont été faits pour découvrir comment les atomes des molécules chimiques peuvent se grouper dans les molécules cristallines, et pour trouver ainsi une relation directe entre la forme et la composition. Voyez en particulier DELAFOSSE, *C. R.* 1848, XXVI, 90; *Mém. Sav. étrang.* 1852, XIII, 542; — DANA, *Sill. J.* 1867, XLIV, 89, 252; — GAUDIN, *L'Architecture du monde des atomes*, Paris 1873; — SCHRAUF, *N. Jahrb.* 1886, I, 234; *Zeitsch. f. Kryst.* 1884, IX, 265.

CHAPITRE X

DE LA COHÉSION

152. Principes fondamentaux de la Cristallographie physique. — Dans l'étude des caractères physiques des cristaux, il convient d'avoir constamment présents à l'esprit deux principes assez évidents en eux-mêmes, et dont nous avons déjà fait usage plus d'une fois dans les chapitres qui précèdent.

Le premier, c'est que, dans tout cristal, *les directions qui sont cristallographiquement semblables correspondent à des structures identiques, et ne peuvent en aucun cas avoir des propriétés différentes.* Deux directions symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe, un centre, ou un plan de symétrie doivent présenter le même caractère dans toutes leurs propriétés.

Ainsi, dans la structure représentée par la figure 313, le cristal doit agir exactement de la même manière dans les directions OA, OB, OA', OB', puisque toutes les molécules de l'assemblage sont remplacées par des molécules identiques lorsqu'on fait

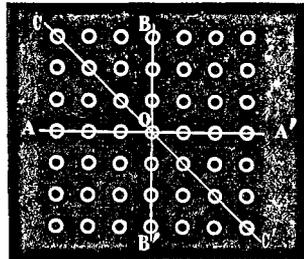


Fig. 313.

tourner le cristal de 90° , 180° , 270° autour de l'axe quaternaire projeté en O.

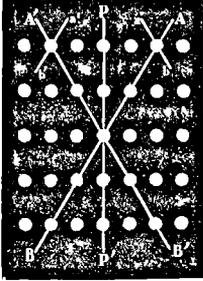


Fig. 314.

De même (fig. 314), si le cristal possède un plan de symétrie PP' , ses propriétés suivant une direction quelconque AB seront symétriques de celles qu'il possède suivant $A'B'$; si, par exemple, une vibration de direction ab peut se propager suivant AB , nécessairement il pourra se propager de la même manière une vibration $a'b'$ suivant $A'B'$.

Toute dérogation à ce principe serait inexplicable et se présenterait comme un effet sans cause.

153. Le second principe, c'est qu'il n'y a pas de relation générale et nécessaire dans tous les cas entre les propriétés des directions qui ne sont pas cristallographiquement semblables. Deux directions de structures différentes, telles que OA et OC par exemple (fig. 313), peuvent avoir des propriétés différentes, mais peuvent aussi avoir certaines propriétés communes; il pourra arriver que la résistance à la rupture soit différente, tandis que la conductibilité pour la chaleur serait la même.

Les propriétés physiques ne peuvent donc avoir une symétrie inférieure à celle de la structure du cristal, mais peuvent avoir une symétrie supérieure. Il en résulte que lorsque deux directions présentent, fût-ce pour une seule classe de phénomènes, une différence dans leurs propriétés, on peut conclure avec certitude qu'elles ont des structures différentes et ne sont pas cristallographiquement semblables; mais que l'inverse n'est pas vrai: l'identité de propriétés physiques ne fournit qu'une probabilité en faveur de l'identité de structure.

Les divers phénomènes physiques manifestent très inégalement les différences de structure; tandis que certains phéno-

mènes de cohésion ne restent les mêmes que dans les directions identiques, au contraire les propriétés élastiques, électriques, optiques et thermiques sont toujours beaucoup plus symétriques que le cristal¹.

Nous examinerons dans ce chapitre ce qui concerne la cohésion, c'est-à-dire la résistance opposée par le cristal aux actions mécaniques ou chimiques qui tendraient à la détruire.

RÉSISTANCE AUX ACTIONS MÉCANIQUES. TÉNACITÉ.

154. Ténacité. Clivages. — La ténacité d'un barreau est la force qu'il faut lui appliquer par unité de section pour arriver à le rompre par une traction longitudinale. Dans le cas des cristaux, la ténacité varie avec la direction suivant laquelle on cherche à obtenir la rupture. Ces variations sont même tellement considérables que le procédé ci-dessus ne peut être appliqué en général².

Soit, en effet (fig. 315), une tige prismatique de section droite S soumise à la traction d'un poids P . La force par unité de section est P/S . Considérons une section oblique telle que ac et calculons la force rapportée à l'unité de surface qui tend à produire la rupture suivant cette section. La surface S' de la section ac est $S/\cos \alpha$, et la composante de P qui lui est normale est égale à $P\cos\alpha$. La force par unité de surface est donc $(P\cos^2\alpha)/S$. Il en résulte que si le barreau étudié n'est pas isotrope, et si, parmi les diver-

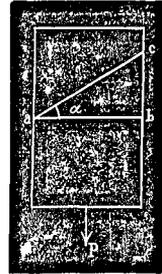


Fig. 315.

¹ Voir SOHNCKE, *Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur*, Leipzig 1879, 211.

² SOHNCKE, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVII, 177.

ses sections obliques possibles, il en est dont la ténacité soit suffisamment inférieure à la ténacité de la section droite S, il pourra arriver que $(P \cos^3 \alpha)/S$ soit supérieur à la traction qu'elles peuvent supporter, avant que P/S soit suffisant pour produire la rupture suivant S. La rupture s'effectuera toujours alors suivant la section oblique, et il ne sera pas possible de déterminer la ténacité du cristal dans la direction normale à S.

Or c'est là un cas très fréquent; dans beaucoup de cristaux la ténacité est beaucoup plus faible dans certaines directions que dans d'autres, et le cristal peut se séparer, se fendre avec une facilité plus ou moins grande en donnant des surfaces de séparation planes et nettes, normales à ces directions de ténacité minimum. Ces surfaces portent le nom de *plans de clivage*. Cette propriété se manifeste d'ailleurs à des degrés très divers. Dans certains minéraux, le mica, le gypse, par exemple, elle est si prononcée que le cristal paraît comme formé de lamelles superposées; le plus léger effort exercé avec l'ongle ou avec le tranchant d'un canif suffit à les séparer. D'autres fois le clivage est moins facile; on l'obtient en appuyant dans la direction voulue la lame d'un couteau que l'on fait ensuite pénétrer plus ou moins violemment, à l'aide d'un petit marteau, dans la masse du cristal. Lorsque le clivage est peu marqué, la surface de rupture n'est généralement pas plane dans toute son étendue, mais plutôt formée de portions planes interrompues, parallèles à une même direction.

155. Lois du clivage. — Les plans de clivage sont toujours parallèles à des faces possibles du cristal; et l'on peut toujours choisir les axes de manière que ces faces aient des indices très simples.

Lorsqu'un clivage est parallèle à une face, il existe toujours des clivages égaux parallèles aux autres faces de même espèce.

Lorsqu'il y a des clivages parallèles à des faces d'espèces différentes, ces clivages sont toujours inégalement faciles, et donnent des plans de rupture d'aspects différents.

Les clivages sont, du reste, absolument constants dans tous les cristaux d'une même substance et ne dépendent aucunement du développement plus ou moins grand que les circonstances extérieures peuvent donner aux diverses faces¹. Il est vrai que les diverses variétés d'un même minéral ont parfois des clivages plus ou moins différents; mais ces diverses variétés ne sont pas identiques chimiquement : on réunit presque toujours sous un même nom minéralogique des corps analogues de composition assez variable².

Ces divers caractères donnent au clivage une grande importance pratique pour la détermination de la symétrie des cristaux, particulièrement lorsque les formes extérieures ont été détruites ou altérées par des causes fortuites.

Dans le système cubique, on rencontre fréquemment trois clivages égaux parallèles aux faces du cube (*sel gemme*); ou quatre clivages égaux parallèles aux faces de l'octaèdre (*fluorine*); plus rarement six clivages égaux parallèles aux faces du dodécaèdre rhomboïdal (*blende*).

Dans le système quadratique et dans le système hexagonal, on trouve un clivage unique parallèle à la base; deux ou trois clivages égaux parallèles aux faces du prisme carré ou hexagonal; plus rarement quatre ou six clivages égaux parallèles aux faces d'une pyramide. Dans l'hémiédrie rhomboédrique du système hexagonal on a souvent trois clivages égaux parallèles aux faces d'un rhomboèdre (*calcite*).

¹ HAÛY, *Traité de Minéralogie*, 1^{re} éd., Paris 1801, I, 24.

² Par exemple la *galène* ou sulfure de plomb a normalement un clivage cubique; mais, quelquefois, le clivage est octaédrique. Dans les cas observés jusqu'ici, les variétés à clivage octaédrique renferment du bismuth. A. BRUN, *Zeitsch. f. Kryst.* 1884, VIII, 307; — SJÖGREN, *ibid.* 1885, X, 507.

Dans le système rhombique, on observe des clivages d'espèces différentes suivant les pinacoïdes, ou deux clivages égaux parallèles à un prisme ou à un dôme, quelquefois quatre clivages égaux correspondant aux faces d'un octaèdre à base rhombe.

Dans le système clinorhombique, le clivage peut être unique, parallèle ou perpendiculaire au plan de symétrie, ou double suivant les prismes ou dômes les plus simples.

Dans le système triclinique, enfin, chaque clivage est unique de son espèce.

*** 156. Théorie du clivage.** — La grande différence de ténacité qui existe entre la direction normale au clivage et les directions voisines, s'explique assez nettement à l'aide de considérations énoncées pour la première fois par Bravais et développées depuis par M. Mallard et par M. Sohncke¹.

La surface d'un plan réticulaire de Bravais peut être décomposée d'une infinité de manières en mailles parallélogrammes

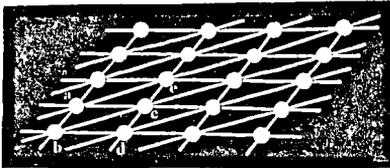


Fig. 316.

juxtaposées, ayant un nœud à chaque angle et ne comprenant aucun nœud à leur intérieur. On peut effectuer cette décomposition à l'aide des rangées parallèles à bd et à ab (fig. 316),

la maille est alors $abcd$; ou à l'aide des rangées ab et bc , la maille élémentaire devient $abce$, et ainsi de suite. Mais, dans tous les cas, chaque nœud est le point de jonction de quatre mailles adjacentes, et chaque maille a ses angles en quatre nœuds adjacents. On peut donc considérer chaque quart de maille comme contenant toujours un quart de nœud, et si nous prenons une portion

¹ BRAVAIS, *Études cristallographiques*, 165; — MALLARD, *Cristallographie*, I, 300; — SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 214.

du plan réticulaire suffisamment étendue pour que nous puissions négliger les mailles et les nœuds qui, placés près des bords, échappent à la règle générale, nous concluons que les mailles comprises dans cette portion de plan sont en nombre égal à celui des nœuds. Le nombre des nœuds ne dépend pas du mode de décomposition adopté, l'aire d'une maille, qui équivaut à l'aire de la région considérée divisée par le nombre des mailles, devra donc rester la même dans tous les cas.

Le même raisonnement appliqué au réseau tout entier montre que celui-ci peut être décomposé d'une infinité de manières en mailles parallépipédiques élémentaires dont tous les sommets coïncident avec tous les nœuds du réseau, et dont le volume a toujours la même valeur, quel que soit le mode de décomposition adopté. Si donc nous appelons V ce volume, constant pour un réseau donné, s l'aire de la maille quelconque d'un plan réticulaire, et d la distance normale qui sépare ce plan du plan réticulaire parallèle le plus voisin, on aura évidemment $V = sd$, puisque le volume d'un parallépipède est toujours égal au produit de sa base par sa hauteur. Quel que soit le plan réticulaire que l'on considère dans le réseau, le produit sd a donc la même valeur ; si l'on compare des plans réticulaires différents, on voit que dans un réseau de Bravais la distance de deux plans réticulaires consécutifs est en raison inverse de la maille de ces plans, ou proportionnelle au nombre de nœuds par unité de surface que portent ces plans, ou à la densité réticulaire.

Or si, dans une première approximation, nous laissons de côté l'influence que peut exercer la forme des molécules elles-mêmes, il est naturel d'admettre que la cohésion normale entre deux plans réticulaires parallèles est d'autant plus faible que leur distance est plus grande, tandis que la cohésion *dans* chacun de ces plans, la tendance qu'ils ont à se conserver, est d'autant plus grande que leur densité réticulaire est plus forte. Pour

ces deux raisons, les plans de clivage doivent être en général des plans dont la maille caractéristique est aussi petite que possible. Il est facile, dans chacun des réseaux de Bravais, de calculer les grandeurs relatives des aires des divers plans réticulaires. On trouvera par exemple, dans le système cubique, les valeurs suivantes :

	Cube.	Octaèdre.	Dodécaèdre.
Mode hexaédral.....	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
» octaédral.....	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$
» dodécaédral.....	$\sqrt{4}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{2}$

Les clivages ont donc chance de se produire surtout parallèlement au cube dans le mode hexaédral, à l'octaèdre dans le mode octaédral, au dodécaèdre dans le mode dodécaédral; c'est-à-dire dans tous les cas parallèlement à des faces d'indices très simples.

On voit de plus aisément que dans un réseau hexaédral, par exemple (fig. 317), tandis que l'aire d'un plan réticulaire AB, parallèle à une face du cube et perpendiculaire au plan de la figure, est proportionnelle à ab , l'aire d'un plan A'B' quelconque serait proportionnelle à ac et deviendrait d'autant plus grande que ce plan se rapprocherait davantage de AB. Le cristal a une tendance à se cliver suivant AB; les chances de clivage sont au contraire infiniment faibles suivant un plan peu incliné sur AB.

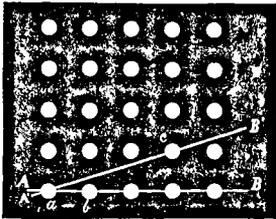


Fig. 317.

Il est évident, du reste, qu'il n'y a pas lieu de chercher des vérifications numériques de ce raisonnement assez incomplet. Nous ne savons pas comment tenir compte de la forme des molécules, et d'ailleurs les réseaux de Bravais ne sont, comme nous l'avons vu, qu'un cas très particulier des structurés cristal-

lines imaginables ; il est clair que dans un réseau de Sohncke, par exemple, les conditions sont un peu plus complexes. Mais la discontinuité de la cohésion lorsqu'on passe des directions normales aux plans d'aires minima, aux directions voisines, se retrouve comme dans les réseaux de Bravais.

157. Plans de séparation. — On observe quelquefois de faux clivages parallèles à des faces possibles, mais ne concordant pas avec le clivage naturel de la substance étudiée, et provenant le plus souvent de circonstances accidentelles. Par exemple, pendant l'accroissement du cristal, il peut se déposer sur ses faces des matières étrangères en poussière très fine, dont l'influence ne suffit pas à arrêter la cristallisation, mais peut cependant modifier la cohésion en donnant au cristal une structure en couches superposées.

158. Plans de choc. — Lorsqu'on appuie un poinçon sur une lame cristalline pas trop épaisse, il se produit en général des fissures qui rayonnent à partir du point attaqué et forment une figure caractéristique pour chaque minéral et pour chaque face d'un même cristal. La direction de ces fissures ne coïncide pas toujours avec celle des plans de clivage et varie souvent suivant que l'on appuie simplement le poinçon, ou qu'on le frappe, et suivant que le cristal repose sur un appui rigide ou élastique¹.

Dans le sel gemme, le point frappé est l'origine de fissures parallèles aux faces du dodécaèdre rhomboïdal, tandis que le clivage est cubique. Dans le mica, la figure de choc est formée de trois fissures se coupant en étoile à six branches ; l'une des fissures est plane et normale à la lame, les deux autres sont

¹ REUSCH, *Pogg. Ann.* 1867, CXXXII, 441 ; 1869, CXXXVI, 130, 135.

constituées par deux plans au moins, obliques à la surface, et qui se succèdent alternativement en escalier. La figure obtenue par la pression d'une pointe mousse est également une étoile,

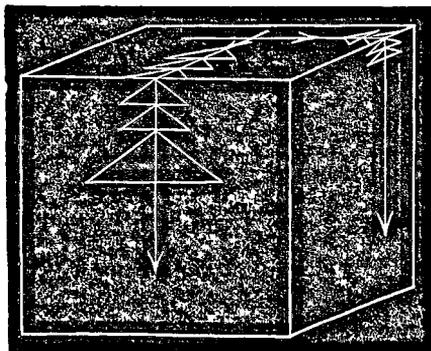


Fig. 318.

mais qui est tournée de 30° par rapport à la précédente et formée de trois fissures obliques¹.

Des ruptures d'un autre genre s'obtiennent quelquefois par la rayure. Ainsi (fig. 318), en rayant le sel gemme perpendiculairement à une arête du cube, il se détache des triangles isocè-

les dont la base est parallèle à cette arête et dont les côtés correspondent à une rupture suivant un cube pyramidé².

159. Plans de glissement. — Les fissures obtenues sur un support élastique, tel qu'une lame de caoutchouc, rentrent plutôt dans une autre classe de plans remarquables, parallèlement auxquels il peut se produire des glissements dans la masse du cristal.

Dans la calcite, une pression convenable produit un glissement parallèle à une arête culminante du rhomboèdre. Le procédé le plus simple consiste à appuyer normalement la lame d'un couteau sur l'arête à une petite distance du sommet. En opérant avec précaution, la lame pénètre sans effort dans le cristal en rejetant de côté sans la rompre la portion située entre elle et le sommet du rhomboèdre. Cette portion glisse sans perdre sa limpidité, et prend une position symétrique du reste du cristal

¹ M. BAUER, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVIII, 337.

² CESARO, *Ann. Soc. géol. Belg.* 1890, XVII.

par rapport au plan parallèle à l'arête (fig. 319). On obtient ainsi un véritable cristal hémitrope¹. Des phénomènes analogues, quoique moins prononcés, ont été observés sur divers cristaux². Ainsi une pression exercée sur une lame de galène à l'aide d'une pointe de métal arrondie donne l'empreinte de cette pointe entourée d'une pyramide creuse orientée suivant les diagonales du cube et reproduite en bosse de l'autre côté, comme par un glissement parallèle aux faces du dodécaèdre rhomboïdal.

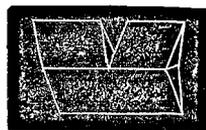


Fig. 319.

D'après M. Mügge, ces faces de glissement sont d'autant plus marquées que le clivage est lui-même plus net; elles sont symétriques par rapport au principal clivage et correspondent à des maxima relatifs de cohésion normale.

DURETÉ

160. Échelles de dureté. — La dureté d'un corps est la résistance qu'il oppose lorsqu'on cherche à l'entamer soit par la pression, soit par la rayure. Ce caractère, qui est, en gros, assez constant, a depuis longtemps attiré l'attention des minéralogistes³.

¹ PFAFF, *Pogg. Ann.* 1859, CVII, 336; — REUSCH, *ibid.* 1867, CXXXII, 441; 1872, CXLVII, 307; — BAUMHAUER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1879, III, 588; — BREZINA, *ibid.* 1880, IV, 518; — CESARO, *Ann. Soc. géol. Belg.* 1890, XVII. — La théorie géométrique de ces phénomènes a été étudiée par M. T. LIEBISCH, *N. Jahrb.* 1888, Beilagebd. VI, 105.

² M. BAUER, *N. Jahrb.* 1882, I, 138; — MÜGGE, *ibid.* 1883, I, 32, 81, 198; II, 13, 258; 1884, I, 50, 63, 204; 1886, I, 136, 183; 1888, I, 132; 1889, I, 130; II, 92; Beilagebd. VI, 274.

³ WERNER, *Principes de Minéralogie*, Paris 1795, 59; — HAÛY, *Traité de Minéralogie*, 1^{re} éd., Paris 1801, 268; — MOHS, *Grundriss der Mineralogie*, Dresde 1822, I, 374; — HUYGENS, *Traité de la lumière*, Leyde 1690, 95; — FRANKENHEIM, *De cohesionem crystallorum*, Breslau 1829.

Werner distinguait les minéraux d'après la manière dont ils se laissaient attaquer par une lime, par un couteau ou par l'ongle.

Haüy a cherché, le premier, à établir une véritable échelle de duretés, en choisissant un certain nombre de minéraux types, faciles à obtenir identiques à eux-mêmes. La dureté d'un corps quelconque est appréciée par comparaison avec les types de l'échelle en cherchant le moins dur des types qui le raient et le plus dur de ceux qui sont rayés par lui. Mohs a étendu le nombre des types et a donné l'échelle suivante :

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. Talc. | 6. Orthose. |
| 2. Gypse. | 7. Quartz. |
| 3. Calcite. | 8. Topaze. |
| 4. Fluorine. | 9. Corindon. |
| 5. Apatite. | 10. Diamant. |

Si un minéral raie le quartz et est rayé par la topaze, on dira que sa dureté est comprise entre 7 et 8.

Huygens avait déjà remarqué que la dureté n'est pas la même sur les différentes faces d'un même cristal, ni dans les différentes directions d'une même face.

Frankenheim cherchait à étudier ces variations en appréciant l'effort nécessaire pour obtenir la rayure à l'aide de pointes de diverses substances.

- 161. **Scléromètres.** — Seebeck, Franz, Grailich et Pekarek, Exner¹ ont été plus loin et se sont proposé d'obtenir des évaluations numériques de la dureté à l'aide d'appareils nommés *scléromètres*, dont voici le principe :

¹ SEEBECK, *Ueber Härteprüfung an Krystallen*, Berlin 1833; — FRANZ, *De lapidum duritate*, Bonn 1850; — GRAILICH et PEKAREK, *Sitzb. Akad. Wien*, 1854, XIII, 410; — F. EXNER, *Unters. über die Härte an Krystallflächen*, Vienne 1873.

Un levier OC (fig. 320), mobile autour du point O, porte une pointe P et une capsule C, dans laquelle on peut mettre des poids. Le cristal à étudier est fixé sur un chariot D au-dessous

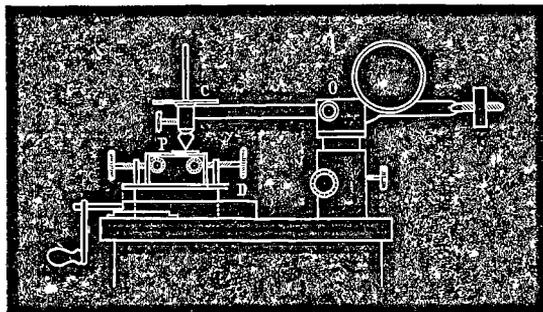


Fig. 320.

de la pointe; on apprécie la dureté par le poids dont il faut charger le levier pour obtenir une rayure visible à la loupe, lorsqu'on fait mouvoir le chariot.

Ce procédé donne des résultats assez nets lorsqu'on veut comparer les duretés des diverses directions d'une même face, mais il est très incertain lorsqu'on veut l'appliquer à l'étude de faces différentes, parce que la visibilité de la rayure dépend beaucoup de la structure, du degré de poli, du pouvoir réfléchissant de la face étudiée, et que ces caractères varient inévitablement d'une face à l'autre.

Pfaff¹, pour supprimer cet inconvénient et obtenir des mesures absolues de la dureté, se sert d'un appareil analogue, pourvu d'une pointe d'acier ou de diamant, qu'il charge d'un poids suffisant pour produire une rayure assez forte, et détermine la perte de poids subie par le cristal lorsqu'on l'a fait glisser un certain nombre de fois toujours le même sous la pointe.

¹ PFAFF, *Sitzb. Akad. München*, 1883, 55, 372; 1884, 255; *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XII, 180.

Il considère la dureté comme inversement proportionnelle à cette perte de poids.

162. Résultats expérimentaux. — Le résultat général de ces recherches est que la dureté est naturellement la même dans les directions cristallographiquement semblables d'une même face, ou de faces de même espèce, et paraît au contraire être toujours plus ou moins différente dans les directions dissemblables.

Tous les auteurs que nous venons de citer ont reconnu plus ou moins nettement une relation entre la dureté et le clivage. Les minéraux dont le clivage est peu prononcé présentent une dureté qui varie peu avec la direction de la rayure, et réciproquement.

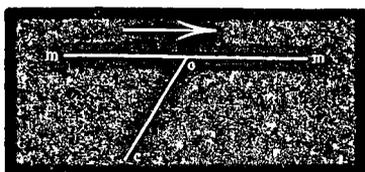


Fig. 321.

Sur les faces de clivage la dureté est plus faible que sur les autres faces. Sur une face coupée par un plan de clivage, la dureté est plus faible dans la direction parallèle à la trace du

clivage que dans la direction perpendiculaire; et si la face MM' est oblique au clivage OC (fig. 321), la dureté est plus grande

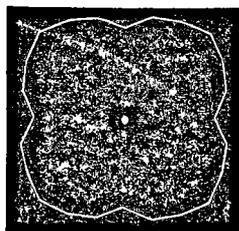


Fig. 322.

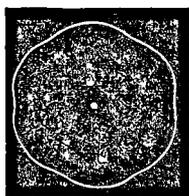


Fig. 323.

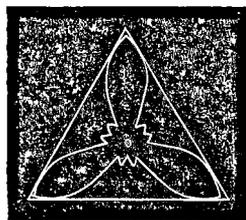


Fig. 324.

lorsqu'on raie dans la direction MM' que dans la direction $M'M$.

Lorsqu'il y a deux plans de clivage perpendiculaires entre-

eux et à la face étudiée, la dureté est minimum parallèlement aux traces de ces plans, et maximum suivant leur diagonale.

On peut, comme l'a fait M. Exner, représenter ces variations pour chaque face en portant dans chaque direction, à partir d'un point de cette face, une longueur proportionnelle à la dureté sur la même direction. Le lieu des points ainsi déterminé est la courbe de dureté.

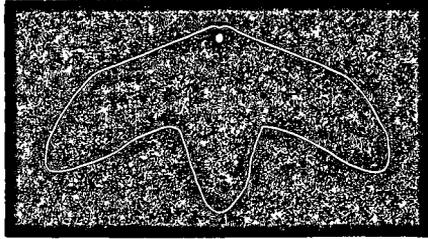


Fig. 325.

Les figures 322, 323, 324, 325 montrent ces courbes de dureté, d'après Exner, pour le *sel gemme* et la *fluorine* (face du cube); et d'après Pfaff pour la *calcite* (base et face du rhomboèdre); on y reconnaît facilement la relation avec le clivage que nous venons d'indiquer.

M. Exner a également représenté d'une manière satisfaisante ses résultats expérimentaux par la formule

$$D = a + b \sin \varphi + b \cos A \sqrt{\sin \varphi} \\ + c \sin \psi + c \cos B \sqrt{\sin \psi} + \dots$$

où D est la dureté, a , b , $c \dots$ des constantes, φ , $\psi \dots$ les angles que la direction considérée forme avec les traces des divers clivages, A , $B \dots$ les angles de ces clivages avec la surface que l'on raie.

Afin de donner une idée des différences observées, nous indiquons ci-dessous les valeurs de la dureté obtenues pour les diverses directions d'une face de clivage rhomboédrique de la calcite, par Grailich et Pekarek d'une part, et par Pfaff de l'autre; et pour les divers degrés de l'échelle de dureté par Franz.

Face de clivage de la calcite.

	Pfaff.	Grailich.
Diagonale inclinée, en descendant	27,5	2,85
» » en montant	0,65	0,96
Diagonale horizontale	3,2	1,52
Arête culminante du rhomb., en descendant	34,3	2,18
» » » en montant . .	1,3	1,37

Duretés moyennes des types de Mohs.

	Pointe d'acier.	Pointe de diamant.
Gypse	1,5	—
Calcite	9	—
Fluorine	36	—
Apatite	163	12
Orthose	260	20
Quartz	—	34
Topaze	—	43
Corindon	—	51

* 163. Essais de théorie. — En réalité, tous ces chiffres ne donnent guère qu'une idée générale du phénomène; les méthodes que nous venons d'exposer, et les méthodes analogues qui ont été essayées¹, n'ont pas une signification théorique bien précise. Ce que l'on appelle dureté est une propriété complexe dépendant de l'élasticité des deux corps en présence, c'est-à-dire de la force avec laquelle ils réagissent contre une déformation et tendent à revenir à leur forme primitive; de leur limite d'élasticité, c'est-à-dire de la force nécessaire pour les déformer d'une manière permanente; de leur limite de rupture, c'est-à-

¹ Voyez HUGUENY, *Rech. exp. sur la dureté des corps*, Paris 1865.

dire de l'effort qu'ils peuvent supporter sans que leurs particules se séparent les unes des autres; du frottement que leurs surfaces exercent l'une sur l'autre, et qui varie avec leur forme et avec leur vitesse relative.

Les nombres obtenus, assez constants tant que l'on opère exactement de la même manière, varient non seulement en grandeur absolue, mais souvent aussi dans leurs rapports réciproques pour peu que l'on change la nature du corps rayant, sa vitesse, ou la pression exercée.

M. Mallard ¹ a cherché à donner une théorie de la dureté en remarquant que le travail de la composante tangentielle de la force exercée pour produire une rayure avant l'unité de longueur, doit être égal au travail T de désagrégation du cristal par unité de volume, multiplié par la section s de l'entaille produite. La composante tangentielle est fP , produit du coefficient de frottement f par la pression P exercée normalement à la surface, et on aura $fP = Ts$.

Si l'on admet que la section s de la plus petite rayure perceptible est la même dans toutes les directions, et que T est aussi constant, on en déduit que la dureté P définie à la manière d'Exner doit être en raison inverse du coefficient de frottement.

Ces deux hypothèses ne sont pas absolument évidentes. Le travail du frottement dans les expériences possibles ne consiste guère dans une désagrégation complète de la rayure, mais le plus souvent dans un arrachement de portions plus ou moins étendues et dans un refoulement sans arrachement des particules écartées par le passage de la pointe. Ces deux actions peuvent varier avec la direction de la rayure. De plus, surtout si le trait est très fin, ce sont seulement les parties tout à fait superficielles qui sont désagrégées, et dans ces parties l'état

¹ MALLARD, *Cristallographie*, II, 70.

moléculaire n'est pas le même que dans l'intérieur du cristal, T peut y avoir une valeur différente.

* 164. Quoi qu'il en soit, le très petit nombre de faits connus sur le frottement à la surface des cristaux ne paraît pas trop en désaccord avec la relation donnée par M. Mallard.

Q. Sella ¹ a employé, pour mesurer le frottement, un cylindre de cuivre animé d'un mouvement de rotation régulier, sur lequel le cristal à étudier était pressé par une force connue, tout en étant retenu par un ressort dont la tension mesurait le frottement. Dans le *quartz*, le frottement est plus grand parallèlement à l'axe.

Avant lui, Franz avait, dans une de ses séries d'expériences, pris comme mesure de la dureté l'inverse de la force nécessaire pour entraîner le cristal sous une pointe rayante pressée par un poids constant, c'est-à-dire une quantité inversement proportionnelle au coefficient de frottement. Dans le *disthène*, sur une face de clivage, il trouvait que cette force f était représentée par 42,2 gr. parallèlement aux arêtes du prisme, et par 20,3 gr. perpendiculairement aux arêtes. D'autre part, les poids P nécessaires pour produire la première rayure perceptible dans ces deux mêmes directions étaient de 6,87 gr. pour la première et 13,10 gr. pour la seconde. Le produit Pf a à peu près la même valeur dans les deux cas (290 et 266). La comparaison des résultats de Franz et d'Exner conduit à la même conclusion pour la *fluorine*, sur une face du cube.

Diagonales	$f = 33,0$ (Franz)	$P = 11$ (Exner)
Arêtes	24,3	14

¹ Q. SELLA, *Nuov. Cim.* 1861, XIII, 280.

Le produit Pf est encore à peu près le même (363 et 340), conformément à la théorie de M. Mallard¹.

RÉSISTANCE AUX ACTIONS CHIMIQUES.

165. Figures de corrosion. — Lorsqu'un cristal est soumis pendant un temps très court à l'action d'un dissolvant, ses faces ne sont pas attaquées uniformément, mais se couvrent habituellement de petites cavités, dont les formes sont caractéristiques, et que l'on peut examiner au microscope¹. Le plus souvent ces cavités sont polyédriques, semblables les unes aux autres et semblablement orientées sur une même face du cristal ou sur les faces de même espèce, et variables d'une face à l'autre. Leurs parois sont parallèles à des faces cristallographiques dont la distribution est toujours conforme à la symétrie du cristal.

S'il existe un plan ou un axe de symétrie qui soit perpendiculaire à la face étudiée, chaque figure de corrosion sera elle-même symétrique par rapport à ce plan ou à cet axe. Si les deux directions opposées d'une même droite tracée sur cette face ne sont pas équivalentes, les figures de corrosion seront conformées différemment à leurs deux bouts.

¹ M. H. HERTZ, *J. de Crelle*, 1882, XCII, 156, définit la dureté d'un corps comme étant sa limite d'élasticité pour une pression agissant normalement sur une petite portion circulaire de sa surface. Cette définition ne correspond pas tout à fait à la dureté étudiée par les cristallographes, puisqu'elle ne comprend pas la variation de la dureté sur les diverses directions d'une même surface. La déformation dans les expériences résumées ci-dessus se produit sous l'influence d'une pression oblique à la surface. Voyez aussi F. AUERBACH, *Wied. Ann.* 1891, XLIII, 61.

² DANIELL, *J. de Schweigger*, 1817, XIX, 38; — LEYDOLT, *Sitzb. Akad. Wien*, 1855, XV, 59; 1856, XIX, 10; — BAUMHAUER, *Das Reich der Krystalle*, Leipzig 1889; voyez aussi les nombreux travaux du même auteur cités au Chapitre V.

Il arrive du reste, le plus souvent, que les divers dissolvants donnent des figures de corrosion différentes; il peut se faire qu'avec certains dissolvants les figures soient moins symétriques qu'avec d'autres; mais, conformément au principe général énoncé au § 152, elles ne sont jamais moins symétriques que le cristal lui-même. Les figures de corrosion fournissent un des procédés les plus délicats pour reconnaître les méroédries

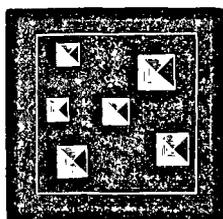


Fig. 326.

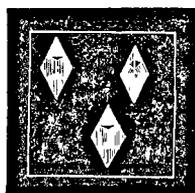


Fig. 327.

lorsque celles-ci ne sont pas accusées par les formes extérieures du cristal. Les figures suivantes, empruntées pour la plupart aux travaux de M. Baumhauer, donnent une idée de ce genre de phénomènes.

(Fig. 326.) Figures de corrosion par l'eau du *sel gemme* sur une face du cube (holoédrie cubique).

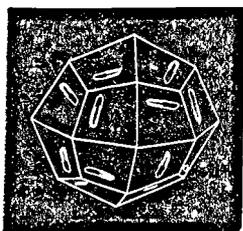


Fig. 328.



Fig. 329.

(Fig. 327.) *Pyrite*, face du cube, par l'acide nitrique à chaud (hémioédrie pentagonale).

(Fig. 328.) *Chlorhydrate d'ammoniaque* par l'eau (hémioédrie trapézoédrique.)

(Fig. 329.) *Nitrate de baryum* par l'eau (tétartoédrie).

(Fig. 330, 331.) *Quartz* gauche et droit par l'acide fluorhydrique (tétartoédrie non superposable du système hexagonal).



Fig. 330.



Fig. 331.

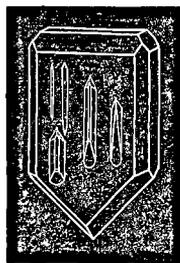


Fig. 332.

(Fig. 332.) *Calamine* (hémimorphie du système rhombique).

(Fig. 333.) *Sucre de canne* (hémimorphie du système clinorhombique).

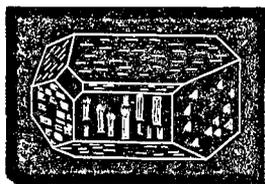


Fig. 333.



Fig. 334.

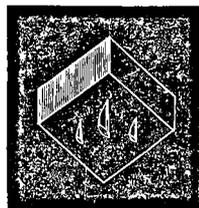


Fig. 335.

(Fig. 334.) *Calcite* (hémimorphie rhomboédrique du système hexagonal).

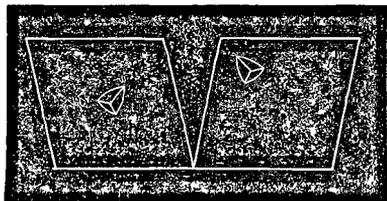


Fig. 336.

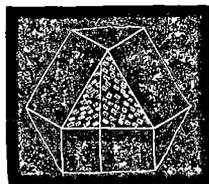


Fig. 337.

(Fig. 335.) *Dolomie* (tétartoédrie rhomboédrique du système hexagonal).

Les figures de corrosion sont très utiles aussi pour l'étude des mâcles; les portions enchevêtrées des divers cristaux groupés, étant différemment orientées, donnent des figures différentes qui permettent de les distinguer.

La figure 336 représente, d'après M. Baumhauer, l'orientation des empreintes obtenues sur une mâcle artificielle de *calcite* (§ 159); la figure 337 une mâcle de *boracite*.

166. Les figures de corrosion peuvent être étudiées à l'œil nu : il suffit de placer l'œil très près du cristal vivement éclairé



Fig. 338.

par une flamme. Les facettes des angles rentrants étant parallèles dans toutes les cavités d'une même face, leurs reflets se superposent et donnent une image lumineuse¹ dont la symétrie est conforme à celle des cavités elles-mêmes.

(Fig. 338.) Figure lumineuse de la *calcite* corrodée sur une face rhomboédrique.

167. Les variations de la solubilité du cristal dans les diverses directions se manifestent encore lorsque, suivant le procédé de M. Exner², on place la face cristalline à étudier sur le trajet d'un jet vertical du dissolvant. L'attaque est inégale dans les différentes directions, et il se forme un creux anguleux de forme et d'orientation déterminées.

M. Lavizzari a obtenu des résultats encore plus caractéristiques. Il a reconnu qu'un cristal de calcite plongé dans un acide

¹ BREWSTER, *Edinb. Trans.* 1840, XIV, 164; — MARBACH, *Schles. Gesellsch. Breslau*, 1863, 25; — v. KOBELL, *Sitzb. Akad. München*, 1862, I, 199; — HAUSHOFER; *Ueb. Asterismus und Lichtfiguren an Calcit*, Munich 1865.

² F. EXNER, *Pogg. Ann.* 1874, CLIII, 53; — LAVIZZARI, *Nouv. phénomènes des corps cristallisés*, Lugano 1865. — Voyez encore SPRING, *Zeitsch. f. phys. Chem.* 1888, II, 13; — CESÀRO, *Ann. de Chim.* 1889, XVII, 37.

dégage la même quantité d'acide carbonique sur toutes ses faces de même espèce ; mais s'il a la forme d'un prisme hexagonal, le dégagement est plus abondant sur les faces latérales que

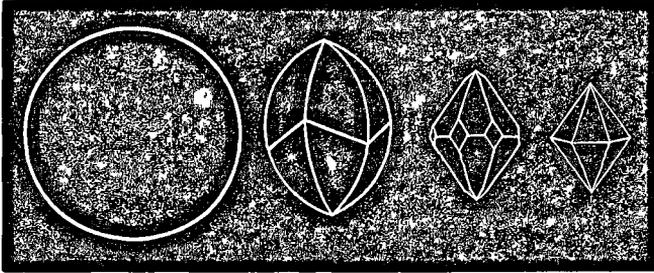


Fig. 339.

sur les bases. Une sphère de spath d'Islande se transforme progressivement en une double pyramide hexagonale, en passant par une série de formes intermédiaires (fig. 339).

168. Figures d'efflorescence, ou de décomposition.

— Si l'on chauffe graduellement un cristal hydraté, l'efflorescence résultant de l'élimination de l'eau se produit par taches irrégulièrement distribuées, mais dont la forme est encore en relation avec la symétrie cristallographique.

D'après M. Pape¹, qui a découvert cette propriété, ces taches sont le plus souvent elliptiques ou circulaires. Leur forme sur une face quelconque pourrait être considérée comme la section faite par cette face dans un certain ellipsoïde (*ellipsoïde d'efflorescence*) qui serait à trois axes inégaux dans les cristaux des trois derniers systèmes, placé d'ailleurs d'une manière quelconque dans le prisme bioblique, l'un de ses axes principaux coïncidant avec l'axe de symétrie dans le système rhomboïdal oblique, et ses trois axes principaux coïncidant avec les trois

¹ PAPE, *Pogg. Ann.* 1865, CXXIV, 329; CXXV, 513; 1868, CXXXIII, 364; — SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 225; — BLASIUS, *ibid.* 1885, X, 221.

axes de symétrie dans le système rhombique. Cet ellipsoïde serait de révolution autour de l'axe principal dans les cristaux quadratiques et hexagonaux, et se réduirait à une sphère dans le système cubique.

D'après M. Blasius, il peut aussi se produire, suivant les conditions de l'expérience, des figures plus compliquées se rapprochant davantage des figures de corrosion.

*** 169. Développement des faces cristallines.** — L'une des plus importantes manifestations des différences de cohésion dans les directions différentes est sans contredit la production des formes cristallines, que nous avons étudiées en détail dans la première partie de cet ouvrage, et qui nous ont servi de base pour établir les caractères de symétrie des cristaux.

Comme pour les clivages, il est probable *a priori* que les faces qui résisteront le mieux aux forces extérieures et qui, en définitive, finiront par subsister tout autour du cristal, sont celles qui ont le plus de cohésion tangentielle et le moins de cohésion normale, c'est-à-dire, comme nous l'avons vu (§ 156), celles qui ont la plus grande densité réticulaire. On peut prévoir d'une manière générale que les faces les plus stables et par conséquent les plus fréquentes et les mieux développées seront celles qui ont les indices les plus simples.

Il ne faudrait pas en conclure, cependant, que les faces les plus fréquentes dans un minéral coïncident nécessairement avec ses plans de clivage : la *fluorine*, par exemple, a un clivage octaédrique et ne présente que rarement les faces de l'octaèdre ; la *calcite*, dont le clivage rhomboédrique est parmi les mieux caractérisés, ne se rencontre presque pas sous la forme du rhomboèdre primitif.

Il faut observer, en effet, que la cohésion ne dépend pas uniquement de la distance des molécules, mais aussi de leur nature

propre et de leur forme; en outre, les conditions ne sont pas les mêmes pour les forces mécaniques qui produisent le clivage et pour les forces physiques et chimiques qui agissent dans la cristallisation.

Les premières dépendent uniquement de la structure du cristal, les autres dépendent aussi de la nature du milieu ambiant; c'est même ce qui permet de concevoir que les faces se forment différemment dans des milieux différents (§ 142).

M. Sohncke¹ admet que, tandis que sur les clivages la densité réticulaire doit être maximum en même temps que la cohésion normale est minimum, il suffit d'autre part que la première condition soit remplie pour qu'une face puisse se développer. Les deux conditions concordent dans le système de Bravais, mais peuvent être distinctes dans des réseaux plus compliqués.

¹ SOHNCKE, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 214. — Voyez aussi la théorie très remarquable donnée par M. P. CURIE, *Bull. Soc. min.* 1885, VIII, 145; — WALD, *Zeitsch. f. phys. Chem.* 1889, III, 572.

CHAPITRE XI

DE L'ÉLASTICITÉ

170. Forces élastiques. — Lorsque les molécules sont écartées des positions d'équilibre stable qu'elles ont acquises pendant la cristallisation, il se développe entre elles des forces, dites forces élastiques, qui tendent à les y ramener, et qui sont proportionnelles à la déformation tant que celle-ci reste petite.

Ces forces élastiques¹ peuvent être considérées comme des pressions rapportées à l'unité de surface. En effet, supposons mené un plan quelconque dans l'intérieur du cristal, supprimons par la pensée les molécules qui se trouvent d'un côté de ce plan, l'équilibre du reste du milieu ne pourra subsister en général que si nous appliquons aux divers points de ce plan des forces convenables équivalentes aux forces élastiques supprimées. Sur un élément plan ω , assez petit pour que ces forces soient sensiblement les mêmes en chacun de ses points, leur résultante sera proportionnelle à ω , et pourra s'écrire $F\omega$. F sera la force qui agirait sur l'unité de surface du plan dont ω fait partie, si en

¹ Pour la définition de la force élastique, voyez SAINT-VENANT, *C. R.* 1845, XXI, 24.

tous les points de ce plan les conditions restaient les mêmes que sur ω . La force élastique $F\omega$ est en général oblique sur ω .

L'étude de ces forces élastiques et des déformations correspondantes est inséparable d'une théorie mathématique dont l'étude serait très en dehors du cadre que nous nous sommes tracé. Aussi nous contenterons-nous de donner quelques indications générales¹.

171. Composantes de la force élastique. — Considérons² trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et trois éléments plans $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, perpendiculaires respectivement à ces axes. Sur l'unité de surface de l'élément ω_x agit une force élastique quelconque, que nous pouvons décomposer en trois composantes X_x, Y_x, Z_x , parallèles, la première à l'axe OX, la seconde à l'axe OY, et la troisième à l'axe OZ.

L'élément ω_y donnera de même trois composantes X_y, Y_y, Z_y , et l'élément ω_z les trois composantes X_z, Y_z, Z_z .

On démontre que, dans le cristal en équilibre :

1° La composante Y_x qui agit sur ω_x parallèlement à OY est égale à la composante X_y qui agit sur ω_y parallèlement à OX. On a donc $X_y = Y_x$, et de même $Z_x = X_z$; $Y_z = Z_y$. Il ne reste que six composantes distinctes.

2° Si l'on désigne par X_n, Y_n, Z_n les composantes suivant les axes de la force élastique F, qui agit sur l'unité de surface d'un plan ω_n dont la normale forme les angles α, β, γ avec les axes, on a

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos \alpha + X_y \cos \beta + X_z \cos \gamma \\ Y_n &= Y_x \cos \alpha + Y_y \cos \beta + Y_z \cos \gamma \\ Z_n &= Z_x \cos \alpha + Z_y \cos \beta + Z_z \cos \gamma \end{aligned}$$

¹ On trouvera plus de détails dans le traité récent de M. T. LIEBISCH, *Physikalische Krystallographie*, Leipzig 1891.

² CAUCHY, *Bull. Soc. philom.* 1823, 9; *Exerc. de Mathém.* 1827, II; *Œuvres*, 2^e série, VII, 60.

La force F est donc complètement déterminée en grandeur et en direction, si l'on connaît les six composantes

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y = Y_x, Y_z = Z_y, Z_x = X_z.$$

3° Si l'on porte sur la direction de F une longueur égale à cette force, le point ainsi déterminé, lorsqu'on donne à ω_n toutes les orientations possibles, décrit un ellipsoïde, dit *ellipsoïde d'élasticité*¹. La forme et la position de cet ellipsoïde dépendent à la fois de la nature du cristal et des forces qui le déforment.

172. Relations générales entre les composantes $X_x \dots X_y \dots$ et la déformation. — La déformation du cristal est déterminée par les dilatations x_x, y_y, z_z qu'il a éprouvées par unité de longueur parallèlement aux axes OX, OY, OZ , et par les variations y_x, z_x, x_y des dièdres qui ont respectivement ces axes pour arêtes. Si les déformations sont très petites, on peut considérer les six composantes $X_x, X_y \dots$ comme proportionnelles aux déformations, et les représenter par des fonctions linéaires² :

$$\begin{aligned} - X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_x + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\ - Y_y &= c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_x + c_{25}z_x + c_{26}x_y \\ - Z_z &= c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z + c_{34}y_x + c_{35}z_x + c_{36}x_y \\ - Y_x &= c_{41}x_x + c_{42}y_y + c_{43}z_z + c_{44}y_x + c_{45}z_x + c_{46}x_y \\ - Z_x &= c_{51}x_x + c_{52}y_y + c_{53}z_z + c_{54}y_x + c_{55}z_x + c_{56}x_y \\ - X_y &= c_{61}x_x + c_{62}y_y + c_{63}z_z + c_{64}y_x + c_{65}z_x + c_{66}x_y \end{aligned}$$

où les 36 coefficients $c_{11} \dots c_{66}$ dépendent de la nature du cristal et des axes de coordonnées choisis.

Green³ a démontré de plus que le principe de la conservation

¹ LAMÉ et CLAPEYRON, *Mém. Sav. étrang.* 1833, IV, 492.

- ² R. HOOKE, *De potentia restitutiva*, Londres 1678, a le premier admis que la force élastique est proportionnelle à la déformation. Voyez sur l'établissement de ces formules, LAMÉ, *Théorie de l'Élasticité*, 2^me éd., Paris 1866, 35.

³ G. GREEN, *Cambr. Phil. Trans.* 1839, VII, 4.

de l'énergie exige que l'on ait généralement $c_{hk} = c_{kh}$, ce qui réduit à 21 le nombre des *coefficients d'élasticité* réellement distincts.

173. Influence de la symétrie cristalline ¹. — Dans le cas le plus général d'un cristal triclinique, l'élasticité peut donc dépendre de 21 coefficients. Mais ce nombre se réduira à mesure que la symétrie deviendra plus grande, à condition de choisir convenablement dans chaque cas les axes de coordonnées.

Il est clair, par exemple, que si l'axe des Z est un axe de symétrie quaternaire, les deux axes des X et des Y doivent avoir identiquement les mêmes propriétés; une déformation x_x parallèle à l'axe OX doit donner naissance à une composante X_x égale à la composante Y_y produite suivant l'axe OY par une déformation y_y égale en grandeur à x_x . Il faudra donc que l'on ait entre autres conditions $c_{11} = c_{22}$.

* **174.** En appliquant systématiquement ce mode de réduction, on trouve que les 32 symétries cristallines (§ 103) se répartissent en neuf groupes, qui sont les suivants. On remarquera en particulier que les systèmes qui dérivent les uns des autres

¹ L'influence de la symétrie cristalline a été prise en considération d'une manière très incomplète par CAUCHY, *Exerc. de Math.* 1828, III; *Œuvres*, 2^e série, VIII, 251; — POISSON, *J. École polyt.* 1831, cah. XX, 70; — F. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1834, XXXI, 177; — GREEN, loc. cit.; — HAUGHTON, *Trans. Irish Acad.* 1848, XXI, 181; — plus complètement par SAINT-VENANT, *J. de Liouville*, 1856, I, 105; — KIRCHHOFF, *Mechanik*, Leipzig 1877, 389; — F. NEUMANN dans ses cours de 1873-74, voyez *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität*, Leipzig 1885; — W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1882, XVI, 275; — ARON, *ibid.* 1883, XX, 272; — MALLARD, *Cristallographie*, Paris 1884, II, 19. — L'étude complète de cette influence et la distribution des cristaux en neuf groupes sont dues à M. MINNIGERODE, *Gött. Nachr.* 1884, 195, 374, 488. — Déjà en 1867, M. SARRAU avait introduit, dans le problème analogue de la propagation des vibrations lumineuses, les caractères de symétrie réels et complets des divers systèmes de Bravais, *J. de Liouville*, 1867, XII, 1.

par la suppression du centre de symétrie rentrent dans un même groupe.

1^{er} groupe. L'hémiédrie et l'holoédrie du système triclinique, caractérisées par l'absence de plans et d'axes de symétrie. Les 21 coefficients d'élasticité subsistent sans réduction.

2^{me} groupe. Les deux hémiédries et l'holoédrie du système clinorhombique : un plan ou un axe de symétrie binaire. Les coefficients c_{14} , c_{24} , c_{34} , c_{54} , c_{16} , c_{26} , c_{36} , c_{56} sont nuls si l'axe de symétrie est pris pour axe des Y. Il reste seulement 13 coefficients.

3^{me} groupe. Les deux hémiédries et l'holoédrie du système rhombique : trois plans de symétrie, ou trois axes binaires, ou un axe et deux plans; outre les coefficients annulés au 2^{me} groupe, il disparaît encore c_{15} , c_{25} , c_{35} et c_{40} , et il reste 9 coefficients.

4^{me} groupe. La tétartoédrie rhomboédrique et l'ogdoédrie du système hexagonal (nos 22 et 24 du § 103) : un axe de symétrie ternaire, pas de plans ni d'axes binaires. En prenant cet axe ternaire comme axe des Z, on doit avoir

$$\begin{aligned} c_{22} &= c_{11}; c_{33} = c_{44}; 2c_{66} = c_{11} - c_{12}; \\ c_{34} &= c_{35} = c_{45} = c_{16} = c_{26} = c_{36} = 0; \\ c_{23} &= c_{13}; c_{24} = -c_{14} = -c_{56}; c_{35} = c_{44}; c_{46} = -c_{15}, \end{aligned}$$

et il reste 7 coefficients.

5^{me} groupe. L'hémiédrie rhomboédrique du système hexagonal, la tétartoédrie trapézoédrique et la tétartoédrie rhomboédrique hémimorphe (nos 20, 21 et 23 du § 103) : un axe de symétrie ternaire et trois plans de symétrie ou trois axes binaires. En prenant OZ parallèle à l'axe ternaire, OX parallèle à un axe binaire, ou perpendiculaire à un plan de symétrie, la réduction des coefficients se fait comme au 4^{me} groupe et de plus $c_{15} = 0$, ce qui réduit leur nombre à 6.

6^{me} groupe. L'holoédrie et les six méroédries non rhomboédriques du système hexagonal : un axe de symétrie sénaire, ou bien un axe ternaire normal à un plan de symétrie. Les coefficients sont les mêmes que dans le 5^{me} groupe, sauf que $c_{14} = 0$. Il reste 5 coefficients.

7^{me} groupe. L'hémiédrie pyramidale et les deux tétartoédries du système quadratique (n^{os} 8, 10 et 12 du § 103) : un axe quaternaire ou binaire qui n'est parallèle à aucun plan de symétrie.

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{36} = c_{46} = c_{56} = 0$$

$$c_{11} = c_{22}; c_{13} = c_{23}; c_{44} = c_{55}; c_{26} = -c_{16}.$$

Il reste 7 constantes.

8^{me} groupe. L'holoédrie quadratique et les hémiédries trapézoédrique, sphénoïdale et hémimorphe : un axe quaternaire ou binaire perpendiculaire à deux axes binaires, ou parallèle à deux plans de symétrie. Même réduction qu'au groupe 7, et de plus $c_{16} = 0$. Il reste 6 constantes.

9^{me} groupe. L'holoédrie et les quatre méroédries du système cubique : quatre axes de symétrie ternaire, également inclinés sur les axes de coordonnées.

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}; c_{44} = c_{55} = c_{66}; c_{23} = c_{31} = c_{12};$$

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = c_{56} = 0.$$

Il reste 3 coefficients.

Dans les corps isotropes, enfin, $2c_{44} = c_{11} - c_{12}$, les propriétés élastiques ne peuvent pas dépendre de plus de deux constantes.

Les considérations de symétrie déterminent le nombre maximum de coefficients qui peuvent être distincts dans chaque groupe. Mais il se peut fort bien que, par suite de propriétés particulières des forces moléculaires, il existe des relations fixes qui réduisent le nombre de ces constantes. Si l'on suppose,

par exemple, que les forces qui agissent entre les molécules soient dirigées suivant les lignes qui joignent leurs centres, on trouve que les 21 coefficients de Green se réduisent à 15 dans le système triclinique. Dans la même hypothèse, les deux coefficients des corps isotropes sont liés l'un à l'autre, de telle sorte qu'il n'y a qu'une seule constante à déterminer par l'expérience¹.

Les recherches récentes de M. Voigt semblent indiquer que de telles réductions ne se produisent pas dans les corps cristallisés, et que, dans chaque groupe, le nombre des constantes distinctes est bien celui qui est nécessité par la symétrie seule et par la conservation de l'énergie.

175. Modules d'élasticité. — Les équations du § 172 peuvent être résolues par rapport à x_x, x_y, \dots et donnent des valeurs de même forme

$$-x_x = s_{1,1}X_x + s_{1,2}X_y + s_{1,3}Z_x + s_{1,4}Y_x + s_{1,5}Z_y + s_{1,6}X_y$$

et les autres analogues.

Les 36 coefficients $s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{6,6}$ portent le nom de *modules d'élasticité*; leur nombre se réduit comme celui des coefficients $c_{1,1}, \dots, c_{6,6}$, en tenant compte du principe de la conservation de l'énergie et des éléments de symétrie des divers systèmes cristallographiques. Ce sont ces modules qui sont directement accessibles à l'expérience.

176. Détermination expérimentale des modules d'élasticité². — Si l'on suppose le cristal soumis à une force

¹ POISSON, *Mém. de l'Institut*, 1842, XVIII, 3; — SAINT-VENANT, *Mém. Sav. étrang.* 1856, XIV, 258; *J. de Liouville*, 1856, I, 105. — Voyez, sur cette question et sur les controverses auxquelles elle a donné lieu, TODHUNTER et PEARSON, *A History of the theory of the elasticity*, Cambridge 1886.

² F.-E. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1834, XXXI, 177; — W. VOIGT, *ibid.* 1876; *Ergsbd.* VII, 1, 177; *Wied. Ann.* 1882, XVI, 273, 398, 416; 1886, XXIX, 604; *Abh. Göttingen*, 1887, XXXIV; — SAINT-VENANT, *C. R.* 1878, LXXXVI, 781.

F par unité de surface, produisant une extension ou une compression dans une seule direction, déterminée par les cosinus α , β , γ des angles qu'elle forme avec les axes, l'allongement de l'unité de longueur ¹, que nous pouvons représenter par EF puisqu'il est proportionnel à la force F, pourra se déduire des relations ci-dessus et sera exprimé au moyen des modules d'élasticité et des cosinus α , β , γ . Cet allongement est d'ailleurs lié par une formule à la flexion qu'éprouve un barreau parallépipédique, taillé dans le cristal de telle sorte que sa longueur ait la direction α , β , γ , lorsqu'il est appuyé par ses deux extrémités et soumis en son milieu à l'action d'un poids.

On pourra exprimer de même l'angle de torsion d'un prisme parallépipédique sous l'action d'une force donnée de moment N, au moyen de ces mêmes modules, des dimensions des arêtes de ce prisme et des angles que ces arêtes forment avec les axes.

En combinant convenablement des mesures de torsion et des mesures de flexion sur des prismes différemment orientés, on obtiendra dans chaque système cristallographique des équations en nombre égal à celui des modules, qu'il sera facile de résoudre par rapport à ceux-ci.

177. Mesures de flexion et de torsion. — L'appareil ²

¹ Si l'on porte dans chaque direction une longueur proportionnelle au coefficient d'allongement E, on obtient une surface qui montre de la manière la plus nette les relations de symétrie de l'élasticité. Dans le système cubique, par exemple, cette surface est coupée suivant des sections circulaires par des plans diamétraux perpendiculaires aux axes ternaires. On peut la considérer comme une sphère qui serait comprimée normalement aux faces du cube et dilatée normalement à celles du dodécaèdre rhomboïdal, ou l'inverse. FINSTERWALDER, *Sitzb. Akad. München*, 1888, XVIII, 257.

² Cet appareil a été imaginé par M. F.-E. NEUMANN, et employé pour la première fois par G. BAUMGARTEN, *Pogg. Ann.* 1874, CLII, 369, à l'étude de la calcite; — COROMELAS, Thèse, Tubingen 1873, gypse et mica; — W. VOIGT, *Pogg. Ann.* 1876, Ergsb. VII, 1, sel gemme; — H. KLANG, *Wied. Ann.* 1881, XII, 321, spath fluor.

qui sert aux mesures de flexion se compose d'une manière générale de deux appuis fixes limités par deux arêtes parallèles a, a ,

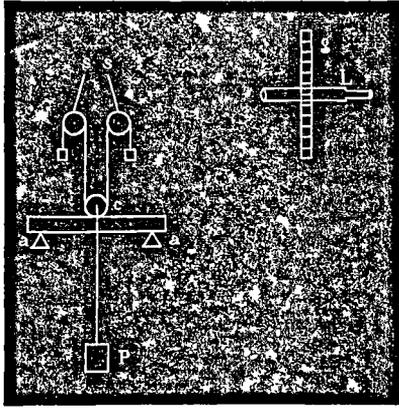


Fig. 340.

dont la distance est connue (fig. 340), et sur lesquelles reposent les deux bouts du barreau mis en expérience. Le poids P agit par l'intermédiaire d'un étrier dont la partie supérieure a la forme d'un cylindre c parallèle à a, a , et repose sur la ligne médiane du barreau. Un mécanisme quelconque permet de soulever et d'abandonner le poids sans secousse.

La flexion du barreau s'observe à l'aide d'un microscope disposé horizontalement en face d'un trait de repère tracé au milieu du barreau, ou bien en transmettant le mouvement d'abaissement du cylindre à deux miroirs s, s , portés par de petites poulies¹, dans lesquels on observe, à l'aide d'une lunette L , le déplacement de l'image d'une règle graduée g ; on peut aussi apprécier la déformation à l'aide d'un dispositif optique sur lequel nous reviendrons et qui a été appliqué par M. Fizeau à la mesure de la dilatation par la chaleur².

¹ W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1887, XXXI, 474, 701, béryl, quartz; 1888, XXXIV, 981, topaze et baryte; XXXV, 642, fluorine, pyrite, sel gemme, sylvine; 1890, XXXIX, 412, calcite; XL, 642, dolomie; XLI, 712, tourmaline; 1891, XLIV, 168.

² KOCH, *Wied. Ann.* 1878, V, 251, 580; 1883, XVIII, 325, sel gemme, sylvine, chlorate de soude; — BECKENKAMP, *Zeitsch. f. Kryst.* 1885, X, 41, alun de potasse; — VATER, *ibid.* 1886, XI, 549, calcite, béryl apatite, fluorine; — BECKENKAMP, *ibid.* 1887, XII, 419, aluns de chrome et de fer; — NIEDMANN, *ibid.* 1888, XIII, 362; — KIEBEL, *Tscherm. Mitth.* 1889, XI, 261, barytine; — GROTH, *Phys. Krystallographie*, 2^{me} éd., 1885, 660.

Ce dernier procédé permet aussi d'étudier les changements de forme assez complexes que la surface du barreau subit pendant la flexion, et de vérifier ainsi, indirectement mais avec une précision extrême, les relations qui peuvent exister entre les coefficients ¹.

Lorsque le barreau n'est pas taillé et étudié de telle manière que la flexion s'opère dans un plan de symétrie du cristal, il arrive en général que la flexion est accompagnée d'une torsion, et diminue lorsque, en fixant convenablement le barreau, on empêche cette torsion de se produire; les formules à employer sont ainsi différentes suivant la disposition des appareils.

Pour les mesures de torsion ², on se sert d'une sorte de tour (fig. 341) composé en principe d'un axe A mobile sous l'action du poids P qui agit sur la poulie A', et dans le prolongement duquel est un axe fixe B. Le barreau est fixé par ses deux

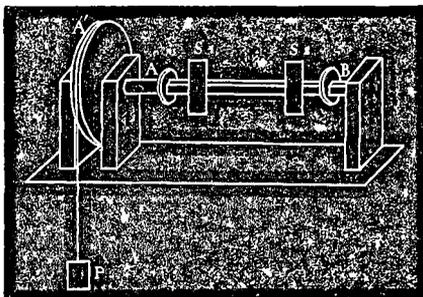


Fig. 341.

bouts entre A et B, et pourvu de deux miroirs s_1 et s_2 , attachés sur le barreau lui-même en deux points séparés par une longueur connue. L'angle dont les deux miroirs tournent l'un par rapport à l'autre quand on laisse agir le poids P, se lit à l'aide d'une lunette et d'une mire graduée.

178. Expériences de Savart. — Déjà en 1829, F. Savart ³

¹ CORNU, *C. R.* 1869, LXIX, 333.

² W. VOIGT, *Pogg. Ann.* 1876, Ergsb. VII, 177.

³ SAVART, *Ann. de Chim.* 1829, XL, 5, 113; — un autre procédé, fondé également sur les vibrations, a été employé par M. P. GROTH, *Pogg. Ann.* 1876, CLVII, 115.

Nous avons constamment supposé que les déformations élastiques s'opèrent à température constante. En réalité, une déformation quelconque donne

avait fait une étude des propriétés élastiques du quartz et de la calcite par une méthode complètement différente de celle que nous venons d'indiquer.

Une lame circulaire, fixée par son centre et mise en vibration à l'aide d'un archet, se partage toujours en un certain nombre de concamérations vibrant chacune pour son compte et séparées par des *lignes nodales* immobiles. Du sable déposé sur la plaque s'accumule sur les lignes nodales et permet ainsi d'étudier commodément leur disposition. Si la lame est isotrope, on obtient deux lignes nodales diamétrales et rectangulaires entre elles, dont l'orientation ne dépend que du point attaqué par l'archet, et des imperfections inévitables de la lame étudiée.

Si la lame n'est pas isotrope, les lignes nodales rectangulaires ne se forment que dans une seule position, ou bien, ce qui est le cas général, se transforment en branches d'hyperboles. L'examen de ces courbes permet de tirer quelques conclusions relativement à la distribution de l'élasticité dans les diverses directions. Savart a pu reconnaître ainsi, avant que l'influence de la symétrie eût été étudiée théoriquement, que le quartz

généralement lieu à un échauffement ou à un refroidissement du cristal; si, comme cela a lieu dans les mouvements vibratoires, les déformations se succèdent trop rapidement pour que les températures ainsi modifiées aient le temps de s'égaliser, les coefficients *isothermiques* que nous avons considérés doivent être remplacés par des coefficients *adiabatiques*, dont les valeurs sont un peu différentes, et peuvent être calculées si l'on connaît les coefficients isothermiques d'élasticité, les coefficients de dilatation et la chaleur spécifique du cristal. Voyez W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1889, XXXVI, 743, et TODHUNTER, *A history...*, art. 701 et 880.

Les forces élastiques proprement dites n'interviennent pas seules dans les mouvements vibratoires, mais il s'y joint des frottements intérieurs par suite desquels les oscillations s'éteignent plus ou moins rapidement. M. VOIGT, *Abh. Göttingen*, 1890, XXXVI, a établi la théorie de ces frottements pour le cas des oscillations lentes. La distribution des systèmes de symétrie se fait comme pour les forces élastiques, sauf que, la réduction de Green $c_{hk} = c_{kh}$ (§ 172) n'étant plus applicable ici, le nombre des coefficients de frottement est, dans chaque groupe, plus considérable que celui des coefficients d'élasticité.

(5^{me} groupe ci-dessus) possède à l'égard de l'élasticité une symétrie rhomboédrique. Les lames perpendiculaires à l'axe se comportent sensiblement comme des lames isotropes; les lames taillées parallèlement aux faces de la pyramide qui termine habituellement les cristaux peuvent présenter, suivant le mode d'ébranlement, deux lignes nodales rectangulaires, ou deux lignes nodales hyperboliques; mais, suivant que la lame est parallèle à l'un ou à l'autre des deux rhomboèdres associés dans la pyramide, elle rend un son plus grave ou plus aigu quand les nodales sont rectangulaires que lorsqu'elles sont hyperboliques.

179. Déformation sous une pression uniforme¹. —

On peut reconnaître que, par simple raison de continuité, dans une déformation quelconque infiniment petite du cristal, une très petite sphère tracée en un point quelconque de sa masse se transforme en un ellipsoïde, dit *ellipsoïde de déformation*. De même que l'ellipsoïde d'élasticité, l'ellipsoïde de déformation dépend non seulement de la nature du cristal, mais aussi des forces qui agissent sur lui; sa forme et sa position ne sont donc pas fixées *a priori* d'une manière générale par la symétrie cristalline.

Mais si les forces agissantes se réduisent à une pression égale dans tous les sens, il est clair que la déformation ne dépendra que de la structure du cristal, et que l'ellipsoïde de déformation devra être compatible avec ses caractères de symétrie. Il y aura alors cinq cas possibles :

1^{er} cas. Le système triclinique, où l'ellipsoïde de déformation a une forme et une position quelconques, non fixées *a priori* par la symétrie cristalline.

2^{me} cas. Le système clinorhombique; l'ellipsoïde a l'un de ses

¹ Voyez LIEBISCH, *Physikalische Krystallographie*, 51.

axes principaux parallèles à l'axe binaire et ses deux autres axes orientés d'une manière quelconque dans le plan de syngonie.

3^{me} cas. Le système rhombique; les trois axes principaux de l'ellipsoïde coïncident avec les trois axes binaires du système de syngonie.

4^{me} cas. Le système hexagonal et le système quadratique; l'ellipsoïde a deux de ses axes égaux, et est de révolution autour de l'axe principal cristallographique.

5^{me} cas. Le système cubique; l'ellipsoïde a ses trois axes égaux et se réduit à une sphère.

Si l'on considère les diverses faces du cristal comme des plans tangents à la sphère dont nous venons d'étudier la déformation, on reconnaît aisément que, sous l'action d'une pression égale en tous sens, qui transforme cette sphère en un ellipsoïde compatible avec la symétrie du cristal, cette symétrie est conservée: un cristal rhombique reste rhombique, un cristal quadratique reste quadratique, etc.; mais les angles des faces se modifient généralement; ce n'est que dans le système cubique que toutes les faces gardent leurs inclinaisons réciproques.

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS OPTIQUES

CHAPITRE XII

DU MOUVEMENT VIBRATOIRE

180. Introduction. — On a cherché à expliquer les phénomènes de l'Optique par deux théories principales.

La première, la théorie de l'émission, fait consister la lumière en particules matérielles extrêmement ténues qui seraient constamment projetées avec une très grande vitesse par les corps lumineux. Cette hypothèse, appuyée par la haute autorité de Newton, fut très en faveur jusqu'au commencement de ce siècle; toutefois, à mesure que les connaissances expérimentales s'étendaient, l'explication qu'elle pouvait fournir des faits observés devenait de moins en moins simple et naturelle; à l'hypothèse fondamentale, on dut ajouter peu à peu d'autres hypothèses accessoires, sans lien apparent les unes avec les autres, la plupart gratuites et fort peu probables, jusqu'au moment où la théorie tout entière dut être abandonnée, attendu que certaines de ses conséquences étaient en contradiction formelle et directe avec les faits.

Dans la seconde théorie, celle des ondulations, on suppose qu'il existe partout, dans le vide de la machine pneumatique ou des espaces célestes, comme dans les intervalles des molécules

des corps pondérables, une matière très subtile, très peu dense, très élastique, à laquelle on donne le nom d'*éther lumineux*. On conçoit un corps lumineux comme animé d'un mouvement vibratoire rapide; ce mouvement, communiqué à l'éther environnant, s'y transmet de proche en proche sous la forme d'ondes analogues à celles qui sont excitées dans l'air par le mouvement vibratoire d'un corps sonore; et c'est ce mouvement qui, venant frapper notre œil, nous donne l'impression de ce que nous appelons la lumière.

Cette théorie, laissée dans l'ombre pendant longtemps, fut reprise au commencement de ce siècle par Th. Young et par Fresnel¹, qui parvinrent à surmonter les difficultés qu'elle semblait offrir au premier abord. Les idées de Fresnel, constamment vérifiées par l'expérience, sont devenues la base de l'Optique actuelle; la nouvelle théorie a expliqué et prévu tant de faits que l'on ne peut douter qu'elle ne contienne une très grande part de vérité. On peut se demander avec Maxwell² si la lumière ne consiste pas en un phénomène plus complexe qu'une simple oscillation des molécules d'éther de part et d'autre de leurs positions d'équilibre; mais on ne peut guère admettre que le phénomène réel, quel qu'il soit, ne possède pas la symétrie, les caractères géométriques en quelque sorte, d'un mouvement vibratoire, et ne puisse pas en dernière analyse être représenté par les mêmes équations. Sans doute, il reste bien des points obscurs, bien des explications que le génie de Fresnel avait devinées, sans qu'il fût parvenu, et sans que l'on soit parvenu

¹ La théorie des ondulations a son origine dans les travaux d'HUYGENS, *Traité de la lumière*, Leyde 1690, et d'EULER, *Mem. Acad. Berlin*, 1745, 17; 1752, 280. Voyez VERDET, *Optique physique*, Paris 1869, I, 19. — Les œuvres de T. YOUNG ont été réunies en 1855 : *Miscellaneous Works*, 3 vol. in-8°, Londres. — Les *Œuvres complètes* d'A. FRESNEL ont été réunies et publiées en 1876, 3 vol. in-4°, Paris.

² J.-C. MAXWELL, *A treatise on electricity and magnetism*, Oxford, 1873.

depuis lui à les baser sur des considérations mécaniques rigoureuses; mais, malgré ces imperfections, c'est par la théorie des ondulations que l'on parvient le plus simplement à se rendre compte des lois si compliquées de l'Optique cristallographique. Nous commencerons donc par rappeler les points essentiels de cette théorie, qui sont nécessaires au but que nous poursuivons.

181. Mouvement vibratoire d'un point. — Soit une molécule A, primitivement en équilibre sous l'action des forces quelconques qui agissent sur elle. Donnons-lui un déplacement Aa (fig. 342), puis abandonnons-la à elle-même. Sous l'influence de ces forces, elle se mettra en mouvement vers sa position d'équilibre A, l'atteindra, et la dépassera en vertu de la vitesse acquise. Dès qu'elle aura dépassé A, les forces tendront de nouveau à l'y ramener et diminueront sa vitesse, elle s'arrêtera en un point a' , puis se mettra de nouveau en mouvement vers A, et reviendra s'arrêter au point a , pour repartir immédiatement et faire une nouvelle oscillation. Ce mouvement, analogue à celui d'un pendule, continuera indéfiniment sans modification si la molécule A ne peut pas céder de force vive au milieu ambiant.

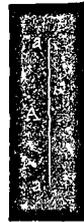


Fig. 342.

Les caractères qui définissent un semblable mouvement oscillatoire sont les suivants :

1° L'orientation de la ligne droite aa' , ou la *trajectoire* décrite par la molécule dans son oscillation.

2° L'*amplitude* de cette oscillation, c'est-à-dire l'élongation maximum Aa que la molécule atteint à partir de sa position d'équilibre.

3° La *période*, ou durée d'oscillation, le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la molécule au point a par exemple, le temps qu'elle emploie pour parcourir une fois et complètement sa trajectoire.

4° Pour que le mouvement soit entièrement déterminé, il faut connaître en outre quelle est à un instant donné, par exemple à l'époque $t = 0$, la position de la molécule sur sa trajectoire; il faut savoir dans quelle *phase* de son oscillation elle



Fig. 343.

se trouve. Considérons (fig. 343) deux molécules A et B, ayant même trajectoire, même amplitude et même période. Si elles partent en même temps de leurs positions extrêmes a et b , c'est-à-dire si leur différence de phase est nulle ou égale à un nombre entier de durées d'oscillation, elles passeront en même temps avec des vitesses égales et de même signe aux points A et B, s'arrêteront en même temps aux points a' et b' , effectueront en un mot des oscillations identiques et absolument synchrones.

Si les deux molécules considérées présentent une différence de phase d'un nombre impair de demi-périodes, si par exemple la molécule B est en retard d'une demi-période sur la molécule A, elle ne quittera le point b qu'une demi-période après que A aura quitté le point a , c'est-à-dire au moment où A quittera le point a' ; les deux molécules chemineront alors en sens contraire, passeront en même temps aux points A et B, avec des vitesses égales mais en sens inverse, s'arrêteront en même temps aux points a et b' , et continueront ainsi à osciller en ayant toujours des vitesses égales, mais de signes contraires.

Les mouvements relatifs des deux molécules dépendent donc de leur différence de phase, et celle-ci doit être évaluée en fraction de la durée d'oscillation. Une différence de phase d'un nombre entier de périodes équivaut à une différence de phase nulle, et on peut toujours en faire abstraction.

On démontre en mécanique qu'un mouvement vibratoire simple, tel que celui que nous venons de considérer, peut être représenté par l'équation

$$u = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi)$$

où u est la distance qui existe à l'instant t entre la molécule et sa position d'équilibre, a l'amplitude, τ la durée d'oscillation, π le rapport connu de la circonférence au diamètre, et φ une constante qui définit la phase.

182. Composition de deux mouvements vibratoires rectilignes, de même période, et perpendiculaires l'un à l'autre. — Nous avons supposé la trajectoire rectiligne; il pourrait en être autrement. Par exemple, au lieu d'abandonner la molécule sans lui imprimer de vitesse initiale après l'avoir amenée au point a , nous pourrions la lancer en lui communiquant une vitesse perpendiculaire à la direction Aa ; elle décrirait alors une courbe elliptique tout autour du point A (fig. 344); ce cas serait analogue à celui d'un pendule conique. Mais ce mouvement elliptique peut être considéré comme résultant d'un mouvement vibratoire rectiligne

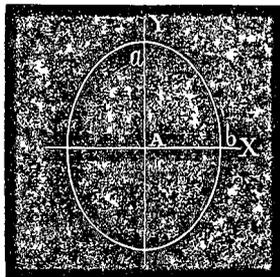


Fig. 344.

dont la trajectoire serait dirigée suivant Aa , tandis que cette trajectoire elle-même serait soumise à un mouvement vibratoire de même période et d'amplitude Ab suivant la direction perpendiculaire. Il suffit donc de considérer des trajectoires rectilignes.

*** 183.** Les deux mouvements partiels qui s'effectuent suivant les deux droites AX et AY sont représentés par les équations

$$x = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi)$$

$$y = b \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \psi)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}x &= a \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau} - a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau} \\y &= b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\psi}{\tau} - b \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\psi}{\tau}\end{aligned}$$

L'équation de la trajectoire d'un point qui est soumis à la fois à ces deux mouvements, et dont les coordonnées sont par suite x et y , s'obtiendra en éliminant t entre ces deux équations.

De la première multipliée par $b \sin 2\pi \frac{\psi}{\tau}$ retranchons la seconde multipliée par $a \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau}$; et de la première multipliée par $b \cos 2\pi \frac{\psi}{\tau}$ retranchons la seconde multipliée par $a \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau}$; nous aurons, après une réduction évidente des seconds membres :

$$\begin{aligned}bx \sin 2\pi \frac{\psi}{\tau} - ay \sin 2\pi \frac{\varphi}{\tau} &= ab \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi) \\bx \cos 2\pi \frac{\psi}{\tau} - ay \cos 2\pi \frac{\varphi}{\tau} &= ab \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi)\end{aligned}$$

Élevant au carré et ajoutant membre à membre :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2abxy \cos \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi) = a^2 b^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi).$$

C'est l'équation d'une ellipse dont la forme et la position dépendent des amplitudes a et b et de la différence de phase $\psi - \varphi$ des deux mouvements composants.

Cette ellipse a ses axes principaux dans les directions OX et OY si $\cos \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi) = 0$, ou $\psi - \varphi = (2k + 1) \frac{\tau}{4}$, k étant un nombre entier quelconque : l'équation se réduit alors à

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Si, de plus, les amplitudes sont égales $a = b$, l'ellipse se réduit à un cercle

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Si $\sin \frac{2\pi}{\tau} (\psi - \varphi) = 0$ ou $\psi - \varphi = 2k \frac{\tau}{4}$, il vient

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2abxy = 0 \quad \text{ou} \quad bx + ay = 0$$

si k est impair, et

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy = 0 \quad \text{ou} \quad bx - ay = 0$$

si k est pair.

La trajectoire est alors une ligne droite coïncidant avec l'une ou l'autre des deux diagonales du rectangle construit sur a et b .

Pour d'autres valeurs de la différence de phase on obtient des ellipses différemment inclinées (fig. 345).

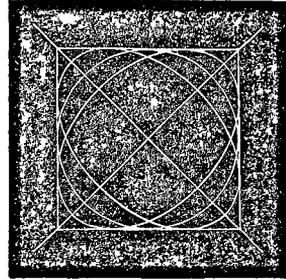


Fig. 345.

184. Propagation des mouvements vibratoires. — Voyons maintenant ce qui se passe si la molécule A_0 , entretenue d'une manière quelconque dans son mouvement vibratoire, fait partie d'une rangée indéfinie de molécules $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ semblables, primitivement en équilibre (fig. 346). Supposons, pour fixer les idées, que la trajectoire de A_0 soit une ligne

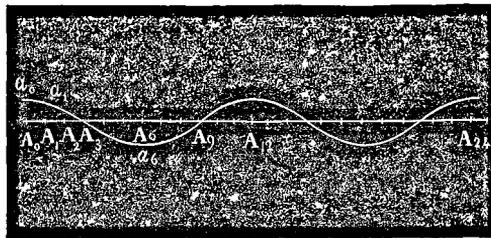


Fig. 346.

droite perpendiculaire à la rangée A_0A_{10} et qu'à l'origine du temps la molécule A_0 passe par sa position d'équilibre avec une vitesse dirigée de bas en haut. Dès qu'elle est un peu écartée de cette position, les molécules voisines tendent à l'y ramener,

et réciproquement elle agit elle-même sur les molécules voisines et tend à les entraîner à sa suite. A_1 se met donc en mouvement et quitte à son tour sa position d'équilibre avec une vitesse dirigée de bas en haut; mais cela ne peut avoir lieu que lorsque l'équilibre a été troublé par le déplacement de A_0 , c'est-à-dire un instant après que A_0 elle-même a quitté sa position d'équilibre. Lorsque A_0 atteint en a_0 son élongation maximum, la molécule A_1 est encore un peu moins haut en a_1 ; mais, en vertu de la vitesse acquise, elle conserve son mouvement ascendant pendant que A_0 commence à redescendre, et elle atteint une élongation maximum égale à $A_0 a_0$; après quoi les actions de toutes les molécules voisines, y compris A_0 , tendent à la faire redescendre. Le calcul montre que si A_0 est maintenue en vibration par une cause étrangère quelconque capable de lui restituer la force vive qu'elle abandonne aux molécules voisines, il s'établit un régime permanent, dans lequel A_1 effectue des oscillations identiques à celles de A_0 , mais se trouve toujours un peu en retard; il y a une petite différence de phase entre les mouvements des molécules A_1 et A_0 .

Ce que nous venons de dire de A_1 par rapport à A_0 peut se dire également de A_2 par rapport à A_1 ; de A_3 par rapport à A_2 , et ainsi de suite. Toutes les molécules de la rangée prennent successivement un mouvement identique à celui de A_0 , mais avec un retard qui va croissant de l'une à l'autre proportionnellement à la distance qui les sépare de A_0 .

Supposons, pour fixer les idées, que les molécules $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ soient choisies sur la rangée que nous considérons, de telle sorte que chacune d'elles soit en retard de $\frac{1}{n}$, d'oscillation sur celle qui la précède. A un instant quelconque, par exemple lorsque A_0 quitte le point a_0 , ces diverses molécules se trouvent placées sur une ligne sinusoïdale comme dans la figure 346. La molécule A_n , dont le retard est $\frac{3}{12} \tau$ ou $\frac{1}{4} \tau$, quitte

en montant sa position d'équilibre; la molécule A_6 , dont le retard est $\frac{1}{2} \tau$, quitte le point a_6 , qui correspond à son élongation maximum au-dessous de la ligne d'équilibre; la différence de phase ne dépend que de la distance des molécules, et reste la même pendant tout le mouvement : A_6 aura donc constamment une vitesse égale et de signe contraire à celle de A_0 ; la molécule A_{12} , située deux fois plus loin, aura un retard de $\frac{12}{12} \tau$ ou d'une période entière, et vibrera au contraire en synchronisme absolu avec A_0 .

185. Longueur d'onde. — La distance λ qui sépare A_0 de A_{12} , s'appelle la *longueur d'onde*, et est caractéristique du mouvement vibratoire considéré. Deux molécules qui sont séparées par une distance égale à une longueur d'onde ou à un nombre entier de longueurs d'ondes ou, ce qui revient au même, à un nombre pair de demi-longueurs d'onde, vibrent donc constamment en coïncidence de phase; deux molécules séparées par une distance égale à une demi-longueur d'onde ou à un nombre impair de demi-longueurs d'onde vibrent en discordance de phase.

186. Vitesse de propagation. — Prenons maintenant notre rangée de molécules $\frac{1}{12} \tau$ plus tard. C'est maintenant A_1 qui atteint son élongation maximum positive, et les molécules A_2, A_3, A_4, \dots se trouvent placées par rapport à A_1 , comme les molécules A_1, A_2, A_3, \dots étaient d'abord placées par rapport à A_0 . La courbe qui représente l'état actuel de la rangée est la même que précédemment, mais déplacée d'une quantité $A_0 A_1$, c'est-à-dire de $\frac{1}{12} \lambda$. La courbe se déplaçant de $\frac{1}{12} \lambda$ en un temps égal à $\frac{1}{12} \tau$, a une vitesse $V = \lambda/\tau$; c'est la vitesse avec laquelle le mouvement se propage sur la rangée que nous considérons.

Un exemple très simple et usuel se trouve dans la propaga-

tion des vagues à la surface de l'eau dans un canal rectiligne indéfini. Soit MM (fig. 347) le niveau de l'eau lorsqu'elle est immobile; si l'on produit un ébranlement périodique en un point

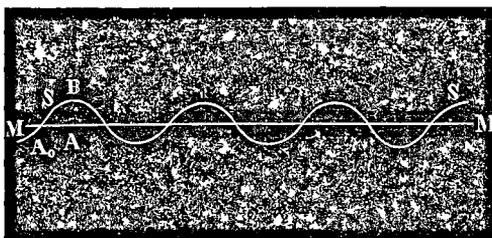


Fig. 347.

A_0 , cet ébranlement se propage sous la forme de vagues, et la surface de l'eau est à un instant quelconque représentée par une courbe SS. Ici l'amplitude est la hauteur AB d'une vague au-dessus de MM, la durée d'oscillation est le temps employé par un point quelconque pour s'abaisser et se relever, la longueur d'onde est la distance qui sépare les points correspondants de deux vagues consécutives. En même temps, les vagues cheminent sur la surface, la courbe se déplace vers la droite avec une vitesse égale à λ/τ .

Si l'on représente le mouvement de la molécule A_0 par

$$u = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi)$$

celui d'une molécule quelconque située à une distance x sera représenté, d'après ce qui précède, par

$$u = a \sin 2\pi \left\{ \frac{t - \varphi}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right\}$$

ou, ce qui revient au même, par

$$u = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \varphi - T \right\}$$

en appelant T le temps $\tau x/\lambda = x/V$, qu'emploie le mouvement pour se transporter de l'origine au point considéré.

187. Ce que nous venons de dire est du reste complètement indépendant de la forme de la trajectoire parcourue par chaque molécule dans son oscillation. Nous avons supposé, pour simplifier, que les trajectoires rectilignes sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires à la direction suivant laquelle le mouvement se propage; c'est aussi, comme nous le verrons, ce qui paraît avoir lieu dans le cas des vibrations lumineuses. Mais les considérations qui précèdent s'appliqueraient tout aussi bien si les molécules oscillaient longitudinalement, parallèlement à la direction de propagation.

188. Propagation dans un milieu indéfini. Surface de l'onde. — Soit une molécule S vibrant dans un milieu quelconque, isotrope ou anisotrope. Son mouvement se transmet aux molécules environnantes et se propage dans toutes les directions à peu près comme sur la rangée considérée aux paragraphes précédents¹. Seulement la force vive cédée à chaque instant par S se répartit sur un nombre de molécules de plus en plus grand; l'amplitude du mouvement vibratoire, au lieu d'être constante, va en décroissant à mesure que les ondes s'éloignent du centre d'ébranlement. La vitesse de propagation dépend de la consti-

¹ Nous raisonnons comme si S vibrerait en même temps de la même manière dans toutes les directions, ce qui n'est qu'une fiction plus ou moins permise.

En réalité, le problème dont il s'agit ici est assez délicat. Le centre d'ébranlement ne peut être conçu comme formé d'une molécule unique, et, dans son voisinage immédiat, le mode de propagation des ondes est un peu différent de ce qu'il est à une grande distance. Gouy, *Ann. de Chim.* 1891, XXIV, 145.

Nous prendrons toujours les ondes à une distance de leur centre très grande par rapport à λ ; auquel cas les perturbations en question ne modifient pas sensiblement les conséquences qui nous importent.

tution du milieu; si celui-ci est isotrope, elle est la même dans toutes les directions, les points situés sur une sphère ayant le point S comme centre reçoivent le mouvement en même temps et vibrent en coïncidence de phase; le mouvement se propage sous forme de vagues, d'ondes sphériques qui vont en s'agrandissant continuellement. Si le milieu n'est pas isotrope, la vitesse varie en général d'une direction à l'autre; les ondes ne sont plus sphériques, mais sont des surfaces fermées, qui ont leur centre en S, et dont la forme dépend de la nature du milieu élastique.

On donne particulièrement le nom de *surface de l'onde* à l'onde qui correspond à une durée de propagation égale à une unité de temps, c'est-à-dire à la surface, lieu des points qui entrent en vibration une unité de temps après le point S. Chaque rayon vecteur de la surface de l'onde est égal à la vitesse de propagation du mouvement dans la direction correspondante. La surface de l'onde représente ainsi graphiquement la loi de distribution des vitesses de propagation tout autour de S. Dans un milieu homogène tel qu'un cristal, ce sera une surface plus ou moins compliquée, mais qui sera la même quel que soit le centre d'ébranlement, et qui caractérise le cristal à l'égard du mouvement vibratoire que l'on considère.

Si nous prenons une onde à une très grande distance du centre, nous pouvons en chacun de ses points la confondre avec son plan tangent. Nous sommes ainsi conduits à considérer des ondes planes, c'est-à-dire des plans sur lesquels les molécules vibrent en coïncidence de phase.

189. Superposition des mouvements vibratoires. —

On démontre en mécanique qu'un nombre quelconque de mouvements vibratoires peuvent exister simultanément dans un même milieu et se superposer sans se troubler mutuellement, à condition que leurs amplitudes soient suffisamment faibles.

Le déplacement et la vitesse d'un point quelconque sont alors les résultantes géométriques des déplacements et des vitesses qui lui seraient communiqués au même instant par les différents mouvements partiels agissant isolément. Les effets de ces mouvements partiels pourront donc s'ajouter ou se détruire plus ou moins complètement suivant les circonstances.

190. Il est à remarquer que la superposition d'un nombre quelconque de mouvements vibratoires parallèles et de même période se résout toujours en une vibration unique de même période également.

Soient en effet

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi_1) \\
 u_2 &= a_2 \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi_2) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

les mouvements composants, d'amplitudes et de phases quelconques.

Leur résultante sera

$$\begin{aligned}
 U &= u_1 + u_2 = a_1 \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi_1) + a_2 \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi_2) + \dots \\
 &= \sin \frac{2\pi t}{\tau} \left(a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots \right) \\
 &\quad - \cos \frac{2\pi t}{\tau} \left(a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Nous pouvons toujours choisir deux quantités A et Φ telles que l'on ait

$$\begin{aligned}
 a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots &= A \cos 2\pi \frac{\Phi}{\tau} \\
 a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots &= A \sin 2\pi \frac{\Phi}{\tau}
 \end{aligned}$$

car, en ajoutant ces deux équations après les avoir élevées au carré, il vient

$$A^2 = \left(a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots \right)^2 + \left(a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} + \dots \right)^2,$$

tandis qu'en divisant la seconde par la première on trouve

$$\text{tang. } 2\pi \frac{\Phi}{\tau} = \frac{a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} \dots}{a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{\tau} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{\tau} \dots}$$

La résultante U peut alors s'écrire

$$U = A \left(\sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos 2\pi \frac{\Phi}{\tau} - \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{\Phi}{\tau} \right),$$

c'est-à-dire

$$U = A \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \Phi).$$

La résultante est donc une vibration simple dont A et Φ déterminent l'amplitude et la phase.

191. Interférences. — Considérons le cas le plus simple, celui où le point reçoit simultanément deux vibrations parallèles de même amplitude et de même période. Si ces deux vibrations lui arrivent en coïncidence de phase, elles lui apportent à chaque instant des vitesses de même sens qui s'ajoutent; mais si les deux vibrations sont en discordance de phase, les deux vitesses sont constamment égales et de signe contraire, leur résultante est nulle, et le point reste en repos¹.

Si donc la lumière consiste en un mouvement vibratoire, il pourra se faire que les effets de deux sources lumineuses se détruisent mutuellement, et que de la lumière ajoutée à de la lumière puisse en certains points de l'espace produire de l'obscur-

¹ T. YOUNG, *Phil. Trans.* 1802, 34.

rité. Cette conséquence, paradoxale au premier abord, est d'accord avec les faits expérimentaux. Les phénomènes de ce genre sont désignés sous le nom de phénomènes d'*interférences*.

Supposons que dans un même milieu se trouvent deux centres de vibrations très voisins A_1 et A_2 (fig. 348) ayant



Fig. 348.

exactement le même mouvement avec une différence de phase nulle; le déplacement étant représenté pour tous deux par

$$u = a_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

un point B quelconque, pris à une distance très grande, recevra de A_1 une vibration

$$u_1 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T_1)$$

et de A_2 une vibration sensiblement parallèle et d'amplitude sensiblement égale

$$u_2 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T_2)$$

T_1 et T_2 étant les temps employés par le mouvement vibratoire pour parcourir les chemins A_1B et A_2B . Le déplacement total de B sera, d'après ce qui précède :

$$u_1 + u_2 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T_1) + a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T_2)$$

et l'amplitude de la vibration résultante sera donnée (§ 190) par la formule

$$A^2 = a^2 \left(\cos 2\pi \frac{T_1}{\tau} + \cos 2\pi \frac{T_2}{\tau} \right)^2 + a^2 \left(\sin 2\pi \frac{T_1}{\tau} + \sin 2\pi \frac{T_2}{\tau} \right)^2$$

ou, en posant $T_1 - T_2 = \theta$:

$$A^2 = 2a^2 + 2a^2 \cos \frac{2\pi}{\tau} \theta.$$

Si θ , la différence des deux trajets, est égale à un nombre

pair $2k$ de demi-périodes, on a $\theta = 2k \frac{\tau}{2}$; $\cos \frac{2\pi}{\tau} \theta = \cos 2k\pi = 1$; $A' = 4a^2$, et $A = 2a$; le déplacement du point B est la somme des deux déplacements partiels, et deux fois plus grand que si le mouvement ne provenait que d'un seul des points vibrants.

Si θ vaut un nombre impair $2k + 1$ de demi-périodes $\theta = (2k + 1) \frac{\tau}{2}$, on a $\cos \frac{2\pi}{\tau} \theta = \cos (2k + 1)\pi = -1$, d'où $A' = 0$; les deux mouvements se détruisent mutuellement, le point B reste en repos.

On voit donc que les mouvements envoyés par A, et A', s'additionnent ou se retranchent en un point B, suivant que la différence θ des temps qu'ils emploient pour atteindre ce point est égale à un nombre pair ou impair de demi-durées d'oscillation. Nous dirons, pour abrégé, qu'il y a dans le premier cas *interférence positive* au point B, et dans le second cas *interférence négative*.

Il en serait évidemment de même si la vibration, au lieu de provenir de deux sources en coïncidence de phase, provenait d'une seule et même source, mais arrivait au point B par deux chemins différents.

192. Franges de Young¹. — Dans le cas de la lumière, on devra recourir à ce dernier procédé, car nous n'avons aucun moyen pour forcer deux sources lumineuses à vibrer en coïncidence de phase.

Une des plus simples parmi les expériences d'interférences est celle des franges de Young, que nous décrirons sous l'une des formes que lui a données Fresnel.

¹ T. YOUNG, *Lectures on natural philosophy*, Londres, 1807, 464. — FRESNEL, *Mém. de l'Institut*, 1821, V, 339; *Œuvres*, I, 330.

En réalité, cette expérience est plus complexe que nous ne le supposons ici, parce que les ondes qui interfèrent sont limitées par les bords du biprisme; à l'interférence proprement dite se joint un phénomène de diffraction (§ 203). H.-F. WEBER, *Vierteljahrsch. d. Züricher naturf. Ges.* 1879.

Soit A un point lumineux, recevons (fig. 349) la lumière qu'il envoie sur un écran MM perpendiculaire au plan de la figure, et entre le point A et l'écran plaçons un biprisme P, formé de deux prismes de verre très obtus accolés en sens inverse. Les rayons partis de A se trouvent, après leur passage à travers les deux moitiés du biprisme, dans les mêmes conditions que s'ils provenaient de deux points lumineux A₁ et A₂, vibrant en coïncidence de phase.

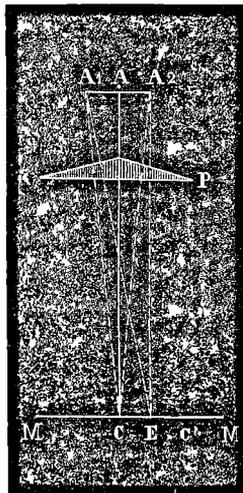


Fig. 349.

Du milieu de la ligne A₁A₂, abaissons une perpendiculaire AC sur l'écran; le point C étant à égale distance des deux sources A₁ et A₂, la différence des deux trajets est nulle et le point C est éclairé. En un point E tel que

$$\frac{A_1E}{V} - \frac{A_2E}{V} = \frac{\tau}{2} \quad \text{ou} \quad A_1E - A_2E = \frac{\lambda}{2}$$

le retard qui existe entre les deux mouvements est d'une demi-période, il y a interférence négative et obscurité.

En un point C' tel que

$$\frac{A_1C'}{V} - \frac{A_2C'}{V} = \frac{2\tau}{2} \quad \text{ou} \quad A_1C' - A_2C' = \frac{2\lambda}{2}$$

il y aura de nouveau interférence positive et ainsi de suite. Généralement, on aura de la lumière aux points N de MM pour lesquels

$$\theta = \frac{A_1N}{V} - \frac{A_2N}{V} = 2k \frac{\tau}{2} \quad \text{ou} \quad A_1N - A_2N = 2k \frac{\lambda}{2}$$

et de l'obscurité là où

$$\theta = \frac{A_1 N}{V} - \frac{A_2 N}{V} = (2k + 1) \frac{\tau}{2}$$

ou

$$A_1 N - A_2 N = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

On observera donc sur MM un point brillant en C, puis à droite et à gauche une série de points alternativement brillants et obscurs.

193. Mesure des longueurs d'ondes des vibrations lumineuses. — Il est clair que si l'on mesure les distances $A_1 A_2$, et AC, et la distance CN, qui sépare sur la ligne MM une frange brillante ou obscure d'ordre quelconque k du centre C, on pourra calculer la différence $A_1 N - A_2 N$ des deux chemins, et en déduire, d'après la formule ci-dessus, la longueur d'onde λ de la lumière employée.

On trouve que l'écartement des franges, et par suite la valeur de λ , varie avec la couleur de la lumière émise par la source, et l'on est ainsi conduit à admettre que l'éther peut transmettre une infinité de vibrations différant les unes des autres par leurs longueurs d'onde et par leurs durées d'oscillation. Chacune d'elles produit sur notre œil une impression de couleur déterminée, exactement comme en acoustique les sons de hauteurs différentes correspondent à des vibrations de périodes et de longueurs d'ondes différentes.

L'expérience et surtout l'observation de phénomènes astronomiques montrent que dans le vide toutes les couleurs ont sensiblement la même vitesse de propagation V , laquelle est d'environ 300,400 kilomètres par seconde. La formule $V = \lambda/\tau$ (§ 186) nous montre alors que les durées d'oscillation τ sont proportionnelles aux longueurs d'onde λ , et nous permet de les cal-

culer. V étant très grand et les longueurs d'onde λ , mesurées par le procédé ci-dessus ou par d'autres procédés analogues, étant très petites, on en déduit pour les durées d'oscillations des valeurs qui sont excessivement petites. On trouve, par exemple pour le rouge, $\lambda = 0^{\text{mm}},000760$ et $1/\tau$, le nombre d'oscillations par seconde, = 395 trillions; pour le jaune, $\lambda = 0,000589$ et $1/\tau = 510$ trillions; pour le bleu, $\lambda = 0,000397$ et $1/\tau = 757$ trillions, soit 757×10^{12} .

L'intensité de la lumière, c'est-à-dire la vivacité de la sensation qu'elle nous fait éprouver, peut être regardée comme proportionnelle à la force vive du mouvement vibratoire, laquelle est elle-même proportionnelle au carré de l'amplitude pour des vibrations de même période.

CHAPITRE XIII

DE LA CONSTRUCTION D'HUYGENS

194. Principe d'Huygens¹. — Considérons un point lumineux S et étudions l'effet qu'il produit sur un point éclairé R situé à une distance quelconque (fig. 350); les deux points peuvent être placés dans un milieu transparent quelconque, isotrope ou non, et la lumière, pour aller de S à R, peut avoir à traverser un nombre quelconque

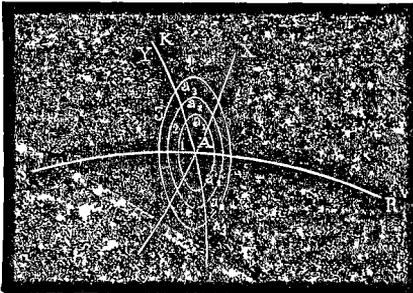


Fig. 350.

ser un nombre quelconque de milieux différents, ou subir des réflexions quelconques à la surface d'autres milieux. Prenons une surface fermée K quelconque, entourant S, mais laissant R en dehors d'elle, de sorte que la lumière de S doive la tra-

verser pour parvenir en R; nous pouvons considérer chacun des points de cette surface, après qu'il a reçu l'ébranlement venu de S, comme devenant à son tour un centre d'ébranlement, et

¹ HUYGENS, *Traité de la lumière*, Leyde 1690.

le mouvement du point R comme la résultante de tous les mouvements partiels qui lui sont envoyés par ces différents points.

Il est évident que puisque S agit sur R, par l'intermédiaire du milieu interposé, l'effet produit ne sera pas changé si l'on supprime S, et si l'on donne aux divers points de la surface K le mouvement même qu'ils recevaient de S. Rien d'ailleurs ne nous autorise à admettre *a priori* que chacun de ces points envoie de la lumière tout autour de lui comme s'il était seul en vibration; la loi du rayonnement peut être modifiée par le mouvement des points voisins, mais cela n'influe pas sur ce que nous avons à dire.

195. Chemin de plus prompte arrivée¹. — Soit SAR un chemin tel qu'en le suivant la lumière mette moins de temps pour parvenir de S à R que par tout autre chemin très voisin. Soit A (fig. 350) le point où ce chemin de plus prompte arrivée coupe la surface K. Décrivons sur la surface K, et tout autour du point A, une série de courbes 1, 2, 3 . . . telles qu'en appelant a_1 un point quelconque de la courbe 1, a_2 un point quelconque de la courbe 2, et ainsi de suite, la lumière emploie pour aller de S à R un temps plus long d'une demi-période en passant par a_1 , qu'en passant par A; en passant par a_2 , qu'en passant par a_1 , et ainsi de suite.

Ces courbes partagent la surface en zones élémentaires, et les mouvements envoyés à R par deux zones consécutives ont

¹ Le mode de raisonnement employé dans ce paragraphe a été donné par FRESNEL, *Note sur la théorie de la diffraction* (1818). *Œuvres*, I, 171. — La question de la propagation de la lumière suivant le chemin de plus prompte arrivée a été traitée rigoureusement par KIRCHHOFF, *Wied. Ann.* 1883, XVIII, 663; *Optik*, Leipzig, 1891, 22. Le calcul de Kirchhoff repose implicitement sur le manque de concordance des vibrations qui ont traversé des points un peu écartés sur la même zone élémentaire (§ 197). On doit à M. MASCART, *Traité d'Optique*, Paris 1889, I, 24, d'avoir particulièrement insisté sur ce défaut de concordance.

évidemment une différence de phase d'une demi-oscillation. Deux zones consécutives envoient constamment à R des vitesses de signes contraires.

Si donc nous représentons par v la vitesse totale reçue par le point R et par $v_1, v_2, v_3 \dots$ les vitesses partielles employées par chacune des zones $Aa_1, a_1a_2, a_2a_3 \dots$, nous aurons

$$v = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$$

La vitesse v sera donnée par une série de termes alternativement positifs et négatifs. Or on peut démontrer que ces termes vont en décroissant rapidement ainsi que leurs différences, de sorte que la valeur de la série n'est pas sensiblement altérée si on la réduit à ses premiers termes jusqu'à un certain rang suffisamment éloigné, et si l'on supprime tous ceux qui viennent après. Mais ces termes, que nous pouvons supprimer sans changer l'éclairement de R, représentent l'effet des zones élémentaires qui ne sont pas dans le voisinage immédiat du point A. L'effet de la surface K sur le point R se réduit donc sensiblement à l'effet de A et des zones élémentaires qui n'en sont pas trop éloignées. Si nous interposons un écran percé d'une ouverture qui laisse libres un certain nombre des zones élémentaires autour de A, l'éclairement en R ne sera pas modifié. Si, au contraire, nous interposons un écran qui intercepte seulement la portion de la surface K voisine de A, en laissant libre le reste, le point R cessera d'être éclairé comme si nous avions intercepté l'onde tout entière.

Le nombre des zones élémentaires qui exercent une action appréciable sur R peut être considérable, mais ces zones sont en général très étroites et de dimensions comparables aux longueurs d'onde des vibrations considérées; l'espace efficace total sera très petit en réalité, et on pourra dire que *le point R est éclairé seulement par un rayon lumineux qui suit le chemin de*

plus prompte arrivée : si l'on intercepte ce rayon par un petit écran, R cesse d'être éclairé ; si on laisse passer ce rayon par une petite ouverture percée dans un écran, R reçoit de la lumière comme s'il n'y avait pas d'écran.

*** 196. Grandeur des zones élémentaires.** — Pour reconnaître que la série v ci-dessus est convergente, nous évaluerons d'abord la surface des zones élémentaires successives. Par le point A, nous menons sur la surface K deux lignes OX et OY se coupant à angle droit, que nous prenons pour axes de coordonnées et que, sur un espace très grand par rapport aux longueurs d'ondes, nous pouvons sans erreur sensible confondre avec des lignes droites. Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque a_m par rapport à ces axes. Si nous appelons T_m le temps employé par la lumière pour aller de S à R en passant par le point a_m , nous aurons généralement

$$T_m = f(x, y).$$

Nous admettons que T_m est une fonction continue de la position du point a_m , de telle sorte qu'un déplacement très petit de a_m ne produise qu'un changement très petit dans la valeur de T_m .

Appelant T_o la durée du trajet suivant SAM, nous pouvons alors, pour les positions de a_m voisines de A, développer T_m par la formule de Maclaurin et arrêter le développement aux termes du second degré en x et y :

$$T = T_o + \left(\frac{dT}{dx}\right)_o x + \left(\frac{dT}{dy}\right)_o y \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_o x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T}{dy^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{d^2T}{dxdy}\right)_o xy.$$

Nous supposons que A est situé sur le chemin de plus prompte arrivée. T_o est donc un minimum, $\left(\frac{dT}{dx}\right)_o$ et $\left(\frac{dT}{dy}\right)_o$ sont nuls ; par un

choix convenable des axes OX et OY, on peut faire disparaître le terme en xy , et il reste une relation de la forme

$$2(T - T_0) = Mx^2 + Ny^2;$$

les courbes 1, 2, 3 ... correspondent à $T - T_0 = \frac{\tau}{2}, 2\frac{\tau}{2}, 3\frac{\tau}{2} \dots$ sont donc des ellipses ayant pour demi-axes

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{\tau}{M}} & y_1 &= \sqrt{\frac{\tau}{N}} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{\tau}{M}} \sqrt{2} & y_2 &= \sqrt{\frac{\tau}{N}} \sqrt{2} \\ x_3 &= \sqrt{\frac{\tau}{M}} \sqrt{3} & y_3 &= \sqrt{\frac{\tau}{N}} \sqrt{3} \end{aligned}$$

et embrassant des aires

$$\begin{aligned} q_1 &= \pi x_1 y_1 = \frac{\pi \tau}{\sqrt{MN}} \\ q_2 &= \pi x_2 y_2 = \frac{2 \pi \tau}{\sqrt{MN}} \\ q_3 &= \pi x_3 y_3 = \frac{3 \pi \tau}{\sqrt{MN}} \end{aligned}$$

Les zones élémentaires comprises chacune entre deux ellipses successives ont donc des surfaces égales $q_1 = q_2 - q_1 = q_3 - q_2 = \frac{\pi \tau}{\sqrt{MN}}$, tandis que leurs largeurs, qui sont de l'ordre de $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2$, vont en décroissant rapidement et tendent à devenir égales à mesure qu'on s'éloigne du point A.

*** 197. Effets des diverses zones élémentaires.** — Si donc

ces zones pouvaient être considérées comme agissant sur le point R uniquement en raison de leurs surfaces, les vitesses partielles $v_1, v_2 \dots$ seraient toutes égales entre elles, et la série aurait une valeur indéterminée. Le point R se trouve, il est vrai, à une distance et dans une position différente par rapport aux diverses zones; les vitesses partielles ne peuvent pas être égales; dans certains cas particuliers, on peut démontrer qu'elles vont en décroissant.

Mais on doit considérer surtout une circonstance beaucoup plus générale. La source lumineuse S ne peut jamais être un simple point mathématique vibrant simultanément et symétriquement dans toutes les directions. C'est un espace plus ou moins grand dans lequel une multitude de points vibrent séparément et d'une manière tout à fait indépendante. La lumière qui se propage suivant un chemin déterminé est donc elle-même une résultante d'un grand nombre de mouvements vibratoires; à chaque instant la phase de cette résultante ne varie d'une manière sensiblement continue, lorsqu'on passe d'un chemin à un autre, que si ces chemins sont très peu écartés l'un de l'autre. Il en résulte que deux chemins passant par deux points quelconques a_m et a'_m d'une même zone, quoique correspondant à une même valeur de T dans la supposition primitive que S est un simple point, apportent en réalité à R des vitesses d'autant moins concordantes que a_m et a'_m sont eux-mêmes plus éloignés l'un de l'autre sur la surface K; la vitesse partielle envoyée par une zone est par suite d'autant plus faible que le diamètre de cette zone est plus grand, c'est-à-dire qu'elle est plus éloignée de A. On voit également que, les zones d'ordre élevé étant très étroites, l'effet de chaque petite portion de chacune d'elles tend à devenir exactement égal et opposé à l'effet de chaque petite portion très voisine de la zone adjacente. On en conclut que les vitesses partielles $v_1, v_2, v_3 \dots$ vont en diminuant assez

rapidement, en même temps que leurs différences $v_1 - v_2$, $v_3 - v_4$... tendent vers zéro dès que l'on considère des zones un peu éloignées du point A.

* 198. **Généralisation du théorème¹.** — Le résultat du paragraphe 195 repose sur le fait qu'aux environs du point A les dérivés $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dT}{dy}$ sont nulles. Cette condition est satisfaite si le chemin qui passe par A est, quant à la durée du trajet, un minimum relativement aux chemins voisins. Mais ce serait aussi le cas si ce chemin était un maximum, ou si, n'étant ni maximum ni minimum, il correspondait à un trajet T égal à celui des chemins très voisins. Dans ces divers cas, il pourra se faire que R reçoive de la lumière du point A.

* 199. **Application au phénomène de la réflexion.** — Un point lumineux S envoie de la lumière à un point R situé

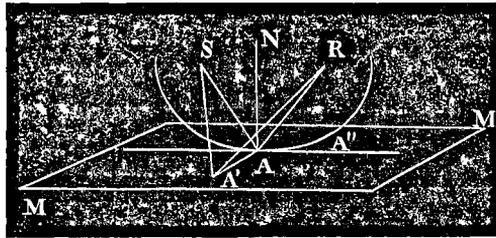


Fig. 351.

dans le même milieu (fig. 351). La lumière se transmet d'abord suivant la ligne droite SR, qui est évidemment un chemin de

¹ La propagation suivant le chemin minimum dans le phénomène de la réflexion avait été remarquée par LACHAMBRE, *De la lumière*, Paris 1862, 311. FERMAT avait supposé qu'il en était de même pour la réfraction et en avait conclu que l'indice de réfraction (§ 217) est égal au rapport direct des vitesses dans les deux milieux en contact, *Opera varia*, Toulouse, 1679, 156. HUYGENS arrive au même résultat dans l'hypothèse des ondes, *Traité de la lumière*, 1690; FRESNEL aperçoit la loi générale, *Mémoire couronné sur la diffraction* (1819), *Œuvres*, I, 379.

trajet minimum. Imaginons de plus un miroir plan MM dont les divers points, à mesure qu'ils sont ébranlés par le mouvement qu'ils reçoivent de S, envoient à leur tour de la lumière à R. On verra comme ci-dessus que les seuls points de ce plan qui exercent un effet sensible sur R sont groupés dans un petit espace autour du point A, pour lequel la ligne SAR est parcourue dans un temps minimum, ou, ce qui revient au même puisque la vitesse de propagation est constante dans le milieu isotrope considéré, pour lequel la ligne brisée SAR est la plus courte possible.

Si, par S et R, nous menons un plan perpendiculaire au miroir, il est clair que A sera contenu dans ce plan, la ligne SAR étant plus courte qu'une ligne SA'R située dans un plan incliné quelconque. D'où résulte que le rayon incident SA et le rayon réfléchi AR sont compris dans un même plan normal au miroir : c'est la première loi bien connue de la réflexion.

Traçons ensuite dans le plan SAR une ellipse ayant S et R comme foyers et tangente au miroir. Le point de tangence est en A, puisque tous les autres points du miroir sont extérieurs à l'ellipse, et que pour l'un quelconque A" d'entre eux on a, par conséquent,

$$SA'' + A''R > SA + AR.$$

Or on sait que, dans une ellipse, les deux rayons vecteurs SA et AR font des angles égaux avec la normale AN; l'ellipse étant tangente en A au miroir MM, AN est aussi normale à celui-ci, et nous retrouvons la seconde loi de la réflexion : l'angle d'incidence SAN est égal à l'angle de réflexion NAR.

* 200. Si le miroir, au lieu d'être plan, était convexe, nous obtiendrions de la même manière le point A, qui correspond au trajet minimum (fig. 352). Si le miroir était concave, le point A

pourrait correspondre à un trajet maximum (fig. 353). Dans les deux cas le point R ne recevrait de lumière que de la région du miroir très rapprochée de A.

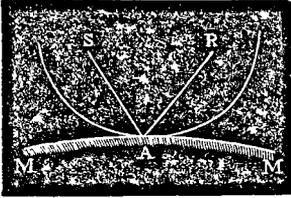


Fig. 352.

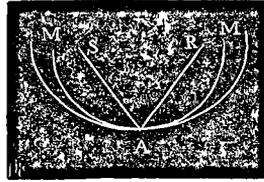


Fig. 353.

Si le miroir avait une surface ondulée (fig. 354), il pourrait exister une série de points tels que A_1, A_2 , placés sur des lignes de trajets minima, et une autre série de points tels que

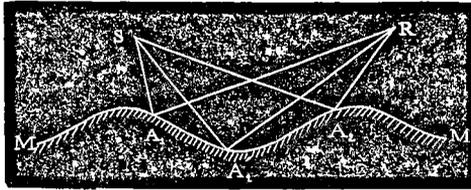


Fig. 354.

A'_1 , placés sur des lignes de trajets maxima : tous ces points enverraient de la lumière à R.

Enfin la section faite dans le miroir par le plan d'incidence pourrait être une ellipse ayant S et R pour foyers. Tous les points de cette ellipse correspon-

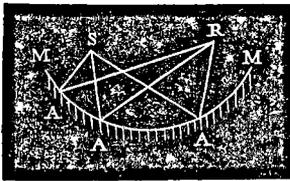


Fig. 355.

draient à une même durée de trajet, puisque la somme des rayons vecteurs $SA + AR$ serait constante. Il n'y aurait plus ni maximum ni minimum ; mais la première zone élémentaire

s'étendrait sur toute la section, et tous les points de celle-ci enverraient de la lumière à R (fig. 355). Ce cas cependant exigerait un examen plus attentif.

* 201. Application à la réfraction simple. — Nous supposons maintenant que les points S et R soient situés dans deux milieux isotropes différents, dans lesquels la lumière chemine avec des vitesses V et V' , et qui sont en contact par une surface plane MM. Le plan réfringent MM, mis en vibration par S, envoie du mouvement dans le second milieu, et les seules portions de ce plan qui exercent sur R un effet appréciable sont celles qui avoisinent le point A situé sur le chemin de plus prompte arrivée.

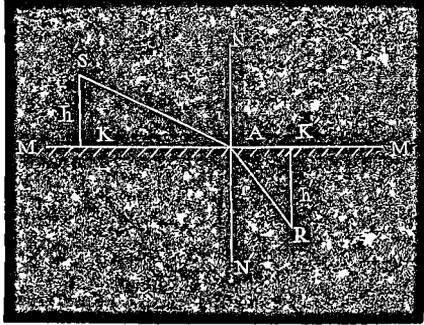


Fig. 356.

Ce point est évidemment contenu dans le plan SAR normal au plan réfringent (fig. 356). La durée du trajet qui doit être minimum est

$$T = \frac{SA}{V} + \frac{RA}{V'}.$$

Soient K et K' les pieds des perpendiculaires abaissées de S et de R sur MM, et l la distance KK' , x la distance inconnue KA , h et h' les hauteurs SK et RK' ; on aura

$$T = \frac{1}{V} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{1}{V'} \sqrt{(l-x)^2 + h'^2};$$

pour que T soit minimum, il faut que

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{V} \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{1}{V'} \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h'^2}} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{1}{V} \sin ASK = \frac{1}{V'} \sin ARK',$$

ou encore

$$\frac{1}{V} \sin NAS = \frac{1}{V'} \sin N'AR.$$

Appelons i l'angle d'incidence NAS, r l'angle de réfraction N'AR, on aura

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = \text{constante.}$$

On obtient donc bien les deux lois de la réfraction ordinaire : le rayon incident et le rayon réfracté sont compris dans un même plan normal à la surface réfringente, et le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est constant.

* 202. La réfraction par une surface courbe s'explique de la même manière. En particulier (fig. 357), si la surface réfringente a une courbure convenable, il pourra se faire que tous les chemins SAR, SA'R, etc.,

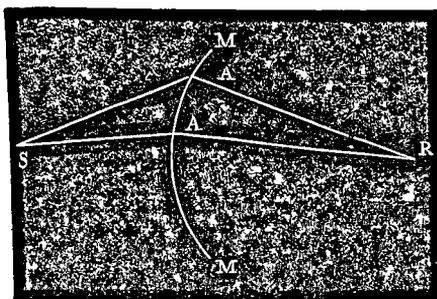


Fig. 357.

soient parcourus dans des temps égaux, la longueur plus grande du chemin SA'R étant compensée par le fait que la lumière en parcourt une plus grande partie avec la plus grande vitesse V .

Dans ce cas, tous les rayons arriveront en coïncidence de phase en R, la surface se comportera comme un arc élémentaire unique, la lumière de S sera concentrée au point R. Ici encore il y aurait lieu d'examiner de plus près certaines perturbations.

* 203. Phénomènes de diffraction. — Nos raisonnements ont toujours supposé que la surface K (§ 194) était illimitée, et le

chemin SAR toujours éloigné des régions de l'espace où le temps T pourrait varier brusquement d'une quantité finie lorsqu'on passe d'un rayon au rayon très voisin. Lorsque nous avons parlé de l'effet produit par un écran, nous avons toujours admis que cet écran interceptait un grand nombre de zones élémentaires autour de A, ou qu'il était percé d'une ouverture comprenant également un grand nombre de zones élémentaires. Ce n'est que dans ces conditions que nous pouvons dire que le rayon lumineux suit le chemin de plus prompte arrivée.

Si l'écran est très petit, il pourra n'intercepter qu'une partie des zones efficaces, et le point R continuera à être éclairé plus ou moins. Il en sera de même sur les bords d'un écran quelconque; l'ombre n'est jamais tranchée nettement, et il se produit à la limite de l'ombre géométrique des alternatives de lumière et d'obscurité et une inflexion de la lumière vers l'intérieur de l'ombre. Ces phénomènes, appelés phénomènes de *diffraction*, s'expliquent complètement et dans tous leurs détails par la théorie dont nous venons d'esquisser le principe.

204. Propagation d'une onde plane dans un milieu homogène quelconque. —

Étant donnée à un certain instant la position M, d'une onde plane dans un milieu homogène quelconque pour lequel la surface de l'onde est connue, il s'agit de déterminer la position qu'occupera cette onde plane au bout d'une unité de temps. Tous les points de M, (fig. 358) envoient de la lumière en avant de l'onde, l'effet cherché est la résultante de tous ces ébranlements. Un point A pendant l'unité de temps envoie du mouvement jusqu'à la surface de l'onde décrite autour de A

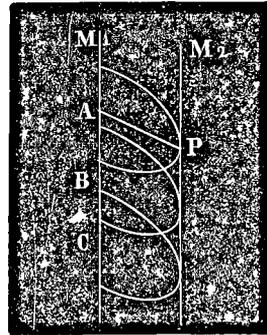


Fig. 358.

comme centre. De même les ébranlements partis de B, de C, etc., se propagent jusqu'aux surfaces d'onde décrites autour de ces points. Ces surfaces d'onde sont toutes égales et semblablement placées, puisque le milieu est homogène, et elles sont toutes tangentes en avant à un plan M_1 , parallèle à M_0 . Ce plan sépare par conséquent les points de l'espace qui, pendant cette unité de temps, ont reçu de la lumière de ceux qui n'en ont pas encore reçu; ce plan contient les points qui entrent en vibration une unité de temps après les points de M_0 . M_1 est donc la position de l'onde plane une unité de temps après qu'elle a passé en M_0 . D'où la construction suivante : *Autour d'un point quelconque A de M_0 , on décrit la surface d'onde du milieu considéré, et on lui mène un plan tangent parallèle à M_0 ; ce plan tangent M_1 est l'onde cherchée.*

205. Direction du rayon lumineux. — On demande maintenant de déterminer la direction du rayon lumineux qui correspond à une onde plane donnée. Reprenons la construction précédente (fig. 358). Soit P le point de contact du plan M_1 et de la surface d'onde décrite autour de A. Il est clair que P reçoit de la lumière du point A plus vite que d'aucun autre point de M_0 , puisque, au moment où il la reçoit, la lumière d'un point B quelconque ne s'est propagée que jusqu'à la surface d'onde décrite autour de B, surface qui n'atteint pas P. D'après le théorème général, P ne sera donc éclairé que par A et les points voisins de A; un écran placé en A empêchera la lumière de parvenir en P; *AP est donc le rayon lumineux cherché.*

On voit qu'en général, dans un milieu anisotrope, le rayon lumineux est oblique sur l'onde plane qui lui correspond. Dans un milieu isotrope, la surface de l'onde est une sphère, le point P est évidemment sur la normale menée au plan M_0 par le point A, le rayon est normal à l'onde plane.

Réciproquement, étant donné un rayon lumineux, on peut déterminer la direction de l'onde plane correspondante. Autour d'un point A de ce rayon nous construirons la surface de l'onde qui caractérise le milieu. Au point P, où cette surface coupe le rayon, nous lui mènerons un plan tangent M qui est l'onde plane cherchée.

206. Construction d'Huygens¹. — Deux milieux homogènes quelconques, différents, sont en contact par un plan MM perpendiculaire au plan de la figure (fig. 359). On donne pour chacun d'eux la grandeur, la forme et la position de la surface

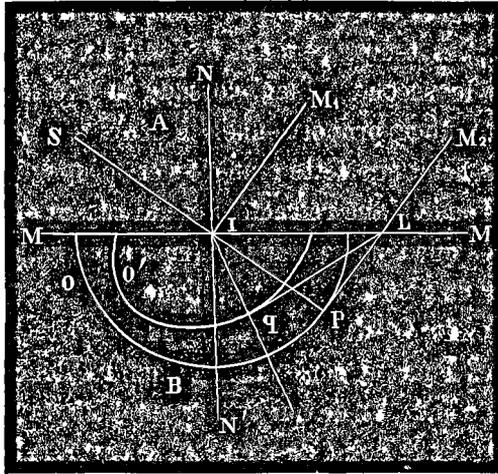


Fig. 359.

de l'onde. Dans le premier milieu se propage une onde plane M, perpendiculaire aussi au plan de la figure, à laquelle correspond un rayon SI qui, en général, n'est pas compris dans le plan de la figure. Ce rayon tombe en I sur le plan réfringent MM. On

¹ HUYGENS, *Traité de la lumière*, chap. V, a donné cette construction pour le cas particulier de cristaux à un axe. FRESNEL l'a généralisée dans son *Second supplément au Mémoire sur la double réfraction* (1821), *Œuvres*, II, 382.

demande la direction du rayon réfracté et de l'onde plane réfractée dans le second milieu.

A partir de l'instant où l'onde plane M_1 atteint le point I , les différents points de la surface MM_1 situés plus à droite sont successivement ébranlés et se mettent successivement à envoyer de la lumière dans le second milieu. Au bout d'une unité de temps, l'onde plane incidente est venue en M_1 et coupe MM_1 suivant une droite L perpendiculaire au plan de la figure; et nous obtenons M_2 (§ 205) en décrivant la surface de l'onde O du premier milieu, et en menant un plan tangent PLM_1 au point P , où elle est coupée par le prolongement du rayon incident SI . Les différents points de MM_1 qui sont compris entre I et L reçoivent le mouvement après des temps proportionnels à leurs distances à partir de I ; les temps pendant lesquels ils ont envoyé de la lumière dans le second milieu, lorsque la droite L entre en vibration, sont donc proportionnels à leurs distances à partir de L . On en conclut que cette lumière s'est propagée jusqu'à un plan, qui est l'onde plane réfractée, et qui passe par L une unité de temps après que l'onde plane incidente a passé par I . D'autre part, en vertu du § 204, cette onde plane doit être tangente à la surface de l'onde O' du second milieu, décrite autour de I comme centre. Pour la construire, il suffira donc de décrire cette surface d'onde et de lui mener un plan tangent par la droite L . Si Q est le point de contact, le rayon réfracté est IQ (§ 205); Q ne sera pas en général dans le plan de la figure. *Le rayon incident et le rayon réfracté ne sont donc pas contenus en général dans un même plan perpendiculaire au plan réfringent. Les normales aux ondes planes incidente et réfractée sont au contraire toujours comprises dans un même plan normal à la surface réfringente, quelle que soit la structure des deux milieux homogènes en contact.*

En résumé, la construction que nous venons d'exposer, et qui

est connue sous le nom de construction d'Huygens, peut s'énoncer comme il suit :

Deux milieux homogènes quelconques A et B étant en contact par une surface plane MM , et SI étant un rayon lumineux qui, cheminant dans A , vient tomber sur la surface de contact, pour avoir la direction du rayon réfracté dans le milieu B , on construit autour du point I la surface d'onde O du milieu A . Par le point P , où elle est percée par le rayon SI prolongé, on lui mène un plan tangent, qui a la direction de l'onde plane incidente, et qui coupe la surface réfringente MM suivant une droite L . On construit ensuite autour de I la surface d'onde O' du milieu B , et, par la droite L , on lui mène un plan tangent qui est parallèle à l'onde plane réfractée. La droite IQ , qui aboutit au point de contact Q , est le rayon réfracté. Pour ne pas compliquer inutilement la figure, on se borne habituellement à tracer les portions des surfaces d'ondes O et O' qui se trouvent au-dessous du plan réfringent.

CHAPITRE XIV

TRANSVERSALITÉ DES VIBRATIONS LUMINEUSES

207. Hypothèse de Fresnel¹. — Pour expliquer certains phénomènes dont nous allons nous occuper, Fresnel a été obligé de faire une seconde hypothèse et d'admettre que, dans le mouvement qui constitue la lumière, les molécules d'éther ne vibrent pas longitudinalement, c'est-à-dire parallèlement à la direction suivant laquelle le mouvement se propage, comme cela a lieu dans l'air pour les vibrations sonores, mais bien transversalement, c'est-à-dire perpendiculairement à cette direction. *Dans un milieu isotrope, les molécules d'éther décrivent des trajectoires qui sont contenues dans des plans perpendiculaires au rayon*

¹ FRESNEL, *Mémoire sur l'influence de la polarisation dans l'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres* (1816), *Œuvres*, I, 394, et YOUNG, *Miscell. Works*, I, 333 et 380 (1817), conçoivent l'idée d'un mouvement transversal accompagnant le mouvement longitudinal principal. FRESNEL, dans sa *Note sur le calcul des teintes que la polarisation développe dans les lames cristallisées*, *Ann. de Chim.* 1821, XVII, 179; *Œuvres*, I, 629, finit par rejeter complètement l'idée d'une composante longitudinale. VERDET a démontré, *Ann. de Chim.* 1851, XXXI, 377, plus rigoureusement que ne l'avait fait Fresnel, que l'hypothèse des vibrations transversales est seule compatible avec le fait découvert par FRESNEL et ARAGO, *Œuvres de Fresnel*, I, 335 (1816), que les rayons polarisés à angle droit sont incapables d'interférer.

lumineux. Ce mouvement a donc une certaine analogie avec le mouvement vibratoire transversal d'une corde tendue.

Ces trajectoires elles-mêmes peuvent d'ailleurs être des lignes droites orientées d'une manière quelconque dans le plan normal au rayon, des circonférences de cercles, ou des ellipses plus ou moins allongées, décrites de gauche à droite ou de droite à gauche.

Dans les milieux anisotropes, on admet le plus souvent que la vibration peut ne pas être exactement perpendiculaire au rayon lumineux, mais qu'elle est toujours parallèle à l'onde plane qui correspond à ce rayon (§ 205). Ce parallélisme n'est pas une conséquence générale et nécessaire de la théorie des mouvements vibratoires; il est très difficile à vérifier expérimentalement; mais il est certainement réalisé, au moins approximativement, car tous les cristaux connus se comportent à l'égard des phénomènes lumineux comme s'ils avaient une structure presque isotrope.

208. Polarisation de la lumière. — Si les trajectoires des molécules d'éther ne varient pas avec le temps, et sont les mêmes pour les différentes molécules qui sont ébranlées par le rayon, on dit que la lumière est *polarisée*.

Le rayon sera polarisé rectilignement, si toutes les molécules effectuent constamment des vibrations rectilignes parallèles. Dans ce cas, le mouvement est défini par l'orientation de ces vibrations. Le plan mené par le rayon et par la vibration est appelé *plan de vibration*.

Si les trajectoires sont toutes semblables, mais elliptiques ou circulaires, on aura un rayon polarisé elliptiquement ou circulairement. Pour qu'il soit complètement défini, il faudra connaître la forme et l'orientation des ellipses et le sens dans lequel elles sont parcourues. Comme nous l'avons déjà remarqué

(§ 182), un pareil mouvement peut être regardé comme résultant de la superposition de deux vibrations rectilignes s'effectuant dans deux directions perpendiculaires entre elles. Un rayon polarisé elliptiquement est équivalent à la superposition de deux rayons polarisés rectilignement dans des plans rectangulaires quelconques, et ayant des rapports convenables de phase et d'intensité.

209. Lumière naturelle. — Habituellement, la lumière n'est pas polarisée. Les diverses molécules qui sont ébranlées dans le rayon ont des trajectoires différentes, dont la forme et l'orientation se modifient constamment et très rapidement. On a alors de la lumière naturelle. Nous pouvons remarquer que le mouvement de chaque molécule est décomposable en deux vibrations rectilignes rectangulaires entre elles; le nombre de ces mouvements irrégulièrement orientés étant très grand, il y aura en moyenne autant de composantes dans un sens que dans l'autre : le rayon de lumière naturelle peut être regardé comme équivalent à deux rayons polarisés rectilignement à angle droit, égaux en intensité, mais dont la différence de phase varie constamment et irrégulièrement.

210. Définition expérimentale du plan de polarisation. — On conçoit que s'il existe des rayons lumineux dont la constitution soit celle que nous venons de définir sous le nom de polarisation rectiligne, de tels rayons puissent avoir des propriétés différentes parallèlement et perpendiculairement à la direction de leurs vibrations. On conçoit, par exemple, que, venant tomber sur la surface polie d'un milieu transparent quelconque, ils puissent se réfléchir avec une intensité différente suivant que leurs vibrations sont parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence.

Or on peut en effet, par divers procédés dont nous verrons plus loin les principaux, obtenir des rayons qui manifestent des particularités de ce genre¹, et auxquels nous sommes ainsi fondés à attribuer une polarisation rectiligne.

Si l'on reçoit un tel rayon, sous une incidence convenable, sur une glace de verre noir, par exemple, et si l'on fait tourner la glace autour d'un axe parallèle à la direction du rayon incident, on observe que, pour une certaine position du plan d'incidence, le rayon réfléchi disparaît complètement, tandis que pour une autre position à 90° de la première il a une intensité maximum. La symétrie du phénomène montre que la structure du rayon doit elle-même être symétrique par rapport à deux plans rectangulaires entre eux, mais non équivalents, qui coïncident avec ces positions particulières du plan d'incidence.

On convient de définir expérimentalement l'état de polarisation du rayon, en donnant le nom de *plan de polarisation* au plan, mené par le rayon, qui coïncide avec le plan d'incidence quand le rayon réfléchi est maximum. Si, par exemple, le rayon incident chemine horizontalement, et si le rayon réfléchi est maximum quand la glace est placée de telle sorte que le plan d'incidence soit vertical, on dira que le rayon incident est polarisé dans un plan vertical.

Quant aux vibrations elles-mêmes, elles doivent être ou bien parallèles ou bien perpendiculaires au plan de polarisation; mais l'expérience ne permet pas de décider entre les deux interprétations².

¹ HUYGENS, *Traité de la lumière*, chap. V, avait observé les propriétés des rayons réfractés par le spath d'Islande, qui obligent à considérer chacun de ces rayons comme n'ayant pas la même constitution par rapport à deux plans rectangulaires parallèles à sa direction. L'influence de la polarisation sur la réflexion a été découverte par MALUS, *Mém. d'Arcueil*, 1808, II, 113; *Mém. de l'Institut*, 1810, XI, 112.

² Parmi les travaux récents relatifs à ce point controversé, voy. WIENER, *Wied. Ann.*, 1890, XL, 203; — DRUDE, *ibid.*, XLI, 154.

Nous admettrons, avec Fresnel, que sur un rayon polarisé rectilignement le plan de vibration est perpendiculaire au plan de polarisation.

211. Conséquences qui résultent de la transversalité des vibrations. — Cette constitution des vibrations lumineuses entraîne des conséquences importantes dans le cas des corps cristallisés. Si nous considérons, par exemple, un rayon de lumière polarisée rectilignement qui se propage dans un milieu non isotrope, les forces élastiques mises en jeu par le déplacement des molécules, et la vitesse de propagation du rayon, peuvent varier non seulement avec la direction de celui-ci, mais aussi avec l'orientation de la vibration.

Ainsi (fig. 360), un rayon O perpendiculaire au plan de la figure, cheminant perpendiculairement à l'axe principal AA dans un cristal quadratique, se trouve dans des conditions différentes par rapport au milieu qu'il traverse, suivant que sa vibration est parallèle à l'axe, comme aa , ou perpendiculaire à l'axe, comme bb . Les lois de la réfraction, liées comme nous l'avons vu aux vitesses de propagation, dépendront donc non seulement de la direction du rayon incident par rapport au cristal, mais encore de la nature de la vibration. Il semble même à première vue qu'à chaque espèce de vibration doive correspondre une loi différente pour la direction du rayon réfracté.

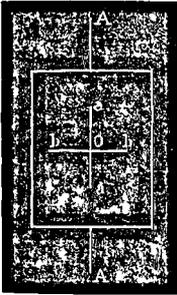


Fig. 360.

212. Double réfraction. — En réalité, les choses se présentent d'une manière moins compliquée à certains égards. Généralement un cristal ne laisse pas passer sans les altérer des vibrations rectilignes orientées d'une manière quelconque, ce

qui provient de ce que, dans un milieu anisotrope, les forces élastiques mises en jeu par le déplacement des molécules ne sont pas en général dirigées parallèlement à ce déplacement, et ne peuvent pas par conséquent produire une simple oscillation rectiligne parallèle au déplacement; à plus forte raison, le cristal ne pourra pas généralement transmettre sans altération une vibration polarisée elliptiquement ou circulairement d'une manière quelconque.

L'observation montre que *dans chaque direction il ne peut se propager en général que deux rayons de polarisations déterminées, lesquels cheminent avec des vitesses différentes*. Tout mouvement incident qui ne posséderait pas l'une de ces deux polarisations privilégiées ne pourrait être transmis sans altération, mais serait immédiatement décomposé en deux vibrations convenablement polarisées, se propageant chacune pour son compte avec la vitesse qui lui correspond.

A chacune de ces vibrations appartient une nappe particulière de la surface de l'onde (§ 188) et la construction d'Huygens donne en général deux rayons réfractés.

La polarisation de ces rayons peut ne pas obéir aux mêmes lois dans les milieux qui sont énantiomorphes et dans ceux qui ne le sont pas (§ 105). Nous commencerons par nous occuper de ces derniers.

213. Lois des rayons. Ellipsoïde direct¹. — Les orien-

¹ Les principales surfaces qui jouent un rôle dans la théorie de la double réfraction sont au nombre de huit. Voici leurs définitions, dans les idées de Fresnel, et leurs équations en coordonnées polaires (r étant le rayon vecteur mené du centre à un point de la surface, α , β , γ les cosinus des angles qu'il forme avec les axes d'élasticité, et a , b , c les vitesses principales) :

Surfaces à une nappe.

1° L'*ellipsoïde direct*; FRESNEL, *Œuvres*, II, 331, défini au § 213 :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2};$$

tations et les vitesses des deux vibrations transmissibles sans altération dans les différentes directions du cristal sont déterminées par la règle suivante.

Tout cristal non énantiomorphe se comporte, vis-à-vis d'une lumière de période déterminée, comme s'il était symétrique par rapport à trois axes rectangulaires, que l'on appelle les *axes*

r est égal à la vitesse du rayon dont le plan de polarisation est perpendiculaire à la direction α, β, γ .

2° L'ovaloïde :

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2};$$

r est l'inverse de la vitesse du rayon polarisé perpendiculairement à α, β, γ .

3° La surface d'élasticité à une nappe; FRESNEL, *Œuvres*, II, 350; — F.-E. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1832, XXV, 444.

$$r^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2;$$

r est égal à la vitesse normale de l'onde plane polarisée perpendiculairement à α, β, γ .

4° L'ellipsoïde inverse; MAC CULLAGH, *Trans. Irish Acad.* 1830, XVI, 65; — PLÜCKER, *J. de Crelle*, 1839, XIX, 10; correspondant à l'ellipsoïde de polarisation de Cauchy, et défini au § 214.

$$\frac{1}{r^2} = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2;$$

r est l'inverse de la vitesse de l'onde plane polarisée perpendiculairement à α, β, γ .

Surfaces à deux nappes.

Chacune des surfaces à deux nappes se déduit de la surface à une nappe correspondante en portant sur le rayon vecteur des longueurs égales aux demi-diamètres principaux de la section faite dans la surface à une nappe par un plan perpendiculaire au rayon vecteur.

1° La surface de l'onde de FRESNEL, *Œuvres*, II, 386 (Strahlenfläche). Du 4^me degré, déduite de 1 :

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2\beta^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{r^2 - c^2} = 0;$$

r est égal à la vitesse du rayon de direction α, β, γ .

2° La surface du 6^me degré, déduite de 2 :

$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2r^2 - 1} + \frac{b^2\beta^2}{b^2r^2 - 1} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2r^2 - 1} = 0;$$

r est l'inverse de la vitesse du rayon lumineux de direction α, β, γ .

3° La surface d'élasticité à deux nappes ou surface des vitesses normales.

d'élasticité optique. Sur ces axes d'élasticité pris comme axes principaux, on peut construire un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde direct*, dont l'équation s'écrira

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Suivant une droite quelconque passant par son centre, peuvent se propager deux rayons, dont les plans de polarisation sont normaux aux axes de la section elliptique faite dans l'ellipsoïde par un plan diamétral perpendiculaire à la droite considérée, et dont les vitesses sont égales à ces mêmes axes.

Si l'on porte sur le rayon des longueurs égales aux deux vitesses qui lui correspondent, et si l'on répète cette construction pour tous les rayons possibles, le lieu des points ainsi déterminés est une surface à deux nappes, dont tous les points sont atteints en une unité de temps par un ébranlement parti du centre. Cette surface est donc la surface de l'onde. Les paramètres a , b et c sont appelés les *vitesse principales*.

NEUMANN, *loc. cit.*; — SENARMONT, *J. de l'École Polytechnique*, 1853, XXXV. — Du 6^{me} degré, déduite de 3 :

$$\frac{\alpha^2}{r^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{r^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{r^2 - c^2} = 0;$$

r est égal à la vitesse de l'onde plane qui lui est perpendiculaire.

4° La surface d'onde réciproque, *surface of wave slowness, surfaces des indices* HAMILTON, *Trans. Irish Acad.* 1837, XVII, 131; — MAC CULLAGH, *ibid.*, 252; — PLÜCKER, *J. de Crelle*, 1839, XIX. Du 4^{me} degré déduite de 4 :

$$\frac{\alpha^2}{a^2 r^2 - 1} + \frac{\beta^2}{b^2 r^2 - 1} + \frac{\gamma^2}{c^2 r^2 - 1} = 0;$$

r est égal à l'inverse de la vitesse de l'onde plane qui lui est perpendiculaire.

Les surfaces à deux nappes présentent toutes quatre points ombilicux situés sur les rayons vecteurs perpendiculaires aux sections circulaires des surfaces correspondantes à une nappe.

Voyez Ch. GALOPIN, *Sur l'équation de la surface d'onde lumineuse dans les cristaux biréfringents*, Thèse, Paris, 1858.

214. Lois des ondes planes. Ellipsoïde inverse. — Ainsi que nous l'avons observé au § 205, on doit distinguer dans un cristal biréfringent les vitesses de propagation des ondes planes, estimées suivant leurs normales, et les vitesses des rayons lumineux. Dans le paragraphe qui précède, nous avons considéré les rayons; l'étude de la propagation des ondes planes conduit à des théorèmes analogues.

Si l'on construit sur les axes d'élasticité un ellipsoïde dont les axes principaux soient les inverses $1/a$, $1/b$, $1/c$ des vitesses principales, son équation sera

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

Cet ellipsoïde est appelé *ellipsoïde inverse*. Dans une direction quelconque peuvent se propager deux ondes planes perpendiculaires à cette direction, dont les plans de polarisation sont normaux aux axes de la section elliptique faite dans cet ellipsoïde par un plan diamétral parallèle aux ondes planes, et dont les vitesses sont en raison inverse de ces mêmes axes.

Si l'on porte sur chaque rayon vecteur les vitesses ainsi déterminées des ondes planes qui lui sont perpendiculaires, on construit une surface analogue à la surface de l'onde, mais plus compliquée, que l'on appelle surface d'élasticité à deux nappes ou *surface des vitesses normales*. On peut se servir de cette surface tout aussi bien que de la surface de l'onde pour l'étude de la double réfraction; mais cela nous paraît moins naturel et en général moins simple.

CHAPITRE XV

DE LA RÉFRACTION SIMPLE

215. Surface de l'onde. — L'observation montre que *les cristaux non énantiomorphes du système cubique se comportent exactement comme des corps isotropes en ce qui concerne leurs propriétés optiques*; nous n'avons donc pas à distinguer les deux cas¹.

Or, dans un milieu isotrope, il est clair qu'une vibration transversale de période déterminée se propagera avec la même vitesse dans toutes les directions et quelle que soit l'orientation et la nature de sa trajectoire. La surface de l'onde est donc une sphère, et est la même pour toutes les vibrations de même période.

216. Application de la construction d'Huygens. — Nous supposons qu'un rayon quelconque SI, cheminant d'abord dans le vide ou, ce qui ne fait pas grande différence, dans l'air,

¹ L'absence de double réfraction dans les cristaux du système cubique (« toutes les pierres transparentes dont les angles sont droits ») a été découverte par DUFAY, *Mém. de l'Acad.* 1739, 81, et ce fait a été précisé par HAÛY, *Traité de Minéralogie*, 1822, I, 173.

tombe sur une face plane MM taillée dans un corps isotrope (fig. 361).

Nous devons d'abord tracer autour de I la surface d'onde du milieu extérieur ; c'est une sphère de rayon V , en appelant V la vitesse de la lumière dans le vide ou dans l'air. Cette sphère coupe orthogonalement le plan de la figure suivant un cercle A , quelle que soit la position du plan réfringent MM . L'onde plane incidente étant comme toujours supposée perpendiculaire au plan de la figure, le rayon incident qui lui est normal est compris

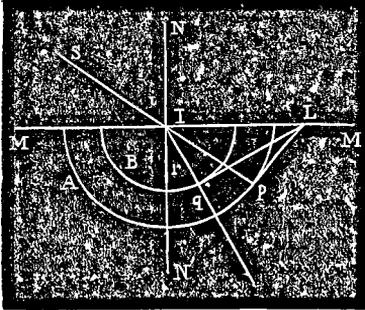


Fig. 361.

dans ce plan, qui est par suite le plan d'incidence. Il en est de même du point P où son prolongement coupe la sphère. Par le point P nous menons le plan tangent PL , qui coupe MM suivant une droite L ; celle-ci est, comme toujours, perpendiculaire au plan de la figure. Cette partie du dessin est la même quel que soit le milieu réfringent, et ne dépend que du milieu extérieur et du rayon incident. Nous l'énonçons donc une fois pour toutes.

217. Nous devons ensuite décrire autour du point I la surface d'onde du milieu réfringent. Dans le cas actuel, c'est une sphère de rayon V' , V' étant la vitesse constante de propagation dans ce milieu. Cette sphère coupe orthogonalement le plan de la figure suivant un cercle B .

Par la droite L nous menons un plan tangent à cette sphère. Le point de contact Q est évidemment dans le plan de la figure : *Le rayon réfracté IQ reste donc toujours dans le plan d'incidence.*

Quant à la direction de ce rayon, le triangle IPL, rectangle en P, puisque A est un cercle, donne

$$IP = IL \cos LIP$$

ou, IN' étant la normale à la surface

$$IP = IL \sin PIN' = IL \sin i.$$

Le triangle IQL, rectangle en Q, puisque B est un cercle, donne de même

$$IQ = IL \cos LIQ = IL \sin QIN' = IL \sin r;$$

IP étant le rayon du cercle A est égal à V, et IQ étant le rayon du cercle B est égal à V' : on a donc, en éliminant IL,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n.$$

Les vitesses V et V' étant constantes quelle que soit l'incidence, le rapport *n* des sinus des angles d'incidence et de réfraction est constant. On donne à ce rapport le nom d'*indice de réfraction*¹.

Dans tous les solides connus, le rayon réfracté est rapproché de la normale, *n* est plus grand que l'unité, et par conséquent la vitesse V' est plus petite que la vitesse V dans le vide. L'indice de réfraction a une valeur déterminée pour chaque corps, et suffit à en caractériser les propriétés optiques pour l'espèce de lumière employée.

218. Dispersion. — Des observations astronomiques ont permis de conclure que la vitesse de la lumière dans le vide est la même pour toutes les couleurs, c'est-à-dire quelle que soit la période de la vibration. Dans l'air, il en est à peu près de même

¹ La loi de la réfraction simple paraît avoir été découverte par SNELLIUS vers 1620, et a été mise sous sa forme actuelle par DESCARTES, *Dioptrique*, Leyde 1637.

et, en faisant la construction d'Huygens pour des rayons de couleurs différentes, nous pouvons, sans erreur sensible, garder la même valeur de V . Mais, dans les corps solides, la vitesse diminue en général, d'une manière sinon rapide au moins très appréciable, lorsque la durée d'oscillation de la lumière employée diminue, c'est-à-dire lorsqu'on passe du rouge au violet. L'indice $n = V/V'$ augmente donc, et les rayons violets sont plus réfractés que les rayons rouges. La lumière blanche, formée, comme on le sait, de la superposition d'une infinité de radiations¹ dont les longueurs d'ondes décroissent graduellement par degrés insensibles du rouge au violet, se décomposera, à son entrée dans le milieu réfringent, en une infinité de rayons de plus en plus déviés. C'est le phénomène de la *dispersion*.

219. Remarque générale. — Si nous examinons les conséquences que nous avons tirées de la construction d'Huygens dans le cas des milieux isotropes, nous reconnaissons que le fait que le rayon réfracté reste dans le plan d'incidence résulte uniquement de ce que le point de contact Q , de la surface d'onde du milieu réfringent et du plan tangent mené par L , est compris lui-même dans le plan d'incidence. Cela a toujours lieu lorsque l'onde B est une sphère; mais il est clair qu'il en sera de même toutes les fois que l'onde B coupera orthogonalement le plan d'incidence, et en particulier toutes les fois que l'onde B sera convexe, continue, et symétrique par rapport au plan d'incidence.

Cette condition étant remplie, la constance du rapport des sinus : $\sin i/\sin r = n = V/V'$, provient uniquement de ce que les triangles IPL , IQL sont rectangles en P et Q , et de ce que V et V' ne varient pas avec l'incidence; en d'autres termes, la loi

¹ NEWTON, *Optics*, Londres, 1704.

des sinus sera toujours vérifiée quand la surface de l'onde **B** du milieu réfringent considéré coupera le plan d'incidence suivant un cercle.

Ces deux remarques nous seront utiles pour l'étude des cristaux qui n'appartiennent pas au système cubique.



CHAPITRE XVI

DE LA DOUBLE RÉFRACTION A UN AXE OPTIQUE

220. Définitions. — Les cristaux appartenant au système quadratique et au système hexagonal ont les mêmes propriétés optiques et peuvent être réunis dans un même exposé ¹.

Nous appellerons *axe optique*, ou simplement *axe*, la direction parallèle aux arêtes verticales du prisme primitif, c'est-à-dire la direction de l'axe quaternaire dans le système quadratique, de l'axe sénaire dans le système hexagonal.

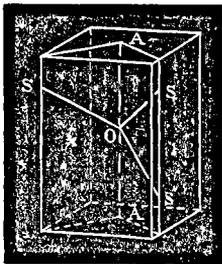


Fig. 362.

Nous appellerons *section principale* tout plan mené dans le cristal parallèlement à l'axe optique. Ainsi, pour un rayon SO (fig. 362), la section principale est le plan AOS mené par ce rayon et par une parallèle OA à l'axe principal. Pour un rayon S'O la section principale est le plan S'OA, etc.

¹ La double réfraction a été découverte dans le spath d'Islande par Érasme BARTHOLIN, *Experimenta cristalli Islandici*, Amsterdam 1670; — BREWSTER a reconnu qu'elle existe avec les mêmes caractères dans les cristaux quadratiques et hexagonaux, *Phil. Trans.* 1818, 199.

221. Faits généraux. — *Les directions telles que SO, S'O, S''O qui forment avec l'axe des angles égaux ou supplémentaires sont optiquement équivalentes et se comportent de la même manière, quel que soit l'azimut de leurs sections principales. Mais les phénomènes sont différents pour des rayons inégalement inclinés.*

Suivant une direction SO quelconque, le cristal peut transmettre seulement deux espèces de vibrations rectilignes. Les unes s'effectuent perpendiculairement au rayon SO et à la section principale SOA; les autres sont parallèles à la section principale et à peu près perpendiculaires au rayon¹.

Ces deux vibrations, dont les directions correspondent en général à des structures différentes dans le cristal, se propagent avec des vitesses différentes. Cependant, lorsque le rayon SO est parallèle à l'axe, elles deviennent toutes deux perpendiculaires à l'axe et se trouvent dans les mêmes conditions : la différence de leurs vitesses est alors nulle. A

mesure que l'angle SOA augmente (fig. 363), la différence des vitesses augmente aussi et devient maximum lorsque $SOA = 90^\circ$.

Par suite, la surface de l'onde est formée de deux nappes correspondant chacune à l'une de ces deux espèces de vibrations, et celles-ci, à leur entrée dans le cristal, ne sont pas

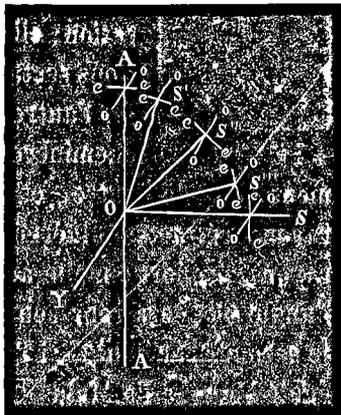


Fig. 363.

¹ Dans tous les cristaux connus, le rayon lumineux ne forme jamais qu'un angle assez petit avec la normale à l'onde plane correspondante. Des vibrations parallèles ou à peu près parallèles à l'onde plane (§ 207) sont donc à peu près normales au rayon.

réfractées de la même manière, puisque les lois de la réfraction dépendent de la forme de la surface de l'onde.

222. Soient AA la trace de la section principale (fig. 364), *oo* et *ee* les deux vibrations qui peuvent se propager dans une direction perpendiculaire au plan de la figure. Une vibration

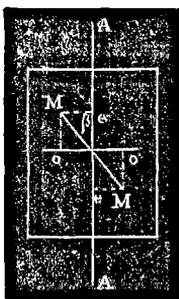


Fig. 364.

incidente rectiligne parallèle à *oo* ou à *ee* passera sans altération, tout en se réfractant différemment dans les deux cas. Mais si la vibration incidente MM forme un angle β avec la section principale, elle ne pourra se propager sans altération; elle devra se décomposer en deux vibrations rectangulaires, l'une $MM \cos \beta$ parallèle à *ee*, l'autre $MM \sin \beta$ parallèle à *oo*, lesquelles chemineront alors dans le cristal indépendamment l'une de l'autre, et donneront lieu généralement à deux rayons réfractés différents. L'intensité relative de ces deux rayons, proportionnelle au carré de l'amplitude, dépendra de l'angle β et sera représentée pour le premier par $\cos^2 \beta$, et pour le second par $\sin^2 \beta$, si l'intensité du rayon incident est prise égale à un (loi de Malus)¹.

Si le rayon incident est polarisé elliptiquement ou circulairement, ou s'il est formé de lumière naturelle, il se décomposera de même en deux rayons polarisés rectilignement, vibrant suivant *oo* et *ee*. Dans le cas de la lumière naturelle ou de la polarisation circulaire, ces deux rayons auront même intensité. Dans le cas de la polarisation elliptique, leurs intensités relatives dépendront de la forme des ellipses et de leur orientation par rapport à la section principale du cristal.

En résumé, et d'une manière générale, lorsqu'un rayon de

¹ MALUS, *Mém. Sav. Étrang.* 1811, II, 413. — Voyez sur le degré d'exactitude de cette loi: H. WILD, *Pogg. Ann.* 1863, CXVIII, 222.

lumière tombe sur un cristal à un axe, il se décompose en deux rayons polarisés rectilignement et réfractés suivant des lois différentes. Les vibrations s'effectuent perpendiculairement à la section principale pour l'un de ces rayons, parallèlement à la section principale pour l'autre. Lorsque les deux rayons suivent des chemins différents, il peut arriver que la section principale ne soit pas la même pour tous deux et que, par suite, les deux vibrations réfractées ne soient pas exactement à angle droit¹. Dans tous les corps connus, cet effet est faible et on peut admettre sans grande erreur que les deux rayons sont polarisés dans des plans rectangulaires.

223. Surface de l'onde. — Nous examinerons maintenant de plus près les lois qui régissent les deux rayons réfractés et la forme de la surface de l'onde.

L'un des rayons, polarisé dans la section principale, nous admettrons avec Fresnel que c'est celui qui est formé des vibrations oo perpendiculaires à la section principale, se réfracte toujours comme si le cristal était un corps isotrope; il reste toujours dans le plan d'incidence, et son indice de réfraction est constant. On l'appelle pour cela le rayon ordinaire.

L'autre rayon, polarisé perpendiculairement à la section principale, et formé des vibrations ee parallèles à la section principale, porte le nom de rayon extraordinaire et suit des lois plus complexes: sauf pour certaines positions particulières du plan d'incidence par rapport au cristal, le rayon réfracté extraordinaire n'est pas contenu dans le plan d'incidence et le rapport $\sin i/\sin r$ qui lui correspond n'est pas constant.

Les phénomènes observés s'expliquent en admettant que la surface de l'onde se compose de deux nappes concentriques, une sphère O pour le rayon ordinaire, et un ellipsoïde E, de révolu-

¹ SCHRAUF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1885, XI, 5.

tion autour de l'axe principal, pour le rayon extraordinaire (fig. 365 et 366)¹. Si le rayon extraordinaire est celui qui se propage le plus vite, l'ellipsoïde est aplati suivant son axe de révolution, et extérieur à la sphère. Si c'est le rayon ordinaire qui a la plus grande vitesse, l'ellipsoïde est allongé et intérieur

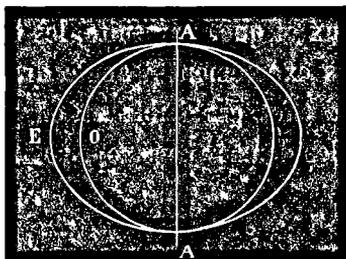


Fig. 365.

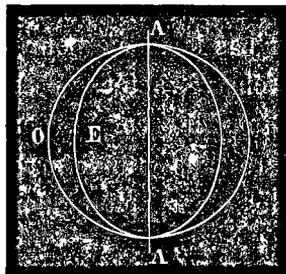


Fig. 366.

à la sphère. Le cristal est dit *néгатif* dans le premier cas et *positif* dans le second. Dans les deux cas, l'ellipsoïde et la sphère coupent l'axe principal aux mêmes points : puisque les deux vibrations se propagent avec la même vitesse suivant l'axe, les deux nappes de la surface de l'onde doivent avoir le même rayon vecteur dans cette direction.

La surface de l'onde est ainsi complètement déterminée si l'on connaît les deux demi-diamètres principaux de sa nappe ellipsoïdale, dirigés, l'un V_e perpendiculairement à l'axe cristallographique, et l'autre V_o parallèlement à l'axe. V_o et V_e sont les *vitesses principales*.

L'ellipsoïde direct et l'ellipsoïde inverse (§ 213 et 214) sont de révolution autour de l'axe optique, leurs demi-diamètres respectifs sont V_e et $1/V_e$ suivant l'axe, V_o et $1/V_o$ perpendiculairement à l'axe.

¹ HUYGENS, *Traité de la lumière*, Leyde 1690, chap. V. Les lois de Huygens, oubliées jusqu'au commencement de ce siècle, ont été rappelées par WOLLASTON, *Phil. Trans.* 1802, 381; et MALUS, *Mém. Sav. Étrang.* 1811, II, 303. — La distinction des cristaux positifs et négatifs est due à BIOT, *Mém. de l'Institut*, 1812, XIII, 30; 1814, XIV, 222, 228.

224. Application de la construction d'Huygens. — Le milieu extérieur étant supposé isotrope, l'air ou le vide par exemple, la droite L (fig. 367) s'obtiendra exactement comme au § 216.

Nous devons ensuite décrire autour du point I la sphère O , surface d'onde du cristal pour le rayon ordinaire, nous lui mènerons le plan tangent LQ_o et nous obtiendrons le rayon réfracté ordinaire IQ_oR_o . La construction de cette nappe

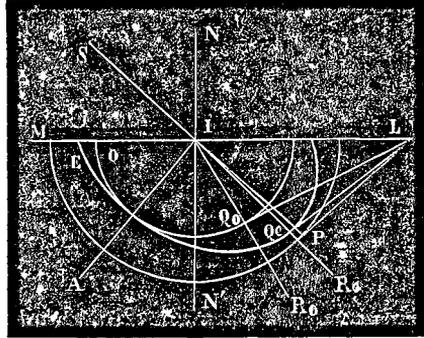


Fig. 367.

sphérique est exactement la même que si le cristal était isotrope, et conduit naturellement aux mêmes lois.

Puis nous construirons autour de I l'ellipsoïde E , surface d'onde du rayon extraordinaire, nous lui mènerons le plan tangent LQ_e et nous obtiendrons le rayon réfracté extraordinaire IQ_eR_e . La position de l'ellipsoïde par rapport au plan de la figure et par rapport à la normale NN' dépend de l'orientation de la face réfringente et du plan d'incidence par rapport au cristal. En général, le point de contact Q_e , et par conséquent le rayon IQ_e , ne sont pas dans le plan de la figure. Le rayon extraordinaire ne reste pas dans le plan d'incidence. On voit de plus que, même si Q_e est dans le plan de la figure, l'intersection de l'ellipsoïde par ce plan n'est généralement pas circulaire et qu'il n'y a pas d'indice de réfraction constant.

225. Cas particuliers. — Pour que le rayon extraordinaire reste dans le plan d'incidence, il faut (§ 219) que ce plan soit un plan de symétrie de la nappe ellipsoïdale de la surface de l'onde. Or, l'ellipsoïde de révolution est symétrique (fig. 368)

par rapport à un plan quelconque contenant l'axe de révolution AA , et par rapport au plan équatorial BB perpendiculaire à l'axe.

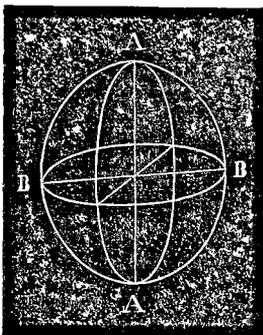


Fig. 368.

Le rayon extraordinaire restera donc dans le plan d'incidence si celui-ci est parallèle ou perpendiculaire à l'axe optique. Ces deux cas sont représentés par les figures ci-dessous. Dans la fig. 369 un cristal quadratique reçoit un rayon lumineux SI sur une face placée d'une manière quelconque par rapport à l'axe principal AA ; le plan d'incidence SIN , dont la trace sur cette face est MM , est parallèle à l'axe. Dans la figure 370, le rayon

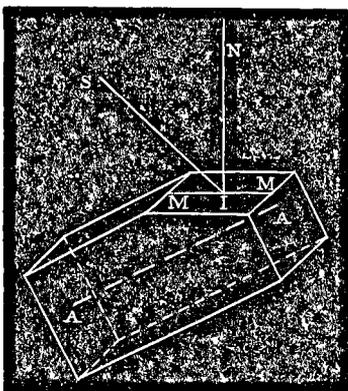


Fig. 369.

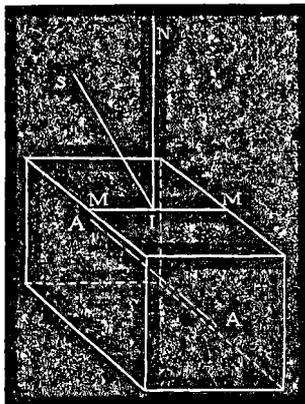


Fig. 370.

SI tombe sur une face parallèle à l'axe et le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe. Dans les deux cas, le problème peut être résolu par une construction plane.

226. Cas où le plan d'incidence est parallèle à l'axe.

— Soit IA la direction de l'axe (fig. 371). La sphère coupe le plan de la figure suivant un cercle O , et l'ellipsoïde suivant l'ellipse E . Le cercle et l'ellipse coupent l'axe au point a . Le point

de contact Q_e est sur cette ellipse, dans le plan de la figure, et le rayon extraordinaire IQ_e reste dans le plan d'incidence. Mais la courbe E n'étant pas un cercle, le rapport $\sin i/\sin r$ varie avec l'angle d'incidence. Les deux rayons sont plus ou moins séparés dans un sens ou dans l'autre, suivant que le cristal est positif ou négatif, et suivant que l'axe IA et le rayon incident SI sont plus ou moins inclinés sur la normale NN' au plan réfringent. Nous pouvons examiner quelques cas particuliers.

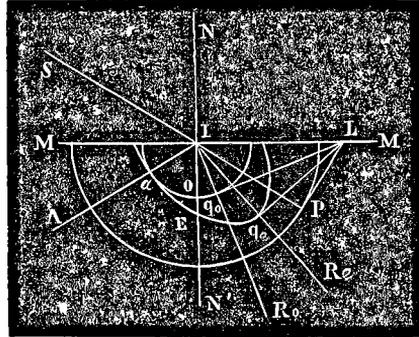


Fig. 371.

1° Le rayon incident tombe normalement sur la face réfringente (fig. 372). Le plan tangent PL à la sphère, surface d'onde du milieu extérieur, est parallèle à la face réfringente et la droite L est rejetée à l'infini. Les plans tangents LQ_o, LQ_e sont également horizontaux. Le point de contact Q_o de la sphère ordinaire est sur la normale SI au plan réfringent, le rayon ordinaire n'est pas dévié. Mais le point de contact Q_e de l'ellipsoïde a une position quelconque sur l'ellipse E . Le rayon extraordinaire est dévié, mais reste dans la section principale du cristal.

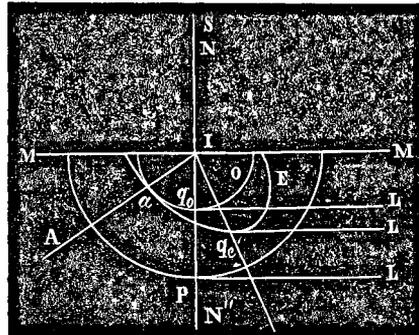


Fig. 372.

2° Le rayon incident étant normal à la surface réfringente, l'axe du cristal est parallèle à cette surface. Dans ce cas, le point Q_e est, comme le point Q_o , sur le prolongement du rayon incident.

Les deux rayons ne sont pas déviés, mais ils cheminent avec des vitesses différentes IQ_o et IQ_e dans la même direction.

3° L'axe ayant une direction quelconque dans le plan d'incidence, le rayon incident est tel, que le rayon ordinaire se propage parallèlement à l'axe (fig. 373). Le plan tangent, mené par L à la sphère O du rayon ordinaire, la touche en Q, au point où

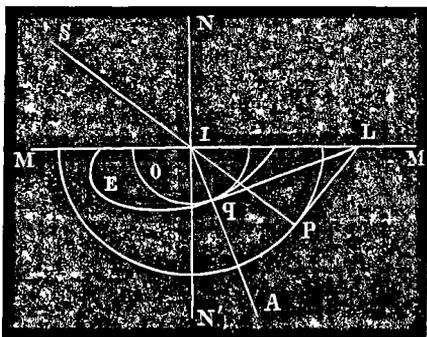


Fig. 373.

cette sphère est rencontrée par l'axe IA. Mais, en ce point, l'ellipsoïde E est tangent à la sphère, et par conséquent aussi au plan LQ. Il en résulte que le rayon extraordinaire suit, comme le rayon ordinaire, la direction IQ de l'axe optique. Il n'y a plus, dans ce

cas, qu'une seule onde plane réfractée LQ et qu'un seul rayon réfracté IQ, sur lequel des vibrations quelconques se propagent avec une même vitesse. *Dans la direction de l'axe, le cristal n'est pas biréfringent et se comporte comme un corps isotrope.*

227. Cas où le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe. — La nappe ellipsoïdale comme la nappe sphérique de la surface de l'onde coupent le plan de la figure suivant des cercles E et O, de rayons V_e et V_o (fig. 374). V_o est la vitesse constante dans toutes les directions du rayon ordinaire, V_e est le rayon équatorial de l'ellipsoïde extraordinaire, ou la vitesse du rayon extraordinaire lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe optique. V_o est plus grand ou plus petit que V_e suivant que le cristal est positif ou négatif. Le point Q_o et le point Q_e sont sur les cercles O et E; les deux rayons restent dans le plan d'incidence et on a de plus (§ 219)

$$\frac{\sin i}{\sin r_o} = \frac{V}{V_o} = n_o \quad \text{et} \quad \frac{\sin i}{\sin r_e} = \frac{V}{V_e} = n_e.$$

Les rapports n_o et n_e ne varient pas avec i tant que le plan d'incidence reste le même. On a donc, dans ce cas, un indice de réfraction constant pour chacun des deux rayons; n_o est l'indice

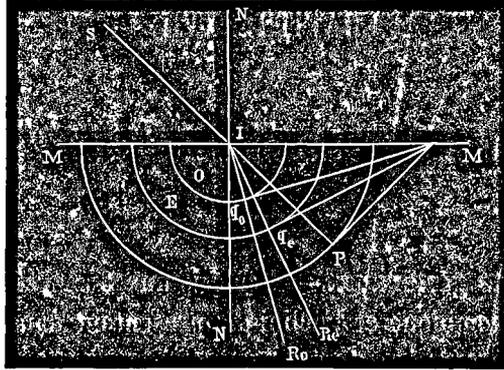


Fig. 374.

ordinaire et n_e l'indice extraordinaire. Ces deux constantes déterminent complètement la forme et les dimensions de la surface de l'onde du cristal pour la lumière employée.

228. Dispersion. — Comme dans les corps isotropes, les indices de réfraction ne sont pas les mêmes pour les rayons des diverses couleurs. Ils vont en croissant dans les cristaux transparents à mesure que l'on considère des vibrations de périodes plus courtes. Le plus souvent, la différence des indices principaux va aussi en croissant, de sorte que la surface de l'onde change en même temps de dimensions et de forme.

CHAPITRE XVII

DE LA DOUBLE RÉFRACTION A DEUX AXES OPTIQUES

229. Faits généraux. — Les cristaux des systèmes rhombique, clinorhombique et triclinique présentent dans leurs propriétés optiques des analogies très grandes, qui permettent de les réunir en un même groupe, sous le nom de *cristaux à deux axes optiques*, en même temps que des différences très nettes qui jouent un rôle considérable dans la pratique de la Cristallographie¹.

L'analogie résulte de ce que la forme générale de la surface de l'onde relative à une lumière de période déterminée est la même pour tous ces cristaux. La différence consiste en ce que l'orientation de cette surface est soumise à des lois différentes, et varie différemment avec la longueur d'onde de la lumière employée, suivant la symétrie du cristal que l'on considère.

Le caractère fondamental, comme dans les cristaux à un axe, c'est que le milieu étant différemment constitué dans les différentes directions, la vitesse de propagation d'un rayon lumineux

¹ La double réfraction à deux axes a été découverte par Biot dans le mica, *Mém. de l'Institut*, 1812, XIII, 315; *Traité de Physique* 1816, III, 350.

Son existence dans les cristaux des trois derniers systèmes a été prouvée par BREWSTER, *Phil. Trans.* 1818, 199.

dépend non seulement de la direction de ce rayon, mais encore de sa polarisation. Comme nous l'avons dit au § 213, le cristal peut transmettre dans chaque direction deux vibrations polarisées rectilignement à angle droit, et cheminant avec des vitesses différentes. Seulement l'orientation de ces vibrations et la loi de leurs vitesses ne sont pas déterminées aussi simplement que dans les cristaux quadratiques et hexagonaux.

230. La surface de l'onde ¹. — La surface de l'onde d'un cristal à deux axes, pour une lumière homogène quelconque, est, on peut le prévoir d'après ce qui précède, formée de deux nappes concentriques, l'extérieure se rapportant à la vibration qui chemine le plus vite, l'intérieure à celle qui chemine le plus lentement.

Cette surface est symétrique par rapport à trois plans perpendiculaires entre eux, les *plans principaux*, ou sections principales du cristal. Les intersections de ces plans, les axes d'élasticité, sont donc trois axes de symétrie binaire de la surface. La surface de l'onde est placée par rapport aux trois plans principaux et aux trois axes d'élasticité, comme un ellipsoïde à trois axes inégaux l'est par rapport à ses sections principales et à ses axes principaux.

Si l'on prend les trois axes d'élasticité comme axes de coordonnées, l'équation de la surface de l'onde est

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

a , b , c sont les vitesses principales (§ 213), paramètres constants pour chaque cristal et pour chaque espèce de lumière. Nous supposons $a > b > c$.

¹ FRESNEL a reconnu le premier qu'il n'y a pas de rayon ordinaire dans les cristaux à deux axes, et a découvert la forme de la surface de l'onde, *Mémoire sur la double réfraction* (1821), *Œuvres*, II, 309, 386.

La discussion de cette équation conduit à la forme générale que nous allons décrire. L'ensemble des deux nappes, extérieure et intérieure, de la surface, coupe chacun des plans principaux suivant un cercle et une ellipse. La figure 375 représente le huitième de la surface qui est compris entre les parties positives des axes.

Sur le plan YOZ, le cercle EF est à l'extérieur et a un rayon égal à a ; l'ellipse BC est à l'intérieur, ses axes principaux sont $OC = b$ et $OB = c$.

Sur le plan XOY, le cercle BA est à l'intérieur et a un rayon égal à c ; l'ellipse ED est en dehors, ses axes sont $OE = a$ et $OD = b$.

Sur le plan XOZ, l'intersection est encore formée d'un cercle CD de rayon b et d'une ellipse AF d'axes $OF = a$, $OA = c$,

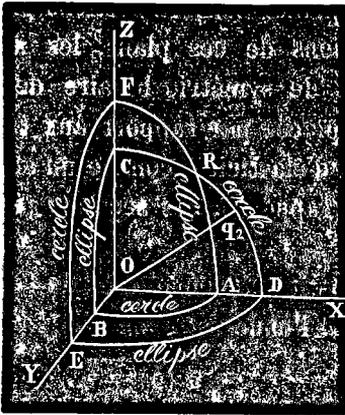


Fig. 375.

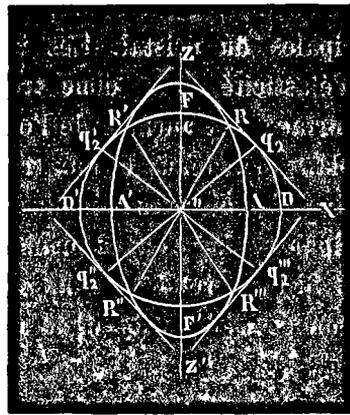


Fig. 376.

mais ces deux courbes se coupent en R. Les parties FR de l'ellipse et RD du cercle appartiennent à la nappe extérieure; les parties CR du cercle et RA de l'ellipse à la nappe intérieure.

L'intersection complète de la surface par le plan XOZ a donc la forme représentée par la figure 376. Il y a dans ce plan

quatre points singuliers R , R' , R'' , R''' , qui sont communs aux deux nappes de la surface, lesquelles d'ailleurs ne se touchent en aucun autre point.

L'axe OX , perpendiculaire au cercle dont le rayon a représente la plus grande vitesse de propagation, porte le nom d'axe de plus grande élasticité; l'axe OY , perpendiculaire au cercle de rayon b , est l'axe de moyenne élasticité; et l'axe OZ , perpendiculaire au cercle de rayon c , est l'axe de plus petite élasticité.

231. On se représentera facilement la forme générale de la surface de l'onde en supposant la figure 375 répétée symétriquement dans chacun des huit quadrants limités par les axes

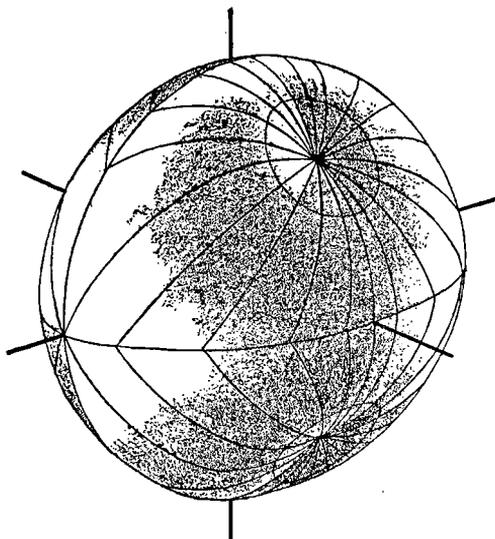


Fig. 377.

d'élasticité. La nappe extérieure peut être figurée par une sorte de coussin (fig. 377) circulaire suivant EF , aplati dans la direction perpendiculaire OX et présentant quatre points ombilicaux

rentrants, aux extrémités de deux diamètres contenus dans le plan XOZ. La nappe intérieure peut être figurée par un sac à section circulaire AB, allongé dans la direction perpendiculaire OZ et présentant des points saillants à ses quatre coins (fig. 378).

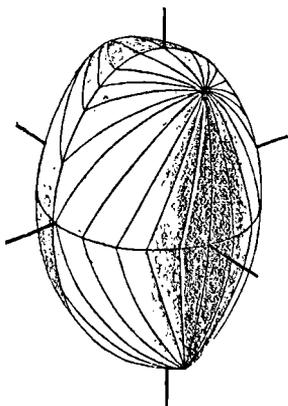


Fig. 378.

On doit ensuite se figurer la nappe intérieure placée dans la nappe extérieure de façon que les points saillants de la première viennent se raccorder avec les points rentrants de la seconde.

Enfin (fig. 376 et 377), si nous considérons un plan tangent à la nappe extérieure, qui touche à la fois l'ellipse AF et le cercle CD, ce plan n'aura pas seulement ces deux points de contact avec la surface, mais lui sera tangent tout le long d'une circonférence de cercle décrite autour du point R. Il y a donc quatre plans tangents singuliers, chacun dans le voisinage d'un ombilic, qui ont avec la surface une infinité de points de contact.

232. Application de la construction d'Huygens. — La surface de l'onde ayant deux nappes, *un rayon incident quelconque se décompose généralement en deux rayons réfractés polarisés rectilignement à angle droit ou à peu près à angle droit, et obéissant à des lois distinctes.*

Aucune des deux nappes n'étant sphérique, *aucun des deux rayons ne suit en général les lois de la réfraction simple.* Il n'y a pas de rayon ordinaire comme dans les cristaux à un axe.

La surface est symétrique par rapport à ses trois plans principaux, il en sera de même naturellement de tous les phéno-

mènes de réfraction. De plus, il résulte de la remarque faite au § 219 que, dans le cas où le plan d'incidence coïncide avec l'un des trois plans principaux, les deux rayons réfractés restent dans le plan d'incidence.

Dans ce cas, l'intersection de la surface d'onde et du plan d'incidence se compose d'un cercle et d'une ellipse : le rayon qui correspond à l'intersection circulaire et dont la vitesse a une même valeur constante V' dans les différentes directions contenues dans le plan d'incidence, possède alors un indice de réfraction constant $\sin i / \sin r = V/V' = n_{v'}$. L'autre rayon, celui qui correspond à la section elliptique, reste aussi dans le plan d'incidence, mais n'a pas un indice de réfraction constant. V' est égal à a , b , ou c , et $n_{v'}$ devient

$$n_a = \frac{V}{a}; \quad n_b = \frac{V}{b}; \quad n_c = \frac{V}{c},$$

suivant que le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe de plus grande, de moyenne ou de plus petite élasticité. n_a , n_b , n_c sont les trois indices principaux du cristal pour la lumière employée et suffisent, puisque V , la vitesse dans le milieu extérieur, est toujours supposée connue, à déterminer la forme de la surface de l'onde et ses dimensions.

233. Réfraction conique intérieure ¹. — Un cas particulier très remarquable peut se présenter lorsque le plan d'incidence coïncide avec la section principale XOZ. Le cercle et l'ellipse se coupent alors en un point R. Construisons comme habituellement la droite L; nous pourrons en général mener par cette droite un plan tangent distinct à chacune des deux nappes,

¹ HAMILTON, *Trans. Irish Acad.* 1837, XVII, 134, a découvert théoriquement ces phénomènes, qui donnent une confirmation très remarquable de la théorie de Fresnel. — LLOYD, *ibid.* 145, est parvenu à les produire expérimentalement.

et déterminer ainsi deux rayons réfractés. Mais, pour une valeur convenable de l'angle d'incidence, la droite L peut avoir une position telle que les deux plans tangents se confondent en un

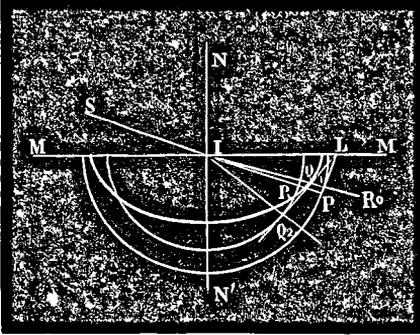


Fig. 379.

seul plan tangent singulier, touchant à la fois l'ellipse et le cercle aux points Q_1 et Q_2 (fig. 379), et en contact avec la surface, ainsi que nous l'avons dit au § 231, par tous les points d'un cercle perpendiculaire au plan de la figure, et de diamètre Q_1Q_2 . Comme à chaque point

de contact correspond un rayon réfracté, nous aurons alors non plus seulement deux rayons, mais bien une infinité de rayons disposés comme les génératrices d'un cône ayant son sommet en I et ce cercle pour base. Chacun de ces rayons est polarisé dans un plan différent. Si le cristal a la forme d'une lame à faces parallèles, tous ces rayons reprennent à leur sortie la direction du rayon incident. Q_1 est placé sur la section circulaire de la surface de l'onde; l'onde plane LQ_1Q_2 est donc perpendiculaire au rayon IQ_1 . IQ_1 est ainsi une direction suivant laquelle une onde plane peut se propager avec la même vitesse, quelle que soit sa polarisation, et porte le nom d'axe optique par analogie avec l'axe optique des cristaux à un axe, qui jouit de la même propriété¹. En se reportant à la figure 376, on voit qu'il y a deux axes optiques qui se coupent sous un angle Q_1OQ_2 , déterminé par la forme de la surface de l'onde ou par les valeurs des vitesses principales.

234. Réfraction conique extérieure. — Un phénomène

¹ F.-E. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1834, XXXIII, 257.

du même genre, mais un peu différent, se produit lorsqu'un rayon lumineux vient à sortir du cristal après l'avoir traversé dans la direction OR du rayon vecteur qui aboutit à l'un des points ombilicaux. Dans la construction d'Huygens, puisque le rayon sort du cristal, nous devons d'abord tracer la surface d'onde de celui-ci, à laquelle nous mènerons par le point (P de la construction générale, § 206), où elle est rencontrée par le rayon incident prolongé, le plan tangent qui détermine la droite L. Dans le cas particulier qui nous occupe, le rayon incident rencontre la surface au point ombilical. En ce point, la surface a une infinité de plans tangents, disposés autour du point R comme autour du sommet d'un cône. Chacun de ces plans donne une droite L distincte et un rayon réfracté. Le rayon incident se partage donc en sortant du cristal en une infinité de rayons réfractés formant un cône creux de sommet R. Chacun de ces rayons est d'ailleurs polarisé à sa manière. *Dans les directions IR le cristal peut transmettre des rayons polarisés d'une manière quelconque*, mais ces rayons se séparent à la sortie, ce qui empêche d'assimiler ces directions à l'axe optique des cristaux à un axe.

235. Signe des cristaux biaxes. — On voit aussi sur la figure 375 que si le rayon b du cercle CD diminue progressivement jusqu'à devenir égal à OA, les axes optiques OQ, se rapprochent de l'axe OX de plus grande élasticité, et finissent par se confondre avec lui. La surface se réduit alors à une sphère de rayon c enveloppée par un ellipsoïde d'axes a et c , de révolution autour de OX. Le cristal devient uniaxe et négatif. Par analogie on appelle encore *négatifs* les cristaux à deux axes chez lesquels la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques coïncide avec l'axe de plus grande élasticité.

Inversement, si le rayon b du cercle CD croît jusqu'à devenir

égal à OF, les deux axes optiques viennent se confondre avec l'axe OZ de plus petite élasticité, et l'on a un cristal à un axe positif, dont l'axe principal est OZ. On appelle également *positifs* les cristaux à deux axes chez lesquels la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques coïncide avec l'axe de plus petite élasticité.

La discussion de l'équation de la surface de l'onde montre que les cosinus des angles XOQ₁ et ZOQ₁ ont les valeurs

$$\cos XOQ_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{et} \quad \cos ZOQ_1 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

236. Polarisation des rayons. — Les plans de polarisation des différents rayons sont, comme nous l'avons dit § 213, normaux aux axes principaux des sections elliptiques faites dans l'ellipsoïde direct par des plans diamétraux perpendiculaires à ces rayons.

Il est généralement plus commode de recourir à l'une des règles suivantes, que l'on peut déduire du théorème ci-dessus, en considérant toujours (§ 210) les vibrations comme perpendiculaires au plan de polarisation.

1° La vibration qui se propage suivant un rayon vecteur quelconque de la surface de l'onde est parallèle à la projection du rayon sur le plan tangent à la surface de l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon.

2° Les deux vibrations qui peuvent se propager sur un rayon quelconque sont comprises dans les plans rectangulaires entre eux qui bissectent l'angle dièdre des plans menés par ce rayon et par les points ombilicaux R.

237. Dispersion. — Lorsqu'on passe d'une couleur à une autre, les trois vitesses principales se modifient, diminuant en général avec la longueur d'onde de la lumière employée. Il en

résulte un changement dans les dimensions et dans la forme de la surface de l'onde, et habituellement une variation de l'angle des axes optiques. Mais cet angle dépendant à la fois des trois vitesses principales, il peut arriver qu'il aille en augmentant ou en diminuant avec la réfrangibilité des vibrations considérées. En outre, les axes d'élasticité eux-mêmes peuvent changer de position, ce qui entraîne un déplacement de la surface de l'onde, indépendamment de son changement de forme.

238. Dispersion dans le système rhombique. — Le cristal possède trois plans de symétrie rectangulaires entre eux. Il faut nécessairement, quelle que soit la lumière dont on se sert, que les plans de symétrie de la surface de l'onde coïncident avec ceux du cristal. Les axes d'élasticité se confondent avec les trois axes de symétrie binaire. Les axes optiques sont toujours contenus dans l'un des plans de symétrie. En passant d'une radiation à une autre, l'angle des axes optiques variera, mais leur plan restera invariable ainsi que leur bissectrice. Il peut arriver cependant que les axes optiques ouverts pour le rouge dans un des plans de symétrie du cristal, se rapprochent de plus en plus à mesure que l'on prend une lumière plus réfrangible, arrivent à coïncider pour une certaine couleur, le vert par exemple, par rapport à laquelle le cristal se comporte comme un uniaxe, puis se séparent de nouveau pour les radiations bleues et violettes dans un plan perpendiculaire au premier.

239. Dispersion dans le système clinorhombique. — Le cristal ne possède qu'un plan de symétrie et un axe de symétrie binaire, lesquels devront forcément coïncider avec l'une des sections principales et avec l'axe d'élasticité qui lui est perpendiculaire. Les deux autres axes d'élasticité seront compris dans

le plan de symétrie du cristal, toujours rectangulaires entre eux, mais placés d'ailleurs d'une manière quelconque et variable avec la nature de la lumière, par rapport aux arêtes du cristal. Il peut se présenter deux cas principaux.

1° L'axe binaire du cristal peut coïncider avec l'axe de moyenne élasticité. Les axes optiques sont alors dans le plan de symétrie, mais sans que leur orientation et leur variation avec la réfrangibilité puissent être fixées *a priori*.

2° L'axe de moyenne élasticité peut se trouver dans le plan de symétrie; le plan des axes optiques est perpendiculaire au plan de symétrie, mais varie avec la couleur en même temps que l'angle des axes. Ceux-ci sont naturellement toujours également inclinés à droite et à gauche du plan de symétrie, la bissectrice aiguë étant parallèle ou perpendiculaire à celui-ci.

240. Dispersion dans le système triclinique. — Le cristal n'ayant plus ni axes ni plans de symétrie, la surface de l'onde aura une orientation quelconque. On ne pourra plus assigner de règle générale pour la position des axes optiques ni pour leur dispersion.

CHAPITRE XVIII

DE LA RÉFLEXION TOTALE

241. Introduction. — Nous avons considéré jusqu'ici le cas où la lumière passe de l'air ou du vide dans le cristal, c'est-à-dire où la vitesse du rayon incident est plus grande que celle du rayon réfracté. Quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence, la construction d'Huygens est toujours possible et permet de résoudre le problème pour chacune des nappes de la surface de l'onde. Il en est autrement si la vitesse dans le premier milieu est plus petite que dans le second. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque le rayon lumineux sort du cristal pour pénétrer dans l'air; ou encore, ce qui est plus important en pratique, lorsque le rayon incident se propage dans un liquide plus réfringent que le cristal qui y est immergé. C'est ce dernier cas que nous allons maintenant examiner ¹.

¹ Les lois géométriques de la réflexion totale à la surface d'un milieu homogène quelconque ont été étudiées par SENARMONT, *J. de Liouville*, 1856, I, 305; — F. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.* 1878, IV, 1; — KETTELER, *Wied. Ann.* 1883, XVIII, 653; 1886, XXVIII, 231, 520; — LIEBISCH, *N. Jahrb.* 1885, I, 246; II, 181; 1886, II, 47; — MALLARD, *J. de Phys.* 1886, V, 189; — Ch. SORET, *Archives des sc. phys. et nat.* 1885, XIV, 96; — PULFRICH, *N. Jahrb.* 1887, Beil. Bd. V, 167; — Ch. SORET, *Archives des sc. phys. et nat.* 1888, XX, 263; — B. HECHT, *N. Jahrb.* 1889, Beil. Bd. VI, 241. — On trouvera dans l'ouvrage de M. PULFRICH,

Nous appellerons comme précédemment V la vitesse de la lumière dans l'air; V'' est la vitesse dans le liquide réfringent, et V' la vitesse dans le cristal, variable avec la direction du rayon. L'indice de réfraction du liquide par rapport à l'air est

$$\mu = \frac{V}{V''}.$$

242. Application de la construction d'Huygens. — Nous ferons d'abord la construction d'Huygens d'une manière tout à fait générale, sans spécifier la forme particulière de la surface d'onde du cristal. Dans le cas que nous avons à considérer, cette surface d'onde enveloppe complètement la surface d'onde du liquide extérieur, laquelle est une sphère S de rayon V'' (fig. 380).

Nous devons donc tracer cette sphère, et lui mener par le point P , où elle est rencontrée par le rayon incident prolongé, un plan tangent qui coupe la surface réfringente suivant une droite

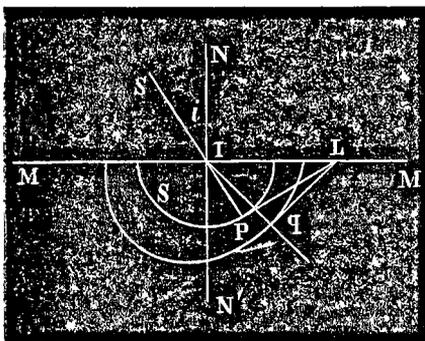


Fig. 380.

L perpendiculaire au plan de la figure. Par cette droite L nous devons mener un plan tangent à la surface d'onde du cristal. Si

Das Totalreflectometer, Leipzig, 1890, la bibliographie détaillée du sujet. Nous renverrons au même ouvrage pour ce qui concerne les lois de la polarisation des limites de réflexion totale à la surface des cristaux biréfringents.

Des vérifications expérimentales confirmant par ce procédé la théorie de resnel ont été faites en particulier par WOLLASTON, *Phil. Trans.* 1802, XCII, 381; — SENARMONT, *loc. cit.*; — W. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.* 1879, VI, 86; VII, 427; — J. DANKER, *N. Jahrb.* 1885, IV, 241; — J. NORRENBURG, Thèse, Bonn 1888; — A. MULHEIMS, Thèse, Bonn 1888; — C. PULFRICH, *Wied. Ann.* 1889, XXXVI, 561; — F.-L. PERROT, *Arch. des sc. phys. et nat.* 1889, XXI, 113.

réflexion totale, la longueur IL est donnée évidemment par la relation

$$\sin J = \frac{IP}{IL} = \frac{V''}{IL}.$$

A ce moment, IL est, d'après ce qui précède, la projection sur le plan d'incidence de la vitesse IQ du dernier rayon réfracté que l'on puisse construire, lequel est couché dans le plan réfringent.

Un simple coup d'œil jeté sur la figure 381 montre que, lorsque la trace IL du plan d'incidence sur le plan réfringent est parallèle à un rayon vecteur maximum ou minimum de l'intersection G , le point de contact Q de la droite L et de G est compris dans le plan d'incidence et se confond avec le point L . IL est dans ce cas la vitesse V' elle-même du rayon réfracté, égale à ce rayon vecteur maximum ou minimum de la courbe G .

Si J est connu, la formule ci-dessus, qui devient

$$\sin J = \frac{V''}{V'}$$

fera donc connaître ce rayon vecteur V' .

243. Réflexion totale à la surface des corps monoré-

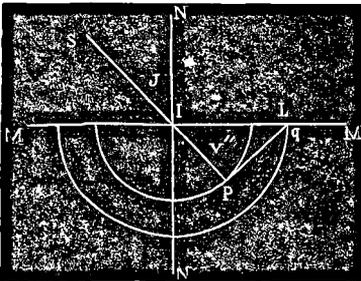


Fig. 382.

fringents. — Dans les corps isotropes et les cristaux du système cubique, la surface d'onde est une sphère de rayon V' (fig. 382). Son intersection G avec un plan réfringent quelconque est un cercle de même rayon; quel que soit le plan d'incidence, Q y est contenu, et on a toujours $IL = V'$. Si $n = \frac{V}{V'}$

est l'indice de réfraction du corps par rapport à l'air, et $\mu = \frac{V}{V''}$ l'indice du liquide, on a la relation

$$\sin J = \frac{V''}{V'} = \frac{n}{\mu}$$

qui peut servir à déterminer n si μ et J sont connus.

244. Réflexion totale à la surface des cristaux uniaxes ¹. — Dans les cristaux biréfringents, la surface de l'onde est formée de deux nappes. La limite de réflexion totale sera atteinte successivement pour les deux rayons lorsque la droite L sera tangente successivement à la nappe extérieure et à la nappe intérieure de la surface de l'onde.

Si le cristal est uniaxe et négatif, la nappe ellipsoïdale relative au rayon extraordinaire est extérieure à la nappe sphérique du rayon ordinaire. La limite de réflexion totale correspondra à un angle d'incidence plus petit pour le rayon extraordinaire que pour l'ordinaire. Le contraire aura lieu dans les cristaux uniaxes positifs.

Pour le rayon ordinaire, les choses se passent exactement comme si le cristal était un corps isotrope. Quels que soient le plan réfringent et le plan d'incidence, l'intersection G de la surface d'onde et du plan réfringent est un cercle de rayon V_o , et on a, comme plus haut,

$$\sin J_o = \frac{V''}{V_o} = \frac{n_o}{\mu}, \quad (1)$$

J_o désignant l'angle limite et n_o l'indice ordinaire du cristal.

245. Pour le rayon extraordinaire, la courbe G est une ellipse qui varie avec l'inclinaison α de la normale au plan

¹ F. KOHLRAUSCH, *loc. cit.*

réfringent sur l'axe optique du cristal. Soit (fig. 383) l'ellipsoïde, surface d'onde relative au rayon extraordinaire, AA l'axe optique, MM le plan réfringent. Les rayons vecteurs maximum et minimum de l'ellipse d'intersection sont IM dans la section principale MIA, et IC perpendiculaire à cette section principale.

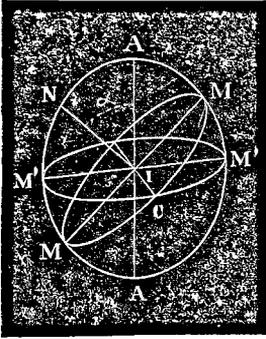


Fig. 383.

Si le plan d'incidence coïncide avec la section principale, on aura (§ 242)

$$\sin J_e = \frac{V''}{IM};$$

or IM est le rayon vecteur de l'ellipse AM'A dont les axes principaux sont IA = V_o et IM' = V_e . On a donc

$$\frac{1}{IM^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{V_e^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{V_o^2}$$

et l'on en déduit

$$\sin J_e = \frac{V''}{IM} = \frac{1}{\mu} \sqrt{n_e^2 \cos^2 \alpha + n_o^2 \sin^2 \alpha}; \quad (2)$$

J_e est l'angle limite et n_e l'indice extraordinaire.

Si $\alpha = 0$ (face réfringente normale à l'axe)

$$\sin J_e = \frac{n_e}{\mu}.$$

Si $\alpha = 90^\circ$ (face réfringente parallèle à l'axe)

$$\sin J_e = \frac{n_o}{\mu} = \sin J_o$$

les deux rayons atteignent ensemble leur limite de réflexion totale.

Lorsque le plan d'incidence est perpendiculaire à la section principale, on a de même

$$\sin J_e = \frac{V''}{IC} ;$$

IC est le rayon équatorial de l'ellipsoïde et est égal à V_e , quelle que soit l'orientation α de la face. On trouve donc toujours

$$\sin J_e = \frac{V''}{V_e} = \frac{n_e}{\mu} . \quad (3)$$

La détermination expérimentale des angles limites maxima et minima de réflexion totale sur une seule face quelconque permettra donc de calculer par les formules (1), (2), (3) les deux indices principaux n_o et n_e , et l'inclinaison α de la face par rapport à l'axe du cristal.

246. Réflexion totale à la surface des cristaux à deux axes ¹. — L'intersection G du plan réfringent et de la surface de l'onde est une courbe à deux branches dont la forme varie beaucoup avec l'orientation du plan réfringent par rapport aux axes d'élasticité. Mais les quatre rayons vecteurs maxima et minima de cette courbe jouissent dans tous les cas de la propriété remarquable que trois d'entre eux sont respectivement égaux aux trois vitesses principales.

Gardant en effet les notations du § 230, nous nous rappelons que la nappe extérieure de la surface de l'onde coupe le plan YZ suivant un cercle de rayon a ; que la nappe intérieure coupe le plan XY suivant un cercle de rayon c ; enfin que le plan XZ est coupé suivant un cercle de rayon b qui appartient en partie à la

¹ Ch. SORET, *Archives des sc. phys. et nat.* 1888, XX, 263. — Les résultats du § 246 ont été donnés par M. F. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.* 1878, IV, 1, pour une face parallèle à une section principale et incomplètement pour une face quelconque.

nappe intérieure et en partie à la nappe extérieure. Un plan diamétral quelconque coupant forcément les trois plans principaux, il est clair que son intersection avec la surface de l'onde rencontrera ces trois cercles, et aura un rayon vecteur égal à a en un point appartenant à la branche extérieure, un rayon vecteur égal à c en un point appartenant à la branche intérieure, et un rayon vecteur égal à b en un point appartenant à l'une ou à l'autre des deux branches suivant la position du plan diamétral.

On sait d'ailleurs que les rayons vecteurs de la nappe extérieure de la surface, et naturellement aussi de la courbe extérieure de l'intersection, sont compris entre a et b ; et que ceux de la nappe intérieure et aussi de la courbe intérieure sont compris entre b et c .

On en conclut que le rayon vecteur a est un maximum pour la courbe extérieure, le rayon vecteur c un minimum pour la courbe intérieure, et le rayon vecteur b un minimum ou un maximum suivant qu'il appartient à la courbe extérieure ou à la courbe intérieure.

Il en résulte qu'en substituant à J dans la formule ci-dessus

$$\sin J = \frac{V''}{V'} = \frac{n}{\mu}$$

les quatre valeurs minima et maxima des angles limites de réflexion totale que l'on peut observer sur une face quelconque du cristal, trois des valeurs de V' qui s'en déduisent et les valeurs correspondantes de n , sont respectivement les trois vitesses principales et les trois indices principaux du cristal pour la lumière employée. Le plus grand et le plus petit angle limite donnent toujours le plus grand et le plus petit indice, tandis que l'indice moyen correspond à l'un des deux angles limites intermédiaires. Pour faire disparaître cette indétermination, il suffira de répéter les mesures sur une seconde face différemment orientée; on retrouvera sur cette nouvelle face les trois

mêmes valeurs utiles de l'angle limite, tandis que la quatrième, qui est sans emploi, sera différente et facile à reconnaître¹.

Nous n'aborderons pas ici l'étude des particularités singulières que présente la réflexion totale dans le voisinage des axes optiques. Ces particularités sont rarement observables et n'ont guère d'importance pratique.

247. Mesure des indices de réfraction par la réflexion totale². — Résumant les résultats que nous venons d'obtenir, nous voyons que lorsqu'un corps solide monoréfringent d'indice n est en contact par une face plane avec un milieu plus réfringent d'indice connu μ , la mesure de l'angle limite de réflexion totale J permettra de déterminer n par la formule

$$n = \mu \sin J.$$

Si le corps est biréfringent, on obtient en général deux angles limites dont la valeur change pour une même face avec l'azimut du plan d'incidence. Si donc, sans changer la position absolue du plan d'incidence, on fait tourner la lame que l'on étudie autour d'un axe perpendiculaire à son plan, les angles limites passent par une série de valeurs, qui se reproduisent identiquement à chaque demi-tour de la lame; quelle que soit l'orientation de la face étudiée dans un cristal uniaxe ou biaxe quel-

¹ Si l'on détermine expérimentalement non seulement les rayons vecteurs maxima et minima de la courbe G , mais aussi leurs azimuts par rapport à une arête du cristal, on peut en déduire l'orientation des axes d'élasticité. M. LAVENIR, *Bull. Soc. min.* 1891, XIV, 100, a montré que l'on arrive au même résultat, avec beaucoup plus de précision, en déterminant les grandeurs et les azimuts de six rayons vecteurs pris *dans le voisinage* des maxima et minima.

² La méthode de la réflexion totale pour la mesure des indices a été proposée par LAPLACE, *Mécanique céleste*, 1800, IV, 241, et appliquée en 1802 par WOLLASTON, *Phil. Trans.* 1802, 365. Utilisée de diverses manières jusqu'en 1877, elle a pris une grande importance depuis que M. F. KOHLRAUSCH a fait connaître son réfractomètre (§ 250).

conque, ce sont les maxima et les minima de ces valeurs des angles limites, qui, introduits à la place de J dans la formule, donnent immédiatement les indices principaux du cristal. L'extrême simplicité théorique de ce procédé, qui n'exige en tout cas que la taille d'une surface plane d'orientation quelconque, donne une grande importance à sa réalisation expérimentale¹.

248. D'une manière générale, la mesure de l'angle limite peut se faire de deux manières, par réflexion et par réfraction. Par réflexion, on fait tomber la lumière SI sur la face antérieure MM' de la lame C à étudier; le rayon réfléchi (fig. 384) augmente brusquement d'intensité lorsque, en augmentant progressivement l'incidence, on arrive à l'angle limite. En d'autres termes, si l'on suppose que la lumière incidente vienne en même temps de toutes les directions comprises dans l'angle MIN , la lumière réfléchie sera plus intense dans les directions comprises dans l'angle $M'IJ$ que

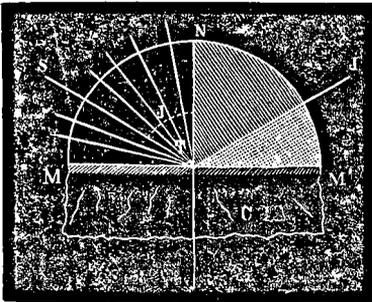


Fig. 384.

dans les directions comprises dans l'angle NIJ . Ce procédé a l'avantage de n'utiliser que la face réfléchissante elle-même, et d'être absolument indépendant de la structure et de la forme du reste du corps étudié. Son seul inconvénient provient de ce que la différence d'éclairement des deux régions $M'IJ$ et NIJ est souvent assez peu sensible et de ce que la limite de séparation J est souvent peu nette.

Par réfraction, on fait arriver la lumière incidente dans le

¹ Pour l'influence du mode de polissage et de l'état des surfaces, voyez DUFET, *Bull. Soc. min.* 1891, XIV, 130; — CH. SORET, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1891, XXVI, 541.

corps à étudier de manière qu'elle se réfracte à travers la face plane (fig. 385). Si les rayons incidents ont toutes les directions comprises dans l'angle NIM, il y aura de la lumière réfractée dans toutes les directions de l'angle NIJ, et point de lumière du tout dans l'angle MIJ. La limite sera donc beaucoup plus facile à reconnaître que par l'autre procédé. En revanche, il faut que le corps soit transparent et que sa forme permette à la lumière incidente de raser la face plane MM'.

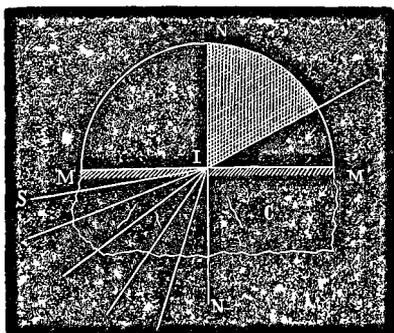


Fig. 385.

S'il est biréfringent et doit être observé dans divers azimuts du plan d'incidence, il faut, pour que les conditions restent les mêmes, qu'il ait la forme d'un cylindre droit à base circulaire; la méthode est alors moins simple et perd ainsi une grande partie de ses avantages.

249. La face réfléchissante doit être en contact avec un milieu plus réfringent.

On peut immerger le corps dans un liquide convenablement choisi. Cette disposition a l'inconvénient d'exiger l'emploi d'une assez grande quantité de liquide; pratiquement, on est à peu près limité au sulfure de carbone¹, dont l'indice pour les rayons jaunes de la lumière du sodium est égal à 1,62839 à 19°, ou au bromure de naphthaline², dont l'indice est 1,66264 à 8° C., et on ne peut étudier les corps dont l'indice est plus élevé que celui de ces liquides. De plus, l'indice μ du liquide, qui entre dans la formule, diminue rapidement quand la température

¹ DUFET, *Bull. Soc. min.* 1885, VIII, 271.

² A. FOCK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 590.

s'élève (0,00045 par degré pour le bromure de naphthaline; 0,00082 pour le sulfure de carbone), ce qui nécessite des corrections un peu douteuses, ou l'emploi de méthodes de comparaison qui perdent du temps.

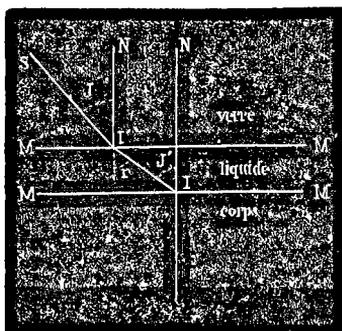


Fig. 386.

On peut aussi remplacer le liquide par un bloc de verre convenablement taillé, présentant une face plane sur laquelle on applique la lame à étudier en interposant une goutte de liquide. Le verre et le liquide doivent être tous deux plus réfringents que la lame. Soient V' , V'' , V''' , les vitesses de la lumière dans la lame, dans le verre et dans

le liquide. Au moment où se produit la réflexion totale à la surface de la lame, on a (fig. 386)

$$\sin J' = \frac{V'''}{V'}; \quad \frac{\sin J}{\sin r} = \frac{\sin J}{\sin J'} = \frac{V''}{V'''};$$

d'où

$$\sin J = \frac{V''}{V'} = \frac{n}{\mu},$$

μ étant l'indice du verre. L'angle limite est le même que si la lame était directement en contact avec la surface du verre.

On peut employer des verres très réfringents et des liquides beaucoup plus réfringents que le sulfure de carbone, du bromure d'arsenic dont l'indice est 1,780, une solution d'iode et de soufre dans l'iodure de méthylène ($n = 1,85$)¹, ou des corps analogues qui ne pourraient sans inconvénient être maniés en grande quantité. L'indice du verre, qui entre seul en ligne de compte, varie fort peu avec la température, il n'y a, le

¹ E. BERTRAND. — Voyez PULFRICH, *Das Totalreflectometer*, 64.

plus souvent, pas de correction à faire. Enfin la lame cristalline, appliquée contre le verre, se place d'elle-même dans la position qu'elle doit avoir, et l'on est dispensé d'un réglage assez délicat. En revanche, les deux surfaces que le rayon doit traverser rendent souvent la limite de réflexion totale moins distincte que dans l'autre procédé, à moins que la lame ne soit excessivement plane et bien polie; ce défaut est encore augmenté par le fait que, le plus souvent, la lame ne couvre pas toute la surface du verre : la lumière réfléchie par la partie non couverte de celui-ci tend à masquer les faibles différences d'intensité de la lumière réfléchie par la lame. Les palliatifs que l'on peut employer, en couvrant complètement le verre de liquide réfringent, en choisissant convenablement ce liquide dans chaque cas, ou en déposant un enduit noir sur les portions non utilisées, sont insuffisants et incommodes. Il faut en général recourir au procédé par réfraction. Enfin, le calcul est généralement plus long parce qu'il faut tenir compte de la réfraction des rayons au sortir du bloc de verre.

250. Réfractomètre de M. F. Kohlrausch (fig. 387)¹.

— Un vase en verre V (fig. 388) fermé antérieurement par une glace plane G, contient le liquide réfringent. Le couvercle de ce vase est formé par un cercle gradué horizontal, sur lequel se meut un vernier N, lié à l'axe vertical qui porte la lame à étudier M; la face réfléchissante doit être parallèle à cet axe. Un écran E de papier huilé, éclairé par derrière à l'aide d'une flamme monochromatique, envoie de la lumière diffuse sur la lame et l'on reçoit les rayons réfléchis par celle-ci dans une

¹ F. KOHLRAUSCH, *Verh. d. phys. med. Gesellsch. Wurzburg*, 1877, XII; *Wied. Ann.* 1878, IV, 1; 1882, XVI, 609; — (voyez W. KOHLRAUSCH, *Wied. Ann.* 1879, VI, 86; VII, 427; — A. FOCK, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 589; — J. NORRENBURG, *ibid.* 1888, XXXIV, 843; — PULFRICH, *N. Jahrb.* 1887, Beil. Bd, V, 167).

petite lunette, réglée pour l'infini, qui est fixée en regard de la glace G, et qui porte un réticule à son foyer. Lorsque la normale à la lame fait avec l'axe optique de la lunette un angle égal

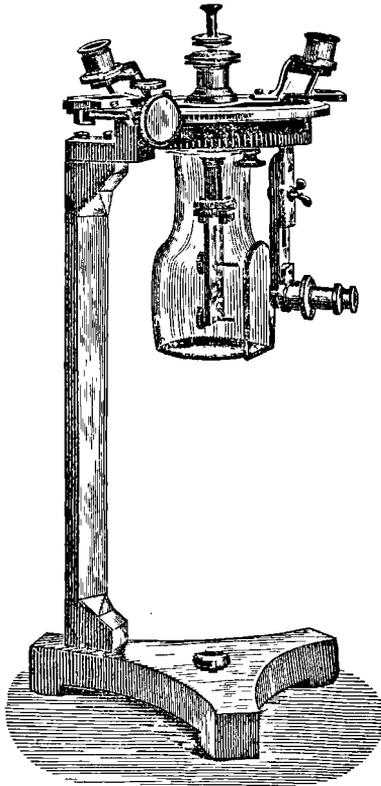


Fig. 387.

à l'angle limite de réflexion totale, on voit le champ de la lunette partagé en deux parties inégalement éclairées, dont la ligne de séparation passe sur le réticule¹. En répétant le pointé de l'autre côté de l'appareil après avoir déplacé convenablement l'écran et la source de lumière, et après avoir amené la normale MN en MN', l'angle NMN', dont on

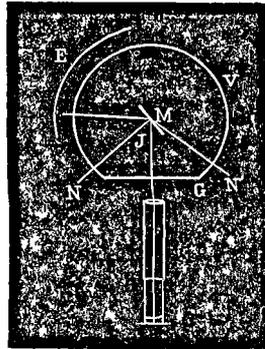


Fig. 388.

aura fait tourner la lame, donnera immédiatement le double de l'angle limite cherché.

Un petit thermomètre suspendu dans le liquide fait con-

¹ ABBE, *Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens*, Jena, 1874. Lorsque dans un cristal biréfringent, l'angle limite de réflexion totale varie avec l'azimut du plan d'incidence, la limite des deux régions est plus ou moins inclinée; elle ne devient verticale et perpendiculaire à la trace horizontale du plan d'incidence que dans les positions où l'angle limite est maximum ou minimum. Voyez LIEBISCH, *Phys. Kryst.* 406.

naître à chaque instant la température de celui-ci. Pour fixer la lame à étudier au bout de l'axe, on peut, si elle est monoréfringente, se contenter de l'appliquer au moyen d'un ressort convenable contre une petite fenêtre, percée dans une plaque de métal qui se visse sur l'axe (fig. 389). Si la lame est biréfringente et qu'il faille la faire tourner dans son plan, on visse à la place de la plaque de métal une pièce plus compliquée, composée d'un anneau vertical, dans lequel on ajuste la lame, et qui peut tourner sur lui-même autour d'un axe horizontal à l'aide d'une vis tangente (fig. 390)¹. Cette vis reçoit son mouvement d'une tige articulée qui traverse le couvercle. Il est avantageux de pourvoir la lunette d'un prisme de Nicol (§ 272), qui, suivant sa position, ne laisse voir que l'une ou l'autre des deux limites.

On peut aussi se servir du réfractomètre de M. Kohlrausch pour l'étude de la dispersion. Il faut, dans ce cas, remplacer l'oculaire de la lunette par un spectroscope à vision



Fig. 389.

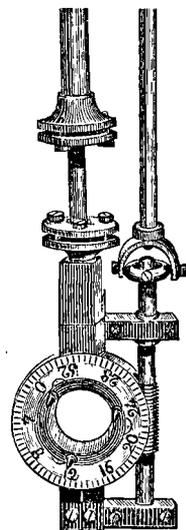


Fig. 390.

directe dont la fente, dirigée horizontalement, vient occuper la place du réticule, et l'écran E par une lentille qui concentre sur la lame les rayons du soleil ou d'une source de lumière blanche suffisamment intense. On observe alors un spectre vertical, sur lequel la limite des rayons réfléchis simplement et totalement se présente comme une ligne inclinée séparant deux régions d'éclairement inégal. En faisant tourner la lame, on amène cette limite au milieu du champ successivement pour les divers rayons².

¹ C. KLEIN, *N. Jahrb.* 1879, 880.

² C. PULFRICH, *Wied. Ann.* 1887, XXX, 487.

251. Réfractomètre de M. C. Soret¹. — Une sorte de goniomètre (fig. 391) porte en son milieu un vase de verre, contenant le liquide réfringent, et pourvu du côté du collimateur C d'une glace plane par laquelle un faisceau de rayons solaires parallèles vient éclairer la lame. Celle-ci est fixée à l'extré-

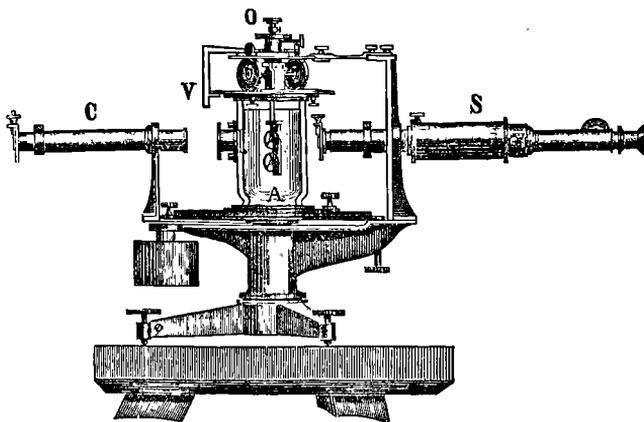


Fig. 391.

mité d'un axe vertical O, qui traverse le couvercle V du vase et porte, comme dans le réfractomètre de Kohlrausch, un vernier permettant de mesurer ses déplacements. La lunette est remplacée par un spectroscopie à vision directe S, dont la fente est verticale et qui est porté par un bras pouvant tourner tout autour du vase. Une disposition spéciale, que nous ne décrirons pas, permet de lier ce spectroscopie à l'axe central qui porte la lame et le vernier, de telle sorte que la rotation de cet axe soit toujours la moitié de celle du spectroscopie, et que la fente de celui-ci reçoive constamment les rayons réfléchis par la lame. Si l'inci-

¹ CH. SORET, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1883, IX, 5; *Zeitsch. f. Kryst.* 1883, VII, 529. — (Indices des aluns, CH. SORET, *Archives*, 1884, XII, 553; 1885, XIII, 5; 1888, XX, 517; — sulfates doubles clinorhombiques à $6H^2O$, F.-L. PERRON, *ibid.* 1891, XXV, 26; — chlorate de soude, F. DUSSAUD, *ibid.* 1892, XXVII, 380, 521.

dence est très grande, tous les rayons sont réfléchis totalement, et le spectre est très brillant dans toute son étendue. Si l'on diminue progressivement l'incidence, les divers rayons atteignent successivement leur angle limite et n'ont plus dès lors qu'une intensité moindre. On voit comme un rideau sombre qui s'avance graduellement du rouge au violet et dont on peut amener le bord dans une région quelconque du spectre. L'angle limite correspondant s'obtient comme dans le réfractomètre de M. Kohlrausch, en répétant le même pointé de l'autre côté de l'appareil et en prenant la moitié de l'angle parcouru par le vernier.

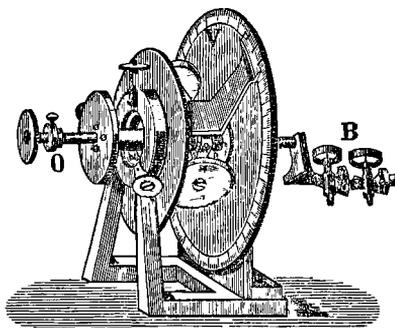


Fig. 392.

Afin d'éliminer l'influence de la température, l'axe O peut monter et descendre dans la pièce qui le fixe au vernier, et porte à sa partie inférieure, au-dessous de la lame à étudier, une lame de verre d'indices connus et sensiblement invariables que l'on peut ainsi introduire instantanément dans le faisceau des rayons incidents. On intercale toujours une mesure faite sur la lame à étudier entre deux mesures faites sur la lame de comparaison, ce qui permet d'éliminer l'indice variable du

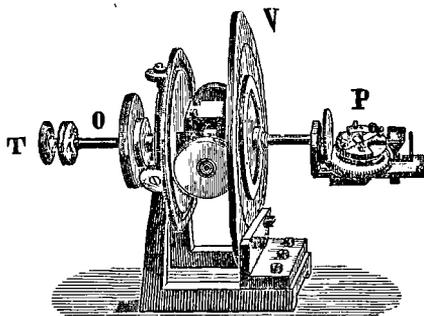


Fig. 393.

liquide. Le couvercle séparé du vase peut être placé verticalement (fig. 392); les lames sont portées par de petites bonnettes B, que l'on peut incliner plus ou moins sur l'axe O;

leur réglage se fait comme sur un goniomètre de Wollaston (§ 120).

Pour l'étude des corps biréfringents, l'axe simple O est remplacé par un axe creux, traversé par une tige T qui, au moyen d'un pignon denté, fait tourner une plate-forme P dans un plan parallèle à l'axe. Le cristal est fixé sur cette plate-forme et réglé à l'aide de quatre vis calantes (fig. 393).

252. Réfractomètre de M. Pulfrich¹ (fig. 394 et 395). — La lame à étudier est appliquée avec interposition d'une goutte

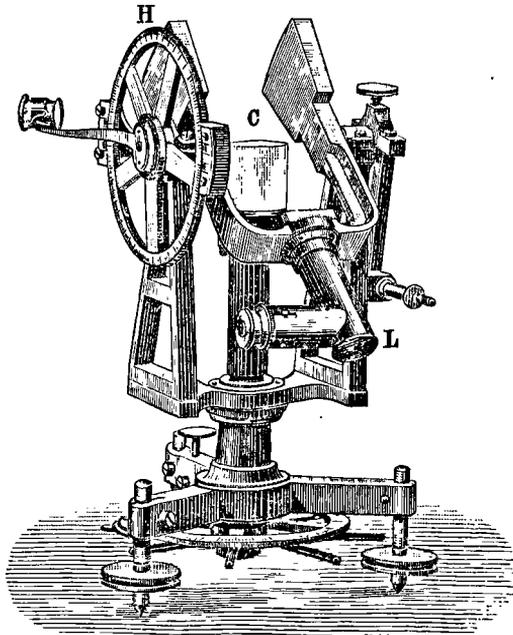


Fig. 394.

d'un liquide fortement réfringent, sur la base horizontale d'un

¹ C. PULFRICH, *Wied. Ann.* 1887, XXX, 193, 487; XXXI, 724; 1888, XXXIV, 326; 1889, XXXVI, 561; (voyez aussi A. MULHEIMS, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIV, 202; — LAVENIR, *Bull. Soc. min.* 1891, XIV, 100; — DUFET, *ibid.*, 130.)

cylindre de verre C porté par un axe vertical dont la rotation se mesure à l'aide d'un cercle gradué horizontal. La lumière, concentrée par une lentille, pénètre dans le verre par sa surface cylindrique, se réfléchit sur la base et ressort de l'autre côté, où on l'observe avec une lunette L, qui peut tourner autour d'un axe horizontal situé à la hauteur de la base du cylindre. Un cercle gradué H donne à chaque

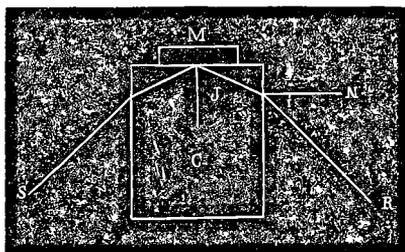


Fig. 395.

instant l'angle i compris entre l'axe optique de la lunette et la normale N à la surface cylindrique. Pour rendre l'observation plus commode, la lunette est coudée et contient un prisme à réflexion totale qui renvoie les rayons vers un oculaire dirigé en avant de l'appareil. En lumière monochromatique, les apparences sont les mêmes que dans l'appareil de M. Kohlrausch. Au moment où la limite de réflexion totale passe sur le réticule de la lunette, on a les relations (μ étant l'indice du verre)

$$n = \mu \sin J \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\sin i}{\cos J},$$

d'où l'on tire

$$n^2 = \mu^2(1 - \cos^2 J) = \mu^2\left(1 - \frac{\sin^2 i}{\mu^2}\right) = \mu^2 - \sin^2 i;$$

on a donc

$$n = \sqrt{\mu^2 - \sin^2 i}.$$

On peut également observer en lumière blanche en remplaçant l'oculaire par un petit spectroscopie à vision directe. Il est préférable, lorsque la chose est possible, de se servir du procédé par réfraction (§ 248); on concentre alors la lumière sur la lame depuis le dessus.

Ce réfractomètre est très avantageux pour l'étude des corps biréfringents; la lame, appliquée contre le cylindre, tourne dans son plan avec celui-ci, sans aucun frottement contre le verre et sans autre réglage què celui du cylindre lui-même qui se fait une fois pour toutes.

253. Réfractomètre de M. Abbe¹. — Le cylindre de l'appareil de M. Pulfrich est remplacé par une demi-sphère de

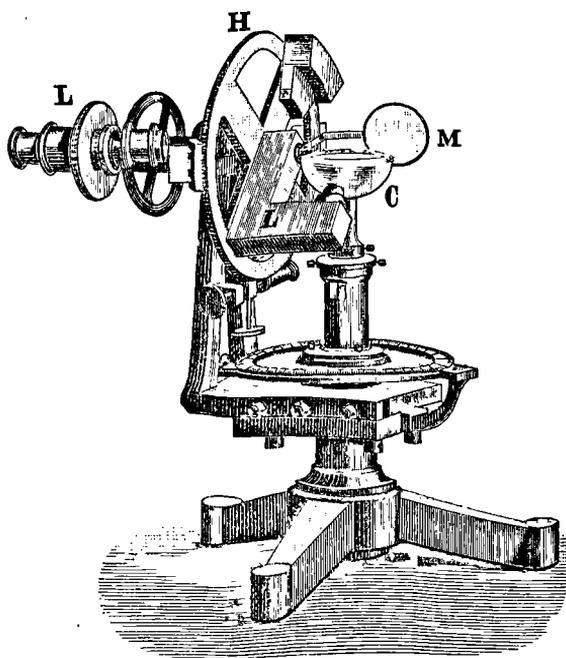


Fig. 396.

verre C (fig. 396), portée par un axe vertical pourvu également

¹ S. CZAPSKI, *Zeitsch. f. Instrumentenkunde*, 1890, 246, 269.

M. T. LIEBISCH, *Zeitsch. f. Instrumentenkunde*, 1884, 185; 1885, 13, applique la lame à étudier contre un prisme de verre (voyez DANKER, *N. Jahrb.* 1885, Beilagebd. IV, 241; — F.-L. PERROT, *Archives*, 1889, XXI, 113); — M. FEUSZNER, *Ueber eine neue Methode der Brechungsexponentenbestimmung mittelst Totalreflexion*, Thèse, Marburg 1882, contre un parallépipède de verre. Ces

d'un cercle gradué horizontal qui permet d'apprécier ses déplacements. La lame à étudier est placée, avec interposition de goutte de liquide, sur la face plane supérieure de la demi-boule. Un miroir mobile M, que l'on peut amener dans la position convenable, envoie sur la demi-boule la lumière d'une flamme monochromatique placée en avant de l'appareil, et les rayons réfléchis sont reçus dans une lunette LL trois fois coudée, qui peut tourner avec un cercle gradué H autour d'un axe horizontal dont le prolongement passe par le plan réfléchissant. L'observateur peut ainsi mesurer l'angle de réflexion totale sans changer de position. L'objectif de la lunette est concave et a la même courbure que la demi-boule; la mince lame d'air comprise entre ces deux surfaces de verre se comporte par conséquent comme une lame à faces parallèles, et le réticule de la lunette est placé au foyer des rayons qui forment des faisceaux parallèles dans l'intérieur de la demi-boule. L'angle J de réflexion totale se lit directement; la formule à employer est celle du § 247.

Cet appareil présente les mêmes avantages que celui de M. Pulfrich pour l'étude des corps biréfringents; son manie-ment est un peu plus facile et les limites sont plus nettes. Il est inutile d'ajouter que dans ces deux réfractomètres, le réglage

dispositions ont l'avantage de s'adapter à un goniomètre quelconque, mais l'inconvénient d'être exposées à une détérioration rapide par suite de l'usure du verre.

M. E. BERTRAND, *Bull. Soc. min.* 1885, VIII, 375; 1886, IX, 15, applique la lame contre la face plane d'une lentille demi-boule et observe la limite de réflexion totale au foyer de la lentille, à l'aide d'une loupe ou d'un microscope. L'appareil se gradue empiriquement et peut servir, dans le premier cas, à des mesures rapides et approchées; dans le second cas, à l'étude de la réfringence de très petits cristaux.

Voyez encore les procédés de réflexion totale appliqués à l'étude des cristaux par G. QUINCKE, *Ueber die Bestimmung der Brechungsexponenten mit totaler Reflexion, Festschrift der naturf. Ges. Halle*, 1879; et L. MATTHIESSEN, *Zeitsch. f. Math. u. Phys.* 1878, XXIII.

du cylindre ou de la demi-boule doit être fait avec le plus grand soin.

*** 254. Remarque.** — Les divers instruments que nous venons de décrire ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients, et ne peuvent pas être employés indifféremment dans tous les cas.

Le réfractomètre de M. Kohlrausch (§ 250) se recommande par sa simplicité et son prix modéré. Sous sa forme primitive, il est médiocrement précis, mais on peut l'améliorer sous ce rapport en le munissant d'une lunette plus grande et d'une lame de comparaison pour éliminer l'influence de la température sur l'indice du liquide (§ 251). L'étude de la dispersion en lumière blanche paraît difficile en dehors de la partie la plus lumineuse du spectre. C'est le seul appareil dont on puisse se servir avec sécurité pour vérifier les lois de la polarisation des rayons réfléchis.

Le réfractomètre de M. Soret (§ 251) à l'inconvénient d'être plus volumineux et plus lourd, et d'exiger l'emploi de la lumière solaire. Ses dimensions le rendent peu commode pour les mesures en lumière monochromatique. En revanche, il est plus précis et plus propre à l'étude de la dispersion en raison de la grandeur de son spectroscope. Il est très robuste et peu sujet à se détériorer, et permet d'étudier complètement et sans difficulté de petits cristaux de 2 à 3 millimètres de diamètre sans que ceux-ci, plongés dans le liquide, risquent de s'altérer par le contact de l'air. C'est là un grand avantage pour l'examen de séries isomorphes, dont il est toujours difficile d'obtenir les divers représentants en cristaux bien formés. Enfin, les lectures se faisant au grand jour sont beaucoup moins pénibles qu'avec les appareils qui exigent une lumière monochromatique.

Les réfractomètres de M. Pulfrich et de M. Abbe (§ 252 et 253) sont des instruments de très grande précision lorsqu'on prend les précautions nécessaires pour maintenir constante la température du corps étudié. Mais ils sont délicats, les pièces de verre coûteuses, cylindre et demi-boule, qui en forment les organes essentiels, doivent être traitées avec les plus grands ménagements; ils ne donnent des limites faciles à observer que sur des surfaces de dimensions un peu grandes, et la petitesse (à peu près inévitable, au moins dans l'appareil de M. Pulfrich) du spectroscope qui peut être mis à la place de l'oculaire de la lunette, les rend inférieurs pour l'étude de la dispersion. Ils sont également peu propres à l'observation des phénomènes de polarisation par suite des réfractions et des réflexions que subissent les rayons à la sortie du verre et dans les lunettes coudées. En revanche, leur emploi est indiqué pour la vérification des lois de la double réfraction et pour la détermination précise des indices des corps que l'on peut avoir en beaux cristaux.

CHAPITRE XIX

RÉFRACTION A TRAVERS LES PRISMES

255. Réfraction des ondes planes. — Lorsque nous avons fait, d'une manière générale, la construction d'Huygens (§ 206), nous avons déjà observé que quels que soient les deux milieux homogènes entre lesquels s'opère la réfraction, les nor-

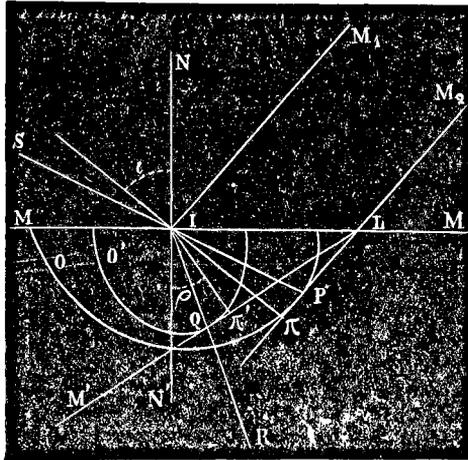


Fig. 397.

males aux ondes planes incidente et réfractée sont toujours comprises dans un même plan perpendiculaire à la surface réfringente.

Du point I (fig. 397) menons la perpendiculaire II à l'onde incidente PL, et la perpendiculaire III' à l'onde réfractée QL; II et III' sont égales respectivement aux vitesses de propagation normale U et U' de ces deux ondes. Les triangles IIL et III'L, rectangles en II et II', donnent par un calcul semblable à celui du § 217,

$$\frac{\sin \text{IIN}'}{\sin \text{II'IN}'} = \frac{\text{II}}{\text{II'}} = \frac{U}{U'}$$

ou, en appelant ι et ρ les angles que les normales aux ondes planes incidente et réfractée forment avec la normale à la surface réfringente, et ν le rapport U/U' ,

$$\frac{\sin \iota}{\sin \rho} = \frac{U}{U'} = \nu.$$

La valeur de ce rapport varie en général avec l'incidence.

Dans le cas des milieux isotropes, les rayons lumineux se confondent avec les normales aux ondes planes, ι et ρ deviennent les angles d'incidence et de réfraction i et r , U et U' deviennent les vitesses V et V' des rayons, et celles-ci étant les mêmes pour toutes les directions, le rapport ν devient l'indice de réfraction n du second milieu par rapport au premier. On retrouve ainsi les lois de la réfraction simple.

256. Réfraction dans un prisme ¹. — Considérons maintenant un prisme ABC (fig. 398) taillé dans un milieu transparent quelconque, limité à droite et à gauche par deux faces planes AB et AC, qui sont perpendiculaires au plan de la

¹ STOKES, *Rep. Brit. Assoc.* 1862, 272; *C. R.* 1873, LXXVII, 1150; *Phil. Mag.* 1872, XLIV, 316; — ABRIA, *C. R.* 1873, LXXVII, 814; — CORNU, *Ann. École normale*, 1872, I, 231; 1874, III, 1; — V. V. LANG, *Pogg. Ann.* 1870, CXL, 460; — TOPSOË et CHRISTIANSEN, *Ann. de Chim.* 1874, I, 5; — GLAZEBROOK, *Phil. Trans.* 1879, 287; — HASTINGS, *Sill. J.* 1888, XXXV, 60.

figure et forment l'une avec l'autre un angle dièdre A , l'angle réfringent du prisme.

Un rayon SI , compris dans le plan de la figure et cheminant dans l'air, vient tomber sur la face AB . Le rayon réfracté a une direction quelconque, mais d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, la normale II' à l'onde plane réfractée reste dans le

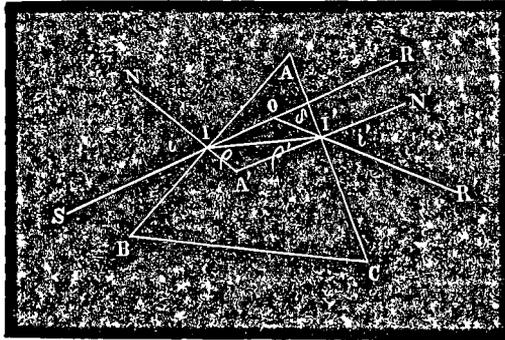


Fig. 398.

plan de la figure, qui contient la normale SI à l'onde incidente et qui est perpendiculaire au plan réfringent AB . On a de plus, en conservant les notations du paragraphe précédent,

$$\frac{\sin i}{\sin \rho} = \frac{V}{U'} = v.$$

En se réfractant en I' sur la seconde face AC du prisme, la lumière passe de nouveau dans l'air ; la normale $I'R'$ à la nouvelle onde réfractée est encore comprise dans le plan de la figure, et l'on a

$$\frac{\sin i'}{\sin \rho'} = \frac{V}{U'} = v.$$

De plus, $I'R'$ est parallèle au rayon réfracté, puisque l'air est isotrope.

Le rayon réfracté, ayant dans l'intérieur du prisme une direction quelconque, ne se trouve pas en général dans le plan d'inci-

dence, mais lui redevient seulement parallèle en sortant du prisme. Sa projection sur ce plan est alors IR' .

La normale IR' à l'onde plane réfractée forme, avec la normale IR à l'onde plane incidente, un angle $ROR' = \delta$, qui représente la *dévi*ation subie par l'onde en traversant le prisme.

257. Mesures spectrométriques. — La déviation δ est facile à mesurer expérimentalement. Le prisme est disposé sur un goniomètre de Babinet (§ 122) ou *spectromètre*, avec son arête réfringente perpendiculaire au limbe de l'instrument.

Le collimateur G (fig. 399) envoie sur le prisme un faisceau de rayons parallèles que l'on reçoit à leur sortie dans la lunette, amenée dans une position convenable L_2 . Si, avant l'interposition du prisme, la lunette recevait les rayons dans la position L_1 , l'angle L_1L_2 mesure la déviation δ . Il est à noter toutefois que le collimateur recevant en général la lumière par une fente F verticale parallèle à l'arête du prisme, les divers rayons qu'il envoie sont parallèles au plan vertical projeté

en FL_1 , mais sont diversement inclinés par rapport au plan de limbe. Ces rayons sont inégalement déviés et, si le prisme est anisotrope, l'image de la fente que l'on observe n'est pas verticale en général, mais plus ou moins inclinée. Il faudra s'arranger de manière à amener sur le réticule le point de cette image qui correspond aux rayons envoyés horizontalement par le collimateur.

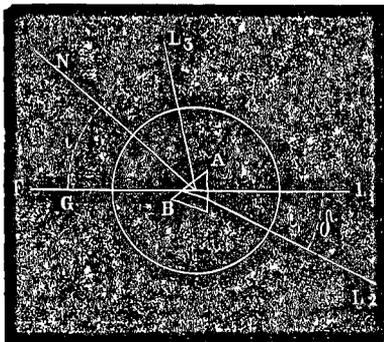


Fig. 399.

L'angle réfringent A se mesure à la manière ordinaire. Si l'on a besoin de connaître l'angle i , sous lequel les rayons ren-

contrent la face AB du prisme, il suffit d'amener la lunette dans la position L_2 , où elle reçoit le faisceau réfléchi par cette face. On a évidemment

$$2i = 180^\circ - L_1 L_2.$$

Dans tous les cas, le prisme doit pouvoir tourner indépendamment du cercle gradué et de la lunette. Il est même avantageux de pourvoir la pièce qui le porte d'une alidade à vernier courant sur le limbe et permettant de connaître à chaque instant sa position.

258. Formules du prisme. — La mesure des angles A , δ et i suffit pour déterminer complètement la marche de l'onde plane et la valeur du rapport ν . Soient en effet (fig. 398) SI et I'R' le rayon incident et le rayon dévié. On aura, d'après la loi de la réfraction (§ 256).

$$\sin i = \nu \sin \rho \quad (1)$$

$$\sin i' = \nu \sin \rho' \quad (2)$$

le quadrilatère AIA'I', rectangle en I et I', donne

$$A + IA'I' = 180^\circ,$$

le triangle IA'I' donne

$$\rho + \rho' + IA'I' = 180^\circ,$$

d'où

$$\rho + \rho' = A. \quad (3)$$

Le triangle OII' donne enfin

$$\delta = OII' + OII = i - \rho + i' - \rho',$$

ou, en tenant compte de (3)

$$\delta = i + i' - A. \quad (4)$$

On a ainsi quatre relations d'où l'on peut tirer ν , i' , ρ et ρ' .

Chaque détermination semblable donne, en grandeur et en direction, la vitesse normale $U' = V/\nu$ (§ 256) d'une onde plane parallèle à l'arête du prisme, c'est-à-dire un rayon vecteur de la section diamétrale faite par le plan d'incidence dans la surface des vitesses normales (§ 214). En répétant les mesures, soit avec des prismes d'orientations différentes et connues, soit avec un même prisme pour diverses valeurs de l'angle d'incidence, on pourra étudier la forme de cette surface et calculer les vitesses principales du cristal.

Cette méthode exige, dans le cas général, des calculs assez pénibles, et bien qu'elle se simplifie notablement lorsque l'orientation du prisme est convenablement choisie¹, on ne l'applique le plus souvent que lorsque la simplification est poussée assez loin pour que les vitesses principales se déduisent presque sans

¹ M. LIEBISCH, *N. Jahrb.* 1886, I, 14; *Geett. Nachr.* 1888, 197, a montré que la détermination des deux vitesses principales d'un cristal uniaxe peut être faite par une mesure de δ et ι , ou de minimum de déviation (§ 260) sur chacun des deux rayons à l'aide d'un prisme d'orientation connue, mais quelconque. Les formules se simplifient si l'axe optique est parallèle à la section droite du prisme, GLAZEBROOK, *Phil. Trans.* 1880, 421; ou s'il est parallèle à l'un des plans bissecteurs de l'angle intérieur ou de l'angle extérieur du prisme.

Dans le cas des biaxes, un seul prisme d'orientation connue quelconque permet de trouver par trois mesures de δ et ι les vitesses principales, si l'on en connaît des valeurs approchées, BORN, *N. Jahrb.* 1887, Beilagebd. V, 4. Les formules se simplifient et toute ambiguïté disparaît si un plan principal du cristal bissecte l'angle intérieur ou l'angle extérieur du prisme, SENARMONT, *Nouv. Ann. de Mathém.* 1847, XVI, 273; V. v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien.*, 1859, XXXVII, 379; ou est perpendiculaire à l'arête, STOKES, *Cambr. and Dubl. Math. J.* 1846, I, 183; V. v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1873, LXXVI, 793.

Souvent du reste il est avantageux d'employer simultanément plusieurs méthodes pour la détermination des constantes optiques des cristaux. Voyez par exemple MÜTTRICH, *Pogg. Ann.* 1864, CXXI, 193; — MALLARD, *Cristallographie*, II, 455; — LIEBISCH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1883, VII, 433; — B. HECHT, *N. Jahrb.* 1889, Beil. Bd. VI, 241. — La mesure de la biréfringence et celle de l'angle des axes optiques (Chap. XX) fournissent un contrôle excellent de la mesure directe des indices principaux.

calcul des déviations observées¹. Ce sont là les seuls cas que nous considérerons.

259. Cas d'un prisme monoréfringent observé sous l'incidence normale¹. — Dans un prisme monoréfringent, les normales aux ondes planes se confondent avec les rayons lumineux ; $\rho = r$, $\rho' = r'$, $\nu = n$.

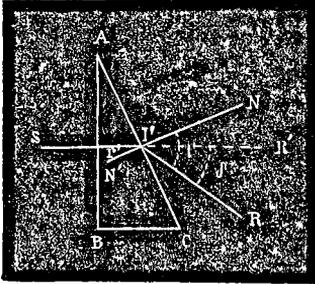


Fig. 400.

On peut placer le prisme de telle sorte que le rayon SI entre normalement par une de ses faces AB (fig. 400). Il tombe alors sur la seconde face AC en formant un angle d'incidence $SIN' = r'$, qui est égal évidemment à l'angle réfringent A. En sortant dans l'air, il forme avec la normale IN un angle $N'IR = i'$, et est dévié vers la base du prisme d'un angle $R'IR = \delta = i' - r'$. L'indice de réfraction de la matière du prisme par rapport à l'air est

$$n = \frac{\sin i'}{\sin r'}$$

ou en remplaçant i' et r' par leurs valeurs déduites des égalités ci-dessus

$$n = \frac{\sin(\delta + A)}{\sin A}$$

On peut naturellement, sans rien changer à la formule, renverser la marche du rayon, et le faire sortir du prisme perpendiculairement à la face AB.

260. Prisme monoréfringent observé au minimum de déviation. — Si l'on fait tourner le prisme autour de son

¹ V. v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1858, XXXIII, 155.

² DESCARTES, *Dioptrique*, Leyde, 1637.

arête réfringente A (fig. 401), on observe que la déviation passe par un minimum lorsque les angles NIS et N'IR' sont égaux.

On peut alors assimiler le prisme à la réunion de deux prismes BAC, BAC' d'angle réfringent $A/2$, observés sous incidence normale sur leur face de contact AB. Chacun de ces prismes, pris isolément, produirait la moitié de la déviation observée, et, en appliquant la formule du paragraphe précédent, on a

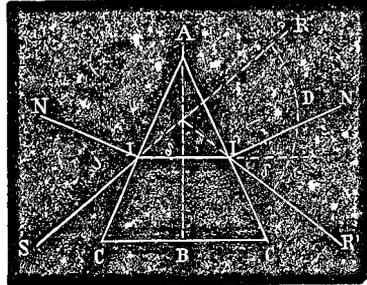


Fig. 401.

$$n = \frac{\sin \frac{A + \delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

L'observation du minimum de déviation est de beaucoup le procédé le plus commode pour la mesure des indices, attendu que l'on n'a pas besoin de mesurer l'angle d'incidence i . On fait simplement tourner le prisme en suivant avec la lunette le rayon réfracté, et en cherchant la position où celui-ci est le moins dévié. Les mesures peuvent être faites avec beaucoup de précision, mais les précautions à prendre sont assez minutieuses. Les causes d'erreurs les plus graves proviennent des imperfections de la taille du prisme, de l'incertitude de sa température et des défauts de réglage des lunettes ¹.

261. Procédé de l'incidence normale dans le cas des cristaux à un axe. — Soit dans un cristal à un axe un

¹ La méthode de la déviation minimum a été employée par NEWTON, *Optique*, 1704, Liv. I, Théorème VI. — Pour les causes d'erreurs, voyez CORNU, *Ann. École normale*, 1880, IX. — W. VOIGT, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, V, 113.

prisme BAC (fig. 402) dont une face AB soit parallèle à l'axe. Un rayon SI' tombant normalement sur cette face se décompose en deux rayons superposés, qui continuent leur chemin suivant

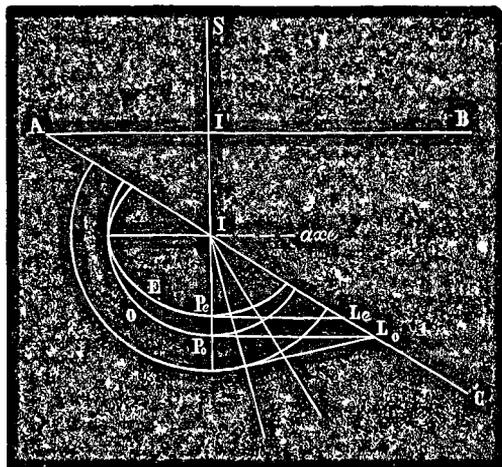


Fig 402.

II' sans changer de direction (§ 226), mais avec les vitesses différentes V_o et V_e .

Faisons la construction d'Huygens pour la sortie de ces rayons par la seconde face AC.

Pour le rayon ordinaire dont la surface d'onde est une sphère, il n'y a rien de particulier à dire, la formule des corps mono-réfringents s'applique immédiatement et donne l'indice ordinaire n_o . Cette formule s'applique d'ailleurs évidemment quelle que soit l'orientation du prisme.

Quant au rayon extraordinaire, nous devons construire la nappe ellipsoïdale E de la surface d'onde du cristal et prolonger le rayon jusqu'au point P_e , où il la rencontre. Ce rayon étant perpendiculaire à l'axe optique, le plan tangent $P_e L_e$ est parallèle à l'axe optique, et perpendiculaire au rayon. La position de L_e et le reste de la construction sont par conséquent les mêmes que si la nappe extraordinaire était une sphère de

rayon $IP_e = V_e$. Le rayon se comporte comme s'il sortait d'un corps isotrope d'indice n_e , et la formule du § 259 donne sans autres l'indice extraordinaire du cristal.

Cela n'aurait lieu pour aucune autre orientation du prisme. Pour appliquer le procédé de l'incidence normale dans le cas d'un cristal à un axe, il faut que le prisme ait une de ses faces parallèle à l'axe et que le rayon lumineux entre ou sorte normalement par cette face.

262. Procédé de l'incidence normale dans le cas des cristaux à deux axes. — Dans un cristal à deux axes, le raisonnement sera exactement le même si la face AB est parallèle à l'une des sections principales de la surface de l'onde. Suivant une direction SII' perpendiculaire à cette face peuvent se propager deux vibrations, dont chacune a l'une des trois vitesses principales. La construction d'Huygens à la sortie conduit également à des plans tangents normaux au rayon SIP comme si les nappes correspondantes de la surface d'onde étaient sphériques. On aura deux rayons inégalement déviés, dont chacun donnera, par la formule habituelle du § 259, l'un des indices principaux. Si la face AB ne contient qu'un seul des axes d'élasticité, on verra de même que la formule n'est plus applicable qu'à l'un des deux rayons.

263. Procédé de la déviation minimum dans le cas des corps biréfringents. — Comme au § 260, tout ce que nous venons de dire s'applique au procédé de la déviation minimum, à condition que la face d'entrée AB devienne le plan bissecteur du prisme et que nous considérions celui-ci comme formé de la superposition de deux prismes à incidence normale BAC, BAC'.

Nous en concluons que l'on obtient l'indice ordinaire d'un cristal à un axe en cherchant la déviation minimum subie par le

rayon ordinaire en traversant un prisme d'orientation quelconque¹; et l'indice extraordinaire en cherchant la déviation minimum subie par le rayon extraordinaire en traversant un prisme dont le plan bissecteur soit parallèle à l'axe; on applique dans les deux cas la formule du § 260.

Nous concluons aussi que la même méthode, appliquée à un prisme taillé dans un cristal à deux axes, de manière que son plan bissecteur soit parallèle à une section principale, donne par la même formule deux des trois indices principaux. Un second prisme, bisséqué par une autre section principale, donne également deux indices principaux, dont l'un se trouve déjà déterminé, et dont l'autre est le troisième indice inconnu.

Un prisme taillé dans un cristal à deux axes de manière que son plan bissecteur contienne seulement l'un des axes d'élasticité donne directement par la déviation minimum l'un des trois indices principaux. Le plus souvent on taille trois prismes ayant respectivement leurs arêtes parallèles aux trois axes d'élasticité, et l'on évite ainsi de recourir à des formules plus compliquées.

264. Étude de la dispersion. — Les indices de réfraction varient pour un même corps avec la longueur d'onde de la lumière employée. Dans la partie visible du spectre, les diverses radiations se reconnaissent immédiatement à leurs couleurs; pour des mesures médiocrement précises, il suffit souvent de placer des verres colorés sur le trajet des rayons, et de noter à quelle couleur se rapporte l'indice obtenu.

Si l'on veut plus d'exactitude, on peut se servir de la lumière solaire. Le spectre qu'elle donne par son passage au travers

¹ MALUS, *Mém. Sav. Étrang.* 1810, II, 303; — RUDBERG, *Pogg. Ann.* 1828, XIV, 45; 1829, XVII, 1; — BREWSTER, *Rep. Brit. Assoc.* 1843, 7; — SWAN-EDINB. *Trans.* 1847, XVI, 375.

d'un prisme suffisamment parfait est interrompu par les raies transversales obscures de Fraunhofer, qui correspondent à des radiations de périodes parfaitement déterminées et donnent ainsi de bons points de repère. On amène alors le prisme au minimum de déviation successivement pour les principales de ces raies.

On peut enfin se servir de la lumière que l'on obtient en introduisant dans la flamme d'un bec de Bunsen un fil de platine portant quelques parcelles d'un sel métallique convenablement choisi, ou bien en faisant jaillir des étincelles d'induction soit à la surface d'une solution, soit dans un tube de Geissler contenant un gaz raréfié. On obtient ainsi une lumière composée d'un petit nombre de radiations déterminées et toujours les mêmes, dont chacune se réfracte pour son compte et donne dans la lunette une image distincte de la fente du collimateur.

265. Spectre ultra-violet ¹. — Des étincelles d'induction, jaillissant entre deux fils de cadmium, de zinc ou d'aluminium, donnent des spectres composés d'un assez grand nombre de radiations distinctes, parmi lesquelles il en est de beaucoup plus réfringibles que les rayons bleus. Ces radiations de faibles longueurs d'ondes, appartenant au spectre ultra-violet, ne sont pas directement visibles pour nous, et pour étudier leur réfraction, il faut recourir à des méthodes spéciales.

On peut d'abord profiter de la faculté qu'elles possèdent à un haut degré d'impressionner les plaques sensibilisées dont on se sert en photographie. L'oculaire de la lunette est remplacé par

¹ ESSELBACH, *Pogg. Ann.* 1855, XCVIII, 513; — MASCART, *C. R.* 1863, LVII, 739; 1864, LVIII, 1111; — J.-L. SORET, *Archives des sc. phys. et nat.* 1874, XLIX, 338; 1876, LVII, 319; 1880, IV, 510; — E. SARASIN, *C. R.* 1877, LXXXV, 1230; 1882, XCV, 680; 1883, XCVII, 850; — CORNU, *J. de Phys.* 1878, VII, 285; 1879, VIII, 185; — F. DUSSAUD, *Archives*, 1892, XXVII, 380, 521.

une petite chambre noire, et la plaque sensible est mise à la place du réticule au foyer de l'objectif.

On peut aussi, ce qui est plus commode, employer l'*oculaire fluorescent* de J.-L. Soret. Le réticule est remplacé par une mince couche d'un corps fluorescent (verre d'urane ou solution d'esculine contenue entre deux lames transparentes) qui devient lumineuse là où elle est frappée par les rayons ultra-violet. On observe obliquement l'apparence que prend cette couche à l'aide d'un oculaire qui peut s'incliner plus ou moins sur l'axe de la lunette.

Le verre est opaque pour les radiations très réfrangibles; toutes les fois que l'on opère sur cette région du spectre, il faut munir le collimateur et la lunette de lentilles de quartz, qui sont beaucoup plus transparentes.

266. Spectre infra-rouge¹. — Il faut également recourir à des dispositions spéciales pour mesurer la réfraction des radiations moins réfrangibles que le rouge, qui constituent le spectre calorifique obscur. Les lentilles du spectromètre doivent être construites en sel gemme; au foyer de la lunette on place une pile thermoélectrique ou mieux un *bolomètre*, c'est-à-dire un fil métallique qui s'échauffe plus ou moins suivant l'intensité des rayons de chaleur qu'il reçoit. La température du fil se déduit de sa résistance électrique que l'on mesure à l'aide d'un dispositif convenable.

Pour définir la longueur d'onde de chaque radiation, on peut employer divers procédés. Le plus simple, dû à M. Rubens, est basé sur un phénomène d'interférences. Avant d'arriver au spectromètre, les rayons se réfléchissent sur une mince lame d'air comprise entre deux plaques transparentes. Les rayons

¹ MOUTON, *C. R.* 1879, LXXXVIII, 1078, 1189; — LANGLEY, *Wied. Ann.* 1884, XXII, 598; — A. RUBENS, *ibid.* 1892, XLV, 238.

réfléchis à la face postérieure de cette lame se superposent à ceux qui se sont réfléchis sur la face antérieure, mais les premiers doivent traverser deux fois la lame d'air, et, soit par le fait de ce trajet supplémentaire, soit par le fait de la réflexion elle-même qui ne s'opère pas dans les mêmes conditions sur les deux faces, les deux groupes de rayons prennent l'un sur l'autre un certain retard T qui ne dépend que de la disposition de la lame d'air. Les radiations pour lesquelles ce retard vaut un nombre impair de demi-périodes, $T = (2k + 1)\frac{\tau}{2}$ (§ 191), disparaissent par interférence, tandis que les radiations intermédiaires sont conservées. Le spectre est interrompu à intervalles réguliers par des franges d'intensité nulle ou minimum. Si τ et τ' sont les durées d'oscillation des radiations supprimées qui correspondent à deux quelconques de ces franges, et si l'on compte le nombre $p - 1$ des franges intermédiaires, on aura

$$T = (2k + 1)\frac{\tau}{2} \text{ pour la première,}$$

$$T = (2(k + p) + 1)\frac{\tau'}{2} \text{ pour la seconde,}$$

et, en éliminant k , on obtiendra une formule permettant : 1° de déterminer le retard T de l'appareil si τ et τ' sont connus; il suffira pour cela de choisir deux franges dans le spectre visible; 2° T étant connu, de déterminer la période τ' d'une frange du spectre calorifique, en partant d'une frange visible de période τ connue. La formule $V = \lambda'/\tau'$ (§ 186) donnera la longueur d'onde λ' .

267. Influence de la température. — Les indices de réfraction diminuent en général quand la température s'élève. Cependant ce n'est pas là une règle tout à fait générale; pour quelques corps la variation est en sens inverse.

On peut, à l'aide d'une étuve installée sur le goniomètre, por-

ter le prisme successivement à diverses températures que l'on maintient constantes pendant les mesures¹. Il vaut mieux, en général, déterminer non pas les indices eux-mêmes aux diverses températures, mais les variations qu'ils subissent lorsqu'on passe d'une température à l'autre.

D'autres méthodes, plus précises, sont fondées sur des phénomènes d'interférences².

On peut, par exemple, disposer sur le trajet des rayons parallèles envoyés par un collimateur deux lames à faces parallèles, taillées à peu près de même épaisseur dans le corps que l'on veut étudier, en s'arrangeant pour que chacune d'elles soit traversée par une des moitiés du faisceau. L'une de ces lames est maintenue à une température constante, tandis que l'on fait varier la température de l'autre.

En traversant ces lames, les deux faisceaux subissent des retards T_1 et T_2 , et prennent une différence de marche $T_1 - T_2$. On les fait passer au travers d'un prisme de verre quelconque, et on les reçoit sur une lunette qui les rassemble en son foyer; là ils interfèrent positivement ou négativement suivant que $T_1 - T_2$ est égal à un nombre pair ou impair de demi-périodes. Si le faisceau primitif est formé de lumière blanche, les durées d'oscilla-

¹ RUDBERG, *Pogg. Ann.* 1832, XXVI, 291; — STEFAN, *Sitzb. Akad. Wien*, 1871, LXIII, 223; — BAILLE, *Sur les indices de réfraction*, Thèse, Paris, 1867; — ARZRUNI, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 165; — F. VOGEL, *Wied. Ann.* 1885, XXV, 87; — LAGERBERG, *Beibl.* 1889, XIII, 490; — A. OFFRET, *Bull. Soc. min.* 1890, XIII, 405; — PULFRICH, *Wied. Ann.* 1892, XLV, 609. — Voyez aussi GROTH, *Physik. Krystallog.* 1876; — BECKENKAMP, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIII, 84.

Quelques auteurs ont simplement utilisé les variations de la température ambiante. VAN DER WILIGEN, *Archives du Musée Teyler*, 1869, II, 153; — G. MÜLLER, *Beibl.* 1886, X, 279; — A. SCHRAUF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1890, XVIII, 124.

² FIZEAU, *Ann. de Chim.* 1862, LXVI, 429; 1864, II, 143; — MASCART, *J. de Phys.* 1872, I, 177; — MOUTON, *C. R.* 1879, LXXXVIII, 967; — DUFET, *Bull. Soc. min.* 1881, IV, 191; 1885, VIII, 171; 1888, XI, 135.

tion et les retards varient graduellement d'un bout à l'autre du spectre, on voit celui-ci sillonné de bandes alternativement brillantes et obscures. Il est à remarquer toutefois que, par suite de phénomènes de diffraction particuliers, ces bandes ne sont visibles que si la lame qui produit le plus grand retard intercepte celle des deux moitiés du faisceau qui passe du côté de l'arête du prisme (*bandes de Talbot*)¹.

Pour une frange brillante qui, à une température t de la lame, coïncide dans le spectre avec une certaine radiation de période τ , on a

$$T_1 - T_2 = k\tau.$$

Si la température devient t' , le retard devient T'_2 , et il passe sur la radiation considérée un nombre p de franges que l'on peut compter. On a alors, le retard de l'autre lame n'ayant pas changé,

$$T_1 - T'_2 = (k + p)\tau$$

et l'on tire de ces deux formules

$$T_1 - T'_2 = p\tau.$$

Or si e est l'épaisseur de la lame, V_t et U_t la vitesse de la radiation considérée dans la lame et dans l'air, à la température initiale t ; si e' , $V_{t'}$, $U_{t'}$ sont les mêmes quantités à la température t' , on a

$$T_1 = \frac{e}{V_t} - \frac{e}{U_t} \quad T'_2 = \frac{e'}{V_{t'}} - \frac{e'}{U_{t'}}.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression ci-dessus de $T_1 - T'_2$, multiplions les deux membres par V , vitesse de la lumière dans le vide, et remplaçons les rapports V/V_t , V/U_t , $V/V_{t'}$, $V/U_{t'}$ par les indices n , μ , n' et μ' de la lame et de l'air par rapport au

¹ TALBOT, *Phil. Mag.* 1837, X, 364.

vide, et le produit $V\tau$ par la valeur λ de la longueur d'onde dans le vide, il viendra

$$e(n - \mu) - e'(n' - \mu') = p\lambda,$$

qui permettra de tirer n' si on connaît l'épaisseur e et l'indice n de la lame ainsi que sa dilatation. Les indices μ, μ' de l'air et la longueur d'onde λ sont considérés comme connus.

268. Valeurs de quelques indices de réfraction. —

Afin de donner une idée de la grandeur des variations qu'éprouvent les indices de réfraction suivant la longueur d'onde de la lumière employée, suivant la température, et suivant la direction dans les cristaux biréfringents, nous reproduisons ici un petit nombre de chiffres relatifs à quelques corps importants et choisis parmi les mieux connus¹. Les quantités Δn représentent, pour la partie moyenne du spectre, les variations moyennes des indices par degré d'élévation de température aux températures ordinaires; les longueurs d'ondes λ sont exprimées en millièmes de millimètres.

Sauf pour la barytine, les indices sont pris par rapport à l'air. L'indice de l'air par rapport au vide, à la température de 0° et à la pression de 360^{mm}, est d'environ 1,000293 pour le jaune (raie D) et 1,000298 pour le violet (raie H); pour des variations modérées il diminue de 0,000001 par degré d'élévation de la température, et il augmente de 0,000004 par centimètre d'accroissement de pression.

¹ Le quartz et le chlorate de soude sont énantiomorphes, mais cette particularité n'influe pas sensiblement sur leurs indices de réfraction. Les chiffres des tableaux ci-joints sont tirés des travaux de MM. Rubens (1), Stefan (2), Sarasin (3), Dufet (4), Dussaud (5), Mascart (6), Offret (7), Vogel (8), Rudberg (9), Schrauf (10), Mouton (11).

A. CRISTAUX CUBIQUES.

	SEL GEMME (17°)		FLUORINE (17°)		CHLORATE DE SOUDE (23°)
	λ	n	λ	n	
Infra-rouge.	5746	1,5179 ¹	3332	1,4170 ¹	
	2296	1,5255	2221	1,4234	
	1043	1,5313	1024	1,4289	
Rouge, raie A.	760	1,5366 ²		1,43101 ³	
» » <i>a</i>	718			1,43157	1,51097 ⁵
Jaune, raie D.	589	1,5442		1,43394	1,51510
Bleu, raie F.	486	1,5532		1,43705	1,52161
Violet, raie H.	397	1,5682		1,44214	
Ultra-violet Cd 12.	325			1,44987	1,54700
» Cd 18.	257			1,46476	1,58500
» Al 32.	186			1,50940	
Δn		-0,0000371		-0,0000134 ⁴	-0,000057

B. CRISTAUX A UN AXE.

	QUARTZ (15°)			CALCITE (22°)	
	λ	n_o	n_e	n_o	n_e
Infra-rouge. ...	2140	1,5191 ¹¹	1,5278		
	1080	1,5338	1,5427		
Rouge, raie A. . .	760	1,53902 ⁶	1,54812	1,65013 ⁶	1,48285
Jaune, raie D. . .	589	1,54423	1,55338	1,65846	1,48654
Bleu, raie F. . . .	486	1,54966	1,55897	1,66793	1,49084
Violet, raie H. . .	397	1,55816	1,56770	1,68330	1,49777
Ultra-violet Cd 12	325	1,57094 ³	1,58097	1,70764 ³	1,50857
» Cd 18	257	1,59624	1,60713	1,76050	1,53019
» Cd 26	214	1,63040	1,64268	1,84580	1,55993
» Al 32.	186	1,6750	1,6891		
Δn		-0,00000625 ⁴	-0,00000722	+0,00000040 ⁷	+0,0000106
				0,00000089 ⁸	0,0000102

C. CRISTAUX A DEUX AXES.

ARAGONITE (18°)				
	λ	n_a	n_b	n_c
Rouge, raie B	687	1,52749 ⁹	1,67631	1,68061
Jaune, raie D	589	1,53013	1,68157	1,68589
Bleu, raie F	486	1,53479	1,69053	1,69515
Violet, raie H	397	1,54226	1,70509	1,71011
Δn		-0,000140 ⁷	-0,0000242	-0,000027

SOUFRE (20°) ¹⁰				
	λ	n_a	n_b	n_c
Rouge Li	670	1,93975	2,01709	2,21578
Jaune Na	589	1,95791	2,03770	2,24516
Vert Tl	535	1,97638	2,05865	2,27545
Δn		-0,000171	-0,000217	-0,000279

BARYTINE (0°) (par rapport au vide) ¹				
	λ	n_a	n_b	n_c
Rouge Li	670	1,63384	1,63492	1,64587
Jaune Na	589	1,63697	1,63808	1,64917
Bleu Cd 5	480	1,64389	1,64505	1,65644
Δn		-0,0000205	-0,0000180	-0,0000272

Parmi les corps que nous venons de citer, le soufre est remarquable par la grandeur de ses indices principaux, de sa biréfringence et de l'influence exercée par la température. Cette double réfraction énergique le rend particulièrement propre à la vérification des lois de Fresnel, et surtout à l'observation des phénomènes de la réfraction conique¹.

¹ SCHRAUF, *Wied. Ann.* 1889, XXXVII, 127.

CHAPITRE XX

POLARISATION CHROMATIQUE

. APPAREILS DE POLARISATION

269. **Polariseurs par double réfraction.** — La double réfraction fournit un procédé commode pour obtenir de la lumière polarisée rectilignement. Plaçons sur le trajet d'un rayon de lumière naturelle une lame biréfringente à faces parallèles, taillée par exemple dans un cristal de spath d'Islande; la limpidité et la double réfraction énergique de cette substance, qui est une variété de carbonate de chaux naturel, cristallisé dans le système rhomboédrique, la rendent particulièrement propre aux expériences de ce genre. Si la lame est suffisamment épaisse, et si le faisceau lumineux n'est pas trop large, le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire seront complètement séparés (fig. 403) lorsque, à leur sortie du cristal, ils redeviendront parallèles à leur direction primitive. Ces deux rayons sont polarisés rectilignement et ont leurs vibrations dans des plans

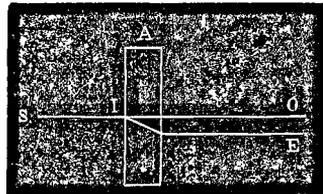


Fig. 403.

rectangulaires. On pourra à volonté se servir de l'un d'eux, en supprimant l'autre par un écran convenable.

270. Expérience des deux spaths. — Une expérience très caractéristique, et qui fait bien voir la différence qui existe entre les lumières polarisées qui forment les deux rayons, consiste à faire tomber ceux-ci sur une seconde lame de spath B,

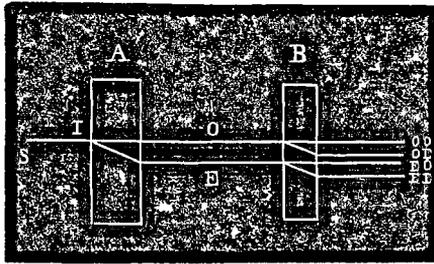


Fig. 404.

semblable à la première, et disposée de manière à pouvoir tourner dans son plan autour d'un axe parallèle au rayon lumineux (fig. 404).

Si la section principale de la lame B est parallèle à la section principale de la lame A, le rayon ordinaire O la traverse à l'état de rayon ordinaire OO, et le rayon extraordinaire E à l'état de rayon extraordinaire EE.

Si l'on fait tourner B autour de IO, de telle sorte que sa section principale devienne perpendiculaire à celle de A, le rayon O passe sans altération à l'état de rayon extraordinaire OE, puisque ses vibrations, perpendiculaires à la section principale de la lame A, se trouvent parallèles à la section principale de la seconde lame. Inversement le rayon extraordinaire E traverse B sans altération comme rayon ordinaire EO.

Si les sections principales des deux lames forment un angle α , le rayon O, d'amplitude α , se dédouble (§ 222) en un rayon ordi-

naire OO d'amplitude $a \cos \alpha$ et d'intensité $a^2 \cos^2 \alpha$, et un rayon extraordinaire OE d'amplitude $a \sin \alpha$ et d'intensité $a^2 \sin^2 \alpha$. De même le rayon extraordinaire E donne dans la seconde lame un rayon ordinaire EO d'amplitude $a \sin \alpha$ et un rayon extraordinaire EE d'amplitude $a \cos \alpha$.

271. Prisme biréfringent. — Pour obtenir un écartement suffisant des deux rayons transmis, sans augmenter outre mesure l'épaisseur et par suite le prix de la lame biréfringente, il vaut mieux donner à celle-ci la forme d'un prisme. Elle réfracte alors les deux rayons dans des directions différentes et les sépare complètement (fig. 405). Seulement, pour éviter la séparation des couleurs résultant de la dispersion, il faut achromatiser le prisme de spath par un prisme de verre tourné en sens inverse, et choisi de manière à compenser exactement la dispersion du spath pour l'un des deux rayons que l'on utilisera seul.

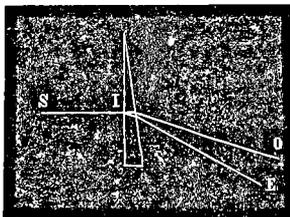


Fig. 405.

272. Prisme de Nicol. — Le plus souvent, au lieu d'arrêter l'un des rayons par un écran, on s'en débarrasse en lui faisant subir une réflexion totale à l'intérieur même du prisme

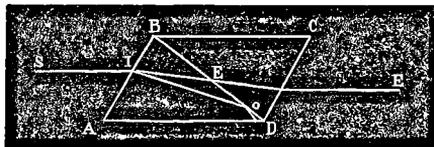


Fig. 406.

polariseur. Le type des appareils de ce genre est le *prisme de Nicol*¹. Un rhomboèdre de spath d'Islande est coupé (fig. 406)

¹ W. NICOL, *Pogg. Ann.* 1833, XXIX, 182; 1840, XLIX, 238.

suivant un plan oblique BD perpendiculaire à sa section principale ABCD, et les deux moitiés sont recollées dans leur position primitive au moyen d'une couche de baume de Canada. L'indice de réfraction de cette substance est plus petit que l'indice ordinaire du spath, et plus grand que l'indice extraordinaire. Si l'inclinaison de la section BD est convenablement choisie, le rayon ordinaire IO rencontre la surface du baume sous une incidence supérieure à l'angle limite; il est réfléchi totalement et renvoyé de côté; le rayon extraordinaire, au contraire, est toujours réfracté dans le baume plus réfringent pour lui que le spath, reprend sa direction primitive au sortir de la couche de résine, et continue seul son chemin à travers le prisme.

Le prisme de Nicol a du reste été modifié de diverses manières, dans le but d'économiser le spath d'Islande, ou d'augmenter le champ de l'instrument.

273. Polariseurs par absorption. — La double réfraction n'est pas le seul moyen de polariser la lumière. Une lame taillée parallèlement à l'axe dans une tourmaline un peu fortement colorée a la propriété d'être presque opaque pour le rayon ordinaire sous une épaisseur qui laisse encore très bien passer le rayon extraordinaire¹. Une telle lame constitue donc un polariseur de petites dimensions et très robuste; son seul inconvénient est de ne laisser passer qu'une lumière colorée en brun ou en vert.

274. Polariseurs par réflexion. — On peut encore, mais c'est un procédé en général beaucoup moins commode, faire réfléchir sur un miroir de verre noir le rayon que l'on veut polariser. Pour une valeur convenable de l'angle d'incidence, le

¹ Biot, *Traité de Physique*, 1816, IV, 311.

rayon réfléchi est complètement polarisé dans le plan d'incidence.

275. Appareils de polarisation. — Un appareil de polarisation se compose généralement de deux polariseurs disposés de manière à être traversés successivement par le rayon lumineux, et à pouvoir tourner autour d'un axe parallèle à la direction de ce rayon. Celui des deux polariseurs qui est du côté d'où vient la lumière porte spécialement le nom de *polariseur*; l'autre, au travers duquel on regarde, s'appelle l'*analyseur*. Entre le polariseur et l'analyseur est un espace où l'on peut placer les cristaux à étudier, préalablement taillés en forme de lames à faces parallèles¹.

276. Pince à tourmalines. — C'est le plus simple de tous les appareils de polarisation. Un gros fil métallique est replié en forme de pince (fig. 407) dont les mors sont figurés par deux anneaux placés en regard l'un de l'autre. Dans ces anneaux peuvent tourner deux lames convenablement enchâssées, taillées parallèlement à l'axe dans un cristal de tourmaline.



Fig. 407.

277. Microscope polarisant à lumière parallèle². — C'est un microscope ordinaire comprenant un objectif, un oculaire et une plate-forme destinée à recevoir les objets à étudier, que l'on éclaire par-dessous à l'aide d'un miroir. Entre le miroir et le porte-objet (fig. 408) est un tube E qui contient le nicol

¹ BIOT, *Traité de Physique*, 1816, IV, 255.

² Les microscopes polarisants résultent du perfectionnement des appareils imaginés par AMICI vers 1830, *Ann. de Chim.* 1844, XII, 114; et par NÖRRENBERG; voy. GRAILICH, *Kryst. opt. Untersuchungen*, Vienne 1858, 42, et BERTIN, *Ann. de Chim.* 1863, LXIX, 87.

polariseur. L'analyseur A est fixé dans l'oculaire, lequel peut tourner autour de l'axe du microscope sur un cercle gradué. Le

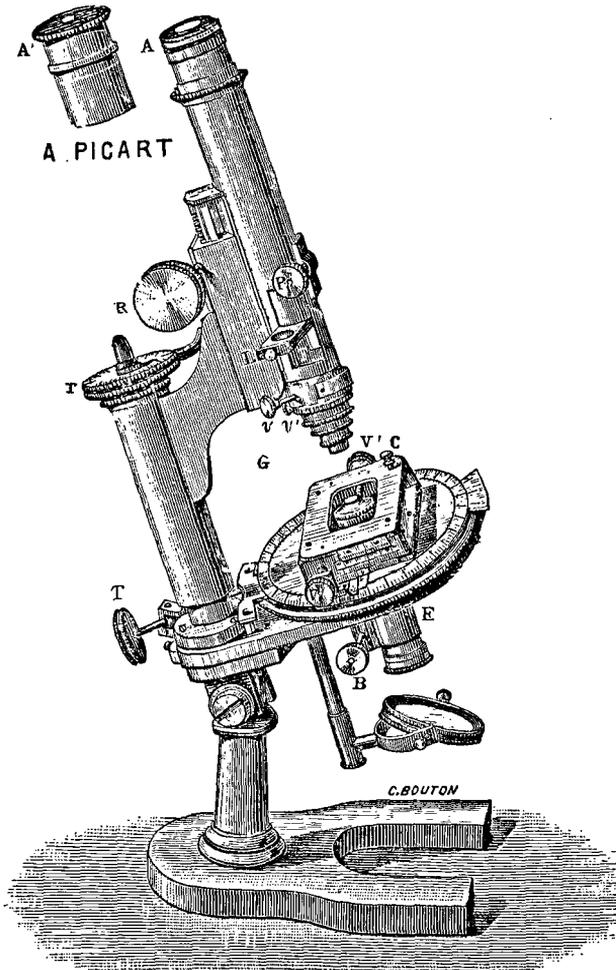


Fig. 408¹.

porte-objet, également gradué sur son pourtour, peut tourner dans son plan vis-à-vis d'un index fixe.

¹ Microscope de E. Bertrand construit par la maison A. Picart à Paris.

278. Microscope polarisant à lumière convergente.

— Au-dessus du nicol polariseur (fig. 409, 410), et au-dessous du porte-objet, est un système de lentilles qui fait converger

fortement les rayons sur la lame cristalline que l'on veut examiner. L'objectif est remplacé par un second système de lentilles qui reprend ce faisceau au sortir du cristal et le renvoie vers

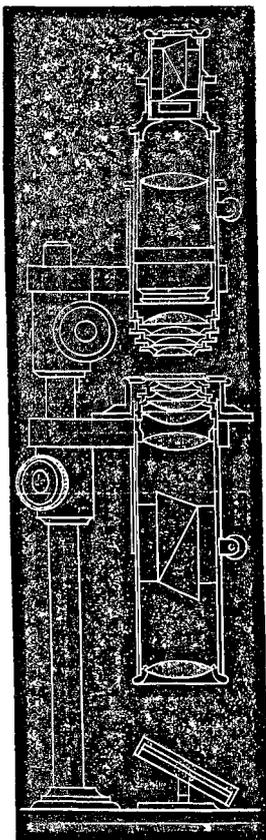


Fig. 409¹.

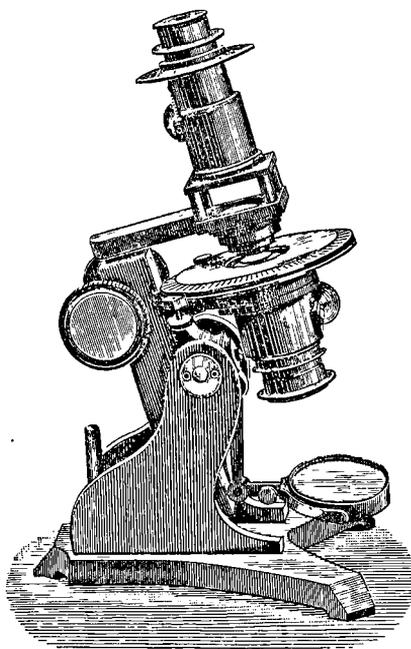


Fig. 410².

l'oculaire. Celui-ci est formé simplement d'un nicol et d'une lentille montés sur un cercle gradué.

Quelquefois (fig. 411), pour diminuer le coût de l'instrument ou pour avoir un faisceau plus large de lumière polarisée, on

¹ P. GROTH, *Pogg. Ann.* 1872, CXLIV, 34. Construit par R. Fuess à Berlin.

² Modèle construit par la *Société genevoise*.

remplace le polariseur par un miroir en verre noir P qui polarise par réflexion la lumière des nuées tout en la renvoyant dans l'axe de l'appareil.

Cette disposition ne se prête pas à l'étude de très petits cristaux. Pour opérer avec de forts grossissements, on combine la partie inférieure de l'appareil que nous venons de décrire avec

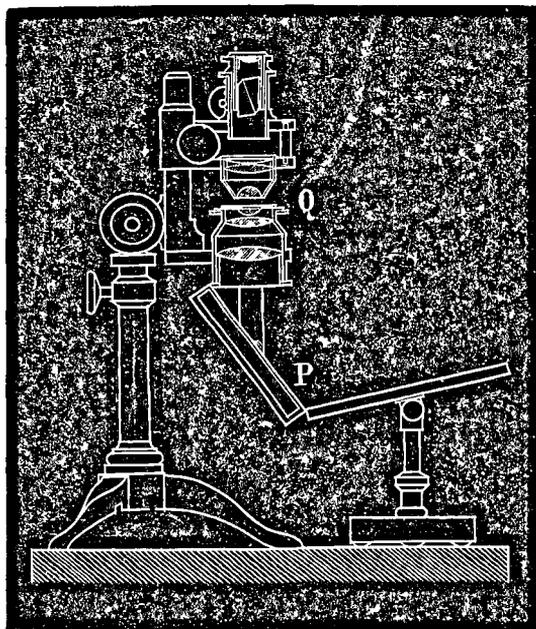


Fig. 411¹.

la partie supérieure du microscope polarisant à lumière parallèle². On adapte à celui-ci un objectif un peu fort, et on dispose un peu au-dessus une lentille achromatique de 3 centimètres environ de foyer, qu'une disposition mécanique facile à concevoir permet de faire monter ou descendre dans le tube, ou même de

¹ DES CLOIZEAUX, *Ann. des mines*, 1859, XVI, 239.

² E. BERTRAND, *Bull. Soc. min.* 1878, I, 27, 96; 1880, III, 97; 1885, VIII, 29, 377; — A. v. LASAULX, *Zeitsch. f. Kryst.* 1878, II, 255.

supprimer complètement à volonté. Si on enlève cette lentille, on a un microscope ordinaire à lumière parallèle. Si on la rétablit en rapprochant l'objectif de l'objet, l'appareil fonctionne comme un microscope à lumière convergente. L'appareil figuré ci-dessus (fig. 408) est pourvu en L et P de ce dispositif.

OBSERVATION EN LUMIÈRE PARALLÈLE

279. Extinction en lumière parallèle. — Soient P et A (fig. 412) le polariseur et l'analyseur, que nous figurons l'un à côté de l'autre pour plus de clarté, mais que l'on doit supposer placés l'un derrière l'autre et traversés par un rayon perpendi-

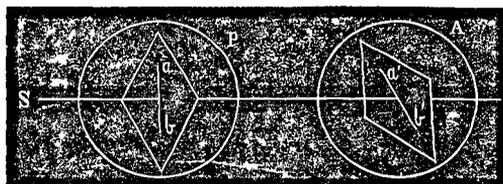


Fig. 412.

culaire au plan du dessin. Soient ab et $a'b'$ leurs sections principales. Le polariseur ne laisse passer que des vibrations parallèles à ab . Ces vibrations tombent sur l'analyseur, qui ne laisse passer que des vibrations parallèles à $a'b'$. Ce rayon sera transmis en entier si les deux sections principales sont parallèles, il sera complètement arrêté si les sections principales sont à angle droit. Dans les positions intermédiaires il n'en passera qu'une partie.

On verra donc, en faisant tourner l'analyseur autour d'une droite parallèle au rayon lumineux, le champ de l'appareil s'éclairer et s'obscurcir alternativement, suivant que $a'b'$ sera parallèle ou perpendiculaire à ab .

280. Effet d'une lame monoréfringente. — Le polariseur et l'analyseur étant croisés, ou à *l'extinction*, introduisons entre eux une lame monoréfringente quelconque, une lame de verre par exemple, ou une lame taillée dans un cristal du système cubique. Cette lame laisse passer sans altération des vibrations polarisées d'une

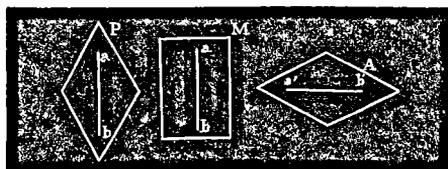


Fig. 413.

manner quelconque (§ 215). Recevant donc du polariseur P (fig. 413) une vibration ab verticale, elle transmettra simplement cette

vibration verticale à l'analyseur A, qui, étant primitivement à l'extinction, et ayant sa section principale $a'b'$ horizontale, arrêtera complètement la lumière, comme avant l'introduction de la lame. *L'obscurité subsiste, quelles que soient la position et l'inclinaison que l'on donne à la lame entre les deux nicols croisés.*

281. Effet d'une lame biréfringente¹. — Les choses se passent tout autrement si la lame que l'on introduit entre les nicols croisés de l'appareil de polarisation est taillée dans un cristal biréfringent. La lame biréfringente, en effet, ne laisse pas passer une vibration polarisée quelconque, mais seulement deux vibrations à angle droit l'une de l'autre et d'orientations déterminées. Appelons, pour abrégé, *lignes d'extinction* les traces OO et EE de ces deux vibrations privilégiées sur le plan de la lame (fig. 414).

¹ Les phénomènes dits de polarisation chromatique, produits par l'introduction des lames cristallines dans un appareil de polarisation à lumière parallèle, ont été découverts par ARAGO en 1811 et 1812, *Œuvres*, Paris 1858, X, 36, 85; — Biot les a étudiés plus complètement, voyez *Traité de Physique*, Paris 1816. — La théorie de ces phénomènes est due à FRESNEL (1816), *Œuvres*, I, 609.

Le polariseur envoyant toujours des vibrations verticales ab , si l'une des deux lignes d'extinction est parallèle à ab la vibration traverse la lame sans altération et vient tomber rectiligne

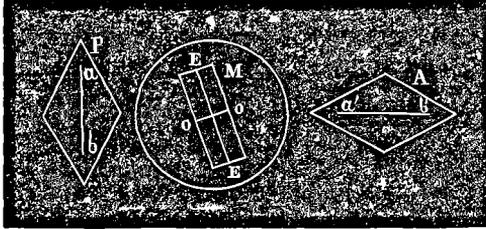


Fig. 414.

et verticale sur l'analyseur, qui l'arrête comme avant l'introduction de la lame.

Mais si, faisant tourner la lame dans son plan, on l'amène dans une position où les lignes d'extinction forment un angle différent de 0° ou de 90° avec la vibration incidente ab , celle-ci se décompose en entrant dans la lame en deux vibrations dirigées suivant OO et suivant EE (§§ 221, 229). Ces deux composantes traversent la lame avec des vitesses différentes et, lorsqu'elles se combinent de nouveau en rentrant dans l'air, elles se trouvent avoir acquis une certaine différence de marche. Leur résultante n'est plus nécessairement la vibration rectiligne primitive, mais bien une vibration elliptique en général (§ 183); celle-ci, tombant sur l'analyseur, donne une composante parallèle à $a'b'$, qui n'est pas arrêtée. Il y a donc un rétablissement de lumière plus ou moins prononcé dans le champ de l'instrument.

Ainsi l'introduction d'une lame biréfringente entre les nicols placés à l'extinction a généralement pour effet de rétablir la lumière, sauf quand la lame a l'une des quatre positions rectangulaires entre elles où l'une des lignes d'extinction est parallèle à la section principale du polariseur.

Quant à l'intensité de la lumière transmise, elle varie avec la nature et l'épaisseur de la lame, avec son orientation cristallographique, avec son inclinaison par rapport à l'axe de l'instrument, et avec la couleur de la lumière employée.

Une lame d'épaisseur e placée normalement à l'axe du microscope introduit entre les deux rayons polarisés à angle droit qui la traversent avec des vitesses V_1 et V_2 , un retard relatif exprimé par

$$T_1 - T_2 = e \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

L'effet produit est toujours nul et l'obscurité persiste dans le champ de l'instrument si, en désignant par τ la période de la lumière monochromatique employée, par λ et V sa longueur d'onde et sa vitesse dans l'air, et par k un nombre entier quelconque, on a

$$T_1 - T_2 = k\tau = k \frac{\lambda}{V}.$$

Soient n_1 et n_2 les indices V/V_1 et V/V_2 des deux rayons, il y aura extinction si

$$k\lambda = e(n_1 - n_2).$$

282. Effet d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal uniaxe. — Nous avons vu (§ 226) qu'une telle lame laisse passer sans altération tous les rayons qui la traversent normalement, quel que soit leur plan de polarisation. Introduite entre les nicols croisés, elle se comportera donc comme une lame isotrope et ne rétablira pas la lumière. On pourra la faire tourner dans son plan sans rien changer au phénomène, mais dès qu'on l'inclinera par rapport au rayon, celui-ci la traversera dans une direction oblique à l'axe et par conséquent biréfringente, et la lumière réapparaîtra.

Le plus souvent le faisceau lumineux n'est pas suffisamment parallèle, et la lame, quoique normale à l'axe de l'instrument, est traversée par des rayons plus ou moins obliques. Il n'y a pas d'extinction complète. Toutefois le phénomène reste caractéristique, l'éclairement du champ ne changeant pas lorsqu'on fait tourner la lame dans son plan.

283. Application aux déterminations cristallographiques. — Le microscope polarisant à lumière parallèle permet donc de reconnaître immédiatement, et même sur de très petits fragments, si une substance est monoréfringente ou biréfringente.

Dans le premier cas, le corps ne peut être qu'amorphe ou cristallisé dans le système cubique : le plus souvent ses formes extérieures ou des traces de clivages plus ou moins visibles ne laisseront pas d'ambiguïté.

Si le cristal est biréfringent, l'orientation des lignes d'extinction par rapport aux arêtes dépend de l'orientation de la surface de l'onde, qui varie d'un système cristallographique à l'autre.

Les cristaux quadratiques et hexagonaux sont généralement allongés suivant l'axe principal, ou aplatis suivant la base. Dans le premier cas l'extinction a lieu parallèlement et perpendiculairement à la direction d'allongement; dans le second cas il n'y a pas de rétablissement de lumière, sauf si l'on incline la lame sur l'axe de l'instrument. Dans une lame parallèle à une face de pyramide, les lignes d'extinction sont symétriquement placées par rapport aux arêtes.

Dans les cristaux rhombiques examinés sur une face comprise dans une des zones principales, les extinctions se font parallèlement aux axes cristallographiques et sont en général symétriques par rapport aux contours de la lame.

Dans les cristaux clinorhombiques, les extinctions se font

symétriquement sur les faces perpendiculaires au plan de symétrie (fig. 415), et obliquement sur les autres. Sur une face parallèle au plan de symétrie (fig. 416) les lignes d'extinction

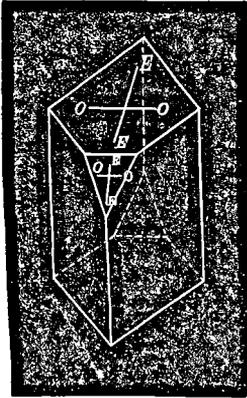


Fig. 415.

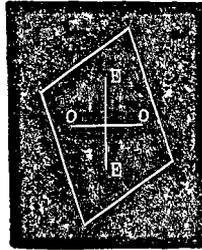


Fig. 416.

sont généralement obliques sur les arêtes verticales du cristal et forment avec celles-ci un angle qui est caractéristique pour chaque substance.

Dans les cristaux tricliniques, les lignes d'extinction, comme la surface d'onde elle-même, sont généralement dissymétriques sur toutes les faces du cristal, et leur position

peut servir de caractère distinctif pour chaque corps.

284. Calcul de l'intensité de la lumière rétablie. —

Il n'est pas inutile d'examiner de plus près le phénomène qui donne lieu à des applications aussi importantes. Pour plus de

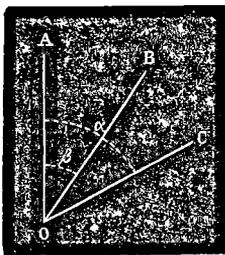


Fig. 417.

généralité, nous supposons que les sections principales OA et OB (fig. 417) de l'analyseur et du polariseur comprennent entre elles un angle β quelconque, tandis qu'une des lignes d'extinction OC de la lame cristalline forme un angle α avec la trace OA de la section principale du polariseur.

La vibration incidente parallèle à OA, dont nous supposons l'amplitude égale à l'unité, est

$$u = \sin 2\pi \frac{t}{\tau};$$

elle se décompose, en tombant sur la lame cristallisée, en deux

vibrations, parallèle et perpendiculaire à OC, dont les équations sont

$$u' = \cos \alpha \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \text{et} \quad v' = \sin \alpha \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

et qui, cheminant avec des vitesses différentes V_1 et V_2 , prennent en traversant la lame d'épaisseur e , des retards e/V_1 et e/V_2 .

A leur sortie dans l'air elles sont donc représentées par

$$u'' = \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{e}{V_1} \right)$$

$$v'' = \sin \alpha \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{e}{V_2} \right).$$

Elles arrivent ensuite à l'analyseur, qui ne laisse passer de chacune d'elles que la composante parallèle à sa section principale OB. Ces deux composantes s'ajoutent algébriquement pour donner la vibration qui parvient à l'observateur. Cette vibration est donc

$$E = \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{e}{V_1} \right)$$

$$+ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{e}{V_2} \right).$$

Posons pour abrégier

$$\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) = a_1;$$

$$\sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = a_2;$$

$$2\pi \frac{t}{\tau} = x; \quad \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_1} = m; \quad \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_2} = n;$$

on aura

$$E = a_1 \sin (x - m) + a_2 \sin (x - n)$$

$$= (a_1 \cos m + a_2 \cos n) \sin x - (a_1 \sin m + a_2 \sin n) \cos x.$$

Posons encore

$$a_1 \cos m + a_2 \cos n = A \cos \varphi$$

$$a_1 \sin m + a_2 \sin n = A \sin \varphi$$

ce qui est toujours possible, puisqu'il suffit de prendre

$$\text{tang } \varphi = \frac{a_1 \sin m + a_2 \sin n}{a_1 \cos m + a_2 \cos n}$$

et
$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(m - n).$$

Il viendra alors

$$E = A \cos \varphi \sin x - A \sin \varphi \cos x = A \sin(x - \varphi),$$

x valant $2\pi \frac{t}{\tau}$, l'expression E que nous venons d'obtenir représente une vibration de période τ et d'amplitude A . L'intensité de la lumière transmise, proportionnelle au carré de l'amplitude, est représentée par A^2 , et l'on a

$$\begin{aligned} A^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(m - n) \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \alpha \sin^2(\alpha - \beta) \\ &\quad + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta) \cos(m - n). \end{aligned}$$

Remplaçons $\cos(m - n)$ par $1 - 2 \sin^2 \frac{m - n}{2}$, on pourra écrire

$$\begin{aligned} A^2 &= [\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta)]^2 \\ &\quad - 4 \cos \alpha \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{m - n}{2} \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \alpha + \beta) = \cos \beta$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$$

$$2 \cos(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin 2(\alpha - \beta);$$

et en remplaçant m et n par leurs valeurs, $m = \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_1}$ ou $\frac{2\pi}{\tau} T_1$, et $n = \frac{2\pi}{\tau} \frac{e}{V_2}$ ou $\frac{2\pi}{\tau} T_2$, dans lesquelles T_1 et T_2 sont les temps employés par les deux vibrations pour traverser la lame,

$$A^2 = \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{\tau} (T_1 - T_2).$$

285. Discussion de la formule. Lignes d'extinction.

— Quelle que soit la période τ de la lumière employée, si la

ligne d'extinction OC est parallèle ou perpendiculaire à la section principale du polariseur ($\sin 2\alpha = 0$) ou de l'analyseur ($\sin 2(\alpha - \beta) = 0$), l'intensité est égale à $\cos^2 \beta$, comme si la lame cristalline n'existait pas. Si l'on opère en lumière blanche, la lumière transmise dans ces positions particulières de la lame est incolore. Son intensité est égale à 1 si, les nicols étant parallèles, on a $\beta = 0$, elle est nulle s'ils sont croisés, car on a dans ce cas $\beta = 90^\circ$, $\cos^2 \beta = 0$.

286. Coloration de la lumière transmise. — Les couleurs pour lesquelles $\sin^2 \frac{\pi}{\tau} (T_1 - T_2) = 0$ ou $T_1 - T_2 = k\tau$, k étant un nombre entier, ne changent pas d'intensité quand on tourne la lame dans son plan sans modifier l'angle β des sections principales des deux nicols. On voit, en effet, que pour ces radiations A^2 est indépendant de l'angle α .

Les autres couleurs passent par des maxima et des minima d'intensité, qui sont d'autant plus marqués que β est plus voisin de 90° , et que $T_1 - T_2$ est plus près de $(2k + 1) \frac{\tau}{2}$. Si la lame est très mince, ou très peu biréfringente, cette dernière condition pourra n'être remplie pour aucune radiation du spectre visible, l'effet de la lame sera insensible.

Si l'épaisseur ou la biréfringence de la lame sont plus fortes, les minima d'intensité se produiront pour une, deux, trois radiations visibles, la composition de la lumière transmise sera altérée et il y aura une coloration, d'autant plus prononcée que ces radiations supprimées seront moins nombreuses. Si la lame est épaisse ou très fortement biréfringente, les radiations supprimées ou affaiblies seront nombreuses, parce que la condition ci-dessus sera remplie simultanément pour un grand nombre de couleurs réparties d'une manière plus ou moins uniforme dans le spectre. Leurs variations d'intensité modifieront seulement l'intensité de la lumière transmise, mais non sa couleur.

* 287. **Rotation de la lame cristalline seule.** — Si, laissant les nicols immobiles, on tourne la lame de 90° dans son plan, on change α en $\alpha + 90^\circ$, et l'intensité d'une radiation transmise quelconque passe de la valeur

$$A^2 = \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{4} (T_1 - T_2)$$

à la valeur

$$A'^2 = \cos^2 \beta - \sin 2(\alpha + 90^\circ) \sin 2(\alpha - \beta + 90^\circ) \sin^2 \frac{\pi}{4} (T_1 - T_2).$$

Les deux sinus changeant simplement de signe par une variation de l'angle égale à 180° , leur produit reste le même, et les deux intensités A^2 et A'^2 sont égales. Comme il en est de même pour toutes les couleurs, la teinte observée en lumière blanche sera la même dans ces deux positions.

La rotation de la lame entre les nicols immobiles produit seulement des changements dans l'intensité de la coloration, mais ne modifie pas la teinte obtenue. Si l'on a du rouge, on obtiendra, en faisant varier α , des teintes qui seront toujours comprises entre le rouge et le blanc, ou entre le rouge et le noir, suivant que les nicols seront parallèles ou croisés.

* 288. **Rotation de l'analyseur seul.** — Si l'on fait, au contraire, tourner l'analyseur de 90° , en laissant immobiles la lame cristalline et le polariseur, la couleur transmise se transforme en sa complémentaire. En effet, le changement de β en $\beta + 90^\circ$ dans la formule qui donne l'intensité, fait passer celle-ci de la valeur

$$A^2 = \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{4} (T_1 - T_2)$$

à la valeur

$$A'^2 = \sin^2 \beta + \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{4} (T_1 - T_2);$$

on voit que

$$A^2 + A'^2 = 1$$

pour chaque couleur du spectre. La superposition des deux teintes résultantes obtenues donnerait donc du blanc.

289. Mesure de la biréfringence par le comparateur de M. Michel Lévy¹. — Il résulte de ce qui a été dit au § 286 que si l'épaisseur de la lame est connue, et comprise entre certaines limites, on pourra, d'après sa coloration, avoir une idée approximative de sa biréfringence. C'est ainsi que dans une roche taillée en lame mince de 0^{mm},02 environ d'épaisseur, les pyroxènes et l'olivine, très biréfringents, donnent, entre les nicols croisés, des couleurs vives, tandis que le quartz, le feldspath, qui sont trop peu biréfringents, et la calcite qui l'est trop, sont à peine teintés.

M. Michel Lévy mesure la biréfringence des lames cristallines engagées dans une coupe de roche, par la comparaison de la teinte qu'elles donnent en lumière parallèle entre les nicols croisés avec celle d'un quartz dont l'épaisseur peut varier à volonté. Le dispositif qu'il emploie dans ce but se compose (fig. 418) d'un oculaire s'adaptant au microscope, entre les deux lentilles duquel se trouve un prisme à réflexion totale P, muni sur sa face inclinée d'un très petit cylindre de verre P', collé au baume de Canada, et laissant passer un faisceau de rayons venant de la platine du microscope.

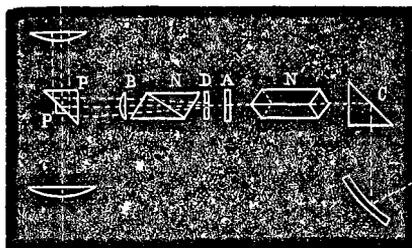


Fig. 418.

¹ A. MICHEL LÉVY, *Bull. Soc. min.* 1883, VI, 143; *Les minéraux des roches*, Paris 1888, 54.

Le reste de la surface du prisme renvoie à l'œil la lumière d'un petit appareil de polarisation horizontal composé de deux nicols N et N', d'un système éclairer C et d'une lame de quartz A, prismatique et parallèle à l'axe, qu'une vis de rappel permet de faire passer devant l'ouverture d'un petit diaphragme D. On peut ainsi modifier son épaisseur jusqu'à ce que la teinte transmise soit égale à celle du cristal que l'on examine.

290. Mesure de la biréfringence par le compensateur de Babinet ¹. — Le compensateur de Babinet (fig. 419) se compose de deux lames de quartz parallèles à l'axe taillées

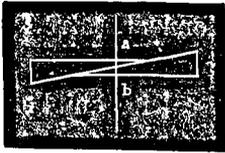


Fig. 419.

en prismes très aigus et de même angle; dans l'une l'axe optique est parallèle à l'arête du prisme, dans l'autre il lui est perpendiculaire. Les deux prismes sont appliqués l'un contre l'autre, l'un d'eux peut glisser sur l'autre à l'aide d'une vis micrométrique qui permet en même temps de mesurer son déplacement. Dans la région où ils sont superposés ils forment une lame à faces parallèles.

Soit ab le plan médian sur lequel les épaisseurs des deux prismes sont égales. Les sections principales étant croisées, un rayon monochromatique de période τ qui traverse le système en ab ne prend pas de différence de marche, car la partie de ce rayon qui traverse le prisme inférieur à l'état de rayon ordinaire devient extraordinaire dans le quartz supérieur et réciproquement. La région ab reste donc obscure dans l'appareil de polarisation, tandis qu'à droite et à gauche la différence de marche se produit avec le rétablissement de lumière qui en est la conséquence.

¹ Voyez JAMIN, *Ann. de Chim.* 1850, XXIX, 263.

Faisons avancer le prisme mobile; en ab les deux lames cessent d'avoir la même épaisseur; il se produit un retard qui va croissant, tandis que le plan où le retard est nul se déplace dans le même sens que le prisme. On voit donc la frange obscure se déplacer à mesure que l'on agit sur la vis. Mais lorsque (§ 281), par suite d'un glissement d du prisme, le retard sur le plan central ab est devenu égal à τ , l'obscurité est de nouveau rétablie, une nouvelle frange obscure est venue remplacer la première. On peut ainsi mesurer le déplacement d du compensateur qui produit une différence de marche τ entre les deux rayons qui traversent le système en ab . Les déplacements étant d'ailleurs proportionnels aux retards, on en déduira le déplacement qui correspond à un retard quelconque.

Cela posé, mettons le compensateur au zéro; nous voyons la frange noire en ab . Introduisons une lame cristalline qui produit un retard $e\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)$ ou $\frac{e}{v}(n_1 - n_2)$, la frange noire est déplacée dans un sens ou dans l'autre, mais on peut la ramener sur ab par un glissement δ du prisme mobile. A ce moment le retard de la lame est exactement compensé par le retard du compensateur, et l'on a

$$\frac{\delta}{d} = \frac{e(n_1 - n_2)}{v\tau} = \frac{e(n_1 - n_2)}{\lambda},$$

d'où l'on peut en déduire $n_1 - n_2$.

291. Spectres cannelés¹. — Si l'on reçoit dans un spectroscopie la lumière qui a traversé une lame biréfringente entre deux nicols croisés, on voit le spectre sillonné de raies obscures qui correspondent aux valeurs de λ pour lesquelles le retard introduit par la lame est

$$e(n_1 - n_2) = k\lambda.$$

¹ FIZEAU et FOUCAULT, *Ann. de Chim.* 1849, XXVI, 138; 1850, XXX, 146; — DUFET, *Bull. Soc. min.* 1881, IV, 113; 1885, VIII, 171; — MALLARD et LE CHATELIER, *ibid.* 1890, XIII, 123.

Si l'on fait varier graduellement la biréfringence, soit en changeant la température, soit par une action mécanique, on voit les bandes se déplacer; notons les températures ou les pressions pour lesquelles deux bandes consécutives viennent occuper une même position dans le spectre, nous aurons

$$e(n_1 - n_2) = k\lambda$$

$$e'(n'_1 - n'_2) = (k + 1)\lambda$$

et
$$e'(n'_1 - n'_2) - e(n_1 - n_2) = \lambda;$$

on mesurera ainsi la variation de la biréfringence avec la température ou avec la pression.

292. Procédés pour reconnaître de faibles biréfringences. — Le rétablissement de lumière produit par l'interposition d'une lame biréfringente entre les nicols croisés permet de reconnaître l'existence de la double réfraction. Cependant, si le retard introduit par la lame est trop faible, le rétablissement de lumière peut être insensible.

On peut alors interposer une lame biréfringente de gypse ou de mica, dont l'épaisseur est tellement choisie que, placée entre les nicols croisés avec ses lignes d'extinction à 45° de leurs sections principales, elle donne à elle seule une certaine coloration violacée dite *teinte sensible*. Cette teinte vire au bleu ou au rouge par la plus petite variation du retard dans un sens ou dans l'autre. Elle changera par conséquent d'une manière aisément perceptible, si à la lame sensible on superpose le cristal faiblement biréfringent que l'on veut examiner. La teinte sensible ne restera inaltérée que si les lignes d'extinction du cristal sont parallèles aux sections principales des nicols.

Ce procédé peut être rendu encore plus délicat si l'on coupe la lame sensible suivant une ligne *ab* (fig. 420) et si l'on rejoint les deux moitiés, après en avoir retourné une (fig. 421), de sorte

que leurs sections principales se trouvent croisées à angle droit¹. La teinte sensible s'observera dans les deux moitiés du champ si la ligne de séparation est parallèle à la vibration incidente. Après l'introduction du cristal, l'une des moitiés virera

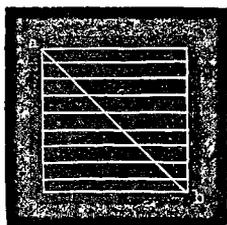


Fig. 420.

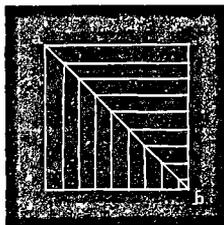


Fig. 421.

au bleu en même temps que l'autre virera au rouge, et le contraste rendra perceptible la plus petite différence de teinte des deux plages adjacentes. L'altération sera nulle encore ici, lorsque les lignes d'extinction du cristal seront parallèles aux sections principales des nicols.

293. Stauroscopes. — On peut remplacer la lame sensible par une lame de spath d'Islande perpendiculaire à l'axe que l'on place au-dessous et tout près de l'analyseur. Elle donne alors la figure d'interférence qui sera décrite plus loin au § 295. En interposant le cristal à étudier, la figure sera déformée, pour peu qu'il soit biréfringent, à moins que ses lignes d'extinction ne soient parallèles aux sections principales des nicols². On a plus de sensibilité encore en remplaçant la lame de spath par deux lames presque perpendiculaires à l'axe et superposées en sens inverse, qui donnent une figure d'interférence plus compliquée et plus aisément déformable³.

¹ BRAVAIS, *C. R.* 1851, XXXII, 112.

² V. KOBELL, *Pogg. Ann.* 1855, XCV, 320.

³ BREZINA; voy. GROTH, *Phys. Kryst.* Leipzig 1881, p. 491. — Sur ce genre d'appareils voyez LASPEYRES, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 429; 1884, VIII, 97.

On donne le nom de *staurosopes* à des microscopes polarisants sans grossissement ou à grossissement très faible, pourvus de systèmes sensibles quelconques, qui permettent, ainsi que nous venons de le voir, non seulement de reconnaître des doubles réfractions peu énergiques, mais encore de fixer exactement la position des lignes d'extinction (fig. 422).

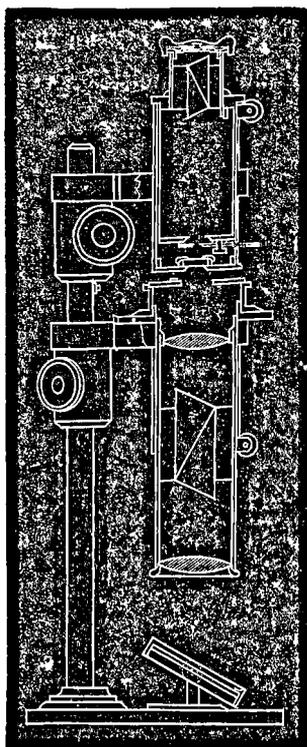


Fig. 422.

294. Détermination des lignes d'extinction. — Il faudra d'abord régler l'appareil. On se servira pour cela d'un petit cristal à un axe allongé dans la direction de l'axe; on le placera sur la plate-forme tournante du microscope de manière que sa section principale soit parallèle à celui des diamètres de cette plate-forme qui aboutit au zéro de la graduation ins-

crite sur son pourtour. Ce diamètre est en général indiqué par un trait gravé sur le porte-objet. Le zéro de la graduation est amené en face de l'index, et l'on fait tourner le polariseur dans sa monture jusqu'à ce que le petit cristal et le reste du champ du microscope soient également éclairés; à ce moment, la section principale du polariseur est parallèle ou perpendiculaire à la direction du zéro.

On amène ensuite l'analyseur à l'extinction, soit directement par l'obscurité, ce qui est peu précis, soit en plaçant sur le porte-objet une bilame (§ 292) dont les deux moitiés auront la même teinte si les nicols sont croisés.

L'appareil étant ainsi réglé, on pourra procéder aux mesures. Le cristal à étudier sera placé sur le porte-objet de manière qu'une de ses arêtes soit parallèle à la ligne du 0°, et on lira l'angle dont il faut faire tourner la plate-forme pour que l'extinction ou le phénomène qui en tient lieu dans le stauroscope se produise.

OBSERVATION EN LUMIÈRE CONVERGENTE¹

295. Figure produite en lumière convergente par une lame taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal uniaxe. — La lame, placée sur le porte-objet d'un microscope à lumière convergente (§ 278), est traversée par une infinité de faisceaux de rayons (fig. 423) compris dans un cône plus ou moins ouvert. Chacun de ces faisceaux, repris par la lentille collectrice, va éclairer un point du plan focal de l'appareil, et comme chacun d'eux traverse la lame dans des conditions différentes, leur ensemble donne lieu à la production d'une figure caractéristique.

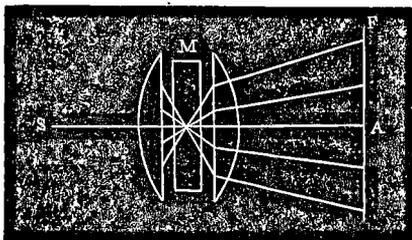


Fig. 423.

L'axe optique du cristal est perpendiculaire à la lame. Tout

¹ BREWSTER, *Treatise on new philosophical Instruments*, Edimbourg 1813, 336; *Phil. Trans.* 1814, 202; 1818, 199. — La théorie de ces phénomènes a été développée par AIRY, *Pogg. Ann.* 1831, XXIII, 204; — F. NEUMANN, *ibid.* 1834, XXXIII, 257; — J. MÜLLER, *ibid.* 1838, XLIV, 273; — BERTIN, *Ann. de Chim.* 1861, LXIII, 57; — LOMMEL, *Pogg. Ann.* 1863, CXX, 69; *Wied. Ann.* 1883, XVIII, 56.

plan passant par l'axe de l'instrument est donc une section principale pour les rayons qui y sont contenus (fig. 424); dans chacune de ces sections principales, la formule ci-dessus (§ 284)

$$A' = \cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{\tau} (T, - T,)$$

s'applique sans changement; en passant d'une section principale

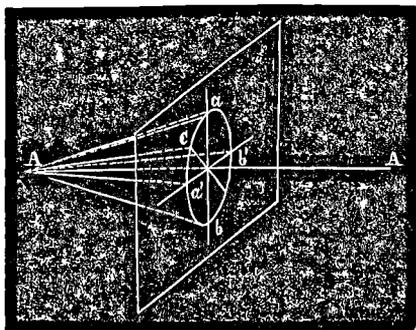


Fig. 424.

à l'autre il faut seulement modifier l'angle α . On voit donc que pour tous les rayons pour lesquels $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha - \beta = 0$ ou $\alpha - \beta = 90^\circ$, c'est-à-dire qui sont compris dans les plans parallèles ou perpendiculaires aux sections principales du polariseur et de l'analy-

seur, l'intensité se réduit à $\cos^2 \beta$, quelle que soit la couleur de la lumière employée. En lumière blanche, les traces de ces quatre plans sur le plan focal F (fig. 423) du microscope apparaîtront donc incolores, et feront l'effet de deux croix rectangulaires inclinées l'une sur l'autre. Si $\beta = 0$ ou $= 90^\circ$, c'est-à-dire si les nicols sont parallèles ou croisés, les deux croix se confondent en une seule, qui est blanche dans le premier cas et noire dans le second.

Dans les régions intermédiaires entre les branches des croix, le phénomène est plus complexe. Les rayons prennent en traversant la lame un retard $T, - T,$, d'autant plus grand que ces rayons sont plus inclinés sur l'axe de l'appareil, et cela parce que le trajet parcouru dans le cristal va en augmentant, et parce que la biréfringence, nulle suivant l'axe optique, devient de plus en plus forte dans les directions obliques. Les différents rayons d'une même couleur, contenus dans un même plan verti-

cal, présentent donc, à mesure que l'on s'écarte de l'axe, des maxima et des minima d'intensité de la lumière transmise, qui sont surtout prononcés si les nicols sont à l'extinction ($\beta = 90^\circ$), car alors l'intensité devient nulle en même temps que $\sin^2 \frac{\pi}{\tau} (T_1 - T_2)$.

Le retard est du reste le même pour tous les rayons également inclinés sur l'axe, quel que soit leur azimut. Ces rayons également inclinés, qui sont ainsi éteints simultanément, ou simultanément transmis, coupent le plan focal suivant des cercles ayant A pour centre. La figure complète, en lumière homogène, sera donc formée d'un système d'anneaux concentriques, qui seront alternativement brillants et obscurs, traversés par une croix noire si les nicols sont croisés; et qui présenteront seulement des alternatives d'intensité, et seront traversés par une croix lumineuse si les nicols sont parallèles. (Voyez la figure 1 de la Planche à la fin du volume.)

En lumière blanche, les retards $T_1 - T_2$ varient en outre d'une couleur à l'autre, les anneaux ont des diamètres différents pour les diverses radiations et paraissent irisés. Les croix restent blanches ou noires, car elles sont les mêmes pour tous les rayons.

Un anneau d'ordre déterminé est d'autant plus petit pour une même couleur que la lame cristalline est plus épaisse et a une biréfringence plus forte.

*** 296. Détermination du signe des uniaxes¹.** — Dans un cristal positif, les vibrations perpendiculaires à la section principale cheminent plus vite que les vibrations parallèles. C'est l'inverse pour les cristaux négatifs. Le signe du retard $T_1 - T_2$ se renverse donc lorsqu'on passe du premier cas au second.

¹ DOVE, *Pogg. Ann.* 1837, XL, 457; — BERTIN, *Ann. de Chim.* 1868, XIII, 215.

Si, dans le microscope à lumière convergente, nous superposons à un cristal positif une lame très mince taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal uniaxe positif, les deux retards s'ajoutent, et les anneaux deviennent plus serrés comme si l'on avait employé un cristal plus épais. Les retards se retranchent au contraire, et les anneaux s'élargissent si les deux cristaux sont de signes contraires.

On peut aussi, ce qui est plus commode, s'arranger pour produire simultanément les deux effets inverses dans les quadrans adjacents de la figure d'interférence.

La croix ayant la position ABCD (fig. 425), plaçons une lame

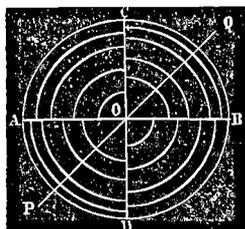


Fig. 425.

mince parallèle à l'axe d'un cristal uniaxe négatif, de manière que sa section principale ait la direction PQ. Cette lame est traversée moins vite par les vibrations perpendiculaires à PQ que par les vibrations parallèles à PQ. Si le cristal que l'on observe est positif, son retard est de même signe que celui de la lame dans les régions AOC et DOB, et de signe contraire dans les régions COB et AOD. Les anneaux se resserreront dans les premières et se dilateront dans les secondes. L'inverse aurait lieu avec un cristal négatif.

Comme lame mince on se sert en général non d'une lame uniaxe, mais d'une lame de mica, sur laquelle on a tracé d'avance la direction du plan des axes optiques. C'est cette ligne que l'on place suivant PQ. L'épaisseur de la lame est choisie de manière à introduire entre les deux vibrations un retard d'un quart d'ondulation environ (mica $\frac{1}{4}$ d'onde). Si le cristal étudié est positif, le rétrécissement des anneaux produit un élargissement apparent du centre sombre de la croix perpendiculairement à la ligne PQ, et figure grossièrement le signe +. Si le cristal est négatif, l'élargissement est au contraire paral-

lèle à PQ et figure le signe —. (Voyez la figure 2 de la Planche.)

297. Figures produites par les cristaux à deux axes en lumière convergente monochromatique. — Pour observer les cristaux à deux axes en lumière convergente, on les emploie sous forme de lames à peu près perpendiculaires à la bissectrice de l'angle des axes optiques. Nous ne considérons que le cas où les nicols sont à l'extinction.

La lame, placée sur le porte-objet du microscope, reçoit une infinité de faisceaux de rayons différemment inclinés. Elle laisse passer sans altération les faisceaux parallèles au plan des axes optiques qui vibrent parallèlement ou perpendiculairement à ce plan, et ceux qui se trouvent dans les mêmes conditions par rapport au plan perpendiculaire à celui des axes optiques. Si donc celui-ci est parallèle ou perpendiculaire à la section principale du polariseur, le champ sera traversé par une croix noire.

Les ondes planes qui traversent la lame parallèlement aux axes optiques (fig. 426) ne prennent pas de différence de marche (§ 233).

Les points du plan focal qui leur correspondent restent obscurs. Mais la différence de marche va croissant, comme dans les uniaxes, à mesure que l'on considère des ondes plus écartées des axes optiques, et autour de chaque point obscur se forment des systèmes d'anneaux, dont les premiers sont circulaires ou elliptiques et dont les derniers se confondent pour les deux axes

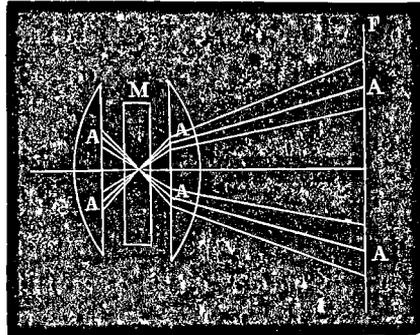


Fig. 426.

en un seul système d'anneaux en forme de lemniscates (Planche, fig. 3).

Si l'on fait tourner la lame dans son plan, les anneaux se modifient peu, mais la croix noire se résout en deux branches d'hyperboles passant par les milieux des anneaux (Planche, fig. 4). Ces hyperboles se placent symétriquement lorsque le plan des axes optiques fait un angle de 45 degrés avec la vibration incidente (Planche, fig. 5).

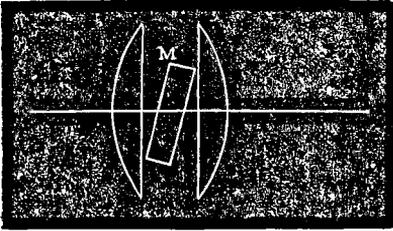


Fig. 427.

Si la lame est exactement perpendiculaire à la bissectrice de l'angle des axes, le centre de la figure est exactement au centre du champ du microscope. Sinon la figure, plus ou moins déformée, devient excentrique, ou disparaît si l'obliquité est trop grande. Il en est de même si l'on incline la lame par rapport à l'axe de l'appareil (fig. 427), on voit la figure se déplacer dans un sens ou dans l'autre.

298. Mesure de l'angle des axes optiques. — La lame étant taillée perpendiculairement à la bissectrice, si on la fait tourner autour d'une perpendiculaire au plan des axes, on pourra amener le centre de l'un ou de l'autre des systèmes d'anneaux au centre du champ, qui est marqué par un réticule. A ce moment, les rayons qui ont traversé le cristal suivant l'axe optique correspondant sont réfractés suivant l'axe du microscope. L'angle $2E$ compris entre les deux rayons AC et $A'C'$ qui ont traversé le cristal dans la direction des axes optiques AA et $A'A'$ (fig. 428) est égal à l'angle dont il faut faire tourner la lame pour amener le centre du second système d'anneaux à remplacer le premier sur le réticule.

$2E$ est ce qu'on appelle l'*angle extérieur* des axes. On en déduit sans peine l'*angle intérieur* ou *vrai* $2V$, si l'on connaît l'indice de réfraction moyen n_b du cristal; on a en effet

$$\sin E = n_b \sin V,$$

car on voit aisément, en se reportant à la forme de la surface de l'onde, que n_b est l'indice de réfraction des vibrations qui se propagent suivant l'axe optique sur une onde plane perpendiculaire à cet axe.

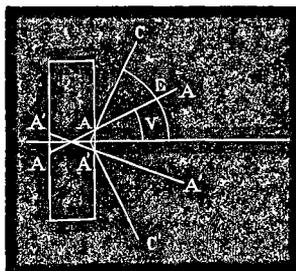


Fig. 428.

Si l'angle A est grand, il peut arriver que l'angle apparent $2E$ dans l'air dépasse 180° . Il est bien clair que dans ce cas on ne pourra pas voir les centres des anneaux, quelque inclinaison que l'on donne à la lame. Pour faire la mesure, il faudra diminuer l'indice n_b en immergeant le cristal dans un liquide d'indice μ suffisamment élevé et connu. L'indice du cristal relativement à ce liquide sera n_b/μ , et l'angle E sera diminué.

299. Pour faire tourner commodément la lame autour d'un axe perpendiculaire à celui du microscope, on l'ajuste sur un petit goniomètre (fig. 429) qui se fixe sur le porte-objet, en faisant en sorte que le plan des axes optiques soit perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour opérer dans un liquide, l'axe du goniomètre passe à frottement doux à travers la paroi d'une petite cuve à fond de verre.

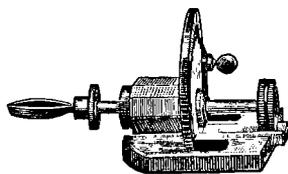


Fig. 429.

On peut aussi faire usage d'un microscope horizontal (fig. 430). Le goniomètre est disposé au-dessus, avec son axe vertical et dirigé vers le bas. Il est alors facile de plonger le

crystal dans une cuve à parois transparentes qui se place entre les lentilles du microscope et dans laquelle on peut mettre de l'huile ou un autre liquide ¹.

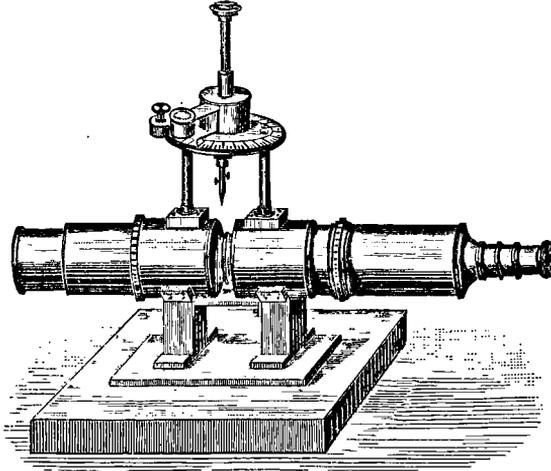


Fig. 430.

Une autre disposition très avantageuse consiste à placer la

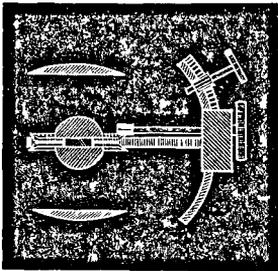


Fig. 431.

lame cristalline dans un liquide fortement réfringent entre deux lentilles demi-boules qui tournent avec elle, et auxquelles des pignons convenables permettent de donner toutes les orientations dans des limites très étendues. Grâce à la forme des lentilles et au liquide interposé, les axes sont visibles même s'ils sont très inclinés sur le plan de la lame (fig. 431) ¹.

¹ DES CLOIZEAUX, *Mémoire sur l'emploi du microscope polarisant*, Paris 1864. — Voyez aussi GRAILICH, *Kryst. opt. Untersuchungen*, Vienne 1853, p. 50; — HAIDINGER, *Pogg. Ann.* 1856, XCVII, 590; — V. v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1862, XLV, 587; 1867, LV, 545; — GROTH, *Pogg. Ann.* 1871, CXLIV, 49.

² W.-G. ADAMS, *Phil Mag.* 1875, L, 13; 1879, VIII, 275; — E. SCHNEIDER, *Carls Repert.* 1879, XV, 119, 774; la disposition figurée ci-dessus est due au constructeur berlinois R. FUESS; voyez, pour l'adjonction d'un spectroscopie en

*** 300. Détermination du signe des cristaux biaxes.** — Nous sommes convenus (§ 235) d'appeler positifs les cristaux dans lesquels la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques coïncide avec l'axe de plus petite élasticité, et négatifs ceux dans lesquels cette bissectrice coïncide avec l'axe de plus grande élasticité. Dans une lame d'un cristal positif perpendiculaire à la bissectrice aiguë, la vibration parallèle au plan des axes optiques a une vitesse plus grande que la vibration perpendiculaire.

Plaçons une lame de quartz perpendiculaire à l'axe au-dessus du cristal à étudier dans le microscope à lumière convergente; puis inclinons cette lame en la faisant tourner autour d'une ligne horizontale perpendiculaire à la ligne des centres des anneaux. Pour les rayons centraux, la section principale du quartz est alors parallèle au plan des axes optiques du cristal. Le quartz étant positif, la vibration contenue dans ce plan y est la plus lente. Le retard est diminué, et on voit les anneaux s'élargir à mesure que l'inclinaison augmente.

Si le cristal examiné était négatif, cet épanouissement se produirait pour une rotation du quartz autour d'une droite parallèle au plan des axes optiques du cristal.

Dans le premier cas, l'axe de rotation du quartz et la ligne des centres des anneaux sont à angle droit, et figurent le signe $+$; dans le second cas, ils sont parallèles et figurent le signe $-$.

301. Observation en lumière blanche¹. — Pour des

vue de mesures plus précises, KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.* 1859, CVIII, 567; — v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien.* 1877, LXXVI, 805; *Zeitsch. f. Kryst.* 1878, II, 492; — LIEBISCH, *N. Jahrb.* 1885, I, 175; — H. DUFET, *Bull. Soc. min.* 1886, IX, 275.

¹ HERSCHEL, *Phil. Trans.* 1820, 45. — DES CLOIZEAUX, *Mémoire sur l'emploi du microscope polarisant*, Paris 1864.

rayons semblablement orientés par rapport aux axes optiques, le retard $T_1 - T_2$ dépend de la couleur de la lumière. La figure d'interférence éprouvera de ce chef une modification d'une radiation à une autre, comme cela a lieu dans les cristaux à un axe.

De plus, les positions des axes optiques eux-mêmes varient, comme nous l'avons vu au § 237. Si l'on opère en lumière blanche, la figure d'interférence sera la résultante de toutes les figures partielles produites par les diverses radiations, et variera avec les positions relatives des divers systèmes d'axes optiques.

En général, les axes optiques correspondant aux diverses couleurs sont voisins les uns des autres. La figure en lumière blanche a la forme générale de la figure en lumière monochromatique, mais présente une coloration plus ou moins prononcée des anneaux et des bords des hyperboles; et ce n'est le plus souvent que par la distribution des colorations que se manifeste la dispersion des axes.

302. Dispersion dans les cristaux rhombiques. —

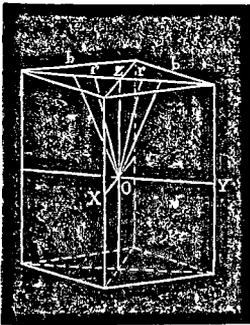


Fig. 432.

Dans le système rhombique, la figure d'interférence s'observe toujours perpendiculairement à l'un des trois plans de symétrie (§ 238); par exemple à travers une lame parallèle à la base XY (fig. 432). Les axes optiques rouges, bleus... rr , bb ... sont toujours dans un second plan de symétrie, par exemple dans le plan ZY, et leur bissectrice coïncide pour toutes les couleurs avec l'axe de symétrie OZ. On en conclut que la figure d'interférence doit être symétrique par rapport aux deux diagonales de la base. Si, par exemple, le

plan des axes optiques est à 45° de la section principale du polariseur, les branches d'hyperbole seront symétriquement colorées; elles seront bleues vers le centre du champ, et rouges vers l'extérieur si l'angle apparent pour les axes rouges est moins ouvert que pour les axes bleus. La distribution des couleurs dépend naturellement de l'angle apparent des axes, et peut ainsi changer avec la dispersion propre du milieu dans lequel le cristal est plongé. Mais la symétrie de la figure subsiste. Cette symétrie reste encore la même si la dispersion des axes augmente, ou si, les axes bleus étant dans l'un des plans de symétrie, les axes rouges se trouvent dans le plan perpendiculaire. La figure résultante en lumière blanche peut être alors méconnaissable; mais on peut toujours la débrouiller en plaçant des verres colorés sur le trajet des rayons.

L'angle des axes optiques, déterminé par les valeurs des trois vitesses principales, doit en général varier avec la température comme les vitesses elles-mêmes. Dans les cristaux rhombiques, la symétrie de la figure d'interférence est naturellement conservée dans ces transformations; les deux axes se rapprochent ou s'écartent quand la température s'élève, mais restent compris dans un des plans de symétrie, et leur bissectrice reste invariable. C'est ainsi que dans la barytine, d'après M. Des Cloizeaux¹, l'angle extérieur des axes optiques, qui est de $63^\circ 5'$ à 12° , devient égal à $74^\circ 42'$ à 196° .

303. Dispersion dans les cristaux clinorhombiques.

— En nous reportant à ce qui a été dit au § 239, nous voyons que deux cas principaux peuvent se présenter.

Si le plan des axes optiques coïncide avec le plan de symétrie, on doit faire l'observation à travers une face naturelle ou

¹ DES CLOIZEAUX, *Mém. Sav. étrang.* 1867, XVIII.

artificielle perpendiculaire à ce plan. Les axes sont tous dans le même plan, mais diversement orientés, et leur bissectrice change en général d'une couleur à l'autre (fig. 433). Les colorations des anneaux et des hyperboles sont symétriques par rapport à la ligne des centres, mais non par rapport à la ligne perpendiculaire; les dimensions et les formes des deux systèmes d'anneaux peuvent être différentes; les deux branches d'hyper-

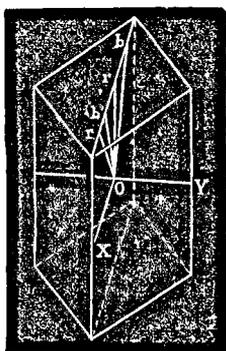


Fig. 433.

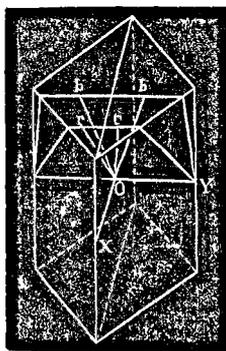


Fig. 434.

bole sont inégalement teintées, ou même ont l'une le bleu en dedans et le rouge en dehors, l'autre le bleu en dehors et le rouge en dedans. C'est ce qu'on appelle la *dispersion inclinée*¹.

Dans le second cas, les axes optiques s'ouvrent dans des plans perpendiculaires au plan de symétrie, mais différents pour les diverses couleurs (fig. 434). Si l'on observe, comme dans le premier cas, à travers une face convenable parallèle à l'axe de symétrie, les couleurs sont symétriquement disposées par rapport à la perpendiculaire à la ligne des centres des anneaux,

¹ NÖRRENBERG, *Pogg. Ann.* 1835, XXXV, 81, a observé la dispersion inclinée dans le gypse, et F. NEUMANN, *ibid.* 203, la dispersion horizontale dans l'orthose. — J. HERSCHEL, *Pogg. Ann.* 1832, XXVI, 308; et NÖRRENBERG, *ibid.* 1832, XXVI, 309; 1835, XXXV, 380, ont découvert le premier exemple de dispersion croisée.

mais non par rapport à la ligne des centres elle-même. C'est la *dispersion horizontale*.

Si l'on observe à travers une face parallèle au plan de symétrie, la bissectrice coïncide, pour tous les axes, avec la normale à cette face, mais les plans des axes sont différemment orientés tout autour de cette normale. La figure est alors colorée symétriquement par rapport à son milieu et non par rapport à un plan (fig. 435). C'est la *dispersion croisée* ou tournante.

Les variations résultant de la température sont plus complexes que dans le système rhombique; elles peuvent porter ici non seulement sur l'angle des axes optiques, mais aussi sur l'orientation de leur bissectrice. Celle-ci doit seulement être parallèle ou perpendiculaire à l'axe de symétrie.

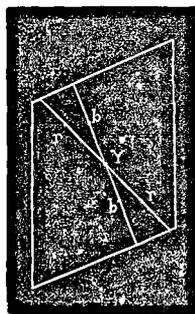


Fig. 435.

Dans le gypse, par exemple, à la température ordinaire, les axes optiques sont, pour toutes les couleurs, contenus dans le plan de symétrie, et l'angle des axes rouges est plus grand que celui des axes bleus. Quand la température s'élève, l'angle des axes diminue en même temps que la bissectrice se déplace dans le plan de symétrie; puis la température croissant toujours, les axes des diverses couleurs se réunissent successivement en commençant par les axes bleus, pour s'ouvrir ensuite dans un plan perpendiculaire au plan de symétrie¹.

304. Dispersion dans les cristaux tricliniques. — Les axes des différentes couleurs n'ont plus leur position déter-

¹ MITSCHERLICH, *Pogg. Ann.* 1826, VIII, 529; — NEUMANN, *ibid.* 1835, XXXV 81; — DES CLOIZEAUX, *loc. cit.* — BREWSTER, *Pogg. Ann.* 1833, XXVII, 480, et LASPEYRES, *Zeitsch. f. Kryst.* 1877, I, 529, ont étudié des changements analogues dans la glauberite.

minée par aucune condition de symétrie (§ 240). La figure d'interférence s'observe à travers une face dont on ne peut assigner *a priori* l'orientation, et ses couleurs seront généralement tout à fait dissymétriques.

PHÉNOMÈNES DIVERS

305. Double réfraction accidentelle. — Il arrive quelquefois que des corps naturellement isotropes et monoréfringents offrent accidentellement une double réfraction plus ou moins énergique, qu'un appareil de polarisation permettra aisément de reconnaître.

Brewster ¹ a observé en 1815 que des matières gélatineuses, telles que la colle de poisson, ne présentent aucune biréfringence lorsqu'elles se solidifient tranquillement, mais acquièrent lorsqu'on les comprime une double réfraction qui croit avec la compression. Les molécules se trouvent rapprochées dans le sens de la pression, le corps devient en quelque mesure analogue à un cristal à un axe, dont l'axe serait parallèle à la direction de la pression.

Le verre se comporte de même; si on le comprime, il acquiert une biréfringence semblable à celle d'un cristal uniaxe négatif; la vitesse des deux rayons est diminuée, mais la diminution est plus forte pour la vibration qui est perpendiculaire à la compression que pour celle qui lui est parallèle; le rayon extraordinaire est donc le plus rapide ².

¹ BREWSTER, *Phil. Trans.* 1815, 60; — v. BJERKÉN, *Wied. Ann.* 1891, XLIII, 803.

² BREWSTER, *Phil. Trans.* 1816, 156; *Edinb. Trans.* 1818, VIII, 369; *Pogg. Ann.* 1830, XIX, 527; — FRESNEL, *Œuvres*, I, 713; — NEUMANN, *Abh. Akad.*

Seebeck ¹ a observé le premier que, si l'on refroidit rapidement un morceau de verre, il devient biréfringent, et donne dans un appareil de polarisation à lumière parallèle des figures plus ou moins régulières et plus ou moins vivement colorées. Dans l'opération de la trempe, les couches extérieures se refroidissent plus vite que les couches intérieures, il en résulte un état de tension et par conséquent de biréfringence variable d'un point à l'autre.

Le frottement, d'après Maxwell ², produit aussi un défaut d'isotropie et fait naître la double réfraction dans les fluides visqueux en mouvement.

Une biréfringence de nature spéciale s'observe, d'après les recherches de M. Kerr ³, dans les corps transparents soumis à une action électrique très énergique. Un bloc de verre convenablement placé entre les pôles d'une bobine d'induction devient biréfringent comme s'il était comprimé parallèlement aux lignes de force électrique. Il en est de même du sulfure de carbone; l'ambre, les alcools agissent comme s'ils étaient étirés.

La double réfraction existe aussi dans beaucoup de corps organisés, grains d'amidon, fibres végétales, cheveux, etc., dont la structure est anisotrope ⁴.

306. Modifications apportées par les actions mécaniques à la double réfraction des cristaux. — L'élasti-

Berlin, 1841, 3; — WERTHEIM, *Ann. de Chim.* 1854, XL, 156; — MACH, *Pogg. Ann.* 1872, CXLVI, 313; — DE GRAMONT, *Bull. Soc. min.* 1886, IX, 213; — KERR, *Phil. Mag.* 1888, XXVI, 321.

¹ SEEBECK, *Schweigger's J.* 1813, VII, 259, 382; 1814, XII, 1; — BREWSTER, *Phil. Trans.* 1814, 436; 1815, 1; 1816, 46. — Ces phénomènes ont été étudiés depuis lors spécialement par M. MACÉ DE LÉPINAY, *Ann. de Chim.* 1880, XIX, 1; — CZAPSKI, *Wied. Ann.* 1891, XLII, 319.

² MAXWELL, *Pogg. Ann.* 1874, CLI, 151.

³ KERR, *Phil. Mag.* 1875, L, 337, 446; 1879, VIII, 85; 1880, IX, 157; — RÖNTGEN, *Wied. Ann.* 1880, X, 77.

⁴ BREWSTER, *Phil. Trans.* 1815, 29.

ité optique est modifiée par la compression, aussi bien dans les cristaux que dans les corps monoréfringents.

Un cristal cubique devient biréfringent.

Si l'on comprime parallèlement à l'axe un cristal à un axe, la vitesse du rayon ordinaire est diminuée, au moins dans les cas observés jusqu'ici, relativement à celle du rayon extra-

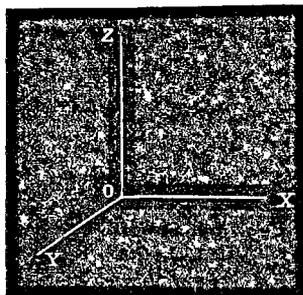


Fig 436.

ordinaire, la biréfringence devient plus forte si le cristal est négatif, plus faible s'il est positif.

Sous l'influence d'une compression perpendiculaire à l'axe, le cristal uni-axe devient biaxe; le plan des axes optiques est parallèle ou perpendiculaire à la pression suivant que le cristal étudié est positif ou négatif¹.

307. Soit OZ la direction de l'axe optique (fig. 436); une vibration parallèle à OZ se propage avec une vitesse $a_z = V_e$; une vibration parallèle à OX ou à OY avec une vitesse $a_x = a_y = V_o$; si le cristal est positif, on a $V_o > V_e$. Si l'on admet que les choses se passent comme dans le verre isotrope, une pression dirigée suivant OX doit produire une diminution plus forte des vitesses a_x et a_y que de la vitesse a_z . Pour une faible compression, a_y restera cependant plus grand que a_x , et on aura

$$a_y > a_x > a_z;$$

¹ BREWSTER, *Edinb. Trans.* 1818, VIII, 281; — MOIGNO et SOLEIL, *C. R.* 1850, XXX, 361; — WERTHEIM, *C. R.* 1851, XXXIII, 576; — BRAVAIS, *ibid.* 1855, XLIII, 147; — PFAFF, *Pogg. Ann.* 1859, CVII, 333; CVIII, 598; — MACH et MERTEN, *ibid.* 1875, CLVI, 639; — REUSCH, *ibid.* 1867, CXXXII, 441; — BÜCKING, *N. Jahrb.* 1881, I, 177; *Zeitsch. f. Kryst.* 1883, VII, 555; — KLOCKE, *N. Jahrb.* 1881, II, 249; — BRAUNS, *ibid.* 1886, I, 224; 1887, I, 53; — F. PÖCKELS, *Wied. Ann.* 1889, XXXVII, 144, 269, 372; 1890, XXXIX, 440.

le plan des axes optiques, qui est toujours celui des vitesses maximum et minimum, est donc XOZ parallèle à la pression.

Si le cristal est négatif, $V_e > V_o$; pour une faible compression, a_z reste plus grand que a_x , qui lui-même est moins diminué que a_y , donc

$$a_y < a_x < a_z ;$$

le plan des axes optiques est YOZ.

Si la pression agit encore de la même manière dans les cristaux à deux axes, des considérations analogues montrent que les axes optiques doivent se rapprocher de la bissectrice positive lorsque la pression est perpendiculaire à leur plan et s'en éloigner dans le cas contraire.

308. M. Pockels a fait une étude expérimentale spéciale de la fluorine, du sel gemme et de la sylvine, tous trois cubiques, et a reconnu que ces trois corps se comportent de manières assez différentes. Une compression parallèle à un axe quaternaire leur donne une double réfraction uniaxe, négative pour la fluorine et le sel gemme, positive pour la sylvine; une compression parallèle à un axe ternaire produit une double réfraction uniaxe, négative pour le sel gemme et la sylvine, positive pour la fluorine. Comprimés dans les autres directions, ces cristaux prennent une double réfraction à deux axes avec des différences du même genre dans l'orientation des axes optiques, et dans le signe de la double réfraction.

* **309.** La théorie de ces phénomènes a été donnée en 1841 par M. F.-E. Neumann pour le cas des corps isotropes, et tout récemment par M. F. Pockels pour les corps cristallisés.

L'action d'un corps homogène quelconque, pris dans son état naturel, sur une radiation de période déterminée, peut être défi-

nie, comme nous l'avons vu, par la forme et l'orientation de l'ellipsoïde inverse du § 214, lequel, rapporté aux axes d'élasticité optique, a pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

Quand le corps est déformé uniformément par une force d'origine quelconque, on peut admettre que ses propriétés optiques restent analogues à celles d'un cristal et sont comprises dans le type général de la double réfraction à deux axes; le changement produit peut être représenté par une simple modification des dimensions et de l'orientation de l'ellipsoïde inverse. Dans le solide déformé, cet ellipsoïde, rapporté toujours aux axes d'élasticité du solide non déformé, est représenté par une équation de la forme générale

$$B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{23}yz + 2B_{11}zx + 2B_{12}xy = 1.$$

Quand la déformation est nulle, on doit avoir $B_{11} = a^2$; $B_{22} = b^2$; $B_{33} = c^2$; $B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$; les coefficients B s'écartent de ces valeurs particulières d'autant plus que la déformation est plus considérable. Or celle-ci est déterminée (§ 172) par les six composantes que nous avons appelées $x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y$; dans les limites des déformations élastiques, on peut admettre que les coefficients B varient proportionnellement à ces composantes, et poser les relations

$$\begin{aligned} B_{11} - a^2 &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_x + a_{15}z_x + a_{16}x_y; \\ B_{23} &= a_{23}x_x + a_{24}y_y + a_{25}z_z + a_{26}y_x + a_{27}z_x + a_{28}x_y; \end{aligned}$$

et leurs analogues.

La déformation étant supposée connue par les formules de l'élasticité, les propriétés optiques dépendent ainsi pour chaque corps de 36 coefficients $a_{11} \dots a_{66}$, lesquels peuvent en outre varier avec la longueur d'onde de la lumière employée.

Le nombre de ces coefficients diminue d'ailleurs dans les solides qui possèdent des éléments de symétrie (§ 173), et l'on peut à cet égard répartir les cristaux en neuf groupes, qui sont les mêmes que pour les phénomènes élastiques. Seulement, dans chaque groupe, le nombre des coefficients optiques distincts est plus grand que celui des coefficients d'élasticité, parce que l'on n'a aucune raison de croire que la relation de Green $a_{hk} = a_{kh}$ soit vérifiée pour les premiers comme elle l'est nécessairement pour les seconds (§ 172).

310. Anomalies optiques. — Il arrive très souvent que des cristaux bien formés en apparence ne se comportent pas régulièrement dans le microscope polarisant¹. Les cristaux cubiques sont rarement absolument monoréfringents; entre les nicols croisés ils donnent souvent des plages plus ou moins nettement éclairées, dont la distribution est liée habituellement à la forme de la lame étudiée.

Ainsi une plaque d'alun, parallèle à une face du cube, est souvent partagée par des lignes monoréfringentes, parallèles aux diagonales, en quatre secteurs plus ou moins biréfringents dont les extinctions se font parallèlement aux arêtes du cube; quant aux plaques parallèles aux faces de l'octaèdre, tantôt elles sont monoréfringentes, tantôt elles offrent deux systèmes de lignes monoréfringentes, les unes joignant le centre aux angles de la lame, les autres suivant les bords de celle-ci; et, dans chacun des secteurs qu'elles limitent, les extinctions sont parallèles et perpendiculaires aux arêtes.

¹ Les anomalies optiques ont été remarquées pour la première fois par BREWSTER, *Treatise on new philosophical Instruments*, Édimbourg 1813, 321; *Edinb. Trans.* 1817, VIII, 157; et dans quelques mémoires ultérieurs publiés dans le même recueil. Elles ont fait l'objet de très nombreux travaux dans ces dernières années, et ont un grand intérêt en ce qu'elles révèlent des particularités de la structure intime des cristaux qu'il serait difficile de déceler par d'autres moyens.

D'autres fois, la disposition des parties biréfringentes est irrégulière; les cristaux peuvent être absolument monoréfringents; un petit cristal monoréfringent peut s'accroître par l'adjonction de couches biréfringentes; la biréfringence peut aller en croissant depuis le centre à la surface sans changement de direction des lignes d'extinction. Des phénomènes analogues s'observent dans les plaques perpendiculaires à l'axe de cristaux quadratiques et hexagonaux.

On a cherché de diverses manières à expliquer ces faits singuliers.

Biot admettait que les cristaux anomaux sont formés de lamelles superposées polarisant la lumière par réflexion à leurs surfaces de contact. Il donnait à toute cette classe de phénomènes le nom de *polarisation lamellaire*¹.

D'autres auteurs, parmi lesquels on doit citer MM. Reusch², Klocke et C. Klein, les attribuent à des tensions qui prennent naissance pendant la cristallisation, et résultent, soit de ce que le cristal croît plus rapidement dans certaines directions, formant ainsi une sorte de squelette qui se remplit ensuite comme il peut, soit de ce que le cristal emprisonne en se formant des gaz, ou des matières étrangères dont la dilation diffère de celle du cristal lui-même, soit encore de ce que des molécules isomorphes cristallisent ensemble et, se gênant plus ou moins les unes les autres, ne peuvent arriver exactement à leur état d'équilibre (Chapitre IX).

M. Mallard³ admet enfin que les cristaux anomaux sont le résultat de macles complexes, telles que celles qui ont été mentionnées au § 114, consistant en un enchevêtrement plus ou moins parfait de cristaux à formes limites de symétrie infé-

¹ BIOT, *C. R.* 1841, XII, 1121; *Mém. de l'Institut*, 1841, XVIII, 539.

² REUSCH, *Pogg. Ann.* 1867, CXXXII, 618; voyez pour la bibliographie des anomalies optiques l'ouvrage de M. Brauns cité ci-dessous.

³ MALLARD, *Ann. des Mines*, 1876, X, 60.

rieure. L'exemple du grenat, qui a été donné à l'occasion de ces mâcles, fait bien voir comment, dans cette hypothèse, des cristaux de même espèce peuvent présenter des anomalies prononcées à des degrés très divers et des dispositions variables des plages biréfringentes.

M. Brauns¹, qui a publié récemment une monographie très complète et très impartiale de ces phénomènes, distingue trois groupes de cristaux anomaux.

Le premier groupe est formé de cristaux qui appartiennent aux systèmes peu symétriques, mais possèdent des formes limites, et s'assemblent, conformément à la théorie de M. Mallard, en mâcles mimétiques complexes à enchevêtrement plus ou moins complet; tel est le cas du ferrocyanure de potassium, clinorhombique, avec développement presque quadratique autour de l'axe binaire; presque toujours il donne des cristaux mimétiques appartenant en apparence au système du prisme à base carrée par l'enchevêtrement de quatre cristaux simples mâclés.

Le second groupe est formé par des corps dimorphes. L'une des modifications a fourni la forme du cristal, puis, les conditions de température ou de pression ayant changé, elle s'est transformée dans la seconde modification sans que l'apparence extérieure du cristal ait subi d'altération importante. La boracite, par exemple, est cubique extérieurement à la température ordinaire. On peut se représenter sa structure très variable et compliquée comme formée de 12 pyramides rhombiques ayant leurs sommets au centre et leurs bases sur les faces du dodécaèdre rhomboïdal, et d'ailleurs très inégalement enchevêtrées. Vers 265°, le cristal devient monoréfringent, sa structure et sa forme sont d'accord; par le refroidissement, la modification rhombique se reproduit sans que la forme extérieure soit altérée; celle-ci reste remplie par des cristaux rhombiques dont l'orien-

¹ R. BRAUNS, *Die optischen Anomalien der Krystalle*, Leipzig, 1891.

tation est la même qu'avant le chauffage, mais dont l'enchevêtrement est en général différent.

M. Brauns attribue un troisième groupe d'anomalies à des tensions intérieures. Ces tensions proviendraient quelquefois d'une déformation subie par le cristal, par suite d'actions mécaniques exercées pendant ou après sa formation, ou par suite d'un refroidissement brusque; dans ce cas, la double réfraction est irrégulièrement distribuée dans le cristal en bandes parallèles aux plans de clivage ou de glissement (sel gemme), ou en taches dans le voisinage des inclusions (nitrate de plomb).

Dans d'autres cas, les tensions devraient être attribuées à des mélanges isomorphes; il est assez naturel de penser que le remplacement d'une partie des molécules d'un composé par d'autres molécules analogues, mais cependant un peu différentes, ne se fait pas sans jeter quelque trouble dans la cristallisation; toute perturbation de ce genre doit modifier les propriétés optiques. C'est ainsi que le nitrate de plomb, monoréfringent quand il est pur, devient anomal et biréfringent quand il est mélangé de nitrate de baryum; cette catégorie d'anomalies serait caractérisée par le fait que la distribution des plages biréfringentes y dépend principalement des formes extérieures du cristal.

CHAPITRE XXI

DE LA POLARISATION ROTATOIRE

FAITS GÉNÉRAUX

311. Découverte de la polarisation rotatoire dans le quartz. — Arago, en 1811, a découvert dans le quartz une propriété tout à fait différente de celles que nous avons étudiées jusqu'ici, et qui a été reconnue depuis dans un assez grand nombre d'autres corps¹. Ainsi que nous le verrons tout à l'heure, cette propriété, qui a reçu le nom de *polarisation rotatoire*, ne peut se rencontrer que dans des milieux énantiomorphes. Les corps qui la possèdent sont souvent appelés corps *actifs*.

Tandis qu'un cristal à un axe est en général monoréfringent dans la direction de l'axe, et transmet sans altération des vibrations quelconques, une lame de quartz perpendiculaire à l'axe laisse bien passer des vibrations polarisées rectilignement dans un plan quelconque, mais a la propriété de changer leur plan

¹ ARAGO, *Mém. de l'Institut*, 1811, 93; *Œuvres*, X, 54; — BIOT, *Mém. de l'Institut*, 1812, 218; *Traité de Physique*, 1816, IV, 499.

de polarisation en le faisant tourner vers la gauche ou vers la droite. La vibration qui sort du cristal fait avec celle qui y entre un angle qui dépend de l'épaisseur de la lame et de la couleur de la lumière employée, et qui ne change pas quand on fait tourner la lame dans son propre plan.

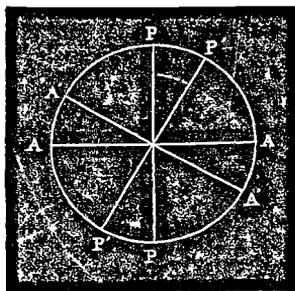


Fig. 437.

En lumière monochromatique, le cristal, introduit entre les nicols croisés PP et AA d'un appareil de polarisation à lumière parallèle, rétablit la lumière ; pour retrouver l'obscurité, il faut tourner l'analyseur de manière à rendre sa section principale A'A' perpendiculaire à la vibration sortante P'P' (fig. 437).

312. Lois de Biot. — Biot a reconnu : 1° *Que l'angle de rotation est proportionnel à l'épaisseur de la lame.*

2° *Que le sens et la grandeur de cet angle ne changent pas lorsqu'on retourne la lame face pour face. En d'autres termes, que le rayon traverse la lame de A vers B ou de B vers A (fig. 438), un observateur regardant dans la direction d'où vient ce rayon voit toujours la rotation du plan de polarisation s'effectuer dans le même sens.*

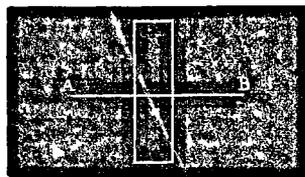


Fig. 438.

3° *Que la rotation par millimètre d'épaisseur est la même dans tous les cristaux de quartz, mais que son sens varie. Il existe deux espèces de cristaux ; dans les uns, appelés dextrogyres, la rotation se fait vers la droite ; dans les autres, appelés lévogyres, elle se fait vers la gauche.*

4° *Que la rotation par millimètre d'épaisseur croît rapidement*

du rouge au violet et varie à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

313. Phénomènes observés en lumière blanche. — Si l'on reçoit de la lumière blanche dans le microscope polarisant, les vibrations des diverses couleurs qui la composent, d'abord toutes parallèles entre elles et à la section principale PP du polariseur (fig. 439), se trouvent à leur sortie du cristal orientées dans des azimuts différents; la vibration rouge est dirigée suivant OR, la vibration bleue suivant OB, et ainsi de suite. Représentons par 1 les intensités de ces diverses couleurs dans la lumière blanche; si l'analyseur AA fait un angle ω avec le polariseur, l'intensité de la lumière rouge transmise est représentée par $\cos^2(\omega - \text{POR})$, celle de la lumière bleue par $\cos^2(\omega - \text{POB})$, etc. Les proportions relatives de ces différents rayons ne sont plus les mêmes que dans la lumière blanche et varient graduellement avec l'angle ω . On a donc de la lumière colorée, dont la teinte ne change pas si l'on fait tourner la lame de quartz dans son plan, mais se modifie graduellement si l'on fait tourner l'analyseur par rapport au polariseur.

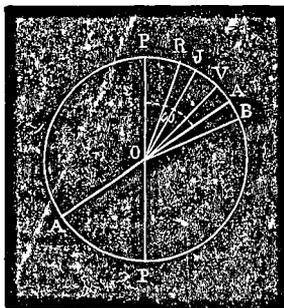


Fig. 439.

Si le quartz est excessivement mince, les plans de polarisation des divers rayons du spectre visible sont peu écartés les uns des autres, tous ces rayons sont éteints presque en même temps par l'analyseur, les colorations sont peu sensibles. Si l'épaisseur de la lame est telle que ces plans de polarisation soient répartis sur une, deux, trois demi-circonférences, l'analyseur dans chacune de ses positions arrête une, deux, trois radiations visibles seulement, et laisse passer les autres en proportions plus ou moins

grandes; les colorations sont très vives et se modifient rapidement par un déplacement de l'analyseur. Si le quartz est très épais, l'analyseur arrête un grand nombre de radiations réparties dans tout le spectre, les radiations intermédiaires qu'il laisse passer reforment sensiblement du blanc.

314. Teinte sensible. — Avec un quartz d'épaisseur convenable pour donner des colorations bien marquées, on obtient, lorsque l'analyseur est placé de manière à arrêter les rayons jaunes, une teinte violacée qui vire au rouge ou au bleu avec une extrême rapidité pour le plus petit déplacement de l'analyseur dans un sens ou dans l'autre. L'analyseur tournant de gauche à droite, la teinte sensible virera au rouge si le cristal est dextrogyre, et au bleu s'il est lévogyre. Dans le premier cas, en effet, l'extinction passe du jaune vers le bleu et les rayons rouges deviennent prédominants. Dans le second cas, c'est l'inverse qui a lieu.

Une lame de quartz donnant la teinte sensible permet de reconnaître de faibles pouvoirs rotatoires. Il suffit, en effet, d'introduire dans le microscope, au-dessus de cette lame, la substance que l'on veut étudier. Pour peu que celle-ci produise une rotation du plan de polarisation, la teinte sensible est modifiée.

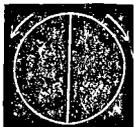


Fig. 440.

On obtient encore plus de sensibilité¹ en formant un *biquartz* (fig. 440), une lame de deux moitiés accolées, l'une dextrogyre et l'autre lévogyre, donnant toutes deux la teinte sensible entre les nicols croisés. Une rotation de l'analyseur, ou l'introduction d'un corps doué de la polarisation rotatoire, produira un changement de teinte inverse sur les deux moitiés du biquartz.

315. Mesure des rotations. — Beaucoup de procédés ont

¹ SOLEIL, *C. R.* 1845, XX, 1805.

été imaginés, nous indiquerons seulement le principe de ceux que l'on emploie le plus souvent dans les recherches cristallographiques.

On peut d'abord opérer en lumière monochromatique, que l'on obtient à l'aide de verres colorés, ou en introduisant un sel convenable dans la flamme naturellement peu éclairante d'un bec de Bunsen, ou encore en faisant tomber sur l'appareil tel ou tel rayon d'un spectre suffisamment étalé. On détermine la position d'extinction du nicol analyseur avant et après l'introduction de la lame active que l'on étudie; la différence des deux lectures, augmentée au besoin d'un nombre entier de demi-circonférences qu'il n'est jamais difficile de connaître par une mesure préalable faite sur une lame plus mince, donne la rotation. Ce procédé est peu précis, en raison de la difficulté qu'il y a à fixer exactement l'azimut d'extinction.

On peut souvent se dispenser de l'emploi d'une lumière homogène, en mettant d'abord l'analyseur à l'extinction, puis en le faisant tourner après l'introduction de la lame jusqu'à ce que l'on obtienne la teinte sensible. La rotation ainsi mesurée est à peu près celle qui correspond au jaune ($\lambda = 0^{\text{mm}},00055$).

316. Appareils à pénombre. — Dans ces appareils, qui exigent l'emploi d'une lumière monochromatique, le champ est partagé en deux moitiés qui s'éteignent pour des azimuts différents, mais voisins, de l'analyseur. On place celui-ci dans la position où les deux plages adjacentes paraissent également éclairées.

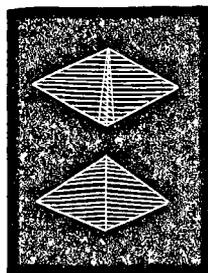


Fig. 441.

Un des meilleurs dispositifs est celui de M. Cornu¹. Le polariseur est un prisme de Nicol, scié dans le sens de sa lon-

¹ CORNU, *Bulletin de la Soc. chim.* 1870, XIV (2), 140.

gueur et parallèlement à sa section principale (fig. 441). Les deux moitiés sont usées obliquement sur la face ainsi taillée, de telle sorte qu'après avoir été recollées dans leur position primitive, elles n'aient plus leurs sections principales tout à fait parallèles. On observe à travers un analyseur ordinaire.

317. Méthode de Broch¹. — Pour opérer en lumière blanche sur des radiations de longueurs d'ondes connues et quelconques, Broch s'est servi d'un procédé imaginé par MM. Fizeau et Foucault (§ 291) pour l'étude des phénomènes d'interférence, et consistant à recevoir sur la fente d'un spectroscopie les rayons sortant de l'appareil de polarisation. Ceux de ces rayons qui ont éprouvé une rotation telle, qu'à leur sortie de la lame active ils soient arrêtés par l'analyseur, manquent naturellement dans le spectre, et y laissent des bandes obscures transversales. Ces bandes se transportent d'un bout à l'autre du spectre quand on fait tourner l'analyseur. L'angle compris entre celui-ci et le polariseur, augmenté au besoin d'un nombre entier de demi-circonférences, donne la rotation éprouvée par la couleur sur laquelle se trouve au même moment une raie sombre.

318. Interprétation de Fresnel¹. — Fresnel a montré que l'on peut considérer la polarisation rotatoire comme résultant d'une espèce particulière de double réfraction.

Nous avons vu (§ 183) qu'une vibration circulaire est équivalente à la superposition de deux vibrations rectilignes, perpendiculaires entre elles, et de même période, qui présentent une différence de phase d'un quart d'oscillation. Or ces deux

¹ BROCH, *Ann. de Chim.* 1852, XXXIV, 119.

² FRESNEL (1822), *Œuvres*, I, 731.

vibrations rectilignes tournent d'un même angle en traversant une lame de quartz perpendiculaire à l'axe puisque la rotation est indépendante de l'azimut de la vibration incidente; elles restent donc perpendiculaires entre elles, et toujours équivalentes à la vibration circulaire primitive. Nous en concluons que le quartz laisse passer sans altération dans la direction de son axe les vibrations polarisées circulairement, dextrogyres et lévogyres, absolument comme un milieu biréfringent ordinaire transmet sans altération les deux vibrations polarisées rectilignement qui sont parallèles à ses lignes d'extinction.

D'autre part, une vibration rectiligne peut toujours être considérée comme résultant de la superposition de deux vibrations circulaires de sens inverse présentant une certaine différence de phase (fig. 442). Soient, en effet, deux vibrations circulaires, l'une dextrogyre (la molécule cheminant sur sa trajectoire dans le sens des aiguilles d'une montre), représentée par



Fig. 442.

$$x_1 = a \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

$$y_1 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{4} \right) = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

et l'autre lévogyre (la molécule tournant en sens inverse), représentée de même par

$$x_2 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T)$$

$$y_2 = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - T - \frac{\tau}{4} \right) = -a \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - T),$$

qui présentent entre elles une différence de phase T .

Le mouvement résultant de leur superposition est donné par

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = a \left(\sin 2\pi \frac{t}{\tau} + \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - T) \right) \\ y &= y_1 + y_2 = a \left(\cos 2\pi \frac{t}{\tau} - \cos \frac{2\pi}{\tau} (t - T) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= a \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \left(1 + \cos 2\pi \frac{T}{\tau} \right) - \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{T}{\tau} \right\} \\ y &= a \left\{ \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \left(1 - \cos 2\pi \frac{T}{\tau} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \sin 2\pi \frac{T}{\tau} \right\} \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\pi \frac{T}{\tau} &= 2 \cos^2 \pi \frac{T}{\tau} \\ 1 - \cos 2\pi \frac{T}{\tau} &= 2 \sin^2 \pi \frac{T}{\tau} \\ \sin 2\pi \frac{T}{\tau} &= 2 \sin \pi \frac{T}{\tau} \cos \pi \frac{T}{\tau} \end{aligned}$$

et mettant en facteur commun $2 \cos \pi \frac{T}{\tau}$ dans la première, $2 \sin \pi \frac{T}{\tau}$ dans la seconde,

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \pi \frac{T}{\tau} \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos \pi \frac{T}{\tau} - \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \pi \frac{T}{\tau} \right\} \\ y &= -2a \sin \pi \frac{T}{\tau} \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \cos \pi \frac{T}{\tau} - \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \sin \pi \frac{T}{\tau} \right\} \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \pi \frac{T}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right) \\ y &= -2a \sin \pi \frac{T}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Divisant l'une par l'autre, il vient

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tang} \pi \frac{T}{\tau},$$

relation indépendante de t qui nous montre que la molécule reste pendant tout son mouvement sur une ligne droite formant un

angle $\theta = -\pi \frac{T}{\tau}$ avec l'axe des x . Les deux vibrations circulaires de sens inverse sont donc bien équivalentes à une vibration rectiligne dont l'orientation dépend de leur différence de phase.

Ces préliminaires établis, voici comment Fresnel se représente l'action de la lame de quartz sur une vibration rectiligne. Supposons la vibration incidente parallèle à l'axe des x ; elle est équivalente à deux vibrations circulaires inverses ayant une différence de phase nulle $T = 0$. Le milieu ne laissant passer sans altération que des vibrations circulaires, elle devra se résoudre en ses deux composantes qui se propageront alors séparément¹.

Fresnel suppose que ces deux vibrations circulaires de sens inverse ne se propagent pas avec la même vitesse, mais que pour traverser la lame, la vibration dextrogyre et la vibration lévogyre prennent des temps différents T_1 et T_2 . A leur sortie, les deux circulaires ont donc une différence de phase $T = T_2 - T_1$, et leur superposition équivaut à une vibration rectiligne formant avec l'axe des x , c'est-à-dire avec la vibration rectiligne primitive, un angle θ égal à $-\frac{\pi}{\tau}(T_2 - T_1)$. Cet angle est négatif et la rotation du plan de polarisation a lieu de gauche à droite si T_2 est plus grand que T_1 , c'est-à-dire si la vibration circulaire dextrogyre est la plus rapide.

¹ On s'est souvent demandé si cette décomposition d'une vibration rectiligne en deux circulaires inverses s'effectue réellement dans le cristal. La question ne nous paraît pas avoir de sens. Le mouvement réel est représenté par les deux systèmes d'équations (1) et (2) qui sont absolument équivalents. Dans un cristal biréfringent ordinaire la même question pourrait être posée; lorsqu'une vibration polarisée traverse un pareil milieu, les molécules effectuent des vibrations elliptiques variables d'un point à un autre; le mouvement peut être défini soit en donnant pour chaque point les équations de ces mouvements elliptiques, c'est l'analogie des équations 2, soit en donnant les équations des deux vibrations polarisées à angle droit qui se propagent sans altération avec des vitesses différentes; c'est l'analogie des équations 1. Suivant les cas, l'une ou l'autre de ces deux définitions équivalentes sera plus avantageuse. *Gouv., C. R.* 1880, XC, 992.

T_1 et T_2 , étant proportionnels à l'épaisseur de la lame active, il en sera de même de leur différence et par conséquent de la rotation θ .

319. Vérification expérimentale de la double réfraction circulaire du quartz. — Les deux rayons polarisés circulairement en sens inverse que le quartz laisse passer sans altération doivent pouvoir manifester leur différence de vitesse dans des expériences de réfraction et dans des expériences d'interférences.

Fresnel a montré, en effet, que les deux rayons peuvent être séparés par réfraction. La

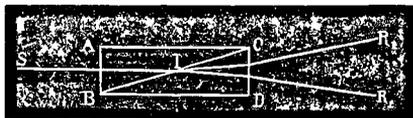


Fig. 443.

plus simple de ses expériences consiste à faire tomber un rayon SI (fig. 443) sur un système de deux prismes

de quartz accolés, l'un dextrogyre ABC, l'autre lévogyre CBD, ayant tous deux leur axe parallèle à SI. Le rayon circulaire dextrogyre passe, à leur surface de séparation CB, d'un milieu moins réfringent dans un milieu plus réfringent, et se rapproche de la normale suivant IR₁; le rayon lévogyre passe, au contraire, d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent, et s'éloigne de la normale suivant IR₂. Les différences de vitesses sont très faibles, l'écart des deux rayons est très petit, mais peut cependant être observé.

Entre autres expériences analogues, nous citerons la suivante : M. Stefan¹ introduit un biquartz sur le trajet des rayons qui produisent les franges d'interférences dans l'expérience de Young (§ 192), de manière que l'un des rayons doive traverser la moitié dextrogyre et l'autre la moitié lévogyre, et trouve que

¹ STEFAN, *Sitzb. Akad. Wien*, 1866, LIII, 548.

les franges se déplacent suivant que l'on fait tomber sur le système de la lumière polarisée circulairement dextrogyre ou lévogyre. Le sens de la polarisation circulaire change ainsi le signe du retard que les deux rayons prennent l'un sur l'autre en traversant des épaisseurs de quartz égales. Quant à la lumière polarisée circulairement, on l'obtient en plaçant sur le trajet d'un rayon polarisé rectilignement un mica dont la section principale soit à 45° de la vibration incidente; celle-ci se décompose alors en deux vibrations rectangulaires d'égale intensité qui, si l'épaisseur du mica est convenablement choisie (*mica* $\frac{1}{4}$ *d'onde*), prennent une différence de phase d'un quart de période, et donnent en rentrant dans l'air une vibration circulaire.

320. Conditions de possibilité de la polarisation rotatoire. — Pour qu'un phénomène tel que la polarisation rotatoire puisse se produire avec les caractères définis au § 312 dans un milieu cristallisé ou autre, il faut évidemment que ce milieu possède une symétrie particulière.

La rotation se produit de la même manière et avec la même intensité, quel que soit l'azimut de la vibration incidente. Cela ne peut avoir lieu dans une direction où se manifeste une biréfringence dans le sens ordinaire de ce mot; la biréfringence consistant précisément dans une différence d'action sur les vibrations polarisées à angle droit. La décomposition de la vibration rectiligne en deux circulaires exige que le milieu possède une symétrie optique complète tout autour de la direction du rayon, que tous les plans que l'on peut mener par le rayon soient optiquement équivalents. La polarisation rotatoire ne pourra donc se manifester que dans les milieux isotropes, ou dans les directions monoréfringentes des corps biréfringents.

L'expérience confirme cette prévision; la polarisation rotatoire a été observée suivant toutes les directions dans des corps

amorphes, solides, liquides ou gazeux, et dans des cristaux cubiques; et suivant la direction de l'axe principal dans certains cristaux uniaxes. Elle peut aussi se manifester suivant les axes optiques dans les cristaux à deux axes, c'est ce qui a lieu dans le quartz rendu biaxe par une compression mécanique¹.

Toutefois la biréfringence ordinaire n'est pas complètement incompatible avec la polarisation rotatoire, mais celle-ci est alors modifiée : les deux rayons qui peuvent traverser le cristal ne sont plus polarisés circulairement, mais bien elliptiquement. C'est ce qu'on observe lorsque le rayon traverse une lame de quartz dans une direction peu inclinée sur l'axe principal, ou lorsque, au moyen d'une compression mécanique, on communique une faible biréfringence temporaire à un corps actif. Mais pour peu que la biréfringence soit un peu forte, les ellipses s'aplatissent et se confondent avec des vibrations polarisées rectilignement à angle droit.

321. Caractère fondamental de la polarisation rotatoire naturelle. — Le signe du pouvoir rotatoire est toujours défini par rapport à un observateur regardant du côté d'où vient le rayon. La deuxième loi de Biot (§ 312), d'après laquelle ce signe reste le même pour deux rayons cheminant en sens inverse, n'est que l'expression d'un caractère général très important qui établit une différence fondamentale entre la polarisation rotatoire naturelle, dont nous nous occupons ici, et les phénomènes, analogues en apparence, qui se produisent sous l'influence du magnétisme. *Dans aucun corps connu, naturellement actif, le signe du pouvoir rotatoire ne change avec la direction du rayon.* Un corps dextrogyre est dextrogyre dans toutes les directions suivant lesquelles son activité peut se manifester.

¹ MACH et MERTEN, *Pogg. Ann.* 1875, CLVI, 639; — F. PÖCKELS, *ibid.* 1889 XXXVII, 269; — BEAULARD, *C. R.* 1890, CXI, 173; 1891, CXII, 1503.

322. Énantiomorphie des milieux actifs ¹. — Il résulte de ce caractère fondamental que *la polarisation rotatoire telle que nous la connaissons ne peut se rencontrer que dans des milieux à structure énantiomorphe.*

Prenons en effet (fig. 444) un milieu quelconque A qui fasse tourner vers la gauche, par exemple, le plan de polarisation d'un rayon perpendiculaire au plan de la figure. Construisons, comme nous l'avons fait au § 105, un second milieu B qui soit symétrique du premier par rapport à un plan MM. Ce nouveau milieu fera, nécessairement et par raison de symétrie, tourner le plan de polarisation de la même quantité vers la droite. *Les deux structures conjuguées ont donc des pouvoirs rotatoires égaux et de signes contraires.*

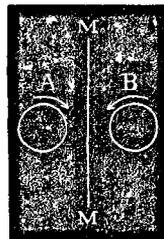


Fig. 444.

Or si, par un déplacement quelconque, on pouvait amener le milieu B à se superposer exactement au milieu A, rien, après ce déplacement, ne le distinguerait de A, et son pouvoir rotatoire ne pourrait différer en rien de celui de A. Il faudrait donc que B fût lévogyre ou dextrogyre suivant qu'il recevrait dans l'une ou l'autre de ces deux positions le rayon lumineux perpendiculaire au plan de la figure.

Comme cela ne peut avoir lieu d'après le principe général du § 321, il faut, ou bien que les milieux A et B soient inactifs, ou bien qu'ils ne soient pas superposables l'un à l'autre, ce qui est le caractère de l'énantiomorphie.

323. Il n'est peut-être pas inutile de vérifier directement qu'un milieu actif ne peut posséder ni centre ni plans de symétrie.

¹ On doit à M. Pasteur d'avoir saisi complètement la relation de l'énantiomorphie et de la polarisation rotatoire. Voyez les travaux de cet auteur cités au § 328.

Si le milieu actif possédait un plan de symétrie, tel que AB (fig. 445), l'action devrait s'exercer symétriquement sur deux rayons V_1V_2 et V_3V_4 , également inclinés de part et d'autre de ce plan. Les plans de polarisation de ces deux rayons tourneraient également, mais en sens inverse, ce qui n'a pas lieu dans les corps actifs connus.

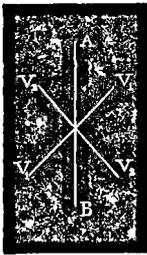


Fig. 445.

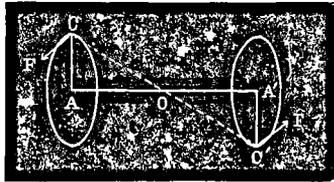


Fig. 446.

Si le milieu actif possédait un centre de symétrie, deux molécules A et A' symétriques l'une de l'autre par rapport à un point O pris comme centre de symétrie (fig. 446), ébranlées par deux rayons cheminant symétriquement par rapport à O , c'est-à-dire en sens inverse, et déplacées en C et C' symétriquement par rapport à ce centre, devraient être soumises à des forces également symétriques par rapport à O . Ces forces, représentées sur la figure par les flèches, entraîneraient les deux molécules dans des rotations de même sens absolu, ce qui est contraire aux faits.

324. Remarque. — Il importe de remarquer tout de suite que, si la polarisation rotatoire n'est possible que dans un milieu énantiomorphe, rien ne prouve qu'elle doive s'y rencontrer nécessairement. Ainsi que nous l'avons dit (§§ 152 et 153), deux directions de même structure ont forcément les mêmes propriétés sous tous les rapports : le contraire serait un effet sans cause. Mais il n'en résulte aucunement que deux directions de structures différentes aient nécessairement toutes leurs propriétés différentes. Un cristal cubique n'est pas un corps isotrope, sa ténacité, sa dureté varient dans les diverses directions, ce qui ne l'empêche pas de se comporter vis-à-vis de la lumière comme

un corps isotrope. Deux corps identiques de nature, de forme et de dimensions, ont forcément le même poids, mais deux corps différents n'en peuvent pas moins avoir des poids égaux. Il peut en être de même de l'action spéciale qui fait tourner le plan de polarisation dans un milieu actif.

325. Les trois cas possibles de structures dissymétriques. — Une structure énantiomorphe, régulière, et homogène relativement à nos sens, peut se rencontrer dans trois cas.

1° Dans des corps amorphes, solides, liquides ou gazeux, formés en tout ou en partie de molécules qui sont elles-mêmes dissymétriques.

2° Dans des cristaux méroédriques non superposables, soit que cette méroédrie résulte, comme dans les idées de Bravais, d'une dissymétrie des molécules elles-mêmes, soit qu'elle provienne, comme dans les théories plus récentes, d'une dissymétrie dans leur arrangement réticulaire.

3° Dans des groupements cristallins, formés d'éléments convenablement disposés, suffisamment petits et réguliers pour pouvoir être considérés comme formant un tout homogène¹.

¹ La théorie mécanique de la polarisation rotatoire a été et est encore très controversée. Il nous semble qu'au fond les points qui paraissent éclaircis et les lacunes que présente encore la théorie sont à peu près du même ordre pour la double réfraction rectiligne et pour la double réfraction circulaire.

Toute hypothèse sur la nature et la distribution des forces moléculaires qui déterminent les mouvements de l'éther dans les cristaux, permet d'établir d'une manière plus ou moins simple ou plus ou moins compliquée les équations différentielles auxquelles ces mouvements doivent satisfaire. Ces équations générales peuvent ensuite être réduites en tenant compte de la symétrie cristallographique. La présence d'un élément de symétrie quelconque supprime certains termes de ces équations, et impose certaines conditions aux autres.

Si l'hypothèse fondamentale sur laquelle les équations sont basées est suffisamment générale, à chaque système de symétrie correspond un système distinct d'équations, et l'on retrouve, comme cas particuliers possibles dans chaque système, la monoréfringence dans les cristaux cubiques, la biréfringence à un axe dans les cristaux quadratiques et hexagonaux, la biréfringence

DISSYMMÉTRIE MOLÉCULAIRE

326. Polarisation rotatoire des liquides. — Biot¹ découvrit, en 1815, que l'essence de térébenthine jouit de la propriété de faire tourner le plan de polarisation, et reconnut bientôt qu'il en est de même d'un grand nombre de liquides organiques.

à deux axes dans les trois derniers systèmes, et la polarisation rotatoire dans les directions monoréfringentes des cristaux méroédriques non superposables. Les théories de M. SARRAU, *J. de Liouville*, 1867, XII, 1; 1868, XIII, 59, et de M. BOUSSINESQ, *ibid.* 1868, XIII, 313, sont particulièrement intéressantes sous ce rapport.

Quant aux détails des phénomènes, ils varient avec les hypothèses choisies, et pour chaque hypothèse avec la valeur de certains coefficients dont la signification mécanique est souvent difficile à préciser et qui dépendent de particularités intimes et encore inabordables pour nous des forces moléculaires.

Les insuccès nombreux qui ont fait la célébrité de cette question provenaient, si nous ne faisons erreur, soit de ce que l'on avait négligé de tenir compte des conditions particulières de symétrie qui caractérisent chaque milieu dissymétrique, soit surtout de ce que les hypothèses d'où l'on était parti étaient incompatibles avec ces conditions de symétrie, ou pas assez générales pour en tenir compte. Il est clair que si les hypothèses choisies suppriment d'emblée les coefficients qui doivent s'annuler par l'introduction d'un centre de symétrie, elles ne pourront pas expliquer une différence de propriétés entre les cristaux qui ont un centre et ceux qui n'en ont pas. C'est comme si l'on voulait expliquer la double réfraction sans faire intervenir la non-isotropie des milieux biréfringents.

En particulier, il n'est pas sans intérêt de remarquer que les trois cas de structure dissymétrique mentionnés dans le texte, et qui paraissent les seuls que l'on puisse imaginer, excluent la notion d'une homogénéité complète du milieu actif. Dans tous trois, le milieu est partagé en éléments de volume très petits pour nos sens, identiques les uns aux autres, mais dans l'intérieur desquels la structure varie d'une manière dissymétrique. Il est donc à prévoir que la polarisation rotatoire ne peut être expliquée dans l'hypothèse d'un milieu mathématiquement homogène. Cette conséquence est en effet conforme aux résultats analytiques obtenus par M. W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1887, XXX, 190; — Ch. SORET, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1890, XXIV, 591.

¹ BIOT, *Bull. Soc. philom.* 1815, 190.

L'action est naturellement la même dans toutes les directions, et peut être définie dans chaque cas par le sens et la valeur de la rotation qu'éprouve un rayon lumineux en traversant une couche de liquide d'épaisseur égale à l'unité.

Si l'on met dans un tube cylindrique un volume v d'un liquide actif, produisant une rotation α par unité de longueur, et un volume v' d'un liquide inactif, l'effet produit sur le rayon lumineux est le même que si le liquide actif existait seul, à condition que les deux corps mélangés soient sans action chimique l'un sur l'autre. La rotation x par unité de longueur du mélange est facile à calculer dans ce cas. Si le liquide actif était seul dans le tube, il occuperait une longueur l et produirait une rotation αl . Le mélange occupe une longueur L et produit une rotation xL . On a, comme nous venons de le dire,

$$xL = \alpha l,$$

d'où

$$x = \alpha \frac{l}{L} = \alpha \frac{v}{v + v'}.$$

On aura de même, dans le mélange de deux liquides actifs sans action chimique mutuelle, produisant séparément des rotations α et α' par unité de longueur,

$$xL = \alpha l + \alpha' l' \\ x = \frac{\alpha l + \alpha' l'}{L} = \frac{\alpha v + \alpha' v'}{v + v'}.$$

Si nous appelons p , p' , $P = p + p'$ les poids des liquides mélangés et de leur mélange, d , d' , D leurs densités, on peut remplacer v , v' , $v + v'$ par leurs valeurs p/d , p'/d' , P/D , et les formules ci-dessus prennent les formes plus commodes

$$x = \alpha \frac{p}{P} \frac{D}{d} \quad \text{et} \quad x = \frac{D}{P} \left(\alpha \frac{p}{d} + \alpha' \frac{p'}{d'} \right).$$

Un cas important à considérer, parmi les liquides doués de la

polarisation rotatoire, est celui des solutions que forment un grand nombre de substances organiques solides dans des liquides inactifs. On peut considérer une telle solution comme un mélange d'un poids p du corps actif, supposé pris dans un état tel que sa densité d fût égale à 1, et d'un poids $P - p$ de dissolvant inactif, tel que la densité du mélange ait la valeur observée D . La première formule ci-dessus devient, en appelant $[\rho]$ la rotation α que produirait le corps actif de densité 1 et en posant $p/P = \varpi$,

$$x = [\rho]\varpi D;$$

ϖ est le poids de corps actif contenu dans l'unité de poids de la solution, $[\rho]$ est ce que l'on appelle le *pouvoir rotatoire moléculaire* ou *spécifique* du corps dissous.

Le pouvoir rotatoire spécifique est constant pour chaque corps actif et indépendant de l'état de ce corps, pourvu qu'aucune action chimique ne vienne modifier sa molécule. Le sucre vitreux et amorphe a le même pouvoir rotatoire spécifique que le sucre en dissolution¹; les vapeurs de camphre ou d'essence de térébenthine donnent la même valeur de $[\rho]$ que les mêmes corps pris à l'état liquide à la même température². Mais le pouvoir rotatoire spécifique change en général aussitôt qu'il se produit une action chimique; c'est sans doute par des actions de ce genre qu'il varie dans beaucoup de corps et en particulier dans l'acide tartrique avec la proportion du dissolvant. Des variations analogues se manifestent souvent avec la nature du dissolvant³, ou avec le temps qui s'est écoulé depuis la formation de la solution. Le pouvoir rotatoire diminue en général quand la température s'élève.

¹ BIOT, *Mém. de l'Institut*, 1832, XIII, 39.

² GERNEZ, *Ann. de l'École norm.* 1864, I, 1.

³ Voyez en particulier les travaux récents de M. GERNEZ, *J. de Physique*, 1887, V et suivants.

Dans les liquides actifs, la rotation varie avec la couleur de la lumière employée, et cela comme dans le quartz, à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde. Mais cette loi est loin d'être rigoureusement vraie, et certains corps, les camphres en solutions alcooliques par exemple, s'en écartent beaucoup. L'acide tartrique présente encore ici des anomalies curieuses. La rotation de l'acide vitreux et anhydre n'a pas le même sens pour tous les rayons du spectre; dans les solutions, à moins qu'elles ne soient très étendues, il subsiste un maximum de rotation pour certains rayons¹.

327. Symétrie des liquides actifs. — Un liquide, ou un corps homogène et isotrope quelconque, a généralement une structure caractérisée en ce que chaque point est un centre de symétrie, chaque plan est un plan de symétrie, chaque direction est un axe de symétrie d'ordre infini. Si ce corps renferme des molécules dissymétriques dépourvues de centre et de plans, et si toutes ces molécules sont de même espèce, le milieu résultant de leur assemblage sera également privé de centre et de plans de symétrie.

Le milieu dissymétrique conjugué, obtenu par la construction du § 105, serait formé également de molécules disposées sans ordre, orientées en moyenne de la même manière dans toutes les directions, mais dont chacune serait elle-même privée de centre et de plans de symétrie, et serait symétrique par rapport à un plan d'une des molécules du premier milieu.

On est ainsi conduit à concevoir l'existence de molécules dissymétriques de même nature chimique, mais qui seraient de deux espèces différentes, présentant entre elles les mêmes relations de symétrie que les deux polyèdres hémihédriques conju-

¹ BIOT, *C. R.* 1849, XXIX, 681. — Voir H. LANDOLT, *Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen*, Brunswick 1879.

gués, une molécule d'une espèce étant l'image vue dans un miroir plan d'une molécule de l'autre espèce.

Si le milieu renferme des nombres égaux des deux espèces de molécules, il s'établira une compensation, la dissymétrie dans un sens étant compensée par la dissymétrie en sens inverse, et le milieu se comportera comme s'il était formé de molécules symétriques.

Si un corps renfermant des molécules dissymétriques d'une seule espèce est susceptible de cristalliser, ses cristaux seront également dissymétriques. Ils devront donc appartenir à un système hémihédrique non superposable, et les deux corps conjugués donneront toujours dans leurs cristaux les deux formes inverses. L'hémihédrie se manifeste d'ailleurs d'une manière plus ou moins visible dans la distribution des faces ou dans les propriétés physiques. Mais son absence apparente dans quelques cas ne peut être invoquée comme un argument contre la théorie, car nous avons vu que l'hémihédrie est parfois assez difficile à déceler.

328. Dissymétrie et pouvoir rotatoire dans les acides tartriques. — Les relations géométriques nécessaires que nous venons d'indiquer, entre le pouvoir rotatoire des solutions et et l'hémihédrie non superposable des cristaux qui s'y forment, ont été découvertes en 1848 par M. Pasteur, dans ses recherches sur les propriétés de l'acide tartrique¹.

L'acide tartrique ordinaire en dissolution est dextrogyre; ses

¹ PASTEUR, *Sur la relation qui peut exister entre la forme cristalline et la composition chimique et sur la cause de la polarisation rotatoire*, C. R. 1848, XXVI, 535; 1848, XXVII, 401; *Ann. de Chim.* 1848, XXIV, 442; C. R. 1849, XXVIII, 477; XXIX, 297, 433; *Ann. de Chim.* 1850, XXVIII, 56; C. R. 1850, XXXI, 480, 601; *Ann. de Chim.* 1851, XXXI, 67; C. R. 1851, XXXIII, 217, 549; *Ann. de Chim.* 1852, XXXIV, 30; C. R. 1852, XXXV, 176; XXXVI, 757; *Ann. de Chim.* 1853, XXXVIII, 437; C. R. 1853, XXXVII, 162; 1854, XXXIX, 20; 1856, XLII, 1259; 1858, XLVI, 615; 1859, LI, 298; *Leçons sur la dissymétrie moléculaire*, Paris 1860; — GERNEZ, C. R. 1866, LXIII, 843.

sels possèdent aussi la polarisation rotatoire, et tous ces corps donnent des cristaux hémiédriques non superposables des systèmes rhombique et clinorhombique. Les facettes hémiédriques varient d'un sel à l'autre; mais, pour chaque sel, elles sont toujours disposées de la même manière, et on ne rencontre jamais que l'une des deux formes conjuguées¹.

En 1822, M. Kestner obtint, en traitant certains tartres, un acide ayant exactement la composition de l'acide tartrique, mais inactif ainsi que ses sels, qui a reçu le nom d'*acide racémique*, et dont les cristaux ne présentent aucune hémiédrie. Cependant, en examinant des cristaux de racémate double de sodium et d'ammonium, M. Pasteur y reconnut l'existence de faces hémiédriques, mais trouva en même temps que ces cristaux étaient de deux espèces différentes, qui se forment simultanément en quantités égales, et qui présentent l'une des facettes hémiédriques gauches, l'autre des facettes hémiédriques droites, correspondant ainsi aux deux formes conjuguées d'une hémiédrie non superposable. En les dissolvant tous ensemble, il obtint une solution inactive de racémate; mais en dissolvant séparément les cristaux gauches et les cristaux droits, il forma deux solutions actives, ayant la même composition chimique et faisant tourner le plan de polarisation de quantités égales, l'une à droite et l'autre à gauche. De l'une il put retirer un acide identique par

¹ Il importe de remarquer que le sens de la polarisation rotatoire dépend exclusivement de la structure du milieu; l'une des deux structures conjuguées sera toujours dextrogyre et l'autre toujours lévogyre. Mais, pour une même structure, l'apparition des facettes hémiédriques gauches et droites dépend des circonstances accessoires de la cristallisation. Le milieu dextrogyre et le milieu lévogyre, cristallisant dans les mêmes conditions, devront prendre l'un certaines facettes hémiédriques, l'autre les facettes conjuguées. Mais ces facettes pourront changer si les conditions extérieures se modifient. Un cristal droit, à l'égard de sa structure intérieure, pourra porter suivant les cas des facettes gauches ou des facettes droites, ou un mélange de formes gauches et droites. Voyez cependant § 104.

toutes ses propriétés à l'acide tartrique droit ordinaire, et de l'autre un acide ne différant du premier que par le sens de son pouvoir rotatoire, qu'il appela acide tartrique gauche.

Ces recherches, qui sont restées célèbres, démontrent ainsi l'existence de deux acides tartriques conjugués dont l'acide racémique n'est que le mélange en proportions égales.

Enfin, fait excessivement remarquable, M. Pasteur a découvert aussi une quatrième variété d'acide tartrique, qui est complètement inactive comme l'acide racémique, et dont les cristaux sont holoédriques, mais qui ne peut être dédoublée en un acide gauche et un acide droit. Il faut donc que la molécule de cet acide tartrique inactif soit elle-même symétrique.

329. Dissymétrie et pouvoir rotatoire des acides maliques. — Dans l'acide malique et ses sels, on trouve des relations analogues. On connaît un acide malique droit, un acide malique gauche, et un acide malique inactif qui, ainsi que l'acide racémique, est dédoublable et doit être considéré comme un mélange de deux composés actifs correspondants. M. Pasteur avait d'abord admis l'existence d'un acide malique inactif non dédoublable, analogue à l'acide tartrique inactif, mais d'après les recherches plus récentes de MM. Bremer, Anschütz, H.-J. van t'Hoff, cette quatrième forme ne paraît pas exister. Des considérations théoriques, qui feront l'objet du paragraphe suivant rendent du reste son existence très improbable.

L'acide tartrique et l'acide malique paraissent être, en ce qui concerne leur dissymétrie moléculaire, les représentants de deux classes très étendues de composés organiques, qui sont susceptibles de se présenter, les uns sous les quatre formes, droite, gauche, inactive dédoublable et inactive non dédoublable, et les autres sous les trois premières de ces formes seulement. On doit ajouter cependant que pour beaucoup de corps qui n'ont pas

encore été produits artificiellement par synthèse, on ne connaît que l'une des deux formes actives; mais la possibilité de la seconde forme active n'est dans ce cas pas douteuse, et résulte immédiatement des considérations géométriques des §§ 105 et 322.

330. Carbone asymétrique. — Pour expliquer les faits que nous venons de résumer, MM. J.-A. LeBel et J.-H. van t'Hoff¹ ont proposé à peu près simultanément, en 1874, une hypothèse très simple que les travaux ultérieurs paraissent confirmer dans toutes ses conséquences.

On sait que le carbone est un élément tétratmique, dont chaque atome peut se combiner en même temps avec quatre atomes ou radicaux saturant chacun l'une de ses quatre affinités. On peut se représenter schématiquement la molécule d'un corps qui contient du carbone sous la forme d'un tétraèdre, ayant en son milieu l'atome de carbone C, et à ses quatre angles les radicaux R_1, R_2, R_3, R_4 qui sont liés au carbone.

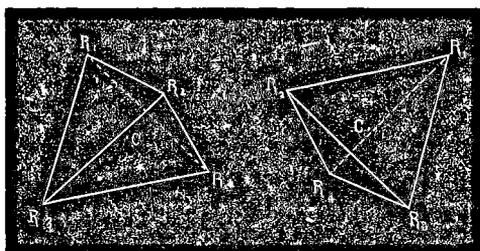


Fig. 447.

Or si nous construisons (fig. 447) la molécule conjuguée,

¹ LeBEL, *Bull. Soc. chim.* 1874, XXII, 337; — VAN T'HOFF, *La Chimie dans l'espace*, Rotterdam, 1875; *Dix années dans l'histoire d'une théorie*, Rotterdam 1887. Voyez sur cette théorie les travaux de MM. WISLICENUS, ANSCHÜTZ, LOSSEN, V. MEYER, HANTSCH, AUWERS, WERNER, RIECKE, BAUMANN, etc., etc., dans les *Berichte der deutschen Chem. Gesellschaft*, et MEYERHOFFER, *Die Stereochemie*, Leipzig, 1892.

symétrique de la première par rapport à un plan, nous trouvons que, dans le cas où les quatre radicaux sont différents, les deux tétraèdres conjugués ne sont superposables l'un à l'autre par aucune rotation. Ces deux molécules, absolument isomères et semblables par toutes leurs propriétés, présentent les relations mutuelles de symétrie qui doivent exister entre les corps gauches et droits étudiés ci-dessus. Les deux molécules ne deviennent symétriques et superposables que si deux au moins des quatre radicaux sont égaux, par exemple si $R_2 = R_1$. Cet atome de carbone combiné avec quatre groupes R différents est ce que MM. LeBel et van t'Hoff appellent un atome de *carbone asymétrique*. Ils sont parvenus à démontrer :

1° Que, dans tous les corps qui, à l'état amorphe, possèdent le pouvoir rotatoire, les réactions chimiques prouvent l'existence dans la molécule de un ou plusieurs atomes de carbone asymétrique.

2° Que si, par une réaction convenable, on parvient à rendre égaux deux des groupes R de la molécule d'un corps actif, on fait en même temps disparaître le pouvoir rotatoire.

Il n'y a pas de nécessité *a priori*, ainsi que M. van t'Hoff l'observe très justement, à ce que la polarisation rotatoire se manifeste toutes les fois qu'il y a un carbone asymétrique, il pourrait se produire des compensations équivalant, au point de vue optique, au rétablissement de la symétrie de la molécule. En fait, il paraît que l'on ne connaît aucun cas de ce genre, et que tous les corps dans lesquels la présence d'un carbone asymétrique empêche la molécule d'être superposable à sa conjuguée sont actifs à l'état amorphe.

M. Phil. GUYE¹ a observé récemment que le signe et la grandeur du pouvoir rotatoire paraissent liés étroitement à la

¹ Phil. GUYE, *Étude sur la dissymétrie moléculaire*, Thèse, Paris 1891; *Archiv. des Sc. phys. et nat.* 1891. XXVI, 97, 201, 333; *Ann. de Chim.* 1892, XXV, 145.

position du centre de gravité des radicaux R par rapport aux plans de symétrie du tétraèdre.

Si la molécule renferme un seul carbone asymétrique, on a le cas de l'acide malique, et des corps analogues. On conçoit l'existence des deux acides maliques isomères (fig. 448), différents

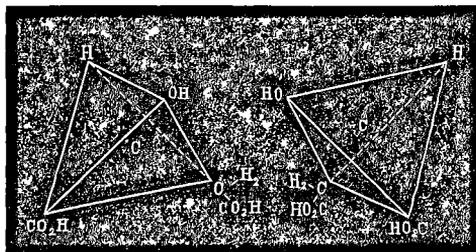


Fig. 448.

seulement par le sens de leur pouvoir rotatoire, et dont le mélange en proportions égales forme la variété inactive et dédoublable. Une réduction par l'acide iodhydrique transforme l'acide malique en acide succinique, dont la molécule peut être représenté par la figure 449, et qui est inactif.

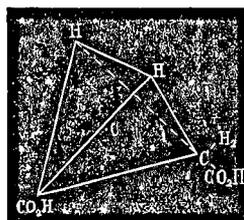


Fig. 449.

Si la molécule renferme deux carbones asymétriques, on a le cas de l'acide tartrique, que l'on peut représenter schématiquement par deux tétraèdres pénétrant

l'un dans l'autre de telle sorte que le milieu de l'un coïncide avec un angle solide de l'autre, et soit occupé par un atome de carbone. Les trois autres angles de chaque tétraèdre sont occupés par les groupes H, OH et COOH. Or on peut imaginer deux dispositions principales de ces trois groupes.

La première disposition (fig. 450) donne une molécule non superposable à sa conjuguée, et correspond par conséquent aux deux acides tartriques actifs. Leur mélange donne l'acide racémique.

La seconde disposition, où les trois groupes apparaissent en ordre inverse dans les deux tétraèdres pour un observateur qui serait placé dans l'intérieur de la molécule (fig. 451), a

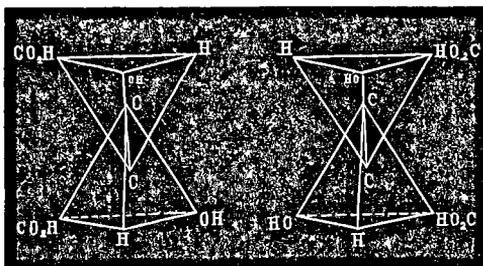


Fig. 450.

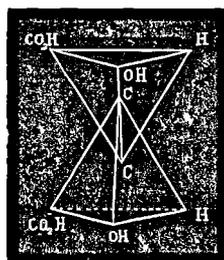


Fig. 451.

un plan de symétrie horizontal, est superposable à sa conjuguée et correspond à l'acide tartrique inactif et non dédoublable. La compensation des deux dissymétries inverses se fait dans chaque molécule.

331. Réactions dissymétriques. — Nous ne pouvons, sans sortir du cadre de cet ouvrage, pousser plus loin l'étude de cette théorie remarquable. Nous indiquerons seulement encore quelques faits relatifs aux réactions chimiques des molécules dissymétriques.

Les molécules conjuguées non superposables ont exactement les mêmes propriétés chimiques à l'égard des corps inactifs ; au malate droit de potassium correspond un malate gauche qui n'en diffère que par le sens du pouvoir rotatoire, et par l'orientation des faces hémisphériques.

Mais, ainsi que M. Pasteur l'a reconnu, leur action peut être différente à l'égard d'autres molécules dissymétriques elles-mêmes. L'acide tartrique droit s'unit à l'asparagine ; dans les mêmes conditions, l'acide gauche ne donne aucune combinaison. Il est clair que les molécules qui se formeraient par la réunion

des deux sels de même signe ou des deux sels de signes contraires ne seraient ni superposables l'une à l'autre, ni symétriques l'une de l'autre ; aucune considération de symétrie ne nous indique dans ce cas de relation entre leurs propriétés.

Si, par l'action réciproque de deux corps inactifs, on obtient un corps à carbone asymétrique, il n'y a aucune raison pour que l'une des molécules conjuguées se forme plus facilement que l'autre, et, par simple raison de symétrie, les deux variétés gauche et droite se formeront en proportions égales. Le produit sera donc inactif par compensation, mais dédoublable en deux produits actifs inverses. Ainsi l'oxydation de l'acide succinique par l'action successive du brome, de l'oxyde d'argent et de la chaleur donne de l'acide racémique. Le dédoublement ne peut être opéré chimiquement par l'action de corps inactifs ; dans la cristallisation du racémate double de soude et d'ammoniaque, les cristaux des deux espèces se forment en quantités égales et restent mêlés.

Au contraire, les réactions qui ont lieu en présence de composés dissymétriques peuvent produire de préférence ou exclusivement l'un des deux produits conjugués, ou séparer les deux produits dans leur mélange. Si, dans une solution sursaturée de racémate double de sodium et d'ammonium, on introduit un cristal droit déjà formé du même sel, on provoque la cristallisation du tartrate droit, tandis que le tartrate gauche reste dissous (Gernez). Dans l'évaporation du racémate de cinchonine, le tartrate gauche se dépose le premier en cristaux (Pasteur).

Des réactions dissymétriques se produisent aussi sous l'influence des organismes vivants. C'est ainsi que les composés à carbone asymétrique qui se forment naturellement dans les plantes et dans les animaux s'y trouvent habituellement à l'état actif. L'acide tartrique des raisins est droit, ce n'est que très rarement que l'on rencontre de l'acide racémique ; il en est de

même des alcaloïdes végétaux, qui sont généralement sous une forme active. C'est ainsi encore que M. Pasteur, en faisant végéter certains organismes microscopiques dans une solution de racémate d'ammoniaque, a fini par obtenir une solution de tartrate gauche, tandis que le tartrate droit était détruit¹.

332. Dissymétrie moléculaire des cristaux. — Ainsi que nous l'avons remarqué au § 327, les cristaux qui se forment dans une solution active doivent rentrer dans un des systèmes méroédriques non superposables. Il est probable *a priori* que lorsque ces cristaux présentent des directions monoréfringentes, ils doivent faire tourner le plan de polarisation, comme les solutions formées des mêmes molécules. On ne peut cependant déduire la grandeur de leur pouvoir rotatoire de celui de la solution, et cela pour deux raisons : 1° dans la solution, les molécules sont orientées irrégulièrement dans toutes les directions, ce qu'on observe est un pouvoir rotatoire moyen ; dans les cristaux, au contraire, les molécules sont orientées dans des positions relatives déterminées et les mêmes partout. Il n'y a pas de raison pour que la rotation qu'elles impriment au plan de polarisation d'un rayon qui les traverse dans une direction monoréfringente donnée soit égale au pouvoir rotatoire moyen de la solution. Suivant les cas, elle peut être plus grande ou plus petite, ou même nulle². — 2° La dissymétrie des molécules doit entraîner en général une dissymétrie de leur arrangement réticulaire, et peut-être même une dissymétrie régulière dans le groupement de portions réticulaires distinctes. L'effet observé est la résultante des pouvoirs rotatoires attribuables à la dissy-

¹ La même méthode a été appliquée depuis lors dans beaucoup d'autres cas, en particulier par MM. LE BEL, LEWKOVITSCH et BAUMANN.

² MALLARD, *Crystallographie*, II, 333.

métrie des molécules et à la dissymétrie de leur arrangement quel qu'il soit, et ne peut être calculé *a priori*.

333. Les faits d'observation paraissent en général conformes à la théorie: cependant il y a quelques exceptions dont l'explication exigera de nouvelles recherches.

La plupart des corps actifs en solutions donnent des cristaux biaxes dans lesquels il est difficile de rechercher la polarisation rotatoire, mais où l'hémiédrie se manifeste plus ou moins nettement. M. Pasteur a toutefois rencontré des dérivés de l'alcool amylique où les cristaux de la modification active et de la modification inactive sont absolument identiques de formes et sans méroédrie apparente, et ne diffèrent que par la solubilité¹.

L'influence de la composition chimique sur la forme cristalline est encore trop mal connue, et nous avons en Cristallographie trop d'exemples de caractères physiques plus symétriques que la structure du cristal pour que quelques faits de ce genre puissent être considérés comme des objections graves.

Dans le système hexagonal, M. Des Cloizeaux² a trouvé que le camphre de patchouli et le camphre de menthe, tous deux fortement lévogyres en solution, donnent des cristaux inactifs et sans apparence d'hémiédrie. Ici encore, la difficulté n'est pas insurmontable. L'hémiédrie peut être difficile à reconnaître et l'orientation des molécules peut jouer le rôle indiqué au § 332.

Dans le système quadratique, le sulfate de strychnine (§ 80) paraît appartenir à l'hémiédrie holoaxe. Les figures de corrosion obtenues par M. Baumhauer sont du moins conformes à cette supposition: l'acide chlorhydrique étendu développe sur les bases de ces cristaux un réseau de petits

¹ PASTEUR, *C. R.* 1856, XLII, 1259.

² DES CLOIZEAUX, *C. R.* 1870, LXX, 1209.

traits inclinés par rapport au contour du cristal, et inclinés en sens inverse sur les deux bases opposées. M. Martin n'a obtenu que des traits symétriques, mais il a observé que les irrégularités naturelles des bases consistent en enfoncements nombreux dont les contours ne sont pas parallèles à ceux du cristal, et sont disposés sur les bases opposées comme les traits de M. Baumhauer.

M. Des Cloizeaux a trouvé que ces cristaux dévient tous le plan de polarisation vers la gauche, la rotation est de 9 à 10° par millimètre pour les rayons rouges. La solution est aussi lévogyre, mais son pouvoir rotatoire spécifique est beaucoup plus faible que celui des cristaux.

D'après M. Wyruboff, la structure de ces cristaux ne serait pas homogène; ils seraient formés d'un mélange de parties quadratiques sans polarisation rotatoire appréciable et de lamelles clinorhombiques dont la superposition sous des angles de 45° donnerait lieu dans les gros cristaux à une rotation du plan de polarisation simulant plus ou moins la polarisation rotatoire véritable. Ce point de vue a été très discuté et contesté par d'autres auteurs.

Quoi qu'il en soit, il n'y a pas là de contradiction avec les indications générales de la théorie. La rotation du plan de polarisation étant de même sens sur tous les cristaux, il faut qu'elle soit déterminée par la dissymétrie de la molécule. Cette dissymétrie est prouvée par l'activité de la solution, et ne peut disparaître dans l'acte de la cristallisation; il se peut qu'elle agisse directement sur les rayons polarisés, ou bien indirectement en donnant un caractère dissymétrique de sens déterminé aux groupements des réseaux élémentaires.

Dans le système cubique, M. LeBel¹ a cité l'alun d'amylamine comme un corps actif en cristaux et en solution.

¹ LeBEL, *Ber. d. d. Chem. Ges.* 1872, V, 391.

M. Des Cloizeaux a reconnu que le térécamphène, le monochlorhydrate de térébenthine, lévogyres en solution, et le camphre de Bornéo dextrogyre, forment des cristaux cubiques inactifs, d'ailleurs peu nets. Les pouvoirs rotatoires spécifiques de ces corps sont, il est vrai, assez faibles; l'épaisseur des cristaux était peut-être insuffisante¹ pour que l'effet fut appréciable. Si ces cristaux étaient réellement inactifs, le fait ne pourrait guère s'expliquer que par une compensation entre la dissymétrie de la molécule et celle du réseau; à moins d'admettre que la molécule, qui garde sa dissymétrie dans la combinaison chimique, la perde et change de nature dans l'acte bien plus inoffensif de la cristallisation, ce qui est bien peu probable. En tout cas, l'existence d'un milieu symétrique formé de molécules dissymétriques toutes semblables entre elles, aussi bien qu'une rotation du plan de polarisation, obéissant aux lois de Biot dans un milieu pourvu de plans de symétrie, paraissent géométriquement impossibles.

DISSYMMÉTRIE NON MOLÉCULAIRE DES CRISTAUX

334. Caractères généraux. — Les cristaux autres que ceux qui viennent d'être cités et qui rentrent dans les systèmes méroédriques non superposables n'acquièrent cette dissymétrie que pendant la cristallisation. Qu'ils possèdent ou non la polarisation rotatoire, leurs solutions sont toujours inactives; les cristaux des deux formes inverses peuvent prendre naissance dans une même solution, même si celle-ci a été faite avec des cristaux d'une seule espèce².

¹ MALLARD, *Traité de Cristallographie*, II, 332.

² W. HERSCHEL, *Cambr. Trans.* 1821, I, 43, a été le premier à observer une relation entre le sens du pouvoir rotatoire du quartz et l'orientation de ses

335. Cristaux énantiomorphes du système cubique.

— En laissant de côté l'alun d'amylamine et les camphres déjà cités et moléculairement actifs, les cristaux de ce genre qui sont actuellement connus se partagent en trois groupes :

a) Le chlorure de potassium, le chlorure d'ammonium, le cuivre oxydulé, hémihédriques plagiédriques (§ 75), dans lesquels on n'a pas pu trouver de polarisation rotatoire.

b) Le chlorate de soude, le bromate de soude, l'acétate d'urane et sodium, le sulfoantimoniate et le sélénioantimoniate de soude, tétrartoédriques, et possédant le pouvoir rotatoire (§ 78).

c) Les nitrates de baryum, de strontium, de plomb, l'arséniate double de sodium et strontium, tétrartoédriques aussi, mais inactifs.

Le mieux connu des corps actifs du groupe *b*) est le chlorate de soude NaClO_3 (fig. 452, 453). Les cristaux, obtenus par l'évaporation lente de la solution, présentent les faces du cube, du dodécaèdre rhomboïdal, d'un dodécaèdre pentagonal et d'un tétraèdre. Quelquefois on observe le tétraèdre inverse, mais avec des faces courbes en général. Le sens de la polarisation rotatoire est lié à la position du tétraèdre principal relativement

faces hémihédriques. — DELAFOSSE, *Mém. Sav. étrang.* 1837, VIII, 641, a émis les premières idées sur la dissymétrie intérieure des cristaux actifs. — M. WYROUBOFF, *Ann. de Chim.* 1886, VIII, 340; *Bull. Soc. min.* 1890, XIII, 215, paraît disposé à nier toute relation entre l'hémihétrie et le pouvoir rotatoire, et à tout expliquer par des groupements cristallins (§ 335). Cette manière de voir nous paraît un peu trop restrictive.

Théoriquement, les cristaux gauches et droits devraient se former en moyenne en proportions égales. Des causes encore mal connues, parmi lesquelles on peut citer l'influence probable de traces de matières dissymétriques étrangères, font que cette égalité ne s'observe pas toujours. Les cristaux de carbonate de guanidine sont en majorité dextrogyres, ceux de formiate de strontiane sont en excès tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, suivant le mode de préparation; le chlorate de soude, l'arséniate double de sodium et de strontium présentent des particularités analogues.

au dodécaèdre pentagonal : la figure 452 représente, d'après M. Groth, un cristal dextrogyre, la figure 453 un cristal lévogyre. Une même solution fournit le plus souvent des cristaux des deux espèces. Le pouvoir rotatoire, découvert dans ce sel par Marbach en 1854, est d'environ $3^{\circ},13$ pour la lumière jaune de la soude par millimètre d'épaisseur. Il a la même valeur dans les cristaux gauches et droits, et paraît être le même dans toutes

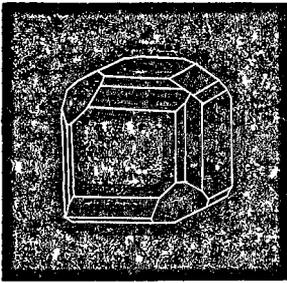


Fig. 452.

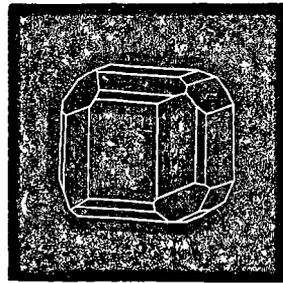


Fig. 453.

les directions¹. Il augmente un peu avec la température. La surface de l'onde serait ainsi formée de deux sphères concentriques. Les cristaux, quoique souvent très beaux, sont trop altérables et de dimensions trop faibles pour que cette égalité d'action dans toutes les directions puisse être contrôlée avec toute la précision désirable.

336. Cristaux énantiomorphes du système quadratique. — En dehors du sulfate de strychnine étudié plus haut on cite le carbonate de guanidine, le sulfate d'éthylène-diamine, la diacétylphénolphtaléine, qui paraissent être hémédriques trapézoédriques (§ 80), et possèdent un pouvoir rotatoire assez considérable dans la direction de l'axe principal. La dissymétrie

¹ Le pouvoir rotatoire du chlorate de soude a été étudié par M. SOHNCKE, *Wied. Ann.* 1878, III, 516, et par M. C.-E. GUYE, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1889, XXII, 130.

ne s'accuse pas en général dans les formes extérieures, si ce n'est peut-être pour le carbonate de guanidine.

337. Cristaux énantiomorphes du système hexagonal. — En dehors des camphres cités au § 333, dont la dissymétrie n'a pu être encore vérifiée expérimentalement, mais dépend en tout cas de la molécule chimique, on peut ranger ces cristaux en cinq groupes :

a) L'éther triéthylé de l'acide trimésique, appartenant peut-être à l'hémiédrie trapézoédrique, avec une structure et des propriétés optiques encore très douteuses (§ 87).

b) La néphéline, qui, d'après les figures de corrosion observées par M. Baumhauer, appartient à la tétartoédrie pyramidale, avec les deux formes inverses le plus souvent mâclées et enchevêtrées, et ne possède pas de pouvoir rotatoire (§ 90).

c) Le cinabre, le quartz, les hyposulfates de plomb, de chaux, de strontiane, les hyposulfates de potassium, de rubidium, de césium, le benzile, le maticostéaroptène, tétartoédrie trapézoédrique accusée par les faces ou par les figures de corrosion, avec les deux formes inverses, et la polarisation rotatoire (§ 94).

d) La diimide de l'éther succinylsuccinique, appartenant au même système, mais inactive.

e) Le périodate de soude, ogdoédrique, donnant les deux espèces de cristaux à pouvoir rotatoire de sens contraire (§ 97).

338. Cinabre et quartz. — Presque tous les corps que nous venons de citer sont d'une étude difficile par suite de leur altérabilité et des groupements plus ou moins complexes de leurs cristaux. Le cinabre présente ceci d'intéressant que la rotation qu'il produit est près de quinze fois plus forte que celle du quartz.

Le quartz est le seul de ces corps qui se prête à une étude

détaillée de la double réfraction circulaire ¹. Sa tétartoédrie se manifeste dans sa forme cristalline, composée le plus souvent du prisme, de deux rhomboèdres r et r' inégalement développés, d'une pyramide trigonale s et d'un trapézoèdre trigonal x . Dans

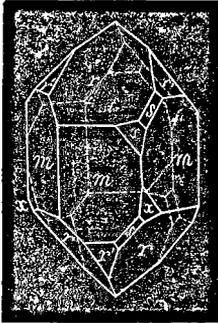


Fig. 454.

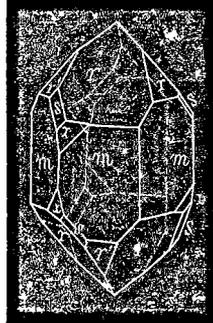


Fig. 455.

les cristaux droits, les faces s et les faces x sont à droite de r . C'est l'inverse dans les cristaux gauches (fig. 454, 455). Les deux espèces de cristaux sont d'ailleurs souvent enchevêtrées l'une dans l'autre.

La silice fondue est inactive. Les cristaux gauches et droits sont également fréquents, ce qui ne veut pas dire que dans chaque gisement pris en particulier les uns ou les autres ne puissent prédominer.

339. Polarisation elliptique du quartz. — Nous avons ramené la polarisation rotatoire du quartz dans la direction de de son axe principal à la décomposition du rayon incident en deux rayons polarisés circulairement en sens inverse et cheminant avec des vitesses inégales (§ 318).

¹ Pour l'historique des déterminations du pouvoir rotatoire du quartz, voyez MASCART, *Ann. de l'École norm.* 1872, I, 196; — J.-L. SORET et E. SARASIN, *Archives des sc. phys. et nat.* 1882, VIII, 5. — Depuis lors MM. HUSSEL, *Wied. Ann.* 1891, XLIII, 498; et CARVALLO, *Ann. de Chim.* 1892, XXVI, 113, ont étudié la rotation des rayons calorifiques.

Dans les directions inclinées par rapport à l'axe, les deux vibrations que le cristal laisse passer sans les modifier ont des trajectoires elliptiques semblables, parcourues en sens inverse par la molécule vibrante, et dont les grands axes sont pour l'une parallèles, et pour l'autre perpendiculaires à la section principale du cristal. Dès que l'inclinaison du rayon devient un peu considérable et dépasse une vingtaine de degrés, les ellipses s'aplatissent rapidement, et deviennent, la première la vibration extraordinaire, la seconde la vibration ordinaire, sensiblement rectilignes¹.

Quand un rayon primitivement polarisé rectilignement tombe sur une lame de quartz un peu oblique sur l'axe, il se décompose donc en deux vibrations elliptiques. Celles-ci, prenant une différence de phase dans leur trajet à travers le cristal, ne donnent généralement pas à leur sortie une vibration résultante rectiligne, mais bien une vibration elliptique.

340. Forme de la surface de l'onde dans le quartz¹.
— Les deux nappes de la surface de l'onde, au lieu de couper l'axe optique aux mêmes points comme elles le font dans les cristaux ordinaires à un axe, laissent au contraire dans le quartz un petit intervalle entre elles. La nappe extérieure, au lieu d'être partout sphérique, se renfle légèrement aux environs des points où elle rencontre l'axe, tandis que la nappe intérieure ellipsoïdale s'aplatit dans la même région.

¹ La polarisation elliptique du quartz a été supposée par AIRY pour expliquer les phénomènes observés en lumière convergente, *Cambr. Trans.* 1831, IV, 79, 198; — JAMIN, *Ann. de Chim.* 1850, XXX, 55, en a fait la première vérification expérimentale directe; — HECHT, *Wied. Ann.* 1883, XX, 426; 1887, XXX, 274; — GOUY, *J. de Phys.* 1885, IV, 149; — BEAULARD, *C. R.* 1889, CVIII, 671; CIX, 140; 1890, CX, 1063.

² V. v. LANG, *Pogg. Ann.* 1870, CXL, 460; — A. CORNU, *J. de Phys.* 1882, I, 157; — K. EXNER, *Wied. Ann.* 1885, XXV, 141; — MAC CONNELL, *Proc. Roy. Soc.* 1885, XXXIX, 409.

Les deux rayons, lorsqu'ils se propagent dans la direction de l'axe, n'ont pas des vitesses égales, comme dans les cristaux inactifs; les deux indices, au lieu de prendre dans ce cas la valeur 1,544224 de l'indice ordinaire, deviennent, d'après M. v. Lang, 1,544188 et 1,544260.

D'après M. Cornu, la déformation a la même valeur pour les deux nappes, de sorte que la vitesse du rayon ordinaire dans une direction perpendiculaire à l'axe est la moyenne des vitesses des deux rayons polarisés circulairement qui se propagent dans la direction de l'axe.

La rotation croît légèrement quand la température s'élève.

341. Figure produite en lumière convergente par une lame de quartz perpendiculaire à l'axe. — Nous avons déjà parlé des apparences observées en lumière parallèle, qui, précisément, ont attiré l'attention sur la polarisation rotatoire. En lumière convergente la rotation des plans de polarisation des rayons centraux, et la polarisation elliptique des rayons peu inclinés sur l'axe, modifient notablement la figure habituelle des cristaux à un axe. Les branches de la croix noire ne vont pas jusqu'au centre de la figure, lequel est occupé par une plage éclairée et généralement colorée, dont la teinte change avec la position de l'analyseur, comme si la plaque était observée en lumière parallèle. Si l'analyseur n'est pas parallèle ou perpendiculaire au polariseur, les anneaux perdent leur forme circulaire et prennent l'apparence de carrés à angles arrondis.

Si l'on superpose deux quartz de même épaisseur et de rotations contraires, le centre de la figure présente des spirales dites *spirales d'Airy*, qui sont enroulées de gauche à droite si le quartz le plus rapproché de l'observateur est lévogyre, et de droite à gauche s'il est dextrogyre (Planche, fig. 6). Ces spirales

s'observent quelquefois avec une seule lame, lorsque celle-ci a été taillée dans un cristal mâclé renfermant des portions de rotations inverses.

342. Cristaux énantiomorphes à deux axes. — Dans les systèmes rhombique, clinorhombique et triclinique, l'énantiomorphie est représentée également par deux cas distincts, celui des cristaux moléculairement dissymétriques provenant de solutions actives, et celui des cristaux qui ne deviennent dissymétriques que pendant la cristallisation; tel est, par exemple, le sulfate de magnésie. Les propriétés optiques de ces cristaux énantiomorphes ne paraissent pas différer de celles des cristaux symétriques.

* **343. Remarque.** — Il n'est pas difficile de concevoir que des molécules symétriques par elles-mêmes puissent former des assemblages dissymétriques, tels que ceux que prévoit la théorie de M. Sohncke (§ 132), et cela bien qu'on ne puisse se rendre compte exactement des raisons qui produisent ces assemblages dans certaines substances plutôt que dans d'autres.

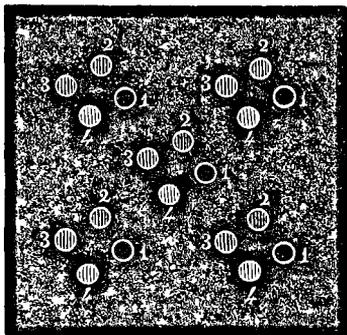


Fig. 456.

Dans un système de spirale à quatre points, par exemple (fig. 456), on conçoit que la couche de molécules n° 2 puisse être conformée de telle manière qu'elle soit en équilibre non pas lorsqu'elle se projette directement sur la couche n° 1 qui est au-dessous, mais bien lorsque les molécules qui la constituent se projettent sur les points 2 ou sur les points 4. Ces deux positions sont également probables si les molécules sont symétriques. Mais une fois

les deux premières couches déposées, le système n'est déjà plus symétrique, et il n'y a rien d'anormal à ce que la couche suivante vienne se projeter sur 3 plutôt que sur 1, ce qui serait également probable si la couche n° 2 était seule en jeu pour fixer sa position.

344. Polarisation rotatoire dans les groupements cristallins. — M. Reusch¹ a montré qu'en superposant régulièrement un certain nombre de minces lamelles de mica de manière que chacune d'elles soit tournée, toujours dans le même sens, de 60° par rapport à celle qui est au-dessous, on obtient un système qui se comporte absolument comme une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, et qui est dextrogyre ou lévogyre suivant que les lamelles sont empilées de gauche à droite ou de droite à gauche (fig. 457).

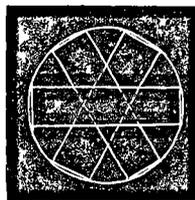


Fig. 457.

M. Mallard² a reconnu que l'analogie persiste dans l'observation en lumière convergente, dans les spirales d'Airy que l'on obtient en superposant deux paquets égaux de rotations contraires, et dans la polarisation elliptique des rayons peu inclinés sur la normale.

M. Mallard³ a déduit de cette étude une explication de la structure des milieux actifs. Dans le quartz, par exemple, on aurait des molécules à symétrie rhombique, formant des plans réticulaires perpendiculaires à l'axe principal, dont la maille serait un rhombe de 120° . Le réseau aurait ainsi une symétrie

¹ REUSCH, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVIII, 623. — FRESNEL, *Œuvres*, I, 460, 505, avait obtenu des résultats analogues par une disposition dont le principe est le même. Voyez VERDET, *Opt. Phys* II, 201.

² MALLARD, *Ann. des Mines*, 1876, X, 175; — SOHNCKE, *Pogg. Ann.* 1876, Ergsbd. VIII, 16.

³ MALLARD, *Ann. des Mines*, 1881, XIX, 256.

hexagonale. Sur une rangée parallèle à l'axe, qui est un axe binaire de la molécule et un axe sénaire du réseau, la molécule peut prendre, par des rotations de 120° , trois positions également probables. Si les plans réticulaires se superposent de manière que chaque molécule soit tournée de 120° par rapport à celle qui la précède, et cela toujours dans le même sens, la structure sera très analogue à celle des piles de lames de mica, et devra présenter les mêmes propriétés optiques.

Dans les cristaux actifs du prisme à base carrée, on aurait de même un réseau quadratique composé de molécules tricliniques dont chacune serait tournée de 45° par rapport à celle qui est au-dessous. Dans les cristaux cubiques, on aurait l'enchevêtrement de molécules tricliniques orientées plus ou moins régulièrement suivant les douze directions qui correspondent aux douze faces du tétrartoèdre.



CHAPITRE XXII

DE L'ABSORPTION

345. Faits généraux. — Tous les corps ont la propriété d'éteindre, d'absorber plus ou moins énergiquement les vibrations lumineuses qui les traversent. Si cette absorption est faible et sensiblement la même pour tous les rayons du spectre visible, le corps sera incolore, et, recevant un rayon de lumière blanche, il laissera passer sous une épaisseur modérée de la lumière blanche également. Le plus souvent, il n'en est pas ainsi; l'absorption est très inégale pour les diverses couleurs, dont les proportions dans la lumière transmise dépendent de l'épaisseur du corps, et ne sont plus les mêmes que dans la lumière blanche; le corps est alors coloré.

On peut admettre que si l'intensité d'une radiation simple est I_0 , elle devient, en traversant une épaisseur z du corps étudié,

$$I = I_0 e^{-\alpha z};$$

α est un coefficient d'absorption dépendant de la nature du corps et de la longueur d'onde de la lumière employée.

On peut se faire une idée générale de la variation de α avec la longueur d'onde dans une substance donnée, en plaçant une

lame de cette substance devant la fente d'un spectroscopie et en l'éclairant avec une lumière blanche. Le spectre lumineux est alors affaibli ou éteint plus ou moins dans les régions où α a la plus grande valeur.

On trouve ainsi que la plupart des corps ne sont transparents que pour une région limitée du spectre, d'autant plus resserrée qu'on les considère sous une plus grande épaisseur. Quelquefois ils transmettent plusieurs régions distinctes, on voit le spectre sillonné de bandes sombres qui correspondent aux radiations absorbées. C'est le cas, en particulier, des solutions et des verres renfermant de l'oxyde de didyme. Enfin le corps peut être, même sous une faible épaisseur, complètement opaque pour tout le spectre.

Nous ne nous occuperons dans ce chapitre que des corps, même fortement colorés, qui sont assez transparents pour pouvoir être étudiés par les procédés ordinaires; l'absorption dans ce cas ne modifie que d'une manière insensible les lois de la propagation de la lumière; la surface de l'onde reste la même que dans les corps dépourvus d'absorption, et l'on ne peut guère constater que quelques anomalies dans la marche de la dispersion, pour les radiations voisines de celles qui sont particulièrement absorbées.

Dès que, comme c'est le cas dans les métaux, le coefficient d'absorption est un peu fort, l'opacité devient pratiquement à peu près complète; les propriétés optiques éprouvent des altérations profondes et doivent presque toujours être déduites, par une voie assez indirecte, d'observations relatives à l'intensité et à la polarisation des rayons réfléchis à la surface du corps.

346. Absorption dans les corps monoréfringents. — Dans les corps isotropes, et dans les cristaux du système cubique, l'absorption, à épaisseur égale, est la même dans tou-

tes les directions, et quel que soit le plan de polarisation de la lumière incidente.

347. Absorption dans les cristaux biréfringents. — Dans ce cas, les deux rayons réfractés se trouvent dans des conditions différentes par rapport au milieu qui les transmet; ils sont en général inégalement absorbés, et l'absorption change avec la direction du rayon. Le cristal est alors *pléochroïque*, sa couleur est différente suivant qu'on le regarde dans une direction ou dans une autre ¹.

Le cas de pléochroïsme le plus frappant est celui de la tourmaline déjà signalé au § 273. Une tourmaline est beaucoup plus transparente pour les vibrations parallèles à son axe optique que pour les vibrations perpendiculaires. Un cube de tourmaline est donc à peu près opaque dans la direction de l'axe, et plus ou moins transparent dans la direction perpendiculaire à l'axe.

348. Procédés d'étude. — Pour étudier ces phénomènes, on peut faire tomber sur le cristal de la lumière polarisée et l'observer, soit à l'œil nu, soit au moyen d'un spectroscope. A l'œil nu, on voit la couleur de la lumière transmise se modifier avec l'orientation du cristal par rapport au plan de polarisation de la lumière incidente; au spectroscope, on peut suivre dans leurs détails les variations correspondantes du spectre d'absorption.

Le premier procédé peut être modifié avantageusement par l'emploi de la loupe dichroscopique de Haidinger ². C'est un

¹ WOLLASTON, *Phil. Trans.* 1804, 428; — BREWSTER, *Phil. Trans.* 1819, 11; — BIOT, *Bull. Soc. philom.* 1819, 109, 129; — ARAGO, *J. de Phys.* 1820, XC, 41; — F. SORET, *Mém. Soc. Phys. Genève*, 1821, I; — HERSCHEL, *Traité de la Lumière*, Paris 1833, II, 222.

² HAIDINGER, *Pogg. Ann.* 1844, LXI, 295; 1845, LXV, 1. — Un appareil très analogue était employé par BIOT et ARAGO, *Bull. Soc. philom.* 1819, 131.

tube de quelques centimètres, portant, à l'une de ses extrémités, un petit trou que l'on applique contre le cristal à étudier, dans son intérieur un rhomboèdre de spath, et à l'autre bout une loupe, à travers laquelle on voit, en raison de la double réfraction du spath, deux images contiguës du petit trou. Ces deux images sont polarisées à angle droit, parallèlement et perpendiculairement à la section principale du spath. Si celle-ci coïncide avec une des lignes d'extinction du cristal examiné, chacune des deux images contient les vibrations qui formaient l'un des deux rayons réfractés dans le cristal. Pour peu que celui-ci présente une différence d'absorption, les deux images seront inégalement colorées, et leur contiguïté rendra cette différence aisément perceptible.

Quant à la mesure des coefficients d'absorption, elle doit être faite séparément pour chaque radiation, par la comparaison de l'intensité de la lumière transmise et de la lumière incidente.

Les spectroscopes qui servent à cet usage (*spectrophotomètres*) permettent d'éclairer séparément la partie inférieure et la partie supérieure de la fente du collimateur avec les deux lumières à comparer, et d'obtenir ainsi deux spectres parallèles et placés l'un au-dessus de l'autre, où les radiations de même réfrangibilité sont contiguës. Une disposition quelconque, appareils de polarisation ou fentes de largeur variable, permet de modifier leurs intensités dans un rapport quelconque et connu, jusqu'à ce qu'ils présentent le même éclat dans la région que l'on veut étudier.

349. Absorption dans les cristaux à un axe. — Les phénomènes d'absorption, comme toutes les autres propriétés physiques, sont liés à la symétrie des cristaux. Ils sont nécessairement les mêmes dans les directions de même structure, et peuvent être différents dans les directions de structures différentes.

Dans les cristaux à un axe, l'observation montre que l'absorption est la même dans toutes les directions pour le rayon ordinaire, c'est-à-dire pour les vibrations perpendiculaires à l'axe¹.

Pour le rayon extraordinaire, l'absorption varie avec l'inclinaison du rayon sur l'axe, se confondant pour toutes les couleurs avec l'absorption ordinaire dans la direction parallèle à l'axe, et s'en différenciant plus ou moins, à mesure que le rayon se rapproche de la direction perpendiculaire à l'axe. Souvent l'absorption est plus forte pour le rayon qui a la moindre vitesse²; l'absorption extraordinaire est plus forte que l'absorption ordinaire dans les cristaux positifs, plus faible dans les cristaux négatifs. Mais ce n'est aucunement une loi générale.

D'après les recherches de M. H. Becquerel, le spectre d'absorption du rayon extraordinaire varie d'une direction à l'autre, comme si la vibration se résolvait en deux composantes, l'une perpendiculaire à l'axe, qui éprouve l'absorption ordinaire, l'autre parallèle à l'axe, qui est absorbée à sa manière et subsiste seule lorsque le rayon extraordinaire est perpendiculaire à l'axe. Le spectre est donc en général la superposition de deux spectres distincts associés en proportions variables. Ainsi, dans la *scheelite* de Traverselle, tungstate de chaux qui contient du didyme, les raies d'absorption gardent la même place dans le spectre pour toutes les inclinaisons du rayon extraordinaire, mais leurs intensités varient. Celles du spectre ordinaire subsistent seules dans la direction de l'axe, celles du spectre extraordinaire dans la direction perpendiculaire.

350. Absorption dans les cristaux à deux axes. — Dans les cristaux rhombiques, l'absorption reste la même dans

¹ HAIDINGER, *Pogg. Ann.* 1845, LXV, 1; — H. BECQUEREL, *Rech. sur la variation des spectres d'absorption dans les cristaux*, Thèse, Paris 1888, p. 17.

² BABINET, *C. R.* 1838, VII, 832; — BEER, *Pogg. Ann.* 1851, LXXXII, 429; — GRAILICH, *Krystall. opt. Unters.* 1858, p. 56.

chaque section principale pour le rayon dont la vitesse (§ 232) est constante dans cette section¹.

Ainsi (fig. 458) la vibration parallèle à OZ a une absorption constante dans les différentes directions du plan XY; il en est de même pour la vibration parallèle à OX dans le plan ZY, et pour la vibration parallèle à OY dans le plan ZX. Ce sont les absorptions principales.

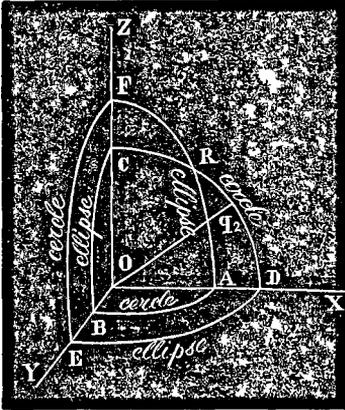


Fig. 458.

Pour l'autre rayon, l'absorption varie entre les deux absorptions principales correspondantes. La vibration perpendiculaire à OZ subit l'absorption principale de OX lorsqu'elle se propage suivant OY, et celle de OY lorsqu'elle se propage suivant OX, et les deux absorptions en proportions variables lorsqu'elle se propage dans une direction intermédiaire dans le plan XY.

En lumière blanche naturelle, le cristal, considéré dans la direction OX, aura donc une couleur résultant des absorptions principales OZ et OY; dans la direction OY, une couleur résultant des absorptions OZ et OX; et dans la direction OZ, une couleur résultant des absorptions OX et OY. Le cristal a donc trois couleurs principales.

En lumière blanche naturelle, le cristal, considéré dans la direction OX, aura donc une couleur résultant des absorptions principales OZ et OY; dans la direction OY, une couleur résultant des absorptions OZ et OX; et dans la direction OZ, une couleur résultant des absorptions OX et OY. Le cristal a donc trois couleurs principales.

Les plans principaux de la surface de l'onde sont des plans de symétrie du cristal; les axes principaux d'absorption, c'est-à-dire les directions des trois vibrations qui subissent les absorptions principales, sont nécessairement les mêmes pour toutes les couleurs, et les phénomènes d'absorption leur sont symétriques.

¹ HADINGER, *loc. cit.* et 1852, LXXXVI, 131; — H. BECQUEREL, *loc. cit.* p. 32.

351. Dans le système clinorhombique, l'un des axes principaux d'absorption coïncide avec l'axe de symétrie; les deux autres sont contenus dans le plan de symétrie. L'absorption du rayon de vitesse variable ne paraît pas se faire symétriquement par rapport aux axes de la surface d'onde; et les directions où ce rayon éprouve le maximum et le minimum d'absorption ne sont même pas rectangulaires entre elles¹.

Dans les cristaux tricliniques, la complication est sans doute plus grande encore, mais les observations manquent.

En tout cas, il ne semble pas que l'on puisse en général représenter la variation du coefficient d'absorption dans les diverses directions par un ellipsoïde inverse² analogue à celui du § 214.

352. **Pléochroïsme artificiel.** — On peut obtenir un pléochroïsme artificiel par divers procédés.

On peut colorer par des matières convenables des cristaux biréfringents naturellement incolores³. Ainsi des cristaux d'azotate de strontiane formés dans une solution colorée par du bois de campêche absorbent inégalement les deux rayons et donnent à la loupe dichroscopique deux images de couleurs différentes.

On peut, par des actions mécaniques, communiquer la double

² LASPEYRES, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 454; — RAMSAY, *ibid.* 1887, XIII, 97.

Des mesures quantitatives de l'absorption des cristaux pléochroïques ont été faites aussi par HAGEN, *Pogg. Ann.* 1859, CVI, 33; — PULFRICH, *Zeitsch. f. Kryst.* 1882, VI, 142; — SCHWEBEL, *ibid.* 1883, VII, 153; — NICHOLS et SNOW, *Phil. Mag.* 1892, XXXIII, 379.

La théorie de ces phénomènes a été traitée dans ces dernières années par MM. VOIGT et DRUDE, *Wied. Ann.* 1884, XXIII, 577; 1887, XXXII, 584; 1890, XL, 665; *Zeitsch. f. Kryst.* 1887, XIII, 567.

³ GRAILICH, *Krystallog. Opt. Unters.* p. 52; et M. MALLARD, *Crist.* II, 353, ont admis l'existence d'un ellipsoïde d'absorption; — voyez MASCART, *Optique*, II, 207.

³ SENARMONT, *Ann. de Chim.* 1854, XLI, 319; — ROSENBUSCH, *Mikrosk. Physiographie der Mineralien*, Stuttgart 1873; — v. SEHERR THOSS, *Wied. Ann.* 1879, VI, 270.

réfraction à des corps colorés primitivement isotropes. Le caoutchouc étiré devient dichroïque¹. Il en est de même du chlorure d'argent cubique lorsqu'on le comprime².

Cependant la réunion de la coloration et de la biréfringence ne produit pas toujours le pléochroïsme, même dans les cristaux naturellement colorés ou biréfringents, et *a fortiori* dans les corps auxquels ces deux caractères ont été communiqués artificiellement. Les verres colorés, l'alun de chrome ne deviennent pas pléochroïques par la compression.

353. Phénomène des houppes³.— Les propriétés dichroïques de certains cristaux expliquent les apparences singulières qu'ils présentent lorsqu'ils sont taillés en lames perpendiculaires à un axe optique. Le cas le plus simple est celui des cristaux à un axe, et s'observe très nettement dans une lame mince de clivage de platinocyanure de magnésium. Ce sel, qui appartient au

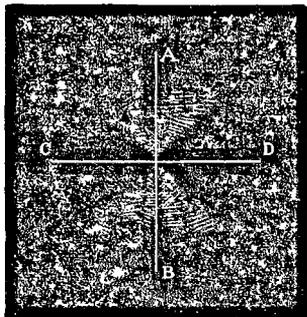


Fig. 459.

prisme droit à base carrée et se clive perpendiculairement à l'axe, laisse passer les vibrations rouges dans ses deux rayons, tandis que les vibrations bleues sont complètement arrêtées dans le rayon extraordinaire et fortement absorbées dans le rayon ordinaire. Les rayons qui traversent la lame dans la direction de l'axe sont colorés en rouge pourpre, et à mesure qu'ils s'écartent de l'axe ils deviennent plus rouges et plus

¹ KUNDT, *Pogg. Ann.* 1874, CLI, 125.

² v. LASAULX, *Beibl.* 1882, VI, 385.

³ Les houppes des cristaux pléochroïques ont été observées par BREWSTER, *Phil. Trans.* 1819, 11. — Voyez BERTIN, *Ann. de Chim.* 1878, XV, 396. — M. E. BERTRAND, *Bull. Soc. min.* 1879, II, 67, a découvert les houppes dans les cristaux uniaxes; — CORNU, *ibid.* 70; — MALLARD, *ibid.* 72; — LOMMEL, *Wied. Ann.* 1880, IX, 108; — T. LIEBISCH, *Gött. Nachr.* 1888, 202.

sombres en perdant du bleu. En lumière naturelle, la lame placée près de l'œil présente donc un espace circulaire pourpre entouré de rouge. Si l'on regarde à travers cette lame de la lumière polarisée dont le plan de vibration soit AB (fig. 459), les rayons obliques inclinés dans le plan AB traversent la lame comme rayons extraordinaires et ne contiennent point de bleu, tandis que les rayons obliques contenus dans le plan CD sont des rayons ordinaires colorés en pourpre. On voit donc sur un fond pourpre deux houppes rouges parallèles à la vibration.

Des phénomènes analogues s'observent dans les lames des cristaux biaxes pléochroïques taillées perpendiculairement à un axe optique.

CHAPITRE XXIII

DE LA RÉFLEXION

354. **Réflexion vitreuse.** — Les phénomènes très complexes et encore mal connus¹ de la réflexion de la lumière sur une face plane d'un corps quelconque varient suivant que ce corps est isotrope ou cristallisé, transparent ou absorbant. Le

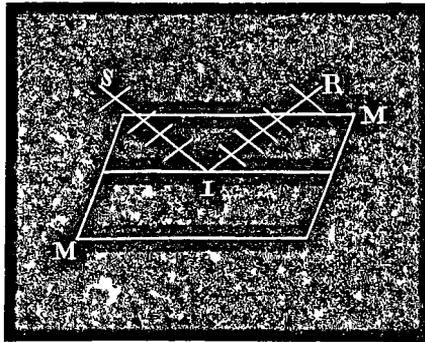


Fig. 460.

cas le plus simple est naturellement celui où la réflexion s'opère à la surface d'un corps isotrope et parfaitement transparent.

¹ Nous nous bornons à donner dans ce chapitre quelques indications succinctes sur une série de phénomènes qui ne se prêtent guère à un exposé élémentaire, et qui tiennent une place importante dans les *Traité de Physique* et *d'Optique*. Voyez en particulier MASCART, *Traité d'Optique*, Paris 1891, II, 393.

Il est clair que si le rayon incident SI (fig. 460 et 461) est polarisé rectilignement de telle sorte que ses vibrations soient parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence, le rayon réfléchi, par simple raison de symétrie, sera polarisé de la même manière : tout étant symétrique par rapport au plan d'in-

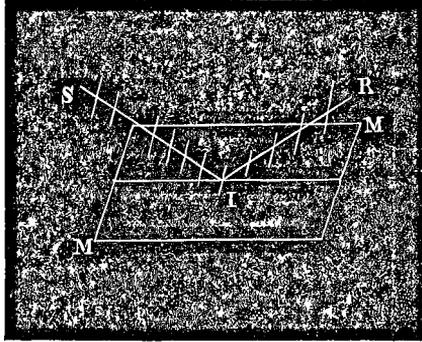


Fig. 461.

cidence, il n'y a pas de raison pour que la vibration s'incline d'un côté plutôt que l'autre, ou pour qu'une trajectoire elliptique soit parcourue dans un sens plutôt que dans l'autre.

Mais on voit en même temps que les vibrations parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence rencontrent la surface réfringente dans des conditions, absolument différentes, et l'on peut s'attendre à ce que l'intensité du rayon réfléchi ne soit pas la même dans les deux cas.

355. Formules de Fresnel ¹. — Fresnel a été conduit par des considérations théoriques à admettre que, si l'amplitude de la vibration incidente est représentée par l'unité, l'amplitude de la vibration réfléchie est représentée par $-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$ si la vibration est perpendiculaire au plan d'incidence, et par $\frac{\tan r(i-r)}{\tan(i+r)}$ si elle lui est parallèle. Les intensités sont, comme toujours, pro-

¹ FRESNEL (1823), *Œuvres*, I, 767.

portionnelles aux carrés des amplitudes, et l'intensité du rayon réfracté est la différence des intensités des rayons incident et réfléchi.

La discussion de ces deux expressions montre que, dans le cas des vibrations perpendiculaires au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi croît graduellement depuis l'incidence normale jusqu'à l'incidence rasante. Dans le cas des vibrations parallèles au plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi, qui sous l'incidence normale est naturellement égale à ce qu'elle est

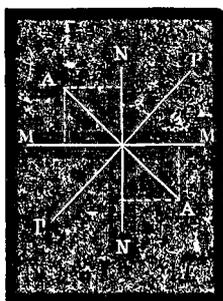


Fig. 462.

dans le cas précédent, commence par diminuer quand l'incidence augmente, jusqu'à s'annuler pour une incidence, dite *angle de polarisation* ou *incidence principale*, telle que $i + r = 90^\circ$, puis augmente de nouveau jusqu'à l'incidence rasante¹.

Si la lumière incidente est polarisée rectilignement, mais dans un plan qui ne soit ni parallèle ni perpendiculaire au plan d'incidence, on peut toujours la décomposer en deux rayons, polarisés l'un parallèlement, l'autre perpendiculairement au plan d'incidence. Supposons, pour fixer les idées, que le plan de polarisation PP de la vibration incidente AA (fig. 462) forme avec le plan d'incidence NN un angle α , que nous considérons comme positif quand le plan PP est incliné vers la droite d'un observateur qui regarderait venir le rayon. Cette vibration d'amplitude 1 est équivalente à une vibration d'amplitude $\sin \alpha$ parallèle au plan d'incidence et à une vibration $\cos \alpha$ perpendiculaire à ce plan. Chacune de ces deux composantes se réfléchit conformément aux formules ci-dessus. La première donne dans le rayon réfléchi une composante $\sin \alpha \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$ et la seconde

¹ BREWSTER, *Phil Trans.* 1815, 125.

une composante $-\cos \alpha \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$. La résultante est une vibration rectiligne dont le plan de polarisation fait avec le plan d'incidence un angle α' tel que

$$\text{tang } \alpha' = \frac{\sin \alpha \frac{\text{tang}(i-r)}{\text{tang}(i+r)}}{-\cos \alpha \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}} = -\text{tang } \alpha \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}.$$

Quand le rayon tombe normalement sur la surface réfringente, $i = r = 0$ et $\text{tang } \alpha' = -\text{tang } \alpha$, le plan de polarisation du rayon réfléchi forme avec le plan d'incidence un angle α' qui, pour un observateur placé de manière à voir venir le rayon, est égal et de signe contraire à l'angle α du rayon incident. Mais, comme le rayon incident et le rayon réfléchi vont en sens opposé, l'angle α est vu d'en bas, l'angle α' d'en haut. Si α' était vu d'en bas, son signe serait renversé et on aurait $\alpha' = \alpha$. La vibration réfléchie est parallèle à la vibration incidente, ce qui est naturel, puisque, sous l'incidence normale, les deux composantes du mouvement sont dans les mêmes conditions. Néanmoins, pour tenir compte du renversement du rayon dans les conventions adoptées, on admettra que, par la réflexion, les deux composantes prennent l'une sur l'autre un retard d'une demi-oscillation.

Quand l'incidence augmente, α' décroît et devient nul sous l'angle de polarisation ($i + r = 90^\circ$), la vibration réfléchie est alors perpendiculaire au plan d'incidence.

A partir de ce moment $\cos(i+r)$ devient négatif, $\text{tang } \alpha$ et $\text{tang } \alpha'$ ont le même signe, la différence de phase des deux composantes est nulle, et la vibration réfléchie s'incline peu à peu sur le plan d'incidence jusqu'à devenir parallèle à la vibration incidente quand $i = 90^\circ$ ou quand $r = 90^\circ$; on a, en effet, dans le premier cas, $\cos(i-r) = \sin r$, $\cos(i+r) = -\sin r$, et dans le second, $\cos(i-r) = \sin i$, $\cos(i+r) = -\sin i$; le premier

cas se réalise sous l'incidence rasante si la réflexion s'opère à la surface d'un milieu plus réfringent ; le second cas à la limite de réflexion totale si la réflexion s'opère à la surface d'un milieu moins réfringent.

Dans les conventions adoptées, les deux composantes parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence ont donc une différence de phase égale à $\tau/2$ pour les incidences inférieures à l'angle de polarisation et une différence de phase nulle pour les incidences supérieures. La vibration réfléchie est polarisée rectilignement, mais son plan de polarisation n'a généralement pas la même inclinaison sur le plan d'incidence que le plan de polarisation du rayon incident. L'intensité de la vibration réfléchie est

$$\cos^2 \alpha \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} + \sin^2 \alpha \frac{\tan^2 (i-r)}{\tan^2 (i+r)}.$$

Si le rayon incident est formé de lumière naturelle, ses deux composantes sont toujours égales entre elles ; l'intensité du rayon réfléchi est

$$\frac{1}{2} \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} + \frac{1}{2} \frac{\tan^2 (i-r)}{\tan^2 (i+r)};$$

la composante perpendiculaire au plan d'incidence prédomine dans le rayon réfléchi, et subsiste seule sous l'angle de polarisation.

356. Polarisation elliptique du rayon réfléchi aux environs de l'angle de polarisation. — Les choses se passent comme nous venons de le dire lorsque l'indice du corps réfléchissant par rapport au milieu extérieur a une valeur convenable, 1,46 environ d'après Jamin. Mais, dans les autres cas, le changement de phase de $\tau/2$ à 0 se fait, non plus brusquement à l'incidence pour laquelle $i+r=90^\circ$, mais graduellement

pour des incidences voisines, et, sous l'incidence principale, lorsque $i + r = 90^\circ$, on a une différence de phase égale à $\tau/4$. La vibration réfléchie, dans la région où se produit le changement de phase, est polarisée elliptiquement. La faiblesse de la composante parallèle au plan d'incidence fait d'ailleurs que l'ellipticité est le plus souvent à peine appréciable. Plus l'indice s'éloigne de 1,46 et plus la région d'ellipticité est étendue, plus aussi l'ellipticité elle-même est prononcée. Si l'indice est plus grand que 1,46, c'est la composante parallèle qui prend un retard sur l'autre (*réflexion positive*); si l'indice est plus petit, c'est l'inverse (*réflexion négative*)¹. Le chiffre limite 1,46 n'a du reste rien d'absolu. Cette polarisation elliptique aux environs de l'incidence principale est constatée par l'expérience, mais la théorie en est encore très controversée. Nous n'avons, en effet, que des notions très vagues sur ce que peut être la structure de la surface de séparation de deux milieux. Sur cette surface les molécules des deux corps en contact ne sont pas dans les mêmes conditions que dans l'intérieur de ces corps; il se produit de plus des altérations physiques et chimiques de la surface qui dépendent de la manière dont elle a été travaillée, qui se développent dans un temps souvent très court, et qui rendent l'étude de ces phénomènes extraordinairement difficile.

357. Réflexion métallique. — Malus et Brewster ont reconnu que les métaux ne polarisent pas la lumière comme les corps transparents. Brewster, en particulier, observa que la vibration parallèle au plan d'incidence ne devient pas nulle pour une certaine incidence principale, mais présente seulement un minimum plus ou moins marqué.

Si le rayon incident est polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, il en est de même du rayon

¹ JAMIN, *Ann. de Chim.* 1850, XXIX, 263.

réfléchi. Mais si le plan de polarisation primitif est oblique, on obtient sous toutes les incidences autres que 0° ou 90° un rayon réfléchi polarisé elliptiquement. Le phénomène général est donc le même que pour les corps transparents, mais l'ellipticité est plus prononcée et se produit dans une région plus étendue. L'incidence principale correspond encore à la différence de phase $\tau/4$ des deux composantes.

Dans le cas des métaux, l'ellipticité s'explique par l'absorption qui s'exerce énergiquement sur toutes les radiations, et qui modifie complètement les conditions de la réflexion.

358. Corps à couleurs superficielles. — Les corps qui absorbent très énergiquement certaines radiations spéciales possèdent la réflexion métallique pour ces radiations-là, et la réflexion vitreuse pour les autres. Ils offrent alors un éclat métallique plus ou moins coloré.

Dans ces corps, la dispersion est très irrégulière, les lois de la réflexion varient beaucoup d'une couleur à l'autre; la composition des rayons polarisés parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence est assez différente pour que ces deux rayons soient colorés différemment, et cela d'une manière qui varie avec l'incidence.

Les apparences varient aussi beaucoup suivant que le corps est plongé dans l'air ou dans un liquide plus réfringent. Le tableau suivant, qui résume les observations de M. E. Wiedemann¹ sur une surface de fuchsine, donnera une idée de ces changements extraordinaires :

	COMPOSANTE RÉFLÉCHIE		RAYON RÉFLÉCHI
	PARALLÈLE	PERPENDICULAIRE	TOTAL
<i>Dans l'air :</i>			
Grandes incidences	Bleu	Blanc	} Jaune d'or
Petites »	Jaune	Jaune	

¹ E. WIEDEMANN, *Pogg. Ann.* 1874, CLI, 1.

	COMPOSANTE RÉFLÉCHIE		RAYON RÉFLÉCHI TOTAL
	PARALLÈLE	PERPENDICULAIRE	
<i>Dans la benzine :</i>			
Grandes incidences	Vert bleu	Blanchâtre	} Vert jaune
Petites »	Vert jaune	Jaunâtre	
<i>Dans le sulfure de carbone :</i>			
Grandes incidences	Bleu	Blanc	Bleu
Petites »	Jaune	Blanc	Bleu vert

359. Réflexion cristalline ¹. — Parmi les cristaux, nous devons également distinguer trois cas, celui des cristaux transparents, celui des cristaux très absorbants à apparence métallique, et celui des cristaux à absorption élective, transparents pour certaines couleurs et opaques pour d'autres.

Les phénomènes généraux sont les mêmes que dans les corps amorphes, mais avec les modifications qui résultent de la non-isotropie et de la symétrie cristallines. Ainsi une vibration polarisée parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence ne donne un rayon réfléchi polarisé de la même manière que si le plan d'incidence coïncide avec une section principale du cristal. Les variations d'intensité et de phase des deux composantes dépendent de l'azimut du plan d'incidence et de l'orientation cristallographique de la face réfléchissante. L'ellipticité est peu importante dans les cristaux transparents, plus considérable

¹ Les premières recherches expérimentales sur la réflexion cristalline datent de BREWSTER, *Phil. Trans.* 1819, 145; de SEEBECK, *Pogg. Ann.* 1831, XXI, 290; XXII, 126; 1836, XXXVIII, 276; et de F. NEUMANN, 1837, XLII, 1. De nouveaux travaux ont été faits dans ces dernières années par K. SCHMIDT, *Wied. Ann.* 1886, XXIX, 451; et RITTER, *ibid.* 1889, XXXVI, 236, sur le quartz; — K. SCHMIDT, *ibid.* 1889, XXXVII, 353; DRUDE, *ibid.* 1889, XXXVI, 532, XXXVIII, 265; SPURGE, *Proc. Roy. Soc.* 1887, XLII, 242; et A. CORNU, *C. R.* 1889, CVIII, 1214, sur le spath.

Les particularités des cristaux fortement absorbants ont été reconnues par SENARMONT sur le sulfure d'antimoine, *Ann. de Chim.* 1840, LXXIII, 337; 1847, XX, 397. — M. DRUDE a étudié récemment la galène et le tellurure de bismuth, *Wied. Ann.* 1888, XXXIV, 489; 1889, XXXVI, 532, 865.

dans les cristaux absorbants; mais les difficultés expérimentales déjà signalées pour le cas des corps isotropes se retrouvent ici, et les résultats obtenus jusqu'ici sont trop douteux et discordants pour que nous nous arrêtions davantage sur ce sujet difficile.

Nous citerons seulement, comme exemple de cristal à absorption élective, le platinocyanure de magnésium¹, dont nous avons déjà parlé au § 353. Sur les faces du prisme, le plan d'incidence étant perpendiculaire à l'axe, ses cristaux offrent un éclat métallique vert, qui passe au blanc quand l'incidence augmente. La lumière réfléchie est formée d'une composante parallèle à l'axe et d'une composante perpendiculaire à l'axe, qui sont respectivement verte et blanche pour les petites incidences, blanche et bleue pour les grandes.

Si le plan d'incidence est parallèle à l'axe, on a un éclat métallique vert quand l'incidence est faible, passant successivement au bleu, puis au blanc, quand l'incidence augmente, et qui est produit par une vibration parallèle à l'axe présentant les mêmes teintes, et une vibration perpendiculaire à l'axe qui est rouge.

Sur la base on a une couleur rouge sous l'incidence normale, et pourpre avec un éclat demi-métallique quand l'incidence est un peu grande.

¹ Haidinger, *Pogg. Ann.* 1846, LXVIII, 302; 1847, LXX, 574; LXXI, 321; 1849, LXXVI, 99, 294; LXXVII, 89; 1850, LXXXI, 572; — Stokes, *ibid.* 1855, XCVI, 541; — Kundt, *ibid.* 1871, CXLIII, 267; — Schenk, *Wied. Ann.* 1882, XV, 177; — König, *ibid.* 1883, XIX, 491.

QUATRIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS THERMIQUES

CHAPITRE XXIV

DE LA DILATATION PAR LA CHALEUR

360. Dilatation des corps isotropes. — Les dimensions d'un corps varient toujours avec la température; le plus souvent elles augmentent en même temps que celle-ci, la dilatation est positive; quelquefois, rarement, elle est négative, le corps se contractant lorsque la température s'élève; certains corps enfin présentent un minimum de volume à une certaine température; ainsi l'eau aux environs de 4°.

Les arêtes d'un cube taillé dans un corps isotrope éprouvent, entre deux températures t_1 et t_2 , une même variation de longueur $l_2 - l_1$, quelle que soit leur orientation, et l'on peut poser

$$l_2 - l_1 = \alpha l_1 (t_2 - t_1)$$

ou

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha (t_2 - t_1)),$$

α est le *coefficient de dilatation linéaire moyen* entre les températures t_2 et t_1 ; c'est l'accroissement de l'unité de longueur pour un degré, à supposer que la dilatation se fasse d'une manière uniforme entre ces deux températures.

La variation de volume du cube peut être représentée par la formule analogue

$$V_2 = V_1 (1 + \mu (t_2 - t_1));$$

μ est le coefficient de dilatation cubique moyen entre t_2 et t_1 .

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} V_1 &= l_1^3 \\ V_2 = l_2^3 &= l_1^3 (1 + \alpha (t_2 - t_1))^3 = l_1^3 (1 + 3\alpha (t_2 - t_1) \\ &\quad + 3\alpha^2 (t_2 - t_1)^2 + \alpha^3 (t_2 - t_1)^3); \end{aligned}$$

si l'on observe de plus que dans tous les corps connus les coefficients de dilatation sont toujours de très petites quantités, dont on peut négliger les produits et les puissances supérieures à la première, on trouve, en remplaçant V_1 et V_2 par leurs valeurs,

$$l_1^3 (1 + 3\alpha (t_2 - t_1)) = l_1^3 (1 + \mu (t_2 - t_1)),$$

d'où

$$\mu = 3\alpha;$$

le coefficient de dilatation cubique est le triple du coefficient de dilatation linéaire.

Si la dilatation n'est pas uniforme, on obtient les coefficients de dilatation *vrais* à une température t_1 quelconque en appliquant les formules à une très petite variation de température à partir de t_1 ; α est alors une fonction de t_1 . Il suffit en général d'admettre que α varie proportionnellement à t_1 .

361. Détermination du coefficient de dilatation cubique. — La méthode de Dulong et Petit¹ consiste à introduire

¹ DULONG et PETIT, *Ann. de Chim.* 1816, II, 240; — H. KOPF, *Pogg. Ann.* 1852, LXXXVI, 156; un autre procédé a été indiqué par M. THOULET, *C. R.* 1884, XCVIII, 620.

la substance à étudier dans un tube de verre à pointe effilée que l'on achève de remplir avec du mercure à la température inférieure t_1 . Le tube étant ensuite porté à la température supérieure t_2 , il sort par la pointe capillaire une certaine quantité de mercure que l'on pèse, et qui dépend de la dilatation de ce liquide, de celle du verre et de celle du corps en expérience. Les deux premières étant connues par des expériences préalables, la troisième s'en déduira.

Soient, en effet, P le poids du corps, D sa densité à la température t_1 , et μ son coefficient de dilatation cubique; P' , D' , le poids et la densité du mercure qui remplit le tube à t_1 , et μ' son coefficient de dilatation; p le poids de mercure qui s'échappe pendant l'échauffement à t_2 , et k le coefficient de dilatation du verre; le volume du tube à t_1 est égal à celui du corps et du mercure qu'il contient, c'est-à-dire à $P/D + P'/D'$, et devient à t_2 : $\left(\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'}\right) (1 + k(t_2 - t_1))$; d'autre part, à t_2 , il contient le corps dilaté dont le volume est $\frac{P}{D} (1 + \mu(t_2 - t_1))$, et le poids $P' - p$ de mercure dilaté dont le volume est $\frac{P' - p}{D'} (1 + \mu'(t_2 - t_1))$. En égalant ces deux expressions du volume du tube à t_2 , on a

$$\left(\frac{P}{D} + \frac{P'}{D'}\right) (1 + k(t_2 - t_1)) = \frac{P}{D} (1 + \mu(t_2 - t_1)) + \frac{P' - p}{D'} (1 + \mu'(t_2 - t_1)),$$

d'où l'on tirera μ .

362. On peut aussi déduire le coefficient de dilatation cubique d'un corps solide des pertes de poids qu'il subit lorsqu'on le plonge aux températures t_1 et t_2 dans un liquide de dilatation connue μ' . V étant le volume du corps à t_1 , D_1 et D_2 les poids spécifiques du liquide aux deux températures, ces

pertes de poids, égales aux poids des volumes de liquide déplacés, sont

$$p_1 = VD'_1 \quad p_2 = V(1 + \mu(t_2 - t_1))D'_2,$$

et l'on a

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{D'_2}{D'_1} (1 + \mu(t_2 - t_1)).$$

Si, d'autre part, nous considérons un poids P' du liquide, occupant aux températures t_1 et t_2 des volumes V' et $V'(1 + \mu'(t_2 - t_1))$, on aura

$$P' = V'D'_1 = V'(1 + \mu'(t_2 - t_1))D'_2,$$

d'où

$$\frac{D'_2}{D'_1} = \frac{1}{1 + \mu'(t_2 - t_1)}$$

et

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \mu(t_2 - t_1)}{1 + \mu'(t_2 - t_1)}.$$

363. Détermination directe du coefficient de dilatation linéaire. — Nous n'avons à nous occuper ici que des procédés applicables à des corps de petites dimensions, les autres n'ayant aucun emploi en Cristallographie.

On peut d'abord mesurer la longueur d'un petit barreau de la substance à étudier en amenant successivement, à l'aide d'une vis micrométrique, ses deux extrémités sous le réticule d'un microscope¹. La même mesure est répétée à une température différente, et la différence des lectures faites aux deux températures est égale à la dilatation du barreau diminuée de la dilatation d'une portion égale de la vis. Le coefficient de dilatation de celle-ci devra être déterminé préalablement.

¹ MITSCHERLICH, *Pogg. Ann.* 1827, X, 137; — SCHRAUF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1884, IX, 433; 1887, XII, 321.

364. Méthode de Pfaff¹. — Le corps à étudier, taillé sous forme d'un parallélépipède Z (fig. 463) repose sur une plaque de fer portant une colonne solide B. Un levier de verre, mobile autour d'un axe E, est constamment pressé par un ressort J contre la face supérieure du parallélépipède, et porte à son autre bout un miroir G, dans lequel on observe, à l'aide d'une

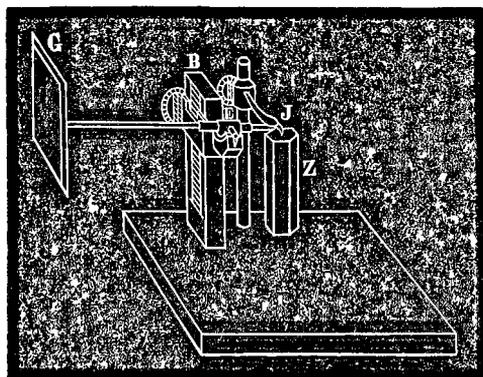


Fig. 463.

lunette, l'image d'une échelle graduée verticale. Si la température change, toute différence de dilatation entre le parallélépipède Z et la colonne P se manifeste par une inclinaison du levier, et peut être déduite du déplacement correspondant de l'image de l'échelle. Le coefficient de dilatation de la colonne devra être connu d'avance.

365. Méthode de M. Fizeau². — Le dilatomètre de

¹ F. PFAFF, *Pogg. Ann.* 1858, CIV, 171; 1859, CVII, 148; — M. W. VOIGT a employé récemment une méthode analogue, *Wied. Ann.* 1891, XLIII, 831; — N. LAGERBORG, *Beibl.* 1889, XIII, 490.

² La mesure interférentielle des dilatations a été employée par E.-B. JERICHAU, *Pogg. Ann.* 1841, LIV, 139, et par ANGSTROM, *Pogg. Ann.* 1852, LXXXVI, 228. Le procédé par lequel on l'exécute actuellement est dû à M. FIZEAU, *C. R.* 1864, LVIII, 923; 1865, LX, 1161; 1866, LXII, 1101, 1133; 1867, LXIV, 314, 771; 1868, LXVI, 1005. Voyez aussi R. BENOÎT, *Travaux du Bureau international des poids et mesures*, 1881, I, et 1888, VI.

M. Fizeau se compose d'une sorte de trépied en platine (fig. 464), formé d'une plateforme P et de trois vis V sur lesquelles repose la face plane d'une lentille L plan convexe de

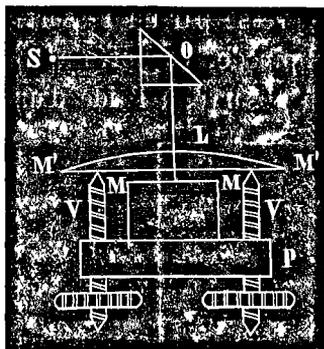


Fig. 464.

faible courbure. Le tout est contenu dans une enceinte dont on peut faire varier la température. Le corps à étudier, taillé sous forme d'un bloc à faces parallèles de quelques millimètres d'épaisseur, repose sur la plateforme; un faisceau de lumière monochromatique vient, grâce à un prisme à réflexion totale O, tomber normalement sur le système, se réfléchit

en partie sur la face inférieure $M'M'$ de la lentille et en partie sur la face supérieure MM de la lame, puis est repris par le prisme O, qui le renvoie dans la direction de S. On examine le faisceau réfléchi à l'aide d'une lunette.

Or les portions de ce faisceau qui se sont réfléchies l'une sur MM , l'autre sur $M'M'$, ont pris l'une sur l'autre un certain retard T. Soit τ la période de la radiation employée, λ et V sa longueur d'onde et sa vitesse dans l'air à la température de l'expérience. Un premier retard, égal à $\tau/2$, résulte de ce que les deux réflexions en $M'M'$ et en MM s'opèrent, l'une à la surface d'un milieu moins réfringent, et l'autre à la surface d'un milieu plus réfringent, ce qui entraîne une inversion du signe de $i - r$ dans les formules du § 355. Un second retard, égal à $2e/V$ ou $2e\tau/\lambda$, provient de ce que le rayon réfléchi en MM doit traverser deux fois l'épaisseur e de la lame d'air comprise entre les deux surfaces avant de venir se superposer au rayon réfléchi en $M'M'$. Les deux portions du faisceau réfléchi interféreront positivement ou négativement (§ 191), suivant

que le retard total T sera égal à un nombre pair ou impair de demi-périodes.

Si, comme c'est toujours le cas, les deux surfaces ne sont pas tout à fait parallèles, on voit le champ de la lunette sillonné par une série de franges alternativement brillantes et obscures dont on peut noter la position par rapport à des points de repère gravés sur la face MM' de la lentille, et qui se déplacent pour la plus faible variation de l'épaisseur e de la lame d'air. Si, par suite d'un changement de température, e varie de $\frac{1}{2}\lambda$, c'est à-dire, pour la lumière jaune de la soude, de $0^{\text{mm}},000294$, chaque frange obscure vient prendre la place occupée d'abord par la frange obscure voisine; la dixième partie de ce déplacement étant encore nettement perceptible, la variation de e peut être ainsi mesurée avec une extrême précision. Cette variation est d'ailleurs la différence entre la dilatation du corps mis en expérience et la dilatation des vis V , qui devra être déterminée par des mesures préalables.

366. Dilatation des corps cristallisés¹. — La déformation produite dans un corps cristallisé par une variation uniforme de température est le type de ce que l'on a appelé une *déformation homogène*. Une ligne droite quelconque dans le cristal éprouve en général une variation de longueur et un changement de direction, mais reste une ligne droite. La dilatation par unité de longueur et le changement d'orientation sont les mêmes en tous ses points, et sont encore les mêmes pour toutes les droites qui lui sont parallèles. Toutes les droites parallèles restent donc parallèles, tous les plans restent des plans, et les faces qui font partie d'une même zone continuent à faire par-

¹ F. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1833, XXVII, 240; — GRAILICH et v. LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1858, XXXIII, 373; — E. BLASIUS, *Wied. Ann.* 1884, XXII, 528; *Zeitsch. f. Kryst.* 1886, XI, 140; FIZEAU, *loc. cit.* et *C. R.* 1868, LXVI, 1072.

tie d'une même zone à toute température, puisque leurs arêtes d'intersection restent parallèles entre elles.

Mais le changement éprouvé par deux droites ou deux plans d'orientations différentes n'est en général pas le même, et l'angle compris entre ces deux plans ou ces deux droites varie en général avec la température.

Soient OX_1, OY_1, OZ_1 les axes cristallographiques du cristal à une température t_1 , et a_1, b_1, c_1 leurs paramètres. A la température t_2 les axes auront pris de nouvelles positions OX_2, OY_2, OZ_2 et se seront dilatés en général d'une manière différente, de sorte que les longueurs a_1, b_1, c_1 , interceptées sur ces axes par la forme primitive du cristal, seront devenues

$$a_2 = a_1 (1 + \alpha (t_2 - t_1)); \quad b_2 = b_1 (1 + \beta (t_2 - t_1)); \quad c_2 = c_1 (1 + \gamma (t_2 - t_1)).$$

Une face quelconque interceptant sur les axes à la température t_1 des longueurs pa_1, qb_1, rc_1 , interceptera à la température t_2 des longueurs pa_2, qb_2, rc_2 ; ses indices p, q, r n'auront pas changé, mais bien les valeurs des paramètres et les angles des axes.

Si, à la température t_1 , nous découpons dans le cristal une sphère de rayon 1, cette sphère, à la température t_2 , se trouvera transformée en un ellipsoïde que l'on peut appeler *ellipsoïde de dilatation*. On peut démontrer que trois diamètres rectangulaires quelconques de la sphère se transforment en trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Les trois axes principaux de celui-ci sont donc trois directions qui sont restées rectangulaires entre elles pendant la dilatation, et il n'y en a pas d'autres. On appelle ces directions les *axes de dilatation* ou *axes thermiques* relatifs à la variation de température considérée. On peut toujours placer le cristal, aux deux températures initiale et finale, de manière que les axes thermiques aient la même direction, et par suite considérer le phénomène total

comme résultant de trois dilatations indépendantes s'effectuant parallèlement aux trois axes thermiques.

Le problème se réduira à déterminer l'orientation des axes thermiques et les trois coefficients de dilatation principaux qui leur correspondent.

Il est à remarquer toutefois que l'orientation de l'ellipsoïde, lorsqu'elle n'est pas déterminée *a priori* par des raisons de symétrie, peut changer avec l'intervalle de température considéré. Dans le cas général, les axes thermiques varient donc avec la température, et ne subsistent à chaque température que pour une très petite dilatation.

367. Influence de la symétrie. — La déformation, ne dépendant que de la structure du cristal, doit être la même dans les directions équivalentes. On voit aisément que l'on peut répartir les cristaux, relativement à ce phénomène, en cinq groupes, qui sont précisément ceux que nous avons déjà rencontrés en parlant de l'effet d'une compression uniforme (§ 179).

Dans les cristaux tricliniques, l'ellipsoïde a ses trois axes inégaux et orientés d'une manière quelconque, variable en général avec la température.

Dans les cristaux rhomboïdaux obliques, l'un des axes thermiques coïncide nécessairement et toujours avec l'axe de symétrie; les deux autres sont compris dans le plan de symétrie, ils sont naturellement rectangulaires entre eux, mais ont d'ailleurs une orientation quelconque, qui peut varier avec la température.

Dans les cristaux rhombiques, les axes thermiques doivent toujours coïncider avec les trois axes de symétrie. L'ellipsoïde de dilatation a une orientation parfaitement déterminée et indépendante de la température, ses plans principaux étant parallèles à ceux du cristal. On n'a à mesurer que les trois coefficients de dilatation principaux.

Dans les cristaux quadratiques et hexagonaux, toutes les droites perpendiculaires à l'axe principal se dilatent de même, l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe principal, et deux des trois coefficients deviennent égaux.

Dans les cristaux cubiques, enfin, l'ellipsoïde se réduit à une sphère, il n'y a plus qu'un seul coefficient de dilatation comme dans les corps isotropes.

368. Dilatation cubique des corps cristallisés. — Si nous considérons un parallépipède rectangle dont les arêtes, parallèles respectivement aux trois axes thermiques, aient les dimensions l_1, l'_1, l''_1 à la température t_1 , ce solide porté à la température t_2 sera encore rectangulaire, et ses arêtes seront devenues

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1 (1 + \alpha (t_2 - t_1)) \\ l'_2 &= l'_1 (1 + \beta (t_2 - t_1)) \\ l''_2 &= l''_1 (1 + \gamma (t_2 - t_1)). \end{aligned}$$

En posant, comme au § 360,

$$V_2 = V_1 (1 + \mu (t_2 - t_1)),$$

en remplaçant V_1 et V_2 par leurs valeurs

$$V_1 = l_1 l'_1 l''_1, \quad V_2 = l_2 l'_2 l''_2,$$

et en négligeant les termes renfermant les carrés et les produits des coefficients de dilatation, on trouve

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma;$$

le coefficient de dilatation cubique est égal à la somme des trois coefficients de dilatation principaux.

Le coefficient cubique μ peut d'ailleurs se déterminer directement comme dans le cas des corps isotropes (§ 361).

369. Détermination expérimentale des axes thermiques et des dilatations principales. — Les angles d'un cristal varient (§ 366) avec la température, et ces variations fournissent, comme Mitscherlich¹ l'a montré le premier, un procédé pour l'étude expérimentale de la dilatation.

Prenons, par exemple, une pyramide à base carrée, dont les faces coupent l'axe vertical à une distance C , et l'axe horizontal à une distance B (fig. 465). En appelant 2φ l'angle au sommet de la pyramide, on a

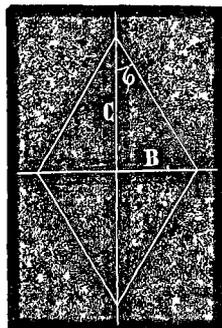


Fig. 465.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{C}.$$

Par une variation de température θ , les axes se dilatent inégalement, B devient $B(1 + \beta\theta)$, C devient $C(1 + \gamma\theta)$, et l'angle au sommet prend une nouvelle valeur φ' , déterminée par la condition

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{B(1 + \beta\theta)}{C(1 + \gamma\theta)} = \operatorname{tg} \varphi \frac{1 + \beta\theta}{1 + \gamma\theta};$$

la mesure des angles φ et φ' compris entre les mêmes faces aux deux températures initiale et finale permettra donc d'établir une relation entre les deux dilatations β et γ . Pour achever de déterminer celles-ci, il suffira de mesurer directement le coefficient de dilatation cubique μ , et de joindre à l'équation déduite de la mesure des angles la formule $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, qui se réduit pour un cristal quadratique à $\mu = 2\beta + \gamma$.

Toutes les fois que la position des axes thermiques est donnée *a priori* par la symétrie du cristal, cette méthode ne présente d'autres difficultés que celles qui résultent de la nécessité de

¹ E. MITSCHERLICH, *Pogg. Ann.* 1824, I, 125; 1827, X, 137; 1837, XLI, 213.

mesurer les angles avec une très grande précision. Il suffit, en effet, de calculer les valeurs des paramètres relatifs à ces axes pour les deux températures, leur comparaison donne immédiatement les coefficients de dilatation.

Les calculs deviennent tout autrement complexes lorsqu'il faut en outre déterminer la position des axes thermiques, comme c'est le cas dans les cristaux des cinquième et sixième systèmes. Nous renverrons pour cette question aux travaux de MM. F.-E. Neumann, C. Neumann, Fletcher, Beckenkamp et Hecht¹.

370. On peut également utiliser pour le cas des cristaux les méthodes directes, fondées sur la mesure de la variation d'épaisseur d'une lame à faces parallèles, que nous avons résumées aux §§ 363, 364 et 365. La méthode de Pfaff ou celle de M. Fizeau, appliquées à une lame perpendiculaire à un axe thermique,

donnent immédiatement le coefficient de dilatation principal relatif à cet axe.

Si la lame étudiée n'est pas perpendiculaire à un axe thermique, on doit observer que sa variation d'épaisseur n'est pas égale en toute rigueur à la dilatation de la ligne qui, à la température initiale, coïncide avec

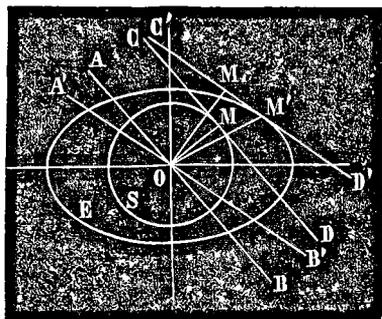


Fig. 466.

sa normale. La figure 466 permet de s'en rendre compte aisément.

¹ F.-E. NEUMANN, *Pogg. Ann.* 1833, XXVII, 240; — C. NEUMANN, *ibid.* 1861, CXIV, 492; — L. FLETCHER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1880, IV, 337; 1884, VIII, 455; — BECKENKAMP, *ibid.* 1881, V, 436; 1882, VI, 450; — B. HECHT, *ibid.* 1886, XI, 531; 1888, XIV, 333.

Soit, à la température t_1 , une sphère S tracée dans l'intérieur du cristal, soit $ABCD$ une lame à faces parallèles, normale au rayon OM de la sphère; OM forme avec les axes thermiques des angles quelconques l, m, n . A la température t_2 , la sphère est devenue l'ellipsoïde E , le point M est venu en M' , et les faces de la lame ont pris les positions $A'B'C'D'$. Puisque trois diamètres rectangulaires quelconques de la sphère se transforment (§ 366) en trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, on voit que le plan $A'B'$ est le plan conjugué du diamètre OM' . La lame, parallèle avant la dilatation au plan tangent en M à la sphère, se trouve, après la dilatation, parallèle au plan tangent en M' à l'ellipsoïde. La dilatation de la normale OM de la lame est $OM' - OM$, tandis que la variation d'épaisseur qui est donnée par l'expérience est $OM_1 - OM$. On trouve facilement par le calcul

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 l}{(1 + \alpha\theta)^2} + \frac{\cos^2 m}{(1 + \beta\theta)^2} + \frac{\cos^2 n}{(1 + \gamma\theta)^2}}}$$

et

$$\frac{OM'}{OM} = \sqrt{(1 + \alpha\theta)^2 \cos^2 l + (1 + \beta\theta)^2 \cos^2 m + (1 + \gamma\theta)^2 \cos^2 n},$$

expressions qui ne prennent des valeurs égales que si la lame est normale à un axe thermique, mais dont la différence peut être négligée en pratique, vu la petitesse des coefficients α, β, γ . Au même degré d'approximation, si l'on pose

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{OM'}{OM} = 1 + \varepsilon;$$

le coefficient de dilatation ε dans la direction normale à la lame est donné par la formule

$$\varepsilon = \alpha \cos^2 l + \beta \cos^2 m + \gamma \cos^2 n.$$

Quoi qu'il en soit, l'étude d'un nombre suffisant de lames différemment orientées permettra de déterminer les axes thermiques et les dilatations principales.

*** 371. Démonstration des formules.** — Les trois formules que nous venons d'énoncer s'obtiennent de la manière suivante :

1° Soient x, y, z les coordonnées du point M, x', y', z' celles du point M', x_1, y_1, z_1 celles du point M₁, prises par rapport aux axes thermiques. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}x' &= x(1 + \alpha\theta) \\y' &= y(1 + \beta\theta) \\z' &= z(1 + \gamma\theta)\end{aligned}$$

L'équation de la sphère S étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = \overline{OM}^2$$

celle de l'ellipsoïde E s'en déduit en y remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonctions de x', y', z' :

$$\frac{x'^2}{(1 + \alpha\theta)^2} + \frac{y'^2}{(1 + \beta\theta)^2} + \frac{z'^2}{(1 + \gamma\theta)^2} = \overline{OM}^2.$$

Si l, m, n sont les angles que la direction OM forme avec les axes, nous trouvons

$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\&= x^2(1 + \alpha\theta)^2 + y^2(1 + \beta\theta)^2 + z^2(1 + \gamma\theta)^2 \\&= \overline{OM}^2 \{ (1 + \alpha\theta)^2 \cos^2 l + (1 + \beta\theta)^2 \cos^2 m + (1 + \gamma\theta)^2 \cos^2 n \}\end{aligned}$$

qui est identique à la seconde formule du § 370, et peut s'écrire

$$(1 + \varepsilon\theta)^2 = (1 + \alpha\theta)^2 \cos^2 l + (1 + \beta\theta)^2 \cos^2 m + (1 + \gamma\theta)^2 \cos^2 n.$$

En développant les carrés et négligeant les puissances de $\alpha,$

$\beta, \gamma, \varepsilon$ supérieures à la première, et en remarquant que l'on a toujours

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

il vient

$$\varepsilon = \alpha \cos^2 l + \beta \cos^2 m + \gamma \cos^2 n.$$

2° Soient encore l_1, m_1, n_1 les angles que la direction OM_1 forme avec les axes. Nous avons

$$x_1 \cos l_1 + y_1 \cos m_1 + z_1 \cos n_1 = OM_1 \quad (1)$$

et aussi, puisque M_1 est situé sur le plan tangent en M' à l'ellipsoïde,

$$\frac{x'x_1}{(1+\alpha\theta)^2} + \frac{y'y_1}{(1+\beta\theta)^2} + \frac{z'z_1}{(1+\gamma\theta)^2} = \bar{OM}^2$$

qui peut s'écrire, en remplaçant x', y', z' par leurs valeurs en fonctions de x, y, z :

$$\frac{xx_1}{1+\alpha\theta} + \frac{yy_1}{1+\beta\theta} + \frac{zz_1}{1+\gamma\theta} = \bar{OM}^2 \quad (2)$$

La comparaison des formes (1) et (2) de l'équation du plan C'D' donne

$$\begin{aligned} \frac{OM_1}{\bar{OM}^2} &= \frac{\cos l_1}{\frac{x}{1+\alpha\theta}} = \frac{\cos m_1}{\frac{y}{1+\beta\theta}} = \frac{\cos n_1}{\frac{z}{1+\gamma\theta}} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 l_1 + \cos^2 m_1 + \cos^2 n_1}}{\sqrt{\frac{x^2}{(1+\alpha\theta)^2} + \frac{y^2}{(1+\beta\theta)^2} + \frac{z^2}{(1+\gamma\theta)^2}}} \\ &= \frac{1}{OM \sqrt{\frac{\cos^2 l}{(1+\alpha\theta)^2} + \frac{\cos^2 m}{(1+\beta\theta)^2} + \frac{\cos^2 n}{(1+\gamma\theta)^2}}} \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par OM , on retrouve la première formule du § 370.

On a donc, en posant $OM_1 = OM(1 + \varepsilon\theta)$,

$$\left(\frac{1}{1 + \varepsilon\theta}\right)^2 = \left(\frac{\cos l}{1 + \alpha\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos m}{1 + \beta\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos n}{1 + \gamma\theta}\right)^2.$$

En effectuant les divisions indiquées et en négligeant toujours les carrés des coefficients de dilatation, il vient

$$(1 - \varepsilon\theta)^2 = (1 - \alpha\theta)^2 \cos^2 l + (1 - \beta\theta)^2 \cos^2 m + (1 - \gamma\theta)^2 \cos^2 n,$$

qui, au même ordre d'approximation, donne comme ci-dessus

$$\varepsilon = \alpha \cos^2 l + \beta \cos^2 m + \gamma \cos^2 n.$$

372. Constantes thermiques de quelques corps. —

Nous reproduisons ici quelques-uns des résultats obtenus par M. Fizeau. l_0 étant une longueur à 0° , la longueur l à t° peut être exprimée par une formule à deux termes

$$l = l_0 (1 + \alpha t + \alpha' t^2).$$

a) Cristaux cubiques.

Diamant.....	$\alpha = 0,00000060$	$\alpha' = 0,000000072$
Sel gemme.....	$0,00083859$	$0,000000224$
Fluorine.....	$0,00001796$	$0,000000144$
Galène.....	$0,00001992$	$0,000000027$

b) Cristaux quadratiques.

Les coefficients sont γ, γ' suivant l'axe principal α, α' perpendiculairement à l'axe.

Cassitérite.....	$\gamma = 0,00000344$	$\gamma' = 0,000000059$
	$\alpha = 0,00000291$	$\alpha' = 0,000000038$
Rutile.....	$\gamma = 0,00000829$	$\gamma' = 0,000000112$
	$\alpha = 0,00000670$	$\alpha' = 0,000000055$

c) *Cristaux hexagonaux.*

Quartz.	$\gamma = 0,00000699$	$\gamma' = 0,0000000102$
	$\alpha = 0,00001324$	$\alpha' = 0,0000000119$
Corindon.	$\gamma = 0,00000537$	$\gamma' = 0,0000000102$
	$\alpha = 0,00000453$	$\alpha' = 0,0000000112$
Calcite.	$\gamma = 0,00002557$	$\gamma' = 0,0000000080$
	$\alpha = -0,00000575$	$\alpha' = 0,0000800043$
Béryl.	$\gamma = -0,00000152$	$\gamma' = 0,0000000057$
	$\alpha = 0,00000084$	$\alpha' = 0,0000000066$
Iodure d'argent.	$\gamma = -0,00000226$	$\gamma' = -0,0000000213$
	$\alpha = 0,00000010$	$\alpha' = 0,0000000069$

On remarquera la valeur négative des coefficients pour la calcite, le béryl, l'iodure d'argent. Dans la première, la dilatation est positive suivant l'axe et négative dans les directions perpendiculaires. Les deux derniers, au contraire, se contractent suivant l'axe et se dilatent perpendiculairement à l'axe.

d) *Cristaux rhombiques.*

Les coefficients α , α' , β , β' , γ , γ' se rapportent respectivement aux axes cristallographiques des X, des Y et des Z choisis d'après les conventions du § 42.

Aragonite.	$\alpha = 0,00000990$	$\alpha' = 0,0000000032$
	$\beta = 0,00001572$	$\beta' = 0,0000000184$
	$\gamma = 0,00003325$	$\gamma' = 0,0000000168$
Topaze.	$\alpha = 0,00000423$	$\alpha' = 0,0000000076$
	$\beta = 0,00000347$	$\beta' = 0,0000000084$
	$\gamma = 0,00000519$	$\gamma' = 0,0000000091$

e) *Cristaux clinorhombiques.*

Dans le *gypse*, la plus forte dilatation a lieu suivant l'axe de symétrie, avec les coefficients $\beta = 0,00003789$,

$\beta' = 0,0000000468$. Les deux autres axes OA, OB contenus dans le plan de symétrie sont orientés comme l'indique la figure 467.

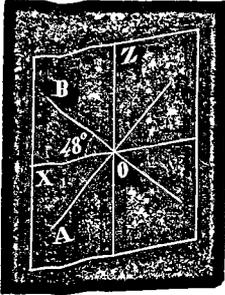


Fig. 467.

BOX = 48° environ.

Les coefficients sont pour OA :

$$\alpha = 0,00002796 \quad \alpha' = 0,0000000171$$

et pour OB :

$$\gamma = 0,00000113 \quad \gamma' = 0,0000000054$$

Le changement d'orientation avec la température est peu marqué.

f) *Cristaux tricliniques.*

L'anorthite a été l'objet d'une étude spéciale de M. Beckenkamp, qui a observé une variation considérable dans la position des axes thermiques suivant l'intervalle de température étudié. Ainsi l'un des axes de dilatation qui, entre 20 et 80°, forme un angle de 15°35' avec une arête du cristal, se trouve entre 20 et 200° former avec la même arête un angle de 41°57'.

373. Remarque de M. Schrauf. — M. Schrauf¹ a cherché à découvrir des relations entre la dilatation des cristaux et leurs autres propriétés physiques. Il a remarqué en particulier que, dans les *corps simples cristallisés* qui ont été étudiés jusqu'ici, les coefficients de dilatation suivant les trois axes cristallographiques sont à peu près proportionnels à des multiples simples des paramètres relatifs à ces mêmes axes. On trouve ainsi :

¹ A. SCHRAUF, *Wied. Ann.* 1886, XXVII, 315; XXVIII, 438.

Pour le *soufre* (rhombique) :

Paramètres cristallographiques :

$$a : b : c = 0,4272 : 0,5249 : 1.$$

Coefficients de dilatation $\times 10^4$:

$$\alpha : \beta : \gamma = 0,6849 : 0,8604 : 0,2144.$$

Rapports :

$$\alpha/a = 1,603; \beta/b = 1,637; \gamma/c = 0,2144 = 1,715 \times 1/8.$$

Pour l'*antimoine* (rhomboédrique) :

Paramètres cristallographiques :

$$a : c = 1 : 1,3068.$$

Coefficients de dilatation $\times 10^4$:

$$\alpha : \gamma = 0,0882 : 0,1692.$$

Rapports :

$$\alpha/a = 0,0882; \gamma/c = 0,1295 = 0,0863 \times 3/2.$$

Pour le *bismuth* (rhomboédrique) :

Paramètres cristallographiques :

$$a : c = 1 : 1,3035.$$

Coefficients de dilatation $\times 10^4$:

$$\alpha : \gamma = 0,1208 : 0,1621.$$

Rapports :

$$\alpha/a = 0,1208; \gamma/c = 0,1243.$$

Des relations analogues, mais plus compliquées, s'observeraient aussi dans les corps composés.

CHAPITRE XXV

DE LA CONDUCTIBILITÉ POUR LA CHALEUR

374. Flux de chaleur¹. — Dans un corps dont tous les points n'ont pas la même température, la chaleur se transporte toujours par conductibilité des parties les plus chaudes aux parties les plus froides, et ce transport dure aussi longtemps que les températures ne sont pas égalisées. En un point donné et à un instant donné, on peut admettre que le courant de chaleur a une direction déterminée. Le *flux total* de chaleur est la quantité qui passe pendant l'unité de temps à travers l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à cette direction.

Si nous appelons F ce flux total, α, β, γ les angles qu'il forme avec trois axes de coordonnées rectangulaires, nous pourrions le

¹ La théorie de la conductibilité a été créée par FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822. Fourier n'a considéré que les corps isotropes.

L'application de la théorie aux cristaux possédant trois plans de symétrie rectangulaires (*égalité symétrique*) a été faite par DUHAMEL, *J. Éc. Polyt.* 1832, XIII, 356; 1848, XIX, 155; *J. de Liouville*, 1839, IV, 63; *C. R.* 1847, XXV, 842, 870; 1848, XXVII, 129; 1856, XLIII, 1. — Le cas général a été envisagé par STOKES, *Camb. and Dubl. Mathem. J.* 1851, VI, 215; — LAMÉ, *Théorie de la chaleur*, Paris 1861; — MINNIGERODE, *Ueber Wärmeleitung in Krystallen*, Thèse, Göttingen 1862; *N. Jahrb. f. Min.* 1886, I, 1; — BOUSSINESQ, *C. R.* 1867, LXV, 104; 1868, LXVI, 1194; *Étude sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, Thèse, Paris, 1867; *J. de Liouville*, 1869, XIV, 265.

définir par ses trois composantes $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \cos \beta$, $F_z = F \cos \gamma$, parallèles à ces axes.

F_x , F_y , F_z représentent en même temps les quantités de chaleur qui traversent l'unité de surface de trois plans respectivement perpendiculaires aux axes.

Considérons en effet (fig. 468), deux plans, l'un AB perpendiculaire, l'autre A'B' oblique au flux total. Les portions S et S' de ces plans qui sont limitées par une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles au flux sont évidemment traversées par la même quantité de chaleur, représentée par FS pour la surface S, par F'S' pour la surface S'. Donc

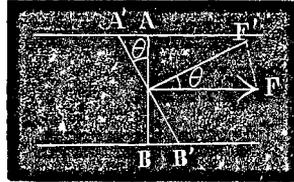


Fig. 468.

$$F'S' = FS = FS' \cos \theta$$

et

$$F' = F \cos \theta.$$

F' est la quantité qui traverse le plan oblique par unité de surface. Le flux par unité de surface relatif au plan quelconque A'B' est la projection du flux total sur la normale à A'B'.

Les flux F_x , F_y , F_z parallèles aux axes de coordonnées sont généralement variables d'un instant à l'autre et d'un point à l'autre, et dépendent de la distribution des températures tout autour du point considéré. Ce sont donc des fonctions du temps t et des coordonnées x , y , z de ce point. La température est, elle aussi, une fonction des mêmes variables.

Si le corps reçoit par certains points de la chaleur d'une source constante, et en abandonne d'une manière également constante à d'autres corps par d'autres points, il s'établit à la longue un régime permanent dans lequel la température et les flux de chaleur ont en chaque point des valeurs déterminées, variables d'un point à l'autre, mais indépendantes du temps.

375. Surfaces isothermes. — Dans tous les cas, on peut figurer la distribution des températures à l'intérieur du corps par la considération des *surfaces isothermes*, dont chacune est formée par l'ensemble des points qui ont à un même instant la même température. Il est clair que deux isothermes ne peuvent se rencontrer, puisque un même point ne peut avoir en même temps deux températures différentes. Si nous traçons les surfaces isothermes relatives à une série de températures variant par degrés égaux, u , $u + \alpha$, $u + 2\alpha \dots$, ces surfaces seront d'autant plus rapprochées que la température changera plus vite d'un point à un autre, et s'écarteront au contraire d'autant plus que la température sera plus uniforme.

Si l'on considère deux isothermes très voisines correspondant

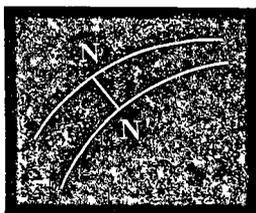


Fig. 469.

à des températures très peu différentes, deux éléments très petits pris en regard l'un de l'autre sont sensiblement parallèles et se confondent avec des plans perpendiculaires à leur normale commune NN' (fig. 469). Le flux de chaleur traversant cette région infiniment petite est as-

similable à celui qui traverserait un mur indéfini à faces parallèles dont les deux faces seraient portées à des températures différentes.

376. Coefficient de conductibilité intérieure dans les corps isotropes. — Considérons (fig. 470) un mur formé d'une substance isotrope, ayant une épaisseur e et des dimensions indéfinies dans les autres directions. Si la face AB est à une température u et la face A'B' à une température inférieure u' , chaque unité de surface du mur sera traversée dans chaque unité de temps par un flux de chaleur allant de AB vers A'B'. Par raison de symétrie, ce flux sera dirigé suivant la nor-

male NN'. Nous pourrons, au moins en première approximation, le considérer comme proportionnel à la variation que la température subit par unité de longueur dans la direction NN' perpendiculaire à la surface isotherme AB.

Le flux F étant positif, c'est-à-dire dirigé de N vers N', la température diminue, c'est-à-dire éprouve une variation négative $u' - u$, quand on passe du point N au point N'. La variation par unité de longueur, que nous appellerons u_n , est

$$u_n = \frac{u' - u}{e}$$

et l'expression du flux est

$$F = -k \frac{(u' - u)}{e} = -ku_n,$$

k est la valeur du flux pour $u_n = 1$, c'est le *coefficient de conductibilité intérieure* de la matière dont le mur est formé.

377. Soit maintenant une direction NM quelconque faisant un angle θ avec la normale NN'. Le flux F_r suivant cette direction (rapporté à l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à NM) est égal (§ 374) au flux total F dirigé suivant NN' multiplié par $\cos \theta$. On aura donc

$$F_r = F \cos \theta = -k \frac{u' - u}{e} \cos \theta = -k \frac{(u' - u)}{e'}.$$

Or $(u' - u)/e'$ est la variation u_r de la température par unité de longueur dans la direction NM,

$$F_r = -ku_r.$$

D'après la remarque qui termine le § 374, les résultats obtenus

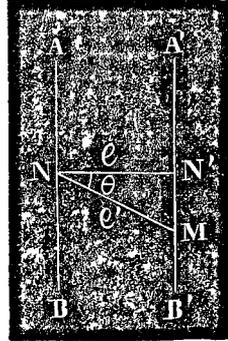


Fig. 470.

nus dans le cas d'un mur indéfini sont applicables, en tout point du milieu, à l'espace compris entre deux surfaces isothermes infiniment voisines.

Nous trouvons donc que, dans un milieu isotrope, 1° le flux total de chaleur est constamment normal aux surfaces isothermes; 2° le flux estimé dans une direction quelconque est, en signe contraire, le produit de la variation de température par unité de longueur suivant cette direction, par le coefficient de conductibilité intérieure.

Il en résulte immédiatement que les composantes du flux total suivant les axes sont exprimées par

$$F_x = -ku_x; \quad F_y = -ku_y; \quad F_z = -ku_z.$$

378. Propagation de la chaleur tout autour d'un

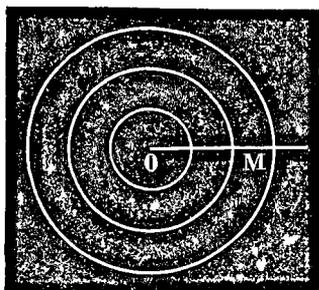


Fig. 471.

point dans un milieu isotrope indéfini. — Il est évident que si l'on suppose qu'un point O d'un milieu isotrope indéfini (fig. 471) soit maintenu à une température plus élevée que le reste du milieu, la chaleur se propagera également tout autour du point O, les isothermes seront des sphères ayant ce point

comme centre et le flux total de chaleur sera, en un point M quelconque, dirigé suivant le rayon OM.

379. Coefficients de conductibilité intérieure dans les corps cristallisés.

— Prenons maintenant un mur indéfini comme au paragraphe précédent, mais supposons que la matière dont il est formé ne soit pas isotrope.

Nous n'avons plus de raison d'admettre que le flux total de chaleur soit dirigé suivant la normale NN' aux surfaces iso-

thermes (fig. 472); le milieu n'est pas en général symétrique par rapport à cette ligne; il est naturel de penser que sa conductibilité est variable d'une direction à l'autre et que, par suite, la chaleur passe plus facilement de la surface AB à la surface A'B' en suivant une ligne oblique, telle que NN'. La variation de température suivant NN' donne lieu à un transport de chaleur non seulement suivant NN', mais aussi normalement à cette ligne. Les formules simples des corps isotropes ne sont donc plus applicables, et nous devons considérer le flux F_x , par exemple, comme dépendant non seulement de la variation de température u_x suivant l'axe des x , mais aussi des variations u_y, u_z suivant les axes des y et des z . La supposition la plus simple que l'on puisse faire est d'admettre pour F_x, F_y, F_z des valeurs de la forme ¹

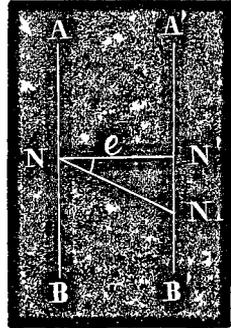


Fig. 472.

$$\begin{aligned}
 F_x &= -(Au_x + Bu_y + Cu_z) \\
 F_y &= -(B'u_x + A'u_y + Du_z) \\
 F_z &= -(C'u_x + D'u_y + A''u_z)
 \end{aligned}$$

qui satisfont à la condition évidente de s'annuler en même temps que les variations de température.

Dans cette hypothèse, la conductibilité du milieu cristallisé dépendrait généralement des *neuf* coefficients de conductibilité A, A', A'', B, B', C, C', D, D'. C'est là une première approximation qui est certainement permise si les variations u_x, u_y, u_z de la température par unité de longueur sont petites, mais qui peut se trouver en défaut si la température varie rapidement d'un point à l'autre.

¹ STOKES, *Camb. and Dubl. Mathem. J.* 1851, VI, 215.

380. Conductibilité normale. — Dans un mur anisotrope indéfini tel que celui que nous avons supposé au § 379, dont les faces AB et A'B' sont maintenues à des températures uniformes u et u' , le passage de la chaleur se fait partout de la même manière et les surfaces isothermes sont des plans parallèles à AB. Le flux total F est en général dirigé obliquement suivant une direction NN_1 variable avec la nature et l'orientation du mur. F est la quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à NN_1 . La quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface du plan AB, ou le flux normal au mur, est égale (§ 374) à la projection F_n du flux total F sur la normale NN' .

Or on peut démontrer¹ : 1° *Que le flux normal F_n est proportionnel à la variation*

$$u_n = \frac{u' - u}{e}$$

que la température subit par unité de longueur dans la direction de NN' , de sorte que

$$F_n = -k_n u_n,$$

k_n étant un certain coefficient de conductibilité normale;

2° *Que le coefficient k_n varie pour un même cristal avec l'orientation du mur, et se trouve représenté dans chaque position par l'inverse du carré du rayon vecteur mené suivant NN' d'un certain ellipsoïde (ellipsoïde inverse de conductibilité normale).*

381. Axes de conductibilité. — Les axes principaux de

¹ On démontre ces deux théorèmes en additionnant les formules du § 379 après les avoir multipliées respectivement par les cosinus des angles α' , β' , γ' que NN' forme avec les axes, et en y remplaçant u_x , u_y , u_z par leurs valeurs $u_n \cos \alpha'$, $u_n \cos \beta'$, $u_n \cos \gamma'$ qui s'obtiennent comme au § 377.

cet ellipsoïde sont appelés *axes de conductibilité*; si on les choisit pour axes de coordonnées, les formules du § 379 prennent la forme

$$\begin{aligned} F_x &= -(k_x u_x - \lambda_x u_y + \lambda_y u_z) \\ F_y &= -(\lambda_x u_x + k_y u_y - \lambda_x u_z) \\ F_z &= -(-\lambda_y u_x + \lambda_x u_y + k_z u_z) \end{aligned}$$

et ne dépendent plus que de six coefficients : les trois *conductibilités principales* k_x, k_y, k_z , et les trois *coefficients rotationnels* $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$.

L'équation de l'ellipsoïde inverse est alors

$$k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2 = 1$$

et, en appelant α', β', γ' les angles compris entre la normale NN' au mur et les axes de conductibilité, le coefficient de conductibilité normale est donné par la formule

$$k_n = k_x \cos^2 \alpha' + k_y \cos^2 \beta' + k_z \cos^2 \gamma'.$$

382. Conductibilité linéaire. — On peut encore démontrer¹ : 1° Que le flux total F dirigé obliquement suivant NN_1 est proportionnel à la variation de température

$$u_1 = \frac{u' - u}{NN_1}$$

estimée dans la direction du flux lui-même. Cette proportionnalité n'a pas lieu pour les autres directions, sauf celle de la normale NN' déjà mentionnée. On a donc, en appelant k_l un certain coefficient de conductibilité linéaire,

$$F = -k_l u_1.$$

¹ On résout les formules du § 379 par rapport à u_x, u_y, u_z , on les additionne après les avoir respectivement multipliées par les cosinus des angles α, β, γ que le flux F forme avec les axes, et l'on remplace F_x, F_y, F_z par leurs valeurs $F \cos \alpha, F \cos \beta, F \cos \gamma$.

2° Le coefficient k_l varie avec l'orientation du mur; pour chaque position il est égal au carré du rayon vecteur mené dans la direction NN_1 d'un certain ellipsoïde (ellipsoïde de conductibilité linéaire)¹ dont l'équation rapportée aux axes de conductibilité est :

$$\frac{x^2}{k_x} + \frac{y^2}{k_y} + \frac{z^2}{k_z} + \frac{(\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z)^2}{k_x k_y k_z} = 1 + \frac{k_x \lambda_x^2 + k_y \lambda_y^2 + k_z \lambda_z^2}{k_x k_y k_z};$$

les axes principaux de cet ellipsoïde, qui dépend non seulement des conductibilités principales k_x, k_y, k_z , mais aussi des coefficients $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, ne coïncident pas en général avec les axes de conductibilité définis plus haut. Toutes les fois que les λ sont nuls, le coefficient de conductibilité linéaire k_l est donné par la formule

$$\frac{1}{k_l} = \frac{\cos^2 \alpha}{k_x} + \frac{\cos^2 \beta}{k_y} + \frac{\cos^2 \gamma}{k_z},$$

où α, β, γ sont les angles que la direction NN_1 du flux total forme avec les axes de conductibilité.

C'est le coefficient de conductibilité linéaire qui détermine le passage de la chaleur le long d'un barreau très mince par rapport à sa longueur; dans ce cas, en effet, le flux total F est obligé de se propager dans la direction même suivant laquelle la variation de température est estimée.

383. Ellipsoïde principal². — Si l'on chauffe un point O dans l'intérieur du cristal, la chaleur se propage inégalement dans les diverses directions, et les surfaces isothermes forment une série d'ellipsoïdes semblables qui ont leurs centres en O , et

¹ BOUSSINESQ, *C. R.* 1867, LXV, 104.

² LAMÉ, *Théorie de la chaleur*, Paris, 1861, p. 41.

dont les axes principaux coïncident avec les axes de conductibilité. Ces ellipsoïdes sont représentés par l'équation

$$\frac{x^2}{k_x} + \frac{y^2}{k_y} + \frac{z^2}{k_z} = \text{constante.}$$

On passe de l'un à l'autre en modifiant la valeur de la constante, et celui de ces ellipsoïdes pour lequel le second membre est égal à l'unité porte le nom d'*ellipsoïde principal*. Ses demi-diamètres principaux sont égaux respectivement aux racines carrées des conductibilités principales k_x, k_y, k_z .

384. Influence de la symétrie cristalline. — Comme dans les autres branches de la physique des cristaux, la symétrie vient modifier ici les phénomènes, et imposer aux coefficients de conductibilité certaines conditions. Ce que nous avons dit au § 173 à propos de l'élasticité suffira sans doute à faire voir la nature du raisonnement que l'on doit faire¹. Deux remarques sont cependant nécessaires.

1° D'après les formules du § 379, si l'on change les signes des u_x, u_y, u_z , les F_x, F_y, F_z changent en même temps de signe. En d'autres termes, les flux sont simplement renversés de sens et restent les mêmes en grandeur absolue si l'on renverse simplement le sens de la chute de température. La conductibilité est la même dans les deux directions opposées d'une même droite. Le cristal se comporte donc toujours à l'égard de ce phénomène comme s'il possédait un centre de symétrie. Les

¹ On doit à M. MINNIGERODE, *N. Jahrb. f. Min.* 1886, I, 1, la discussion complète de l'influence exercée par la symétrie de tous les systèmes holoédriques et hémiedriques sur la forme des équations de la chaleur, et la classification de ces systèmes que nous indiquons dans les paragraphes suivants. — Voyez aussi LIEBISCH, *Lehrbuch der physikalischen Kristallographie*, Leipzig 1891, p. 139.

types méroédriques non centrés ne pourront différer des systèmes dont ils dérivent par suppression du centre.

Mais il se peut que cette conclusion soit nécessitée non par la nature des choses, mais seulement par l'ordre d'approximation auquel nous nous sommes arrêtés pour établir les formules du § 379. Il n'est pas impossible, comme nous l'avons dit, que cette approximation ne soit insuffisante dans certains cas. On pourrait alors observer une conductibilité unilatérale dans des méroèdres non centrés. Cette supposition paraît d'ailleurs peu probable.

2° On admet le plus souvent que les coefficients rotationnels $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ sont toujours nuls, et cela par suite de quelque cause générale indépendante de la symétrie.

Dans ce qui suit (§ 385-394), nous nous placerons d'abord dans cette supposition, dont l'exactitude ne saurait être prouvée actuellement, mais qui paraît assez probable, introduit de grandes simplifications et suffit pour l'exposé des faits observés jusqu'ici. Nous résumerons ensuite (§ 395-397) les conséquences curieuses auxquelles on est conduit lorsqu'on admet que les coefficients rotationnels ne sont pas nuls en général et ne disparaissent que lorsque la symétrie cristallographique l'exige.

385. Cas où les coefficients rotationnels sont nuls.

— Si les coefficients $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ sont nuls, l'ellipsoïde de conductibilité linéaire du § 382 se confond avec l'ellipsoïde principal du § 383. Les lois de la propagation de la chaleur dans le cristal dépendent uniquement de la forme et de l'orientation de cet ellipsoïde : les axes de conductibilité sont parallèles à ses axes principaux, et les trois conductibilités principales k_x, k_y, k_z qui subsistent seules dans l'expression des flux donnée au § 381 sont égales respectivement aux carrés de ses demi-diamètres principaux. Au lieu de l'ellipsoïde principal, il suffirait égale-

ment de connaître l'ellipsoïde inverse du § 380 dont les demi-diamètres principaux ont la même orientation et sont respectivement égaux à $1/\sqrt{k_x}$, $1/\sqrt{k_y}$, $1/\sqrt{k_z}$.

386. Dans le cas, déjà considéré au § 383, où la chaleur est supposée se répandre tout autour d'un point échauffé dans la masse du cristal, le calcul montre que, lorsque les coefficients rotationnels sont nuls, les flux de chaleur, quoique variant d'une direction à l'autre, se propagent toujours, dans un milieu cristallisé comme dans un milieu isotrope (§ 378), en lignes droites à partir du point échauffé.

387. L'ellipsoïde principal qui détermine la conductibilité du cristal dépend uniquement de la structure de celui-ci et doit, par conséquent, être compatible avec la symétrie.

Dans le système triclinique, qui ne possède ni plans ni axes de symétrie, l'ellipsoïde principal peut donc avoir une forme et une orientation quelconques.

Dans le système clinorhombique, l'un des axes de conductibilité coïncide nécessairement avec l'axe de symétrie; les deux autres, toujours rectangulaires entre eux, ont une orientation quelconque dans le plan de symétrie.

Dans le système rhombique, les axes de conductibilité coïncident nécessairement avec les trois axes de symétrie. L'orientation de l'ellipsoïde est déterminée, mais sa forme peut varier d'un cristal à l'autre, suivant les valeurs des conductibilités principales.

Dans les cristaux quadratiques et hexagonaux, l'ellipsoïde principal est de révolution autour de l'axe cristallographique. Les deux conductibilités principales relatives aux axes horizontaux sont égales; il n'y a plus que deux coefficients distincts, k_z suivant l'axe, et k_x perpendiculairement à l'axe.

Enfin, dans les cristaux cubiques, les trois conductibilités principales sont égales; il n'y a plus qu'un seul coefficient, l'ellipsoïde principal se réduit à une sphère et tout se passe comme dans un corps isotrope.

388. Conductibilité extérieure. — Les résultats théoriques que nous venons de résumer ne peuvent guère être vérifiés directement par l'expérience. Nous n'avons aucun moyen de suivre dans l'intérieur d'un cristal le développement des surfaces isothermes ou la marche des flux de chaleur totaux. Les cristaux sur lesquels nous pouvons opérer sont toujours limités par des surfaces terminales en contact avec l'air ou avec un autre milieu, et tout ce que nous pouvons faire en général c'est d'étudier la distribution et la variation des températures sur ces surfaces. Or lorsqu'une surface à température u est en contact avec un milieu à température u_0 , elle perd, par unité de surface et par unité de temps, une quantité de chaleur qui peut être représentée en première approximation par

$$f = h(u - u_0),$$

et sa température dépend en chacun de ses points non seulement des flux qu'elle échange avec l'intérieur du corps, mais aussi du flux f ; h est appelé *coefficient de conductibilité extérieure*, il varie principalement avec l'état de la surface.

De plus, dans un corps limité, les flux ne peuvent pas se propager librement comme dans un corps indéfini, de nouvelles conditions s'introduisent qui peuvent, suivant les cas, simplifier ou compliquer le problème.

389. Méthode expérimentale de Senarmont¹. — La

¹ DE SENARMONT, *Ann. de Chim.* 1847, XXI, 457; 1848, XXII, 179; XXIII, 257; 1850, XXVIII, 279.

substance à étudier est taillée sous forme d'une lame mince, suffisamment étendue pour pouvoir être considérée pratiquement comme indéfinie; elle est percée en son milieu d'un petit trou qui permet de l'enfiler sur une tige conique d'argent; cette tige, chauffée à une distance suffisante de la plaque, apporte constamment au milieu de celle-ci de la chaleur qui se répand tout autour du petit trou. La plaque est couverte de cire qui fond jusqu'à une certaine limite, dont la forme, visible après le refroidissement, montre comment la conductibilité varie dans les diverses directions.

On peut également remplacer la tige d'argent par un petit tube où circule un courant d'air chaud ou de vapeur, ou, comme l'a fait M. V. v. Lang¹, par une aiguille échauffée par un courant électrique qui la traverse. Pour éviter de percer la lame à étudier, M. Jannettaz² applique simplement contre sa surface une petite boule métallique traversée par un courant électrique. On peut aussi remplacer la cire par de la graisse, qui fond à une température plus basse, ou par un enduit de iodure de cuivre et mercure, qui passe du rouge au brun vers 70°³. M. Röntgen⁴ a employé un autre procédé, qui consiste à produire un léger dépôt de rosée en soufflant sur la plaque bien nettoyée, puis à la toucher pendant un temps très court avec une pointe chauffée. La rosée s'évapore tout autour de la pointe dans un espace nettement limité à chaque instant, et on

¹ V. v. LANG, *Pogg. Ann.* 1868, CXXXV, 29.

² E. JANNETTAZ, *C. R.* 1872, LXXV, 940, 1082, 1501; 1874, LXXVIII, 413, 1202; 1875, LXXXI, 1254; 1882, XCV, 996; 1884, XCIX, 1019; 1892, CXIV, 1352; *Bull. Soc. géol.* 1873, I, 117, 252; 1874, II, 264; 1875, III, 499; 1876, IV, 116, 553; 1877, V, 410; 1878, VI, 203; 1881, IX, 196; *Bull. Soc. min.* 1878, I, 19; 1884, VII, 469; *J. de Phys.* 1876, V, 150, 247; *Ann. de Chim.* 1873, XXIX, 5; — *Notice sur les travaux de P.-M.-E. Jannettaz*, Meulan 1882.

³ A.-M. MAYER, *Phil. Mag.* 1872, XLIV, 257.

⁴ RÖNTGEN, *Pogg. Ann.* 1874, CLI, 603; *Zeitsch. f. Kryst.* 1879, III, 17.

fixe l'image en la saupoudrant rapidement de lycopode, qui n'adhère qu'aux points encore humides.

Les courbes isothermes ainsi obtenues sont des ellipses, au moins tant que la lame peut être considérée comme échauffée par un seul point; les ellipses se réduisent à des cercles si la symétrie du cristal implique l'égalité de conductibilité dans les diverses directions parallèles à la lame.

Ainsi que Duhamel¹ l'a démontré, ces ellipses, lorsque les coefficients rotationnels sont nuls, sont, dans chaque cas, semblables à l'intersection de l'ellipsoïde principal par le plan de la lame.

390. Les ellipses sont orientées d'une manière quelconque dans le système triclinique (fig. 473). Dans le prisme rhomboïdal oblique elles sont symétriques par rapport au plan de

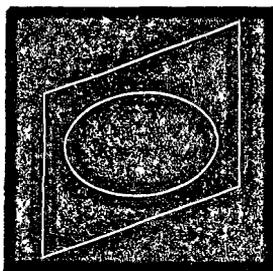


Fig. 473.

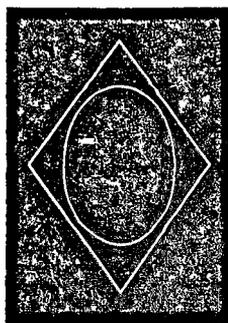


Fig. 474.

symétrie (fig. 474) sur une lame parallèle à l'axe, et ont sur les autres faces une orientation non assignable *a priori*. Dans le prisme rhomboïdal droit elles sont symétriquement disposées sur les faces parallèles aux axes de symétrie.

Dans les cristaux à un axe elles sont toujours symétriques

¹ DUHAMEL, *J. de l'École polyt.* 1848, XIX, 155.

par rapport à la section principale (fig. 475), et se réduisent à des cercles sur une face perpendiculaire à l'axe.

Dans les cristaux cubiques, enfin, on a des lignes isothermes circulaires, quelle que soit la face étudiée¹.

Il sera donc possible, par l'étude d'un nombre suffisant de lames d'orientations différentes et connues, de déterminer, non pas les dimensions absolues, mais la forme et la position de l'ellipsoïde principal. Les axes principaux de cet ellipsoïde ont la direction des axes de conductibilité et sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales, qui pourront être mesurées ainsi en valeurs relatives.

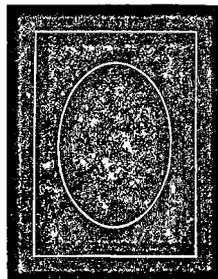


Fig. 475.

Ainsi, dans le quartz, l'ellipsoïde est allongé suivant l'axe principal dans le rapport de 1,3 à 1 ; la conductibilité suivant l'axe est à la conductibilité perpendiculairement à l'axe dans le rapport de $(1,3)^2$ à 1, c'est-à-dire de 1,69 à 1.

391. Nous donnons ci-dessous, à titre d'exemples, quelques chiffres empruntés aux travaux de M. Jannettaz :

a) *Cristaux quadratiques.*

k_x et k_x sont les conductibilités parallèlement et perpendiculairement à l'axe principal.

Rutile	$\sqrt{k_x}/\sqrt{k_z} = 0,80$
Cassitérite	0,79
Zircon	0,90

¹ La relation des figures isothermes avec la symétrie des cristaux a été constatée par tous les auteurs cités au paragraphe précédent, par Senarmont et par M. Jannettaz en particulier sur des cristaux naturels de tous les systèmes, par M. v. Lang sur des cristaux artificiels uniaxes, par M. Pape sur le sulfate de cuivre triclinique. Pape, *Wied. Ann.* 1877, I, 126.

b) *Cristaux hexagonaux.*

Antimoine	$\sqrt{k_x} / \sqrt{k_z} =$	1,59
Quartz		0,76
Calcite		0,91
Sidérose		1,09

c) *Cristaux rhombiques.*

k_x, k_y, k_z se rapportent respectivement aux axes cristallographiques des X, des Y et des Z choisis d'après les conventions du § 42.

Barytine	$\sqrt{k_x} / \sqrt{k_z} =$	1,06	$\sqrt{k_y} / \sqrt{k_z} =$	1,03
Célestine		1,04		1,08
Anglésite		1,12		1,14
Stibine		0,69		0,54

d) *Cristaux clinorhombiques.*

k_y se rapporte à l'axe de symétrie, k_x à celui des deux axes de conductibilité contenus dans le plans de symétrie qui est le plus rapproché de l'axe cristallographique vertical, et l'angle μ qu'il forme avec ce dernier est considéré comme positif quand l'axe de conductibilité est compris dans l'angle obtus des axes cristallographiques (comme l'axe OB de la fig. 467, § 372).

Gypse	$\sqrt{k_x} / \sqrt{k_z} =$	0,8	$\sqrt{k_y} / \sqrt{k_z} =$	0,65	$\mu = + 17^\circ$
Epidote		0,93		1,09	$- 14^\circ$

M. Jannettaz a observé que, dans tous les corps qu'il a étudiés, les axes de plus grande conductibilité sont, pour autant que la symétrie le permet, parallèles aux clivages les plus faciles. La chaleur se propagerait donc plus facilement dans les directions suivant lesquelles les molécules sont plus rapprochées (§ 156).

D'après de Senarmont¹, il n'en est pas de même dans un corps isotrope soumis à une compression; la conductibilité, étudiée toujours par le même procédé des courbes isothermes, est dans ce cas plus faible parallèlement que perpendiculairement à la compression. Matteucci a observé l'inverse dans le bismuth.

D'après M. Jannettaz, il existerait aussi une relation entre la conductibilité et l'élasticité. Cet auteur a observé que, dans les cristaux clinorhombiques, la direction de l'élasticité maximum sur un disque dont on ébranle le centre est généralement parallèle à la direction de plus facile propagation de la chaleur.

392. Mesure des conductibilités normales. — Un second procédé d'étude consiste à réaliser autant que possible les conditions du mur de Fourier, dont nous avons parlé au § 379. Si l'on a une lame à faces parallèles, suffisamment étendue pour que l'on puisse négliger l'influence de ses bords, dont les deux faces soient maintenues à des températures différentes et connues, et si l'on mesure la quantité de chaleur qui la traverse dans l'unité de temps lorsque le régime permanent est établi, cette quantité de chaleur, rapportée à l'unité de surface de la lame, est la composante F_n du flux total estimée suivant la normale à la lame. La formule du § 380

$$F_n = -k_n u_n$$

permettra de déduire k_n , et par suite le rayon vecteur correspondant à cette direction de l'ellipsoïde inverse. L'étude d'un nombre suffisant de lames d'orientations connues et différentes donnera donc la position, la forme et les dimensions absolues de cet ellipsoïde, c'est-à-dire la position des axes de con-

¹ DE SENARMONT, *Ann. de Chim.* 1848, XXIII, 257. — MATTEUCCI, *ibid.* 1853, XLIII, 469.

ductibilité, et les grandeurs des conductibilités principales k_x , k_y , k_z dans tous les cas.

Ces mesures présentent d'assez grandes difficultés. En premier lieu, les lames que l'on peut employer ne sont jamais bien étendues, et ne peuvent être complètement assimilées à des murs indéfinis. En second lieu, il est très difficile de connaître exactement les températures des deux surfaces¹. Il semble qu'en les immergeant dans un liquide elles doivent prendre la température de ce liquide; en réalité, lorsqu'il y a un flux de chaleur, l'équilibre de température ne peut pas s'établir. La température varie rapidement et d'une manière qu'on ne peut déterminer dans la couche liquide très mince qui est en contact immédiat avec les surfaces. Cette erreur est surtout à craindre si le liquide n'est pas beaucoup meilleur conducteur que la lame. Enfin la mesure des quantités de chaleur qui passent est une opération malaisée et exigeant des corrections délicates².

393. Expériences de M. Tuchschnid³. — M. Tuchschnid a appliqué à l'étude du *quartz*, de la *calcite* et du *sel gemme* un procédé imaginé par M. H.-F. Weber pour l'étude de la conductibilité des liquides. La lame à étudier est placée entre deux plaques de cuivre, et le contact assuré à l'aide d'un

¹ PÉCLET, *Ann. de Chim.* 1841, II, 107.

² PFAFF, *Pogg. Ann.* 1861, CXIII, 647; — HOPKINS, *Phil. Trans.* 1857, 805; — TYNDALL, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1853, XXII, 265; — HERSCHEL et LEBOUR, *Rep. Brit. Assoc.* 1873, 223; — FORBES, *Proc. roy. Soc. Edinb.* 1875, VIII, 62; — H. LESS, *Ueber die Wärmeleitung schlechtleitender Körper*, Thèse, Berlin 1878; — LODGE, *Phil. Mag.* 1878, V, 110, ont proposé pour l'étude des corps de faibles dimensions divers procédés, dont les uns sont d'une interprétation complexe et douteuse, et dont les autres ne paraissent pas avoir été appliqués jusqu'ici aux corps cristallisés.

³ TUCHSCHMID, *Das innere Wärmeleitungsvermögen von Quartz, Kalkspath und Steinsalz*, Thèse, Zurich 1883; — H.-F. WEBER, *Wied. Ann.* 1880, X, 103. — Une méthode analogue a été proposée par MM. THOULET et LAGARDE, *C. R.* 1882, XCIV, 1047; *Ann. de Chim.* XXVI, 1882, 261.

peu de glycérine. Lorsque le système a pris la température du laboratoire, on refroidit la plaque de cuivre inférieure avec de la glace ou un courant d'eau, et l'on déduit la conductibilité normale du refroidissement du disque supérieur observé à l'aide d'une soudure thermo-électrique appliquée en son milieu. Dans les expériences de M. Tuchschnid, l'influence des deux couches de glycérine n'était pas négligeable, mais on pouvait l'éliminer au moins partiellement dans le cas du quartz et de la calcite, en supprimant la plaque de cuivre inférieure et en refroidissant directement la lame avec un courant d'eau.

Les résultats concordent suffisamment avec ceux que donne la méthode de Senarmont, le rapport des conductibilités obtenues pour le quartz et la calcite, parallèlement et perpendiculairement à l'axe, est sensiblement égal au rapport des carrés des axes des ellipses isothermes. De plus, la conductibilité dans une direction à 45° de l'axe se déduit bien des deux autres par la considération de l'ellipsoïde inverse ; on a en effet :

Conductibilité absolue.	Quartz.	Calcite.
Suivant l'axe.....	$k_x = 1,576$	0,576
Perpendiculaire à l'axe.....	$k_x = 0,957$	0,472
A 45° de l'axe.....	$k_n = 1,272$	0,518

On en déduit

$$\frac{k_z}{k_x} = 1,64 \text{ pour le quartz, et } 1,22 \text{ pour la calcite,}$$

tandis que les expériences de Senarmont donnent

$$\frac{k_z}{k_x} = 1,69 \text{ pour le quartz, et } 1,21 \text{ pour la calcite ;}$$

et que la conductibilité à 45°, calculée conformément à la théorie d'après l'ellipsoïde inverse, est 1,266 pour le quartz et 0,524 pour la calcite.

394. **Expériences de M. Bäckström.** — M. Bäckström¹ a appliqué un procédé dû à M. Christiansen et permettant de comparer entre elles les conductibilités normales de deux lames. Ces lames A_1 , A_2 (fig. 476), taillées de manière à avoir les mêmes surfaces, et des épaisseurs faibles mais d'ailleurs quelconques e_1 et e_2 , sont métallisées et amalgamées sur leurs faces opposées, et placées entre trois plaques de cuivre B_1 , B_0 ,

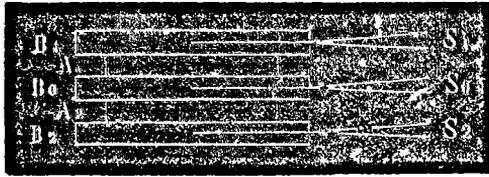


Fig. 476.

B_2 un peu plus grandes, portant chacune une soudure thermo-électrique S dans son intérieur. Le système est ensuite chauffé par le haut et refroidi par le bas à l'aide d'étuves convenables. Quand le régime permanent est atteint, on peut admettre qu'un même flux de chaleur traverse tout le système, et, connaissant les températures u_1 , u_0 , u_2 des trois plaques de cuivre, on déduit le rapport des conductibilités k_1 et k_2 par la formule

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{(u_1 - u_0) e_2}{(u_0 - u_2) e_1}.$$

Ce procédé, appliqué en même temps que celui de Senarmont à l'étude de l'*oligiste*, a donné des résultats satisfaisants. Le rapport de la conductibilité perpendiculaire à l'axe à la conductibilité suivant l'axe a été trouvé de 1,11 par la méthode de Christiansen et de 1,12 par celle de Senarmont.

En remplaçant l'une des lames par un corps isotrope connu, on pourrait déterminer ainsi la conductibilité absolue.

¹ BÄCKSTRÖM, *Ofvers. Akad. Stockholm*, 1888, 543; — CHRISTIANSEN, *Wied. Ann.* 1881, XIV, 23.

*** 395. Cas général où les coefficients rotationnels ne seraient pas nuls.** — Il nous reste maintenant à voir ce qui se passerait si la supposition que nous avons faite au § 384 se trouvait inexacte et si les coefficients rotationnels λ_x , λ_y , λ_z , qui entrent dans les formules du § 381, pouvaient avoir des valeurs différentes de zéro.

On trouve d'abord que ces coefficients s'annulent nécessairement par raison de symétrie :

1° Dans l'holoédrie et les méroédries rhombiques ;

2° Dans les holoédries quadratique et hexagonale ; dans les méroédries des mêmes systèmes qui possèdent des plans de symétrie parallèles à l'axe principal ou des axes de symétrie perpendiculaires à l'axe principal ;

3° Dans l'holoédrie et dans les méroédries du système cubique.

Dans ces trois groupes, les phénomènes seront donc en tout cas ceux que nous avons décrits.

Mais il peut en être autrement dans les trois groupes suivants.

*** 396. Le cas général où les neuf coefficients de conductibilité sont distincts et quelconques peut se rencontrer :**

1° Dans les cristaux holoédriques et hémiedriques du système triclinique. Trois de ces coefficients, ainsi que nous l'avons vu au § 381, disparaissent quand le cristal est rapporté à ses axes de conductibilité, et peuvent être regardés comme définissant la position de ces axes.

Les axes de conductibilité sont placés d'une manière quelconque par rapport au cristal, l'ellipsoïde de conductibilité linéaire a une position quelconque par rapport à ces axes. Tout ce que l'on peut en dire, c'est qu'il a un diamètre et le plan diamétral conjugué de ce diamètre, communs avec l'ellipsoïde.

principal qu'il enveloppe. Les deux ellipsoïdes coupent leur plan diamétral commun suivant des ellipses semblables et semblablement placées. Si la chaleur se répand à partir d'un centre dans un milieu cristallin indéfini, les surfaces isothermes sont semblables, comme nous l'avons vu, à l'ellipsoïde principal; mais les flux de chaleur partant du centre décrivent des spirales tracées sur des cônes à bases elliptiques, ayant le centre pour sommet, et pour axe le diamètre commun aux deux ellipsoïdes. Ce n'est que suivant ce diamètre que la propagation se fait en ligne droite.

2° Dans le système clinorhombique; en prenant l'axe de symétrie comme axe des y , on doit avoir, pour l'holoédrie et pour les hémiedries, qui n'en diffèrent que par l'absence du centre, $B = B' = D = D' = 0$. Il reste cinq coefficients. L'un des axes de conductibilité coïncide avec l'axe de symétrie, les deux autres, toujours rectangulaires entre eux, ont une position quelconque dans le plan de symétrie, déterminée par la valeur de l'un des coefficients.

L'ellipsoïde de conductibilité linéaire a ses axes coïncidant avec les axes de conductibilité; il coupe l'axe de symétrie à la même distance que l'ellipsoïde principal, qu'il enveloppe, et le plan de symétrie suivant une ellipse semblable et semblablement placée.

Les flux partant du centre décrivent des spirales tracées sur des cônes à base elliptique ayant leur sommet au centre, et l'axe de symétrie pour axe. Seul le flux qui suit ce dernier se propage en ligne droite.

3° Les coefficients rotationnels peuvent enfin ne pas s'annuler dans les cristaux quadratiques et hexagonaux qui ne possèdent pas d'axes binaires perpendiculaires à l'axe principal, ni de plans de symétrie passant par cet axe. Ce groupe comprend, dans le système quadratique, l'hémiedrie pyramidale et les

tétartoédries pyramidale et sphénoïdale; dans le système hexagonal, l'hémiédrie pyramidale, les tétrartoédries pyramidale, sphénoïdale et rhomboédrique, et l'ogdoédrie.

L'un des axes de conductibilité coïncide avec l'axe principal du cristal. Pour les deux autres axes, on peut prendre deux droites rectangulaires quelconques, perpendiculaires à l'axe principal.

L'axe principal étant pris comme axe des Z, on doit avoir

$$D = D' = C = C' = 0; \quad A = A'; \quad B' = -B.$$

Il reste trois coefficients A ou k_x , A' ou k_x , et B ou λ_x .

L'ellipsoïde principal et l'ellipsoïde de conductibilité linéaire, qui l'enveloppe, sont tous deux de révolution autour de l'axe principal qu'ils coupent au même point.

Les flux partant du centre décrivent des spirales placées sur des cônes à base circulaire, ayant le centre pour sommet et l'axe principal pour axe. Ce n'est que dans la direction de l'axe principal que le flux se propage en ligne droite.

* 397. L'étude expérimentale de ces cristaux pourrait être abordée de la manière suivante¹.

Si nous appliquons d'abord la méthode de Senarmont, nous observons que les flux de chaleur, dans le cas que nous considérons, ne sont pas absolument libres dans leur propagation, ils sont forcés de rester presque complètement dans le plan de la lame. Dans les cristaux où les flux ne se propagent généralement pas en ligne droite à partir d'un centre d'échauffement, leurs trajectoires seront modifiées, et les spirales coni-

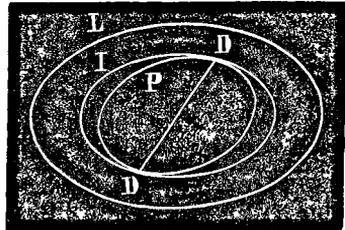


Fig. 477.

¹ Ch. SORET, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1892, XXVII, 373.

ques du milieu indéfini se réduiront à des spirales planes dans le cas d'une lame de faible épaisseur.

D'après M. Boussinesq¹, les courbes isothermes I (fig. 477) sont dans tous les cas des ellipses semblables à l'intersection L de l'ellipsoïde de conductibilité linéaire par le plan de la lame, et semblablement placées. Pour une même durée de propagation, le rapport de similitude varie avec l'orientation de la lame, de telle sorte que cette ellipse soit constamment tangente à l'intersection P de l'ellipsoïde principal qu'elle touche aux deux extrémités DD d'un même diamètre. Expérimentalement, ce rapport de similitude importe peu, les dimensions absolues de la courbe isotherme sont trop variables avec les conditions de chaque essai pour pouvoir donner lieu à des mesures précises. Ce que l'on peut déterminer, c'est l'orientation de ces ellipses, et le rapport de leurs axes principaux. On en déduira la forme et la position de l'ellipsoïde linéaire.

Appliquant ensuite la méthode des conductibilités normales, nous observons que l'ellipsoïde inverse du § 380, qui s'en déduit dans tous les cas (§ 392), ne dépend aucunement des coefficients rotationnels et donne directement la position des axes de conductibilité et les grandeurs des conductibilités principales k_x , k_y , k_z . On pourra donc en déduire l'ellipsoïde principal (§ 383), et sa comparaison avec l'ellipsoïde linéaire obtenu par la méthode de Senarmont permettra de déterminer les coefficients λ_x , λ_y , λ_z dans les milieux non symétriques, et de reconnaître si réellement ils sont différents de zéro. Il est à remarquer que l'ellipsoïde principal étant connu de position, de forme et de dimensions absolues, l'ellipsoïde de conductibilité linéaire, connu déjà de position et de forme, et devant avoir un diamètre commun avec l'ellipsoïde principal (§ 396), se trouvera complètement

¹ BOUSSINESQ, *J. de Liouville*, 1869, XIV, 265.

déterminé. En déduire les valeurs des coefficients ne sera plus qu'une question d'analyse.

Ces mesures de conductibilité normale présentent donc un grand intérêt; malheureusement, leur exécution est difficile, et jusqu'à présent le contrôle de la théorie, dont nous venons d'indiquer la possibilité en principe, n'a pas été fait.

*** 398. Conductibilité unilatérale dans les méroèdres non centrés.** — Nous avons vu (§ 384) que les formules, admises au § 379 comme première approximation, impliquent qu'il ne peut y avoir aucune différence de conductibilité dans les deux sens opposés d'une même droite. Il importe de vérifier si cette approximation est suffisante.

MM. S.-P. Thompson et Lodge¹ ont étudié les isothermes par la méthode de Senarmont sur des lames de tourmaline parallèles à l'axe. La tourmaline est hémimorphe dans le système hexagonal. Ils ont observé, au lieu des ellipses habituelles, des courbes déformées et inégalement aplaties suivant l'axe du cristal. Le rapport des deux rayons vecteurs de la courbe, opposés l'un à l'autre dans la direction de l'axe, variait notablement d'une expérience à l'autre, et se trouvait en moyenne égal à 1,3.

Dans une seconde série d'expériences, les mêmes auteurs mastiquaient une lame perpendiculaire à l'axe entre deux tubes de verre placés dans le prolongement l'un de l'autre. L'inférieur était chauffé par un courant de vapeur et le supérieur contenait du mercure et un thermomètre; on mesurait le temps nécessaire pour élever d'un nombre déterminé de degrés la température de ce thermomètre. Puis on retournait l'appareil, en mettant le mercure et le thermomètre dans l'extrémité qui était d'abord chauffée et réciproquement; on faisait ainsi passer la chaleur

¹ S.-P. THOMPSON et O.-G. LODGE, *Phil. Mag.* 1879, VIII, 18.

en sens inverse à travers le cristal. Les résultats, assez discordants, ont en moyenne donné une différence de conductibilité dans le même sens que par l'autre méthode.

D'autre part, M. Stenger¹, qui a étudié le même problème par la méthode plus précise de M. Weber (§ 393), n'a pas pu trouver de différence entre les conductibilités opposées de la tourmaline. L'étude des courbes isothermes a conduit M. Jannettaz à la même conclusion.

¹ F. STENGER, *Wied. Ann.* 1884, XXII, 522; — JANNETTAZ, *C. R.* 1892, CXIV, 1352.

CINQUIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES

CHAPITRE XXVI

DES ACTIONS ÉLECTRIQUES

399. Loi de Coulomb. — On sait que tous les corps peuvent acquérir par le frottement certaines propriétés que l'on exprime en disant qu'ils sont électrisés, et dont on peut se rendre compte commodément, quelle qu'en soit d'ailleurs la véritable cause, en supposant qu'un corps électrisé est chargé de quelque chose que l'on appelle *électricité*¹.

On est conduit alors à distinguer deux espèces d'électricités, appelées par convention l'électricité positive et l'électricité négative; on reconnaît que deux corps chargés d'électricités de même nom se repoussent, tandis que deux corps chargés d'électricités de noms contraires s'attirent; et l'on considère ces actions comme s'exerçant entre les électricités dont les corps sont chargés. Un corps non électrisé, ou à l'état neutre, sera regardé comme contenant les deux électricités en proportions égales, de telle sorte que les attractions exercées par l'une

¹ Bien que nous supposions le lecteur familiarisé d'une manière générale avec les faits et les principales théories de la Physique, nous commencerons cependant, comme nous l'avons fait pour l'Optique, par rappeler brièvement quelques principes qui nous seront utiles. Dans cet exposé préliminaire, nous suivons presque exactement, sauf l'introduction du facteur K_0 , l'excellent *Traité élémentaire d'Électricité* de M. Joubert.

d'elles soient exactement compensées par les répulsions exercées par l'autre et que l'effet total soit nul.

D'après la loi de Coulomb¹, deux quantités d'électricité q et q' , placées à une distance r l'une de l'autre, agissent l'une sur l'autre avec une force f qui est dirigée suivant la ligne r , et qui est représentée par la formule

$$f = \frac{1}{K_0} \frac{qq'}{r^2};$$

la force est considérée comme positive si q et q' sont de même signe, c'est-à-dire s'il y a répulsion. K_0 est une constante dépendant des unités choisies².

400. Force résultante. — Soient $q_1, q_2, q_3 \dots$ (fig. 478)

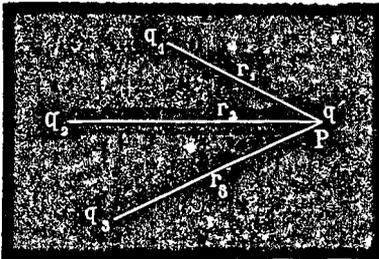


Fig. 478.

des masses électriques quelconques. Une masse q' placée en P est soumise à une force $f_1 = \frac{1}{K_0} \frac{q_1 q'}{r_1^2}$ provenant de q_1 et dirigée suivant r_1 , à une force $f_2 = \frac{1}{K_0} \frac{q_2 q'}{r_2^2}$ provenant de q_2 et dirigée suivant r_2 , et ainsi de suite. Chacune de ces forces parti-

tielles étant proportionnelle à q' , il en sera de même de leur

¹ COULOMB, *Mém. de l'Acad.* 1785, 569, 578.

² Si nous connaissions la nature mécanique de ce que nous appelons une quantité d'électricité, l'unité absolue de quantité d'électricité se trouverait *ipso facto* déterminée en fonction des unités fondamentales de masse, de longueur et de temps; le coefficient K_0 serait alors une quantité physique de nature également déterminée. Dans notre ignorance, nous devons nous contenter de mesurer les quantités d'électricité à l'aide d'unités conventionnelles; telle est par exemple l'unité électrostatique, représentée par la masse électrique qui, agissant à l'unité de distance sur une masse égale, exercerait une force égale à l'unité. Dans ce cas, on doit faire $K_0 = 1$. Il en résulte une petite simplification des formules; mais la suppression arbitraire d'un facteur aussi important entraîne facilement des malentendus, des obscurités théoriques et des locutions vicieuses.

résultante, qui pourra s'écrire Fq' . F est la force qui agirait sur une masse égale à l'unité d'électricité positive, si on pouvait l'amener au point P sans modifier la distribution des autres masses. F est appelée la *force électrique résultante* au point P .

L'ensemble des points de l'espace où la force résultante a une valeur différente de zéro constitue le *champ électrique*. L'état du champ électrique est défini par la grandeur et la direction de la force électrique en chacun de ses points. On pourra le représenter graphiquement en construisant des lignes qui soient en chaque point tangentes à la direction de la force résultante au même point. Ces lignes sont appelées *lignes de force*.

401. Potentiel électrique¹. — Supposons que la masse q' placée au point P soit positive et égale à l'unité. Si nous l'emmenons du point P à une distance infinie, les forces électriques effectueront un certain travail, positif ou négatif suivant qu'elles favoriseront ou entraveront ce déplacement. Ce travail effectué sur l'unité d'électricité positive est ce que l'on appelle le *potentiel électrique* au point P . Il est facile d'en calculer la valeur.

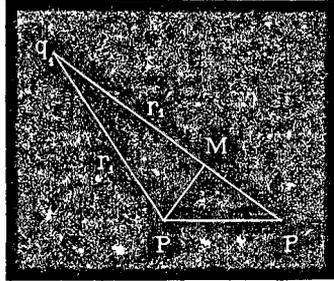


Fig. 479.

Supposons que la masse q' , placée d'abord en P , subisse un déplacement PP' très petit (fig. 479). Le travail effectué par la

¹ Le nom de *potentiel* est dû à GAUSS, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins*, Göttingen 1840, 1. Cette fonction, déjà employée par LAGRANGE et par LAPLACE, a été introduite dans les théories de l'électricité par POISSON, *Mém. de l'Institut*, 1811, 1; et par GREEN, *An essay on the application of mathematical analysis on the theories of electricity and magnetism*, Nottingham 1828. — Voyez W. THOMSON, *Reprint of papers on Electricity and Magnetism*, Londres 1872, p. 15; et DUHEM, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Paris 1891, I. — La fonction V , définie par les formules (1) et (2) ci-des-

force résultante Fq' est la somme des travaux partiels effectués par les forces élémentaires $f_1, f_2, f_3 \dots$. La force f_1 a au point P la valeur $\frac{1}{K_0} \frac{q_1 q'}{r_1^2}$ et au point P' la valeur $\frac{1}{K_0} \frac{q_1 q'}{r_1'^2}$. Ce déplacement étant très petit, r_1 est très voisin de r_1' et on peut admettre que, pendant tout le trajet PP', la masse q' a été soumise à la force moyenne $\frac{1}{K_0} \frac{q_1 q'}{r_1 r_1'}$. Le travail de cette force est égal au produit de sa valeur par la projection du chemin parcouru PP' sur la direction de la force, c'est-à-dire par P'M, qui est sensiblement égal à $r_1' - r_1$. Le travail de f_1 pendant le déplacement PP' est donc

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{K_0} q_1 q' \left(\frac{r_1' - r_1}{r_1 r_1'} \right) = \frac{1}{K_0} q_1 q' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} \right).$$

La force f_2 donne de même un travail

$$\mathcal{C}_2 = \frac{1}{K_0} q_2 q' \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'} \right)$$

et il en est de même pour les autres forces élémentaires. Le travail total des forces électriques est la somme

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \dots = \frac{1}{K_0} q' \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \dots - \frac{q_1}{r_1'} - \frac{q_2}{r_2'} \dots \right).$$

En posant pour abrégé

$$V = \frac{1}{K_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \dots \right) \quad (1)$$

$$V' = \frac{1}{K_0} \left(\frac{q_1}{r_1'} + \frac{q_2}{r_2'} \dots \right)$$

il vient

$$\mathcal{C} = q' (V - V').$$

sous, est bien celle à laquelle l'usage actuel des physiciens et des électriciens donne le nom de potentiel. Dans la notation de M. Duhem cette fonction est désignée par εV .

Faisons maintenant subir à la masse q' un second déplacement infiniment petit $P'P''$, posons

$$V'' = \frac{1}{K_0} \left(\frac{q_1}{r''_1} + \frac{q_2}{r''_2} \dots \right);$$

le travail correspondant est

$$\mathcal{C}'' = q' (V' - V'').$$

Pour un troisième déplacement $P''P'''$ nous avons de même

$$\mathcal{C}''' = q' (V'' - V''').$$

La somme de tous ces travaux \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' , \mathcal{C}''' ... est égale au travail total effectué entre la position initiale P et la position finale $P^{(n)}$; cette somme a évidemment pour valeur

$$\mathcal{C} = q' (V - V^{(n)}); \quad (2)$$

V ne dépend que de la position du point P, $V^{(n)}$ ne dépend que de la position du point $P^{(n)}$. Le travail \mathcal{C} ne dépend aucunement du chemin par lequel la masse q' s'est transportée de P en $P^{(n)}$

Si $P^{(n)}$ est à une distance infinie des masses agissantes, $r_1^{(n)}$, $r_2^{(n)}$... deviennent infinis et $V^{(n)}$ est nul. Le travail se réduit à

$$\mathcal{C} = q'V.$$

Si $q' = 1$, $\mathcal{C} = V$.

La quantité que nous avons appelée V, et qui est définie par la formule (1), représente donc le potentiel électrique au point P.

402. La formule (2) ci-dessus conduit à quelques conséquences importantes.

Si $V^{(n)} < V$, le travail \mathcal{C} sera positif ou négatif suivant que q' sera elle-même positive ou négative. Or le travail est positif

si F favorise le déplacement. L'électricité positive tend donc à se déplacer dans le sens où le potentiel décroît. L'inverse a lieu pour l'électricité négative.

Si nous considérons l'ensemble des points pour lesquels le potentiel a une même valeur a , nous trouvons qu'ils constituent une certaine surface dont l'équation est $V = a$, et que l'on appelle *surface équipotentielle* ou *surface de niveau*. En donnant à a une série de valeurs équidistantes, nous aurons une série de surfaces de niveau correspondant à des potentiels équidistants,

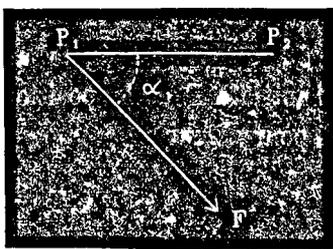


Fig. 480.

et dont la forme et la position nous représenteront commodément la distribution du potentiel dans le champ électrique. Il est clair qu'un même point, ne pouvant avoir à la fois deux potentiels différents, ne peut appartenir à deux surfaces de niveau : les surfaces de niveau ne peuvent

donc pas se couper les unes les autres.

Supposons que la masse q' passe du point P_1 , où le potentiel est V_1 , au point très voisin P_2 , où le potentiel est V_2 (fig. 480). Soit F la force résultante (qui agirait sur une masse 1), formant un angle α avec la direction du déplacement. Le travail est par définition $q'F \times \overline{P_1P_2} \cos \alpha$, et est égal, d'après ce qui précède, à $q'(V_1 - V_2)$.

On a donc

$$F \times \overline{P_1P_2} \cos \alpha = V_1 - V_2.$$

Pour tout déplacement $\overline{P_1P_2}$ contenu dans une surface de niveau, $V_1 = V_2$ et le second membre est nul ; il faut donc, pour qu'il en soit de même du premier membre, que $\cos \alpha$ soit nul, quel que soit ce déplacement, c'est-à-dire que la force résultante F soit en tout point normale aux surfaces de niveau.

Si le déplacement a lieu dans la direction de F , les points P_1 et P_2 étant pris sur deux surfaces de niveau très voisines, on a $\cos \alpha = 1$ et

$$F = \frac{V_1 - V_2}{P_1 P_2}.$$

La force F aux différents points de la surface de niveau V_1 est donc en raison inverse des distances qui, aux points considérés, séparent cette surface de la surface infiniment voisine.

Enfin si, dans un espace donné, le potentiel a une valeur constante, on aura $V_1 = V_2$ et $\mathcal{C} = 0$ pour tout déplacement contenu dans cet espace; ce n'est possible que si $F = 0$. Réciproquement, si $F = 0$ dans un certain espace, le potentiel doit y avoir la même valeur en tous points.

403. Flux de force. — Soit a un élément très petit d'une surface de niveau (fig. 481), F la force résultante en un point de cet élément. Le produit Fa est appelé le *flux de force* à travers l'élément a .

Soit une surface quelconque S coupant a , et dont la normale forme un angle ε avec F . Les lignes de force qui traversent l'élément a traversent S dans un élément dont la surface est $a' = a/\cos \varepsilon$. On peut donc écrire

$$Fa = Fa' \cos \varepsilon = F \cos \varepsilon \times a' = F_n a',$$

F_n est la composante de la force suivant la normale à a' , et $F_n a'$ est le flux de force à travers a' .

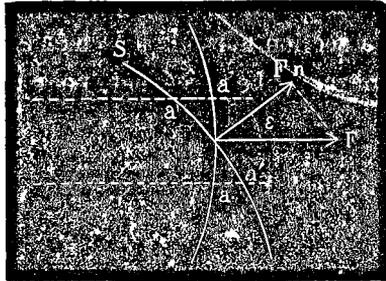


Fig. 481

404. Théorème de Gauss ¹. — Soit une masse électrique q placée à l'intérieur d'une surface fermée quelconque S , et calculons le flux total de force à travers S . Traçons autour de q une sphère de rayon r , et considérons un cône infiniment délié ayant son sommet au point q . Ce cône découpe sur la sphère un

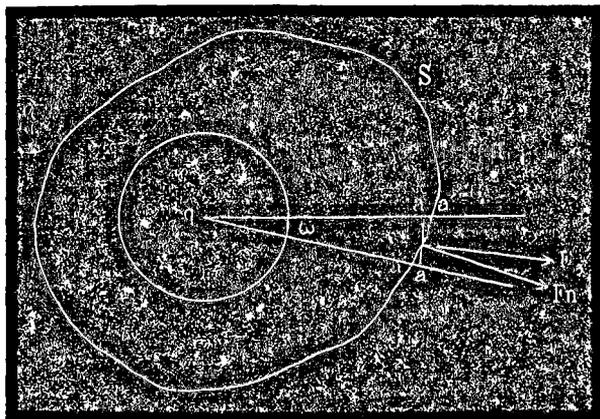


Fig. 482.

élément de surface ω , et sur S un élément a' (fig. 482). Si a est la section normale à la même distance de q , on aura, d'après le paragraphe précédent, pour le flux à travers l'élément a' ,

$$F_n a' = F a.$$

Mais $F = \frac{1}{K_0} \frac{q}{r^2}$ et $a = r^2 \omega$, donc

$$F_n a' = \frac{1}{K_0} q \omega.$$

Le flux total à travers la surface S entière s'obtiendra en faisant la somme des quantités analogues pour les différents éléments de cette surface, ce que nous pourrons écrire pour abrégé, à l'aide du symbole de sommation Σ ,

$$\Sigma F_n a' = \frac{1}{K_0} q \Sigma \omega.$$

¹ GAUSS (1813), *Œuvres*, Göttingue 1867, V, 3.

Or $\Sigma\omega$ est la surface de la sphère de rayon 1 et vaut 4π . Donc

$$\sum F_{\pi a'} = \frac{4\pi}{K_0} q.$$

Si, au lieu d'une seule masse q , nous en avons plusieurs, distribuées d'une manière quelconque dans l'intérieur de S , chacune d'elles donnerait lieu à un flux ayant la même expression. Le flux total dû à toutes ces masses, à travers une surface fermée qui les entoure, est égal au produit de $4\pi/K_0$ par leur somme algébrique.

Si cette somme est nulle, le flux total est nul également. En effet, le flux total Fa garde une valeur constante en tous points du cône dont nous nous sommes servis. Pour toute masse q

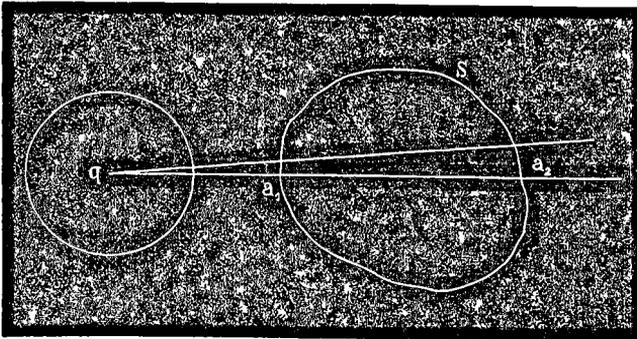


Fig. 483.

située en dehors de la surface S , le cône, ou bien ne rencontre pas celle-ci, ou bien doit y entrer en a_1 , puis en sortir en a_2 (fig. 483). Dans le premier cas, le flux qui lui correspond est nul. Dans le second cas, le flux qui entre en a_1 peut être considéré comme un flux sortant négatif; il est égal et de signe contraire au flux qui sort en a_2 : le flux total sortant est nul encore.

Le flux de force qui sort d'une surface fermée quelconque est égal au produit de $4\pi/K_0$ par la somme algébrique des masses qui sont contenues dans cette surface.

405. Tubes de force. — Soit a_1 un élément d'une surface de niveau. Par les divers points du contour de cet élément (fig. 484) menons des lignes de force. Nous décrirons ainsi une sorte de surface tubulaire ayant a_1 comme base, que l'on appelle un *tube de force*. Soit a_2 l'élément découpé par ce tube de force

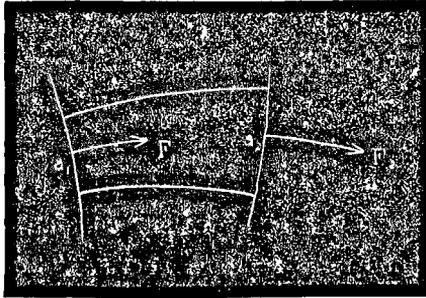


Fig. 484.

dans une seconde surface de niveau. Si nous appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée composée des deux éléments a_1 et a_2 et du tube de force qui les relie, nous aurons, en appelant F_1 la force résultante en a_1 et F_2 la force résultante en a_2 , et en remarquant que le flux de force est nul à travers les parois latérales du tube, puisque la force leur est partout parallèle,

$$- F_1 a_1 + F_2 a_2 = \frac{4\pi}{K_0} q.$$

Si la portion de tube considérée ne contient pas de masse agissante, $q = 0$ et

$$- F_1 a_1 + F_2 a_2 = 0;$$

le flux qui entre par a_1 est égal au flux qui sort par a_2 ; la force peut être assimilée à un liquide qui s'écoulerait le long du tube.

406. Équilibre des conducteurs. — Dans un corps conducteur, l'électricité est libre de se mouvoir d'un point à l'autre,

et ne peut rester en équilibre que si aucune force n'agit sur elle. Il faut donc qu'en tout point d'un conducteur en équilibre la force résultante soit nulle. Il en résulte (§ 402) que le potentiel doit y être constant et que la surface du conducteur doit être une surface de niveau.

Deux conducteurs reliés métalliquement se mettent au même potentiel. Un conducteur relié métalliquement au sol prend le potentiel de la terre, que l'on peut supposer égal à zéro¹.

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée quelconque contenue dans l'intérieur du conducteur : la force est nulle en tous les points de cette surface, le flux de force qui en sort est donc nul, et il en est de même de l'électricité qu'elle contient. La surface étant d'ailleurs absolument quelconque, il ne peut y avoir d'électricité libre à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. Si donc le conducteur est chargé, son électricité doit être répandue à sa surface; si sur un élément a de la surface il y a une quantité q d'électricité, on dira que sur cet élément la *densité superficielle* est $\sigma = q/a$.

La *capacité* électrique du conducteur, c'est-à-dire la charge qu'il faut lui donner pour élever d'une unité la valeur de son potentiel, dépend non seulement de la grandeur et de la forme de ce conducteur, mais aussi par suite de phénomènes d'influence dont nous verrons quelques cas au chapitre suivant, de la forme, de la grandeur et de la position de tous les conducteurs qui peuvent se trouver dans son voisinage.

407. Force résultante au voisinage d'un conducteur.

— Soit a (fig. 485) un élément de la surface d'un conducteur en

¹ Comme nous ne pouvons nous transporter à une distance infinie de toute masse électrique agissante, l'application de la formule 2 du § 401 ne nous fait jamais connaître que la différence entre deux potentiels. Nous pouvons, par conséquent, attribuer par convention la valeur 0 à un potentiel quelconque choisi arbitrairement, à partir duquel les autres potentiels seront mesurés.

équilibre, et σ la densité sur cet élément. En un point m infiniment voisin et extérieur à la couche électrisée, la force résultante F est normale à la surface,

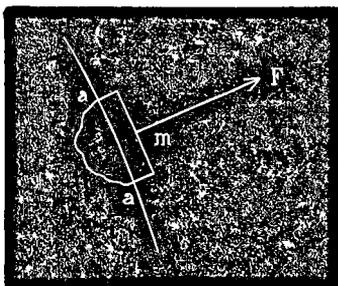


Fig. 485.

puisque celle-ci est une surface de niveau. Menons un tube de force ayant l'élément a pour base, limité extérieurement par un plan parallèle à a et passant par m , et intérieurement par une surface quelconque. En appliquant à la surface fermée ainsi définie le théorème de

Gauss, nous voyons que le flux de force est nul partout, sauf sur la section normale extérieure, où il vaut Fa . D'autre part, l'électricité contenue dans la surface vaut σa , et on a

$$Fa = \frac{4\pi}{K_0} \sigma a$$

ou

$$F = \frac{4\pi}{K_0} \sigma.$$

La force est positive ou négative, c'est-à-dire dirigée vers l'extérieur ou vers le conducteur, suivant que σ est positif ou négatif.

408. Tension électrique. — Soit S la surface d'un conducteur chargé (fig. 486) et S' une surface quelconque qui l'enveloppe. Si l'espace compris entre S et S' était rendu conducteur, l'électricité abandonnerait S pour se porter sur S' . L'électricité accumulée sur S est donc soumise à des forces qui la poussent vers l'extérieur, et qui sont neutralisées par la résistance du milieu isolant qui entoure le conducteur. Cette force exercée par l'électricité du conducteur sur le milieu isolant peut être considérée comme une pression par unité de surface; on

l'appelle la *tension électrique*. Si la tension devient trop forte, l'isolant est brisé et une décharge se produit.

Cette tension sur un élément a (fig. 487) est la résultante $f_{\sigma a}$ des actions exercées sur l'électricité σa accumulée sur l'élément par l'ensemble des autres masses électriques; tandis que la force résultante F en un point m infiniment voisin et extérieur à la surface est la somme de f , et de l'action f' due à l'électricité σa de l'élément lui-même. On a donc

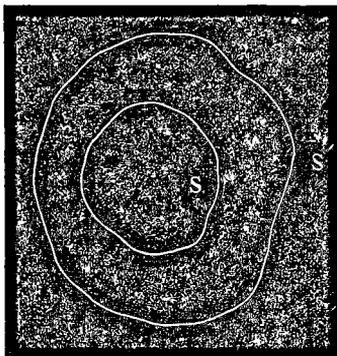


Fig. 486.

$$F = f + f' = \frac{4\pi}{K_0} \sigma.$$

D'autre part, en un point m' , infiniment voisin de m , mais intérieur au conducteur, la force résultante totale, qui est nulle, est la somme de la force f , qui est sensiblement la même qu'au point m , et de la force due à l'élément a qui est $-f'$. On a par conséquent

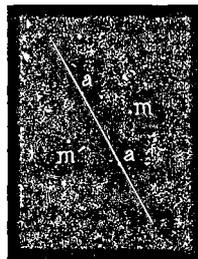


Fig. 487.

$$f - f' = 0$$

et par suite, en éliminant f' ,

$$f = \frac{2\pi\sigma}{K_0}.$$

La tension électrique qui agit sur l'élément a est

$$f_{\sigma a} = \frac{2\pi}{K_0} \sigma^2 a;$$

la tension sur l'unité de surface est donc

$$T = \frac{2\pi}{K_0} \sigma^2;$$

elle est toujours dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de σ .

409. Éléments correspondants. — Soient S et S' les surfaces de deux conducteurs, et considérons un tube de force

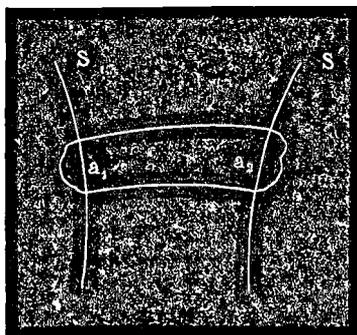


Fig. 488.

aboutissant normalement à ces surfaces et y découpant des éléments a_1 et a_2 . Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée (fig. 488) composée de ce tube de force et de deux surfaces arbitraires le fermant aux deux bouts et contenues dans les conducteurs. Le flux de force

qui sort de cette surface est nul partout, la somme algébrique des électricités contenues dans le tube est donc nulle. Si σ_1 et σ_2 sont les densités superficielles des éléments a_1 et a_2 , cette somme algébrique est

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 = 0 ;$$

les deux éléments correspondants a_1 et a_2 contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.

CHAPITRE XXVII

DE LA POLARISATION DIÉLECTRIQUE

NOTIONS GÉNÉRALES

410. Électrisation par influence. — Nous concevons dans ce qui suit l'action *élémentaire et directe* exercée par une masse électrique sur une autre comme ne dépendant absolument que de la grandeur de ces masses et de la distance qui les sépare, et aucunement de la nature du milieu dans lequel elles sont plongées. Mais cela ne veut pas dire qu'il en soit de même de la force résultante réelle, car il arrive en général que le milieu ambiant lui-même est modifié dans son état électrique par la présence des masses agissantes. Des effets d'influence se produisent, développant de nouvelles quantités d'électricités dont l'action vient se superposer à celles des masses primitivement introduites dans le champ.

Ces phénomènes d'influence sont évidents dans le cas des corps conducteurs.

Soit (fig. 489) un conducteur creux, limité extérieurement par la surface fermée S_2 , et intérieurement par la surface fermée S_1 ,

et soit q une masse électrique quelconque placée dans l'intérieur de S_1 . Traçons une surface fermée S dans la masse du conducteur entre S_1 et S_2 . Nous savons que dans un conducteur en

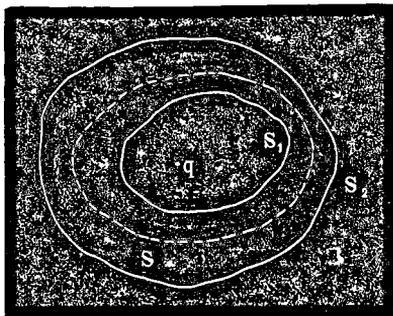


Fig. 489.

équilibre la force doit être nulle en tous points. Le flux de force à travers S est donc nul, ce qui exige que la quantité totale d'électricité contenue dans cette surface soit nulle; il faut que S contienne non seulement la masse q qui y a été mise, mais aussi une masse $-q$ qui doit y être amenée

par influence. En d'autres termes, sous l'influence de la masse q , le fluide neutre du conducteur est décomposé, une quantité d'électricité $-q$ se distribue sur la surface S_1 de manière à compenser pour tous les points extérieurs à S_1 l'action exercée directement par q ; et la quantité équivalente $+q$ se porte sur la surface extérieure S_2 , où elle se distribue comme si le conducteur était plein et ne contenait aucune électricité libre. Si le conducteur est en communication avec le sol, son potentiel devra être nul (§ 406), l'électricité amenée ainsi sur S_2 s'écou-

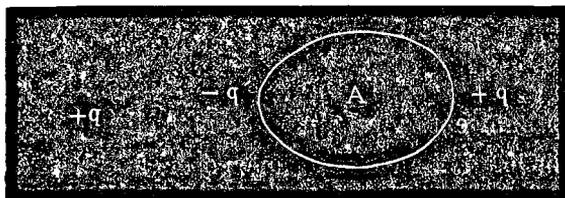


Fig. 490.

lera dans le sol, et tout se passera au dehors du conducteur comme si la masse q n'existait pas dans son intérieur.

De même (fig. 490) si nous considérons un conducteur A en

présence d'une masse électrique $+q$, l'équilibre exige qu'une quantité $-q'$ d'électricité se porte sur la surface de A qui est tournée du côté de q , une quantité $+q'$ sur la face opposée, et que ces masses s'y distribuent de telle sorte que la force résultante due à $+q$, $+q'$ et $-q'$ soit nulle partout dans l'intérieur de A. Les électricités ainsi développées par influence sont toujours égales entre elles et de signes contraires, puisqu'elles résultent de la décomposition d'une même quantité de fluide neutre. Dès que l'influence cesse, elles se recombinent et le conducteur revient à l'état neutre.

411. Influence dans les diélectriques. — On doit admettre que des phénomènes d'influence analogues se produisent aussi dans la plupart des corps isolants (ou *diélectriques*) et peut-être dans tous. Seulement les électricités ainsi développées ne peuvent se transporter d'un point à l'autre du corps influencé, et doivent rester en place; on peut admettre que l'influence se produit dans chaque élément infiniment petit du diélectrique. Celui-ci se trouve alors dans un état spécial que l'on exprime en disant qu'il est *polarisé*.

On peut d'ailleurs, sans sortir de l'hypothèse des actions à distance, concevoir de diverses manières la production de cet état¹.

¹ FARADAY, dès 1837, a insisté sur le rôle joué par les milieux isolants dans la transmission des actions électriques, *Experimental Researches on Electricity*, Londres 1839, séries XI et XIV. La théorie de la polarisation a été établie par POISSON pour l'aimantation par influence des corps isotropes et appliquée par Sir W. THOMSON aux corps cristallisés. — MOSSOTTI, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1847, VI, 193, 357; HELMHOLTZ, *J. de Borchardt*, 1870, LXXII, 114, et *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig 1882, I, 611; BOLZMANN, *Sitzb. Akad. Wien*, 1873, LXVII, 67; CLAUSIUS, *Wärmetheorie*, Brunswick 1879, II, 62; POINCARÉ, *Électricité et Optique*, Paris 1890, I, 41; II, 83; DUHÉM, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Paris 1892, II, ont développé cette théorie de diverses manières en l'appliquant à l'influence électrique.

On peut supposer que le diélectrique est formé de particules conductrices réparties dans un milieu isolant et dont chacune s'électrise par influence comme un conducteur ordinaire.

On peut supposer que des particules très petites répandues dans le diélectrique sont par elles-mêmes électrisées en sens contraire aux deux extrémités d'un de leurs diamètres, mais possèdent à l'état naturel toutes les orientations possibles, de sorte que leurs actions extérieures se compensent. L'effet du champ électrique serait simplement de les orienter plus ou moins complètement.

On peut admettre aussi que les deux électricités sont uniformément répandues et superposées dans toute l'étendue du diélectrique, mais y sont retenues à leur place par des forces analogues à des forces élastiques, que l'on peut appeler, pour abrégé, *forces élastiques fictives*; sous l'influence d'une force extérieure, ces électricités se déplacent en sens inverses, jusqu'à ce que leurs actions réciproques, jointes aux forces élastiques développées par leur déplacement, fassent équilibre à la force extérieure.

Cette dernière hypothèse est celle que nous adopterons, parce qu'elle permet de calculer très simplement les quelques formules dont nous avons besoin. Elle est d'ailleurs absolument équivalente aux deux autres, et toute base nous manque pour juger de son plus ou moins grand degré de probabilité; les fluides et les forces électriques ne sont pour nous que des mots derrière lesquels se cache un phénomène parfaitement inconnu. Nous admettrons donc, avec Sir W. Thomson et M. de Helmholtz, que l'influence s'exerce dans chaque élément de volume du diélectrique à peu près comme dans un conducteur, mais avec une intensité moindre, dépendant de la nature du diélectrique.

412. Intensité d'électrisation ou moment diélectri-

que. — Soient $acdb$, $bdd'b'$... (fig. 491) des éléments de volume contigus. Sous l'action d'une force résultante ayant par exemple la direction de la flèche F , la surface bd de l'élément $acdb$ se charge d'une couche d'électricité positive ayant une densité e , et la surface ac d'une couche égale d'électricité négative. Nous donnerons à la densité e le nom d'intensité d'électrisation ou simplement de polarisation; elle est définie par sa grandeur et par la direction dans laquelle se produit l'in-

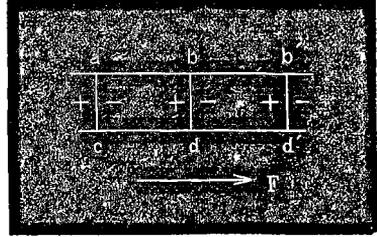


Fig. 491.

fluence. On peut donc représenter la polarisation par une droite ayant une grandeur et une direction déterminées, et la regarder comme la résultante de trois polarisations e_x , e_y , e_z dirigées suivant trois axes de coordonnées rectangulaires.

On donne le nom de *moment diélectrique* de l'élément $abcd$ au demi-produit des électricités développées sur ses deux faces opposées par la distance de ces deux faces. Ce moment a donc pour valeur $e \times ab \times \text{surface } ca$, ou ev , en remarquant que $ab \times \text{surface } ca$ est égal au volume v de l'élément. L'intensité d'électrisation e représente donc le moment diélectrique de l'unité de volume.

En général, l'intensité d'électrisation varie en grandeur et en direction lorsqu'on passe d'un point à l'autre du diélectrique; mais lorsque, ainsi que nous le supposons ici, elle résulte d'un phénomène d'influence se produisant dans un diélectrique homogène, on trouve qu'un élément plan tel que bd reçoit sur ses deux faces, par suite de la polarisation des éléments de volume adjacents, des quantités égales d'électricités de signe contraire, et ne peut exercer aucune action extérieure; il n'y a donc pas d'électricité libre à l'intérieur du diélectrique. Mais il y en a sur la surface

qui le limite. Soient en effet (fig. 492) aa' un élément de cette surface, da la direction de l'électrisation, et $adca'$ un élément

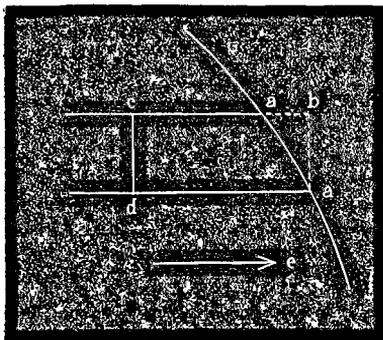


Fig. 492.

de volume du diélectrique. Une quantité $+e \times$ surface ab se porte sur l'élément de surface aa' et s'y répand avec une densité $e \times ab/aa' = e \cos \theta$, θ désignant l'angle compris entre la direction de l'électrisation et la normale extérieure à la surface du diélectrique. Cette couche (*couche fictive*) sera positive

ou négative suivant que e sera dirigée vers l'extérieur ou vers l'intérieur.

413. Coefficient d'électrisation ou susceptibilité électrique. — Si le diélectrique est isotrope, il est évident, par raison de symétrie, que l'intensité d'électrisation e est parallèle à la force résultante F . Quel que soit d'ailleurs le mécanisme qui lui donne naissance, on peut considérer e comme proportionnel à F , au moins tant que celle-ci ne dépasse pas une certaine valeur. Nous mettrons cette proportionnalité sous la forme

$$e = K_0 \varepsilon F.$$

Le *coefficient d'électrisation* ou *susceptibilité électrique* ε ainsi défini dépend seulement de la nature du diélectrique. Il serait facile de montrer que c'est un simple nombre ne dépendant pas des unités choisies. K_0 représente toujours la constante de la formule de Coulomb (§ 399).

Quant à F , c'est la résultante totale des actions ψ exercées par les masses électriques réellement introduites dans le champ, et des actions φ exercées par l'électricité développée par influence.

414. Constante diélectrique. — Si l'on poursuit les conséquences de cette hypothèse, on arrive d'abord au théorème fondamental que voici :

Quand deux masses électriques q et q_1 sont placées dans un milieu diélectrique polarisable, de susceptibilité ε , leur action réciproque, toujours dirigée suivant la droite qui les joint, et variant toujours en raison inverse du carré de leur distance r , se trouve réduite dans le rapport de $1 + 4\pi\varepsilon$ à 1 par suite de la polarisation du diélectrique, et a pour expression

$$f = \frac{1}{K_0(1 + 4\pi\varepsilon)} \frac{qq_1}{r^2},$$

que l'on peut écrire

$$f = \frac{1}{K} \frac{qq_1}{r^2}$$

en posant pour abrégé

$$K = K_0(1 + 4\pi\varepsilon).$$

Cette quantité K est appelée *constante diélectrique* ou *pouvoir inducteur spécifique* ou, encore, *perméabilité électrique* du milieu isolant polarisable. K_0 pourrait être appelée par analogie la constante diélectrique d'un milieu isolant non polarisable.

Nous donnerons une démonstration élémentaire de ce théorème dans les paragraphes qui suivent.

*** 415. Force résultante produite par une masse électrique unique dans un diélectrique isotrope polarisable.** — Une masse q d'électricité positive produit, en un point P situé à une distance r , une force résultante (§ 400)

$$\psi = \frac{1}{K_0} \frac{q}{r^2}$$

dirigée vers l'extérieur. Cette force ψ est celle qui agirait sur une masse positive égale à l'unité, si l'on pouvait amener cette

masse au point P sans modifier l'état du champ. Que devient cette force si le milieu à travers lequel elle agit est un diélectrique polarisable isotrope ?

Nous rappellerons d'abord que, d'après un théorème démontré dans tous les Traités de Physique, une couche sphérique homogène dont chaque élément agit proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de la distance, exerce sur un point extérieur la même force résultante que si elle était tout entière concentrée en son centre, et exerce sur un point intérieur une force nulle. Une sphère homogène, ou composée de couches homogènes, agit donc sur un point extérieur comme si toute sa masse était concentrée en son centre, tandis que son action sur un point intérieur situé à une distance a du centre se réduit à l'action d'une sphère de rayon a .

Traçons (fig. 493) autour de notre masse électrique q une

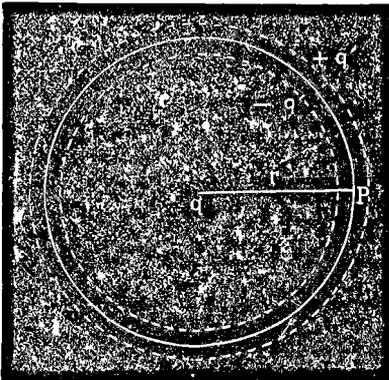


Fig. 493.

sphère de rayon r . Par raison de symétrie, la polarisation du diélectrique est partout dirigée suivant le rayon. Elle ne crée ni ne détruit aucune masse électrique ; son effet est seulement de faire pénétrer dans la sphère une certaine quantité d'électricité négative $-q'$, et d'en faire sortir la quantité correspon-

dante d'électricité positive. La distribution, quelle qu'elle soit, qui en résulte, peut, tout étant symétrique autour de q , être représentée par les deux couches sphériques homogènes $+q'$ et $-q'$. La première, étant extérieure au point P, y produit une force nulle. Au contraire, la couche sphérique $-q'$, intérieure à P,

agit sur ce point comme si elle était concentrée au centre, et exerce une force

$$\varphi = -\frac{1}{K_0} \frac{q'}{r^2}$$

qui s'ajoute à la force exercée directement par q pour donner la force résultante

$$F = \psi + \varphi.$$

Or, à travers chaque unité de surface de la sphère de rayon r , il a pénétré une quantité d'électricité qui est

$$-e = -K_0 \epsilon F,$$

ce qui donne pour la sphère entière

$$-q' = -4\pi r^2 \times K_0 \epsilon F.$$

On en déduit

$$\varphi = -\frac{1}{K_0} \frac{q'}{r^2} = -4\pi \epsilon F = -4\pi \epsilon (\psi + \varphi),$$

d'où l'on tire successivement

$$\begin{aligned} \varphi (1 + 4\pi \epsilon) &= -4\pi \epsilon \psi \\ F = \psi + \varphi &= \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon} \psi = \frac{1}{K_0 (1 + 4\pi \epsilon)} \frac{q}{r^2} \end{aligned}$$

et

$$\frac{F}{\psi} = \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon}.$$

La force résultante est donc réduite par la polarisation du diélectrique dans le rapport de $(1 + 4\pi \epsilon)$ à 1. Il entre et il sort par une surface sphérique quelconque décrite autour de q une même quantité

$$\mp q' = \mp \frac{4\pi \epsilon}{1 + 4\pi \epsilon} q.$$

Il n'y a donc pas d'électricité libre dans le diélectrique. La couche $+q'$ de la figure 493 est repoussée à l'infini; la masse positive q attire autour d'elle¹ la couche négative $-q'$, et agit réellement dans le milieu polarisable comme une masse $q - q'$, ou, d'après le calcul qui précède, comme une masse $q/(1 + 4\pi\epsilon)$ agirait dans un milieu non polarisable; elle y produit une force résultante

$$F = \frac{1}{K_0(1 + 4\pi\epsilon)} \frac{q}{r^2}.$$

*** 416. Action réciproque de deux masses électriques dans un diélectrique isotrope polarisable.** — Si au point P nous plaçons une masse q_1 , l'action réciproque de q et q_1 s'obtient en multipliant la force résultante par q_1 et a pour expression qq_1/Kr^2 .

Ce résultat est juste, mais le procédé que nous venons d'employer est discutable. Quand nous introduisons la masse q_1 dans le champ, elle attire immédiatement autour d'elle une masse de signe contraire q'_1 et agit dès lors comme une masse $q_1 - q'_1$ ou $q_1/(1 + 4\pi\epsilon)$. Il semble donc, au moins dans le mode de représentation que nous avons adopté, que nous ayons en présence l'une de l'autre deux masses réduites $q/(1 + 4\pi\epsilon)$ et $q_1/(1 + 4\pi\epsilon)$, et que l'action réciproque doive être $qq_1/K_0(1 + 4\pi\epsilon)^2 r^2$. Mais nous ne devons pas oublier que dans ce mode de représentation les forces électriques ne suffisent pas à elles seules à établir l'équilibre du milieu. Chaque élément de volume se polarise moins qu'il ne le ferait s'il était conducteur. S'il était conducteur, la polarisation irait jusqu'à supprimer la force résultante dans son intérieur: c'est là ce qui se passerait si l'équilibre avait lieu sous l'action des forces électriques seules. En introduisant la susceptibilité ϵ , et en admettant que la polarisation s'effectue

¹ HELMHOLTZ, loc. cit.

dans des éléments de volume contigus et remplissant tout le diélectrique, nous supposons implicitement l'existence dans celui-ci de forces élastiques fictives (§ 411) qui tendent à ramener les électricités de noms contraires séparées par l'influence, et s'ajoutent aux actions réciproques de ces électricités pour équilibrer le champ extérieur.

Dans le cas particulier qui nous occupe, le système de la masse q_1 et de la masse q'_1 , dont elle s'enveloppe en polarisant le milieu, est soumis à la fois à des forces électriques et à des forces élastiques fictives, qui sont : 1° l'action électrique de la masse $q - q'$ sur q_1 ; 2° l'action électrique de la masse électrique $q - q'$ sur q'_1 ; 3° les actions électriques mutuelles des masses q_1 et q'_1 ; 4° et 5° les forces élastiques développées par la polarisation et que nous pouvons décomposer en deux parties, dont l'une équilibre les forces 3, et dont l'autre équilibre les forces 2 ci-dessus. Les forces 3 et 4 sont des forces internes du système $q_1 - q'_1$, et ne peuvent contribuer à le déplacer; les forces 2 sont équilibrées par les forces 5; il ne reste que l'action de $q - q'$ sur q_1 , c'est-à-dire $(q - q') q_1 / K_0 r^2$ ou qq_1 / Kr^2 .

* 417. Nous arrivons à la même expression par une voie plus sûre et plus générale, quoique peut-être un peu moins élémentaire, en observant que la force f qui agit entre les deux masses est, en signe contraire, la dérivée par rapport à r de l'énergie potentielle du système électrisé¹. Cette énergie W

¹ Ce dernier mode de calcul serait le seul légitime si nous nous placions dans l'hypothèse de Poisson-Mossotti-Clausius, d'après laquelle le diélectrique serait formé de particules conductrices disséminées dans un isolant parfait. La constante diélectrique dépend alors du volume relatif, de la forme et de la disposition de ces particules. Un déplacement des points électrisés ne peut pas se faire sans entraîner en même temps une modification du milieu dont il faudrait tenir compte dans le calcul de leur action réciproque. POINCARÉ, *Électricité et Optique*, Paris, 1891, II, 105. Dans l'étude d'un système mécanique aussi complexe, il faut recourir au calcul de l'énergie potentielle. Si les masses élec-

représente en effet le travail maximum qui peut être effectué par un déplacement des masses q et q_1 . Supposons q et q_1 positives; si leur distance augmente de dr , le travail effectué fdr est égal à la diminution $-dW$ de l'énergie potentielle, et l'on a par conséquent

$$f = - \frac{dW}{dr} .$$

Nous pouvons nous représenter les masses q et q_1 fixées en couches uniformes sur des sphères, de centres P et P₁, et de très petits rayons ρ et ρ_1 , qui se trouvent ainsi portées à des potentiels V et V_1 ; et nous pouvons admettre que l'on a chargé ces sphères en les mettant momentanément en communication avec deux sources d'électricité convenables qui leur ont fourni les quantités q et q_1 en élevant graduellement leurs potentiels. L'énergie du système électrisé est égale au travail effectué par les sources pendant la charge.

Le potentiel d'un conducteur s'élève graduellement à mesure qu'on le charge; si à un certain moment sa valeur est V' , il faut, pour lui donner un petit accroissement dV' , amener du sol sur le conducteur une petite masse électrique dq . Ce transport exige (§ 401, formule 2) un travail $V'dq$ que nous pouvons écrire $CV'dV'$ en appelant C la capacité du conducteur (§ 406). En intégrant cette expression de 0 à V , nous obtenons le travail total fourni pour porter le conducteur du potentiel 0 au potentiel V , et nous avons

$$\int_0^V CV'dV' = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV .$$

triques sont plongées dans un diélectrique fluide, les modifications que subit celui-ci pendant leur déplacement doivent être telles que la constante diélectrique garde la même valeur; on doit donc dériver W par rapport à r en laissant K constant, et l'on trouve toujours la même expression.

En appliquant cette formule à nos deux conducteurs, nous trouvons que leur énergie potentielle est égale à

$$W = \frac{1}{2} qV + \frac{1}{2} q_1 V_1.$$

La polarisation du diélectrique n'entre pas explicitement dans cette expression; le diélectrique, en effet, ne reçoit pas d'électricité des sources; dans chacun de ses éléments de volume, il se produit seulement un phénomène d'influence. Supposons pour un instant qu'un de ces éléments de volume fût un petit conducteur, cet élément serait (§ 410) chargé de masses égales et de signes contraires donnant une somme algébrique nulle, et le potentiel serait le même en tous ses points (§ 406). Son énergie potentielle $\frac{1}{2} qV$ serait donc nulle. Dans le cas du diélectrique, il en est de même; dans l'élément de volume polarisé, des masses égales d'électricités positive et négative se trouvent *en équilibre* sous l'action simultanée des forces électriques et des forces élastiques fictives. Elles sont donc, à cet égard, dans les mêmes conditions que dans un conducteur, la variation d'énergie potentielle qui se produirait dans l'élément sous l'action des forces électriques est exactement compensée par celle qui résulte des forces élastiques. La polarisation du diélectrique n'intervient qu'indirectement dans l'expression de W en modifiant la capacité des conducteurs en présence.

Dans le diélectrique polarisé, la petite sphère de centre P porte la charge q qui lui a été fournie par la source et attire autour d'elle une charge $-q'$. La sphère de centre P_1 porte de même une charge $q_1 - q'_1$. Le potentiel en P , dû aux masses $q, -q', q_1$ et $-q'_1$, est donc (§ 401, formule 1)

$$V = \frac{q - q'}{K_0 \rho} + \frac{q_1 - q'_1}{K_0 r} = \frac{q}{K_0 \rho} + \frac{q_1}{K_0 r}.$$

Le potentiel en P_1 est de même

$$V_1 = \frac{q - q'}{K_0 r} + \frac{q_1 - q'_1}{K_0 \rho_1} = \frac{q}{K_0 r} + \frac{q_1}{K_0 \rho_1}.$$

La force f est, en signe contraire, la dérivée de W par rapport à r . Comme les charges q et q_1 sont supposées ne pas varier pendant le déplacement, on a

$$f = - \frac{dW}{dr} = - \frac{1}{2} q \frac{dV}{dr} - \frac{1}{2} q_1 \frac{dV_1}{dr}.$$

Les expressions ci-dessus donnent d'ailleurs, dans la même supposition,

$$\frac{dV}{dr} = - \frac{q_1}{Kr^2}; \quad \frac{dV_1}{dr} = - \frac{q}{Kr^2};$$

et l'on a par conséquent

$$f = \frac{1}{2} \frac{qq_1}{Kr^2} + \frac{1}{2} \frac{qq_1}{Kr^2} = \frac{qq_1}{Kr^2},$$

ce qui est bien la valeur trouvée plus haut.

CONDENSATEURS PLANS

418. Condensateur plan à diélectrique isotrope non polarisable. — Supposons (fig. 494) un système formé de

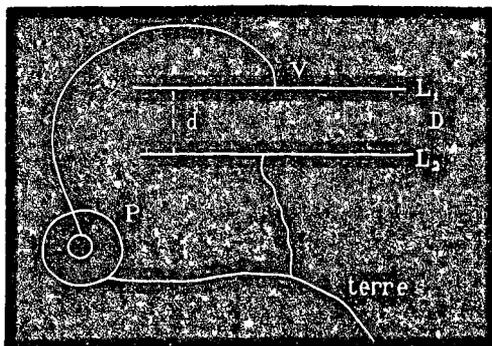


Fig. 494.

deux lames ou armatures métalliques L_1 et L_2 planes et paral-

lèles, de dimensions indéfinies, ou du moins assez considérables pour que l'on puisse négliger l'influence de leurs bords. L'espace qui les sépare, d'épaisseur d , est rempli par un diélectrique D que nous supposons d'abord non polarisable. Une pile P maintient sur l'armature L_1 un potentiel constant V , l'autre pôle de la pile est en communication avec le sol, ainsi que l'armature L_2 , dont le potentiel reste par conséquent égal à zéro.

Dans le diélectrique D , les surfaces équipotentielles sont par raison de symétrie des plans parallèles aux armatures. La force résultante est partout normale à celles-ci, et a partout pour valeur (§ 402)

$$F = \frac{V}{d}.$$

Les deux armatures sont chargées de couches électriques de signes contraires et de même densité σ_0 (§ 409), et l'on a (§ 407)

$$F = \frac{4\pi}{K_0} \sigma_0,$$

d'où

$$\sigma_0 = \frac{K_0 V}{4\pi d}.$$

La quantité

$$C_0 = \sigma_0/V = K_0/4\pi d$$

est la capacité du condensateur par unité de surface, c'est-à-dire la charge qu'il doit recevoir pour que la lame L_1 prenne un potentiel égal à 1.

419. Condensateur plan à diélectrique isotrope polarisable. — Si le milieu D est polarisable, une couche d'électricité négative de densité $-e$ est attiré vers la lame L_1 , et la couche correspondante positive est refoulée vers la lame L_2 . La force résultante est toujours

$$F = \frac{V}{d},$$

mais F est cette fois la somme de la force

$$\psi = \frac{4\pi\sigma}{K_0}$$

que l'électricité de l'armature exercerait seule, et de la force

$$\varphi = - \frac{4\pi e}{K_1}$$

que la couche superficielle du diélectrique exercerait si elle était seule sur la surface métallique. Si d'ailleurs ϵ est le coefficient d'électrisation du diélectrique, on a par définition

$$e = K_0\epsilon F.$$

On peut donc écrire

$$F = \psi + \varphi = \frac{4\pi}{K_0}\sigma - \frac{4\pi}{K_0}e = \frac{4\pi}{K_0}\sigma - 4\pi\epsilon F,$$

d'où l'on tire

$$\sigma = \frac{K_0(1+4\pi\epsilon)}{4\pi} F = \frac{KV}{4\pi d}.$$

La capacité par unité de surface est

$$C = \frac{\sigma}{V} = \frac{K}{4\pi d}.$$

On voit que la capacité d'un condensateur plan est, pour une même distance entre ses armatures, proportionnelle à la constante diélectrique de son isolant¹.

420. Condensateur plan à diélectrique anisotrope.
— Si le diélectrique qui sépare les deux armatures est une lame à faces parallèles taillée dans un cristal, la capacité du

¹ FARADAY, *Exper. Researches*, Série XI (1837); — CAVENDISH, *Elect. Researches* (1771-1781), Cambridge 1879.

condensateur peut encore être représentée par une expression de la forme

$$C = \frac{K_n V}{4\pi d},$$

mais la quantité K_n , qui joue le rôle de constante diélectrique, varie pour un même cristal avec l'orientation de la lame. Des calculs très simples, quoique relativement un peu longs, qui seront développés plus loin (§§ 424 à 427), conduisent aux résultats suivants :

La quantité K_n , qui entre dans la formule du condensateur, est, pour chaque orientation de la lame cristallisée qui constitue celui-ci, l'inverse du carré du rayon vecteur, mené normalement à cette lame, d'un certain ellipsoïde, appelé ellipsoïde inverse d'induction. Les axes principaux de cet ellipsoïde sont appelés axes d'induction ou axes de polarisation. Si on les choisit comme axes de coordonnées, l'équation de l'ellipsoïde d'induction prend la forme

$$K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2 = 1$$

et si la normale au condensateur forme avec les axes des angles α, β, γ , on a

$$K_n = K_x \cos^2 \alpha + K_y \cos^2 \beta + K_z \cos^2 \gamma.$$

En particulier, K_n prend la valeur K_x, K_y ou K_z lorsque la lame cristallisée est taillée perpendiculairement à l'axe des X, des Y ou des Z.

Les coefficients K_x, K_y, K_z sont les trois *constantes diélectriques principales* du cristal.

421. Rôle de la symétrie cristalline. — Le fonctionnement du condensateur est déterminé pour chaque cristal par la forme et la position de l'ellipsoïde inverse d'induction, qui

est lié à la symétrie cristallographique d'après les règles que nous avons déjà si souvent appliquées.

Il a une forme et une orientation quelconques dans le système triclinique; l'un de ses axes principaux coïncide avec l'axe de symétrie dans le système clinorhombique. Les trois axes de polarisation coïncident avec les trois axes de symétrie dans le prisme rhomboïdal droit. Dans les cristaux carrés et hexagonaux, l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe principal. Dans les cristaux cubiques, comme dans les corps isotropes, il se réduit à une sphère, il n'y a plus qu'une seule constante diélectrique K .

422. Charge et décharge du condensateur. — Si le milieu D est un isolant parfait, la charge des armatures et la polarisation de D s'établiront dans un temps inappréciable, et le condensateur séparé de la pile restera indéfiniment chargé. Si, après l'avoir chargé, on relie les deux armatures par un arc conducteur, il revient à l'état neutre et la polarisation du milieu D cesse instantanément et complètement.

En réalité, les phénomènes sont, dans la plupart des cas, un peu plus compliqués. M. Curie¹ les résume de la manière suivante :

1° Lorsqu'on établit le contact de L_1 avec la pile, il se produit une charge brusque et instantanée du condensateur.

2° Les fils de communication sont parcourus par un courant de charge, dont l'intensité décroît plus ou moins rapidement avec le temps. Ce courant peut finir par s'éteindre complètement, c'est le cas général; ou par acquérir une valeur constante, c'est un cas beaucoup plus rare.

3° Lorsqu'on décharge, il se produit une décharge instanta-

¹ J. CURIE, *Ann. de Chim.* 1889, XVII, 385; — BOUTY, *ibid.* 1891, XXIV, 395.

née égale à la charge instantanée, et un courant de décharge dont l'intensité décroît rapidement et finit par s'éteindre.

Les choses se passent donc comme si le diélectrique possédait à la fois une certaine conductibilité, la propriété de se polariser, et celle d'absorber peu à peu l'électricité pour la rendre lorsque la force électromotrice a disparu.

Cette absorption apparente peut d'ailleurs s'expliquer de diverses manières¹. On peut supposer que, soit par suite d'un manque d'homogénéité du milieu, soit par suite de phénomènes analogues à ceux qui sont connus parmi les propriétés des corps solides sous le nom d'élasticité résiduelle, la polarisation n'atteint pas instantanément sa valeur définitive, et ne disparaît pas complètement à l'instant de la décharge. La densité σ , et par suite le mouvement de l'électricité dans le fil conducteur, devra, d'après les formules ci-dessus, présenter le même caractère. Dans cette manière de concevoir les choses, le courant qui provient de la conductibilité vraie du diélectrique s'ajoute au courant de charge et subsiste seul quand la polarisation est complète.

On peut admettre aussi que le passage du courant à travers le diélectrique fait naître, peut-être par suite d'une action chimique, une force électromotrice inverse qui va croissant jusqu'à une certaine valeur et qui affaiblit ou arrête le courant. La polarisation diélectrique produirait alors la charge instantanée, et la conductibilité vraie du milieu correspondrait au courant initial.

423. Recherches de M. J. Curie². — Les propriétés des condensateurs plans ont été utilisées par M. J. Curie pour la

¹ J.-C. MAXWELL, *A treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford 1873, I, 374; — BOLTZMANN, *Sitzb. Akad. Wien*, 1873, LXVIII, 82; — CLAUSIUS, *Mech. Wärmetheorie*, Brunswick 1879, II, 102; — ROWLAND, *Amer. J. of Math.* 1878, I, 53; *Beibl.* 1878, II, 568; — J. CURIE, loc. cit.

² J. CURIE, *Ann. de Chim.* 1889, XVII, 385; XVIII, 203.

détermination des constantes diélectriques d'un certain nombre de substances cristallisées. Les condensateurs plans étaient formés de lames à faces parallèles taillées dans les cristaux à étudier; ces lames étaient argentées chimiquement, ou recouvertes de papier d'étain sur leurs deux faces, en ayant soin que les deux armatures ainsi obtenues restassent isolées l'une de l'autre.

La formule que nous avons énoncée au § 420 suppose que la lame plane est indéfinie, ce qui n'est naturellement pas réalisable. Dans le cas des cristaux, on ne peut même pas obtenir des lames assez étendues pour que les effets perturbateurs dus à l'influence des bords soient négligeables. Aussi M. Curie faisait-il usage d'un artifice imaginé par Sir W. Thomson. Sur l'armature L_2 on traçait, à l'aide d'une pointe d'aiguille, des traits isolant une partie centrale de surface S facilement mesurable. Au moment où l'on établit l'équilibre du condensateur, on fait en sorte que cette partie centrale soit au même potentiel 0 que la portion annulaire dite *anneau de garde* qui l'entoure; elle se comporte alors très sensiblement comme si elle faisait partie d'une armature indéfinie, et se charge d'une quantité d'électricité $S\sigma$, σ étant la densité donnée par la formule

$$\sigma = \frac{KV}{4\pi d}.$$

Il suffit alors de mesurer cette charge, le potentiel V de l'armature L_1 , et l'épaisseur d de la lame pour pouvoir déduire K .

Il est avantageux de se dispenser de la mesure de V , et de se borner à comparer le condensateur en expérience à un condensateur étalon formé avec un diélectrique connu ayant un pouvoir inducteur K' ; on donnera à V la même valeur dans les deux mesures, et l'on aura, entre K et K' , les épaisseurs d et d' des deux condensateurs, et les densités σ et σ' obtenues, la relation

$$\frac{K}{K'} = \frac{\sigma d}{\sigma' d'}.$$

M. Curie se servait, pour cette comparaison, d'un condensateur à lame d'air, formé de deux lames de verre argentées avec un anneau de garde sur leurs faces en regard, et séparées par de petites cales bien isolantes d'épaisseur connue. Le rapport K/K' est alors la constante diélectrique du cristal étudié par rapport à l'air, ou *constante diélectrique relative*.

Les mesures se faisaient de la manière suivante. L'armature L_2 et son anneau de garde étaient mis en communication avec le sol, et l'armature L_1 était liée au pôle positif d'une pile P dont l'autre pôle était au sol. L'armature L_2 était en outre reliée par un fil métallique avec un électromètre sensible. Après un temps de charge variable à volonté, on rompait la communication entre L_1 et la pile, entre L_2 et le sol; et on reliait L_1 au sol. Le potentiel de L_1 devenait nul; L_2 restait chargé de la couche $S\sigma$ négative amenée pendant la charge, et prenait un potentiel négatif qui était accusé par l'électromètre. On ramenait enfin l'électromètre au zéro en fournissant à L_2 , à l'aide d'un appareil spécial, dit *quartz piézoélectrique*, que nous décrirons dans un autre chapitre, une quantité mesurée $S\sigma$ d'électricité positive.

Les diverses opérations se faisaient d'ailleurs automatiquement en temps voulu, à l'aide d'un dispositif mécanique convenable permettant d'opérer très rapidement. En faisant varier le temps de charge, on pouvait, par le même procédé, étudier la marche des phénomènes de conductibilité et d'absorption apparente signalés au § 422.

Nous donnerons à la fin de ce chapitre les principaux résultats de M. Curie¹.

¹ Des méthodes fondées également sur l'emploi des condensateurs plans ont été appliquées par M. F. BRAUN, *Wied. Ann.* 1887, XXXI, 855, à l'étude du sel gemme, par M. KLEMENCIC, *Sitzb. Akad. Wien.* 1887, XCVI, 807, et par M. BOUTY, *Ann. de Chim.* 1891, XXIV, 314, à celle du mica.

* 424. Théorie du condensateur plan à diélectrique anisotrope. — Nous supposons une lame cristallisée d'orientation quelconque, dont les deux faces parallèles, très étendues relativement à leur distance, portent les armatures L_1 et L_2 , maintenues aux potentiels V et 0 . La lame étant homogène et d'épaisseur uniforme, tous les points des armatures qui ne sont pas trop près des bords sont dans des conditions identiques; comme dans le cas d'un diélectrique isotrope, l'électricité se distribue avec une densité uniforme $\pm \sigma$; la polarisation de la lame cristalline amène contre chaque armature une couche de signe contraire ayant également une densité uniforme $\mp e_n$; les surfaces équipotentielles sont toujours des plans parallèles aux armatures, la force résultante F est toujours normale à celles-ci, et a partout la même valeur

$$F = \frac{V}{d};$$

F est d'ailleurs la somme algébrique des forces

$$\psi = \frac{4\pi}{K_0} \sigma, \quad \text{et} \quad \varphi = - \frac{4\pi}{K_0} e_n$$

exercées par la couche σ de l'armature, et par la couche superficielle e_n du diélectrique.

Mais la polarisation e du milieu cristallisé dépend de sa constitution, et n'est plus nécessairement parallèle à la direction de la force résultante. Comme d'ailleurs e doit être nul en même temps que F , l'hypothèse la plus simple que nous puissions faire est de supposer que ses composantes e_x, e_y, e_z suivant trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques sont des fonctions linéaires des composantes F_x, F_y, F_z de la force, ce que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} e_x &= K_0 (a_1 F_x + c_3 F_y + b_2 F_z) \\ e_y &= K_0 (b_3 F_x + a_2 F_y + c_1 F_z) \\ e_z &= K_0 (c_2 F_x + b_1 F_y + a_3 F_z) \end{aligned} \quad (1)$$

* 425. Or la densité superficielle e_n est (§ 412) la projection de l'intensité d'électrisation e sur la normale aux armatures, c'est-à-dire sur la direction de F ; si cette normale forme avec les axes de coordonnées des angles α , β , γ , on a

$$e_n = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma$$

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta; \quad F_z = F \cos \gamma$$

et les formules ci-dessus, multipliées respectivement par $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ et additionnées, donnent

$$e_n = \frac{K_0}{R^3} F, \quad (2)$$

en posant pour abrégé

$$\frac{1}{R^3} = a_1 \cos^2 \alpha + a_2 \cos^2 \beta + a_3 \cos^2 \gamma$$

$$+ (b_3 + c_3) \cos \alpha \cos \beta + (b_2 + c_2) \cos \alpha \cos \gamma$$

$$+ (b_1 + c_1) \cos \beta \cos \gamma;$$

R est le rayon vecteur, parallèle à la direction (α, β, γ) , de l'ellipsoïde

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + (b_3 + c_3) xy + (b_2 + c_2) xz + (b_1 + c_1) yz = 1.$$

Si l'on choisit les axes principaux de cet ellipsoïde comme axes de coordonnées, son équation peut s'écrire

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1; \quad (3)$$

les expressions (1) prennent la forme

$$e_x = K_0 (\varepsilon_x F_x - \lambda_x F_y + \lambda_y F_z)$$

$$e_y = K_0 (\lambda_x F_x + \varepsilon_y F_y - \lambda_y F_z)$$

$$e_z = K_0 (-\lambda_y F_x + \lambda_x F_y + \varepsilon_z F_z)$$

et ne dépendent plus que de six coefficients désignés par ε_x , ε_y , ε_z , λ_x , λ_y et λ_z .

Ces axes particuliers de coordonnées sont appelés les *axes*

de polarisation. L'ellipsoïde (3) peut être appelé *ellipsoïde inverse d'électrisation*. La projection e_n de l'intensité d'électrisation sur la direction de la force résultante est proportionnelle à l'inverse du carré du rayon vecteur de cet ellipsoïde mené dans la même direction.

* 426. Dans le cas qui nous occupe, le principe de la conservation de l'énergie amène une simplification importante. Sir W. Thomson¹ a en effet démontré que si $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ n'étaient pas nuls, une sphère taillée dans le cristal et placée dans un champ électrique uniforme pourrait prendre un mouvement de rotation continu et devenir ainsi une source indéfinie d'énergie, ce qui est absurde. Nous devons donc admettre que $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$. Les composantes de e suivant les axes principaux de polarisation sont donc

$$e_x = K_0 \varepsilon_x F_x; \quad e_y = K_0 \varepsilon_y F_y; \quad e_z = K_0 \varepsilon_z F_z.$$

Si la lame cristalline est perpendiculaire à l'axe des X, $F_x = F$, $F_y = F_z = 0$, il vient $e_y = e_z = 0$, $e_x = e = K_0 \varepsilon_x F$, la polarisation est aussi normale à la lame et parallèle à F . Les axes de polarisation sont donc trois directions rectangulaires du cristal qui jouissent de cette propriété que, lorsque la force résultante est parallèle à l'un de ces axes, elle développe une polarisation qui lui est parallèle.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont les *coefficients d'électrisation principaux* ou *susceptibilités électriques principales* du cristal.

* 427. L'expression (2) de e_n se réduit par conséquent à

$$e_n = K_0 (\varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma) F = K_0 \varepsilon_n F;$$

¹ W. THOMSON, *Phil. Mag.* 1851, I, 177.

en posant

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma.$$

ε_n représente la susceptibilité dans la direction de la force résultante, qui forme des angles α, β, γ avec les axes de polarisation.

Pour achever le calcul du condensateur, il n'y a qu'à mettre cette valeur de ε_n dans l'expression de φ du § 424, et à continuer comme dans le cas d'un diélectrique isotrope. Il vient

$$F = \psi + \varphi = \frac{4\pi}{K_0} \sigma - 4\pi\varepsilon_n F,$$

d'où

$$\sigma = \frac{K_0(1 + 4\pi\varepsilon_n)V}{4\pi d} = \frac{K_n V}{4\pi d},$$

en représentant $K_0(1 + 4\pi\varepsilon_n)$ par K_n .

Nous avons donc

$$K_n = K_0(1 + 4\pi\varepsilon_n) = K_0(1 + 4\pi(\varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma))$$

ou, en remarquant que les axes sont rectangulaires et que $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$,

$$K_n = K_0(1 + 4\pi\varepsilon_x) \cos^2 \alpha + K_0(1 + 4\pi\varepsilon_y) \cos^2 \beta + K_0(1 + 4\pi\varepsilon_z) \cos^2 \gamma,$$

ou encore

$$K_n = K_x \cos^2 \alpha + K_y \cos^2 \beta + K_z \cos^2 \gamma,$$

en posant

$$K_0(1 + 4\pi\varepsilon_x) = K_x$$

$$K_0(1 + 4\pi\varepsilon_y) = K_y$$

$$K_0(1 + 4\pi\varepsilon_z) = K_z$$

K_x, K_y, K_z sont les *constantes diélectriques principales* du cris-

tal. K_n , la constante diélectrique dans la direction α, β, γ , est l'inverse du carré du rayon vecteur de l'ellipsoïde

$$K_x x^2 + K_y y^2 + K_z z^2 = 1,$$

que l'on peut appeler *ellipsoïde inverse d'induction*.

Si l'on donne à la lame isolante toutes les orientations possibles dans le cristal, la capacité du condensateur s'obtient dans chaque position par la même formule que si la lame était isotrope, mais à condition de prendre chaque fois pour constante diélectrique la quantité K_n que nous venons de définir.

PHÉNOMÈNES D'ORIENTATION

428. Polarisation d'une sphère dans un champ électrique uniforme. — Les forces qui agissent sur un corps quelconque, placé dans un champ électrique uniforme, dépendent de sa polarisation et par suite de sa forme. Il n'y aura de phénomènes simples que si la polarisation est elle-même uniforme à l'intérieur du corps. C'est en particulier ce qui aura lieu, que le corps soit ou non cristallisé, si on lui suppose une forme sphérique.

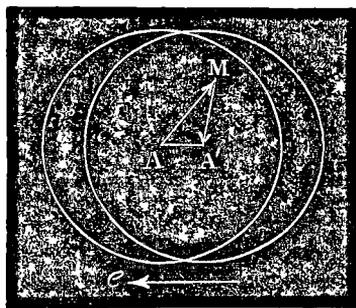


Fig. 495.

Nous pouvons regarder une sphère à l'état neutre comme formée par la superposition de deux

sphères égales, électrisées en sens contraire dans toute leur masse avec une densité uniforme s par unité de volume. Dans l'électrisation par influence tout se passe comme si ces deux sphères se déplaçaient l'une par rapport à l'autre dans le sens

de e d'une certaine quantité $A'A$ (fig. 495). Les électricités de noms contraires se neutralisent dans toute la région où les deux sphères restent superposées, et il se forme deux couches, l'une positive, l'autre négative, à gauche et à droite. L'intensité d'électrisation e est représentée par la densité de ces couches aux extrémités du diamètre parallèle à $A'A$. Cette densité superficielle est évidemment $A'A \times s$.

La force φ , exercée par ces deux couches sur un point quelconque de l'intérieur, est la résultante des forces exercées par les deux sphères. Chacune d'elles agit (§ 415) sur un point M , placé dans son intérieur à une distance a de son centre, avec une force

$$\frac{1}{K_0 a^2} \times \frac{4}{3} \pi a^3 s = \frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi s a .$$

On aura donc une force attractive dirigée vers A' égale à $\frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi s \overline{MA'}$, et une force répulsive partant de A égale à $\frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi s \overline{AM}$. La résultante, donnée par la règle du parallélogramme, est évidemment

$$\frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi s \overline{AA'} = - \frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi e ;$$

on a donc

$$\varphi = - \frac{1}{K_0} \frac{4}{3} \pi e$$

parallèle à e et de valeur constante, quelle que soit la position du point M .

429. Orientation d'une sphère cristallisée dans un champ uniforme. — La valeur de φ que nous venons de trouver est générale, et s'applique dans le cas d'une sphère cristalline aussi bien que dans celui d'une sphère isotrope. φ est toujours parallèle à l'électrisation, mais celle-ci, si la sphère est

cristallisée, n'est pas en général parallèle à la force ψ du champ.

La sphère cristalline polarisée peut alors être représentée par la figure 496 ; l'action exercée sur elle par le champ électrique uniforme dans lequel elle se trouve placée résulte de l'action de la force ψ sur les deux sphères positive et négative de centres A et A'. Ces actions parallèles, égales et de signes contraires, constituent un couple, qui ne peut produire un déplacement en bloc de la sphère, mais tend à la faire tourner aussi longtemps que la direction A'A de l'électrisation n'est pas parallèle au champ.

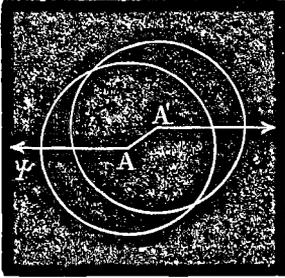


Fig. 496.

La théorie que nous exposerons plus loin (§§ 435 à 438) permet de rattacher ce phénomène à la considération d'un certain ellipsoïde, qui est analogue à l'ellipsoïde d'induction du § 420, et que nous désignerons pour le distinguer de ce dernier, sous le nom d'*ellipsoïde d'orientation*.

Les axes principaux de cet ellipsoïde coïncident avec les axes de polarisation du cristal, et leurs valeurs sont respectivement les inverses des racines carrées d'une quantité

$$K_0 g_x = \frac{3 K_0}{4 \pi} \left(\frac{\frac{K_x}{K_0} - 1}{\frac{K_x}{K_0} + 2} \right)$$

et de ses deux analogues en K_y et K_z .

Soit OP (fig. 497) un rayon vecteur de cet ellipsoïde mené dans la direction de la force ψ du champ, et soit OD la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde au point P ; on démontre que la polarisation e de la sphère cristalline est dirigée suivant OD, et que si la grandeur de la force ψ est représentée par \overline{OP} , la valeur correspondante de e

est représentée par $1/\overline{OD}$. Il en résulte immédiatement que la sphère, supposée libre de tourner en tous sens, n'est en équilibre que si l'un des axes de polarisation est parallèle au champ. Mais, des trois positions d'équilibre ainsi définies, il n'y en a qu'une seule de stable, celle où la direction du champ coïncide avec l'axe de plus grande polarisation, suivant lequel la constante diélectrique K_n a la plus grande valeur.

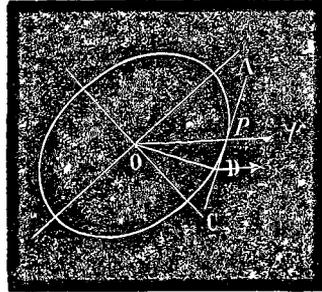


Fig. 497.

Soit en effet un plan principal de l'ellipsoïde, passant par cet axe de plus grande électrisation OC, et soit ψ la direction du champ. La position d'équilibre en question est celle où OC est parallèle à ψ . Si le cristal s'en écarte légèrement, la ligne OD d'électrisation se déplace du même côté que OC. La force ψ tend donc à ramener le cristal dans sa première position.

Si nous prenons au contraire le cristal dans la position d'équilibre correspondant à l'autre diamètre OA de la section considérée de l'ellipsoïde, on voit que pour un petit déplacement de OA par rapport à ψ , la direction OD de la polarisation se déplace en sens inverse. La force ψ tend donc à augmenter de plus en plus le déplacement.

430. En pratique, le cristal ne pourra pas être absolument libre; on devra le suspendre par un fil qui lui permettra seulement de tourner autour de la verticale. Le cristal se placera alors de manière que le plus petit diamètre de l'ellipsoïde d'orientation, compris dans un plan horizontal, soit parallèle au champ. Si on l'écarte de cette position, il y reviendra en faisant des oscillations d'autant plus rapides que la différence des pola-

risations maximum et minimum est plus grande dans la section horizontale considérée.

Si le fil de suspension est normal à l'une des sections circulaires de l'ellipsoïde, le cristal est en équilibre indifférent dans toutes les orientations. Les deux positions du fil qui satisfont à cette condition sont appelées les *axes diélectriques*, par analogie avec les axes optiques. Le cristal est positif ou négatif suivant que l'angle aigu des axes diélectriques est bissecté par l'axe de plus grande ou de plus petite polarisation.

Si le cristal est carré ou hexagonal, l'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe cristallographique. Si le fil de suspension est dans le prolongement de l'axe, le cristal est en équilibre indifférent; l'axe optique est en même temps axe diélectrique. S'il correspond à la polarisation maximum, le cristal est positif, et s'il correspond à la polarisation minimum, le cristal est négatif. Si le fil de suspension est perpendiculaire à l'axe, celui-ci se place parallèlement au champ si le cristal est positif; l'axe se place perpendiculairement au champ dans le cas contraire.

Enfin, si le cristal est cubique, l'ellipsoïde se réduit à une sphère et il n'y a plus d'orientation dans un champ uniforme. Il en est de même d'une sphère isotrope.

431. Influence de la forme. — Ces résultats ne sont rigoureusement vrais que si le cristal est taillé sous forme de sphère; ils seront cependant applicables encore à des lames circulaires taillées parallèlement aux sections principales de l'ellipsoïde d'orientation, et suspendues horizontalement à un fil fixé en leur milieu; ils indiqueront au moins le sens des phénomènes tant que les cristaux ne s'écarteront pas trop de la forme sphérique ou d'une forme de révolution autour de la verticale, et cela d'autant mieux que les coefficients d'électrisation seront plus petits.

Si ces conditions ne sont pas remplies, la forme du cristal influera davantage et viendra troubler et compliquer les effets dus à la cristallisation.

432. Influence de la conductibilité. — La conductibilité, dont l'influence vient se superposer à la polarisation diélectrique, amène aussi des complications et des causes d'erreur. D'après M. Root, la polarisation se développe complètement dans un temps excessivement court, inférieur à 0,0001". Les effets d'orientation qu'elle produit ne changent pas si l'on renverse alternativement la direction du champ, quelle que soit la rapidité de ces renversements. La conductibilité, au contraire, avec les phénomènes résiduels (§ 422), agit plus lentement; il faut un certain temps pour que de l'électricité se transporte d'un point à un autre, et ce transport change de sens si l'on renverse le champ. On aura donc dans ces renversements un moyen de séparer la polarisation diélectrique proprement dite des autres phénomènes qui l'accompagnent.

433. Expériences de M. Knoblauch¹. — Les corps à étudier, taillés sous forme de disques circulaires, étaient suspendus horizontalement entre les pôles d'une pile sèche.

Les corps isotropes, verres et métaux, ne s'orientaient pas. Des lames parallèles à l'axe de *calcite*, de *sidérose*, se plaçaient dans la position dite équatoriale, l'axe perpendiculaire à la ligne des pôles; la *tourmaline*, le *béryl* se plaçaient au contraire axialement, l'axe parallèle à la ligne des pôles. L'orientation a aussi été observée dans le *gypse*, le *salpêtre*, l'*aragonite*, la *barytine*.

Un cylindre de *bismuth* (rhomboèdre), dont l'axe de figure était perpendiculaire à l'axe cristallographique, s'orientait de

¹ H. KNOBLAUCH, *Pogg. Ann.* 1851, LXXXIII, 289.

manière à placer cette dernière direction dans la ligne des pôles. Ce fait est singulier en raison de la grande conductibilité du bismuth.

Ce mode d'expérimentation ne permettait pas de renverser le champ, aussi la conductibilité venait-elle souvent gêner les expériences. La *topaze*, la *tourmaline* restaient électrisées, et revenaient dans leurs positions primitives même après avoir été tournées de 180° entre les pôles. M. Knoblauch a observé une grande analogie dans les orientations des cristaux entre les pôles d'une pile et entre les pôles d'un aimant.

434. Expériences de M. Root¹. — Les cristaux étaient

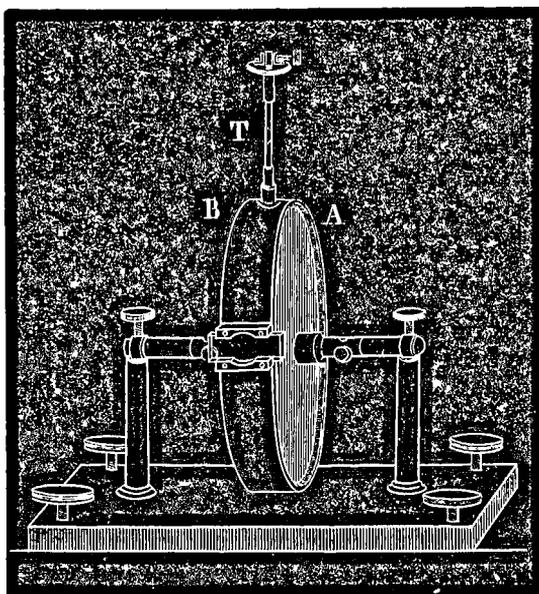


Fig. 498.

suspendus dans le champ uniforme d'une sorte de condensateur (fig. 498) formé de deux lames de cuivre A et B, de

¹ E. Root, *Pogg. Ann.* 1876, CLVIII, 1, 425.

20 centimètres de diamètre, fixées parallèlement l'une à l'autre dans un anneau d'ébonite. Cet anneau était pourvu d'ouvertures convenables destinées à l'introduction et à l'observation du cristal et au passage du fil de suspension. Ce dernier était contenu dans un tube de verre T. Les lames étaient mises en communication avec les pôles d'une pile de Gassiot de 5000 éléments, ou d'une pile de Daniell de 1000 éléments; des commutateurs spéciaux permettaient de changer le signe des charges jusqu'à 6000 fois par seconde.

De la durée des oscillations exécutées par les cristaux, on déduisait le moment des forces d'orientation. En faisant varier la rapidité des renversements du champ, on pouvait étudier la marche des phénomènes consécutifs à la polarisation diélectrique instantanée.

*** 435. Calcul de l'intensité d'électrisation d'une sphère cristalline.** — La force résultante à l'intérieur de la sphère est formée de la force primitive ψ du champ, et de la force φ due à la polarisation de la sphère.

Soient ψ_x, ψ_y, ψ_z les composantes de la force ψ du champ suivant les axes de polarisation du cristal; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ les composantes de la force φ résultant de l'électrisation de la sphère, e_x, e_y, e_z les composantes de la polarisation, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ les susceptibilités principales; nous aurons d'une part

$$\begin{aligned} e_x &= K_0 \varepsilon_x (\psi_x + \varphi_x) \\ e_y &= K_0 \varepsilon_y (\psi_y + \varphi_y) \\ e_z &= K_0 \varepsilon_z (\psi_z + \varphi_z) \end{aligned}$$

et d'autre part, puisque φ est parallèle à e et vaut $-\frac{4}{3} \frac{\pi e}{K_0}$ (§ 428),

$$K_0 \varphi_x = -\frac{4}{3} \pi e_x; K_0 \varphi_y = -\frac{4}{3} \pi e_y; K_0 \varphi_z = -\frac{4}{3} \pi e_z.$$

Éliminant les φ , il vient

$$e_x \left(1 + \frac{4}{3} \pi \varepsilon_x \right) = K_0 \varepsilon_x \psi_x$$

et ses analogues en y et z ; en posant

$$g_x = \frac{\varepsilon_x}{1 + \frac{4}{3} \pi \varepsilon_x} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{K_x}{K_0} - 1 \right)$$

$$g_y = \frac{\varepsilon_y}{1 + \frac{4}{3} \pi \varepsilon_y} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{K_y}{K_0} - 1 \right)$$

$$g_z = \frac{\varepsilon_z}{1 + \frac{4}{3} \pi \varepsilon_z} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{K_z}{K_0} - 1 \right)$$

il vient enfin

$$e_x = K_0 g_x \psi_x; \quad e_y = K_0 g_y \psi_y; \quad e_z = K_0 g_z \psi_z,$$

qui donnent l'électrisation en fonction de la force primitive du champ.

*** 436.** Si la sphère était conductrice, la force résultante devrait être nulle dans son intérieur; on aurait

$$\varphi_x + \psi_x = 0, \quad \varphi_x = -\psi_x, \quad \varepsilon_x = \infty;$$

et les formules du § 435 donneraient :

$$e_x = + \frac{3}{4\pi} K_0 \psi_x;$$

$$g_x = g_y = g_z = \frac{3}{4\pi}.$$

Le rapport des électrisations d'une sphère conductrice et

d'une sphère cristalline, placée dans le champ de telle sorte que l'axe de polarisation X soit parallèle au champ, est donc

$$m = \frac{\frac{K_x}{K_0} + 2}{\frac{K_x}{K_0} - 1}.$$

* 437. **Ellipsoïde d'orientation.** — Les expressions que nous venons d'obtenir pour les composantes de la polarisation sont susceptibles d'une interprétation géométrique. Considérons l'ellipsoïde

$$K_0 g_x x^2 + K_0 g_y y^2 + K_0 g_z z^2 = 1.$$

Son plan tangent au point P de coordonnées (x, y, z) (fig. 497, § 429) a pour équation

$$K_0 g_x x x_1 + K_0 g_y y y_1 + K_0 g_z z z_1 = 1.$$

La perpendiculaire OD abaissée du centre sur ce plan a pour valeur

$$\overline{OD} = \frac{1}{\sqrt{(K_0 g_x x)^2 + (K_0 g_y y)^2 + (K_0 g_z z)^2}}$$

et forme avec les axes de polarisation des angles α, β et γ , dont les cosinus sont proportionnels à $K_0 g_x x, K_0 g_y y, K_0 g_z z$.

Si donc nous donnons à la force ψ du champ la grandeur et la direction de la ligne OP, de telle sorte que

$$\psi_x = x; \quad \psi_y = y; \quad \psi_z = z;$$

les quantités $K_0 g_x x, K_0 g_y y, K_0 g_z z$ deviennent respectivement égales à e_x, e_y, e_z (§ 435), et

$$\overline{OD} = \frac{1}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}} = \frac{1}{e}.$$

La polarisation e est donc dirigée suivant OD et sa grandeur est représentée par l'inverse de OD.

*** 438. Moment du couple directeur.** — Le moment qui tend à faire tourner la sphère est (§ 428 et § 429, fig. 496)

$$M = v s \psi \cdot \overline{A'A} \sin \delta = v e \psi \sin \delta ,$$

en appelant δ l'angle compris entre la force ψ du champ et la polarisation e , et v le volume de la sphère.

Appelons toujours α, β, γ les angles compris entre e et les axes; soient λ, μ, ν les angles analogues pour ψ , nous aurons

$$\begin{aligned} M^2 &= v^2 e^2 \psi^2 \sin^2 \delta = v^2 e^2 \psi^2 (1 - \cos^2 \delta) \\ \cos \delta &= \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu \\ \cos \alpha &= \frac{e_x}{e}; \quad \cos \beta = \frac{e_y}{e}; \quad \cos \gamma = \frac{e_z}{e} \\ e^2 &= e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 \end{aligned}$$

et, en remplaçant e_x, e_y, e_z par leurs valeurs du § 435, nous trouvons, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} M^2 &= K_0^2 v^2 \psi^4 [(g_y - g_z)^2 \cos^2 \mu \cos^2 \nu + (g_z - g_x)^2 \cos^2 \nu \cos^2 \lambda \\ &\quad + (g_x - g_y)^2 \cos^2 \lambda \cos^2 \mu]. \end{aligned}$$

Pour que le moment M soit nul, il faut que deux des angles λ, μ, ν soient droits; le troisième est alors nul.

Le moment total M tend à faire tourner la sphère autour d'une droite perpendiculaire au plan qui contient la direction de la force ψ et celle de la polarisation e .

Ce moment est la résultante de trois moments partiels relatifs aux trois axes de polarisation

$$\begin{aligned} M_x &= K_0 v \psi^2 (g_y - g_z) \cos \mu \cos \nu \\ M_y &= K_0 v \psi^2 (g_z - g_x) \cos \nu \cos \lambda \\ M_z &= K_0 v \psi^2 (g_x - g_y) \cos \lambda \cos \mu. \end{aligned}$$

Si la sphère est astreinte à tourner autour d'une droite formant des angles a, b, c avec les axes, le moment du couple agissant est

$$M_z = M_x \cos a + M_y \cos b + M_z \cos c.$$

Cette formule est le point de départ des vérifications expérimentales que l'on peut faire de la théorie.

PHÉNOMÈNES D'ATTRACTION

439. Attraction d'une sphère diélectrique dans un champ à peu près uniforme. — Soient A une petite sphère conductrice chargée d'une quantité q d'électricité (fig. 499), et B une sphère diélectrique assez petite et placée à une distance r suffisamment grande, pour que l'on puisse

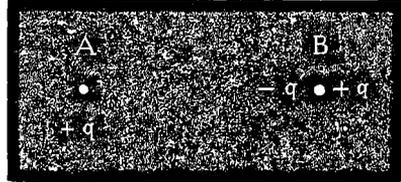


Fig. 499.

regarder le champ comme à peu près uniforme dans l'espace qu'elle occupe. Elle se polarise par influence, et l'action qu'elle subit de la part de A est la résultante de l'attraction exercée sur l'électricité négative $-q'$ amenée du côté de A, et de la répulsion exercée sur l'électricité positive amenée du côté opposé à A. La différence des distances fait que l'attraction prédomine. Soit e la densité maximum de l'électricité développée sur cette sphère B. Si la sphère B était conductrice, la densité maximum aurait une autre valeur σ , mais la distribution des électricités serait la même. On peut en conclure que l'attraction subie par la sphère conductrice serait à l'attraction subie par la sphère diélectrique, identique et identiquement placée, dans le rapport de σ à e ,

c'est-à-dire dans le rapport des électrisations. Or nous avons vu au § 436 que ce rapport est

$$m = \frac{\sigma}{e} = \frac{\frac{K}{K_0} + 2}{\frac{K}{K_0} - 1},$$

K étant la constante diélectrique de la sphère B dans la direction AB . La mesure du rapport m des attractions exercées par une même masse q sur une sphère conductrice et sur une sphère diélectrique identique permettra de déterminer par cette formule la constante diélectrique relative K/K_0 du diélectrique étudié.

440. Expériences de M. Boltzmann¹. — M. Boltzmann, qui a imaginé cette méthode, a essayé de divers procédés pour l'appliquer. Le plus avantageux est le suivant. Les

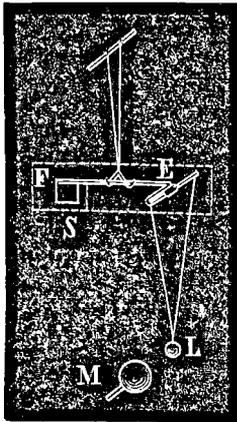


Fig. 500.

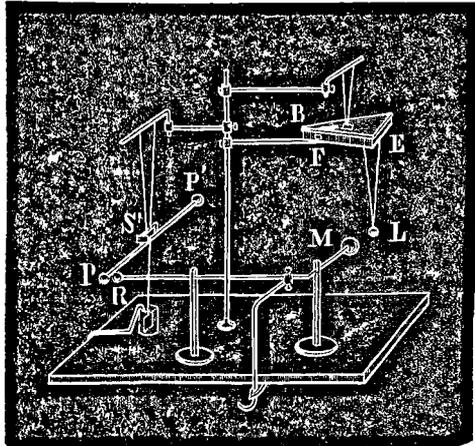


Fig. 501.

sphères à étudier L étaient l'une après l'autre suspendues par deux fils au levier EF (fig. 500, 501), porté par une suspen-

¹ BOLTZMANN, *Sitzb. Akad. Wien.* 1873, LXVIII, 81; 1874, LXX, 342; *Pogg. Ann.* 1874, CLIII, 525; — voir aussi GORDON, *Treatise on Electricity*, Londres 1880, I, 135; — ROMICH et NOWAK, *Sitzb. Akad. Wien.* 1874, LXX, 380.

sion biflaire, et muni d'un miroir S permettant de mesurer ses déviations à l'aide d'une échelle divisée et d'une lunette. Le levier était lui-même protégé contre les actions électriques extérieures par une boîte triangulaire B couverte de papier doré et liée au sol. L'attraction était produite par la sphère M qu'une bouteille de Leyde maintenait chargée. Afin d'être sûr que l'électrisation de M ne variait pas pendant le temps nécessaire pour substituer les sphères l'une à l'autre en L, une seconde balance de torsion était jointe à l'appareil, composée d'une boule R liée métalliquement à M, et d'un levier métallique PP' lié au sol, suspendu bifilairement et pourvu d'un miroir S'; le tout était protégé par une cage vitrée. Des commutateurs convenables permettaient de charger la boule M alternativement en sens inverse, ou de la charger et décharger alternativement dans un temps très court, afin d'éliminer les effets consécutifs.

M. Boltzmann a étudié par ce procédé l'ébonite, la paraffine, la colophane, et a obtenu des résultats qui concordent avec ceux qu'ont donnés les autres méthodes. Il a ensuite mesuré les constantes diélectriques principales du *soufre* cristallisé, que l'on trouvera plus loin. — La même méthode a été appliquée par MM. Romich et Nowak à l'étude du *spath fluor*, du *quartz* et du *spath d'Islande*.

INFLUENCE DU DIÉLECTRIQUE AMBIANT

441. Susceptibilité apparente. — Nous avons supposé jusqu'ici que les sphères cristallines sur lesquelles nous expérimentons sont placées dans un milieu non polarisable. Rien ne prouve que ce soit le cas même pour les expériences faites dans le vide : nous devons donc examiner ce qui se passe lors-

que le diélectrique soumis à l'influence, que nous appellerons le milieu 1, est entouré d'un diélectrique 2 qui est lui-même capable de se polariser.

Dans ce cas, la surface de séparation des deux milieux reçoit deux couches fictives de noms contraires résultant, l'une de la polarisation e_1 du milieu 1, l'autre de la polarisation e_2 du milieu 2. Les effets observables sont dus à la somme algébrique de ces deux couches ; le diélectrique 1 se comporte comme si sa susceptibilité réelle était remplacée par une *susceptibilité apparente* dépendant à la fois des deux milieux en contact.

En particulier, si le milieu 2 est plus polarisable que le milieu 1, son action prédomine dans l'électrisation de la surface, de sorte que la susceptibilité apparente devient négative.

Dans ce cas, les attractions subies par le corps 1 se changent en répulsions ; s'il est cristallisé, l'ordre de grandeur des quantités g_x, g_y, g_z (§ 429) se renverse, et l'orientation se modifie en conséquence.

La position d'équilibre stable est alors celle où le plus grand axe de l'ellipsoïde, c'est-à-dire l'axe de plus petite polarisation, est parallèle à la direction du champ.

*** 442. Calcul de la susceptibilité apparente.** — Soit

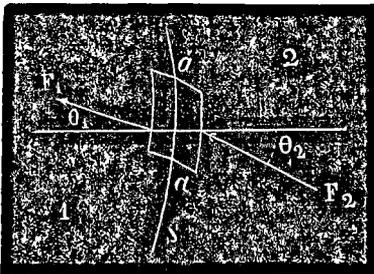


Fig. 502.

a un élément de la surface S de séparation des deux milieux (fig. 502). Cet élément reçoit une couche d'électricité positive par exemple, de densité $e_2 \cos \theta_2$ (§ 412), par suite de la polarisation du milieu 2, et une couche d'électricité négative de densité $-e_1 \cos \theta_1$ par suite de la polarisation du milieu 1. Nous représentons ici par θ_1 et θ_2 les angles plus petits que 90°

compris entre des lignes parallèles aux polarisations e_1 et e_2 , et les normales menées respectivement du côté de 1 et du côté de 2 à l'élément de surface a . La densité totale sur cet élément sera donc

$$e'_n = e_2 \cos \theta_2 - e_1 \cos \theta_1 .$$

Nous supposons, pour abrégé, que les deux milieux sont isotropes; dans le milieu 1 il y a une force résultante F_1 parallèle à e_1 ; dans le milieu 2 une force résultante F_2 parallèle à e_2 . Construisons un tube de force, passant par le contour de a , et limité de part et d'autre par des plans parallèles et très voisins de a , menés l'un dans le milieu 1, l'autre dans le milieu 2. En appliquant le théorème de Gauss (§ 404) au volume ainsi délimité, et en observant que F_2 est supposée entrer dans ce volume, et F_1 en sortir, nous avons, par unité de surface,

$$F_1 \cos \theta_1 - F_2 \cos \theta_2 = \frac{4\pi}{K_0} e'_n .$$

Or, si nous appelons ε_1 et ε_2 les susceptibilités électriques des deux milieux,

$$e_1 = K_0 \varepsilon_1 F_1 \quad e_2 = K_0 \varepsilon_2 F_2 ,$$

d'où

$$e'_n = K_0 \varepsilon_2 F_2 \cos \theta_2 - K_0 \varepsilon_1 F_1 \cos \theta_1 .$$

Portant cette valeur de e'_n dans la relation déduite du théorème de Gauss, nous trouvons

$$K_0 (1 + 4\pi\varepsilon_1) F_1 \cos \theta_1 = K_0 (1 + 4\pi\varepsilon_2) F_2 \cos \theta_2$$

ou, en introduisant les constantes diélectriques des deux milieux,

$$K_1 F_1 \cos \theta_1 = K_2 F_2 \cos \theta_2 .$$

A l'aide de cette relation l'on peut éliminer F_2 et l'on tire

$$4\pi e'_n = - K_0 \left(\frac{K_1}{K_2} - 1 \right) F_1 \cos \theta_1$$

$$e'_n = - K_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + 4\pi\varepsilon_2} F_1 \cos \theta_1 .$$

Si le milieu (2) n'était pas polarisable, on aurait

$$e_n = -K_0 \varepsilon_1 F_1 \cos \theta_1.$$

L'électrisation superficielle e'_n est donc la même que si le milieu 1 était placé dans un diélectrique non polarisable, et avait une susceptibilité

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + 4\pi\varepsilon_2};$$

ε' est la susceptibilité apparente. Elle est négative si le milieu 2 est plus polarisable que le milieu 1 qui y est plongé.

Dans le cas d'un corps cristallisé, un calcul tout à fait semblable donne les trois susceptibilités apparentes, qui sont

$$\varepsilon'_x = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{1 + 4\pi\varepsilon_2}$$

et ses deux analogues.

L'électrisation d'une sphère s'obtient comme au § 435, en remplaçant seulement les susceptibilités absolues par les susceptibilités apparentes. On trouve ainsi

$$g'_x = \frac{\varepsilon'_x}{1 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon'_x} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{K_x}{K_2} - 1 \right)$$

et de même pour g'_y et g'_z . Il suffit de remplacer K_0 par K_2 , ce qui entraîne le même changement dans la formule de M. Boltzmann (§§ 436 et 439).

*** 443. Énergie d'une sphère cristalline polarisable placée dans un diélectrique polarisable.** — Dans le calcul des forces qui tendent à faire mouvoir la sphère, il faut, pour éviter les difficultés déjà signalées au § 416, procéder comme au § 417 par la détermination de l'énergie du système électrisé.

Nous pouvons supposer que le champ uniforme, ou à peu près uniforme, est produit par un certain nombre de masses q_1, q_2, \dots fixées sur de très petits conducteurs de centres P_1, P_2, \dots , etc. (fig. 503).

Admettons, pour abrégier, qu'il n'y ait qu'une seule masse q_1 placée très loin, sur une petite sphère P_1 de rayon ρ_1 .

Nous remplaçons, comme aux §§ 428 et 429, la sphère influencée, dont l'électrisation apparente est e' , par le système

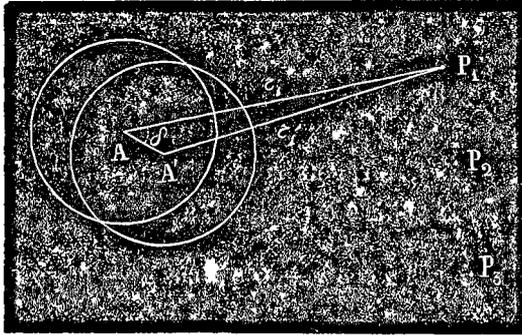


Fig. 503.

de deux sphères de centre A et A', ayant un même volume v , et chargées, l'une positivement et l'autre négativement, avec une densité de volume $s = e'/A'A$. Si V_1 est le potentiel au point P_1 , l'énergie du système est simplement (§ 417) :

$$W = \frac{1}{2} V_1 q_1,$$

puisque la sphère cristalline et le diélectrique ambiant ne s'électrisent que par influence.

La masse q_1 , par suite de la polarisation du milieu ambiant, attire autour d'elle une masse $-q'_1$. Le potentiel en P_1 , dû d'abord à ces masses q_1 et $-q'_1$, puis aux masses $+sv$ et $-sv$ des sphères de centres A et A', est donc

$$V_1 = \left(\frac{q_1 - q'_1}{K_0 \rho_1} \right) - \frac{vs}{K_0} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Si nous désignons par $d\xi$ un déplacement infiniment petit quelconque du système A'A, et si nous supposons que ce déplacement ne modifie pas la grandeur et la position de q_1 , la force qui tend à produire ce déplacement est

$$-\frac{dW}{d\xi} = -\frac{1}{2} q_1 \frac{dV_1}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \frac{vq_1s}{2K_0} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{d}{d\xi} \frac{vq_1s}{2K_0} \left(\frac{r_1 - r'_1}{r_1 r'_1} \right)$$

ou, $\overline{AA'}$ étant très petit vis-à-vis de r_1 ,

$$-\frac{dW}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \frac{vq_1s}{2K_0} \frac{\overline{AA'} \cos \delta_1}{r_1^2} = \frac{d}{d\xi} \frac{vq_1}{2K_0} \frac{e' \cos \delta_1}{r_1^2}.$$

Appelant comme précédemment (α, β, γ) et (λ, μ, ν) les angles que la direction A'A de la polarisation, et la direction r_1 de la force ψ du champ, forment respectivement avec les axes de polarisation de la sphère cristalline, nous avons

$$\cos \delta_1 = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu,$$

puis (§ 435)

$$e' \cos \alpha = e'_x = K_0 g'_x \psi_x = K_0 g'_x \psi \cos \lambda$$

et ses deux analogues, et enfin (§ 415), K_2 étant la constante diélectrique du milieu ambiant,

$$\psi = \frac{q_1}{K_2 r_1^2},$$

Substituant dans la valeur de $-\frac{dW}{d\xi}$, il vient

$$-\frac{dW}{d\xi} = \frac{K_2 v}{2} \frac{d}{d\xi} \{ \psi^2 (g'_x \cos^2 \lambda + g'_y \cos^2 \mu + g'_z \cos^2 \nu) \},$$

qui est l'expression générale de la force qui tend à déplacer la sphère. Il serait aisé de voir que cette formule est encore exacte lorsque le champ ψ résulte de masses quelconques ayant des positions quelconques, pourvu que ce champ soit à peu près uniforme.

Si le milieu ambiant n'était pas polarisable, sa susceptibilité serait nulle, et dans l'expression de $-\frac{dW}{d\xi}$, la quantité K_2 se trouverait remplacée par K_0 , ce qui changerait en même temps g'_x, g'_y, g'_z en g_x, g_y, g_z (§ 442). Donc, pour un même déplacement et pour une même intensité du champ, on passe du cas où le milieu ambiant est impolarisable au cas où il est polarisable en changeant simplement K_0 en K_2 .

Si la sphère est empêchée de tourner, elle tend à être entraînée dans la direction pour laquelle la force $-\frac{dW}{d\xi}$ est maximum et positive. Il faut donc que $\frac{d\psi^2}{d\xi}$ soit maximum et positif. La sphère tend à se déplacer, non pas nécessairement dans la direction du champ ψ , mais, suivant que la quantité $(g'_x \cos^2 \lambda + g'_y \cos^2 \mu + g'_z \cos^2 \nu)$ est positive ou négative, dans la direction où la force augmente ou diminue le plus rapidement.

RELATION DE MAXWELL

444. Induction et déplacement électrique de Maxwell. — Dans l'exposé que nous venons de faire, nous nous sommes toujours strictement tenus à la théorie des actions à distance. Nous avons conçu la polarisation comme un déplacement en sens inverse des deux électricités dans chaque élément infiniment petit du diélectrique, ce déplacement étant tel que la résultante des forces attractives et répulsives des électricités libres soit nulle dans l'intérieur de particules conductrices répandues dans le milieu isolant, ou bien fasse équilibre à des forces élastiques spéciales mises en jeu par ce déplacement.

Mais on peut, en suivant les idées de Maxwell¹, se représenter les choses autrement.

Nous avons vu au § 414 qu'une masse électrique q , placée dans un milieu dont la constante diélectrique est K , produit à la distance r une force résultante

$$F = \frac{1}{K} \frac{q}{r^2}$$

comme si q était réduite à $K_0 q/K$.

Traçons une surface fermée S quelconque autour de q , le flux de force à travers cette surface sera, d'après le théorème de Gauss (§ 404), a' étant un élément de la surface

$$\sum F_n a' = \frac{4\pi}{K} q$$

ou, en multipliant par la constante K ,

$$\sum K F_n a' = 4\pi q.$$

La quantité $K F_n a'$ est appelée par Maxwell l'*induction* à travers l'élément a' . Divisons encore par 4π

$$\sum \frac{K}{4\pi} F_n a' = q.$$

¹ J.-C. MAXWELL, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vol. Oxford 1873.

Tous les phénomènes observables dépendent seulement de K , et nous n'avons aucun moyen de déterminer séparément K_0 et ϵ ; nous pouvons donc leur attribuer des valeurs quelconques, pourvu que l'on ait toujours $K_0 (1 + 4\pi\epsilon) = K$. Si K_0 était supposé nul ou infini, les représentations physiques d'où nous sommes partis n'auraient plus de sens précis. Les formules finales n'en seraient pas moins exactes, mais correspondraient à d'autres hypothèses. Ces deux cas paraissent être plus ou moins mêlés dans les théories de Maxwell. Voyez HELMHOLTZ, *Wiss. Abh.* I, 545; POINCARÉ, *Électricité et Optique*, Paris 1890; et HERTZ, *Untersuchungen über die Ausbreitung des elektrischen Kraft*, Leipzig 1892.

La notion du déplacement maxwellien, que nous indiquons dans le texte, correspond à $K_0 = 0$, d'où $\epsilon = \infty$. L'action directe des masses électriques est infinie en elle-même, mais complètement neutralisée par celle des couches fictives développées. La force qui subsiste dans le champ est due uniquement à la réaction du milieu, symbolisée par les forces élastiques fictives.

L'intégrale du premier membre est étendue à une surface S *quelconque* entourant q . Cette équation peut donc être interprétée en disant qu'en chaque point du diélectrique il s'est produit un phénomène de la nature d'un flux, représenté par $\frac{K}{4\pi} F$, et qui est tel, que le flux total au travers d'une surface fermée S est égal à la quantité d'électricité q qui a été introduite dans cette surface.

C'est précisément ce qui se passerait si ce que nous appelons électricité se comportait comme un fluide incompressible : si nous en introduisons une quantité q dans un espace quelconque, il doit en sortir une quantité précisément égale par les divers points de la surface qui limite cet espace. Le flux

$$\mathcal{D} = \frac{K}{4\pi} F$$

peut ainsi être considéré comme une quantité d'électricité qui a traversé l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à la force résultante. Maxwell donne à ce flux \mathcal{D} le nom de *déplacement électrique*.

Dans un diélectrique cristallisé, le déplacement n'est pas, en général, dans la direction de la force ; ses composantes, suivant les axes de polarisation, sont

$$\mathcal{D}_x = \frac{K_x}{4\pi} F_x ; \quad \mathcal{D}_y = \frac{K_y}{4\pi} F_y ; \quad \mathcal{D}_z = \frac{K_z}{4\pi} F_z ,$$

Dans un conducteur rien ne s'oppose au déplacement, celui-ci s'effectue indéfiniment tant que F n'est pas nulle : K est infini. Dans un diélectrique, au contraire, l'électricité est maintenue par des forces élastiques qui s'opposent au déplacement, et le suppriment dès que la force électromotrice cesse d'agir.

Un condensateur, avec la pile et les fils de communication, est assimilable en quelque mesure à un tube replié sur lui-même rempli d'un fluide incompressible (fig. 504). La pile serait

représentée par un piston P, le diélectrique du condensateur par une membrane élastique fermant le tuyau en S. Si le piston chasse le fluide dans le sens de la flèche, la membrane se déforme jusqu'à faire équilibre à la force qui pousse le piston;

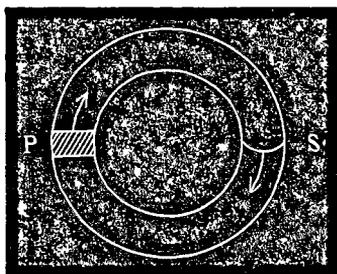


Fig. 504.

celle-ci étant supprimée, tout revient à l'état primitif.

Si l'on écrit, dans cet ordre d'idées,

$$F = \frac{4\pi}{K} \mathcal{D},$$

$4\pi/K$ joue le rôle d'une sorte de coefficient d'élasticité électrique.

On peut aussi assimiler le flux \mathcal{D} à un flux de chaleur, la force F à une chute de température dans la direction du flux. Alors $K/4\pi$ sera l'analogue d'un coefficient de conductibilité. C'est ce qui a conduit Sir W. Thomson à donner à la constante diélectrique K le nom de *perméabilité électrique*.

Dans cette manière de concevoir les choses, la force électrique n'est plus supposée agir à distance, mais se propage par l'intermédiaire du déplacement électrique.

445. Constantes diélectriques et indices de réfraction. — Maxwell a été conduit par le développement de ses théories à une notion très remarquable des phénomènes lumineux. Pour lui, une vibration lumineuse n'est autre chose qu'une modification périodique de l'état électrique du milieu isolant, qui se propage de proche en proche en vertu de l'élasticité électrique, avec une vitesse déterminée qui dépend de cette élasticité. Il arrive à la conclusion que, lorsque deux milieux 1 et 2 ont à peu près les mêmes propriétés magnétiques¹, leurs cons-

¹ La théorie fait prévoir que les lois de la double réfraction doivent être plus ou moins modifiées dans les cristaux dont les propriétés magnétiques

tantes diélectriques doivent être inversement proportionnelles aux carrés des vitesses avec lesquelles la lumière les traverse. On a donc

$$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2.$$

Supposons que le milieu 2 soit le vide ou, ce qui revient à peu près au même, l'air, K_1/K_2 est la constante diélectrique relative K donnée par l'expérience, et V_2/V_1 est l'indice de réfraction n du corps 1. On a donc simplement

$$K = n^2.$$

Si le corps 1 est anisotrope, la même relation doit exister entre les valeurs de n et de K qui correspondent à des directions parallèles du déplacement électrique et de la vibration lumineuse. Les axes de polarisation doivent donc se confondre avec les axes d'élasticité optique, et l'ellipsoïde d'induction (§ 420) avec l'ellipsoïde direct de Fresnel (§ 213).

Le contrôle de cette relation est cependant moins simple qu'il ne paraît à première vue. n en effet, et par conséquent K , varient avec la durée d'oscillation des radiations considérées. Or, dans les expériences d'où nous déduisons K , nous produisons toujours une perturbation électrique constante, ou du moins de période excessivement longue en comparaison de celle des vibrations lumineuses, et, d'autre part, ce n'est qu'à l'aide d'extrapolations dont la légitimité est plus que douteuse, que nous pouvons conclure, des indices observés pour les radiations lumineuses visibles, les valeurs que les indices auraient pour des longueurs d'ondes très grandes; c'est ce qui explique que l'accord soit souvent assez mauvais.

varient notablement avec la direction. HERTZ, *Wied. Ann.* 1890, XL, 623; — RAVÉAU, *C. R.* 1891, CXII, 1056.

446. Résultats expérimentaux. — La constante diélectrique, abstraction faite des variations dépendant de la durée de la charge et des effets résiduels, paraît être très constante et avoir la même valeur dans les divers échantillons d'un même corps.

La relation $K = n^2$ est très exactement vérifiée dans les gaz, et approximativement dans certains diélectriques isotropes. Pour d'autres, au contraire, elle est complètement en défaut.

Dans tous les cristaux étudiés, la constante diélectrique est plus forte que ne le voudrait la théorie de Maxwell. On ne sait que fort peu de chose de l'orientation des axes d'électrisation dans les cristaux des cinquième et sixième systèmes, les seuls où ils pourraient ne pas coïncider avec les axes d'élasticité optique. Dans le *gypse*, les deux espèces d'axes paraissent être très voisins.

Les cristaux étudiés jusqu'ici sont les suivants :

a) *Cristaux cubiques.*

Fluorine.	$K = 6,8$	(Curie, charge de 0,1 à 0,5 secondes)
	6,7 à 7,2	(Romich et Nowak, 1 seconde)
	7,1 à 9,9	(* * * longue charge)
	$n^2 = 2,07$	
Alun . . .	$K = 6,49$	(Curie, face du cube)
	6,36	(* octaèdre)
	$n^2 = 2,2$	
Sel gemme.	$K = 5,97$	(Curie, cube)
	5,81	(* octaèdre)
	5,78	(* dodécaèdre)
	$n^2 = 2,25$.	

Les différences suivant les faces sont de l'ordre des erreurs d'expérience. Il est à remarquer cependant que des différences

du même ordre et dans le même sens ont été trouvées par M. Braun pour le sel gemme.

b) Cristaux uniaxes.

Calcite. K_z suivant l'axe ...	8,02 (Curie)	$n_e^2 = 2,26$
	7,5 (R. et N., 1 seconde)	
	8,5 (» longue charge)	
K_x perpendiculairement à l'axe.	6,48 (Curie)	$n_o^2 = 2,75$
	7,7 (R. et N., 1 seconde)	
	9,9 (» longue charge)	
Quartz.	$K_z = 4,55$ (Curie)	$n_e^2 = 2,41$
	$K_x = 4,49$ »	$n_o^2 = 2,38$
	$K(?) = 4,6$ (Romich et Nowak)	
Tourmaline	$K_z = 6,05$ (Curie)	$n_e^2 = 2,6$
	$K_x = 7,1$ »	$n_o^2 = 2,7$
Béryl.....	$K_z = 6,24$ »	$n_e^2 = 2,48$
	$K_x = 7,56$ »	$n_o^2 = 2,50$

La tourmaline, quoique hémimorphe, donne la même valeur de K suivant les deux directions opposées de l'axe cristallographique.

c) Cristaux biaxes.

Topaze, lame de clivage	$K_z = 6,56$ (Curie)	$n_z^2 = 2,61$
Soufre.	$K_x = 4,773$ (Boltzmann)	$n_x^2 = 4,596$
	$K_y = 3,970$ »	$n_y^2 = 3,886$
	$K_z = 3,811$ »	$n_z^2 = 3,591$
Gypse, lame de clivage	$K = 6,33$ (Curie)	$n^2 = 2,32$
Mica, lame de clivage.	$K_z = 6,64$ (Klemencic)	
	$K_z = 8$ (Bouty)	$n^2 = 2,53$

La concordance est relativement satisfaisante pour le soufre.

CHAPITRE XXVIII

DE LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE

447. Cas des corps bons conducteurs. — La conductibilité se présente avec des caractères assez différents dans les corps bons conducteurs tels que les métaux et les corps analogues, où la polarisation diélectrique est nulle ou ne joue qu'un rôle très limité, et dans les diélectriques proprement dits.

Dans les conducteurs arrivés à l'état de régime permanent, il est probable que nous pouvons répéter pour la conductibilité électrique ce que nous avons dit pour la conductibilité thermique. Il suffira de remplacer, dans l'exposé théorique du Chapitre XXV, les flux de chaleur par des flux d'électricité, ou courants électriques, les chutes de température par des chutes de potentiel.

448. Conducteurs isotropes. — A travers une surface S d'un mur, d'épaisseur d , dont les deux faces sont maintenues à des potentiels différents V_1 et V_2 , il passe dans l'unité de temps un flux

$$I = c \frac{(V_1 - V_2)}{d} S$$

et la même formule s'applique à un barreau de section S et de longueur d , dont les deux extrémités ont les potentiels V_1 et V_2 (loi de Ohm), pourvu que ce barreau soit placé dans un milieu non conducteur. c est la *conductibilité spécifique* de la substance étudiée.

Plus souvent, on emploie non le coefficient de conductibilité, mais son inverse $r = 1/c$, qui est le coefficient de *résistance*.

449. Conducteurs cristallisés. — Dans le cas général des conducteurs cristallisés, on représentera les composantes du flux par des fonctions linéaires des composantes de la chute de potentiel. La conductibilité du cristal dépendra de neuf coefficients de conductibilité, qui se réduiront à six par un choix convenable des axes de coordonnées. Le nombre de ces coefficients diminuera à mesure que l'on considérera des cristaux plus symétriques. Pas plus que dans le cas de la chaleur, on ne sait si les coefficients qui correspondent aux $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ du § 381 peuvent être différents de zéro. Dans le doute, les divers systèmes de symétrie devront être répartis dans six groupes distincts (§ 387 et 396), dont il est inutile de donner une seconde fois les caractères.

Il importe de rappeler seulement la distinction entre la conductibilité normale et la conductibilité linéaire.

Si nous représentons par

$$I = c \frac{V_1 - V_2}{d} S$$

le flux qui traverse dans l'unité de temps un parallépipède de section S , de longueur d (fig. 505), dont les bases ont les potentiels V_1 et V_2 , le coefficient c aura généralement une valeur différente suivant la forme du parallépipède. Si d est assez petit



Fig. 505.

par rapport à la section pour que l'on puisse négliger l'influence des bords latéraux, les surfaces équipotentielles seront des plans horizontaux, le flux total sera oblique et le flux normal par unité de surface sera donné par la règle de l'ellipsoïde inverse (§ 380). Si, au contraire, d est assez grand pour que l'influence des extrémités soit négligeable, le flux total suivra la longueur de la tige; les surfaces équipotentielles deviendront obliques, et c sera donné par la règle de l'ellipsoïde de conductibilité linéaire (§ 382).

450. Recherches expérimentales. — Il est très difficile de trouver des cristaux assez parfaits pour ce genre de recherches; la conductibilité électrique est, de toutes les propriétés des corps, celle qui est le plus influencée par des causes secondaires ou par de légères impuretés. C'est ainsi que M. Dufet¹ a observé, dans divers échantillons de pyrite de fer, des conductibilités variant de $\frac{1}{75}$ à $\frac{1}{4000}$ de celle du mercure.

Aussi n'avons-nous à citer que bien peu de faits expérimentaux.

Matteucci² a observé que dans le *bismuth*, qui appartient au système rhomboédrique, la conductibilité est plus faible suivant l'axe que perpendiculairement à l'axe dans le rapport de 1 à 1,16.

M. Bäckström³ a étudié plus complètement le *fer oligiste*, également rhomboédrique. Il mesurait à diverses températures les conductibilités de barreaux de faible section, découpés dans le cristal sous des orientations différentes. Dans ce cas, les conductibilités doivent être sensiblement les carrés des rayons vec-

¹ DUFET, *C. R.* 1875, LXXXI, 628.

² MATTEUCCI, *C. R.* 1855, XL, 541, 913; 1856, XLII, 1133; *Ann. de Chim.* 1853, XXXIX, 134.

³ BÄCKSTRÖM, *Oftvers. Akad. Stockholm*, 1888, VIII, 533.

teurs de l'ellipsoïde de conductibilité linéaire, et, en appelant c_z , c_x , c_θ les conductibilités suivant l'axe, perpendiculairement à l'axe, et dans une direction quelconque formant avec l'axe un angle θ , on doit avoir

$$\frac{1}{c_\theta} = \frac{1}{c_z} \cos^2 \theta + \frac{1}{c_x} \sin^2 \theta .$$

On trouve en effet, à la température de 17° :

θ	$\frac{1}{c_\theta}$ calculé	$\frac{1}{c_\theta}$ observé
0	—	68,7
27°,15	61,69	60,93
28°,35	61,00	60,00
38°,06	55,91	54,65
90°	—	35,1

Les valeurs des résistances contenues dans ce tableau sont évaluées en *ohms*, et se rapportent à des barreaux ayant 1 centimètre de longueur et 1 millimètre carré de section.

La conductibilité *augmente* quand la température s'élève ; ainsi à 0° on trouvait $1/c_z = 80,8$, $1/c_x = 40,8$, et à 100° : $1/c_z = 33,1$, $1/c_x = 18,3$. Pour l'oligiste, comme pour le bis-muth, les conductibilités électrique et thermique varient dans le même sens avec l'orientation, mais elles ne sont pas proportionnelles l'une à l'autre.

M. Bäckström a trouvé que la conductibilité de la *magnétite* (système cubique) augmente aussi avec la température.

MM. S.-P. Thompson et Lodge, et M. Fitzgerald¹ ont vérifié l'absence d'une conductibilité électrique unipolaire dans

¹ S.-P. THOMPSON et O. LODGE, *Phil. Mag.* 1879, VIII, 18; — FITZGERALD, *Proc. Roy. Soc. Dublin*, 1880, I, 3.

la tourmaline (§ 398), au moins tant que le courant et la température ne varient pas.

Nous n'avons rien de particulier à dire des méthodes employées par ces divers auteurs; ce sont, à part quelques dispositions de détail, celles qui sont décrites dans tous les Traités de Physique.

451. Phénomènes de conductibilité dans les diélectriques. — Ainsi que nous l'avons dit au chapitre précédent, tous les expérimentateurs qui se sont occupés de la détermination des constantes diélectriques ont eu à se mettre en garde contre des effets consécutifs dus probablement à des causes multiples difficiles à séparer les unes des autres (§ 422, 432).

D'après Maxwell, le phénomène de l'absorption électrique apparente serait dû à un défaut d'homogénéité du diélectrique. MM. Rowland et Nichols¹ ont en effet vérifié, par la méthode du condensateur plan, que des plaques de calcite bien pure ne présentent pas ce phénomène après trente secondes de charge. M. Boltzmann (§ 440) a trouvé dans le soufre cristallisé les mêmes constantes diélectriques pour des durées de charge variant entre un demi-centième de seconde et une minute.

Mais lorsque la charge dure plus longtemps, on observe des différences qui sont probablement dues à une véritable conductibilité. Ainsi, dans les expériences de M. Root (§ 434) la durée des oscillations d'une plaque de calcite, lorsque le champ ne subissait pas de renversements alternatifs, diminuait de 1,577 à 1,403 dans l'espace de 13 heures; celle d'une sphère de soufre, dans une atmosphère parfaitement sèche, tombait de 7,725 à 5,300 en une demi-heure.

M. Curie (§ 423), qui a fait une étude attentive de ces phé-

¹ ROWLAND et NICHOLS, *Phil. Mag.* 1881, XI, 414.

nomènes, a reconnu que la conductibilité est très variable d'un échantillon à l'autre d'une même substance cristallisée, et augmente rapidement quand la température s'élève, bien entendu tant qu'aucune modification profonde du cristal n'intervient. L'intensité du courant de charge ou de décharge (§ 422) varie avec le temps, mais à un instant donné elle est toujours proportionnelle à la force électromotrice et en raison inverse de l'épaisseur de la lame étudiée. Dans la plupart des cristaux, la conductibilité paraît due en grande partie, si ce n'est en totalité, aux inclusions liquides qu'ils contiennent; elle disparaît ou diminue beaucoup par la dessiccation.

Souvent aussi on observe une conductibilité apparente résultant d'altérations superficielles des lames étudiées¹.

Dans beaucoup de corps, le mica par exemple, le courant, intense au début, diminue d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement; dans d'autres, tels que le spath d'Islande, le courant est très faible et à peu près constant dès le début, et pendant longtemps, puis diminue après un temps considérable.

Le quartz présente dans la direction de l'axe une conductibilité assez forte qui baisse progressivement pendant des heures et des jours entiers. Il perd cette conductibilité s'il a été chauffé au rouge pendant longtemps. Perpendiculairement à l'axe, sa conductibilité est très faible et tend rapidement vers zéro.

452. MM. Warburg et Tegetmeier² ont trouvé qu'une lame de quartz perpendiculaire à l'axe, à travers laquelle on fait passer un courant à l'aide d'une pile puissante, à une température de 200 à 300°, acquiert une force électromotrice inverse qui peut atteindre 150 volts; la lame peut ensuite se décharger comme

¹ BOUTY, *Ann. de Chim.* 1891, XXIV, 425.

² WARBURG et TEGETMEIER, *Wied. Ann.* 1887, XXXII, 442; *Gött. Nachr.* 1888, 210.

une pile secondaire, et revient, au bout de plusieurs heures, à son état primitif. Toutefois, si la charge a été trop forte, le quartz est modifié, et ne laisse plus passer, après qu'il s'est déchargé, le courant fourni par une pile de faible force électromotrice.

Si la lame est placée entre deux électrodes de mercure, dont la positive contienne du sodium, la conductibilité ne diminue pas avec le temps, et lorsque l'opération a eu une durée suffisante, on retrouve, dans l'électrode négative, du sodium dont le poids correspond à la quantité d'électricité qui a traversé le quartz. MM. Warburg et Tegetmeier en concluent que le quartz contient un composé sodique qui s'électrolyse pendant le passage du courant, et auquel est due la conductibilité du quartz suivant l'axe. M. Beckenkamp¹ attribue ce rôle au liquide alcalin contenu dans les inclusions, lequel serait aussi répandu moléculairement dans toute la masse du cristal.

453. Conductibilité superficielle des diélectriques cristallisés. — M. G. Wiedemann² saupoudrait de lycopode la surface du cristal, et appuyait en son milieu une pointe fine sur laquelle il déchargeait une bouteille de Leyde. La poudre était projetée par la décharge, et laissait une figure circulaire ou elliptique suivant la symétrie du cristal. Le grand diamètre de ces ellipsoïdes correspondait à la direction suivant laquelle la constante diélectrique a la plus grande valeur.

De Senarmont³ est arrivé à des résultats analogues par un autre procédé. La face du cristal était recouverte d'une feuille d'étain percée d'un trou rond de 15 à 30 millimètres de diamè-

¹ BECKENKAMP, *Zeitsch. f. Kryst.* 1889, XV, 511.

² G. WIEDEMANN, *Pogg. Ann.* 1849, LXXVI, 404; LXXVII, 534; *Die Lehre der Electricität*, Brunswick 1883, II, 67.

³ DE SENARMONT, *C. R.* 1849, XXIX, 750.

tre. Une pointe amenait de l'électricité positive au milieu de ce cercle. La décharge s'opérait dans l'air raréfié entre cette pointe et le contour de la feuille d'étain. Elle avait lieu également dans tous les sens sur une face isotrope, et seulement suivant deux diamètres d'orientations déterminées sur une face anisotrope.

L'orientation de la conductibilité superficielle peut d'ailleurs varier avec les conditions des expériences¹.

¹ S.-P. THOMPSON, *Phil. Mag.* 1881, XII, 112.

CHAPITRE XXIX

DES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DES CRISTAUX

454. Actions magnétiques. — Les phénomènes du magnétisme, dont nous ignorons la véritable nature, peuvent être représentés par une hypothèse analogue à celle que l'on fait pour l'électricité, et dans laquelle il convient également de voir, non pas une idée de ce qui se passe en réalité, mais seulement un moyen de coordonner les faits observés. On suppose donc l'existence de deux fluides magnétiques, dont l'action réciproque est exprimée, comme celle des fluides électriques, par la formule de Coulomb

$$f = \frac{1}{\mu_0} \frac{mm'}{r^2};$$

μ_0 est une constante qui dépend des unités choisies et correspond à la constante K_0 des actions électriques; m et m' sont les masses magnétiques que l'on suppose exercer l'une sur l'autre la force f à la distance r . On convient en général de considérer comme positif le magnétisme qui, dans cette hypothèse, se trouve accumulé à celui des pôles d'un aimant qui tend à se diriger vers le nord.

La loi élémentaire des actions magnétiques et électriques

étant la même, sauf le changement des masses électriques q en masses magnétiques m , et de K_0 en μ_0 , nous pourrions répéter ici presque tout ce que nous avons dit aux Chapitres XXVI et XXVII; la seule différence à noter est que nous ne connaissons pas de corps qui soit conducteur pour le magnétisme; les masses magnétiques ont toujours des positions fixes, comme des masses électriques dans un isolant parfait.

Le champ magnétique sera défini en chaque point par la grandeur et la direction de la force magnétique résultante, c'est-à-dire de la force qui agirait sur une masse 1 de magnétisme positif placée en ce point; et on pourra construire des lignes de force magnétique, tangentes en chaque point à la direction de la force (§ 400).

Le potentiel magnétique se définira et se calculera comme le potentiel électrique, et les surfaces de niveau auront les propriétés correspondantes (§ 401). Le théorème de Gauss s'appliquera encore ici (§ 404) : le flux de force magnétique sortant d'une surface fermée sera toujours égal au produit de $4\pi/\mu_0$ par la somme algébrique des quantités de magnétisme contenues dans cette surface.

455. Intensité d'aimantation. — L'absence de conductibilité magnétique, dans les corps que nous connaissons, fait que nous ne pouvons obtenir une masse positive ou négative qui ne soit pas liée à une masse égale et de signe contraire. Les fragments résultant de la rupture d'un barreau aimanté SN (fig. 506) sont eux-mêmes de petits aimants orientés comme l'aimant primitif. Un corps aimanté soit par influence, soit d'une manière permanente, est donc dans un état de polarisation magnétique analogue à la

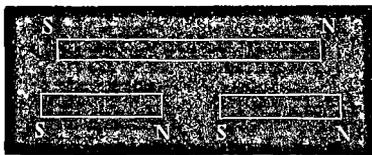


Fig. 506.

polarisation diélectrique des corps isolants : chacun des éléments de volume qui le composent peut être considéré comme formant un petit aimant complet, équivalent à deux couches magnétiques égales et de signes contraires placées avec une densité i sur les deux faces opposées de l'élément. Dans le cas de l'aimantation par influence, les couches de signes contraires des éléments adjacents se compensent dans l'intérieur du corps ; l'aimantation ne se manifeste qu'à la surface.

Le moment magnétique d'un élément de volume v peut s'écrire iv . L'intensité d'aimantation i , correspondant à l'intensité d'électrisation e du § 412, est le moment magnétique de l'unité de volume, et peut être figurée par une droite ayant une direction et une longueur déterminées.

456. Susceptibilité et perméabilité magnétiques. — Tout ce que nous avons dit de l'électrisation par influence et de la polarisation des diélectriques peut être répété à l'égard du magnétisme, et les mêmes formules sont applicables à condition de remplacer les susceptibilités électriques ϵ (§ 413) par des coefficients de *susceptibilité magnétique* κ .

Nous trouverons, comme aux §§ 414 et 415, qu'une masse magnétique m , placée dans un milieu de susceptibilité κ , produit à une distance r une force résultante $m/\mu_0(1 + 4\pi\kappa)r^2$ ou $m/\mu r^2$, en écrivant pour abrégier

$$\mu = \mu_0 (1 + 4\pi\kappa),$$

comme si m était réduite dans le rapport de μ à μ_0 . Ce coefficient μ correspond à la constante diélectrique K ; on peut l'appeler *pouvoir inducteur magnétique* ou *perméabilité magnétique*.

457. Induction magnétique. — Si F est la force résul-

tante ¹ en un point d'un milieu de perméabilité μ , le produit μF est un flux à travers l'unité de surface d'un plan normal à F ; ce flux porte le nom d'*induction magnétique*, et correspond à l'induction électrique du § 444.

A la surface de séparation de deux milieux différents 1 et 2, on a la relation (§ 442)

$$\mu_1 F_1 \cos \theta_1 = \mu_2 F_2 \cos \theta_2,$$

d'où résulte que le flux d'induction garde la même valeur dans les deux milieux en contact.

458. Corps cristallisés ². — Dans les corps cristallisés, l'aimantation n'est pas en général parallèle à la force magnétique résultante F . Mais il y a toujours dans le cristal (§ 420, 426) trois directions rectangulaires suivant lesquelles ce parallélisme a lieu. Ce sont les *axes d'aimantation*. En prenant ces directions comme axes de coordonnées, et en appelant i_x, i_y, i_z ; F_x, F_y, F_z les composantes de l'aimantation et de la force, on aura

$$i_x = \mu_0 \kappa_x F_x; \quad i_y = \mu_0 \kappa_y F_y; \quad i_z = \mu_0 \kappa_z F_z;$$

¹ Si l'on voulait déterminer expérimentalement la force à l'intérieur du corps aimanté, il faudrait commencer par y creuser une cavité. Mais on créerait ainsi des surfaces libres sur lesquelles se développeraient des couches fictives; la forme de la cavité influencerait donc sur la force observée dans son intérieur. On démontre que cette force prend la valeur F , qu'elle aurait en l'absence de ces couches, et qui interviendrait dans l'équilibre du milieu inaltéré, si la cavité avait la forme d'un tube très étroit, et très allongé parallèlement aux lignes de force. Elle prend, au contraire, la valeur μF de l'induction dans une fente très mince, perpendiculaire aux lignes d'aimantation.

² Poisson, *Mém. de l'Institut*, 1824, V, 247, a signalé la possibilité d'un développement inégal du magnétisme induit dans les diverses directions d'un cristal, mais il n'en a pas développé la théorie, qui n'a été donnée que bien plus tard par Sir W. Thomson (1850), *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, p. 465.

les propriétés magnétiques du cristal dépendront des trois *susceptibilités principales* $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$.

Nous rappelons que, dans ces formules, F représente la force magnétique résultante au point du corps influencé que l'on étudie : elle se compose de la force directement exercée par les masses magnétiques extérieures à ce corps, et de celle qui résulte des masses magnétiques développées par influence dans le corps lui-même.

459. Orientation d'une sphère cristallisée dans un champ uniforme. — Une sphère cristallisée placée dans un champ magnétique uniforme s'aimante uniformément dans toute sa masse (§ 428), et se trouve transformée en un aimant dont l'axe est généralement oblique par rapport à la direction du champ. Elle sera donc en général soumise à un couple tendant à lui donner une position d'équilibre déterminée (§ 429).

Si les composantes du champ suivant les axes d'aimantation de la sphère sont ψ_x, ψ_y, ψ_z , les composantes de l'aimantation de celle-ci seront (§ 435)

$$i_x = \mu_0 \gamma_x \psi_x ; \quad i_y = \mu_0 \gamma_y \psi_y ; \quad i_z = \mu_0 \gamma_z \psi_z ;$$

en posant

$$\gamma_x = \frac{\kappa_x}{1 + \frac{4}{3} \pi \kappa_x} ; \quad \gamma_y = \frac{\kappa_y}{1 + \frac{4}{3} \pi \kappa_y} ; \quad \gamma_z = \frac{\kappa_z}{1 + \frac{4}{3} \pi \kappa_z} ;$$

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ sont les susceptibilités principales apparentes du cristal par rapport au milieu dans lequel il est placé (§§ 441, 442). Dans la plupart des cas, les susceptibilités magnétiques sont très faibles ; on peut sans erreur sensible prendre pour susceptibilités apparentes les susceptibilités absolues du cristal diminuées de la susceptibilité absolue du milieu ambiant ; et regarder aussi $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ comme égales à $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$.

Nous avons vu au § 429 que la position d'équilibre stable, que la sphère tend à prendre, dépend d'un ellipsoïde d'orientation, dont l'équation est ici

$$\mu_0\gamma_x x^2 + \mu_0\gamma_y y^2 + \mu_0\gamma_z z^2 = 1$$

et dont la forme et la position sont liées à la symétrie du cristal par les règles du § 430.

La sphère cristallisée ne subira dans un champ uniforme ni attraction, ni répulsion, mais, si elle est libre de tourner autour d'un axe vertical tel, par exemple, qu'un fil de cocon qui la porte, elle s'orientera; suivant que ses susceptibilités principales seront positives ou négatives, sa position d'équilibre stable sera celle où le champ sera parallèle au plus petit ou au plus grand diamètre de la section diamétrale faite par un plan horizontal dans l'ellipsoïde d'orientation.

460. Corps magnétiques et diamagnétiques. — Dans la polarisation diélectrique, les susceptibilités sont toujours positives quand la sphère est suspendue dans l'air ou dans le vide. Pour le magnétisme, il en est autrement; les susceptibilités apparentes κ_x , κ_y , κ_z peuvent être négatives même dans le vide. Nous ne nous préoccupons pas de savoir si ces valeurs négatives proviennent de ce que le vide aurait lui-même une susceptibilité magnétique appréciable, ou de ce que, dans certains corps, l'aimantation pourrait se produire en sens inverse de la force résultante.

Les corps à susceptibilités positives, tels que le fer et la plupart de ses sels, le nickel, le cobalt, sont appelés *paramagnétiques*, ou simplement *magnétiques*. Les corps à susceptibilités négatives, tels que le bismuth, sont appelés *diamagnétiques*. Les actions diamagnétiques sont toujours très faibles; ainsi, pour le bismuth dans l'air, κ vaut environ — 0,000002. Dans la plupart

des corps magnétiques, la susceptibilité est du même ordre de grandeur. Mais dans le nickel, dans le cobalt, et surtout dans le fer, elle est incomparablement plus grande, et augmente avec la force magnétisante jusqu'à un certain maximum qui peut atteindre en général la valeur de 2 à 300. Pour des valeurs plus grandes encore de la force, la susceptibilité redevient plus faible.

Cette susceptibilité, colossale par rapport à celle des autres corps, que possède un métal aussi répandu que le fer, cause de très grandes difficultés dans les recherches expérimentales sur l'orientation des cristaux. Une trace de fer imperceptible, telle qu'elle peut être amenée par la plus légère impureté, suffit à troubler complètement les phénomènes que l'on veut observer.

461. Recherches expérimentales. — La propriété que possèdent les cristaux de s'orienter entre les pôles d'un électro-aimant a été découverte et étudiée par Plücker peu d'années avant que Sir W. Thomson en donnât la théorie complète. Plücker fut bientôt suivi par Faraday, Beer et par MM. Knoblauch et Tyndall¹. Dans une série de travaux des plus remarquables, ces savants réussirent à faire successivement la part des causes d'erreurs diverses qui rendaient cette étude presque inextricable au premier abord.

Parmi ces causes d'erreur, nous avons déjà cité l'influence des moindres traces de fer (§ 460) et celle de la forme extérieure des fragments étudiés (§ 431). Nous devons signaler

¹ J. PLÜCKER, *Pogg. Ann.* 1847, LXXII, 315; 1849, LXXVI, 576; LXXVII, 447; LXXVIII, 427; 1852, LXXXVI, 1; 1860, CX, 397; *Ann. de Chim.* 1850, XXIX, 129; *Phil. Trans.* 1858, 543; — PLÜCKER et BEER, *Pogg. Ann.* 1850, LXXXI, 115; 1851, LXXXII, 42; — FARADAY, *Exp. Researches on Electricity*, séries XXII, 1848; XXVI, 1850; XXX, 1856; *Pogg. Ann.* 1853, Erg. Bd. III, 1, 126; 1857, C, 111, 439; — KNOBLAUCH et TYNDALL, *Pogg. Ann.* 1850, LXXIX, 233; LXXXI, 481; *Phil. Mag.* 1850, XXXVI, 178; XXXVII, 1; — TYNDALL, *Phil. Mag.* 1855, X, 153, 257; 1856, XI, 125; *On diamagnetism and magnecrystalline action*, Londres 1870.

encore le défaut d'uniformité du champ magnétique, qui varie avec la forme et la distance des pôles de l'aimant, avec le point du champ où l'on place le cristal. Si le champ n'est pas uniforme, l'aimantation des corps influencés est beaucoup plus complexe, les forces mécaniques qui en résultent ne se réduisent plus à un couple; le corps est généralement attiré, s'il est magnétique, dans le sens où la force augmente, et, s'il est diamagnétique, dans le sens où elle diminue (§ 443).

Une autre complication provient de ce que certains cristaux possèdent une *force coercitive*, qui leur permet de s'aimanter d'une manière permanente sous l'influence d'un champ énergétique, et de se comporter ensuite comme de véritables aimants quand on les place dans un champ trop faible pour détruire cette aimantation. Tel est, d'après Plücker et Beer, le cas du *disthène*, qui quelquefois s'oriente naturellement sous l'action de la Terre; la *magnétite*, certains cristaux d'*oligiste*, d'*augite*, de *cassitérite* se comportent d'une manière analogue.

D'après M. Streng¹, la *pyrite magnétique* de Bodenmais peut s'aimanter d'une manière permanente dans les directions perpendiculaires à l'axe, mais non suivant l'axe lui-même. D'après M. Tumlirz², le *quartz* peut prendre une polarité permanente dans toutes les directions.

462. On doit à Plücker d'avoir nettement reconnu le rôle de la symétrie cristalline; mais, au moins au début de ses recherches, il alla un peu trop loin en admettant des relations directes et simples entre les propriétés magnétiques et optiques. Il ne semble pas que de telles relations existent d'une manière générale, en dehors de ce qui est nécessité par la symétrie. Plücker a aussi reconnu la possibilité d'expliquer les phéno-

¹ STRENG, *N. Jahrb. f. Min.* 1882, I, 184.

² O. TUMLIRZ, *Wied. Ann.* 1886, XXVII, 133.

mènes par un développement inégal du magnétisme induit dans trois directions rectangulaires, et de les représenter par un ellipsoïde. En collaboration avec Beer, il a découvert la signification des *axes magnétiques*, analogues aux axes diélectriques (§ 430), normaux aux sections circulaires de l'ellipsoïde, et jouissant de la propriété que le cristal, suspendu par un fil parallèle à l'un d'eux, est en équilibre dans tous les azimuts et ne tend pas à s'orienter. Sa théorie l'a conduit à distinguer les cristaux magnétiquement positifs et négatifs, et à établir certaines relations, qu'il a vérifiées expérimentalement, entre l'angle des axes magnétiques et les durées d'oscillations d'un même cristal, lorsque ce cristal est suspendu successivement à des fils parallèles à ses trois axes d'aimantation.

Faraday, en dehors de ses recherches expérimentales qui l'amènèrent à corriger en partie les lois énoncées par Plücker, a interprété les propriétés magnétiques des cristaux par l'idée d'une conductibilité variable d'une direction à l'autre pour les lignes de force magnétique. C'est l'origine des notions de l'induction magnétique et de la perméabilité (§ 457).

MM. Tyndall et Knoblauch, qui ont aussi beaucoup contribué à donner aux énoncés de Plücker leur véritable valeur, ont observé que, dans beaucoup de cas, les caractères magnétiques d'un cristal persistent lorsqu'il a été altéré moléculairement ou même transformé par des actions chimiques (pseudomorphoses), et semblent liés par conséquent, moins à la nature propre de ses molécules, qu'à la manière dont elles sont disposées les unes par rapport aux autres. Ils retrouvaient des propriétés identiques à celles des cristaux dans des corps anisotropes artificiels obtenus en comprimant des pâtes mélangées de particules magnétiques ou diamagnétiques : le maximum d'aimantation se produisait dans la direction de la compression. MM. Knoblauch et Tyndall étaient ainsi conduits à penser que les différences

de susceptibilité doivent dépendre exclusivement des distances réciproques des molécules, et doivent être en relation étroite avec les clivages. Ce point de vue est certainement trop restreint, et n'est pas d'accord avec tous les faits observés.

On doit encore à MM. Grailich et von Lang¹ la détermination de l'orientation magnétique d'un très grand nombre de cristaux artificiels appartenant principalement au système rhombique.

463. Dans ces dernières années, M. F. Stenger et M. W. König² ont vérifié avec toutes sortes de précautions, sur des sphères de *calcite*, les formules qui, d'après la théorie de Sir W. Thomson, donnent le moment de la force agissant sur le cristal dans les diverses positions que l'on peut lui donner (§ 438). Ce moment s'obtenait en mesurant la rotation effectuée par la sphère sous l'influence d'une torsion connue du fil de suspension; ou bien en la faisant osciller, et en observant la durée de ses oscillations. Le moment étant connu pour une certaine position du cristal, les formules de Thomson permettent d'en déduire la différence des deux susceptibilités principales. Cette différence doit avoir la même valeur pour une même sphère, quelle que soit la position pour laquelle le moment a été mesuré. C'est en effet ce qui a été constaté.

Quant à cette différence elle-même, elle variait notablement d'un échantillon à l'autre : ainsi M. König a trouvé des nombres compris entre 1087 et 1168×10^{-10} ; M. Stenger des nombres compris entre 788 et 900×10^{-10} .

464. Attractions et répulsions dans un champ variable. — En remplaçant, dans les formules des §§ 435,

¹ GRAILICH et VON LANG, *Sitzb. Akad. Wien*, 1858, XXXII, 43.

² F. STENGER, *Wied. Ann.* 1883, XX, 304; 1886, XXVIII, 368; 1888, XXXV, 331; — W. KÖNIG, *Wied. Ann.* 1887, XXXI, 273; XXXII, 222.

439 et 442, les constantes électriques ϵ et g par les constantes magnétiques κ et γ , et en observant que γ peut en général être remplacé par κ (§ 459), nous voyons que les attractions ou répulsions éprouvées par deux sphères isotropes de mêmes dimensions, ou par une sphère cristallisée placée successivement dans diverses positions dans un champ à peu près uniforme, seront proportionnelles aux valeurs de κ estimées suivant les lignes de force.

Cette différence dans l'action éprouvée par un cristal suivant son orientation ne peut être reconnue expérimentalement qu'à l'aide d'appareils très sensibles. Plücker et Beer avaient échoué en opérant sur un cube de sulfate de fer. Faraday¹, après divers essais infructueux, est enfin parvenu à faire cette vérification dans le cas du *bismuth*. Un fléau horizontal soutenu par un faisceau de fils de cocon, et convenablement équilibré, portait à l'une de ses extrémités un petit barreau horizontal perpendiculaire à sa longueur. Aux deux bouts de ce barreau étaient suspendus, d'un côté un cylindre de flint diamagnétique, et de l'autre un groupe de cristaux de bismuth dont l'axe était horizontal, et qui pouvait tourner autour de la verticale sans déplacement de son

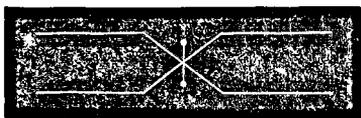


Fig. 507.

centre de gravité. C'est entre le flint et le bismuth que se plaçait l'extrémité des pôles de l'électro-aimant; ceux-ci formaient deux cônes opposés par le sommet (fig.

507), de manière à créer un champ intense et rapidement variable. L'action répulsive exercée sur le bismuth était plus faible lorsque son axe était parallèle au champ.

M. Tyndall² a employé dans le même but un appareil

¹ FARADAY, *Exp. Res.* 2551, 2552, 2553 (1848); 2839, 2840, 2841 (1850).

² TYNDALL, *Pogg. Ann.* 1851, LXXXIII, 384; — HANKEL, *Ber. d. Sächs. Ges. der Wissensch.* 1851, 99.

encore plus sensible. Il faisait agir deux électro-aimants A et B (fig. 508) sur deux sphères cristallines, posées aux deux extrémités d'un fléau porté par un fil d'argent. La torsion qu'il fallait donner au fil, pour ramener chaque fois le fléau dans sa position naturelle d'équilibre, mesurait la force exercée sur les sphères dans des conditions toujours les mêmes. Les actions exercées parallèlement et perpendiculairement à l'axe de symétrie étaient pour le *bismuth* dans le rapport de 35,5 à 51,5 ou de 71 à 100, pour la *calcite* dans le rapport de 55 à 49,5, pour la *sidérose* dans le rapport de 25,5 à 20,7. M. Hankel, en opérant aussi avec une balance de torsion, a trouvé pour le bismuth le rapport de 67 à 100.

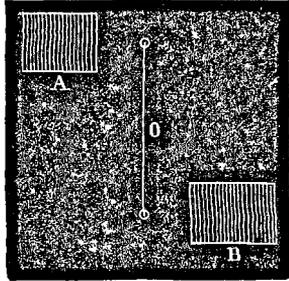


Fig. 508.

465. Mesure absolue des susceptibilités. — Les différences des susceptibilités principales étant déduites des durées d'oscillation d'une sphère dans un champ uniforme (§§ 459, 463), et leurs rapports étant déduits des mesures d'attraction dans un champ variable comme nous venons de le voir, il sera facile de calculer les susceptibilités elles-mêmes. Malheureusement les mesures d'attractions sont peu précises, et il en résulte une grande incertitude sur les valeurs des susceptibilités.

M. Rowland¹ a montré que ces valeurs peuvent être obtenues directement, en faisant osciller des barreaux, convenablement taillés, dans un champ magnétique non uniforme, mais dans lequel la distribution des lignes de force magnétique est connue par des mesures préalables. Cette méthode a été appli-

¹ H.-A. ROWLAND et W.-W. JACQUES, *Sill. J.* 1879, XVIII, 360; — ROWLAND, voyez *Wied. Ann.* 1882, XVII, 274.

quée par M. Jacques au bismuth et à la calcite; malheureusement, par suite d'une circonstance accidentelle, les résultats obtenus ne peuvent être considérés que comme donnant les valeurs relatives des susceptibilités; leurs rapports seraient $100/94$ pour la calcite et $87/100$ pour le bismuth, assez différents, comme l'on voit, des chiffres donnés par M. Tyndall et par M. Hankel.

466. Influence du magnétisme sur la cristallisation.

— Plücker faisait cristalliser du bismuth en le fondant et le laissant refroidir lentement dans une capsule suspendue entre les pôles d'un électro-aimant. Sur la masse solidifiée, il traçait une ligne parallèle au champ magnétique. Il observait alors que chaque fois que l'électro-aimant était excité, la ligne en question se plaçait parallèlement à la ligne des pôles, et le métal tendait à reprendre l'orientation qu'il avait au moment de la solidification. Ses cristaux avaient donc dû s'orienter pendant qu'ils se formaient sous l'action du champ magnétique.

D'après M. G. Wiedemann, qui a vérifié le fait, il ne serait cependant pas certain que l'orientation observée ne fût due à la présence dans le bismuth de quelques traces de fer ¹.

467. Pouvoir rotatoire magnétique. — Un corps isotrope quelconque, placé dans un champ magnétique, y prend la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'un rayon lumineux qui le traverse. L'action est maximum sur un rayon parallèle aux lignes des forces, elle est nulle sur un rayon perpendiculaire au champ.

La polarisation rotatoire magnétique diffère de la polarisa-

¹ PLÜCKER, *Pogg. Ann.* 1849, LXXVI, 584; — G. WIEDEMANN, *ibid.* 1849, LXXVII, 537; *Die Lehre der Elektrizität*, III, 900; — QUINTUS ICIILIUS, *Geœtt. Nachr.* 1860, 296; — voyez aussi FARADAY, *Exp. Researches* (1848) Série XXII, art. 2502, 2503.

tion rotatoire naturelle (§ 321) par un caractère fondamental. Le sens absolu de la rotation dépend uniquement de la direction du champ et de la nature du corps étudié; un observateur immobile, regardant dans la direction de la force magnétique, voit le plan de polarisation tourner dans le même sens sur un rayon qui s'éloigne de lui, que sur un rayon qui vient vers lui.

Faraday¹ a reconnu que ce phénomène se produit aussi, quoique faiblement, dans un certain nombre de cristaux cubiques, la *fluorine*, le *sel gemme*, l'*alun*.

Wertheim, puis E. Becquerel, sont parvenus à le constater dans le *quartz*, dans le *béryl* et dans la *tourmaline*; M. Chauvin dans le *spath d'Islande*. Dans ces cristaux, la rotation ne se produit sans altération que dans la direction de l'axe principal; dans les directions un peu inclinées sur l'axe, elle se transforme et se complique, comme cela a lieu pour la polarisation rotatoire naturelle (§ 339). L'effet observé peut être considéré comme la superposition de la double réfraction rectiligne que le cristal possède par lui-même, et d'un pouvoir rotatoire, indépendant de l'orientation du cristal, qui lui est communiqué par le champ magnétique.

Un rayon de lumière polarisée éprouve encore une rotation de son plan de polarisation lorsqu'il se réfléchit sur un corps fortement magnétique placé dans le champ d'un électro-aimant. L'action, proportionnelle à l'aimantation du corps, est maximum quand le rayon tombe normalement sur une face plane perpendiculaire au champ; elle est nulle sur une surface parallèle au champ. Ce phénomène, découvert par M. Kerr, a été observé

¹ FARADAY, *Archives des Sc. phys. et nat.* 1846, I, 395; — WERTHEIM, *C. R.* 1851, XXXII, 289; — E. BECQUEREL, *Ann. de Chim.* 1846, XVII, 445; — LÜDTGE, *Pogg. Ann.* 1869, CXXXVII, 281; — CHAUVIN, *C. R.* 1886, CII, 972; 1889, CVIII, 1097.

par M. du Bois sur la *magnétite* (système cubique); le *fer oligiste*, dont la susceptibilité est plus faible, n'a rien donné de certain¹.

¹ KERR, *Phil. Mag.* 1877, III, 321; 1878, V, 161; — H.-E.-J.-G. DU BOIS, *Wied. Ann.* 1890, XXXIX, 25.

CHAPITRE XXX

DE LA THERMOÉLECTRICITÉ

468. Forces électromotrices thermoélectriques. — Dans un circuit conducteur, formé de métaux quelconques A, B, C, D (fig. 509) soudés bout à bout, il ne se produit aucun courant tant que toutes les soudures sont maintenues à une seule et même température t_1 . Mais si l'une des soudures, par exemple celle des métaux B et C, est portée une température différente t_2 , il naît immédiatement un courant qui circule dans un sens déterminé, et qui dure aussi longtemps que t_2 n'est pas égal à t_1 . On peut reconnaître l'existence de ce courant en intercalant un galvanomètre dans le circuit. On peut aussi couper le circuit et mettre ses deux bouts en relation avec un électromètre, qui accuse alors une différence de potentiel. Si, par un échauffement de la soudure BC, le courant traverse cette soudure en allant de B vers C, on convient de dire que le métal B est *néglatif* par rapport au métal C.

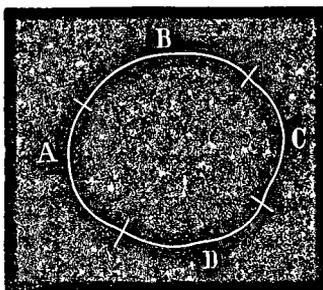


Fig. 509.

La différence de potentiel, ou force électromotrice thermo-électrique, produite ainsi entre les deux métaux B et C, dépend des températures t_1 et t_2 ; dans de certaines limites, elle augmente proportionnellement à la différence $t_2 - t_1$; mais, en général, elle suit une loi plus compliquée, et passe par un maximum pour une certaine valeur de la température de la soudure chaude. Dans tous les cas, si θ est une température intermédiaire entre t_1 et t_2 , la force électromotrice, obtenue en donnant aux soudures les températures t_1 et t_2 , est la somme algébrique des forces électromotrices obtenues en leur donnant d'abord les températures t_1 et θ , puis les températures θ et t_2 .

La force électromotrice obtenue entre deux métaux dont les soudures ont les températures t_1 et $(t_1 + 1)$ est appelée le *pouvoir thermoélectrique* de ces métaux à la température t_1 .

La force électromotrice ne se modifie pas si, entre les métaux B et C, on en intercale un troisième E, à condition que les soudures BE et EC soient toutes deux maintenues à la température t_2 . La force électromotrice produite au contact de B et de C est la somme algébrique des forces électromotrices produites entre B et E d'une part, entre E et C d'autre part.

La force électromotrice totale qui agit dans un circuit thermoélectrique est la somme algébrique d'une série de forces électromotrices partielles qui se produisent, les unes aux points de jonction des divers métaux du circuit, les autres, en dehors des soudures, partout où la température n'est pas uniforme, et où il y a contact entre des portions inégalement chaudes d'un même métal.

469. Phénomènes thermiques réversibles. — Un courant électrique qui circule dans un conducteur quelconque, y dégage toujours, dans l'unité de temps, une quantité de chaleur proportionnelle à la résistance du conducteur et au carré

de l'intensité du courant, indépendante par conséquent du sens de celui-ci (Loi de Joule).

Mais à ce phénomène général viennent se superposer, si le conducteur est hétérogène et formé de portions qui diffèrent par leur nature ou par leur température, des effets thermiques particuliers, étroitement liés aux forces thermoélectriques.

A la soudure de deux métaux différents le courant produit, suivant son sens et indépendamment de la loi de Joule, un dégagement ou une absorption de chaleur, proportionnels à son intensité. Cet effet, dit *effet Peltier*, tend à refroidir la soudure si le courant a le sens du courant thermoélectrique qui résulterait de l'échauffement de celle-ci; il tend à la réchauffer dans le cas contraire. Un effet analogue (*effet Thomson*) se manifeste là où le courant passe, dans un même métal, d'une région chaude à une région froide ou inversement¹.

470. Thermoélectricité des cristaux. — Toutes ces propriétés subsistent si l'on remplace un ou plusieurs des métaux amorphes qui constituent le circuit par des barreaux taillés dans des cristaux conducteurs. On observe seulement que si les barreaux sont taillés dans un même cristal avec des orientations différentes, ils se comportent comme des corps différents, et donnent au contact d'un même corps des forces électromotrices différentes.

Les manifestations thermoélectriques offrent toutefois, dans les corps anisotropes, quelques autres particularités remarquables.

Soit ABCD (fig. 510) un parallépipède cristallisé quelconque, en contact par toutes ses faces avec un même métal isotrope.

¹ Pour plus de détails, voyez MASCART et JOUBERT, *Traité d'électricité*, t. I.

En premier lieu, si nous donnons à la face AB une température supérieure à celle de la face CD, il se produit, comme dans un corps isotrope, une force thermoélectrique longitudi-

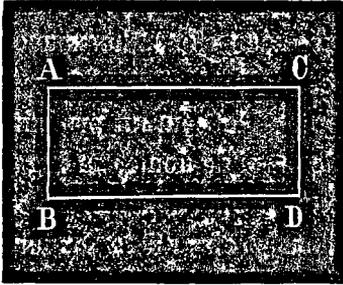


Fig. 510.

nale, d'où résulte un courant qui entre, par exemple, dans le parallépipède par AB et qui en sort par CD. Mais, en outre, il se produit dans le cas général une force thermoélectrique transversale, d'où résulte un courant qui traverse les faces latérales du parallépipède, entrant par exemple par la

face BD, et ressortant par la face AC.

En second lieu, si le parallépipède, ayant partout la même température, est parcouru par un courant longitudinal dirigé de AB vers CD, il se produit, comme dans un corps isotrope, un effet thermique longitudinal, qui consiste en un refroidissement de la face AB et un échauffement de la face CD. Mais, en outre, il se produit dans le cas général un effet thermique transversal par suite duquel une face latérale telle que BD tend à se refroidir, et sa parallèle AC à se réchauffer.

Les phénomènes transversaux, forces électromotrices, ou effets thermiques réversibles, disparaissent nécessairement lorsque les faces latérales sont parallèles à un plan de symétrie du cristal.

Ces particularités ont été signalées en 1854 par Sir W. Thomson¹. Elles lui ont servi de point de départ pour une théorie de la thermoélectricité cristalline qui présente une grande analogie de forme avec la théorie de la conductibilité pour la chaleur (Chapitre XXV).

¹ W. THOMSON (1854), *Math. and Phys. Papers*, I, 266, 324, 467; — T. LIEBISCH, *Gött. Nachr.* 1889, 531.

Les forces électromotrices, estimées suivant trois axes rectangulaires quelconques, sont liées aux chutes de température suivant les mêmes directions par des formules semblables à celles du § 379. Ces formules contiennent, dans le cas général, neuf coefficients dont trois disparaissent, comme au § 381, si l'on prend comme axes de coordonnées trois directions convenablement choisies (*axes de thermoélectricité*). Le pouvoir thermoélectrique longitudinal τ_n , par rapport à un métal isotrope donné, d'un parallépipède cristallisé dont la longueur forme avec les axes des angles α, β, γ est défini par la formule

$$\tau_n = \tau_x \cos^2 \alpha + \tau_y \cos^2 \beta + \tau_z \cos^2 \gamma.$$

Il dépend par conséquent, ainsi que M. Liebisch l'a fait remarquer, d'un ellipsoïde inverse analogue à celui du § 380. Les coefficients τ_x, τ_y, τ_z sont les *pouvoirs thermoélectriques principaux*, qui s'observent sur des barreaux parallèles respectivement aux trois axes de thermoélectricité.

471. Recherches expérimentales. — La variation de la thermoélectricité avec la direction des barreaux a été reconnue dans le *bismuth* et l'*antimoine*, tous deux rhomboédriques, par Svanberg, Franz et Matteucci¹. L'observation montre qu'un barreau de bismuth est toujours négatif par rapport au cuivre, mais que la force électromotrice produite est maximum si le barreau est taillé parallèlement à l'axe cristallographique, minimum s'il lui est perpendiculaire, et prend des valeurs intermédiaires pour les orientations intermédiaires. Le barreau parallèle à l'axe est donc négatif par rapport au barreau perpendiculaire à l'axe.

Un barreau d'antimoine est au contraire positif par rapport

¹ SVANBERG, *C. R.* 1850, XXXI, 250; — FRANZ, *Pogg. Ann.* 1851, LXXXIII, 374; 1852, LXXXV, 388; — MATTEUCCI, *Ann. de Chim.* 1855, XLIII, 470.

au cuivre ; mais la force électromotrice est minimum pour le barreau parallèle à l'axe, maximum pour le barreau perpendiculaire. C'est encore le barreau parallèle qui est le moins positif ou le plus négatif, comme dans le bismuth.

Cette différence est confirmée par le sens et la grandeur des effets Peltier étudiés par Matteucci. Le bismuth parallèle à l'axe, intercalé dans un circuit de fils de cuivre, manifeste dans tous les cas un réchauffement ou un refroidissement des points de jonction beaucoup plus intense que celui que l'on obtient avec le bismuth perpendiculaire. Lorsqu'on fait passer un courant du bismuth parallèle au bismuth perpendiculaire, il y a abaissement de température au point de jonction des deux tiges, tandis qu'il y a échauffement si la direction du courant est renversée.

Franz a vérifié que la force électromotrice est la même pour tous les barreaux également inclinés par rapport à l'axe, quel que soit leur azimut ; qu'elle est nulle entre deux barreaux de même orientation ; qu'elle est nulle enfin, comme dans un corps isotrope, si les deux bouts du barreau ont la même température. Ces lois ont été confirmées par M. Bäckström pour l'*oligiste*.

On obtient encore des manifestations thermoélectriques entre deux barreaux de même orientation, si on les met en contact après avoir chauffé l'un d'eux ; d'après Svanberg et Matteucci, le courant va, dans ce cas, du froid au chaud pour les barreaux perpendiculaires à l'axe, du chaud au froid pour les barreaux parallèles à l'axe.

472. M. Matthiessen ¹ a cherché à mesurer ces forces thermoélectriques pour le bismuth et l'antimoine. Les cristaux à comparer *c* et *d* (fig. 511) étaient pressés entre deux caisses

¹ A. MATTHIESSEN, *Pogg. Ann.* 1858, CIII, 412 ; — H. BÄCKSTRÖM, *Ofvers. Akad. Stockholm*, 1888, 553.

métalliques A et B remplies, l'une A d'huile chaude, l'autre B d'huile froide. La caisse B était formée de deux moitiés, accolées suivant un plan ab avec interposition d'une matière iso-

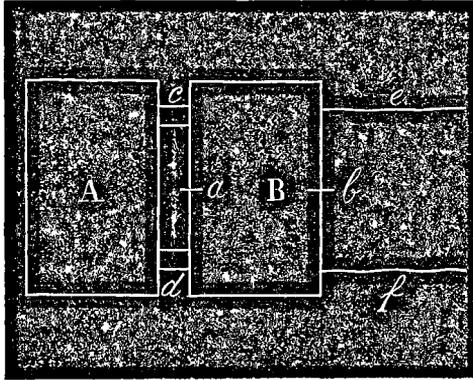


Fig. 511.

lante; chaque moitié étant liée à l'un des fils e , f du galvanomètre. Les résultats obtenus furent assez discordants; en moyenne, la force électromotrice, par rapport à l'argent, d'un barreau parallèle à l'axe était à celle d'un barreau perpendiculaire dans le rapport de 1,2-1,7 à 1,0-1,6 pour le bismuth, et dans le rapport de 1,1-1,3 à 1,5 pour l'antimoine.

Des déterminations plus précises ont été faites récemment par M. Bäckström sur l'oligiste.

Le cristal était pressé entre deux capsules de cuivre, liées à un électromètre sensible préalablement étalonné. Dans l'une des capsules circulait un courant de vapeur et dans l'autre un courant d'eau froide. La force électromotrice est toujours dirigée du cristal vers le cuivre à travers la surface de contact chauffée. Sa valeur est de 0,0002879 volt quand la normale à cette surface coïncide avec l'axe du cristal, de 0,0003138 quand elle lui est perpendiculaire, de 0,0002928 quand elle forme avec lui un angle de 27° . Le calcul par l'ellipsoïde

inverse (§ 470) donne, dans ce dernier cas, 0,0002933. L'accord est donc très satisfaisant.

M. Bäckström a encore fait quelques observations sur le *mispickel* (rhombique) et sur la *cobaltine* (hémicédrie pentagonale du système cubique). Dans ce dernier minéral, il n'a pas trouvé de force électromotrice entre les faces du cube et celles de l'octaèdre.

473. Des forces thermoélectriques transversales ont été observées par Franz ¹ dans le bismuth, et aussi dans des assemblages de plaques métalliques superposées comme le représente la figure 512, assemblages qui possèdent une sorte d'anisotropie

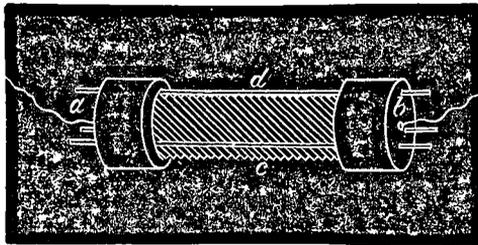


Fig. 512.

grossière. Un tel système, lié à un galvanomètre par ses deux bouts *a* et *b*, est parcouru par un courant dirigé de *a* vers *b* ou de *b* vers *a*, suivant que l'on échauffe sa face supérieure *d* ou sa face inférieure *c*.

* 474. Thermoélectricité de la pyrite et de la cobaltine. — Marbach a découvert en 1857 ² que les cristaux de

¹ FRANZ, *Pogg. Ann.* 1856, XCVII, 34.

² HANKEL, *Pogg. Ann.* 1844, LXII, 197; — MARBACH, *C. R.* 1857, XLV, 705; — STEFAN, *Pogg. Ann.* 1865, CXXIV, 632; — FRIEDEL, *Ann. de Chim.* 1869, XVII, 79; — STRÜVER, *Mem. Acad. Torino*, 1869, XXVI, 9; — G. ROSE, *Pogg. Ann.* 1871, CXLII, 1; — BREZINA, *Tscherm. Mitth.* 1872, 23; — FRIEDEL, *Assoc.*

pyrite de fer (hémiedrie pentagonale du système cubique) se partagent en deux classes qui possèdent des propriétés thermo-électriques opposées. Les uns sont plus négatifs que le bismuth et les autres plus positifs que l'antimoine. Sur 54 cristaux étudiés, il en avait trouvé 20 de la première classe, 34 de la seconde, et 4 formés d'un mélange de parties positives et de parties négatives.

Marbach a observé la même particularité dans la *cobaltine*, M. Groth dans la *smaltine*, MM. Schrauf et Dana dans la *scutterudite*, qui possèdent, la première certainement, les deux autres probablement, la même symétrie que la pyrite.

Marbach s'est demandé s'il n'y a pas quelque relation entre cette propriété singulière et l'hémiedrie à faces parallèles de ces cristaux.

L'existence d'une telle relation est en tout cas extrêmement douteuse. Dans les métaux, en effet, la thermoélectricité est très fortement influencée par de faibles impuretés ou par de faibles perturbations de structure. Il peut en être de même dans les cristaux. M. Stefan, MM. Schrauf et Dana ont trouvé des différences de signe thermoélectrique dans des cristaux de galène et d'autres minéraux incontestablement holoédriques.

Il convient cependant d'examiner dans quelle mesure et sous quelle forme l'hypothèse de Marbach serait compatible avec la loi de symétrie.

Soit A un cristal de pyrite, soient *a* et *b* deux formes hémiedriques conjuguées qui, sur ce cristal, peuvent se développer indépendamment l'une de l'autre, par exemple les deux dodécaèdres pentagonaux inverses dont la superposition reconstitue un cube

franc. 1873, 215; — GROTH, *Pogg. Ann.* 1874, CLII, 249; — SCHRAUF et DANA, *Sitzb. Akad. Wien*, 1874, LXIX, 142; — M. BAUER, *Ber. d. d. geol. Ges.* 1875, XXVII, 246; — FLETCHER, *Zeitsch. f. Kryst.* 1883, VII, 20; — Ch. SORET, *Bull. Soc. min.* 1884, VII, 338; — A. DE GRAMONT, *ibid.* 1884, VII, 235; 1885, VIII, 2; — J. CURIE, *ibid.* 1885, VIII, 127.

pyramidé (§ 76). Toutes les faces de a sont de même espèce et doivent avoir la même thermoélectricité. Il en est de même pour les faces de b . Mais les faces de a et celles de b sont d'espèces différentes, la symétrie ne s'opposerait pas à ce qu'elles eussent des signes thermoélectriques inverses. Or les observations de G. Rose et de M. Friedel paraissent exclure complètement une telle supposition. Les portions positives et négatives d'un cristal gardent le même signe dans toutes les directions; une même lame ne change pas de signe si on l'use de manière à rendre ses faces successivement parallèles à a ou à b . On rencontre enfin des cubes parfaitement formés, sans stries ni imperfections visibles, qui sont les uns positifs les autres négatifs, tandis que cette opposition de signe ne devrait se rencontrer que sur les formes hémihédriques.

D'autre part, il est aisé de voir que les deux *structures* conjuguées (§ 105) d'une même hémihédrie ne peuvent avoir des signes thermoélectriques opposés.

Soient en effet A' la structure conjuguée de A , et a' la forme qui correspond à a . Si la pyrite possède réellement l'hémihédrie pentagonale, A' et A sont superposables et ne diffèrent que par leur orientation dans l'espace. Il en est de même de leurs formes a et a' , celles-ci doivent avoir identiquement les mêmes propriétés.

On pourrait encore supposer que la pyrite est en réalité tétrartoédrique, bien que sa tétrartoédrie ne se manifeste pas dans ses formes extérieures. Dans ce cas, les deux structures A et A' ne seraient, il est vrai, pas superposables, mais elles seraient toujours symétriques l'une de l'autre, par rapport à un plan. Les forces thermoélectriques produites au contact d'un milieu isotrope et de deux formes correspondantes quelconques, a et a' par exemple, prises l'une sur le cristal A , l'autre sur le cristal A' , devraient être également symétriques l'une de

l'autre ; elles devraient donc être dirigées ou bien toutes deux du cristal vers le milieu isotrope, ou bien toutes deux du milieu isotrope vers le cristal. Le signe thermoélectrique des deux formes devrait être le même. Il ne pourrait en être autrement que si l'électricité positive et l'électricité négative correspondaient à deux phénomènes symétriques l'un de l'autre, ce que rien ne nous autorise à admettre.

En réalité, il semble que les cristaux d'un même gisement qui ont des signes thermoélectriques contraires, diffèrent par des caractères assez variables et incertains, mais qui n'établissent entre eux aucune relation de symétrie. D'après M. Hankel, l'octaèdre prédomine dans la cobaltine positive, le cube dans la cobaltine négative ; le cube et l'octaèdre dans la pyrite positive, les formes hémihédriques dans la pyrite négative. D'après M. Friedel, dans les cristaux mâclés formés de parties positives et négatives, les unes sont striées, les autres lisses, sans que, d'ailleurs, les parties striées ou lisses correspondent toujours au même signe. G. Rose a observé des différences analogues. D'après M. J. Curie, les dodécaèdres pentagonaux positifs sont presque toujours striés perpendiculairement à leurs arêtes principales, tandis que les dodécaèdres pentagonaux négatifs sont striés parallèlement à ces arêtes. Si donc l'opposition du signe de ces cristaux ne provient pas simplement de quelque circonstance accidentelle, il faut admettre que les deux variétés ont des structures qui ne sont ni superposables ni symétriques. La supposition que M. Curie fait à cet égard se rapproche beaucoup de l'espèce de tétartoédrie que nous avons indiquée au § 135, où des molécules à symétrie pentagonale pourraient prendre deux orientations différentes dans un réseau possédant lui-même la symétrie pentagonale.

CHAPITRE XXXI

PYROÉLECTRICITÉ ET PIÉZOÉLECTRICITÉ

PYROÉLECTRICITÉ

475. Pyroélectricité de la tourmaline. — On désigne sous le nom de *pyroélectricité* la propriété que possèdent un grand nombre de cristaux de s'électriser lorsqu'on fait varier leur température. Déjà au commencement du siècle dernier on avait observé que la *tourmaline*, récemment apportée de Ceylan par les Hollandais, jouit, lorsqu'elle est chauffée, de la faculté d'attirer les corps légers tels que les cendres.

Æpinus, en 1756, reconnut la nature électrique de ce phénomène, dont les caractères fondamentaux furent découverts successivement par Canton d'abord et par Bergman, puis par Haüy et par A.-C. Becquerel¹.

¹ ÆPINUS, *Mém. Acad. Berlin*, 1756, XII, 105; — CANTON, *Gentleman's Mag.* 1759; — BERGMAN, *Abh. Schwed. Akad.* 1768, XXVIII, 58; — HAÜY, *Mém. de l'Acad.* 1785, 206; *Ann. de Chim.* 1791, IX, 59; 1816, I, 447; 1818, VIII, 383; *Traité de Minéralogie*, Paris 1801, I, 236; III, 43; — A.-C. BECQUEREL, *Ann. de Chim.* 1828, XXXVII, 355. — Voyez WIEDEMANN, *Die Lehre der Electricität*, Leipzig 1883, II, 315; et HANKEL, *Abh. Leipzig*, 1872, X, 345.

Plusieurs auteurs confondent sous le même nom de *thermoélectricité* les phé-

Ces caractères fondamentaux sont les suivants :

1° *Lorsque la tourmaline est restée pendant longtemps à une température constante, elle ne présente aucune trace d'électrisation.*

2° *Lorsqu'on la chauffe, elle se charge d'électricités de noms contraires à ses deux extrémités. On donne le nom de pôle analogue à l'extrémité qui se charge positivement pendant l'échauffement, et celui de pôle antilogue à l'extrémité qui se charge négativement.*

3° *Si la température redevient stationnaire, quelle que soit d'ailleurs sa valeur absolue, le dégagement électrique s'arrête, et les électricités développées pendant l'échauffement se dissipent peu à peu par suite de la conductibilité du cristal lui-même et du milieu ambiant, comme cela aurait lieu pour un corps électrisé quelconque. On peut aussi les faire disparaître instantanément en plongeant la tourmaline dans de l'eau à la même température, ou en la passant rapidement dans une flamme.*

4° *Si, après l'avoir ainsi déchargée, on la laisse se refroidir, elle s'électrise de nouveau, mais en sens inverse; le pôle analogue devient négatif pendant le refroidissement, tandis que le pôle antilogue devient positif.*

5° *Les deux électricités se développent toujours en quantités équivalentes¹. Un vase métallique isolé rempli d'eau chaude ne*

nomènes thermoélectriques proprement dits, étudiés au chapitre précédent, et les phénomènes pyroélectriques que nous abordons ici et qui offrent des caractères assez différents.

Outre les forces électromotrices thermoélectriques, pyroélectriques et piézoélectriques, il se produit encore des forces électromotrices hydroélectriques au contact d'un cristal et d'un liquide capable de l'attaquer chimiquement; ces forces varient probablement d'une face à l'autre d'un même cristal; mais, jusqu'à présent, il n'a pas été possible de découvrir quelque régularité dans ce phénomène. BÄCKSTRÖM, *Ofvers. Akad. Stockholm* 1888, 533; — DE HANSEN, *Arch. Sc. phys. et nat.* 1890, XXIV, 670.

¹ Ce fait, indiqué par les anciens observateurs, a été confirmé par M. DORN, *Wied. Ann.* 1885, XXVI, 328.

s'électrise pas quand on y plonge une tourmaline; celle-ci doit donc produire en s'échauffant autant d'électricité positive que d'électricité négative.

6° *La propriété pyroélectrique appartient non seulement au cristal pris dans son ensemble, mais aussi à chacune de ses parties.* Si l'on brise une tourmaline, chacun de ses fragments se comporte comme le cristal primitif. Il en résulte que si la tourmaline est échauffée irrégulièrement, ses diverses parties s'électrisent chacune pour son compte, et la distribution finale des électricités peut être plus complexe que lorsque l'échauffement est uniforme.

476. Recherches quantitatives de Gaugain et de M. Riecke. — C'est à Gaugain¹ que l'on doit les premières

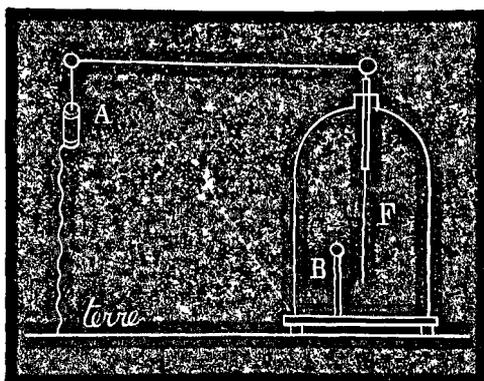


Fig. 513.

déterminations précises des quantités d'électricité dégagées. Les tourmalines à étudier A (fig. 513) étaient attachées à leurs deux bouts par des fils métalliques fins, dont l'un était mis en communication avec la terre, et dont l'autre était lié à la feuille

¹ GAUGAIN, *C. R.* 1856, XLII, 1264; XLIII, 916, 1122; 1857, XLIV, 628; *Ann. de Chim.* 1859, LVII, 5.

d'or F d'un électroscope, isolée sous une cloche de verre en face du bouton métallique B lié au sol. La feuille d'or, dès qu'elle a reçu une certaine charge, qui est toujours la même pour un même instrument, est attirée par le bouton B, au contact duquel elle se décharge, retombe, se charge progressivement et se décharge de nouveau; de sorte que le nombre de ses battements permet de mesurer la quantité d'électricité dégagée par le cristal pendant qu'il s'échauffe ou se refroidit.

Gaugain a reconnu : 1° Que la *quantité totale d'électricité produite par une même tourmaline dépend uniquement des limites entre lesquelles sa température a varié, et nullement de la rapidité avec laquelle le changement de température s'est produit.*

2° *Entre les mêmes limites, la quantité d'électricité produite par un échauffement est égale et de signe contraire à celle qui est produite par un refroidissement.*

3° *Cette quantité q est proportionnelle à la section S de la tourmaline et indépendante de sa longueur. On peut donc poser*

$$q = kS,$$

en représentant par k un facteur constant. Le moment électrique de la tourmaline s'obtient en multipliant la charge q de l'un de ses bouts par sa longueur L ; si v est le volume du cristal, on a donc

$$Lq = kSL = kv.$$

Le facteur k représente donc le *moment de l'unité de volume*, qui se trouve ainsi avoir la même valeur pour les tourmalines de même espèce soumises à une même variation de température.

Les mesures précises sont rendues extraordinairement difficiles par le fait que la tourmaline possède toujours une certaine conductibilité soit dans sa masse, soit surtout à sa surface; cette conductibilité diminue toujours la quantité mesurée, même

lorsque, par l'emploi d'un électroscope à décharge, on empêche constamment la charge de la tourmaline de dépasser une faible valeur. L'erreur qui en résulte varie avec la température, avec la nature du cristal étudié, avec la durée du refroidissement ou de l'échauffement. Cette durée elle-même dépend des dimensions et de la nature de la tourmaline.

Toutes ces circonstances ont été étudiées récemment avec le plus grand soin par M. Riecke¹. Ce savant a vérifié que *le signe de l'électricité dégagée reste le même pendant toute la durée du refroidissement*, et qu'*une tourmaline, uniformément chauffée et arrivée à l'état neutre par un long séjour dans une étuve, s'électrise par refroidissement et reste électrisée pendant plusieurs heures si l'on a soin de la suspendre par un fil de cocon dans un vase rempli d'air sec sans poussières et un peu raréfié*. La disparition de l'électrisation quand la température est stationnaire paraît donc bien résulter, comme nous l'avons admis au § 475, de l'effet de la conductibilité.

Le moment k de l'unité de volume, qui correspond à une variation θ de la température, est assez variable soit quant à sa grandeur, soit quant à la loi suivant laquelle il dépend de θ , suivant la provenance de la tourmaline étudiée.

Quant à l'ordre de grandeur des quantités d'électricité dégagées, MM. Riecke et Voigt évaluent, d'après la moyenne des mesures, d'ailleurs assez discordantes, faites sur un groupe de cinq tourmalines du Brésil, que s'il n'y avait aucune perte par conductibilité et si toute l'électricité restait accumulée sur les bases, la densité superficielle produite par une variation de température de 100° serait représentée par environ 165 unités électrostatiques C. G. S.; c'est une valeur vingt-cinq fois plus forte que celle de la densité qui se développe habituellement

¹ RIECKE, *Wied. Ann.* 1886, XXVIII, 43; 1887, XXXI, 889; 1890, XL, 264
— RIECKE et VOIGT, *ibid.* 1892, XLV, 551.

sur les disques tournants d'une machine électrique à induction.

477. Méthode expérimentale de Riess, de Rose et de M. Hankel¹. — Lorsqu'on veut étudier la distribution des électricités développées par l'échauffement ou le refroidissement, on peut procéder de diverses manières. Jusqu'à ces dernières années, la seule méthode en usage, appliquée principalement dans les longues recherches de M. Hankel, consistait à approcher de la région du cristal que l'on voulait examiner un fil de platine mis en relation par son autre bout avec un électromètre. L'électromètre employé était le plus souvent un électromètre de Behrens, de Bohnenberger ou de Hankel, formé en principe d'une feuille d'or placée entre deux plaques métalliques qu'une source d'électricité convenable, pile sèche ou autre, maintient chargées, l'une positivement, l'autre négativement.

¹ KÖHLER, *Pogg. Ann.* 1829, XVII, 146 (tourmaline, calamine, boracite); — G. ROSE, *Abh. Akad. Berlin*, 1836, 215 (tourmaline); — RIESS et G. ROSE, *Pogg. Ann.* 1843, LIX, 353; 1844, LXI, 659 (tourmaline, calamine, boracite, rhodizite, topaze, scolézite, axinite, prehnite); — RIESS, *Die Lehre von der Reibungseletrizität*, 1853, II, (struvite, sucre); *Fortschr. d. Phys.* 1846, 363 (struvite); — HAUSMANN, *Gætt. Nachr.* 1846, 121 (struvite); — BÖTTGER, *Pogg. Ann.* 1838, XLIII, 659 (acide tartrique); — HANKEL, *De thermoelectricitate crystallorum*, Thèses, Halle 1839 et 1840; *Pogg. Ann.* 1840, XLIX, 493 (calamine, sucre, acide tartrique, axinite, prehnite, mésotype; 1840, L, 237, 471, 605 (quartz, boracite, tourmaline, topaze, sphère); 1841, LIII, 620 (tartrate neutre de potasse); 1842, LVI, 37, 58; 1844, LXI, 281 (boracite, topaze); 1848, LXXIV, 231 (boracite, sphère); 1867, CXXXI, 621 (quartz); *Wied. Ann.* 1833, XIX, 818; 1835, XXVI, 150 (quartz); *Abh. Leipzig*, 1866, VIII, 321 (quartz); 1870, IX, 357 (topaze); 1872, X, 271, 343 (barytine, aragonite); 1875, XI, 203, 479 (calcite, béryl, idocrase, apophyllite, diopside, gypse, orthose, albite); 1878, XII, 3 (brucite, célestine, prehnite, natrolite, scolézite, apatite, datolite, axinite); 1879, XII, 203 (fluorine); 1881, XII, 459 (quartz); 1882, XII, 551 (helvine, mellite, pyromorphite, mimétèse, phénakite, pennine, diopside, strontianite, withérite, céruse, euclase, sphère); 1887, XIV, 271 (quartz, boracite); — HANKEL et LINDENBERG, 1892, XVIII, 361 (chlorate de soude, struvite, sel de Seignette, bichromate de potasse, hyposulfate de potasse, résorcine, sucre de lait).

La feuille d'or est attirée vers l'une ou l'autre de ces plaques suivant le signe de l'électricité qu'elle reçoit du cristal, et l'on mesure ses déplacements à l'aide d'un microscope dont l'oculaire porte une échelle graduée.

Le cristal peut être chauffé dans une étuve ou dans un vase rempli de limaille, afin d'égaliser les températures, et étudié pendant son refroidissement après qu'on l'a rapidement déchargé à l'aide d'une flamme d'alcool.

Dans les expériences de M. Hankel, le cristal était souvent entouré de limaille de cuivre ou de platine, à l'exception des points de sa surface sur lesquels devait porter l'investigation. Dans ces conditions, l'échauffement n'est pas tout à fait uniforme, et ce fait paraît ne pas être sans influence sur les résultats.

478. Méthode expérimentale de M. Kundt. — M. Kundt¹ a indiqué un procédé beaucoup plus rapide : on saupoudre le cristal avec un mélange de soufre et de minium en poudre fine que l'on projette, à l'aide d'une sorte de soufflet, à travers un tamis de mousseline. Les parcelles de soufre et de minium s'électrisent par leur frottement réciproque ; les premières, électrisées négativement, se portent sur les régions positives du cristal ; le minium, électrisé positivement, s'accumule sur les régions négatives. La coloration différente des poudres permet de juger d'un seul coup d'œil l'ensemble de la distribution. Le cristal est chauffé dans un bain d'air, passé rapidement dans une flamme et saupoudré pendant son refroidissement.

¹ A. KUNDT, *Wied. Ann.* 1883, XX, 592 ; — KUNDT et BLASIUS, *ibid.* 1886, XXVIII, 145 ; — KOLENKO, *Zeitsch. f. Kryst.* 1884, IX, 1 ; *Wied. Ann.* 1886, XXIX, 416 (quartz) ; — K. MACK, *Wied. Ann.* 1884, XXI, 410 (boracite) ; 1886, XXVIII, 153 (topaze) ; — KALKOWSKY, *Zeitsch. f. Kryst.* 1885, XI, 1 (struvite) ; — SCHEDTLER, *N. Jahrb.* 1886, Beilagebd. IV, 519 (tourmaline) ; — BAUER et BRAUNS, *ibid.* 1889, I, 1 (calamine).

On peut également obtenir des effets très nets en plaçant le corps à étudier, taillé sous forme de lame à faces parallèles, sur un bloc métallique chauffé, et en saupoudrant pendant l'échauffement.

Il faut avoir soin de n'opérer que sur des faces planes et homogènes; les fissures s'électrisent en général en sens inverse du reste de la surface.

Cette méthode est particulièrement commode pour l'étude des mâcles enchevêtrées qu'il serait à peu près impossible de débrouiller à l'aide d'un électromètre. Ce cas se présente fréquemment dans le quartz, dans la tourmaline; celle-ci paraît formée le plus souvent d'un enchevêtrement de portions hémimorphes disposées en sens inverse, qui présentent les unes leur pôle analogue, les autres leur pôle antilogue sur une section perpendiculaire à l'axe; on obtient sur une telle section des figures compliquées.

479. Méthode expérimentale de M. Friedel ¹. — Une demi-sphère métallique de petites dimensions, en communication avec un électromètre, est chauffée à une température convenable et appliquée rapidement sur le cristal froid. Lorsqu'on opère de la sorte aux deux extrémités d'un axe de pyroélectricité, l'électromètre donne des déviations en sens inverse.

Cette méthode présente des caractères particuliers résultant de ce que l'échauffement du cristal n'est pas uniforme, bien qu'il s'opère dans des conditions nettement définies et toujours les mêmes, pourvu que la sphère soit notablement plus petite que la face sur laquelle on l'applique.

¹ C. FRIEDEL, *Bull. Soc. min.* 1879, II, 31 (quartz, topaze, blende); — C. FRIEDEL et J. CURIE, *ibid.* 1882, V, 282 (quartz); 1883, VI, 191 (chlorate de soude, blende, boracite); 1885, VIII, 16 (topaze); — C. FRIEDEL et A. de GRAMONT, *ibid.* 1885, VIII, 75 (scolézite).

480. Cas simples principaux. — Les phénomènes considérés dans ce chapitre sont fort complexes; ils varient suivant les conditions dans lesquelles se produisent les changements de température; ils peuvent être modifiés par la forme extérieure du cristal. Il convient de supprimer d'abord cette dernière cause de perturbations, en supposant toujours le cristal parfaitement développé, ou mieux encore en le supposant taillé en forme de sphère; il convient ensuite de faire abstraction de tous les effets dus à sa conductibilité. Il est enfin nécessaire de spécifier nettement les conditions expérimentales de l'échauffement ou du refroidissement; à cet égard, on peut distinguer *a priori* deux cas simples principaux, qui peuvent être difficiles à réaliser complètement dans la pratique, mais dont on se rapproche souvent plus ou moins, et qui sont nettement caractérisés par leur symétrie ¹.

Le premier cas (*pyroélectricité polaire homogène*) est celui où la sphère cristalline est supposée avoir une même température uniforme dans toute sa masse au moment où on la neutralise en la passant rapidement à travers une flamme, et une autre température, également uniforme dans toute sa masse, au moment où l'on étudie son électrisation par le procédé de M. Kundt ou à l'aide d'un électroscope.

Le second cas simple (*pyroélectricité axiale*²) est celui où la sphère a une température variable d'un point à l'autre, mais également distribuée tout autour de celui de ses diamètres qui aboutit au point dont on étudie l'électrisation.

481. Conditions de symétrie de la pyroélectricité

¹ La distinction de ces deux cas et de leurs conditions de symétrie est due à MM. FRIEDEL et CURIE, *Bull. Soc. min.* 1882, V, 282; — J. et P. CURIE, *J. de Phys.* 1882, I, 245.

² MALLARD, *Cristallographie*, II, 575,

polaire produite par une variation de température homogène. — L'électrisation ne dépendant que de la température et de la structure du cristal, qui sont toutes deux homogènes, doit avoir partout la même intensité et la même direction (fig. 514). Si, par un échauffement, l'extrémité A du diamètre AA' de la sphère se charge positivement et l'extrémité A' négativement, il doit en être de même sur une droite quelconque parallèle à AA'. La surface de l'hémisphère supérieur sera donc positive, celle de l'hémisphère inférieur sera négative, et les deux hémisphères seront séparés par une ligne équatoriale neutre. L'influence de ces charges superficielles laisse du reste une intensité et une direction constantes à l'électrisation dans l'intérieur de la sphère (§ 428); il n'y a d'électricité que sur la surface.

La ligne AA' est ce que l'on appelle un *axe de pyroélectricité polaire*. On voit aisément que :

1° *Il ne peut y avoir plus d'un axe de pyroélectricité polaire,*

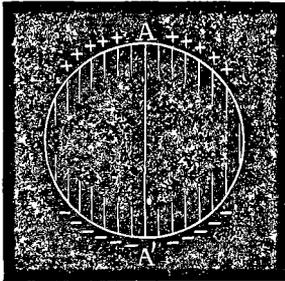


Fig. 514.

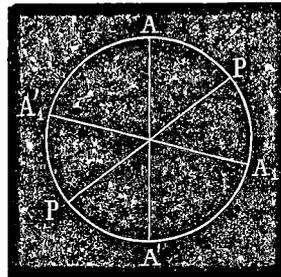


Fig. 515.

car sa direction est déterminée par le sens dans lequel s'effectue la séparation des deux fluides hypothétiques ;

2° *Un axe pyroélectrique ne peut se rencontrer dans un cristal possédant un centre de symétrie, puisque ses deux extrémités A et A' ont des propriétés différentes ;*

3° *S'il existe des plans de symétrie, ceux-ci doivent être paral-*

lèles à AA' , car un plan perpendiculaire à AA' entraînerait l'identité des deux directions opposées AA' et $A'A$; et un plan oblique PP (fig. 515) entraînerait l'existence d'un second axe pyroélectrique $A_1A'_1$, ce qui ne peut être;

4° Pour des raisons analogues, il ne peut y avoir plus d'un seul axe de symétrie, et cet axe, s'il existe, doit coïncider avec l'axe pyroélectrique;

5° Enfin, il ne pourrait exister d'axe pyroélectrique si la structure du cristal se trouvait transformée dans sa symétrie (§ 105) par un retournement bout pour bout. Si, par un échauffement homogène, A devenait positif et A' négatif, il en serait de même dans toutes les positions; or, après le retournement, les deux structures sont symétriques l'une de l'autre et ne peuvent avoir que des propriétés symétriques, à l'égard d'un phénomène sans symétrie propre comme un échauffement homogène. Il faudrait donc que l'électrisation négative de A' fût un phénomène symétrique, par rapport à un plan, de l'électrisation positive de A . Tous les faits observés en électricité nous prouvent qu'une semblable relation n'existe pas.

482. Cristaux hémimorphes pyroélectriques¹. —

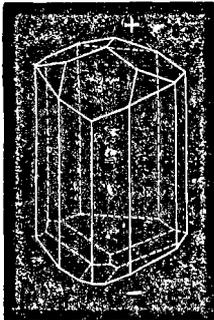


Fig. 516.

Les conditions de symétrie qui viennent d'être énumérées se rencontrent dans les systèmes suivants, qui comprennent en particulier toutes les hémimorphies; les signes $+$ et $-$ des figures donnent le signe de l'électrisation développée par refroidissement.

1° L'hémiédrie hémimorphe et la tétrartoédrie pyramidale du système quadratique (§§ 82, 83).

¹ La relation de la pyroélectricité et de l'hémimorphie a été reconnue par Haüy, *Minéralogie*, Paris 1801, I, 236.

2° L'hémiédrie hémimorphe, la tétartoédrie pyramidale, la tétartoédrie hémimorphe rhomboédrique et l'ogdoédrie du système hexagonal (§§ 89, 90, 96, 97). La pyroélectricité a été observée sur la *tourmaline* (fig. 516); l'axe pyroélectrique se confond avec l'axe principal cristallographique.

3° L'hémiédrie hémimorphe du système rhombique (§ 99). Un axe de pyroélectricité coïncidant avec l'axe d'hémimorphie a été observé dans la *calamine* (fig. 517), la *struvite*, la *résorcine*.

4° Les deux hémiédries du système clinorhombique (§§ 100, 101). Dans l'hémiédrie hémimorphe, l'axe pyroélectrique coïn-

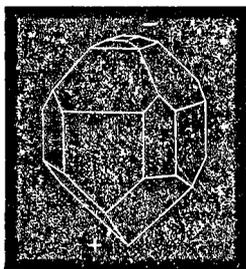


Fig. 517.

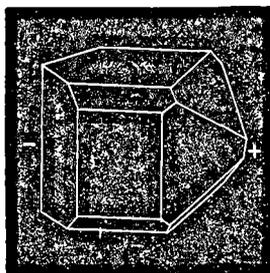


Fig. 518.

cide avec l'axe de symétrie du système : *sucre de lait*, *sucre de canne* (fig. 518), *acide tartrique*, *tartrate de potasse*; dans l'hémiédrie antimorphe, il est compris dans le plan de symétrie : *scolézite*.

5° L'hémiédrie du système triclinique; l'orientation de l'axe de pyroélectricité ne peut être fixée *a priori*.

Les conditions expérimentales supposées au § 481 sont difficiles à réaliser; dans un cristal qui s'échauffe ou se refroidit, la température est nécessairement variable d'un point à l'autre. Si l'on rend la température stationnaire après l'avoir fait varier, les électricités développées se dissipent en général par conductibilité avant que l'équilibre de température ait le temps de

s'établir. Aussi n'a-t-on pas actuellement la preuve certaine que toutes les substances hémimorphes possèdent réellement le genre de pyroélectricité dont nous venons de parler. Les expériences de M. Riecke citées au § 476 nous montrent cependant que la tourmaline possède très probablement cette propriété.

D'autre part, Riess et Rose, et plus récemment MM. Friedel et J. Curie, ont reconnu que des cristaux non hémimorphes, tels que le quartz, ne s'électrisent pas lorsqu'ils sont chauffés avec des précautions spéciales et d'une manière très uniforme.

483. Conditions de symétrie de la pyroélectricité axiale. — Le second cas simple mentionné au § 480 est réalisé, par exemple, lorsque, suivant la méthode de M. Friedel, on applique sur la surface de la sphère une demi-boule chauffée

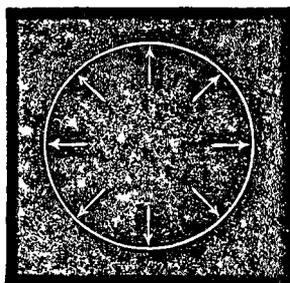


Fig. 519.

de petites dimensions. On peut alors admettre sans grande erreur que les températures, dans le cristal, sont uniformément distribuées tout autour de la normale au point touché. La symétrie du phénomène thermique, d'où résulte l'électrisation, peut être représentée d'une manière abrégée par une flèche dirigée du centre de la sphère vers le point étudié. Pour chaque point de la surface que l'on examine par ce procédé la distribution thermique prend une orientation différente par rapport au cristal (fig. 519). Il n'y a plus aucune raison pour que la grandeur et la direction de l'électrisation soient les mêmes partout.

Toutefois, le phénomène thermique étant, sur l'ensemble des observations faites ainsi sur une même sphère, symétrique par rapport au centre, le phénomène électrique qui en résulte ne peut dépendre que de la structure du cristal, et doit être

compatible avec la symétrie de celui-ci. Les régions cristallographiquement semblables s'électrifieront de la même manière; les régions dissemblables pourront s'électrifier de manières différentes.

En particulier, nous voyons aisément qu'il ne peut y avoir de pyroélectricité polaire, c'est-à-dire d'électrisation en sens inverse des deux extrémités d'un même diamètre, que si le cristal ne possède pas de centre de symétrie, et si le diamètre considéré n'est perpendiculaire ni à un plan de symétrie, ni à un axe de symétrie d'ordre pair, ou plus généralement si les deux bouts du diamètre considéré ne sont ni superposables, ni symétriques l'un par rapport à l'autre.

Ce cas est plus général que celui que nous avons considéré précédemment, parce qu'ici chaque point de la surface de la sphère s'électrise pour son compte et à sa manière. Il peut y avoir plusieurs axes de pyroélectricité, ou plutôt plusieurs diamètres suivant lesquels l'électrisation polaire présente des maxima d'intensité. Si le cristal est hémimorphe, son axe d'hémimorphie sera naturellement compris parmi ces axes de pyroélectricité. Les considérations qui précèdent ne donnent d'ailleurs que la symétrie minimum des manifestations électriques; celles-ci peuvent toujours être plus symétriques que le cristal (§ 153), ou même ne pas se produire.

On peut observer la pyroélectricité axiale en appliquant la demi-boule de M. Friedel, non plus sur une sphère, mais sur une lame à faces parallèles. L'expérience, répétée successivement sur les deux faces, donne des électrisations contraires si la lame est normale à une ligne d'électrisation polaire. Mais le développement d'électricité peut disparaître plus ou moins complètement si la demi-boule est assez grande pour déborder de tous côtés la lame cristalline. Dans ce cas, il peut arriver en effet que l'échauffement soit assez uniforme pour réaliser à certains

égards les conditions de la pyroélectricité homogène, et que la lame ne s'électrise que si sa normale est un axe d'hémimorphie.

Quand une sphère cristallisée se refroidit également par tous les points de sa surface, ses conditions thermiques sont celles de la pyroélectricité axiale, et cela surtout si le refroidissement n'atteint qu'une couche superficielle de faible épaisseur; on se rapproche des conditions de la pyroélectricité homogène à mesure que les chutes de température deviennent moins marquées. Lorsque, suivant le procédé de M. Hankel, on chauffe le cristal dans une limaille métallique qui l'enveloppe complètement, sauf le point sur lequel porte l'investigation, ce point se trouve, pendant l'échauffement, plus froid que le reste du cristal; les conditions thermiques sont encore à peu près celles de la pyroélectricité axiale, mais le signe de l'électrisation est inverse de celui que donnerait l'application sur le cristal froid de la boule chaude de M. Friedel.

Un cristal possédant un centre de symétrie, s'il est taillé en forme de sphère ou s'il est au moins régulièrement développé, et s'il est soumis à un échauffement ou à un refroidissement superficiel régulier, ne peut donner des manifestations électriques de signe contraire aux deux extrémités d'un même diamètre. La symétrie ne s'oppose pas d'ailleurs à ce que le cristal s'électrise et à ce que les régions qui ne sont pas semblables cristallographiquement prennent des polarités inverses.

En fait, les travaux de MM. Friedel, Curie et de Gramont montrent que, dans les conditions supposées, l'électrisation est très faible ou nulle.

Mais si la distribution des températures est plus compliquée, il semble que tous les cristaux soient susceptibles de s'électriser. C'est là un fait curieux et important dont on doit la connaissance à M. Hankel¹.

¹ Quelquefois l'électrisation de cristaux centrés en apparence s'explique

484. Cristaux pyroélectriques à plusieurs axes. —

Les conditions thermiques supposées au paragraphe précédent se rapprochent donc beaucoup de celles qui sont le plus souvent réalisées dans les expériences.

Il faut noter seulement que, lorsqu'on n'opère pas sur une sphère, l'influence de la forme extérieure qui modifie la distribution des températures, c'est-à-dire la cause même des effets observés, agit beaucoup plus que dans le cas du § 481. Lorsque, en effet, la température est partout la même, la forme extérieure ne joue qu'un rôle tout à fait secondaire résultant de ce que, si cette forme n'est pas sphérique, l'influence de l'électricité superficielle réagit sur la distribution de l'électrisation intérieure du cristal et l'empêche d'être tout à fait uniforme.

Dans l'hémiédrie antimorphe du système clinorhombique (§ 101), toute direction comprise dans le plan de symétrie peut s'électriser polairement. D'après MM. Friedel et de Gramont, il y a dans la *scolézite* deux directions qui possèdent cette propriété d'une manière particulièrement marquée.

Dans l'hémiédrie sphénoïdale du système rhombique (§ 98), on peut citer le *sel de Seignette* (fig. 520), étudié par MM. Hankel et Lindenberg. Les régions

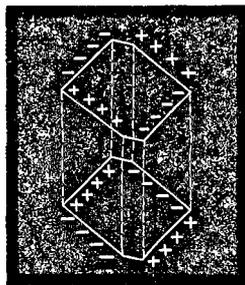


Fig. 520.

qui correspondent aux faces du sphénoèdre, et les régions opposées qui correspondent aux sommets, s'électrisent en sens contraires.

directement par des mâcles mimétiques de cristaux de symétrie inférieure. Tel est certainement le cas de la topaze et de la boracite, MACK, *loc. cit.* — D'après M. BECKENKAMP, *Zeitsch. f. Kryst.* 1888, XIV, 375; 1890, XVII, 321, il en serait toujours ainsi; les molécules posséderaient par elles-mêmes des électrisations opposées à leurs deux bouts, et les cristaux non hémimorphes résulteraient toujours de groupements convenables de ces molécules. Cette manière de voir est contestée par M. WULFF, *ibid.* 1891, XVIII, 185.

L'électrisation n'est pas du reste un phénomène nécessaire; M. de Gramont² n'a pas pu la constater dans le *sulfate de magnésie* et dans le *sulfate de cobalt*, qui appartiennent au même système.

Dans la tétartoédrie rhomboédrique hémimorphe, la *tourmaline*, étudiée par le procédé de M. Friedel, présente non seulement un axe de pyroélectricité principal, mais aussi trois axes horizontaux plus faibles contenus dans les plans de symétrie¹.

Le *quartz* (tétartoédrie trapézoédrique du système hexagonal, § 94) ne présente aucune pyroélectricité suivant son axe principal. Mais il en est autrement des trois axes

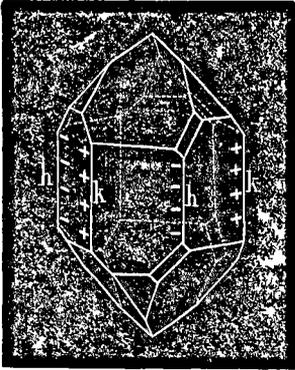


Fig. 521.

binares horizontaux. On voit clairement, en se reportant à la figure 215 du § 94, que les directions qui joignent les milieux des arêtes opposées du prisme hexagonal possèdent une sorte d'hémimorphie : les deux arêtes opposées sont d'espèces différentes.

L'observation montre en effet que par refroidissement les arêtes verticales qui portent les facettes tétartoédriques (fig. 521) s'électrisent négativement, les arêtes opposées positivement³.

² A. DE GRAMONT, *Bull. Soc. min.* 1884, VII, 235.

¹ C. FRIEDEL; voyez J. et P. CURIE, *J. de Phys.* 1882, I, 247.

³ FRIEDEL, CURIE, KUNDT, KOLENKO, loc. cit. — M. HANKEL a obtenu une distribution inverse, et des zones positives et négatives inclinées obliquement dans un sens ou dans l'autre, suivant qu'il opérât sur un quartz gauche ou sur un quartz droit. Cette obliquité des zones est d'accord avec la symétrie du système et ne viole aucunement les règles posées au § 483; il est probable cependant que ce n'est qu'une perturbation résultant de la forme extérieure du cristal. Quant au renversement du sens de l'électrisation, M. Hankel l'explique par une excitation spéciale due au rayonnement soit de la flamme d'alcool, soit de la demi-boule chaude (actinoélectricité), qui serait venue troubler les résul-

Une lame de quartz perpendiculaire à l'axe ternaire, déposée sur une plaque métallique chauffée, se partage en six zones qui sont électrisées en sens inverse (fig. 522), comme par le *refroidissement* du cristal entier. Dans ce cas, en effet, la lame cristalline s'échauffe surtout par le centre, les températures vont en diminuant vers les bords, comme cela aurait lieu dans le refroidissement à l'air libre (Kolenko). Cette expérience fournit donc une vérification intéressante des considérations théoriques du § 483.

Il en est de même de l'expérience suivante qui est due à M. Röntgen¹.

Sur une lame de quartz perpendiculaire à l'axe optique, M. Röntgen colle un anneau de papier d'étain qu'il découpe

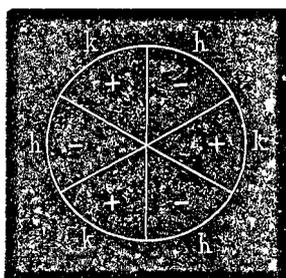


Fig. 522.

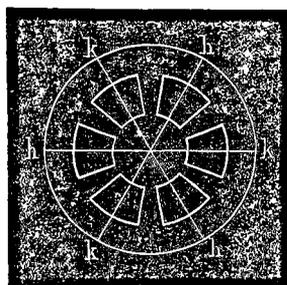


Fig. 523.

par des fentes radiales en six secteurs, isolés les uns des autres et placés chacun sur une extrémité d'un axe pyroélectrique

tats des observateurs que nous avons cités. MM. Röntgen, Friedel et Curie l'expliquent plus simplement par les conditions particulières de l'échauffement dans les expériences de M. Hankel.

M. Hankel a résumé, dans l'ouvrage de M. G. WIEDEMANN, *Die Lehre der Elektrizität*, Leipzig 1883, II, 329, ses recherches sur la *photoélectricité* et sur l'*actinoélectricité*. D'après cet auteur, les manifestations dues à la photoélectricité se produisent dans certaines fluorines sous l'influence des rayons ultraviolets; celles dues à l'actinoélectricité, dans le quartz sous l'influence des rayons calorifiques.

¹ RÖNTGEN, *Wied. Ann.* 1883, XIX, 513.

(fig. 523). Les trois secteurs h étant liés à un électromètre et les trois autres k à la terre, il constate que, lorsque le quartz est chauffé par le centre de la plaque, les secteurs h s'électrisent négativement, tandis qu'ils s'électrisent positivement lorsque la lame est chauffée par sa partie périphérique. Il est clair que la distribution des températures ressemble, dans le premier cas, à celle qui se produirait dans le cristal entier pendant le refroidissement à l'air libre, et, dans le second cas, à celle qui se produirait pendant l'échauffement.

Une sphère qui se refroidit régulièrement se partage également en six zones égales et alternativement de signes contraires, distribuées autour de l'axe principal.

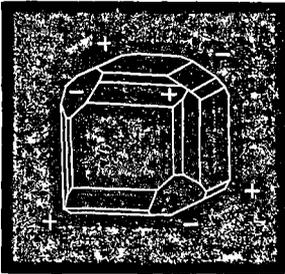


Fig. 524.

Cette distribution est du reste souvent troublée par des macles intérieures plus ou moins complexes.

L'*hyposulfate de potassium*, appartenant au même système, se comporte comme le quartz (Hankel et Lindenberg).

Dans le système cubique, la *blende* (Friedel), l'*helvine* (Hankel), qui sont tétraédriques, et le *chlorate de soude* (Friedel et Curie, Hankel et Lindenberg, fig. 524), qui est tétartoédrique, s'électrisent en sens inverses dans les régions qui correspondent aux faces et aux sommets du tétraèdre.

485. Pyroélectricité des cristaux conducteurs. — M. Friedel a recherché¹ s'il se produit des manifestations pyroélectriques dans les cristaux conducteurs qui présentent une hémiedrie à faces inclinées. Il a reconnu qu'une lame à faces

¹ FRIEDEL, *Ann. de Chim.* 1869, XVII, 79.

parallèles taillée dans un cristal de *cuiivre gris* (hémiedrie tétraédrique du système cubique) parallèlement à une face du tétraèdre, et placée dans une étuve entre deux fils de platine liés à un galvanomètre de grande résistance, donne un courant qui, pendant l'échauffement, passe du platine au cristal à travers le point de contact situé du côté du sommet du tétraèdre. Ce courant cesse quand l'équilibre de température est établi, et reprend en sens inverse pendant le refroidissement. Le même phénomène a lieu avec avec une lame de *chalcopyrite* (hémiedrie sphénoïdale du système quadratique), sauf que le courant circule en sens contraire.

Il faut avoir soin de n'opérer que sur des cristaux taillés en lames à faces parallèles. Avec des cristaux tétraédriques entiers il se produit toujours des courants thermoélectriques, offrant d'ailleurs les mêmes caractères, qui résultent de la vitesse inégale avec laquelle la base et le sommet du tétraèdre s'échauffent ou se refroidissent.

Il est difficile de se rendre compte de la véritable signification des expériences de M. Friedel, et l'on peut se demander si le courant observé a bien la même origine que la pyroélectricité des cristaux isolants.

486. Relation de la pyroélectricité polaire et des formes cristallines. — Le sens de l'électrisation par échauffement, par exemple, est lié au sens de l'hémimorphie et doit être inverse par conséquent dans les deux structures conjuguées d'un même corps. Si ces deux structures cristallisent dans les mêmes conditions extérieures, elles portent également des facettes inverses. On peut dire dans ce cas que les deux espèces de cristaux portent des facettes de même espèce sur les pôles électriques de même nom, et des facettes différentes sur les pôles électriques de noms contraires. Ainsi l'acide tartrique

droit peut être placé de manière que ses faces hémiedriques soient à droite; c'est aussi son extrémité droite qui devient positive par refroidissement. Dans l'acide tartrique gauche, pris dans la position symétrique, c'est au contraire l'extrémité gauche qui porte les faces hémiedriques et qui s'électrise positivement¹.

Cette relation n'est nécessaire qu'autant que l'on compare deux cristaux conjugués formés dans les mêmes conditions extérieures. On ne doit pas oublier que le sens de l'électrisation dépend uniquement de la structure intérieure du cristal, tandis que le développement des formes cristallines dépend aussi des circonstances dans lesquelles le cristal a pris naissance. Si, par exemple, deux cristaux, l'un d'acide tartrique droit, l'autre d'acide tartrique gauche, se formaient dans des conditions d'ailleurs identiques, mais se trouvaient fortuitement avoir pendant la cristallisation le pôle analogue dirigé vers le haut pour l'un, vers le bas pour l'autre, il pourrait fort bien se faire qu'ils ne prissent pas sur ces pôles analogues des facettes correspondantes, car la pesanteur n'agirait pas de la même manière sur tous deux.

MM. Curie² ont remarqué que, dans les cas observés jusqu'ici, l'électricité positive se développe par refroidissement sur l'extrémité de l'axe polaire où les faces forment le sommet le plus pointu.

PIÉZOÉLECTRICITÉ

487. Faits généraux. — MM. J. et P. Curie³ ont découvert en 1880 le fait extrêmement remarquable que, lorsqu'on

¹ BËTTGER, *Pogg. Ann.* 1838, XLIII, 659; — PASTEUR, *Ann. de Chim.* 1850, XXVIII, 67.

² J. et P. CURIE, *C. R.* 1880, XCI, 386.

³ J. et P. CURIE, *C. R.* 1880, XCI, 294, 383; *J. de Phys.* 1882, I, 245.

comprime un cristal hémimorphe suivant son axe de pyroélectricité, il se développe aux deux bouts de cet axe des électricités de noms contraires. L'électricité ne se produit que tant que la pression varie.

Si, après avoir déchargé le cristal, on le décomprime, il y a de nouveau production d'électricité, mais le sens du phénomène se renverse, l'extrémité qui se chargeait positivement par compression devient négative et celle qui se chargeait négativement devient positive.

Ce phénomène a reçu le nom de *piézoélectricité*.

488. Conditions de symétrie de la piézoélectricité. —

Si nous exerçons sur un bloc cristallin rectangulaire une compression uniforme parallèlement à l'une de ses arêtes AB (fig. 525), cette compression est elle-même symétrique par rapport aux deux directions opposées d'une ligne parallèle soit à AB, soit à AA'. Deux faces opposées du parallélépipède, AA' et BB', ou bien AB et A'B', ne peuvent s'électriser en sens inverse que si les deux directions opposées de leur normale commune ne sont ni superposables, ni symétriques. Les conditions de symétrie d'une piézoélectricité par une compression ou une dilatation dans une seule direction, sont donc les mêmes que celles d'une pyroélectricité axiale (§ 483). Il en serait de même si nous considérions une sphère cristalline comprimée suivant un de ses diamètres. Si le phénomène de la piézoélectricité a un caractère général, nous pouvons nous attendre à le rencontrer dans toutes les directions qui manifestent la pyroélectricité, et pas dans d'autres.

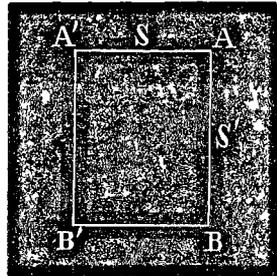
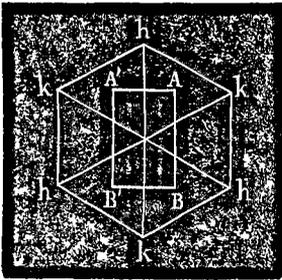


Fig. 525.

489. Cristaux piézoélectriques. — Les faits confirment cette conclusion. MM. Curie ont obtenu des électricités de noms contraires sur les deux faces normales à la pression, en comprimant la *tourmaline*, la *calamine*, le *sucré*, l'*acide tartrique* suivant l'axe d'hémimorphie; le *quartz* suivant ses axes binaires; la *blende*, le *chlorate de soude* suivant leurs axes ternaires. Dans tous les cas, le signe de l'électrisation développée par compression est le même que celui de l'électrisation développée par refroidissement¹.

Dans la *tourmaline*, le bout de l'axe d'hémimorphie qui s'électrise négativement par une compression suivant cet axe, s'électrise aussi négativement par une compression perpendiculaire à l'axe.



[Fig. 526.

Dans le *quartz*, si l'on taille (fig. 526) un parallélépipède ayant deux faces AA' et BB' perpendiculaires à un axe binaire, deux faces AB et $A'B'$ parallèles à la fois à cet axe binaire et à l'axe optique, et les deux autres normales à l'axe optique; on observe que, par une compression perpendiculaire à AA' , cette face, située du côté de l'arête h qui porte les faces hémédriques, se charge négativement, et la face opposée BB' positivement; par une compression perpendiculaire à AB , AB et $A'B'$ ne s'électrisent pas, mais AA' se charge positivement et BB' négativement. Par une compression suivant l'axe optique, il n'y a aucune électrisation.

M. Kundt et M. Röntgen² ont obtenu la même distribution en comprimant des lames de *quartz* perpendiculaires à l'axe prin-

¹ D'après M. HANKEL, *Abh. Leipzig*, 1881, XII, 462, cette relation ne se vérifierait pas pour la *struvite* et le *tartrate de potasse*.

² KUNDT, *Wied. Ann.* 1883, XX, 592; — RÖNTGEN, *ibid.* 1883, XVIII, 534.

cial, suivant les axes binaires (fig. 527), ou perpendiculairement à ces axes (fig. 528). Dans ces figures, les arêtes portant les faces tétrartoédriques sont toujours désignées par h , et les arêtes intermédiaires par k .

M. Röntgen, en comprimant une sphère suivant un de ses diamètres, est arrivé aux résultats suivants :

Une pression suivant l'axe optique ne développe aucune électrisation aux points touchés, non plus que sur trois plans pas-

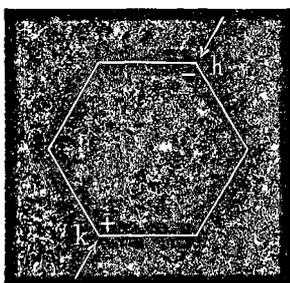


Fig. 527.

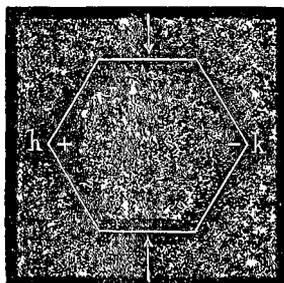


Fig. 528.

sant par l'axe et bissant les angles compris entre les axes binaires. Les champs intermédiaires, correspondant chacun à une arête du prisme, se chargent alternativement d'électricités de signes contraires.

Une pression suivant un axe binaire partage la sphère en deux moitiés électrisées en sens inverses, séparées par un plan perpendiculaire à la pression.

Une pression normale à un axe binaire partage la sphère en deux moitiés, l'une positive, l'autre négative, séparées par un plan neutre qui passe par les points touchés et par l'axe optique.

Une pression suivant un diamètre quelconque de la sphère partage toujours celle-ci en deux moitiés d'électrisations contraires, séparées par un plan inactif qui est oblique, mais passe toujours par l'axe optique.

MM. Curie ont vérifié que l'on n'obtient pas d'électrisation

en comprimant des cristaux possédant un centre de symétrie, tels que la *fluorine*, le *gypse*, la *calcite*, l'*apatite*.

M. Röntgen¹ a reconnu que la piézoélectricité peut être développée par la torsion. En tordant un cylindre de quartz à peu près parallèle à l'axe optique, ce savant a observé un partage de la surface cylindrique en quatre champs semblables alternativement de signes contraires, ce qui paraît en désaccord avec tout ce que nous savons de la symétrie du quartz. M. Voigt a montré cependant que c'est bien là ce qui doit se passer pour peu que le cylindre ne soit pas tout à fait parallèle à l'axe optique.

490. Déterminations quantitatives. — On doit encore à MM. Curie² la détermination des quantités d'électricité développées par la compression sur le quartz et sur la tourmaline. Les deux faces parallèles A et B (fig. 529), sur lesquelles l'élec-

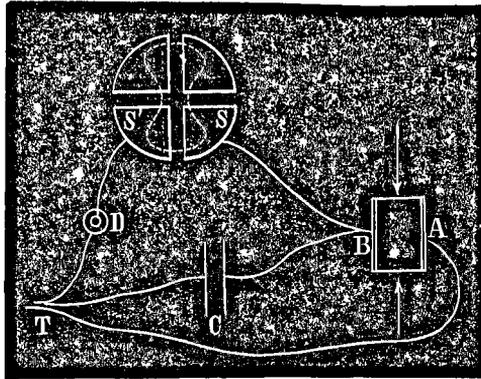


Fig. 529.

trisation doit se produire, sont recouvertes de lames d'étain et liées, l'une A à la terre, et l'autre B à l'une des paires de qua-

¹ RÖNTGEN, *Wied. Ann.* 1890, XXXIX, 16.

² J. et P. CURIE, *C. R.* 1881, XCII, 186; *J. de Phys.* 1882, 1, 245; — P. CZERMAK, *Sitzb. Akad. Wien*, 1887, XCVI, 1217.

drants d'un électromètre Thomson-Mascart, et à l'une des lames d'un condensateur C de capacité connue. L'autre paire de quadrants est chargée à l'aide d'un élément Daniell D dont l'autre pôle est au sol, ainsi que la seconde lame du condensateur. L'aiguille de l'électromètre dévie, et on la ramène à sa position d'équilibre en comprimant le cristal. On répète l'opération après avoir supprimé le condensateur C. La différence des poids dont il a fallu charger le cristal dans ces deux mesures représente le poids nécessaire pour dégager la quantité d'électricité qui donne aux deux lames du condensateur une différence de potentiel d'un Daniell.

Les résultats généraux sont les suivants :

1° *Les quantités d'électricité dégagées aux deux extrémités d'un axe de pyroélectricité lors d'une déformation sont égales et de signes contraires.*

2° *Les quantités d'électricité dégagées à l'une des extrémités sont égales et de signes contraires pour deux déformations inverses l'une de l'autre.*

3° *Les quantités d'électricité dégagées sont proportionnelles aux variations de pression.*

4° *Pour une même variation de pression, lorsque celle-ci s'exerce suivant la direction aux extrémités de laquelle on recueille l'électricité, les quantités dégagées sont indépendantes des dimensions du cristal.*

5° *Les dimensions du bloc étant a dans la direction aux extrémités de laquelle on recueille l'électricité, b dans la direction, supposée normale à la première, suivant laquelle s'exerce la pression, et c suivant la direction normale aux deux autres, les quantités dégagées sont proportionnelles au rapport a/b et indépendantes de c.*

Supposons par exemple que dans la figure 525 ci-dessus (§ 488), AB soit parallèle à l'axe piézoélectrique, et qu'on fasse

agir un poids P sur la face S . Ce poids donnera par unité de surface une pression P/S , la quantité d'électricité dégagée par unité de surface pourra s'écrire kP/S , et pour la surface S entière $kP/S \times S = kP$, en désignant par k un coefficient constant.

MM. Curie ont trouvé que k varie fort peu d'une tourmaline à l'autre, au moins tant que l'on opère sur des cristaux transparents qui sont bien isolants. La quantité d'électricité dégagée par un poids de 1 kilog. est de 0,0531 unité électrostatique C. G. S.

Si le poids P agit sur les faces S' , la pression par unité de surface est P/S' , la quantité dégagée sur chaque unité de surface de la base S est $k'P/S'$, et sur la base S entière $k'P/S' \times S$ ou $k'P \times AA'/AB$, conformément à la cinquième loi ci-dessus. Dans la tourmaline, k et k' sont de même signe. Dans le quartz, au contraire, l'observation montre que $k' = -k$. La quantité dégagée par le quartz sous une pression de 1 kilog. est de 0,063 unité électrostatique C. G. S., d'après MM. Curie, 0,061 d'après M. Czermak.

491. MM. Riecke et W. Voigt¹ ont publié récemment des déterminations plus complètes des constantes piézoélectriques de la tourmaline et du quartz. Ils comprimaient, à l'aide de poids, des parallépipèdes taillés sous diverses orientations, dont deux faces opposées, recouvertes d'armatures métalliques, étaient reliées, l'une au sol, et l'autre à l'une des paires des quadrants d'un électromètre de Thomson de capacité connue. Des déviations accusées par l'aiguille de l'électromètre, on pouvait déduire les quantités d'électricité dégagées. Nous reviendrons tout à l'heure sur les résultats de ces recherches.

¹ RIECKE et W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1892, XLV, 523.

492. Quartz piézoélectrique employé comme instrument de mesures. — Les propriétés piézoélectriques du quartz ont été appliquées par MM. Curie¹ à la construction d'un appareil qui fournit à volonté des quantités d'électricité connues. Une lame de quartz parallépipédique, comme celle de la figure 526, ayant une longueur de 8 à 10 centimètres suivant AA', une épaisseur de 0^{mm},5 suivant l'axe électrique AB, et une largeur de 2 centimètres suivant l'axe optique, est fixée par sa partie supérieure (fig. 530) et porte à sa partie inférieure un plateau sur lequel on peut mettre des poids. Les faces AA' et BB', normales à l'axe électrique, sont argentées et peuvent être reliées à des conducteurs quelconques.

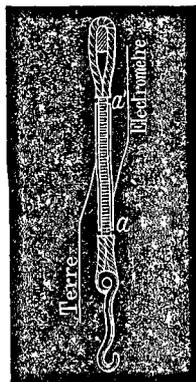


Fig. 530.

D'après ce qui précède, lorsqu'on met un poids P sur le plateau, il se dégage instantanément une quantité d'électricité représentée par $kP \frac{AA'}{AB}$ C. G. S. — C'est avec cet instrument qu'ont été faites les mesures de constantes diélectriques résumées au § 423.

493. Déformation électrique des cristaux. Principe de M. Lippmann². — Il résulte de considérations thermodynamiques qui ont été énoncées en 1881 par M. Lippmann, que la

¹ Voyez J. CURIE, *Ann. de Chim.* 1889, XVII, 397.

² LIPPMANN, *Ann. de Chim.* 1881, XXIV, 145; — POCKELS, *N. Jahrb.* 1890, Beilagebd. VII, 224; — voyez aussi DUHEM, *Leçons sur l'Électricité*, II, 467.

La thermodynamique permet de prévoir quelques autres relations, qui paraissent du reste difficiles à vérifier. Un cristal pyroélectrique, un cristal magnétique anisotrope doivent se réchauffer lorsqu'ils éprouvent un déplacement dans le sens où les forces électriques ou magnétiques tendent à les entraîner, W. THOMSON (1877), *Phys. et math. Papers*, I, 314, 316. Une tourmaline doit se refroidir si l'on électrise positivement son pôle analogue, LIPPMANN, *loc. cit.*

déformation et l'électrisation d'un cristal sont des phénomènes réciproques, c'est-à-dire que si une certaine compression donne lieu à une certaine distribution électrique, réciproquement l'établissement, à l'aide de sources extérieures, de la même distribution sur le cristal donne lieu à une déformation inverse, dont la théorie fait même prévoir la grandeur.

494. Déformation électrique du quartz. — Dans le parallépipède de quartz déjà considéré au § 489 (fig. 526), une compression parallèle aux arêtes AB produit une électrisation négative de la face AA' et une électrisation positive de la face BB'. Une compression parallèle à l'arête AA' électrise au contraire AA' positivement et BB' négativement. Il en résulte qu'en chargeant, à l'aide d'une source quelconque, AA' d'électricité négative et BB' d'électricité positive, le parallépipède doit

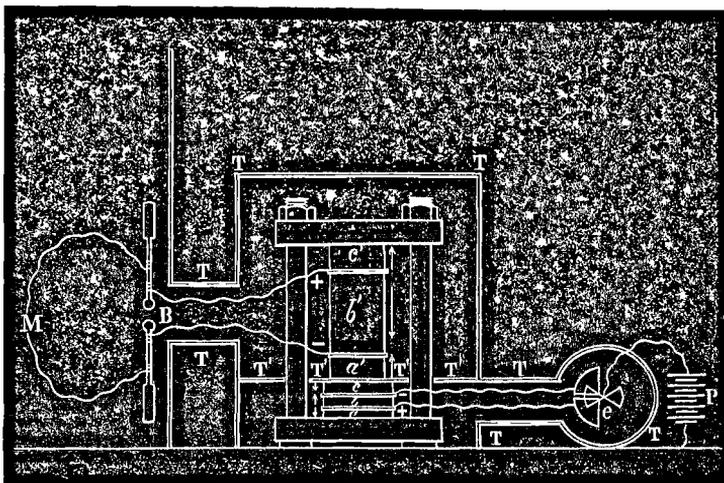


Fig. 531.

se dilater dans la direction de l'arête AB et se contracter dans la direction de l'arête AA'.

Pour vérifier la dilatation suivant l'axe piézoélectrique paral-

lèle à AB, MM. Curie¹ disposaient dans un bâti solide (fig. 531) deux systèmes a, b, c et a', b', c' , formés chacun de trois lames de quartz superposées par leurs faces normales à l'axe de piézo-électricité, de telle sorte que, dans les lames successives, les axes fussent alternativement dirigés en sens inverse. Les lames étaient séparées par des feuilles de métal, qui étaient en relation avec les pôles d'une machine électrique M pour le système a', b', c' , et avec les deux paires de quadrants d'un électromètre e pour le système a, b, c . Toute influence électrique entre les deux systèmes était du reste empêchée par une enveloppe métallique liée à la terre T, T', T', T'. L'électrisation positive et négative des faces de contact du quartz b' avec les quartz a' et c' produisait une dilatation de ces trois blocs. Il en résultait une compression des trois blocs a, b, c , lesquels, agissant par piézoélectricité, ajoutaient leurs effets pour faire dévier l'aiguille de l'électromètre.

La déformation dans le sens perpendiculaire à l'axe binaire se mesurait plus facilement à l'aide d'un *quartz piézoélectrique*

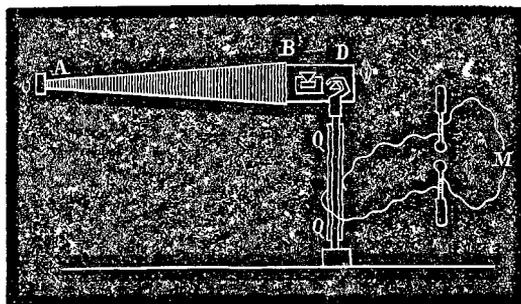


Fig. 532.

(§ 492). L'instrument QQ (fig. 532) était fixé par sa partie inférieure, et attaché par son extrémité supérieure au petit bras

¹ J. et P. CURIE, *C. R.* 1881, XCIII, 1137; 1882, XCV, 914; *J. de Phys.* 1889, VIII, 149.

d'un levier AD. La déformation amplifiée se lisait à l'aide d'un microscope sur un repère *v* attaché à l'autre bout du levier. Les deux faces argentées du quartz étaient en relation avec les deux pôles d'une machine électrique. En mesurant, par un procédé quelconque, la différence de potentiel produite par la machine et, par le procédé que nous venons de décrire, la déformation qui en résultait pour le quartz, et connaissant d'autre part la quantité d'électricité dégagée par le quartz sous l'influence d'une charge connue, on a pu vérifier que non seulement le sens, mais aussi la grandeur de la dilatation étaient conformes aux prévisions de la théorie.

495. Une vérification du même principe a été faite par M. Röntgen¹ pour le cas de la torsion. Nous avons vu (§ 489) que, lorsqu'on tord un cylindre de quartz à peu près parallèle à l'axe optique, sa surface se partage en quatre secteurs d'électrifications inverses. Si l'on colle des lames d'étain sur ces secteurs et qu'on leur donne artificiellement l'électrification qu'ils prennent par une torsion dans un certain sens, on observe que le cylindre éprouve une torsion en sens contraire, que l'on peut mesurer à l'aide d'un miroir fixé au cylindre, d'une lunette et d'une échelle graduée.

496. Mesure optique des déformations électriques du quartz². — Les déformations produites par l'électrification du

¹ RÖNTGEN, *Wied. Ann.* 1890, XXXIX, 22.

² KUNDT, *Wied. Ann.* 1883, XVIII, 228; — RÖNTGEN, *ibid.* 1883, XVIII, 213, 534; XIX, 319; — CZERMAK, *Sitzb. Akad. Wien*, 1888, XCVII, 301. — Il se peut que les phénomènes optiques décrits dans ce paragraphe ne soient pas dus uniquement à la déformation subie par le cristal dans le champ électrique, mais qu'ils résultent, en partie, d'une action spéciale et directe de la polarisation diélectrique sur l'élasticité optique. M. PÖCKELS, *N. Jahrb.* 1890, VII, 201, a développé, en partant de cette idée, une théorie analogue à celle du § 309; il considère seulement les altérations, subies par les coefficients de l'ellipsoïde

quartz agissent sur sa biréfringence absolument comme les déformations mécaniques. M. Kundt examine en lumière convergente une lame carrée perpendiculaire à l'axe dont les côtés sont orientés perpendiculairement et parallèlement à l'axe de piézoélectricité (fig. 533), et peuvent être munis d'armatures métalliques.

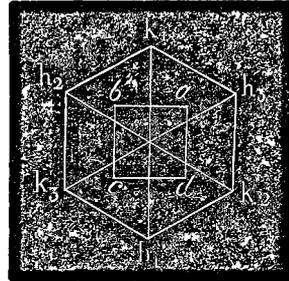


Fig. 533.

Le côté ab s'électrisant positivement, et le côté cd négativement, par une compression suivant l'axe h_1k_1 qui leur est perpendiculaire, l'électrisation positive ou négative de l'armature AB , négative ou positive de l'armature CD , produit une dilatation ou une compression suivant cet axe; il en résulte une déformation de la figure d'interférence qui est représentée



Fig. 534.

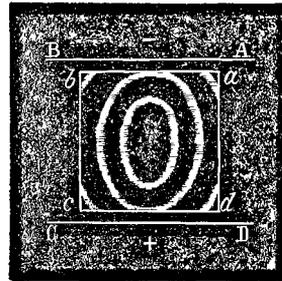


Fig. 535.

avec un peu d'exagération par les figures 534 et 535. Les figures 536 et 537 représentent la déformation qui résulte de l'électrisation des faces bc et ad de la lame. Dans ce cas, en effet, les axes piézoélectriques h_2k_2 et h_3k_3 éprouvent l'un une dilatation, l'autre une contraction.

optique, comme des fonctions linéaires homogènes des trois composantes du moment diélectrique. Dans le cas général d'un cristal triclinique hémédrique, le phénomène dépendrait alors de dix-huit constantes spéciales.

M. Röntgen observe simultanément ces divers effets sur une lame circulaire qu'il électrise radialement à l'aide d'un fil métallique qui la traverse en son centre et d'une armature disposée sur son pourtour. Les anneaux gardent leurs dimensions sur les axes neutres, normaux aux faces du prisme primitif du

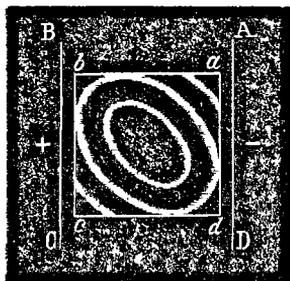


Fig. 536.

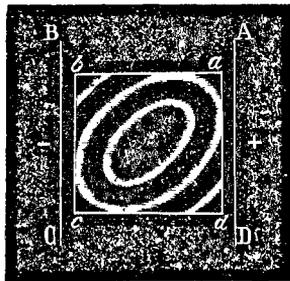


Fig. 537.

quartz, et se déforment alternativement, vers l'extérieur et vers l'intérieur, sur les trois axes piézoélectriques. Le sens de la déformation se renverse avec le sens de l'électrisation.

RECHERCHES THÉORIQUES

497. Théorie de Sir W. Thomson ¹. — Sir W. Thomson, précisant une idée antérieurement émise par A.-C. Becquerel et par Forbes, a supposé qu'un cristal de tourmaline est naturellement dans un état de polarisation analogue à celui que prend un diélectrique quelconque placé dans un champ électrique, et que cette polarisation varie avec la température. La tourmaline, maintenue à température constante, se recouvre peu

¹ BECQUEREL, *Ann. de Chim.* 1828, XXXVII, 355; — FORBES, *Phil. Mag.* 1834, V, 133; — W. THOMSON (1860), *Rep. of math. and phys. Papers*, I, 315.

à peu, en raison de sa conductibilité et de celle du milieu ambiant, d'une couche d'électricité vraie qui annule pour tous les points extérieurs l'action de la couche fictive résultant de la polarisation. Le cristal paraît absolument neutre; mais, si la température varie, la polarisation change en même temps, tandis que la couche compensatrice qui, si l'isolement est suffisant, ne se modifie que lentement, reste à peu près inaltérée. On peut alors observer la différence des actions de la couche réelle et de la couche fictive.

D'après M. Thomson, lorsqu'on brise une tourmaline, les deux fragments restent électrisés en sens inverse par le fait des couches induites qui ne disparaissent pas immédiatement.

D'après M. G. Wiedemann¹, cette électrisation en bloc des deux fragments n'existe pas, ce qui paraît une grave objection contre la théorie.

498. Théorie de la piézoélectricité. — Il paraît difficile de s'expliquer les phénomènes piézoélectriques autrement que par une hypothèse analogue à celle de Sir W. Thomson. On peut supposer, par exemple, que les atomes de natures différentes, qui constituent les molécules du cristal, sont chargés d'électricités de noms contraires; si leur arrangement dans la molécule n'est pas symétrique, chaque élément de volume se trouve naturellement dans un état de polarisation (§ 411), et cet état doit se modifier lorsqu'une déformation quelconque du cristal amène un changement dans le nombre ou la disposition des molécules contenues dans l'unité de volume. Cette manière de voir a été précisée de diverses manières par MM. Curie et Riecke².

¹ G. WIEDEMANN, *Die Lehre der Elektrizität*, II, 338.

² J. et P. CURIE, *C. R.* 1881, XCII, 350; — E. RIECKE, *Wied. Ann.* 1887, XXXI, 889; *Geett. Nachr.* 1891, 191.

M. W. Voigt¹, sans se préoccuper du mécanisme de cette polarisation, admet simplement que, sous l'influence d'une déformation quelconque d'un élément de volume, un moment diélectrique prend naissance, ou vient s'ajouter à un moment déjà existant. Il suppose de plus que, si l'on néglige en première approximation l'influence qui peut être exercée sur un élément de volume par l'électrisation des éléments voisins, les composantes e_x , e_y , e_z du moment diélectrique produit peuvent être représentées par des fonctions linéaires des six composantes x_x , x_y ... (§ 172) de la déformation, de sorte que l'on a

$$e_x = \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \varepsilon_{13}z_z + \varepsilon_{14}y_x + \varepsilon_{15}z_x + \varepsilon_{16}x_y$$

et des valeurs analogues pour e_y et e_z . Le phénomène dépendrait ainsi, dans le cas général, des dix-huit coefficients ε_{11} ... ε_{36} (*constantes piézoélectriques*), dont le nombre se réduit à mesure que la symétrie cristalline augmente.

Dans chaque cas, les composantes de la déformation doivent se calculer d'après les conditions dans lesquelles celle-ci se produit, en partant des valeurs supposées connues des coefficients d'élasticité.

Les composantes de la déformation étant elles-mêmes des fonctions linéaires des composantes X_x ... X_y de la force élastique (§ 175), les relations ci-dessus peuvent aussi s'écrire

$$- e_x = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \delta_{13} Z_z + \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x + \delta_{16} X_y,$$

et de même pour e_y , e_z ; elles relient alors directement les composantes du moment diélectrique aux forces qui produisent la déformation. Les dix-huit coefficients δ_{11} ... δ_{36} sont appelés par M. Voigt les *modules piézoélectriques*.

¹ W. VOIGT, *Abh. Göttingen*, 1890, XXXIII, 1. — Voyez aussi DUHEM, *Leçons sur l'Électricité et le magnétisme*, Paris 1892, II, 383.

M. Voigt a étudié spécialement, pour les divers systèmes de symétrie, le cas d'une pression uniforme en tous sens, d'une pression dans une seule direction, enfin la flexion et la torsion d'un cylindre.

Les phénomènes observables dépendent non seulement de la couche fictive superficielle, mais aussi de l'électrisation interne si la déformation n'est pas uniforme. Il peut arriver par conséquent, et M. Voigt en donne des exemples, que la distribution apparente, obtenue par la méthode de M. Kundt, ne représente qu'imparfaitement la distribution superficielle réelle de l'électrisation.

*** 499. Modules piézoélectriques du quartz et de la tourmaline.** — Dans le cas du quartz, si l'on prend l'axe ternaire comme axe des Z , et l'un des axes binaires comme axe des X , les formules se réduisent, par suite de la symétrie, à

$$\begin{aligned} - e_x &= \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14}Y_z, \\ + e_y &= \delta_{14}Z_x + 2\delta_{11}X_y, \\ e_z &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas de la tourmaline, l'axe des Y étant contenu dans un des plans de symétrie, on trouve

$$\begin{aligned} e_x &= \delta_{15}Z_x - 2\delta_{22}X_y, \\ e_y &= -\delta_{22}(X_x - Y_y) + \delta_{15}Y_z, \\ e_z &= \delta_{31}(X_x + Y_y) + \delta_{33}Z_x. \end{aligned}$$

Les propriétés piézoélectriques doivent donc dépendre de deux modules seulement dans le quartz, et de quatre modules dans la tourmaline.

Ces formules rendent bien compte des résultats expérimentaux de MM. Curie (§ 490) et ont été confirmées par le travail plus récent de MM. Riecke et Voigt (§ 491).

Dans les mesures de MM. Curie sur le quartz, la pression se réduisait à X_x , parallèlement à l'axe piézoélectrique, ou à Y_y , perpendiculairement à cet axe. L'électrisation par unité de surface se réduisait à $e_x = -\delta_{11}X_x$ dans le premier cas, et à $e_x = +\delta_{11}Y_y$ dans le second. — δ_{11} représente le coefficient que nous avons appelé k ou $-k$.

Dans les mesures effectuées sur la tourmaline, la pression se réduirait à Z_z , suivant l'axe principal, et l'électrisation à $e_z = \delta_{33}Z_z$; δ_{33} est donc le coefficient k de MM. Curie.

MM. Riecke et Voigt, opérant, comme nous l'avons dit, sur plusieurs barreaux diversement orientés, ont pu déterminer complètement les modules piézoélectriques de ces deux substances. La pression étant exprimée en kilogrammes, comme plus haut, et la polarisation en unités électrostatiques, ils trouvent pour le quartz

$$\delta_{11} = 0,0645 \quad \delta_{14} = -0,0145,$$

et pour la tourmaline

$$\begin{aligned} \delta_{15} &= -0,1102 & \delta_{22} &= 0,0067 \\ \delta_{31} &= -0,0088 & \delta_{33} &= -0,0571. \end{aligned}$$

Les valeurs de δ_{11} pour le quartz, de δ_{33} pour la tourmaline, sont très voisines de celles (0,063 et 0,053) qui ont été données par MM. Curie.

500. Théorie piézoélectrique de la pyroélectricité.

— L'électrisation produite par une compression étant toujours de même sens que celle qui résulte d'un refroidissement, et le refroidissement étant, dans tous les corps étudiés, accompagné d'une diminution de volume, MM. Curie ont été amenés à supposer que c'est cette déformation seule qui, quelle que soit sa cause, donne lieu au dégagement d'électricité.

Cette idée, défendue aussi par MM. Röntgen et Riecke, a été développée par M. Voigt à la fin de son mémoire sur la piézoélectricité. Les coefficients de dilatation d'un cristal étant connus, on peut calculer la déformation qu'il éprouve par suite d'une modification donnée des températures de ses divers points¹. Si l'on connaît, de plus, ses constantes piézoélectriques, on peut en déduire son électrisation et la comparer aux données de l'expérience. MM. Riecke et Voigt ont fait cette comparaison pour le cas de la tourmaline; ils ont trouvé, en effet, que la quantité d'électricité, réellement dégagée pendant que la tourmaline se refroidit, paraît être très voisine de celle qui est due simplement à la contraction du cristal.

M. Voigt a examiné théoriquement, pour les divers systèmes holoédriques et méroédriques, le cas d'une dilatation uniforme qui correspond à la pyroélectricité homogène du § 481, et celui d'un refroidissement ou d'un réchauffement limités à la couche superficielle d'une sphère, correspondant à la pyroélectricité axiale du § 483.

Les résultats de ces calculs sont naturellement d'accord avec l'expérience en ce qui concerne le rôle de la symétrie. Il est à noter cependant que cette théorie qui, sauf l'objection du § 497, paraît très satisfaisante à beaucoup d'égards, ne fournit aucune explication des phénomènes pyroélectriques observés dans les cristaux centrés.

501. Théories thermoélectriques de la pyroélectricité. — Gaugain² supposait que les molécules d'une tourmaline sont assimilables à de petits éléments thermoélectriques de très grande résistance; il les comparait à des cônes de bismuth et d'antimoine, soudés, comme le représente la figure 538,

¹ W. VOIGT, *Wied. Ann.* 1889, XXXVI, 743.

² GAUGAIN, *Ann. de Chim.* 1865, VI, 51.

alternativement par leurs bases et par leurs sommets. Si l'on place un pareil système dans une enceinte chaude, la soudure 1

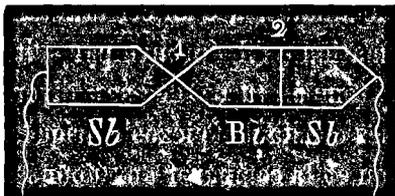


Fig. 538.

s'échauffe plus vite que la soudure 2, il en résulte une force électromotrice qui dure aussi longtemps que la température varie.

Cette théorie ne rend pas compte des phénomènes pyroélectriques dans les cristaux centrés; mais elle donne une explication plausible des lois découvertes par Gaugain pour la tourmaline (§ 476).

La tourmaline, de résistance très grande, étant disposée de manière à se décharger continuellement au travers d'un électroscope ou d'un galvanomètre de résistance relativement faible, l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité dégagée dans l'unité du temps, est proportionnelle à la force électromotrice totale du cristal, et en raison inverse de la résistance totale du circuit. La force électromotrice totale est proportionnelle au nombre des petits couples thermoélectriques moléculaires associés en tension les uns à la suite des autres; elle est donc indépendante de la section du cristal et proportionnelle à sa longueur. La résistance du circuit, qui se réduit sensiblement à celle du cristal, est proportionnelle à la longueur de celui-ci et en raison inverse de sa section. Le dégagement d'électricité est donc indépendant de la longueur et proportionnel à la section de la tourmaline employée.

Si l'on admet, de plus, que la force électromotrice de chaque couple moléculaire est proportionnelle à la différence des températures de ses deux points de contact, et que cette différence est elle-même proportionnelle à la variation que la température du cristal éprouve dans l'unité de temps, on voit que si la température varie deux fois plus vite entre une valeur ini-

tiale et une valeur finale données, le courant produit est deux fois plus intense, mais dure deux fois moins ; la quantité d'électricité dégagée reste la même et dépend seulement de la température initiale et de la température finale.

502. On peut encore trouver dans d'autres considérations une explication thermoélectrique de la pyroélectricité¹. Un cristal qui se réchauffe ou se refroidit ne peut jamais avoir une température uniforme dans toute sa masse. Des forces thermoélectriques doivent par conséquent s'y développer qui sont dues, soit aux contacts inégalement chauds des atomes d'espèces différentes, soit aux contacts de molécules de même espèce inégalement chaudes. Quelle qu'en soit l'origine, l'existence de forces électromotrices, partout où la température n'est pas uniforme (§§ 468 et 469), a été mise hors de doute par les travaux de Sir W. Thomson².

Dans un corps isotrope, dans un cristal possédant un centre de symétrie, la force électromotrice totale entre deux points dépend seulement des températures de ces points. La distribution des températures pendant l'échauffement est déterminée par la forme du corps ; il en est de même des forces électromotrices et des dégagements électriques qu'elles produisent : ceux-ci seront évidemment symétriques si le cristal a lui-même une forme symétrique.

Dans les cristaux non centrés, il est peut-être permis de supposer que la force électromotrice entre deux points dépend, non seulement des températures de ces points, mais aussi du

¹ FRANZ, *Pogg. Ann.* 1856, XCVII, 34 ; — FRIEDEL, *Ann. de Chim.* 1869, XVII, 89 ; — WULF, *Zeitsch. f. Kryst.* 1891, XVIII, 185.

² MM. S.-P. THOMPSON et O. LODGE, *Phil. Mag.* 1879, VIII, 18, ont observé quelques faits qui paraissent se rapporter à ce genre de forces électromotrices et aux effets Thomson correspondants.

sens dans lequel se produit la chute de température. Dans ce cas, le cristal, chauffé également par toute sa surface, pourrait prendre à ses deux bouts des électrisations inégales et peut-être même de signes contraires, et pourrait, en tout cas, donner lieu à un courant lorsqu'on relierait ses bouts par un arc conducteur.

La théorie thermoélectrique semble donc être applicable peut-être aux observations de M. Hankel sur les cristaux à symétrie centrée, et à celles de M. Friedel sur les cristaux conducteurs.

Par contre, elle ne fournit aucune explication des phénomènes piézoélectriques, si étroitement liés à la pyroélectricité polaire, non plus que du fait, qui paraît bien prouvé par les recherches de M. Riecke, qu'une tourmaline isolée conserve sa charge après que sa température est devenue stationnaire.

Dans l'état actuel de nos connaissances, il paraît difficile de se rendre compte de toutes les manifestations de la pyroélectricité autrement qu'en faisant intervenir à la fois des actions piézoélectriques et des actions thermoélectriques.

INDEX

- A**bsorption, 439.
Actinoélectricité, 623.
Actions électriques, 507.
Actions magnétiques, 580.
Allotropie, 190.
Analyseur, 357.
Angles (Loi de la constance des), 5.
Angles (Mesure des), 51, 143.
Angle de polarisation, 450.
Angles (Variations des), 8, 466, 469.
Anisotropie, 3.
Anomalies optiques, 395.
Anorthisches System, 44.
Anorthotypes System, 44.
Antihémiédries, 90.
Antimorphies, 90.
Appareils de polarisation, 353.
Asymétrique (Système), 44.
Attraction d'une sphère cristalline électrisée par influence, 557.
Attraction d'une sphère cristalline aimantée par influence, 589.
Augitisches System, 41.
Axes cristallographiques, 17, 54.
Axes d'absorption, 444.
Axes d'aimantation, 583.
Axes de conductibilité thermique, 484.
Axes de conductibilité électrique, 573.
Axes de dilatation, 466.
Axes d'élasticité, 229.
Axes d'élasticité optique, 282.
Axes de polarisation diélectrique, 537.
Axes de pyroélectricité polaire, 615.
Axes de symétrie, 10.
Axes de syngonie, 70, 71.
- Axes de thermoélectricité, 599.
Axes diélectriques, 550.
Axes d'induction électrique, 537.
Axes magnétiques, 588.
Axes optiques, 290, 306, 307, 382.
- B**inaire (Système), 41.
Biréfringence (Mesure de la), 371.
- C**apacité électrique, 517.
Caractéristiques des faces, 49.
Carbone asymétrique, 421.
Centre de symétrie, 9.
Centre de syngonie, 70.
Champ électrique, 509.
Chemin de plus prompte arrivée, 261.
Clinorhombique (Système), 41, 124.
Clivages, 203.
Clivages (Relations avec la conductibilité), 494.
Clivages (Relations avec le développement des faces), 224.
Clivages (Relations avec la dureté), 214.
Clivages (Relations avec le magnétisme), 589.
Coefficients d'absorption, 439.
Coefficients de conductibilité électrique, 573.
Coefficients de conductibilité thermique, 480, 482, 484, 485, 490.
Coefficients de dilatation, 459, 466, 474.
Coefficients de double réfraction mécanique, 394.
Coefficients d'élasticité, 228.
Coefficients d'électrisation, 526, 544.

- Coefficients de frottement, 217, 236.
 Coefficients rotationnels, 485, 488, 499, 573.
 Cohésion, 201.
 Compareteur de Michel Lévy, 371.
 Compensateur de Babinet, 372.
 Composition des mouvements vibratoires, 245, 252.
 Condensateurs plans, 534, 541.
 Conducteurs (Équilibre électrique des), 516, 521.
 Conductibilité électrique, 572.
 Conductibilité électrique des diélectriques, 539, 551, 552, 576, 578.
 Conductibilité électrique (Relation avec la conductibilité thermique), 575.
 Conductibilité électrique unipolaire, 575.
 Conductibilité électrolytique du quartz, 578.
 Conductibilité thermique, 478.
 Conductibilité thermique extérieure, 490.
 Conductibilité thermique unilatérale, 503.
 Conductibilité thermique (Relations avec les clivages), 494.
 Conductibilité thermique (Relations avec l'élasticité), 495.
 Conjugués (Polyèdres hémédriques), 88.
 Conjuguées (Structures hémédriques), 129.
 Constantes diélectriques, 527, 537, 539, 545, 558, 570.
 Constantes diélectriques (Relation avec les indices de réfraction), 565.
 Constantes électrooptiques, 637.
 Constantes piézoélectriques, 640.
 Construction d'Huygens, 273, 285, 295, 304, 312.
 Corrosion (Figures de), 128, 219, 427.
 Couleurs superficielles, 454.
 Coulomb (Loi de), 507.
 Cristallisation, 3, 7, 181. †
 Cristallisations imparfaites, 185.
 Cristallisation (Influence du magnétisme sur la), 592.
 Cristallisation (Influence du milieu ambiant sur la), 184.
 Cristallisation simultanée des isomorphes, 197.
 Cristallographie chimique, 181.
 Cristallographie géométrique, 1.
 Cubique (Système), 19, 91.
Décroissements, 156.
 Déformations élastiques, 228, 235.
 Déformations homogènes, 237, 465.
 Déformations électriques, 633.
 Déformations (Influence sur les propriétés optiques), 391.
 Déformations (Production d'électricité par les), 626, 639.
 Densité électrique, 517.
 Déplacement électrique de Maxwell, 565.
 Déplacement parallèle des faces, 6.
 Dérivation (Loi de), 46.
 Dérivation (Relations entre la symétrie cristalline et de la loi de), 68.
 Détermination des cristaux, 50.
 Développement des faces cristallines, 7, 162, 184, 224.
 Dichosymétrie, 90.
 Diélectriques (Constantes), 527, 537, 539, 545, 558, 570.
 Diélectrique (Moment), 524.
 Diélectrique (Polarisation), 521.
 Diélectriques (Conductibilité électrique des), 539, 551, 552, 576, 578.
 Diffraction, 270.
 Digonal (Système), 124.
Dihexaédriques System, 33.
Diklinoédriques System, 44.
 Dilatation thermique, 459.
 Dilatation thermique (Relations entre les paramètres cristallographiques et les coefficients de), 476.
Dirhombœdriques System, 33.
 Dissymétrie moléculaire, 414.
 Dissymétrie moléculaire des cristaux, 426.
 Dissymétrie non moléculaire des cristaux, 429.
 Dispersion, 287, 299, 308, 344, 385.
 Dispersion rotatoire, 401.
 Double réfraction, 280.
 Double réfraction à deux axes, 300.
 Double réfraction à un axe, 290.
 Double réfraction accidentelle, 390, 636.

- Double réfraction circulaire, 404.
Dreigliedriges System, 114.
Drei- und einaxiges System, 33.
 Dureté, 211.
 Dureté (Relations avec les clivages), 214.

 Échelles de dureté, 211, 216.
 Effets thermiques réversibles, 596, 598, 600.
 Efflorescence, 223.
Ein- und einaxiges System, 38.
Ein- und eingliedriges System, 44.
Ein- und zweigliedriges System, 41.
 Élasticité, 226.
 Électricité, 507.
 Électrisation d'une sphère, 546, 553.
 Électriques (Déformations), 633.
 Électrique (Double réfraction), 391, 636.
 Éléments de symétrie, 8.
 Éléments de syngonie, 70.
 Énantiomorphie, 89, 131, 411, 604.
 Énergie (Conservation de l'), 228, 544.
 Énergie électrique, 531, 562.

 Faces (Développement des), 7, 162, 184, 224.
 Faces (Imperfections des), 140.
 Flexion, 233.
 Flux de chaleur, 478.
 Flux de force, 513.
 Force électrique résultante, 508, 517.
 Forces électromotrices hydroélectriques, 607.
 Forces électromotrices thermoélectriques, 595.
 Formation des cristaux, 181.
 Formes anormales, 128.
 Formes composées, 12.
 Formes cristallines, 5.
 Formes cristallines (Relations entre la composition chimique et les), 200.
 Formes cristallines (Relations de la polarisation rotatoire et des), 419.
 Formes cristallines (Relations de la pyroélectricité polaire et des), 625.
 Formes cristallines des corps isomorphes, 193.

 Formes holoédriques, 17, 19.
 Formes limites, 138, 190.
 Formes méroédriques, 18, 88.
 Formes méroédriques (Association des), 127.
 Formes primitives, 16.
 Formes simples, 12.
 Formes simples (Tableau des), 62.
 Frottement, 218.
 Frottement intérieur, 236.

 Gauss (Théorème de), 514.
Gleichgliedriges System, 19.
 Goniomètres, 144.
 Goniomètre pour la mesure de l'angle des axes optiques, 383.
 Groupements cristallins, 132.
 Groupements cristallins (Polarisation rotatoire des), 437.
 Groupements cristallins (Propriétés optiques), 396.
 Groupements de cristaux d'espèces différentes, 140.

 Hémiedrie, 88.
 Hémiedrie à faces inclinées, 90.
 Hémiedrie à faces parallèles, 90.
 Hémiedrie à faces parallèles (Relation supposée avec la thermoélectricité), 603.
 Hémiedrie holoaxe, 90.
 Hémiedrie non superposable, 89.
 Hémiedriques (Polyèdres — conjugués), 89.
 Hémiedriques (Structures — conjuguées), 129.
 Hémimorphie, 84, 90, 616.
Hemiorthotypes System, 41.
Hemiprismatisches System, 41.
Hemirhombisches System, 41.
 Hémisymétrie, 89.
 Hémitropies, 133.
 Hexagonal (Système), 33, 109.
 Holoédriques (Formes), 17, 19.
 Homogénéité de la structure cristalline, 3, 158, 414.
 Houppes d'absorption, 446.
 Huygens (Principe de), 260.

- Huygens (Construction de), 273, 285, 295, 304, 312.
- I**mpuretés des cristaux, 140.
- Inclusions, 141.
- Indices cristallographiques, 49.
- Indices de réfraction, 287, 305, 350.
- Indices de réfraction (Mesures spectro-métriques), 334.
- Indices de réfraction (Mesure par la réflexion totale), 319.
- Indices de réfraction (Mesures interférentielles), 348.
- Indices de réfraction (Relation avec les constantes diélectriques), 568.
- Induction électrique, 565.
- Induction magnétique, 583.
- Influence électrique, 521.
- Intensité d'aimantation, 581.
- Intensité d'électrisation, 524.
- Interférences, 254, 347, 348.
- Isogonie, 70, 193.
- Isoklines System*, 38.
- Isometrisches System*, 19.
- Isomorphisme, 192.
- Isoschematisme, 70.
- K**err (Phénomène de), 593.
- Klinorhomboidisches System*, 44.
- L**ames sensibles, 374.
- Lignes de force, 509, 581.
- Longueurs d'ondes, 249, 258.
- Longueurs numériques, 48.
- M**âcles, 133.
- Magnétisme, 580.
- Magnétisme (Action sur la cristallisation), 592.
- Magnétisme (Relation avec les clivages), 589.
- Magnétisme (Relations avec les propriétés optiques), 568, 587.
- Méroédrie, 18, 82.
- Méroédriques (Formes simples), 88.
- Méroédriques (Formes composées), 127.
- Microolithes, 142.
- Microscopes polarisants, 357.
- Mimésie, 137, 396.
- Modes réticulaires de Bravais, 162.
- Modules d'élasticité, 232.
- Modules piézoélectriques, 640.
- Molécules cristallines, 167.
- Molécules intégrantes, 157.
- Molécules soustractives, 156.
- Monodimetrisches System*, 28.
- Monogonal (Système), 124.
- Monoklinisches System*, 41.
- Monoklinoëdrisches System*, 41.
- Monoklinometrisches System*, 41.
- Monosymmetrisches System*, 41.
- Monotrimetrisches System*, 33.
- Morphotropie, 197.
- Mouvement vibratoire, 241.
- N**icol (Prisme de), 355.
- Notations cristallographiques, 48.
- O**bligüe System, 41.
- Octaédrique (Système), 20.
- Oculaire fluorescent, 346.
- Ogdoédrie, 88.
- Ondes planes, 252, 271, 284, 334.
- Ondulations (Théorie des), 241.
- Optique, 241.
- Optiques (Relations entre les propriétés magnétiques et), 568, 587.
- Orientation d'une sphère cristalline dans un champ électrique uniforme, 546, 556.
- Orientation d'une sphère cristalline dans un champ magnétique uniforme, 584.
- Orthohexagonales System*, 33.
- Orthorhombisches System*, 37.
- Orthorhomboidisches System*, 41.
- Orthotypes System*, 37.
- P**aralléloèdres, 178.
- Parahémiédrie, paraméroédrie, 90.
- Paramètres cristallographiques, 48.
- Paramorphies, 90.
- Perméabilité magnétique, 582, 588.
- Perméabilité électrique, 527, 568.
- Photoélectricité, 623.
- Piézoélectricité, 626, 639.
- Piles de lames de Reusch, 437.

- Pince à tourmalines, 356, 357.
 Plans de choc, 209.
 Plans de clivage, 203.
 Plans de glissement, 210.
 Plan de polarisation, 278.
 Plans de séparation, 209.
 Plans de symétrie, 10.
 Plans de syngonie, 70.
 Plans réticulaires, 160.
 Pléochroïsme, 441.
 Points analogues, 159.
 Polarisation (Appareils de), 353.
 Polarisation chromatique, 353.
 Polarisation chromatique du quartz, 435.
 Polarisation chromatique en lumière convergente, 377.
 Polarisation chromatique en lumière parallèle, 361.
 Polarisation de la lumière, 277.
 Polarisation des rayons doublement réfractés, 308.
 Polarisation diélectrique, 521.
 Polarisation lamellaire, 396.
 Polarisation rotatoire, 399.
 Polarisation rotatoire magnétique, 592.
 Polariseurs, 353.
 Polyédrie, 140.
 Polymorphisme, 188.
 Potentiel électrique, 509.
 Potentiel magnétique, 581.
 Pouvoir inducteur spécifique, 527.
 Pouvoir rotatoire moléculaire, 416.
 Pouvoir thermoélectrique, 596.
 Principes fondamentaux de la cristallographie physique, 201.
 Prismatique oblique à bases de parallélogramme obliquangle (Système), 44.
 Prismatique rectangulaire oblique (Système), 41.
Prismatisches System, 37.
 Prisme doublement oblique (Système du), 44.
 Prisme droit à bases carrées (Système du), 28.
 Prisme hexagonal (Système du), 33.
 Prisme oblique non symétrique (Système du), 44.
 Prisme oblique symétrique (Système du), 41.
 Prisme rhomboïdal droit (Système du), 38.
 Prisme rhomboïdal oblique (Système du), 41.
 Prismes (Réfraction à travers les), 334.
 Projection des faces sur la sphère, 51.
 Propagation des mouvements vibratoires, 247.
 Pseudosymétrie, 139.
Pyramidales System, 28.
 Pyroélectricité, 606, 638, 642.
 Pyroélectricité des cristaux conducteurs, 624.
 Quadratique (Système), 28, 103.
Quadratocædrisches System, 28.
 Quartz piézoélectrique, 633.
 Quaternaire (Système), 28.
 Rationalité des indices, 47.
 Rayons lumineux, 262, 272, 281.
 Réactions dissymétriques, 424.
 Réflexion, 266, 448.
 Réflexion totale, 311.
 Réfraction à travers les prismes, 334.
 Réfraction conique extérieure, 306.
 Réfraction conique intérieure, 305.
 Réfraction (Double), 280, 290, 300.
 Réfraction simple, 269, 285.
 Réfractomètres à réflexion totale, 323.
Reguläres System, 19.
 Réseaux parallélipédiques, 158.
 Résistance électrique, 573.
 Rhombique (Système), 37, 122.
 Rhomboédrique (Système), 33, 109, 114.
 Scléromètres, 212.
Sechsgliedriges System, 33.
 Sénair (Système), 33.
 Signe diélectrique des cristaux, 550.
 Signe magnétique des cristaux, 588.
 Signe optique des cristaux biaxes, 307, 385.
 Signe optique des cristaux uniaxes, 294, 379.
 Solubilité (Variation suivant les faces), 222.

- Spectres cannelés, 373.
 Spectre infra-rouge, 346.
 Spectre ultra-violet, 345.
 Spectromètre, 337.
 Spectrophotomètre, 442.
Sphaeroëdrisches System, 19.
 Spirales d'Airy, 435.
 Stauroscope, 375.
 Stéroèdres, 178,
 Stries, 140.
 Structures dissymétriques, 413.
 Structures hémiédriques conjuguées, 129.
 Structure intérieure des cristaux, 3, 13, 155.
 Surface de l'onde, 251.
 Surface de l'onde dans les corps monoréfringents, 285.
 Surface de l'onde dans les cristaux bi-axes, 301.
 Surface de l'onde dans les cristaux uniaxes, 293.
 Surface de l'onde dans le quartz, 434.
 Surface des vitesses normales, 284.
 Surfaces de niveau, 512.
 Surfaces employées dans la théorie de la double réfraction, 281.
 Surfaces isothermes, 480.
 Surfusion, 182.
 Sursaturation, 182, 425.
 Susceptibilités apparentes, 559.
 Susceptibilités électriques, 526, 544.
 Susceptibilités magnétiques, 582, 583.
 Symétrie (Axes de), 10.
 Symétrie (Centre de), 9.
 Symétrie (Loi de), 16.
 Symétrie (Plans de), 10.
 Symétrie (Systèmes de), 12, 19, 91, 126.
 Symétrie de l'absorption optique, 440.
 Symétrie de la conductibilité électrique, 573, 578.
 Symétrie de la conductibilité thermique, 487, 499, 503.
 Symétrie de la dilatation thermique, 467.
 Symétrie de la double réfraction électrique, 636.
 Symétrie de la double réfraction mécanique, 393.
 Symétrie de la dureté, 214.
 Symétrie de la piézoélectricité, 627.
 Symétrie de la polarisation diélectrique, 537, 549.
 Symétrie de la polarisation rotatoire, 409, 417.
 Symétrie de la polarisation rotatoire magnétique, 593.
 Symétrie de la pyroélectricité axiale, 614, 618.
 Symétrie de la pyroélectricité homogène, 614, 615.
 Symétrie de la réflexion, 455.
 Symétrie de la réfraction, 280, 285, 290, 300, 309, 365, 385.
 Symétrie de la solubilité, 222.
 Symétrie de la structure intérieure, 13, 68, 155.
 Symétrie de la thermoélectricité, 597, 603.
 Symétrie de l'élasticité, 229.
 Symétrie des clivages, 204.
 Symétrie des déformations homogènes, 237, 467.
 Symétrie des figures de corrosion, 219.
 Symétrie des figures d'efflorescence, 223.
 Symétrie des formes cristallines, 6, 8, 19, 54, 88, 127.
 Symétrie des formes cristallines (Relation avec la loi de dérivation), 68.
 Symétrie des propriétés physiques en général, 201.
 Symétrie du frottement intérieur, 236.
 Symétrie du magnétisme, 583.
 Syngonie, 69.
 Systèmes cristallographiques, 17, 70, 86.
 Systèmes de points de Sohncke, 169.
 Systèmes de symétrie, 12, 19, 91, 126.
 Systèmes de syngonie, 70, 86.
 Ténacité, 203.
 Tension électrique, 518.
 Terbinaire (Système), 38.
 Ternaire (Système), 114.
 Terquaternaire (Système), 20.
Tesserales System, 20.
Tessularisches System, 44.
Tetartoprismatisches System, 44.
Tetartorhombisches System, 44.

- Tétraédrique (Système), 20.
 Thermoélectricité, 595.
 Thermoélectricité (Relation supposée avec l'hémiédrie pentagonale), 603.
 Thermoélectricité (Relation avec la pyroélectricité), 643.
 Thermodynamiques (Relations), 633.
 Torsion (Développement d'électricité par), 630.
 Torsion électrique du quartz, 636.
 Torsion (Mesures de), 233.
 Transversalité des vibrations lumineuses, 276.
 Triclinique (Système), 44, 125.
 Trigonal (Système), 110.
Trikhinoëdrisches System, 44.
Trimetrisches System, 37.
- Tritoprismatisches System*, 44.
 Troncatures, 16.
- Unité électrostatique**, 508.
- Vibrations élastiques**, 235.
Vibrations lumineuses, 241, 568.
Viergliedriges System, 28.
 Vitesse de la lumière, 258.
 Vitesses principales, 283.
 Volumes moléculaires des corps isomorphes, 199.
- Zones (Loi des)**, 48.
Zwei- und einaxiges System, 28.
Zwei- und eingliedriges System, 41.
Zwei- und zweigliedriges System, 37.

EXPLICATION DE LA PLANCHE

Dans les six figures de cette planche, les sections principales des nicols de l'appareil de polarisation sont croisées, l'une étant verticale et l'autre horizontale.

FIGURE 1. — Interposition, entre les nicols, d'une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique dans un cristal uniaxe (§ 295).

FIGURE 2. — Adjonction à la disposition précédente d'un mica $1/4$ d'onde dont les lignes d'extinction sont à 45° des sections principales des nicols (§ 296).

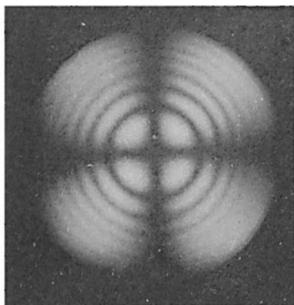
FIGURE 3. — Interposition, entre les nicols, d'une lame taillée dans un cristal à deux axes perpendiculairement à la bissectrice aiguë. Le plan des axes optiques est horizontal (§ 297).

FIGURE 4. — Même disposition, sauf qu'en faisant tourner la lame dans son propre plan, on a amené le plan des axes optiques à faire un angle de 20° environ avec l'horizontale (§ 297).

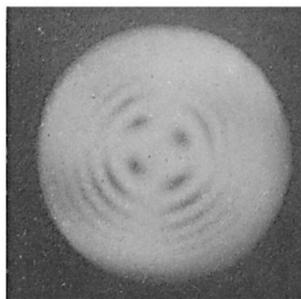
FIGURE 5. — Même disposition, le plan des axes optiques bissecte l'angle des sections principales des nicols (§ 297).

FIGURE 6. — Spirales d'Airy ; interposition, entre les nicols, de deux quartz superposés, perpendiculaires à l'axe, de même épaisseur, l'un dextrogyre, l'autre lévogyre (§ 341).

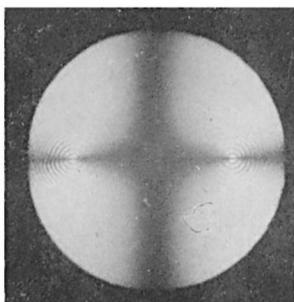
FIGURES D'INTERFÉRENCES EN LUMIÈRE CONVERGENTE



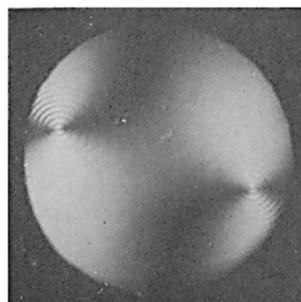
1



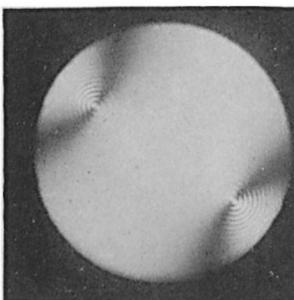
2



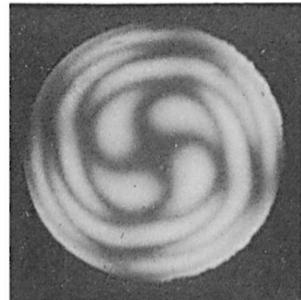
3



4



5



6