

ADRIEN FOCH

LILLE

ACOUSTIQUE



COLLECTION ARMAND COLIN

LIBRAIRIE
ARMAND COLIN



≡ 10^f 50 ≡



N. 16
R-6

291207/-76565
POMME SE

Acoustique

DU MÊME AUTEUR

Introduction à la Mécanique des Fluides (Collection Armand Colin).

167 24/27
N° 166

COLLECTION ARMAND COLIN

(Section de Physique)

MUSÉE COMMERCIAL

ET COLONIAL

2 Rue du Lomba

LILLE

Acoustique

par

Adrien FOCH

Professeur à la Sorbonne

67 Figures



LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS

1934

Tous droits réservés

Tous droits de reproduction,
de traduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.
Copyright 1934, by Max Leclerc et Cie

PRÉFACE

Il y a vingt-cinq ans, l'Acoustique paraissait avoir livré aux savants tous ses résultats essentiels. Helmholtz en avait établi les fondements physiques et physiologiques de façon solide et de manière qui semblait définitive. Rayleigh en avait donné une exposition dont la rigueur mathématique s'appuyait sur un remarquable ensemble expérimental. La lecture du traité d'Auerbach laissait l'impression qu'il n'existait plus en ce domaine que points de détail à élucider. Les travaux expérimentaux sur les vibrations amorties des solides élastiques dans les fluides étaient considérés comme ouvrages de dames — for women physicists — ; les recherches sur l'audition n'éveillaient aucun intérêt en dehors du cercle restreint de quelques spécialistes.

Or, l'Acoustique a repris aujourd'hui une place de premier plan dans les préoccupations scientifiques. Sans doute les raisons de ce changement ne sont pas d'ordre purement spéculatif : c'est le repérage des engins de guerre qui poussa à l'étude des bruits qu'ils émettent ; le développement des machines parlantes et du téléphone a posé à l'industrie d'impérieux problèmes dont la solution a exigé la collaboration assidue de la technique et du laboratoire ; l'extension de l'automobile enfin ayant soulevé la question du bruit, physiologistes et physiciens sont priés par les pouvoirs publics de

combiner leurs efforts pour mesurer la gêne ou la fatigue provoquées par le vrombissement des moteurs ou le roulement des camions. Mais qu'importe l'origine d'un problème s'il donne lieu à recherches, s'il aboutit à un résultat important ?

Dans ce petit livre, j'ai essayé de donner un exposé élémentaire des principaux résultats acquis en Acoustique Physique. J'ai donc laissé de côté tout ce qui pouvait avoir trait à l'esthétique musicale ainsi qu'à la physiologie ou à l'anatomie des organes phonateurs ou auditifs. Dans une première partie, j'ai rassemblé les résultats classiques sur la cinématique et la dynamique des vibrations et des ondes ; j'ai tenu à consacrer un chapitre aux oscillations de relaxation dont l'importance en Acoustique n'est pas moindre qu'en Électricité.

Dans une deuxième partie sont étudiés la propagation des ébranlements sonores et les phénomènes résultant du mouvement de la source ; j'indique ensuite les principales données physiques relatives à l'audition et je résume les méthodes essentielles de la mesure acoustique.

Une troisième partie enfin est consacrée à l'examen des dispositifs utilisés à la production et à la transformation du son : phonographe, téléphone, cordes, verges et tuyaux. Si j'ai souvent dû me borner à indiquer la voie où il faut chercher la solution rigoureuse d'un problème, je crois avoir généralement donné les indications nécessaires pour que, sans trop de peine, le lecteur puisse compléter les calculs, ou tout au moins remonter aux sources.

ACOUSTIQUE

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES

1. **Mouvement sinusoïdal.** — Soit le mouvement rectiligne *sinusoïdal, harmonique, vibratoire simple, pendulaire*¹ (tous ces termes sont équivalents), défini par l'équation :

$$x = a \sin (\omega t + \varphi). \quad (1)$$

On appelle x l'*élongation*, $\omega t + \varphi$ l'*argument* ; a l'*amplitude* ; φ (argument à l'origine des temps) est dit la *phase* ; ω est la *pulsation*. Le produit $a^2\omega^2$ du carré de l'amplitude par le carré de la pulsation est pris pour mesure de l'*intensité*.

Écrivant $x = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right) = a \sin (2\pi nt - \varphi)$, on met en évidence la *période* $T = 2\pi : \omega$ du mouvement et sa *fréquence* $n = 1 : T = \omega : 2\pi$, c'est-à-dire le nombre de périodes pendant l'unité de temps (la seconde, sauf spécification contraire).

Le mouvement sinusoïdal joue, dans l'étude des phénomènes vibratoires, un rôle fondamental dû au fait que l'accélération x'' , étant égale à $-\omega^2 x$, est proportionnelle au déplacement et dirigée en sens inverse de ce dernier. Par suite, il se trouvera réalisé, au moins approxi-

1. On notera que le mouvement d'un pendule n'est pas pendulaire, au sens ici défini.

mativement, toutes les fois qu'un mobile, légèrement écarté de sa position d'équilibre, est rappelé vers cette dernière par une force $F = -k^2x + k'x^2 + k''x^3 + \dots$ croissant d'abord avec l'écart.

En effet, pour les déplacements assez petits pour qu'on puisse dans l'expression de F négliger les termes d'ordre supérieur à x , l'équation du mouvement est *physiquement* équivalente à l'équation $mx'' = -k^2x$ laquelle s'intègre par $x = a \sin \left[t \sqrt{\frac{k^2}{m}} - \varphi \right]$; c'est un mouvement sinusoïdal où l'amplitude a et la phase φ sont à déterminer par les conditions initiales.

2. Remarque importante. — Il n'est pas inutile d'attirer l'attention sur les ordres de grandeur respectifs de l'amplitude, de la vitesse et de l'accélération dans les mouvements vibratoires usuels. Soit par exemple (chiffres courants dans les vibrations des cordes ou des diapasons) un mouvement sinusoïdal de fréquence $n = 500$ ($\omega = 3.141$) et d'amplitude $a = 1$ mm. La vitesse maximum est de $3,14$ m : s ; quant à l'accélération, elle atteint $9\ 863$ m : s², soit mille fois l'intensité de la pesanteur. Une telle valeur de l'accélération n'a rien qui doive étonner, lorsqu'on remarque que la vitesse de $3,14$ m : s est ici atteinte en un demi-millième de seconde, sur un trajet de 1 mm, alors qu'un corps en chute libre met un tiers de seconde et parcourt un demi-mètre avant d'acquiescer la même vitesse. On comprend alors pourquoi par exemple les diapasons de fréquence élevée ont un aspect si massif.

3. Composition de mouvements sinusoïdaux de même direction et de même période. Théorème. — *Le mouvement résultant des mouvements sinusoïdaux de même période*

$$\begin{array}{rcl} x_1 = a_1 \sin (\omega t + \varphi_1) & x_2 = a_2 \sin (\omega t + \varphi_2) & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & x_n = a_n \sin (\omega t + \varphi_n) & \end{array}$$

est, comme on sait, un mouvement sinusoïdal de même période et dont l'amplitude A et la phase s'obtiennent par la classique construction de Fresnel (fig. 1). On vérifiera sans difficulté que

$$A^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + \sum a_i \cdot a_j \cos(\varphi_i - \varphi_j).$$

4. Phases réparties au hasard.

— Supposons un grand nombre de mouvements sinusoïdaux ayant tous même direction, même période, même amplitude a , mais dont les phases sont réparties *au hasard* ; les déphasages $\varphi_i - \varphi_1$ sont alors répartis au hasard sur toute la circonférence et les valeurs négatives de leurs cosinus sont aussi probables que les valeurs positives. Par suite, la valeur probable de l'intensité résultante se réduit à $\omega^2 A^2 = n a^2 \omega^2$: l'intensité résultante est égale à n fois chacune des intensités composantes¹.

Plus généralement on pourrait supposer n_1 mouvements d'amplitude a_1 ; n_2 mouvements d'amplitude a_2 ; si les phases sont réparties au hasard et si tous les n sont grands, l'intensité du mouvement résultant est la somme des intensités des mouvements composants.

Application. — La remarque précédente permet de lever un paradoxe curieux : Soient deux instruments identiques, deux violons par exemple, émettant la même note avec la même intensité. *A priori*, le déphasage des deux vibrations peut avoir une valeur quelconque ; supposons qu'il reste constant pendant un nombre suffisant de périodes ; il y aurait alors exactement une chance sur trois pour que ce déphasage soit compris entre $2\pi : 3$ et

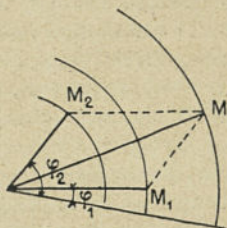


Fig. 1.

1. Le lecteur soucieux d'une exposition moins intuitive se reportera à Lord Rayleigh [SOUND, I, § 42 a].

$4\pi : 3$, pour que par suite l'intensité résultante, observée à quelque distance, soit plus petite que l'intensité produite par chaque violon fonctionnant isolément. Du fait expérimental que deux instruments font toujours plus de bruit qu'un seul, on doit conclure que le déphasage des fondamentaux ne se maintient constant que pendant un tout petit nombre de période; qu'il change très souvent par seconde *sans loi aucune*. Étant donné le mode d'entretien de la plupart des instruments, ces variations continuelles du déphasage n'ont rien qui doive étonner.

5. Battements. — Soit à composer deux mouvements sinusoïdaux de même direction et de périodes très peu différentes

$$x_1 = a_1 \sin 2\pi n_1 t \quad x_2 = a_2 \sin (2\pi n_2 t + \varphi).$$

Écrivons

$$x_2 = a_2 \sin 2\pi [n_1 t + (2\pi n t + \varphi)].$$

Appliquons la construction de Fresnel aux deux mouvements x_1 et x_2 considérés comme ayant même fréquence n_1 , mais un déphasage *variable* $2\pi n t + \varphi$; nous trouvons que l'amplitude résultante oscille avec la fréquence entre un maximum $a_1 + a_2$ et un minimum $a_1 - a_2$. Le phénomène est traduit dans la figure 2, tracée dans l'hypothèse

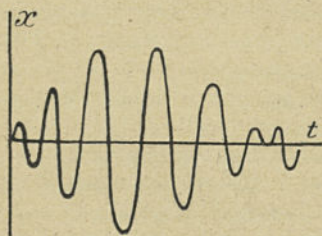


Fig. 2.

$a_1 = a_2$, $n = n_1 : 6 = n_2 : 7$. On voit que, dès qu'on s'écarte un peu des minimums, il existe une sorte de périodicité de l'amplitude, correspondant à une pseudo-fréquence¹

1. Je dis pseudo-fréquence pour que le lecteur ne croie pas à l'existence d'une fréquence déterminée. Cf. E. WAESSMANN, *Phys. Zeits.*, 18 (1917), 560.

comprise entre n_1 et n_2 . Soit dès lors un appareil « résonnant » à peu près également à *toutes* les vibrations de fréquences intermédiaires entre n_1 et n_2 , c'est-à-dire prenant sous l'effet d'une telle vibration un déplacement proportionnel à l'amplitude de cette dernière. Soumis à l'action simultanée des fréquences n_1 et n_2 , il effectuera un mouvement dont l'importance sera grande au moment des maximums résultants. Au contraire, il restera pratiquement immobile à l'époque des minimums résultants. Ces *coups* intenses, séparés par des *repos* relatifs, constituent le phénomène des *battements*. Le nombre de coups pendant l'unité de temps est visiblement égal à la différence $n = n_2 - n_1$.

6. Remarque très importante. — Il est nécessaire de préciser un point. L'égalité

$$x_2 = a_2 \sin [2\pi n_1 t + (2\pi n t + \varphi)]$$

constitue une simple équivalence *cinématique* : dans la vibration x_2 , les vibrations de fréquence n_1 et n n'ont pas d'existence *réelle* ; on vérifie ce point en utilisant un *résonateur spécifique des fréquences n_1* , c'est-à-dire un dispositif susceptible d'être mis en branle par les vibrations de fréquence n_1 , *et par ces vibrations seulement*. L'expérience montre qu'un tel appareil résonateur (dont nous établirons au chapitre 4 la possibilité de réalisation) ne répond pas sous l'action de la vibration de fréquence n_2 . De même, l'action simultanée des fréquences n_1 et n_2 sur un *résonateur spécifique des vibrations n* , est incapable de mettre en branle ce dernier. Il n'y a d'ailleurs pas là contradiction avec ce qui est dit à la fin du paragraphe précédent, où il s'agit non de résonateurs répondant à des vibrations déterminées n , mais au contraire d'appareils suivant également *toutes* les fréquences comprises dans un certain intervalle.

MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

7. Partiels. — On a souvent à considérer le mouvement résultant de la composition d'un certain nombre de mouvements sinusoïdaux, appelés *partiels*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin 2\pi(n_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= a_2 \sin 2\pi(n_2 t + \varphi_2) \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_p &= a_p \sin 2\pi(n_p t + \varphi_p). \end{aligned}$$

Numérotons les partiels par ordre de fréquences croissantes, le mouvement x_p est dit le *partiel p* ; le partiel 1 est souvent dit le *fondamental*.

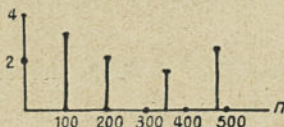


Fig. 3.

On appelle *spectre* du mouvement

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

le graphique obtenu en portant normalement à un

axe gradué en fréquences des ordonnées proportionnelles à l'amplitude du partiel correspondant : c'est ainsi que la figure 3 représente le spectre du mouvement

$$\begin{aligned} x &= 3 \sin 2\pi(100t + \varphi_1) \\ &+ 2 \sin 2\pi(200t + \varphi_2) + 1,5 \sin 2\pi(350t + \varphi_3) \\ &+ 2,5 \sin 2\pi(475t + \varphi_4). \end{aligned}$$

Le tracé du spectre ne tenant pas compte des valeurs prises par les phases $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, un même spectre correspond à des mouvements dont les courbes représentatives offrent des apparences totalement différentes.

8. Harmoniques. — Un cas particulier d'une importance extrême en acoustique est celui du mouvement $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ résultant de la composition de p mouvements sinusoïdaux dont les fréquences sont les multiples successifs d'une même fréquence N . Les par-

tiels prennent alors le nom d'*harmoniques* ; leur suite forme la série des harmoniques existant dans le mouvement considéré

$x_1 = a_1 \sin (2\pi Nt + \varphi_1)$ est dit le *fondamental* ou l'*harmonique 1*.

$x_2 = a_2 \sin (2\pi \cdot 2N \cdot t + \varphi_2)$ est l'*harmonique 2*.

$x_p = a_p \sin (2\pi \cdot pN \cdot t + \varphi_p)$ est l'*harmonique p*.

Le mouvement précédent est évidemment périodique et de fréquence N . Comme on sait, la forme de la vibration résultante dépend de l'amplitude et de la phase de chaque harmonique : un simple changement de la phase de l'harmonique 2 suffit à transformer totalement l'aspect de la courbe résultante des deux vibrations

$$x_1 = \cos 2\pi Nt$$

et

$$x_2 = \cos (4\pi Nt + \varphi).$$

9. Série de Fourier. — Inversement un mouvement périodique et de fréquence N peut, sous des réserves que nous pouvons ici laisser de côté, être mis sous la forme d'une série trigonométrique, dite *série de Fourier*.

$$x = f(t) = a_0 + a_1 \sin (2\pi Nt + \varphi_1) + a_2 \sin (4\pi Nt + \varphi_2) + \dots$$

ou

$$f(t) = A_1 \sin 2\pi Nt + A_2 \sin 4\pi Nt + \dots + A_p \sin 2\pi \cdot pN \cdot t + \dots \\ + B_0 + B_1 \cos 2\pi Nt + B_2 \cos 4\pi Nt + \dots + B_p \cos 2\pi \cdot pN \cdot t + \dots$$

Quand la fonction $f(t)$ est connue, les coefficients A_p et B_p sont aisément calculables. Ils sont en effet égaux à :

$$A_p = 2N \int_0^T f(t) \sin 2\pi \cdot pN \cdot t \, dt$$

$$B_p = 2N \int_0^T f(t) \cos 2\pi \cdot pN \cdot t \, dt$$

comme on le vérifie aisément en multipliant par $\sin 2\pi \cdot pNt$ ou $\cos 2\pi \cdot pNt$ les deux membres de l'égalité précédente et en intégrant de $t = 0$ à $t = T = 1 : N$.

10. Phénomène de Gibbs. — En pratique, une fonction périodique est généralement donnée non par son équation, mais par sa courbe représentative. Les intégrations exigées par l'*analyse harmonique*, c'est-à-dire par la détermination des coefficients de la série de Fourier correspondante, doivent donc être effectuées soit graphiquement, soit au moyen de machines appropriées (analyseurs harmoniques de Kelvin, de Coradi, etc.). Malheureusement, en raison de l'imprécision des tracés, les numéros des harmoniques dont il est possible de déterminer ainsi l'amplitude sont toujours relativement faibles, très rarement supérieurs à 10 par exemple. Or quand on limite à ses premiers termes le développement en série de Fourier d'une fonction déterminée, on obtient une nouvelle fonction dont la courbe représentative peut différer profondément de la courbe figurant la fonction initiale : les angles se sont adoucis, les discontinuités ont disparu.

Au total l'approximation réalisée sur la représentation de la fonction peut laisser à désirer. C'est ainsi, par exemple, qu'en limitant à l'harmonique 5 le développement en série de Fourier de la fonction égale à 1 de 0 à $T : 2$ et à -1 de $T : 2$ à T on obtient la fonction

$$\frac{2l}{\pi} \left[\sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{1}{3} \sin 6\pi \frac{t}{T} + \frac{1}{9} \sin 10\pi \frac{t}{T} \right]$$

dont la figure 4 représente la demi-période ; les écarts avec la fonction initiale y sont de l'ordre du dernier terme conservé.

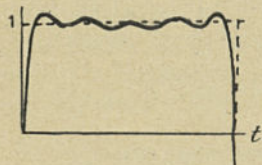


Fig. 4.

Ce résultat, appelé *phénomène de Gibbs*, présente une grande importance : Toutes les fois, en effet, que la courbe représentative d'une fonction périodique possède des dis-

continuités de tracé, de pente, voire même de courbure, c'est un signe que les harmoniques de numéro élevé

possèdent dans la fonction une amplitude appréciable. Une telle fonction est, comme on dit, riche en harmoniques.

11. Valeur d'un développement en série de Fourier. —

Un point très important est à préciser. Entre une fonction périodique et son développement en série de Fourier, l'équivalence est purement cinématique : Par exemple, la fonction de la figure 5 représente une suite de déplacements rythmés, dans l'intervalle desquels il ne passe rien. Sans doute un système oscillant suivant une telle loi peut entretenir, avec une amplitude notable, les vibrations d'un résonateur dont la fréquence est égale à n fois celle des déplacements du système. Mais cela n'est aucunement la preuve de l'existence effective de

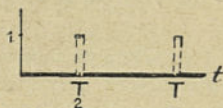


Fig. 5.

l'harmonique n dans le mouvement du système ; cela démontre tout au plus que le résonateur est susceptible d'être maintenu en branle par des chocs rythmés. Je reviendrai là-dessus au paragraphe 40.

12. Courbes de Lissajous. — Soit le mouvement plan défini en coordonnées cartésiennes par les équations

$$x = F(t) \quad y = G(t),$$

x étant une fonction périodique du temps, de période T_1 , oscillant entre les valeurs F_1 et F_2 , et y une fonction périodique de période T_2 , oscillant entre les valeurs G_1 et G_2 . La trajectoire du point $M(x, y)$ est une courbe, dite *courbe de Lissajous*, inscrite dans un rectangle dont les côtés parallèles aux axes ont pour longueurs respectives $F_2 - F_1$ et $G_2 - G_1$. Le mouvement est périodique, lorsque T_1 et T_2 sont commensurables ; la trajectoire se ferme alors au bout d'une période θ , dont la durée est évidem-

ment égale au plus petit commun multiple de T_1 et de T_2 . Le calcul de l'équation de la trajectoire est généralement inextricable ; mais le tracé point par point n'offre aucune difficulté.

Réciproquement, si on connaît la trajectoire résultante et la loi du mouvement suivant l'axe des x , il est possible de remonter à la loi de vibration suivant l'axe des y . Une méthode fondée sur ce principe a rendu longtemps de réels services ; c'est par elle par exemple qu'a été pour la première fois étudié le mouvement des cordes de violon. Son intérêt a bien diminué depuis la généralisation de la chronophotographie.

13. Oscillations amorties. — Dans un très grand nombre d'applications physiques, le mouvement d'un mobile s'effectue suivant la loi

$$x = ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = ae^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (1)$$

représentée (fig. 6) par une courbe inscrite dans l'espace

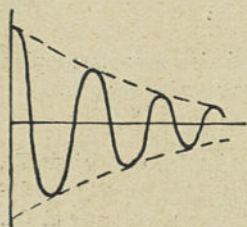


Fig. 6.

compris entre les deux courbes $x = \pm ae^{-\delta t}$. Pour un tel mouvement, il ne saurait être question de périodicité, d'amplitude, etc., au sens strict des mots. Cependant, le mobile se dirigeant dans un sens déterminé passe par sa position d'équilibre ($x = 0$) à des instants séparés par un intervalle constant T . De même, les maxi-

mums ou les minimums de l'élongation ont lieu aux instants θ définis par la relation

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\theta}{T} + \varphi\right) = \frac{2\pi}{\delta T}.$$

L'intervalle entre deux maximums consécutifs est encore égal à T^1 . Enfin, le rapport des élongations du mobile à deux instants distants de T est constant et égale à $e^{-\delta T}$.

On a donc, dans ce mouvement, une *pseudo-période* T . Mais, en même temps, on y aperçoit un *amortissement* qu'on peut définir soit par la quantité $\tau = 1 : \delta$ (*constante de temps*), laquelle est d'autant plus grande que l'amortissement est plus faible, soit par le *nombre* δT , dit le *décroissement logarithmique* de l'oscillation. La quantité $ae^{-\delta t}$ est l'*amplitude* de l'oscillation; elle tend vers 0, sans être jamais nulle. On voit aisément que, pour que cette amplitude diminue de $\frac{1}{10}$ en une pseudo-période — ce qui est un amortissement notable réduisant l'amplitude initiale au $\frac{1}{100}$ en 43 pseudo-périodes — il faut que

$$\delta T = -\log_e (0,9) = 0,104.$$

Pour qu'elle diminue de moitié dans le même temps — ce qui correspond à un amortissement *considérable*, puisque l'amplitude tombe en moins de 7 périodes au centième de sa valeur initiale — il faut que $\delta T = 0,69$. De même les temps nécessaires pour que l'amplitude tombe au centième, puis au millième de sa valeur initiale, soit respectivement $4,6 : \delta$ et $6,9 : \delta$.

1. A noter qu'un maximum ou un minimum se place *un peu avant* le milieu des deux zéros qui l'encadrent.

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE DES ONDES

14. Propagation d'une onde. — Si, dans un milieu élastique au repos, on vient à écarter une particule P de sa position d'équilibre, le déplacement ne reste pas localisé en P ; au contraire, il se développe de proche en proche, intéressant les unes après les autres les diverses régions du milieu. Au passage de l'onde (on dit également de l'ébranlement ou de la perturbation), un élément du milieu est déplacé, puis il revient vers une position d'équilibre, après avoir transmis aux éléments voisins le mouvement qui momentanément l'animait. Le déplacement final de l'élément est toujours très petit vis-à-vis de la distance sur laquelle l'ébranlement s'est fait sentir ; il y a donc, non pas *transport de la matière* qui est seulement mise en mouvement sur place, mais uniquement *propagation du mouvement*. Pour marquer cette différence par le langage, nous distinguerons la *vitesse* d'une particule, en donnant au mot le sens habituel en mécanique, et la *célérité* de l'ébranlement, mesurée par la distance sur laquelle cet ébranlement s'est fait sentir pendant l'unité de temps.

15. Ondes progressives planes. — Dans un milieu siège d'un ébranlement, la perturbation apportée par le pas-

sage de l'onde en un point M peut se définir au moyen d'une certaine variable s , qui, suivant les cas, sera le déplacement d'une particule, ou bien sa vitesse, ou encore la pression existant en M, etc. Cette variable s est une fonction du temps et des coordonnées de M. En particulier, supposons qu'on ait une propagation par ondes planes, c'est-à-dire où la perturbation est la même pour tous les points d'un plan (*plan d'onde*) $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = h$ normal à la direction fixe Δ (de cosinus directeurs α, β, γ) ; il faut que

$$s = f[\alpha X + \beta Y + \gamma Z, t].$$

Si on prend un axe des x parallèle à la direction Δ , l'expression précédente prend la forme $s = f(x, t)$, dont nous allons étudier un cas particulièrement important.

16. Équation des cordes vibrantes. — Dans un grand nombre de phénomènes que nous aurons à examiner, la variable s satisfait à l'équation des cordes vibrantes, c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation est, comme on sait,

$$s = F(Vt - x) + G(Vt + x).$$

17. Théorème. — L'expression $s_1 = F(Vt - x)$ représente un mouvement (onde descendante) se propageant vers les x croissants avec une célérité V .

Si en effet s représente le déplacement à l'instant t d'une particule dont la position d'équilibre se trouve à la distance x de l'origine, l'identité

$$F(Vt - x) = F \left[V \left(t + \frac{l}{V} \right) - (x + l) \right]$$

montre que le déplacement est le même en x à l'instant t

et au point $x' = x + l$ au temps $t' = t + \frac{l}{V}$. Ce qu'on peut exprimer en disant que le déplacement existant au temps t en un point quelconque x s'est propagé le long de l'axe des abscisses de la quantité constante l pendant le temps $\frac{l}{V}$.

Écrivant de même

$$G(Vt + x) = G \left[V \left(t + \frac{l}{V} \right) + (x - l) \right],$$

on voit que le déplacement existant en x au temps t rétrograde de la quantité constante l pendant le temps $\frac{l}{V}$. C'est une onde montante.

Par suite l'intégrale générale de l'équation des cordes vibrantes est la somme de deux mouvements se propageant respectivement, l'onde descendante F vers les x croissants et l'onde montante G vers les x décroissants avec la célérité uniforme V .

Remarque. — Une transformation immédiate de coordonnées montre que le mouvement $F(\alpha x + \beta y + \gamma z - Vt)$ représente un mouvement se propageant par ondes planes normales à la direction $\alpha\beta\gamma$ avec la célérité constante V .

18. Conditions aux limites imposées aux fonctions satisfaisant à l'équation des cordes vibrantes. — Pour déterminer complètement, dans chaque cas particulier, les fonctions F et G , il est nécessaire de faire intervenir les conditions aux limites. Or ces conditions appartiennent généralement à l'une des catégories ci-après :

1° On impose la loi du déplacement en fonction du temps, en un point donné ($x = 0$, par exemple). En particulier, on peut se donner l'une des deux conditions suivantes :

a) déplacement constamment nul au point $x = 0$;

b) dilatation $\frac{\partial s}{\partial x}$ constamment nulle au point $x = 0$.

2° On donne pour tous les points à un instant donné ($t = 0$ par exemple) les déplacements et les vitesses. En particulier, on peut :

a) Donner les déplacements en s'imposant que les vitesses initiales soient toutes nulles [de telles données se rencontrent quand un système écarté de sa position d'équilibre est abandonné à lui-même sans vitesse initiale (§ 165)].

b) Donner les vitesses, en imposant que les déplacements initiaux soient tous nuls. De telles données se rencontrent lorsqu'on communique une impulsion à un système en équilibre (§ 169).

19. Déplacement nul pour $x = 0$. — Cherchons la forme particulière à donner à l'intégrale générale de l'équation des cordes vibrantes $s = F(Vt + x) + G(Vt - x)$ pour que, quel que soit t , la relation $(s)_{x=0} = 0$ soit satisfaite.

Pour toutes les valeurs de la variable $\xi = Vt$, on doit avoir : $F(\xi) + G(\xi) = 0$. Il faut donc que $F(\xi) \equiv -G(\xi)$. Par suite

$$s = G(Vt + x) - G(Vt - x).$$

Or l'identité

$$s_1 = -G(Vt - x) = -G\left[V\left(t - \frac{2x}{V}\right) + x\right]$$

montre que le déplacement s_1 qui, se propageant vers les x croissants, passe en M au temps t est — au signe près — le déplacement $s_2 = G(Vt' + x)$ qui, remontant vers les x décroissants, passait au même point M au temps

$$t' = t - \frac{2x}{V}.$$

Mais $\frac{2x}{V}$ n'est autre que le temps nécessaire à une onde de célérité V pour effectuer le trajet de M jusqu'à

l'origine et revenir depuis l'origine en M. En d'autres termes, *poser la condition* $(s)_{x=0} = 0$ *revient à considérer l'onde descendante comme provenant de l'onde montante réfléchie sur l'origine avec changement de signe.*

20. Dilatation nulle à l'origine. — L'expression de la dilatation étant ¹

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -F'(Vt - x) + G'(Vt + x),$$

on a comme plus haut

$$F'(\tau) = G'(\xi), \quad F(\xi) = G(\xi) + \text{constante.}$$

Il est généralement possible d'admettre que la constante d'intégration est nulle. Donc

$$\begin{aligned} s &= G(Vt + x) + G(Vt - x) \\ &= G(Vt + x) + G\left[V\left(t - \frac{2x}{V}\right) + x\right], \end{aligned}$$

l'onde descendante peut donc être considérée comme constituée par l'onde montante réfléchie sur l'origine sans changement de signe.

20 bis. A l'origine des temps, déplacements donnés et vitesses partout nulles.

Les conditions

$$s_{(t=0)} = f(x), \quad \frac{\partial s}{\partial t}_{(t=0)} = 0$$

sont évidemment satisfaites par l'expression

$$s = \frac{1}{2} [f(x - Vt) + f(x + Vt)].$$

1. Il est à peine utile de rappeler les égalités

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF(Vt - x)}{d(Vt - x)} \frac{\partial(Vt - x)}{\partial x} = -F'; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = +VF',$$

F' étant la dérivée de F(τ) par rapport à $\tau = [Vt - x]$.

De même :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = G' \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = VG'.$$

Or $\frac{1}{2} f(x - Vt)$ représente un ébranlement de célérité V qui, se propageant vers les x positifs, est à l'instant $t = 0$ figuré par la courbe ponctuée de la fig. 7

$\sigma = \frac{1}{2} f(x)$. D'autre

part $\frac{1}{2} f(x + Vt)$,

est un ébranle-

ment qui, remontant vers les x négatifs, est à l'instant $t = 0$ figuré par la même courbe σ . La construction de s à un instant quelconque résulte immédiatement de ces remarques. En effet, la figure donne, pour l'instant $t = 1$, la position des ébranlements $\frac{1}{2} f(x - Vt)$ (pointillé), $\frac{1}{2} f(x + Vt)$ (trait mixte) et enfin de l'ébranlement s (trait plein).



Fig. 7.

21. Déplacements nuls et vitesses imposées à l'origine des temps. — Les conditions

$$s(t=0) = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial t}(t=0) = f'(x),$$

$f'(x)$ étant la dérivée d'une fonction $f(x)$, sont évidemment satisfaisantes par l'expression

$$s = \frac{1}{2} [f(x - Vt) - f(x + Vt)],$$

s est donc la somme : 1° d'un ébranlement se propageant vers les x positifs et occupant, à l'instant $t = 0$, la position définie par la courbe $\sigma_1 = \frac{1}{2} f(x)$.

2° d'un ébranlement remontant vers les x négatifs et figuré à l'instant $t = 0$ par la courbe $\sigma_2 = -\frac{1}{2} f(x)$.

La figure 8 donne à l'instant $t = 1$ en pointillé et en mixte la position des deux ébranlements constituants et en plein la forme de l'ébranlement résultant s .

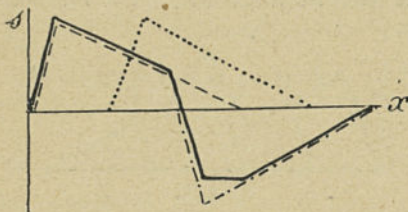


Fig. 8.

22. Combinaisons des conditions aux limites

précédentes. — a) *Déplacements constamment nuls en deux points.* — Le déplacement étant nul au point A d'abscisse $x = 0$, on a (§ 19) :

$$s = G(Vt + x) - G(Vt - x).$$

Mais le déplacement devant également rester nul au point $x = L$, on doit avoir, quel que soit t :

$$0 = G(Vt + L) - G(Vt - L),$$

ce qui s'écrit, en posant $\xi = Vt - L$,

$$G(\xi + 2L) = G(\xi).$$

La fonction $G(\xi)$ est donc périodique et de période $2L$; la fonction $G(Vt - L)$ est périodique et de période $2L$ en x , de période $\frac{2L}{V}$ en t , et cela, quelles que soient les conditions initialement imposées aux déplacements et aux vitesses des points autres que A et B.

b) *Dilatations constamment nulles en deux points.* — On établit, comme plus haut, que l'on a

$$s = G(Vt + x) + G(Vt - x),$$

$G(\xi)$ étant une fonction périodique en ξ et de période $2L$.

Ce résultat est utilisé dans la théorie des tuyaux ouverts aux deux bouts.

c) *Déplacement nul en un point A, dilatation nulle en un point B.* — Le déplacement étant constamment nul en A, on a :

$$s = G(Vt + x) - G(Vt - x).$$

La dilatation $\frac{\partial s}{\partial x}$ étant constamment nulle en B, on a

$$S_B = G(Vt + L) + G(Vt - L) = 0.$$

Par suite, quel que soit $\xi = Vt - L$,

$$G(\xi) = -G(\xi + 2L) = G(\xi + 4L).$$

La fonction $G(\xi)$ est donc périodique en ξ , et de période $4L$ dans l'espace, $\frac{4L}{V}$ dans le temps ; d'autre part, à une demi-période d'intervalle les déplacements sont symétriques.

d) *Déplacement constamment nul en un point A ; à l'instant $t = 0$, déplacements donnés et vitesses nulles.* — D'après la première condition, on a (§ 19)

$$s = G(Vt + x) - G(Vt - x).$$

D'après la deuxième condition, s est de la forme

$$s = \frac{1}{2} [f(Vt + x) + f(Vt - x)].$$

Pour satisfaire simultanément aux deux conditions, il faut que :

$$f(\xi) = G(\xi), \quad f(\eta) = -g(-\eta) = -f(-\eta).$$

La fonction $\sigma = f(x)$ qui représente les déplacements au temps $t = 0$ est donc impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

23. Ondes stationnaires. — Dans un grand nombre de cas, et en particulier (§§ 19 et 20) lorsqu'un mouvement

périodique se propageant dans une direction donnée subit une réflexion et engendre par suite un mouvement de même période se propageant en sens inverse, il arrive que la perturbation en un point de coordonnées (x, y, z) se présente comme le produit d'une fonction de l'espace par une fonction périodique du temps $s = f(x, y, z) \cdot g(t)$. On a une *onde stationnaire*.

1° Pour des perturbations de cette forme, lorsque $g(t)$ s'annule, toutes les particules passent simultanément par leur position d'équilibre; les *vibrations sont donc synchrones*.

2° La perturbation est constamment nulle en tous les points pour lesquels $f(x, y, z) = 0$. Dans le cas général, le nombre de ces points est limité. En effet, lorsque la variable s est un vecteur, elle ne peut s'annuler que lorsque ses trois composantes sont simultanément nulles; écrire que la perturbation est constamment nulle revient donc à écrire que trois fonctions $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ et $f_z(x, y, z)$ sont simultanément nulles; ce qui ne peut généralement être réalisé qu'en un nombre fini de *nœuds*.

Dans certains cas cependant les nœuds forment des *lignes nodales* ou même des *surfaces nodales*. Nous en verrons des exemples plus loin.

24. Ondes sinusoïdales planes. — Je n'insisterai pas sur l'application des généralités précédentes au cas d'ondes sinusoïdales : Le lecteur connaît les propriétés de l'onde progressive sinusoïdale plane, de célérité V ,

$$s = a \sin \frac{2\pi}{L} (Vt - x) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

qui possède dans l'espace une période L (longueur d'onde) et dans le temps une période $T = L : V$. Il sait

également que la superposition de l'onde incidente, progressant vers les x positifs

$$s_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right),$$

et de l'onde réfléchie, remontant vers les x négatifs

$$s_2 = a \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \frac{x}{L} + \varphi \right],$$

donne naissance à l'onde stationnaire

$$s = s_1 + s_2 = 2a \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left[2\pi \frac{x}{L} - \frac{\varphi}{2} \right]$$

dont les nœuds, c'est-à-dire les endroits où le déplacement est nul, sont situés aux points dont les abscisses X sont telles que

$$2\pi \frac{X}{L} - \frac{\varphi}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Deux nœuds consécutifs sont équidistants de $\frac{L}{2}$; au milieu de l'intervalle de deux nœuds, on trouve des ventres, où l'amplitude atteint son maximum.

CHAPITRE III

OSCILLATIONS NATURELLES DES SYSTÈMES VIBRANTS

25. Définitions. — Dans la dynamique générale des systèmes matériels, il faut distinguer deux espèces de variables : les unes, dites *variables de position*, sont relatives au système lui-même, dont elles définissent à un *instant donné* la configuration, dont elles mesurent la déformation à partir d'un état de repère. Les autres, dites *variables de tension*, mesurent au contraire la grandeur des actions qui tendent à changer la configuration, à modifier les déformations ; en d'autres termes, elles mesurent les facteurs qui tendent à faire varier les variables de position. D'une façon générale, lorsqu'une déformation, exprimée au moyen de la variation dq de la variable de position q , met en jeu un travail $dW = Fdq$, F est la variable de tension correspondante. La dérivée q' par rapport au temps d'une variable de position q est dite *variable de débit*.

Considérons maintenant un système pouvant effectuer des oscillations ; à un instant donné de la période, chaque élément renferme une certaine quantité d'énergie mécanique, emmagasinée en partie sous forme potentielle, et en partie sous forme cinétique. Si la variable de position passe de q à $q + dq$, l'énergie potentielle de l'élé-

ment augmente d'une quantité qu'il est toujours loisible de représenter par $E q dq$; E qui peut dépendre des variables de position, de débit, de tension, etc., est l'élasticité de l'élément relative à la variable de position q . Son inverse $c = 1 : E$ représente une *capacité*¹.

D'autre part, l'énergie cinétique est généralement mesurée au moyen des variables de débit; quand l'une d'elles passe de la valeur q' à $q' + dq'$, l'énergie cinétique de l'élément augmente d'une quantité qu'il est toujours possible de reprendre par $M q' dq'$. M mesure l'inertie de l'élément relativement à la variable q .

Par exemple, dans le mouvement de rotation autour d'un axe Δ d'un solide rappelé vers sa position d'équilibre par un couple (variable de tension) $C\alpha$ proportionnel à l'azimut α (variable de position), l'élasticité est le moment statique C ; l'inertie est mesurée par le moment d'inertie J du solide par rapport à l'axe. Dans ce cas, l'inertie et l'élasticité sont des constantes.

Il n'en est pas toujours ainsi. Soit par exemple un gaz contenu à température constante dans un corps de pompe de section S fermé par un piston de masse M ; on admet que, lorsque le gaz est à la pression atmosphérique p_0 , le piston est en équilibre à la distance l du fond du corps de pompe. Pour un déplacement x à partir de cette position d'équilibre, le piston est soumis à une force (variable de tension) que le lecteur vérifiera aisément être égale à $-S p_0 \frac{x}{l-x}$; si l'inertie (ici la masse du piston) est toujours constante, en revanche l'élasticité $\frac{S p_0}{l-x}$ dépend de la valeur prise par la variation de position x .

En particulier, cette élasticité prend des valeurs diffé-

1. Quand on verse une masse d'eau dq dans un vase cylindrique, le niveau et par suite l'énergie potentielle de l'eau sont d'autant plus élevés que le vase est plus étroit, qu'il a moins de *capacité*.

rentes suivant que x est positif ou négatif ; en d'autres termes, le système actuel possède une élasticité dissymétrique.

OSCILLATIONS ÉLASTIQUES NON AMORTIES
D'UN POINT MATÉRIEL

26. Mouvement rectiligne. — Nous allons dans tout ce chapitre et sauf précision contraire considérer des points matériels qui, écartés d'une position d'équilibre, sont rappelés vers cette dernière par une force proportionnelle à l'élongation. Pour abrégér le langage, nous dirons que nous avons affaire à des points vibrants. La position d'équilibre en l'absence de toute force extérieure sera prise pour origine des coordonnées.

Soit un point vibrant sur une droite, prise pour axe des x . Son mouvement obéit à l'équation

$$mx'' + kx = 0 \quad (1)$$

Le point effectue donc l'oscillation libre

$$x = a \sin \left[t \sqrt{\frac{k}{m}} + \varphi \right] \quad (2)$$

l'amplitude a et la phase φ de l'oscillation dépendent des conditions initiales ; la pulsation ω se trouve entièrement définie par les caractéristiques mécaniques du système ; elle est en particulier indépendante de l'amplitude.

Une transformation évidente met la relation (1) sous la forme $\frac{1}{2} mx'^2 + \frac{k}{2} x^2 = \text{constante}$: la somme de l'énergie potentielle $\frac{k}{2} x^2$ et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} mx'^2$ d'un point vibrant est constante dans toute la durée de la vibration ; cette dernière est, comme on dit, *conservative* : l'énergie mécanique totale prend périodiquement la forme cinétique et la forme potentielle.

27. Mouvement général. — En l'absence de toute force extérieure, les équations du mouvement d'un point vibrant sont :

$$mx'' + kx = 0; \quad my'' + ky = 0; \quad mz'' + kz = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \varphi_1) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t \\ y &= b \sin(\omega t + \varphi_2) = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t \\ z &= c \sin(\omega t + \varphi_3) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

Éliminant t entre les équations (3), il vient :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ce qui montre que la trajectoire est plane ; prenant le plan de cette trajectoire comme plan des xy , on voit que le point décrit une ellipse inscrite dans un rectangle de côtés $2a$ et $2b$.

28. Élasticité anisotrope. — Dans certains cas, un mobile se déplaçant dans un plan, et dont la position d'équilibre est prise pour origine des coordonnées, se trouve, lorsqu'il est amené au point $M(x, y)$, soumis à une force de projections $-k_1x$ et $-k_2y$; la force de rappel n'est donc plus dirigée vers l'origine.

En l'absence de forces extérieures, les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned} mx'' + k_1x &= 0 \\ my'' + k_2y &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$x = a \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad y = b \cos(\omega_2 t + \psi)$$

avec

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}.$$

La trajectoire de M est une courbe de Lissajous (§ 12).

29. **Oscillations naturelles d'un système à élasticité dissymétrique.** — Considérons un point de masse m , se déplaçant sans frottement suivant l'axe des x et rappelé vers l'origine par la force faiblement dissymétrique $-kx - hx^2$ h étant une *petite* constante positive. Pour deux positions du point symétriques par rapport à l'origine, la valeur de la force de rappel est légèrement plus grande quand le point est du côté positif que du côté négatif. La variation de x en fonction du temps différera donc de la loi de variation $X(t)$ qu'on obtiendrait si le terme de dissymétrie était nul, mais elle en différera certainement peu si h est petit. Nous sommes aussi amenés à écrire x sous la forme d'un développement en série suivant les puissances croissantes de h

$$x = X(t) + hY(t) + h^2Z(t) + \dots$$

Remplaçant x par cette expression dans l'équation du mouvement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + hx^2 = 0$$

il vient, en désignant par des accents les dérivées par rapport à t ,

$$0 = (mX'' + kX) + h(mY'' + kY + X^2) + h^2(mZ'' + kZ + 2XY) + \dots$$

Or il existe un moyen de satisfaire l'équation précédente, c'est d'annuler toutes les parenthèses. Égalons donc d'abord à 0 le terme indépendant de h . Si à l'origine des temps $x = a$, $x' = 0$, nous avons, comme première approximation

$$x = X = a \cos pt$$

avec

$$p = \sqrt{k : m}$$

Portons cette valeur de X dans le coefficient de h et égalons ce dernier à 0 ; il vient

$$mY'' + kY + a^2 \cos^2 pt = 0.$$

Compte tenu du choix de l'origine des temps, cette équation s'intègre par

$$Y = \frac{a^2}{2k} \left[-1 + \frac{1}{3} \cos 2pt \right]$$

Donc en deuxième approximation :

$$x = X + hY = -\frac{ha^2}{2k} + a \left(1 + \frac{1}{3} \frac{h}{k} \cos pt \right) + \frac{a^2 h}{6k} \cos 2pt.$$

Par suite, à cette approximation :

1° Les déplacements ne sont plus symétriques par rapport à la position d'équilibre ; la position moyenne est non l'origine, mais le point d'abscisse $-\frac{ha^2}{2k}$.

2° Quoique le mouvement ait conservé la pulsation p , il n'est plus sinusoïdal, la vibration fondamentale de pulsation p est accompagnée de l'harmonique 2 dont l'importance relative par rapport au fondamental augmente à peu près comme l'élongation initiale a .

On pourrait pousser le développement plus loin, on mettrait en évidence des harmoniques de rangs toujours plus élevés ; on pourrait également examiner avec Rayleigh (*Sound*, I-77) le cas des forces de rappel encore plus compliquées, telles qu'une modification de l'amplitude entraîne un changement dans la période ; je ne puis insister : il suffit que le lecteur se soit rendu compte de la difficulté de soumettre au calcul les phénomènes dès qu'on s'écarte de certaines lois dont la simplicité risque parfois de s'apparenter au simplisme.

OSCILLATIONS AMORTIES D'UN POINT MATÉRIEL

Dans la réalité, les mouvements conservatifs ne se rencontrent pour ainsi dire jamais : bien au contraire, l'énergie mécanique d'un système vibrant diminue continuellement, soit qu'elle se transforme (dissipation par

frottements) en chaleur, soit que, du fait même de l'oscillation, elle soit transférée au milieu entourant le système (dissipation par rayonnement). De cette dissipation résulte un amortissement de l'oscillation, dont nous allons préciser la loi sur des cas particuliers.

30. Frottement proportionnel à la vitesse. — Soit d'abord, sur une droite, un point vibrant soumis à une force dissipatrice $-fx'$ ($f > 0$) proportionnelle à la vitesse et dirigée en sens inverse. L'équation du mouvement devient :

$$mx'' + fx' + kx = 0$$

Son intégrale dépend du signe de $\frac{f^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$.

1° $\frac{f^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = v^2 > 0$; on a alors

$$x = ae^{-\frac{f}{2m}t} [Ae^{vt} + Be^{-vt}].$$

Le point matériel, abandonné à lui-même sans vitesse, tend asymptotiquement vers sa position d'équilibre (Mouvement apériodique).

2° $f^2 - 4km = -4m^2\Omega^2 < 0$. — Dans ces conditions, on a

$$x = ae^{-\frac{f}{2m}t} \sin(\Omega t + \varphi),$$

les quantités a et φ étant déterminées par les conditions initiales. On a un mouvement oscillatoire amorti du type

étudié § 13 ; la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi : \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}}$

est toujours plus grande que la période propre $\theta = 2\pi : \sqrt{\frac{k}{m}}$.

c'est-à-dire la période qu'aurait le système en l'absence de toute force dissipative.

31. Remarque. — La différence $T - \theta$ croît avec l'amortissement, mais elle ne devient appréciable que pour des valeurs considérables de ce dernier. On a en effet

$$\frac{\theta}{T} = \sqrt{1 - \frac{f^2}{4Km}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\delta\theta}{2\pi}\right)^2}.$$

Si donc $\delta\theta = 0,69$, c'est-à-dire si l'amortissement est assez grand pour réduire l'amplitude de moitié à chaque oscillation, la différence relative $\frac{T - \theta}{\theta}$ est de 0,005 seulement ; un amortissement assez fort pour réduire en une seule oscillation l'amplitude au dixième n'augmente encore que de $\frac{1}{20}$ la durée d'une pseudo-période ; c'est donc seulement au voisinage immédiat de l'*amortissement critique* $\left[\delta = \frac{2\pi}{\theta}\right]$, que la pseudo-période augmente de valeur appréciable.

32. Frottement constant. — L'analyse précédente a certainement le mérite de la simplicité ; mais les hypothèses sur lesquelles les calculs se fondent — en particulier, l'existence de forces dissipatives proportionnelles à la vitesse — sont, pour beaucoup de phénomènes, un peu trop schématiques ; souvent, par exemple, la résistance de frottement ne s'annule pas quand la vitesse tend vers zéro. Le lecteur étudiera aisément le mouvement d'un point vibrant, soumis à une force de frottement constante dirigée toujours en sens inverse de la vitesse, et par suite changeant de signe avec cette dernière. Il verra que la loi du mouvement est représentée par une série de demi-sinusoïdes, de même période, mais d'amplitude décroissant en progression arithmétique ; le mouvement s'arrête au bout d'un nombre fini d'oscillations, lorsque la force de rappel devient inférieure à la résistance constante opposée par le frottement.

33. Résistance négative. — Dans certaines applications, il arrive qu'un corps soit soumis à des forces extérieures dépendant de la vitesse, mais agissant dans le sens du mouvement et par suite à l'opposé des forces communément attribuées au frottement : on dit qu'il y a alors *résistance négative*. En pareil cas, les intégrales des équations du mouvement sont souvent analytiquement semblables à celles obtenues lorsqu'il existe de véritables forces dissipatives. Mais il est bien évident que l'interprétation physique des résultats est complètement différente.

Supposons par exemple en effet un point vibrant soumis à une force *accélératrice* $+ gx'$ proportionnelle à la vitesse ; l'équation du mouvement

$$mx'' - gx' + kx = 0$$

correspond, puisque $\frac{g}{2m}$ est positif, à une oscillation

$$x = ae^{\frac{g}{2m}t} \sin(\Omega t - \varphi)$$

dont l'amplitude augmente avec le temps au delà de toute limite. Un tel résultat montre que l'hypothèse initiale d'une force accélératrice toujours proportionnelle à la vitesse est physiquement inadmissible ; mais on peut très bien réaliser des systèmes vibrants dans lesquels les forces extérieures accélératrices sont de la forme $av + bv^2 + cv^3 + \dots$ et par suite sont pour les petits déplacements équivalentes à av . Soit alors a positif ; si on écarte très peu un tel système de sa position d'équilibre, tout se passera, dans les premiers instants, comme si les termes d'ordre supérieur au premier n'existaient pas ; une oscillation s'amorce et s'amplifie rapidement. Mais dès que la vitesse atteint une valeur notable, les termes négligés au début font sentir leur influence. Le lecteur verra un exemple au § 62.

CHAPITRE IV

OSCILLATIONS FORCÉES DES SYSTÈMES VIBRANTS

34. Position du problème. — Un résonateur constitué par un point vibrant mobile sur une droite est soumis :

1° A une force périodique sinusoïdale de grandeur $C \sin \omega t$ provenant d'un système appelé exciteur.

2° A des forces de frottement proportionnelles à la vitesse et dirigées en sens inverse de cette dernière.

On demande la loi du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est visiblement $mx'' + fx' + kx = C \sin \omega t$.

Son intégrale est la somme de :

1° L'oscillation naturelle amortie, constituée par l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

$$x_1 = Ae^{-\frac{f}{2m}t} \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta} - \varphi\right).$$

2° L'oscillation forcée, ayant la période de l'exciteur

$$x_2 = \frac{C}{\sqrt{f^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \sin(\omega t - \delta) \text{ avec } \operatorname{tg} \delta = \frac{f\omega}{k - m\omega^2}.$$

L'intégrale générale est donc

$$Ae^{-\frac{f}{2m}t} \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta} - \varphi\right) + \frac{C}{\sqrt{f^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \sin(\omega t - \delta),$$

A et φ se déterminant au moyen des conditions initiales.

Si l'excitateur agit pendant un temps assez long, le résonateur est synchronisé sur l'excitateur, la vibration naturelle a disparu et il ne reste plus que l'oscillation forcée dont l'amplitude et la phase sont déterminées entièrement et exclusivement par les propriétés mécaniques de l'oscillation et du résonateur. Nous allons procéder à l'étude du régime permanent ainsi établi.

Action d'un excitateur de période fixe. — On soumet à une force périodique $C \sin \omega t$ un résonateur dont on peut faire varier la période propre, par exemple en modifiant convenablement son élasticité, alors que la masse m et le coefficient de frottement f sont considérés comme constants. *L'amplitude, en régime permanent,*

$$B = \frac{C}{\sqrt{f^2 \omega^2 + [k - m\omega^2]^2}}$$

que prend le résonateur passe par un maximum au moment où le dénominateur est minimum, c'est-à-dire lorsque $k = m\omega^2$, soit lorsque la période propre du résonateur est égale à la période de l'excitateur, ou comme on dit communément, quoique improprement, lorsqu'il y a résonance. Ce terme provient du fait que lorsque l'amortissement est petit ($f\omega$ faible), l'oscillation forcée possède un maximum très marqué de l'amplitude lorsque $k = m\omega^2$, elle « sonne » le passage du résonateur par la fréquence de l'excitateur ; elle constitue donc un résonateur spécifique de la fréquence de l'excitateur. On trouvera dans H. Béghin¹ de nombreux exemples de résonance ; je me bornerai ici à préciser quelques points particulièrement importants pour l'Acoustique.

35. Action, sur un résonateur donné, d'un excitateur de période variable. — Le lecteur vérifiera aisément que le

1. *Statique et Dynamique* (Coll. A. Colin), Chap. 15.

maximum de l'amplitude est obtenu lorsque la période de l'excitateur prend une valeur T' telle que

$$\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 = \omega'^2 = \frac{k}{m} \sqrt{1 - 2 \left(\frac{f^2}{4m^2} : \frac{k}{m}\right)},$$

la période T' est donc supérieure à la pseudo-période du résonateur et par suite à sa période propre. La figure 9 montre pour diverses valeurs portées en cotes du nombre

$\Lambda = \frac{f^2}{4m^2} \frac{m}{k}$, la va-

riation de l'amplitude du résonateur en fonction de la fréquence de l'excitateur. On voit en particulier que :

a) Quel que soit l'amortissement, l'amplitude prend toujours la valeur $\frac{C}{k}$

lorsque $\omega = 0$: si en effet la période de l'excitateur est

infinie, on a des phénomènes statiques ; le déplacement du résonateur est le quotient de la force constante par l'élasticité.

b) Un résonateur très peu amorti vibre au voisinage de la résonance avec une amplitude considérablement supérieure à l'amplitude excitatrice.

c) Un résonateur pour lequel $\Lambda = 2$, ce qui correspond

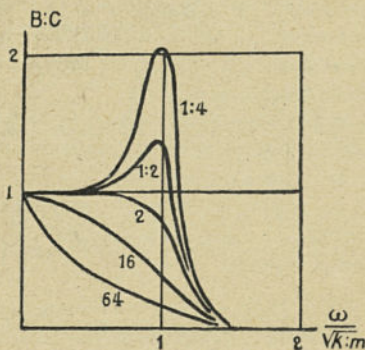


Fig. 9.

1. $\frac{f^2}{4m^2}$ est le carré de la constante de temps du résonateur ; $\frac{k}{m}$ est le carré

de sa pulsation propre Ω : pour un résonateur peu amorti $\sqrt{\Lambda}$ est donc sensiblement égal au quotient par $4\pi^2$ du décrétement logarithmique de l'oscillation libre du résonateur.

à un décrétement logarithmique égal à $\pi : \sqrt{2} = 2,2$ et par suite [§ 13] à un amortissement *considérable* [puisqu'en cinq oscillations libres l'amplitude de l'oscillation tomberait au 1 : 6 000 de sa valeur], reproduit avec une fidélité pratiquement parfaite l'amplitude de toutes les vibrations dont la fréquence est inférieure aux huit dixièmes de sa fréquence propre.

d) Tout résonateur dont l'amortissement correspond à une valeur de Λ inférieure à 10 reproduit à peu près parfaitement l'amplitude de toutes les vibrations sinusoidales dont la fréquence est inférieure aux quatre dixièmes de sa fréquence propre.

e) Un résonateur cesse pratiquement de « répondre » aux vibrations dont les fréquences dépassent de 50 p. 100 sa fréquence propre.

En régime permanent, le déphasage δ de la vibration forcée par rapport à l'oscillation excitatrice est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{f\omega}{k - m\omega^2} : \frac{f}{m} = \frac{m}{k} \times \frac{\omega : \sqrt{\frac{k}{m}}}{1 - \omega^2 : \frac{m}{k}} = \sqrt{\Lambda} \frac{i}{i - i^2}$$

en représentant par $i = \omega : \sqrt{\frac{k}{m}}$ l'intervalle, c'est-à-dire le rapport des fréquences, de la vibration excitatrice et de la vibration propre du résonateur. On voit que

a) Le déphasage est un retard compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ si la fréquence de l'excitateur est inférieure à la fréquence propre du résonateur ($\omega < \Omega$); dans le cas contraire ($\omega > \Omega$), le déphasage est un retard compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π — analytiquement équivalent à une *avance* comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. — Au moment de la résonance ($\omega = \sqrt{k/m}$),

$\delta = \frac{\pi}{2}$: le résonateur et l'excitateur sont en quadrature.

b) Si le résonateur est peu amorti, $\text{tg } \delta$ est toujours petit sauf si i^2 est très voisin de 1 ; par suite, pour les faibles fréquences de l'excitateur, δ est très

voisin de 0, résonateur et excitateur sont parfaitement synchrones ; pour les fréquences élevées, δ est très voisin de π , le résonateur et l'excitateur sont en opposition.

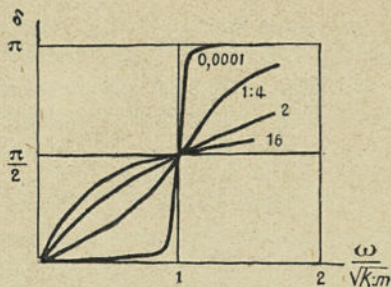


Fig. 10.

c) Le passage par la résonance entraîne une variation du déphasage d'autant plus rapide que l'amortissement du résonateur est plus faible.

La figure 10, où chaque courbe correspond à une même valeur de Λ portée en cote, traduit les résultats précédents.

36. Transmission de la puissance. — Que l'on fasse varier la période de l'excitateur — la période propre du résonateur étant constante — ou bien qu'on fasse varier cette dernière, en maintenant fixe la période de l'excitateur, — l'énergie que l'excitateur transmet au résonateur pour un déplacement dx de ce dernier est :

$$C \sin \omega t \cdot \frac{C}{\sqrt{f^2 \omega^2 + (K - M\omega^2)^2}} \cos(\omega t - \delta) d(\omega t) ;$$

soit au cours d'une période,

$$\begin{aligned} & \frac{C^2}{\sqrt{f^2 \omega^2 + (K - M\omega^2)^2}} \int_0^{T = \frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos(\omega t - \delta) d(\omega t) \\ &= \frac{\pi C^2 \sin \delta}{\sqrt{f^2 \omega^2 + (K - M\omega^2)^2}} = \frac{\pi C^2 \sin^2 \delta}{\omega f} \end{aligned}$$

et enfin, pendant l'unité de temps, comprenant $n = \frac{\omega}{2\pi}$ périodes

$$W = \frac{C^2}{2f} \sin^2 \delta.$$

La puissance transmise est donc maximum lorsque $\delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque la période de l'excitateur coïncide avec la période propre du résonateur¹.

Remarque. — Écrivons $W = \frac{C^2}{2f} \sin^2 \delta = \frac{C^2}{2f} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$.

L'expression de δ montre que $\operatorname{tg} \delta$ reprend la même valeur lorsqu'on remplace i par $\frac{1}{i}$; en d'autres termes, la puissance transmise dépend seulement de l'intervalle, c'est-à-dire du rapport des fréquences du résonateur et de l'excitateur sans qu'il soit besoin de spécifier celui des deux par rapport auquel est pris l'intervalle.

37. Amortissement et rayonnement. — On vérifie immédiatement que

$$f = W : 2B^2\omega^3 = W : 2V_m^2,$$

W étant la puissance que l'excitateur doit fournir pour compenser les pertes diverses et V_m la vitesse maximum du résonateur; mais, dans un grand nombre d'applications, les résonateurs sont utilisés comme émetteurs, c'est-à-dire qu'ils servent d'intermédiaires pour rayonner une puissance vibratoire empruntée à une source extérieure. Cette source doit ainsi fournir non seulement la compensation W_f des frottements internes du résonateur, mais encore l'énergie rayonnée W_r ; tout se passe

1. Si, dans le cas du résonateur excité par un système de fréquence variable, le maximum de la puissance ne correspond pas au maximum de l'amplitude, c'est que, dans l'expression de la puissance, intervient la fréquence n des échanges d'énergie.

donc, du point de vue analytique, comme si, dans le terme amortisseur, on avait remplacé f par $f + \frac{W_r}{2V^2}$: le rayonnement augmente l'amortissement.

38. Action d'une force périodique non sinusoïdale sur un résonateur. — Supposons un résonateur amorti sur lequel un exciteur exerce une force périodique, que je suppose développée en série de Fourier. L'équation du mouvement prendra la forme

$$m x'' + f x' + kx = C_1 \sin \omega t + C_2 \sin (2\omega t + \varphi_2) + C_3 \sin (3\omega t + \varphi_3).$$

Son intégrale est la somme d'une oscillation libre amortie et d'une oscillation forcée périodique. Cette dernière, qui est la seule à subsister en régime permanent, a pour valeur, comme il est aisé de le vérifier,

$$x = B_1 \sin (\omega t - \delta_1) + B_2 \sin [2\omega t + (\varphi_2 - \delta_2)] \\ + \dots B_p \sin [p \omega t + \varphi_p - \delta_p]$$

avec

$$B_p = \frac{C_p}{\sqrt{f^2(p\omega)^2 + [12 - M(p\omega)^2]^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg } \delta_p = \frac{f p \omega}{k - m(p\omega)^2}.$$

On voit ainsi que

1° L'oscillation forcée est périodique et de même période que l'oscillation excitatrice.

2° Le déphasage $(\varphi_p - \delta_p) - (\varphi_q - \delta_q)$ des harmoniques p et q de l'oscillation forcée est différent du déphasage $\varphi_p - \varphi_q$ des harmoniques correspondants dans l'oscillation excitatrice.

3° Le rapport $\frac{B_p}{B_q}$ des amplitudes des harmoniques p et q dans l'oscillation forcée est également différent du rapport correspondant $c_p : c_q$ dans l'oscillation excitatrice.

En d'autres termes (§ 8) la courbe représentant en fonction du temps l'oscillation forcée peut n'avoir aucun rapport de forme avec la courbe de l'oscillation excitatrice.

39. Application des résultats précédents : Oscillographes.

— Destinés à enregistrer en fonction du temps la loi de variation des courants électriques industriels¹, les oscillographes comprennent un galvanomètre inscripteur. L'équipage en est constitué par un système vibrant sur lequel s'exerce une force à tout moment proportionnelle à l'intensité instantanée du courant à étudier. L'inscription correcte d'un courant alternatif périodique n'est donc pas rigoureusement réalisable, puisqu'il est impossible de conserver à la fois le rapport des amplitudes (ce qui exigerait *entre autres choses*, un équipage très amorti) et les déphasages (ce qui n'est possible, entre autres conditions, qu'avec un équipage très peu amorti). On arrive au compromis nécessaire grâce au fait que dans les courants usuels (50 périodes par seconde) les harmoniques de fréquence supérieure à 500 sont toujours très faibles, et ceux de fréquence supérieure à 1 000 pratiquement négligeables ; leurs déphasages par rapport au fondamental, d'ailleurs sans importance technique, n'exercent dans ces conditions aucune influence sur la forme du courant. Aussi cherche-t-on dans l'enregistrement à conserver les amplitudes relatives des premiers harmoniques par l'emploi d'équipages possédant (§ 35) une fréquence propre élevée (2 000 et davantage) et surtout *fortement amortis* (ce qu'on obtient par exemple en immergeant dans l'huile la partie mobile de l'équipage), au contraire de ce qui est réalisé dans les galvanomètres à résonance ou les fréquencesmètres.

40. Entretien d'un système vibrant par chocs périodiques.

— Nous venons de voir qu'un système vibrant amorti soumis à une force d'entretien sinusoïdale prend finalement — et quelle qu'en soit la valeur — la période de cette

1. Cf. A. ROTH, *Alternateurs et moteurs synchrones* (Coll. A. Colin), *passim* et spécialement T. I, p. 138 et T. II, p. 202.

force. Il n'en est plus toujours de même lorsqu'on veut entretenir des oscillations au moyen de forces apportant par des impulsions instantanées périodiques l'énergie nécessaire à la compensation des frottements divers. Supposons, pour fixer les idées (fig. 11), un pendule amorti effectuant des oscillations de petite amplitude (donc isochrones) et recevant des impulsions périodiques égales dirigées de A vers B. Cherchons à quelles conditions un régime permanent peut s'établir.

1° Si la période des impulsions est peu différente de la pseudo-période T du pendule, le pendule se synchronise sur les chocs. Ceux-ci, en effet, dans l'hypothèse contraire, se produiraient successivement aux différents instants de la période ; en particulier, tout le temps qu'ils agiraient au cours de la demi-période de retour BA, ils joueraient à contresens ; il ne pourrait être question d'entretien. Si donc il y a entretien, c'est que le pendule s'est synchronisé sur les chocs. Par suite ces derniers se produisent toujours en un même point de la trajectoire, point dont la position dépend précisément de la différence $T - \theta$.

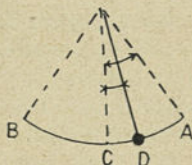


Fig. 11.

Supposons en effet que le pendule venant de A et arrivant en D reçoive pendant ce premier quart de la période une impulsion ; l'arc DC sera décrit en un temps inférieur à ce qui serait nécessaire en l'absence d'impulsion ; ensuite et en raison de l'isochronisme supposé, l'arc d'aller CB et l'arc de retour BCA seront décrits en un temps très sensiblement égal à $3T/4$; au total la durée d'oscillation du pendule se trouve diminuée d'une quantité que le lecteur montrera aisément être égale à $\frac{\alpha d\theta}{\omega^2 \alpha_0^2}$, en appelant α et α_0 les azimuts respectifs de A et D par rapport à la

position d'équilibre, ω la pulsation du pendule, $d\theta$ la variation (supposée petite) qu'éprouve en D la vitesse angulaire.

On établirait de même que la durée de l'oscillation est augmentée, quand, la synchronisation effectuée, l'impulsion se produit entre C et B, au second quart de la trajectoire ; par suite, *pour ne pas changer la période naturelle du pendule, il faut que l'impulsion se produise au passage par la position d'équilibre.* C'est un résultat que l'on cherche à obtenir dans les échappements d'horloge.

2° Si la période θ des impulsions est très petite vis-à-vis de celle du pendule, les chocs, supposés de direction constante, agissent à contresens durant toute la période de retour ; l'entretien du pendule sera impossible. Si d'autre part θ est très supérieur à T, le pendule — qui est amorti — a le temps entre deux chocs de revenir au repos, au moins de façon approximative ; mais il n'est plus permis alors de parler d'entretien, ce mot impliquant en effet une continuité d'action qui dans le cas présent fait complètement défaut ; nous avons au contraire un véritable relancement de la vibration *au temps* (*in tempo*), c'est-à-dire que l'oscillation repart *ab initio* ; l'instant de son début est pour ainsi dire sans rapport aucun avec la série de vibrations précédentes.

41. Fréquence des impulsions sous-multiple de la fréquence du pendule. — Supposons enfin que le pendule soit peu amorti et que sa période soit multiple de celle des impulsions : après un choc l'amplitude de l'oscillation décroît progressivement jusqu'au choc suivant ; elle augmente alors brusquement, redécroit progressivement et ainsi de suite.

Le spectre (§ 6) d'une telle oscillation présente une constitution particulière. D'abord la période du phéno-

mène est celle des impulsions ; donc le spectre doit nécessairement contenir la fréquence fondamentale N_1 des impulsions et éventuellement les multiples $2N$, $3N$, etc. Mais le phénomène essentiel, celui que les chocs ont simplement pour rôle de provoquer, est l'oscillation naturelle du pendule ; par suite la fréquence n de ce dernier doit apparaître nettement dans le spectre (et éventuellement les harmoniques de n) ; au total, on obtient un spectre assez complexe que le lecteur pourra préciser au moyen de l'exercice suivant.

Exercice. — Un système vibrant dont l'oscillation naturelle a pour équation

$$x = 4e^{-0,2t} \sin 2\pi t$$

reçoit toutes les n oscillations, à son passage par la position d'équilibre, une impulsion qui fait reprendre à l'amplitude sa valeur initiale.

1° Tracer la courbe représentative de l'oscillation ainsi entretenue.

2° Calculer les amplitudes des $2n$ premiers termes du développement en série de Fourier de la courbe représentative précédente.

On prendra successivement $n = 2 - 3 - 4 - 5$.

42. Oscillations forcées d'un système amorti à élasticité dissymétrique. Sons résultants. — Soit un point oscillant de masse m , rappelé vers sa position d'équilibre par la force *faiblement* dissymétrique $-kx - hx^2$ et soumis d'une part à un frottement proportionnel à la vitesse, d'autre part à l'action simultanée de deux forces sinusoïdales de pulsation p et q . L'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx + hx^2 = F \sin pt + G \sin (qt + \varphi) = 0.$$

Écrivant

$$x = X(t) + hY(t) + h^2Z(t) + \dots$$

et substituant dans l'équation précédente, le problème est ramené à la résolution des équations simultanées

$$mX'' + fX' + kX = P \sin pt + Q \sin (qt + \delta) \quad (1)$$

$$mY'' + fY' + kY + X^2 = 0 \quad (2)$$

$$mZ'' + fZ' + kZ + 2XY = 0. \quad (3)$$

Ne considérons que le régime permanent; la première s'intègre par une expression de la forme

$$X = A \sin (pt + \varphi) + B \sin (qt + \varphi').$$

Le terme fondamental de la solution contient, comme il fallait s'y attendre, les pulsations p et q , correspondant aux *vibrations primaires*.

Portant dans l'équation (2) et remplaçant X par la valeur précédente, on trouve que Y satisfait à une relation de la forme

$$0 = mX' + fY' + kY + A_1 \sin (2pt + \varphi_1) + B_1 \sin (2\pi qt + \varphi_2) \\ + C_1 \sin [(p_2 + q_3)\varphi_3] + \sin [p - q]\varphi_4$$

qui s'intègre par une expression renfermant des termes en $\sin 2pt$, $\sin 2qt$, $\sin (p + q)t$, $\sin (p - q)t$.

La deuxième approximation nous indique ainsi, dans le mouvement forcé du système, la présence de 4 fréquences qui n'existaient pas dans les forces appliquées, savoir : l'harmonique 2 de chacun des deux primaires, et deux *sons résultants*, l'*additionnel* de pulsation $p + q$ et le *différentiel* de pulsation $p - q$.

On pourrait continuer l'approximation, mettre en évidence d'une part les harmoniques des sons primaires de numéros toujours croissants et, d'autre part, les *sons résultants* d'ordre supérieur (de pulsations $2p \pm q$, $2q \pm p$, etc.). On pourrait calculer l'amplitude des diverses vibrations dont je viens d'établir l'existence. Je ne crois pas utile d'insister : si la réalité des sons résultants a été expérimentalement constatée, une explication complète des faits d'observation exigerait une loi d'élasticité moins

simple que celle considérée au paragraphe précédent : il suffit que le lecteur ait reconnu la voie à parcourir.

43. *Application à l'audition.* — Sur un cadre circulaire on tend une membrane au centre de laquelle on fixe d'un côté une masse en forme de disque : un tel système a une élasticité évidemment dissymétrique ; or il réalise le schéma du système auditif de l'homme avec sa membrane tympanique chargée du côté interne par les osselets. Il faut donc s'attendre à ce que l'audition simultanée de deux sons purs de fréquences p et q entraîne dans certaines circonstances l'audition de sons de fréquences $p - q$, $p + q$, etc. C'est précisément ce que montre l'expérience ; c'est d'ailleurs pour expliquer le phénomène des sons résultants, découvert par Tartini en 1754, qu'Helmholtz a imaginé la théorie des systèmes à élasticité dissymétrique.

CHAPITRE V

SYSTÈMES À PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

44. Définitions. — Soit un système complexe constitué par plusieurs parties pouvant osciller autour de leurs positions d'équilibre et réagissant les unes sur les autres. Nous posons qu'il est possible de définir l'état du système à un instant donné en indiquant les valeurs prises par n variables, appelées *coordonnées généralisées*, n étant le nombre de degrés de liberté du système. Par exemple l'état du double pendule de la figure 12 est défini par quatre coordonnées (une inclinaison φ et un azimut ψ pour chaque pendule) si les pendules peuvent osciller dans n'importe quel plan, et par deux seulement s'ils sont assujettis par des inclinaisons convenables à rester dans le plan du tableau.

45. Modes de couplage. — Les actions exercées sur une partie B du système par les autres parties appartiennent à trois classes différentes, schématisées dans la figure 12.

Si par exemple B et B' sont reliés par un système élastique (fig. 12 a), leurs déplacements relatifs provoquent des réactions dont la grandeur est fonction des coordonnées généralisées : il y a *couplage par la force* ; on peut imaginer (fig. 12 b) que B soit muni d'un archet frot-

tant sur la tige de B' : c'est un *couplage par frottement* ; l'équation du mouvement de B' contiendrait des termes dépendant de la vitesse B ; enfin les deux pendules (fig. 12 c) peuvent avoir un point commun, toute accélération de B provoque l'application à B' de forces d'inertie : il y a couplage par accélération¹.

Je n'ai pas à faire la théorie générale des systèmes oscil-

lants à n degrés de liberté ; je veux simplement sur un exemple élémentaire donner les principales définitions, montrer comment le problème se pose et indiquer l'allure des résultats généraux. Le lecteur saura que les résultats peuvent se généraliser.

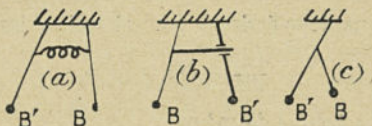


Fig. 12.

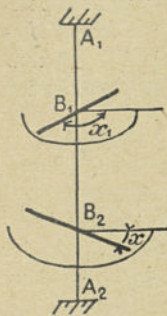


Fig. 13.

46. Double pendule de torsion. —

Entre deux points A_1 et A_2 est tendu (fig. 13) un fil de torsion portant deux barres B_1 et B_2 perpendiculaires au fil ; les moments d'inertie de ces barres autour de A_1A_2 sont tous deux égaux à m .

Soient k le moment statique de chacune des portions A_1B_1 et A_2B_2 supposées identiques, et k' le moment statique de B_1B_2 . On repère l'état du système par les angles x_1 et x_2 que font les deux barres avec leurs positions respectives d'équilibre.

Le couple qui tend à ramener la barre B_1 vers la posi-

1. Le lecteur habitué aux montages de T. S. F. reconnaîtra les couplages par capacité, par résistance et par induction.

tion d'équilibre est la somme des couples $-kx_1$ et $-k'(x_1 - x_2)$ exercés par A_1B_1 et B_1B_2 .

Par suite l'équation du mouvement de B_1 est :

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

que nous écrirons pour simplifier les notations

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2x_1 - \omega'^2x_2 = 0 \quad (\omega > \omega'); \quad (1)$$

on trouve de même

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2x_2 - \omega'^2x_1 = 0; \quad (2)$$

x_1 et x_2 satisfont par suite tous deux à l'équation

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\omega^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (\omega^4 - \omega'^4)x = 0. \quad (3)$$

Or nous voulons étudier les vibrations autour de la position d'équilibre ; il est donc indiqué d'essayer une solution de la forme $a \cos(vt + \varphi)$; v que l'on peut toujours supposer positif devra donc satisfaire à l'équation caractéristique

$$v^4 - 2\omega^2v^2 + (\omega^4 - \omega'^4) = 0$$

$$v^2 = \omega^2 \pm \omega'^2.$$

Appelons v et v' les deux racines positives de cette équation, on trouve pour solution du système (1) et (2), les deux vibrations complexes, somme chacune des deux vibrations principales sinusoïdales

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(vt + \Phi) + b_1 \cos(v't + \Phi') \\ x_2 &= a_2 \cos(vt + \Phi) + b_2 \cos(v't + \Phi'). \end{aligned} \quad (5)$$

Les phases Φ et Φ' sont les mêmes pour x_1 et x_2 , sans quoi il serait impossible de satisfaire, quel que soit t , aux équations (1) et (2). Les vibrations élémentaires sont par suite continuellement en phase (ou en opposition) dans toutes les parties du système. D'autre part, le mou-

vement du système est défini si on se donne à un instant les positions et les vitesses de chacune des barres ; comme les expressions (5) contiennent 6 constantes, c'est que deux au moins de ces dernières ne peuvent être prises arbitrairement : les rapports $a_1 : a_2$ et $b_1 : b_2$ sont donc déterminés. En particulier, si, par un choix convenable des données initiales, on réduit le mouvement de x_1 à la vibration $x_1 = a_1 \cos (vt + \Phi)$, le mouvement de x_2 sera également sinusoïdal et synchrone.

47. Degré de couplage. — Pour un déplacement relatif $x_1 - x_2$ donné des deux pendules, l'action de B_2 sur B_1 est d'autant plus intense que la constante de torsion k' est plus grande ; k' (ou ω') mesure donc le *degré de couplage*. L'expression de ν montre que les pulsations des deux vibrations principales sont d'autant plus différentes que le couplage est plus serré, qu'une augmentation du couplage diminue la plus basse fréquence principale et augmente la plus élevée.

48. Transfert d'énergie entre les diverses parties de systèmes. — Les expressions (5) montrent que le mouvement de chacune des barres B_1 et B_2 est la résultante de deux mouvements sinusoïdaux, de périodes différentes ; on peut donc observer les battements de l'amplitude de chacune des deux barres. Écartons une des barres (B_1 par exemple) de sa position d'équilibre et abandonnons-la sans vitesse à elle-même. Cette barre *primaire* (ainsi nommée parce que l'énergie se manifeste en premier lieu) effectue une série d'oscillations dont l'amplitude diminue progressivement jusqu'à devenir nulle ; mais, en même temps, l'autre barre — la *barre secondaire* (où l'énergie ne se manifeste qu'en second lieu) — immobile au début, s'est mise graduellement en mouvement, de sorte que ses vibrations atteignent leur amplitude maximum au mo-

ment où B_1 revient au repos : l'énergie mécanique de B_1 est passée sur B_2 . Mais alors les rôles des deux barres s'inversent, B_1 se remet en vitesse pendant que B_2 se ralentit et ainsi de suite.

Le lecteur précisera le mécanisme cinématique de ces échanges d'énergie en traitant l'exercice suivant :

Exercice. — Dans un double pendule de torsion, les pulsations principales sont respectivement $\nu = 10$, $\nu' = 8$. Calculer les amplitudes a_1 , b_1 , a_2 , b_2 et les phases φ et φ' figurant dans l'expression des élongations x_1 et x_2 pour les cinq hypothèses suivantes (toutes relatives au temps $t = 0$)

x_1	$\frac{dx_1}{dt}$	x_2	$\frac{dx_2}{dt}$
$2a$	0	0	0
$2a$	0	— $2a$	0
$2a$	0	0	$2a\nu$
$2a$	0	$2b$	0
$2a$	0	0	$2b\nu$

Courbes représentatives.

Même question avec $\nu = 10$ et $\nu' = 10,5$.

49. Applications. — Supposons que, au moment où toute l'énergie est passée dans la barre secondaire, on bloque la barre primaire dans sa position de repos. La barre secondaire va vibrer alors avec sa pulsation propre sans plus pouvoir réagir sur la barre primaire bloquée : on a l'équivalent mécanique de l'excitation par choc autrefois utilisée en T. S. F.

50. Oscillations forcées d'un système à deux degrés de liberté. — Faisons agir sur la barre primaire B_1 un couple sinusoidal $C \sin \mu t$; les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2x_1 - \omega'^2x_2 = C \sin \mu t$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2x_2 - \omega'^2x_1 = 0.$$

Elles admettent la solution « permanente », qui subsiste seule au bout d'un temps assez grand (puisque l'amortissement n'est jamais absolument nul dans les systèmes réels) :

$$x_1 = C \frac{\omega^2 - \mu^2}{(\omega^2 - \mu^2)^2 - \omega'^4} \sin \mu t$$

$$x_2 = C \frac{\omega'^2}{(\omega^2 - \mu^2)^2 - \omega'^4} \sin \mu t.$$

Par suite :

1^o L'amplitude des oscillations de x_1 et de x_2 devient infinie, lorsque

$$\mu^2 = \omega^2 \pm \omega'^2,$$

c'est-à-dire lorsque la fréquence du couple extérieur est égale à l'une des fréquences principales du système. En pratique, à cause de l'amortissement, l'amplitude des oscillations devient seulement très grande, le maximum étant atteint pour des fréquences voisines des fréquences principales.

2^o L'amplitude des oscillations x_1 et x_2 est minimum en valeur absolue pour $\mu = \omega$, c'est-à-dire pour une fréquence de la barre primaire égale à la fréquence propre qu'elle aurait si la barre B_2 était maintenue au repos. L'amortissement quand il est faible change un peu ces valeurs, l'allure générale subsiste.

Remarque. — Si la barre secondaire était soumise à des forces d'amortissement intenses, l'amplitude des oscillations de la barre primaire se trouverait fortement réduite ; c'est le principe des citernes à roulis¹.

51. Oscillations d'un système à n degrés de liberté. — Voici les résultats. Je renvoie le lecteur à Rayleigh (*Sound*).

1. LE BESNERAIS, *Théorie du navire* (Coll. A. Colin), t. I, p. 112.

Quand les coordonnées généralisées considérées comme fonction du temps satisfont à des équations différentielles linéaires du second ordre et s'il n'existe pas de forces dissipatives :

1° Les coordonnées s'expriment par des expressions de la forme

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin(\nu_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\nu_2 t + \varphi_2) + \dots + N_1 \sin(\nu_n t + \varphi_n) \\x_2 &= A_2 \sin(\nu_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\nu_2 t + \varphi_2) + \dots + N_2 \sin(\nu_n t + \varphi_n) \\x_n &= A_n \sin(\nu_1 t + \varphi_1) + \dots + N_n \sin(\nu_n t + \varphi_n).\end{aligned}$$

Le mouvement le plus général se décompose en n vibrations principales sinusoïdales de périodes ordinairement différentes.

2° A un instant t , toutes les vibrations de pulsation ν_p ont même phase dans chaque partie du système ; d'autre part, les rapports $\frac{A_p}{A_1} \frac{B_p}{B_1} \dots \frac{N_p}{N_1}$ sont définis par la constitution du système ; les conditions initiales modifient seulement la grandeur des coefficients $A_1 \dots A$, et des phases $\varphi_1 \dots \varphi_2$.

3° Par un choix convenable des conditions initiales, on peut s'arranger de façon à réduire la variation d'une coordonnée à une vibration sinusoïdale — correspondant à une des fréquences principales. Toutes les autres coordonnées varient alors sinusoïdalement avec la même fréquence.

4° Quand on exerce à une des coordonnées une vibration sinusoïdale forcée dont la fréquence est égale à l'une quelconque des fréquences principales, l'amplitude du mouvement forcé devient infinie (en réalité, en raison des forces dissipatives toujours existantes, seulement très grands) ; il y a donc résonance possible pour plusieurs fréquences.

52. Remarque essentielle. — Nous avons supposé linéaires les équations différentielles auxquelles obéissent

les coordonnées généralisées ; en fait, cela revient à admettre, — entre autres hypothèses, — que les déplacements des diverses parties sont toujours très petits.

53. Systèmes possédant une infinité de degrés de liberté.

— L'Acoustique offre de nombreux exemples de systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté : cordes vibrantes, tuyaux sonores, verges, etc. Les résultats précédents s'appliquent :

1° Il existe alors une infinité de vibrations principales, appelées en Acoustique les *partiels*, dont les fréquences forment une suite discontinue. Dans certains cas (cordes homogènes et sans raideur par exemple) cette suite est constituée par les multiples d'un son fondamental, mais dans d'autres cas (verges par exemple) elle s'écarte nettement de cette série. Les partiels ne sont donc pas nécessairement harmoniques.

2° Sous une action périodique ayant même fréquence qu'une quelconque de leurs vibrations principales, ces systèmes exécutent des vibrations forcées de grande amplitude. Ils répondent mal aux autres fréquences.

3° Bien entendu, de tels systèmes peuvent dans certaines conditions effectuer des oscillations autoentretenues dont les fréquences ne rentrent qu'approximativement dans la série précédente.

CHAPITRE VI

OSCILLATIONS DE RELAXATION

54. **Vase de Tantale.** — Un réservoir (fig. 14), alimenté par l'eau qui s'écoule continuellement d'un robinet à débit constant, est muni latéralement d'un siphon de décharge, présentant une différence de niveau $H - L$ entre la prise et le point haut.

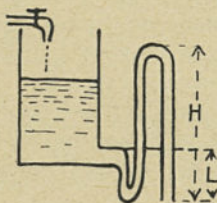


Fig. 14.

lorsque l'eau atteint le sommet du siphon, l'amorçage se produit, le réservoir se vide rapidement jusqu'au niveau de prise. Il se remplit alors de nouveau, puis l'amorçage recommence et ainsi de suite.

L'existence du régime précédent suppose le débit du robinet inférieur à une certaine valeur.

Dans le cas contraire, le siphon reste amorcé en permanence ; au lieu d'un écoulement oscillatoire, on a un régime continu stable.

55. **Caractère de l'écoulement oscillatoire.** — Supposons-nous placés en régime oscillatoire. Les faits expérimentaux précédents peuvent se traduire par des courbes (fig. 15) représentant en fonction du temps le niveau h de

l'eau dans le réservoir et le débit q à travers le siphon : on voit immédiatement que :

1° Le phénomène est périodique : la période dépend d'abord de la capacité du réservoir entre les niveaux de la prise et du sommet du siphon, des dimensions du siphon lesquelles conditionnent la rapidité de la vidange, enfin du débit du robinet.

2° Les amplitudes des variations du niveau h et du débit q à travers le siphon sont pratiquement fixées par les dimensions géométriques de l'appareil¹.

3° Le robinet d'alimentation est nécessairement à un niveau plus élevé que le sommet du siphon ; au contraire le niveau moyen de l'eau qui s'écoule à travers le siphon est $\frac{L+H}{2}$; par suite, le passage de l'eau à travers l'appareil se traduit par une perte d'énergie potentielle par unité de poids au moins égale à $\frac{H-L}{2}$; cette perte, *obligatoire en régime d'écoulement oscillant*, cesse évidemment d'être inévitable si le débit est assez grand pour que s'établisse le régime continu.

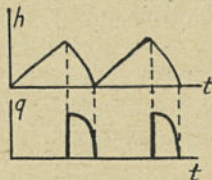


Fig. 15.

56. Systèmes auto-entretenus. Oscillations de relaxation. — D'un point de vue général, le vase de Tantale est un dispositif dans lequel de l'énergie, fournie d'une manière *continue*, est utilisée à entretenir un mouvement périodique (dans l'espèce un débit intermittent) ; nous dirons que c'est un *système auto-entretenu*. Or les phénomènes périodiques présentés par de tels systèmes ont des caractères

1. En réalité pendant le régime oscillatoire, les valeurs maximum et minimum de h ou de q dépendent légèrement du débit ; mais leur différence est presque insensible aux variations de ce dernier.

absolument différents de ceux offerts par les systèmes élastiques examinés § 25. Il est bon de marquer cette distinction dans le langage. A la suite de Van der Pol qui, le premier, souligna toute l'importance de leur étude, on appelle ces phénomènes *oscillations de relaxation* : il s'agit bien en effet d'une véritable décharge du fluide accumulé pendant les périodes de remplissage.

Le début et la fin de cette décharge sont marqués sur les courbes périodiques du paragraphe précédent par des points anguleux. Cela se traduit, dans le langage du § 10, en disant que *les vibrations de relaxation sont très riches en harmoniques*.

57. Caractéristiques. — Supposons que le robinet d'alimentation réglé de façon à maintenir le débit dans le siphon a une valeur fixée. Portant en abscisses les valeurs du débit et en ordonnées les charges motrices correspondantes, c'est-à-dire la différence de niveau entre les sections

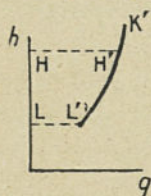


Fig. 16.

d'entrée et de sortie du siphon, on obtient une courbe dite la *caractéristique* du vase de Tantale. D'une façon générale, lorsqu'on peut dans un appareil définir un *débit* (vitesse d'un mobile, vitesse angulaire, débit d'un fluide, intensité d'un courant, etc.) et une *force motrice* (*variable de tension* : force mécanique, couple, pression, différence de potentiel aux bornes d'un électromoteur), la courbe ayant pour abscisses le débit et pour ordonnées la variable de tension est dite la *caractéristique* de l'appareil.

Or, la caractéristique du vase de Tantale est évidemment constituée par deux branches distinctes (fig. 16) :

L'une, confondue avec l'axe des ordonnées, plus exactement avec le segment LH de cet axe, correspond au

remplissage à débit nul ; l'autre $L'HK'$ correspond au fonctionnement du siphon.

Pour une ouverture assez grande du robinet d'alimentation, le niveau monte dans le réservoir au-dessus du sommet du siphon jusqu'à ce que la charge soit suffisante pour assurer à travers ce dernier l'écoulement de tout le débit apporté : on est en régime permanent. Le point figuratif se trouve alors fixé sur la seconde branche de la caractéristique en un point de l'arc $M'K'$.

Lorsqu'on a réalisé le régime oscillatoire, le point figuratif de l'expérience parcourt indéfiniment le cycle $LHH'L$: pendant le remplissage il en décrit le segment LH ; à l'amorçage, il saute en H' sur la deuxième branche, dont, pendant la décharge, il décrit l'arc $H'L'$. Le désamorçage correspond au retour sur la première branche en L .

58. Forme générale des caractéristiques des systèmes autoentretenus. — En somme l'autoentretien n'est possible que parce qu'à une valeur de la décharge peuvent correspondre deux valeurs du débit. La correspondance entre la charge et le débit n'est donc pas biunivoque. C'est là un caractère commun de tous les systèmes autoentretenus connus. Leurs caractéristiques possèdent deux branches raccordées (réellement ou virtuellement) par un arc à pente négative.

Certaines caractéristiques présentent la forme d'un N , dont les branches extrêmes sont dirigées respectivement, celle correspondant aux petits débits vers le bas, celle correspondant aux gros débits vers le haut, de sorte que dans un certain intervalle, à une valeur de la variable de tension correspondent trois valeurs de la variable de débit.

D'autres caractéristiques ont la forme d'un S , la branche intéressant les petits débits s'infléchissant vers la

gauche et celle relative aux gros débits se dirigeant vers la droite ; à une valeur du débit peuvent correspondre trois valeurs de la variable de tension.

L'arc à pente négative peut aussi raccorder une branche approximativement verticale et une branche en fin de compte horizontale. En raison de la diversité de ces formes, une théorie générale des systèmes autoentretenus paraît à l'heure actuelle bien difficile. Je me bornerai donc à quelques indications assez générales.

59. Synchronisation des oscillations de relaxation. — Voici par exemple une propriété dont l'importance est considérable, que l'intuition rend presque évidente, mais dont malheureusement il n'existe à l'heure actuelle aucune démonstration rigoureuse.

Si on impose une oscillation forcée de période θ à l'un des facteurs déterminant la période d'un système autoentretenu, préalablement réglé pour avoir la période T , voisin d'un multiple entier $n\theta$ de θ , la période de l'oscillation de relaxation s'ajuste exactement à la valeur $n\theta$. — En d'autres termes, il se produit une véritable démultiplication de la fréquence.

Raisonnons sur le vase de Tantale. Soit T la période de l'écoulement quand le point haut du siphon est à la cote H . Supposons le siphon relié au réservoir par un tuyau flexible qui permet de déplacer le point haut entre les cotes $H + H_1$ et $H - H_1$. A ces cotes correspondent respectivement, pour l'oscillation de relaxation, les valeurs $T' > T$ et $T'' < T$. Imposons au siphon un mouvement oscillatoire, entre les cotes $H \pm H_1$, de période θ voisine d'un sous-multiple de T , voisine de $\frac{T}{4}$ par exemple.

A un instant donné, pris comme origine des temps, l'amorçage se produit alors que le siphon descendant est à la cote H . Soit T la période de l'oscillation de relaxation correspondant à H ; si T est un peu supérieur à 4θ ,

au bout de quatre oscillations du siphon, quand le point haut de ce dernier sera à la cote H , le remplissage ne sera pas complètement terminé ; par suite le second amorçage se produira pour un niveau H' inférieur à H , ce qui diminuera le temps nécessaire au remplissage et le rapprochera par suite de 4θ ; si au contraire T était inférieur à 4θ , le temps entre deux amorçages consécutifs tendrait à augmenter. En d'autres termes, la période de l'oscillation de relaxation s'ajuste d'elle-même à 4θ . Mais diminuons le débit du robinet d'alimentation ; il arrive à un moment où le temps nécessaire au remplissage jusqu'à la cote $H - H'$ devient d'abord égal à 4θ , produisant l'amorçage quand le siphon est au point bas — puis dépasse 4θ . Mais alors, quand la surface libre atteint la cote d'amorçage précédente, le siphon a déjà dépassé cette dernière. C'est donc au cours de la cinquième période du siphon et pendant la phase descendante que le nouvel amorçage aura lieu. Nous retombons alors dans le cas précédent avec cette fois ajustage de l'oscillation de relaxation sur la période 5θ .

60. Domaine de stabilité d'une oscillation de fréquence déterminée. — Portons (fig. 17) en abscisses les débits du robinet d'alimentation et en ordonnées les périodes que prend l'oscillation forcée de relaxation quand le siphon oscille avec la période constante θ . La courbe obtenue est constituée par une série de paliers verticalement équidistants et qui, dans le sens horizontal, peuvent se recouvrir, c'est-à-dire qu'à un même débit peuvent correspondre deux valeurs de la période forcée. (Il suffit pour cela que les périodes extrêmes de l'oscillation libre correspondant à ce débit soient respectivement T' su-



Fig. 17.

périeure à $(n + 1)\theta$ et T'' inférieure à $n\theta$.) Mais il résulte du paragraphe précédent que, dans certaines limites de débit, une oscillation est stable une fois établie, et du seul fait qu'elle s'est établie; cela revient à dire que si on augmente progressivement le débit d'alimentation, le passage de la fréquence forcée $\frac{1}{(n-1)\theta}$ à la fréquence forcée supérieure $\frac{1}{n\theta}$ se fait pour un débit supérieur à celui pour lequel le passage inverse s'effectue, lorsque le débit diminue progressivement.

61. Comparaison des oscillations élastiques et des oscillations de relaxation. — Le tableau ci-dessous résume les propriétés comparées des oscillations élastiques (chap. III et VI) et des oscillations de relaxation.

	OSCILLATIONS ÉLASTIQUES	OSCILLATIONS DE RELAXATION
<i>Période</i>	Fixée par les constantes mécaniques du système.	Arbitraire dans de larges limites; dépend en particulier de la variable de débit.
<i>Amplitude</i>	Arbitraire.	Fixée par les constantes mécaniques du système.
<i>Rendement</i>	Théoriquement, peut s'approcher très près de l'unité.	Nécessairement inférieur à 1.
<i>Oscillation forcée</i>	S'accorde sur la FRÉQUENCE de l'oscillateur ou d'un de ses multiples (§ 41).	S'accorde sur la PÉRIODE de l'oscillateur ou d'un de ses multiples.

62. **Forme simplifiée de l'équation générale des systèmes oscillants.** — Nous avons donc deux genres d'oscillations, dont les propriétés sont absolument opposées ; je vais montrer sur un cas particulier qu'ils constituent les types extrêmes d'une série absolument continue d'oscillations dont les propriétés sont nécessairement intermédiaires entre les oscillations élastiques et les vibrations de relaxation.

Soit un point de masse M , mobile le long de l'axe des x et soumis :

1° A des forces dépendant de sa position ; nous admettons que ce sont des forces de rappel, proportionnelles à l'écart x .

2° A des forces dépendant de la vitesse, et s'annulant avec elle. Nous admettons que ces forces sont de la forme $+ a \frac{dx}{dt} - b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, a et b étant deux constantes positives. Le signe $+$ devant a est destiné à réaliser pour les petites vitesses une résistance négative, de façon qu'un mouvement qui s'amorce puisse s'amplifier ; le signe $-$ devant b vise au contraire à produire, pour les très grandes vitesses, un amortissement intense. On prévoit donc que, si une vibration commence, son amplitude croîtra progressivement jusqu'à ce que se soit établi un régime d'oscillations permanent. Effectivement, l'équation du mouvement est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{\text{Force de rappel}} + \underbrace{\left[a - b \frac{dx}{dt} \right] \frac{dx}{dt}}_{\text{Forces extérieures}}$$

Ou en posant

$$\xi = x \sqrt{\frac{kb}{am}}, \quad \theta = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \varepsilon = \frac{a}{\sqrt{mk}},$$

et en désignant par des accents les dérivées par rapport à θ

$$\xi'' + \varepsilon[\xi'^2 - 1]\xi' + \xi = 0$$

L'intégration de cette équation réduite ne contenant plus qu'un seul paramètre ε a été effectuée graphiquement par Van der Pol. Les figures 18 à 20 donnent,

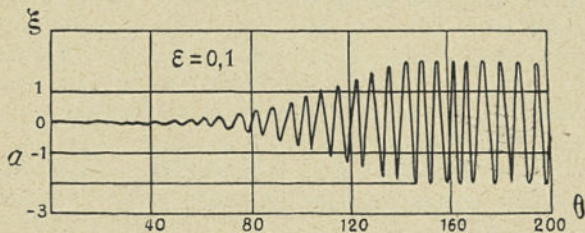


Fig. 18.

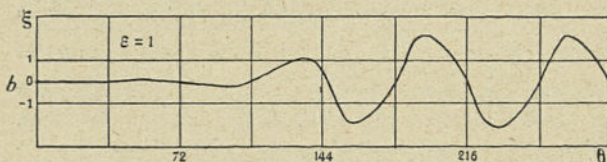


Fig. 19.

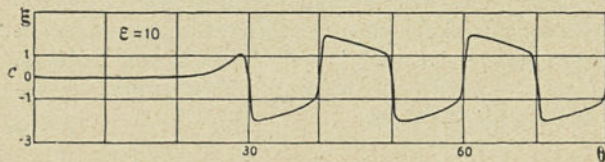


Fig. 20.

pour trois valeurs de ε , la variation de ξ en fonction de θ ; on voit par exemple que si ε est petit, le régime permanent — plutôt long à s'établir — est pratiquement identique à la sinusoïde $\xi = 2 \cos \theta$, qui donne avec les notations primitives

$$x_2 = 2 \sqrt{\frac{am}{kb}} \cos t \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La période T_r est donc pratiquement la même que s'il n'y avait pas de frottement, si on avait l'oscillation libre élastique ; en revanche l'amplitude $A_r = 2 \sqrt{\frac{ma}{kb}}$ est essentiellement conditionnée par ce dernier.

Si au contraire ε est très grand, on obtient en peu d'oscillations un régime vibratoire permanent ; la courbe figurative est constituée par des arcs à faible pente, raccordés par des lignes presque verticales. Elle évoque nettement l'idée d'un passage brutal d'une position extrême à une autre, d'une véritable décharge.

On peut montrer que l'amplitude des oscillations a la même valeur $2 \sqrt{\frac{ma}{kb}}$. Cela tient d'ailleurs à la loi de frottement choisie et n'est nullement général. La période T_r est totalement différente de T_s , elle vaut en effet très sensiblement $T_2 = 1,6 a : k$, elle croît donc proportionnellement à la résistance a et à la capacité du système $1 : k$. La vibration actuelle a donc les principaux caractères de l'écoulement oscillatoire du vase de Tantale (§ 55).

Enfin, lorsque ε a une valeur moyenne, la courbe figurative a un aspect intermédiaire entre les deux types précédents (fig. 19). Le résultat annoncé à la fin du paragraphe précédent est ainsi établi dans ce cas particulier.

Une théorie générale des oscillations autoentretenues exigerait l'exploration complète du domaine des équations non linéaires : elle est encore à faire. Aussi bien nous suffit-il d'avoir précisé l'allure générale des phénomènes de relaxation.

CHAPITRE VII

DYNAMIQUE DES ONDES

63. Variation de pression résultant d'une dilatation. — Soit, dans un milieu continu, une masse occupant un volume v sous la pression p ; soumise à la pression $p + \Delta p$, elle occupe le volume $v + \Delta v$; on appelle *dilatation* l'augmentation relative de volume $\theta = \frac{\Delta v}{v}$.

Dans les fluides parfaits, les petites variations Δp sont liées aux dilatations θ correspondantes par une relation de la forme

$$\Delta p = - E\theta,$$

E — qui mesure l'élasticité du milieu, et dont les dimensions sont celles d'une pression — dépend non seulement des variables (p et v par exemple) définissant l'état initial de la masse considérée, mais encore de la façon dont s'effectue la dilatation.

64. Gaz parfaits. — Pour un gaz parfait éprouvant une transformation adiabatique, on a l'équation d'état $p v^\gamma = \text{constante}$, qui s'écrit sous forme différentielle

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0.$$

Donc

$$dp = - \gamma p \theta.$$

L'élasticité E a donc la valeur γp .

On établirait de même que, pour les transformations isothermes, l'élasticité prend la valeur $E = p$.

Liquides. — Le volume d'une masse donnée d'un liquide compressible est lié à la pression supportée par ce dernier par une expression de la forme

$$v = v_0[1 - (p - p_0)k],$$

le coefficient de compressibilité k peut être regardé comme une constante indépendante de la nature de la transformation¹, pourvu que cette dernière soit petite.

Par suite $-k dp = \frac{dv}{v}$, $E = \frac{1}{k}$.

PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE LONGITUDINALE

65. Position du problème. — Dans un fluide de masse spécifique ρ et d'élasticité E se propage une onde plane longitudinale normale à l'axe des x . Le déplacement d'une particule d'abscisse x est parallèle à ox et a pour grandeur $X = f(x, t)$; la vitesse d'une telle particule est $\frac{\partial X}{\partial t}$; son accélération est $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$. Considérons (fig. 21)

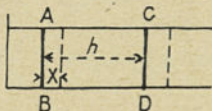


Fig. 21.

l'élément de volume Sdx compris entre deux plans d'abscisses x et $x + h$ et un cylindre fixe parallèle à Ox et de section droite S . Au passage de l'onde, le plan d'abscisse x vient en $x + X$; celui d'abscisse $x + h$ en $x + X + h \frac{\partial X}{\partial x}$; de sorte que la hauteur de l'élément augmente de $h \frac{\partial X}{\partial x}$. La

1. Pour l'eau à 15° la différence relative des deux coefficients k_i (isotherme) et k_a (adiabatique) est de l'ordre du millième.

dilatation $\frac{\Delta v}{v}$ a donc pour valeur $\frac{\partial X}{\partial x}$; l'expression correspondante de la surpression est donc $\varpi = -E \frac{\partial X}{\partial x}$ (d'où $\frac{\partial \varpi}{\partial t} + E \frac{\partial u}{\partial x} = 0$).

66. Équation de propagation. — Mais les surpressions s'exerçant au passage de l'onde sur l'élément de volume tendent à déplacer ce dernier; pour trouver la loi de mouvement, il faut écrire que la force d'inertie $\rho S h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ est équilibrée par les forces de pression s'exerçant sur l'élément. Ces dernières comprennent (en dehors des forces de pression sur la surface latérale, lesquelles n'ont pas de composantes parallèles à ox) les forces de grandeur $S\varpi = ES\theta$ dues à la pression sur la base AB d'abscisse x , forces dues à la surpression sur la base CD d'abscisse $x + h$ lesquelles valent $(ES\theta)_{x+h} = ES\theta + ES \frac{\partial \theta}{\partial x} h$.

Donc

$$\rho S h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \frac{\partial \theta}{\partial x} h \quad \left(\text{d'où } \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0 \right)$$

et, en posant $a^2 = \frac{E}{\rho}$ (a est homogène à une vitesse),

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

On voit donc que le déplacement longitudinal X satisfait à l'équation des cordes vibrantes; la pression acoustique ϖ et la vitesse u y satisfont également ¹.

1. En réalité u et ϖ satisfont au système d'équations simultanées :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varpi}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

67. Célérité du son. — L'ébranlement par hypothèse infiniment petit se propage donc avec la célérité uniforme

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ dite *la célérité du son*. Le lecteur trouvera aisément la valeur de cette célérité par différents milieux. Ainsi pour l'eau ($E = 20\ 000\ \text{kg} : \text{cm}^2 = 20\ 000 \cdot 10^6$ C. G. S. $\rho = 1\ \text{g} : \text{cm}^3$) on a $a = 1\ 410\ \text{m} : \text{s}$.

68. Célérité du son dans les gaz. — Admettons que dans les gaz la transmission des ébranlements est suffisamment rapide pour s'effectuer de façon adiabatique. Pour un gaz parfait, éprouvant une telle transformation, on a $E = \gamma p$; par suite $a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma r T$, en désignant par r la constante des gaz parfaits relative à l'unité de masse du gaz et par T la température absolue. Donc :

1° *Dans un gaz parfait, la célérité du son dépend uniquement de la température; elle est indépendante de la pression.*

2° *Pour un gaz donné, elle varie comme la racine carrée de la température absolue, soit comme $\sqrt{1 + \alpha t}$; elle vaut ainsi, pour l'air à 0°, 331 m : s; à 16°, 340 m : s.*

3° *Pour deux gaz de même constitution moléculaire ($\gamma = \text{constante}$) elle varie en raison inverse de la racine carrée de la densité, étant par exemple 3,8 fois plus grande pour l'hydrogène que pour l'air.*

69. Remarque. — Lorsque les gaz s'éloignent de l'état parfait, les lois et formules précédentes n'ont plus qu'une valeur approximative, la célérité du son dépend par exemple de la pression; c'est ainsi qu'à 0°, elle atteint dans l'air 350 m : s sous 100 atm. et 403 m : s sous 200 atm.; dans l'air à - 80°, les valeurs de la célérité sous 1, 50, 100 et 200 atm. sont respectivement 278, 274, 293 et 410 m : s.

70. Ondes longitudinales sinusoïdales. — Étudions le cas particulier (à la fois simple et suffisant pour caractériser des phénomènes courants) relatif à la propagation de l'onde longitudinale progressive plane $X = X_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$.
 Tout d'abord la vitesse $\frac{\partial X}{\partial t} = X_0 \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$ et la condensation

$$-\theta = -\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2\pi X_0}{L} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

sont synchrones; la valeur de leur rapport $\frac{u}{\theta}$ est constante et égale à la célérité $a = \frac{L}{T}$.

Soit ensuite une tranche qui pendant le temps dt se déplace de

$$dX = u dt = \frac{2\pi}{T} X_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) dt;$$

la surpression $\varpi = E\theta = E2\pi \frac{X}{L} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$ produit, par unité d'aire du plan d'abscisse x , un travail

$$\begin{aligned} dW &= E \frac{2\pi X_0}{L} \cdot \frac{2\pi X_0}{T} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) dt \\ &= E \frac{2\pi X_0^2}{L} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) d \left(\frac{2\pi t}{T} \right). \end{aligned}$$

La puissance — moyenne du travail fourni pendant un nombre assez grand de périodes — est donc

$$P = \frac{1}{2} E \frac{2\pi}{T} \frac{2\pi X_0^2}{L} = \frac{1}{2} \frac{2\pi E X_0}{L} \cdot \frac{2\pi X_0}{T} = \frac{1}{2} \varpi_m u_m$$

en appelant ϖ_m la surpression maximum et u_m la vitesse maximum. La quantité P connue sous le nom d'intensité acoustique reste proportionnelle au carré de l'amplitude

et au carré de la fréquence ; elle croît donc très vite avec cette dernière.

71. Résistivité acoustique. — Posons

$$R = \sqrt{E\rho} = E : a = a\rho ;$$

entre la surpression ϖ , l'intensité acoustique P et la vitesse u des particules existent, dans une onde sinusoïdale progressive, les relations :

$$\varpi = Ru$$

$$P = \frac{1}{2} \varpi_m u_m = \frac{1}{2} \frac{\varpi_m^2}{R} = \frac{1}{2} R u_m^2$$

R joue, vis-à-vis de ϖ et de u , le rôle que tient en électricité la résistivité vis-à-vis de la tension et de la densité de courant. Aussi lui a-t-on donné le nom de *résistivité acoustique* ; sa valeur est indiquée dans le tableau ci-dessous pour quelques milieux.

	ρ (g : cm ³)	E (kg : mm ²)	a (m : s)	R (C. G. S.)
Acier	7,8	2×10^4	5 100	395×10^4
Bronze . . .	8,8	$0,32 \times 10^4$	1 910	168×10^4
Bois dur ..	0,8	1×10^3	3 500	28×10^4
Eau	1,0	2×10^2	1 410	$14 \times 10^4 = 140\ 000$
Air	0,00125	$1,4 \times 10^{-2}$	330	$0,004 \times 10^4 = 40$

72. Application numérique. — Dans l'eau, la puissance transportée par une onde sinusoïdale d'amplitude $X_0 = 0,05$ mm et de fréquence $n = 1\ 000$ atteint 7 watts

par cm^2 ; pour propager une onde sinusoïdale de même amplitude et de fréquence 50 000 (ultra-sons), il faudrait un minimum de 17,5 kilowatts par cm^2 . Les valeurs dans l'air sont 3 500 fois plus faibles; elles sont cependant notables aux grandes fréquences.

73. Remarque. — Le travail $W = PSt$ nécessaire pour engendrer pendant le temps t des ondes planes sinusoïdales de surface S peut (§ 71) être mis sous la forme

$$PSt = R \frac{u_m^2}{2} St = \rho Sa t \frac{u_m^2}{2}.$$

Il est donc égal au travail qui serait nécessaire pour donner la vitesse maximum u_m à toute la masse $\rho Sa t$ balayée au cours de la propagation. Pour peu que l'amplitude ou la fréquence soient grandes, l'énergie empruntée au générateur d'ondes devient importante; en d'autres termes, l'amortissement de ce dernier par rayonnement (§ 37) a rapidement des valeurs notables. On notera également que la densité de l'énergie dans l'onde a pour expression $E = \rho \frac{u_m^2}{2} = \frac{\omega_m^2}{2t}$, soit pour un gaz parfait $E = \frac{\omega_m^2}{2\gamma p}$.

Application numérique. — Nous verrons au § 119 que l'amplitude ω_m est, pour les sensations auditives, de l'ordre de 10 baryes; la densité de l'énergie correspondante est donc de l'ordre de $35 \cdot 10^{-6}$ C. G. S., soit 35 ergs par m^3 .

74. Ondes stationnaires. — L'équation des cordes vibrantes admet une solution stationnaire qu'un choix d'origines convenables permet d'écrire généralement

$$X = 2X_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{x}{L}.$$

La vitesse

$$u = \frac{\partial X}{\partial t} = 2\xi X_0 \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{x}{L}$$

et la condensation

$$-\theta = -\frac{\partial X}{\partial x} = 2X_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

sont maintenant toujours en quadrature, de sorte que le travail produit par la surpression $\sigma = -E\theta$ s'exerçant sur une tranche dont l'aire est égale à 1 et qui se déplace de u pendant le temps t est en moyenne nul. Une telle onde ne transporte donc pas d'énergie.

Les expressions précédentes montrent de plus :

1° Aux points d'abscisses $x = \pm \frac{kL}{2}$ ($k = 0, 1, 2 \dots$)

l'existence de ventres de vitesse et de nœuds de condensation (et par suite des nœuds de pression).

2° Aux points intermédiaires d'abscisses

$$x = \frac{2k+1}{2} L \quad (\pm k = 0, 1, 2 \dots)$$

l'existence de nœuds de vitesse et de ventres de pression.

75. Propagation plane avec amortissement. — Dans la presque totalité des cas, la propagation d'un ébranlement s'accompagne d'une dissipation d'énergie, soit qu'il y ait des frottements internes dans le milieu siège de la propagation, soit parce que ce milieu est en relation mécanique avec un fluide extérieur auquel il transmet une partie de l'énergie transportée. Par analogie avec ce que nous avons vu au Chapitre III, nous admettrons que cette dissipation se traduit dans les équations par la présence d'un terme amortisseur proportionnel à la vitesse, de sorte que l'ébranlement dans un tuyau satisferait à la relation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial X}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

La vibration — s'amortissant au cours de sa propagation — $X = Ae^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{b} \right) = \mathcal{R} \left[Ae^{-\frac{2\pi x}{\lambda}} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{b} \right)} \right]$

sera une solution de l'équation précédente si

$$4\pi^2 n^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) = \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2}, \quad f = \frac{a}{b} \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{f^2}{\pi^2 n^2}} \right].$$

Comme au § 13 on retrouve une pseudo-célérité b , théoriquement plus petite et, dans la pratique — où les frottements ne sont jamais grands —, à peu près égale à la célérité a correspondant au frottement nul ($f = 0$). Le lecteur calculera aisément la différence de célérité $b - a$ nécessaire pour que l'amplitude de l'ébranlement soit réduite de 1 : 10 sur un parcours dans le milieu égal à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ caractéristique d'un ébranlement de pulsation ω .

76. Onde stationnaire plane amortie. — L'équation précédente admet également la solution stationnaire,

$$X = Ae^{-\beta x} \sin 2\pi nt \sin \frac{2\pi x}{L}$$

avec

$$4\pi^2 n^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{L^2} - f^2.$$

Pour une distance donnée $L : 2$ entre deux nœuds du déplacement, on voit que la fréquence $n : L$ de l'onde stationnaire amortie est plus faible que celle $a : L$ de l'onde stationnaire conservative correspondant au frottement nul (§ 74); toutefois, quand le frottement n'est pas considérable, cette différence est toujours faible. Le lecteur calculera sans peine les expressions de la vitesse et de

la condensation ; il vérifiera que ces deux quantités ne sont pas en quadrature, ce qui est d'ailleurs une conséquence obligatoire de la dissipation d'énergie. Il trouvera enfin la distribution des ventres et des nœuds de pression et de condensation.

PASSAGE DU SON D'UN MILIEU DANS UN AUTRE

Je me borne pour simplifier au cas d'une propagation normale à une intersurface. Le lecteur pourra généraliser et retrouver les lois de Descartes ou les formules de Fresnel.

77. Position du problème. — Deux milieux fluides isotropes sont séparés par le plan $x = 0$, le milieu I occupant le côté des x négatifs, le milieu II celui des x positifs. Un ébranlement plan longitudinal périodique (*ébranlement incident*) $X = X \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{a_1} \right)$ se propage dans le milieu I parallèlement à ox et arrive sur l'intersurface. Cette dernière devient l'origine de deux ébranlements, de même période que l'ébranlement incident ; ils sont plans et se propagent parallèlement à l'axe des x , ainsi qu'il résulte de considérations de symétrie évidentes. *L'ébranlement réfléchi* se propage dans le milieu I, vers les x négatifs, avec la célérité $a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$; il a pour expression

$$X' = X_1 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{a_1} + \varphi_1 \right)$$

et *l'ébranlement réfracté* se propage dans le milieu II vers les x positifs avec la célérité $a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$; son expression est

$$X'' = X_2 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{a_2} + \varphi_2 \right).$$

On se propose de déterminer les rapports $r = \frac{X'_1}{X_1}$ et $s = \frac{X_2}{X_1}$ de l'amplitude réfléchie X'_1 et de l'amplitude réfractée X_2 à l'amplitude incidente X_1 . Nous allons pour cela faire appel à deux conditions de continuité, l'une d'ordre cinématique, la seconde d'ordre dynamique.

78. Conditions de continuité. — a) *Déplacements normaux.* — Le déplacement d'une particule située sur l'intersurface est le même, que l'on considère la particule comme appartenant au premier milieu ou au second. Or dans le milieu I le déplacement est la résultante des déplacements X et X' dus respectivement à l'ébranlement incident et à l'ébranlement réfléchi. Donc on a, pour $s = 0$, $X + X' = X''$ c'est-à-dire

$$X_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + X'_1 \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \varphi_1 \right] = X_2 \sin \left[2\pi \frac{t}{T} + \varphi_2 \right].$$

Cette égalité doit avoir lieu quel que soit t ; donc

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (1)$$

Par suite $X' + X_1 = X_2$

$$1 + r = s. \quad (2)$$

b) *Pressions.* — La pression devant avoir même valeur des deux côtés d'un élément de l'intersurface, la somme des surpressions ϖ_1 et ϖ'_1 dues respectivement à l'ébranlement incident et à l'ébranlement réfléchi est égale à la

1. En réalité, l'égalité (1) est satisfaite pour $\varphi = 0$ et pour $\varphi_1 = \pi$. Importante dans certaines questions, la distinction des deux cas est actuellement inutile.

surpression ϖ_2 due à l'ébranlement réfracté. Donc sur l'intersurface

$$E_1 \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial x} \right] = E_2 \frac{\partial X''}{\partial x}$$

$$\frac{E_1}{a_1} (X_1 - X_1') = \frac{E_2}{a_2} X_2$$

$$aR_1(1 - r) = R_2s \quad (3)$$

R_1 et R_2 étant les résistivités acoustiques des milieux I et II.

79. Calcul des déplacements, des pressions, etc., sur l'intersurface. — La résolution des équations (2) et (3) donne, en désignant par m le rapport $R_1 : R_2$, de la résistivité acoustique du second milieu à celle du premier,

$$s = \frac{2}{1+m} \quad \frac{m-1}{m+1}$$

On en déduit aisément les valeurs suivantes sur l'intersurface.

	ÉBRANLEMENT INCIDENT	ÉBRANLEMENT RÉFLÉCHI	ÉBRANLEMENT RÉFRACTÉ
Amplitude.....	X_1	$\frac{m-1}{m+1} X_1$	$\frac{2}{m+1}$
Vitesse.....	$U_1 = \frac{\partial X_1}{\partial t}$	$\frac{m-1}{m+1} U_1$	$\frac{2}{m+1} U_1$
Surpression.....	ϖ_1	$\frac{m-1}{m+1} \varpi_1$	$\frac{2m}{m+1} \varpi_1$
Puissance.....	P_1	$\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 P_1$	$\left(\frac{4m}{m+1}\right)^2 P_1$

80. Application au passage d'une onde de l'air dans l'eau. — On a vu au § 71 que pour l'air $R_1 = 40$ et pour l'eau $R_2 = 14 \cdot 10^4$; le rapport m vaut donc ici 3 500.

Par suite :

1° L'amplitude de la vibration réfractée n'est que le $1/1750^e$ de l'amplitude incidente.

2° La surpression dans l'ébranlement réfracté est le double de la surpression dans l'ébranlement incident.

3° La puissance qui passe dans l'onde réfractée est seulement $\frac{1}{895}$ de la puissance incidente ; le reste se retrouve dans l'onde réfléchie, la réflexion est donc presque totale.

81. Changement du sens de propagation. — Considérons maintenant une onde plane se propageant normalement à l'intersurface du milieu II vers le milieu I ; nous aurons ses caractéristiques en remplaçant m par $\frac{1}{m}$ dans les expressions du § 79. On trouve ainsi que tous les éléments (amplitude, vitesse, surpression, puissance) *relatifs à l'onde réfléchie, ainsi que la puissance dans l'onde réfractée, sont, en valeur absolue, les mêmes, que l'onde débute dans le milieu I pour gagner le milieu II ou que l'ébranlement se propage du milieu II vers le milieu I.* Par exemple, dans le cas d'une intersurface eau-air, la puissance qui passe dans le second milieu est toujours seulement $\frac{1}{895}$ de la puissance incidente, qu'il s'agisse du passage eau-air ou du passage air-eau.

82. Écoute sous-marine. — Pendant la guerre de 1914-1918 on a cherché à déceler, du bord d'un navire, la présence d'un sous-marin voisin au moyen des bruits que ce dernier émet pendant la marche en immersion (vibrations de la coque, ronflement des hélices, etc.). Une difficulté est immédiatement apparue : un ébranlement provenant du sous-marin ne parvient en effet à l'observateur du navire qu'après avoir été propagé à travers la coque en tôle d'acier ($R_s = 395 \times 10^4$) du bâtiment écouteur ;

la puissance P_1 de l'ébranlement initial est donc réduite par traversée de l'intersurface eau-tôle à $p_1 = 0,13 P_1$; et par traversée de l'intersurface tôle-air à $4 \times 10^{-5} p_1$. En d'autres termes, l'observateur ne recueille guère plus du $\frac{1}{200\ 000}$ de l'énergie initiale. Il est donc nécessaire de le munir d'appareils d'écoute spécialement étudiés (§ 145).

83. Isolation sonore. — A la traversée d'une intersurface, un ébranlement éprouve une diminution de puissance d'autant plus marquée que les résistivités acoustiques des deux milieux sont plus différentes. En particulier, la résistance acoustique des solides étant plusieurs milliers de fois supérieure à celle de l'air, un « matelas » d'air entre deux « épaisseurs » solides suffisamment rigides assure une isolation sonore à peu près parfaite. Pour une raison analogue, les agglomérés de liège, les remplissages de sciure, les carreaux de paille comprimée, etc., utilisés dans la construction moderne pour l'établissement de cloisons thermiquement isolantes, permettent d'obtenir en même temps une opacité au son à peu près complète.

PROPAGATION D'UNE ONDE LONGITUDINALE SPHÉRIQUE

84. Expression de la dilatation. — Dans la propagation d'une onde longitudinale sphérique de centre O, le déplacement radial R d'une particule est à un instant donné le même pour toutes les particules situées à la même distance r de l'origine; il en est également ainsi pour la vitesse radiale $V = \frac{\partial R}{\partial t}$, pour l'accélération radiale $J = \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$, et enfin pour la dilatation θ dont nous allons calculer la grandeur.

Considérons (fig. 22) l'élément de volume $v = \omega r^2 \cdot dr$ découpé par un cône de révolution d'angle solide petit $\omega = \pi\alpha^2$ dans la coquille limitée par deux sphères concentriques de rayons voisins r et $r + dr$. La dilatation a pour valeur

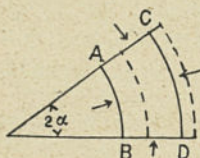


Fig. 22.

$$\frac{\Delta v}{v} = 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta dr}{dr}.$$

Mais au passage de l'onde, le rayon intérieur prend la valeur $r + R$ subissant une augmentation $\Delta r = R$; le rayon extérieur prend la valeur $r + dr + R + \frac{\partial R}{\partial r} dr$, ce qui correspond à une variation de l'épaisseur $\Delta dr = \frac{\partial R}{\partial r} dr$.

Par suite la dilatation à la distance r a pour expression

$$\theta = \frac{\Delta v}{v} = \frac{2R}{r} + \frac{\partial R}{\partial r}.$$

85. Équation de propagation d'une onde sphérique. — De cette dilatation résultent sur les bases et sur la surface latérale de l'élément de volume des surpressions qui tendent à déplacer ce dernier. Écrivons donc l'équilibre entre la force d'inertie $\rho \cdot \pi^2 \alpha^2 r^2 dr \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$ et les composantes radiales des surpressions.

Sur la base AB, d'aire $\pi\alpha^2 r^2$, s'exerce une force radiale centrifuge de grandeur $-\pi\alpha^2 r^2 E\theta$. Sur la base CD, cette force prend la valeur $+\pi\alpha^2 r^2 E\theta + \pi\alpha^2 E \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r} dr$; enfin les actions sur la surface latérale d'aire $2\pi r\alpha$ donnent lieu à la force radiale $-2\pi r \cdot \alpha \cdot E\alpha\theta$. On a ainsi après réductions

$$\rho \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = E \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

soit

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2R}{r} + \frac{\partial R}{\partial r} \right]. \quad (1)$$

86. **Intégration de l'équation de propagation.** — Pour intégrer l'équation précédente, il est commode de poser $R = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$; et par suite $V = -\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t}$ et $\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$; on a alors successivement :

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial r\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t} = \frac{E}{\rho} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \right].$$

Et puisque r et t sont variables indépendantes

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = a^2 \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$r\psi = F(at - r) + G(at + r).$$

La fonction F correspond à une propagation *centrifuge* (vers les r croissants), la fonction $G(at + r)$ correspond à une propagation *centripète*. Nous nous bornerons à l'étude de l'onde centrifuge pour laquelle on a évidemment

$$R = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} F(at - r) + \frac{1}{r} F'(at - r) \quad (1)$$

$$V = \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{a}{r^2} F'(at - r) + \frac{a}{r} F''(at - r) \quad (2)$$

$$\theta = \frac{2R}{r} + \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{r} F''(at - r) \quad (3)$$

les accents indiquant des dérivations par rapport à la variable

$$\xi = at - r.$$

87. **Emploi du potentiel des vitesses.** — On peut donner aux expressions précédentes une forme un peu différente, qui sera particulièrement utile dans l'étude des tuyaux coniques.

Admettons l'existence d'une fonction $\Phi(r, t)$ — laquelle n'est autre que le *potentiel des vitesses* de l'hydrodynamique — telle que $V = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$. Le lecteur vérifiera sans difficulté

a) A partir de l'équation (3), § 86, que l'on peut poser

$$\theta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Par suite en égalant à 0 la dérivée de la fonction Φ , on écrira qu'en ce point la pression est constante, puisqu'on exprimera ainsi que la surpression (proportionnelle à θ) est toujours nulle.

b) Que les fonctions Φ et θ satisfont, comme ψ , à l'équation

$$\frac{\partial^2(rf)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}.$$

88. Étude de l'onde centrifuge. — 1° *Les limites de l'onde centrifuge se propagent avec une célérité constante qui est la célérité du son $a = \sqrt{E : \rho}$.*

Soit en effet à l'instant t une onde constituée par un ébranlement limité à la coquille comprise entre deux sphères de rayons r_1 et r_2 , le déplacement étant nul en dehors de cette coquille. La fonction $F(\xi)$ et ses dérivées successives seront nulles pour toutes les valeurs de la variable extérieure à l'intervalle $[at - r_1, at - r_2]$. Au temps $t + \frac{L}{a}$ elle sera donc nulle pour toutes les valeurs de r extérieures à l'intervalle $[r_1 + L, r_2 + L]$. En d'autres termes, le déplacement sera limité à l'intérieur de la coquille sphérique d'épaisseur constante $r_2 - r_1$ et dont les rayons croissent proportionnellement au temps avec la vitesse constante a .

2° *Conservation du signe de la dilatation.* — De même, si on considère deux positions successives de l'onde, les dilatations $\theta = -\frac{1}{r} F''(at - r)$ ont même signe en deux points correspondants, c'est-à-dire situés à la même distance de la sphère interne. Par suite, une dilatation ne peut devenir une condensation, au cours de la propagation. Elle s'affaiblit seulement.

3° *Modification de l'onde pendant la propagation.* — Cependant, tout en conservant certains des caractères de l'ébranlement initial (épaisseur, répartition des dilatations, etc.), la propagation apporte des modifications profondes à la structure de l'onde.

D'abord, la seule présence des facteurs $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ provoque une diminution du déplacement à mesure que le rayon de l'onde augmente. D'autre part, au voisinage de l'origine, le terme $\frac{1}{r^2} F(at - r)$ est prépondérant; à grande distance, c'est au contraire le terme $\frac{1}{r} F'(at - r)$ qui l'emporte. Si donc près de l'origine l'onde est figurée par une courbe de la forme ABC (fig. 23), comportant un déplacement centrifuge dans les régions externes de l'ébranlement, à grande distance, les déplacements dans les mêmes régions deviennent centripètes: à l'échelle près, l'onde présente en effet l'allure générale A'B'C'.

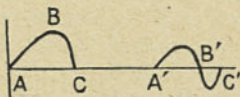


Fig. 23.

89. *Mouvement produit par une sphère pulsante.* — Soit une sphère pulsante dont le rayon l est supposé éprouver de faibles variations sinusoïdales, de sorte que la vitesse radiale d'un point de la sphère est donnée par la rela-

tion $V_r = V \cos 2\pi \frac{t}{T}$. L'expression générale, de la vitesse radiale dans une onde sphérique

$$V_r = \frac{1}{r} f'(at - r) + \frac{1}{r^2} f(at - r)$$

se réduit sur la sphère supposée de rayon petit à

$$V = \frac{1}{l^2} f(at - l) = \frac{1}{l^2} f(at)$$

$$V_r = \frac{Vl^2}{r^2} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r}{a} \right) + \frac{2\pi Vl^2}{r \cdot a \cdot T} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r}{a} \right) \quad (1)$$

$$V_r = \frac{2\pi Vl^2}{r\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2} \sin \frac{2\pi}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{r}{a} - \varphi \right] \quad (2)$$

avec

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \lambda = aT.$$

On voit alors que :

1° A grande distance, la vitesse radiale se réduit à

$$\frac{2\pi Vl^2}{r\lambda} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{4} - \frac{r}{a} \right).$$

Son amplitude est alors inversement proportionnelle à la distance r ; cette valeur asymptotique est d'ailleurs atteinte à moins de $\frac{1}{100}$ près dès que r devient supérieur à la longueur d'onde λ .

2° Son déphasage par rapport au mouvement à l'origine correspond non pas au nombre de longueurs d'onde r : λ existant sur le rayon balayé, mais à ce nombre de longueur d'onde augmenté de $\frac{1}{4}$; en d'autres termes le mouvement à l'infini a pris une avance de $\frac{1}{4}$ de période; les

1. Ne pas oublier que f' représente une dérivée par rapport à $at - r$ et non par rapport à $t - \frac{r}{a}$.

$\frac{9}{10}$ de cette avance sont pris sur un parcours r sensiblement égal à λ .

D'autre part la condensation a évidemment pour valeur $\theta = -\frac{Vl^2}{r} \cdot \frac{2\pi}{a^2T} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r}{a} \right)$.

90. Puissance transportée par l'onde. — Pour un déplacement radial $V_r dt$, l'énergie produite sur la sphère de rayon r par la surpression $\varpi = E\theta = a^2\rho\theta$ vaut

$$4\pi r^2 E\theta V_r dt.$$

Pour un déplacement sinusoïdal, la valeur moyenne de cette énergie, c'est-à-dire la puissance moyennement transportée par l'onde, vaut $W = 8\pi^3\rho V^2 l^4 : aT^2$. Elle est donc indépendante du rayon de la sphère considérée. Mais V est la vitesse radiale maximum de la sphère pulsante. Le § 37 permet donc de dire que si une source rayonne une puissance vibratoire W sous forme d'ondes sphériques de fréquence N , le coefficient d'amortissement des oscillations naturelles de la source se trouve augmenté d'une quantité égale à $A\rho N^2 l^4 : a$, A étant une quantité sans dimensions et l une longueur caractéristique de la source.

91. Ondes sphériques stationnaires. — Pour avoir une onde sphérique stationnaire de fréquence n , essayons dans l'équation de propagation sphérique un potentiel des vitesses de la forme $\Phi = \varphi(r) \cos 2\pi nt$;
 $\varphi(r)$ doit satisfaire l'équation

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} + \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = 0$$

dont la solution générale est

$$\varphi = \frac{1}{r} \left[A \cos 2\pi \frac{nr}{a} + B \sin 2\pi \frac{nr}{a} \right].$$

Le potentiel des vitesses cherché est donc

$$\Phi = \frac{1}{r} \left(A \cos 2\pi \frac{nr}{a} + B \sin 2\pi \frac{nr}{a} \right) \cos 2\pi nt.$$

A et B étant à déterminer par les conditions aux limites. En particulier, admettons qu'à la distance R du centre règne une pression constante ; nous devons écrire qu'en ce point $\partial\Phi : \partial t = 0$. Donc

$$A \cos 2\pi \frac{nR}{a} + B \sin 2\pi \frac{nR}{a} = 0.$$

A un facteur près, l'expression du potentiel des vitesses est donc alors de la forme :

$$\Phi = \frac{1}{r} \sin 2\pi n \frac{R-r}{a} \cos 2\pi nt.$$

CHAPITRE VIII

PROPAGATION DES ÉBRANLEMENTS ACOUSTIQUES

Le chapitre actuel est consacré à la propagation des ébranlements acoustiques dans l'air principalement et secondairement dans les autres milieux.

PROPAGATION EN MILIEU LIBRE

92. Détermination de la célérité à l'air libre. — Assimilons l'ébranlement qui se propage à une onde plane ou sphérique dans laquelle les variations de pression s'effectuent *adiabatiquement*. Cette hypothèse est légitime avec les fréquences acoustiques usuelles. Si l'ébranlement est petit, nous avons vu (§§ 68 et 86) que la célérité doit être égale à

$$a = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{p}{\rho}} = a_0 \sqrt{1 + \alpha t}. \quad (1)$$

On détermine actuellement cette célérité en enregistrant les temps t_1 et t_2 , où un même signal sonore parvient en deux points A_1 et A_2 situés respectivement aux distances r_1 et r_2 de la source ¹.

Les expériences les plus récentes donnent pour a_0 la valeur de 330,8 m:s, identique au nombre obtenu en

1. Voir par exemple : E. ESCLANGON, *C. R.*, 168 (1919), 165.

1822 par la classique méthode du canon entre Villejuif et Montlhéry. Il est à peine utile de rappeler qu'elle est indépendante de la fréquence.

93. Influence des conditions atmosphériques. — *a) Température.* — La loi de variation résultant de la formule (1) a été convenablement vérifiée par l'expérience dans l'intervalle -45° (expériences faites au cours d'une exploration polaire), $+38^{\circ}$ (expériences faites dans l'Inde).

b) Pression. — L'influence de la pression sur la célérité du son dans un gaz n'est sensible que si ce dernier cesse franchement d'obéir à la loi de Mariotte (§ 69) ; c'est dire que la propagation à l'air libre échappe complètement à l'action des variations de la pression atmosphérique.

c) Humidité. — L'air chargé de vapeur d'eau est, toutes autres choses égales, plus léger que l'air sec ; mais d'autre part, le rapport γ pour l'air humide est légèrement plus faible que le même rapport relatif à l'air sec ; en fait, dans les conditions atmosphériques usuelles, il suffit, pour effectuer la correction d'humidité, de tenir compte de la variation de la masse spécifique.

94. Influence de l'intensité du son. — La théorie du chapitre VII suppose explicitement que les ébranlements propagés sont infiniment petits. S'il n'en est pas ainsi, l'ébranlement se déforme en se propageant ; il est difficile de parler d'une célérité des ondes ; on peut tout au plus définir la célérité du front de l'onde, c'est-à-dire de l'endroit où la variation de pression commence à être notable. Cette célérité peut être nettement supérieure à la célérité du son : par exemple dans l'explosion expérimentale de 10 t de trinitrotoluol effectuée à la Courtine en 1924, la célérité dans l'air de l'ébranlement produit a été trouvée, à proximité immédiate de l'explosion, voisine de 6 000 m : s, soit 17 fois la célérité du son. Mais dès qu'on s'éloigne du centre, l'amplitude de l'ébranlement décroît

(en première approximation, en raison inverse de la distance au centre) ; corrélativement la célérité du front de l'onde tend très rapidement vers la célérité du son : c'est ainsi qu'à la Courtine, la valeur normale de la célérité (340 m : s) avait été atteinte à quelques centaines de mètres du lieu de l'explosion.

95. Propagation rectiligne et diffraction du son. — Les dimensions des émetteurs acoustiques usuels atteignent rarement quelques décimètres, celles des obstacles courants ne dépassent guère un ou deux décimètres ; or, les longueurs d'ondes des sons ordinaires sont de l'ordre du mètre. Par suite les phénomènes de diffraction sont généralement très marqués : il est d'observation courante que le son contourne les obstacles ; mais comme l'oreille est peu sensible aux variations d'intensité, l'affaiblissement considérable du son provoqué par ce contournement échappe d'ordinaire et sa constatation nécessite une véritable expérience de mesure. L'écho lui-même, souvent donné comme vérification des lois de la réflexion, est plutôt une diffraction avec direction privilégiée. En fait la propagation rectiligne ne se constate bien qu'avec des sources sonores très aiguës (fréquences de l'ordre de 10 000, longueurs d'ondes de quelques centimètres), grâce auxquelles on peut montrer par exemple l'ombre acoustique d'un écran rigide de 1 m de diamètre. Par suite, le rayon sonore, qui serait l'analogue acoustique du rayon lumineux, ne se rencontre pour ainsi dire jamais et il n'est vraiment permis d'en parler que lorsqu'il s'agit de définir la direction vers laquelle se propage l'énergie.

96. Propagation en atmosphère hétérogène. — Soit une onde plane initialement verticale ; si l'atmosphère est homogène, la normale à l'onde reste horizontale. Or cette normale est le rayon sonore suivant lequel se propage

l'énergie ; par suite l'audition — à la décroissance près due à la distance — reste bonne pour tous les observateurs placés au sol : dans le silence des nuits calmes, tous les bruits s'entendent. Supposons au contraire une atmosphère hétérogène et admettons d'abord (fig. 24) que cette atmosphère soit stratifiée en couches, dont la température décroît à mesure qu'on s'élève ; la célérité du son décroissant également, il est facile de voir que l'ébranlement, primitivement vertical, prend la forme $A'B'$, puis $A''B''$ s'inclinant en arrière ; corrélativement la normale

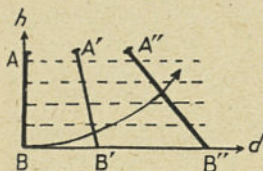


Fig. 24.

à l'onde pointe de plus en plus vers le haut, ce qui revient à dire que l'énergie acoustique va se diriger dans les couches supérieures de l'atmosphère ; un observateur placé au sol à quelque distance de la source ne recevra donc rien ; si au contraire

la température des couches augmente avec la hauteur, une onde primitivement verticale s'incline en avant, déferlant en quelque sorte, projetant vers la terre toute son énergie : l'audition de la source se trouve ainsi améliorée pour un observateur placé au sol.

Soit enfin une atmosphère où les températures sont irrégulièrement réparties : elle joue pour le son le même rôle que tient pour la lumière une juxtaposition de milieux inégalement réfringents ; elle sera *acoustiquement trouble*, le son n'y aura pas une grande portée : c'est le silence de « midi, roi des étés » où le bruit ne se propage pas.

97. Influence du vent. — Dans un vent uniforme la célérité du son s'accroît de la composante de la vitesse du vent suivant la direction de propagation du son. Ce ré-

sultat, à peu près évident *a priori*, entraîne une curieuse conséquence. L'expérience montre en effet que la vitesse horizontale du vent augmente assez rapidement avec l'altitude ; par suite la célérité apparente du son dans la direction du vent croîtra avec la hauteur ; en d'autres termes (§ 95) les ondes sonores déferlent sur les observateurs placés à l'aval de la source dans le lit du vent ; de ce côté donc, l'audition sera excellente. Au contraire, dans la direction opposée, où la célérité apparente du son décroît quand la hauteur augmente, l'énergie acoustique d'une onde primitivement verticale s'élève dans l'atmosphère ; elle se trouve donc perdue pour les observateurs restés à terre dans le lit du vent à l'amont de la source.

98. Repérage par le son. — 1° Le repérage au son d'une pièce d'artillerie P est basé sur la détermination des instants (comptés à partir d'une origine arbitraire) t , t_1 et t_2 auxquels l'onde de bouche (§ 109) provenant de la pièce parvient en trois stations A, B, C. Si a est la célérité du son dans les conditions de l'expérience (célérité ordinairement connue à un pour cent près), on a évidemment :

$$PB - PA = a(t_1 - t), \quad PC - PA = a(t_2 - t).$$

La pièce est donc à l'intersection de l'hyperbole H_1 , lieu des points dont la différence des distances aux points B et A est égale à $a(t_1 - t)$, avec l'hyperbole H_2 , lieu des points dont la différence des distances aux points C et A est égale à $a(t_2 - t_1)$.

Dans les conditions ordinaires, cette intersection se détermine avec une précision supérieure à celle actuellement réalisée dans les tirs de contre-batterie.

2° En pratique, on dispose à chacune des stations un écouteur (généralement un microphone servant de manomètre). Les courants modulés par les microphones sont envoyés à un poste central où ils inscrivent graphiquement les instants où l'onde de bouche parvient aux di-

verses stations. Sur les tracés s'inscrivent également les passages de l'onde balistique, mais les caractères de cette onde sont tellement distincts de ceux de l'onde de bouche qu'aucune confusion n'est possible ; au surplus, on peut réaliser des écouteurs insensibles au claquement, ne fonctionnant par exemple que sous l'action des dépressions caractéristiques (§ 113) des ondes de départ et d'éclatement.

99. Propagation du son dans l'eau. — La célérité dans l'eau des ébranlements acoustiques se détermine exactement de la même manière que dans l'air. Comme dans l'air, on constate au voisinage des centres d'ébranlements très intenses (obtenus par détonation de plusieurs kilogrammes d'explosifs) une célérité anormalement grande (dépassant 2 000 m : s dans certaines expériences) et quand l'onde s'éloigne du centre, tendant vers la célérité normale $a = 1\,430$ m : s, laquelle est atteinte pratiquement après un ou deux hectomètres de parcours.

100. Sondage acoustique. — La propagation des ébranlements dans l'eau de mer a été récemment appliquée au sondage à bord d'un navire. Si on place un émetteur d'ondes acoustiques qui émet un train d'ondes au temps t_1 , ce train part vers le fond de la mer, s'y réfléchit et revient vers le navire qu'il atteint au temps t_2 . Au départ et au retour, l'ébranlement agit sur un microphone dont les courants s'inscrivent sur un cylindre tournant à une vitesse suffisante pour que la durée du double trajet puisse être évaluée avec la précision exigée¹. La profondeur est évidemment $a(t_2 - t_1) : 2$.

1. Le sondage étant particulièrement utile à proximité des hauts-fonds, les appareils doivent pouvoir mesurer avec une précision meilleure que le mètre des profondeurs de l'ordre de 15 m. ; en d'autres termes en ce cas, il faut évaluer des temps de l'ordre du cinquantième de seconde à un millième de seconde près, ce que permettent sans difficulté les microphones et les oscillographes actuels.

Pour réduire au minimum la puissance nécessaire, on cherche à réaliser un ébranlement dirigé, constituant l'équivalent acoustique d'un faisceau lumineux. Comme la surface émettrice ne peut jamais dépasser quelques décimètres carrés, il est nécessaire, pour éviter les phénomènes de diffraction, que les ondes émises aient une très courte longueur d'onde : d'où l'emploi pour cet usage d'ultra-sons de fréquence voisine de 1 000 000.

Remarque. — Au lieu d'évaluer la distance verticale de l'émetteur au fond de la mer, on peut se borner à reconnaître, au moyen de l'écho ultra-sonore qu'il provoque, un obstacle de dimension suffisante, situé à proximité de l'émetteur. C'est d'ailleurs en vue de la détection des sous-marins allemands que Langevin mit au point en 1916 l'emploi du quartz piézoélectrique comme émetteur d'ultra-sons.

PROPAGATION DANS LES TUYAUX ¹

101. Quand on veut mesurer la célérité du son dans les corps autres que l'air ou l'eau, il faut opérer sur des masses toujours très limitées ; d'autre part dans les expériences à l'air libre, la température et le vent varient d'un endroit à l'autre de la trajectoire, en modifiant non seulement la célérité, mais encore la forme de la trajectoire ; par suite les expériences à l'air libre donnent le temps mis par l'ébranlement à effectuer un parcours qui théoriquement reste inconnu. C'est pourquoi on a rapidement songé à profiter du fait que la célérité des ondes sphériques *a* est la même que celle des ondes planes et on a voulu mesurer cette dernière par des déterminations faites dans des tuyaux. La méthode — dite directe — est ici en principe

1. Le lecteur trouvera des précisions sur certains points abordés ici dans mon *Introduction à la Mécanique des Fluides* (Coll. A. Colin) que je désignerai par *M. F.*

la même que pour les ondes à l'air libre : on inscrit le temps t_1 et t_2 où un ébranlement passe en deux sections du tuyau distantes de l ; la célérité est $l : t_2 - t_1$.

102. Influence de la viscosité. — En réalité la propagation d'un ébranlement dans un fluide renfermé à l'intérieur d'un tuyau diffère de la propagation à l'air libre : d'abord les frottements contre les parois dissipent de l'énergie et ralentissent la propagation. Soit b le célérité de l'ébranlement dans le tuyau. Écrivons que la différence $b - a$ dépend de la viscosité cinématique ν du fluide, du diamètre D du tuyau et de la fréquence N de l'ébranlement propagé. Des considérations évidentes d'homogénéité donnent

$$b = a \left[1 - f \left(\frac{\nu}{ND^2} \right) \right],$$

$f \left(\frac{\nu}{ND^2} \right)$ étant une fonction s'annulant avec ν et qui doit

(*M. F.*, § 123) varier comme $\sqrt{\nu}$ pour que les forces de viscosité et les forces de pression aient des effets comparables. D'où la formule

$$b = a \left[1 - \frac{A}{D} \sqrt{\frac{\nu}{N}} \right].$$

A étant un coefficient variant, suivant les auteurs, entre 1 et 2. Par suite la correction atteindrait pour l'air [$a = 340 \text{ m : s}$, $\sqrt{\nu} = 0,4 \text{ C. G. S.}$] environ 3 centièmes à la fréquence 100 et 1 centième à la fréquence 1 000 ; elle est donc de quelques m : s , ce qui n'est pas négligeable. On notera qu'elle varie en sens inverse de la fréquence ; quand un tuyau propage un ébranlement complexe, les harmoniques vont un peu plus vite que le fondamental.

Remarque. — Une théorie complète dont le lecteur trouvera les principes dans Rayleigh, *Sound*, II, p. 319, doit tenir compte de la transmission de chaleur entre le

tuyau et l'air, de l'amortissement de l'onde au cours de la propagation. Il faut également observer que les ébranlements réels ne peuvent que très rarement être considérés comme infiniment petits. En réalité toutes les expériences qui ont utilisé la méthode directe sont d'une interprétation très ardue et leurs résultats ne confirment de façon définitive aucune des formules de correction proposées jusqu'ici.

103. Méthode de Kundt. — Dans la méthode dite de Kundt, le gaz où l'on veut mesurer la célérité du son est contenu (fig. 25) dans un tube cylindrique fermé à une extrémité par un *piston réflecteur* P fixe. Vers l'autre extrémité du tube glisse sans frottement un *piston oscillant* O, sous l'action duquel s'établit dans le tuyau entre P et O

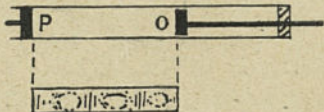


Fig. 25.

une onde stationnaire telle que 1° l'internœud $\lambda : 2$ est égal à $b : n$, n étant la fréquence des oscillations du piston ;

2° Il existe un nœud de vitesse contre le piston fixe ;

3° Le gaz situé contre le piston oscillant accompagne ce dernier dans son mouvement.



Fig. 26.

Par suite (fig. 26) l'amplitude maximum du déplacement dans

l'onde stationnaire pourra être bien supérieure à l'amplitude du piston oscillant si ce dernier se trouve près d'un nœud de l'onde stationnaire, c'est-à-dire si le tuyau contient à peu près exactement un nombre entier de demi-longueurs d'onde ; en d'autres termes un faible déplacement du piston oscillant provoquera alors aux

ventres de vitesses un vent vibratoire très intense, capable d'effets mécaniques importants.

Or Kundt a eu l'idée de mettre ce vent en évidence au moyen de poudres légères versées dans le tube. Quand la colonne vibre fortement, les poudres se rassemblent en figures¹ présentant tout le long du tube une période spatiale précisément égale à la demi-longueur d'onde que possède le gaz du tube pour la fréquence n de vibration : il suffit de mesurer cette période spatiale et de déterminer la fréquence n pour avoir la célérité b .

104. Mode opératoire. — *a)* Pour obtenir des vibrations de fréquence n , on peut monter le piston au bout d'une tige métallique qui, en son milieu, traverse le bouchon fermant le tube à l'extrémité opposée au piston réflecteur. On frotte avec les doigts colophanés sur la partie de la tige extérieure au tube, de façon à provoquer des vibrations longitudinales qui se transmettent à la partie intérieure au tube, et par suite au piston oscillant. La fréquence de ces vibrations est (§ 178) égale à $V : 2L$, en appelant V la célérité des ébranlements longitudinaux dans la tige et L la longueur de cette dernière.

b) Pour obtenir que la colonne gazeuse PO ait une longueur très voisine d'un nombre entier de demi-longueurs d'onde λ , le piston réflecteur peut se déplacer de quelques centimètres suivant l'axe du tube : les figures de Kundt apparaissent brusquement au moment où on arrive près de la résonance.

105. Résultats. — La méthode précédente a permis de déterminer la célérité des ébranlements dans les colonnes gazeuses renfermées à l'intérieur de tubes, c'est-à-dire, à la

1. Schématiquement on trouve 1° aux nœuds de vitesse des espaces elliptiques *vides* ou au contraire des *amas* elliptiques de poudre.

2° Aux ventres de vitesse des rides transversales très régulières.

correction près du § 102, la célérité du son dans les divers gaz aux différentes températures. Elle a permis de constater l'influence du rayon du tube, l'action de la non-perfection des gaz ; de vérifier l'influence du rapport des chaleurs spécifiques, et par suite de déterminer ce rapport pour les gaz dont la masse spécifique était connue. Elle constitue en somme un puissant moyen de recherches physiques.

106. Célérité des ébranlements dans les colonnes liquides.

— Lorsqu'un fluide est renfermé dans un tube à parois élastiques, les surpressions accompagnant la propagation des ébranlements provoquent sur leur passage une dilatation momentanée de cette paroi. Je renvoie le lecteur, pour la théorie de ce phénomène, à *M. F.*, p. 160 ; je me bornerai à signaler ici que l'élasticité des parois provoque une diminution considérable de la célérité c des ébranlements : à titre d'exemple, la célérité c des petits ébranlements dans une colonne d'eau ($a = 1430 \text{ m : s}$) renfermée à l'intérieur d'un tuyau d'acier dont la paroi a une épaisseur égale au centième de son diamètre tombe à $1\,000 \text{ m : s}$. Dans un tube en caoutchouc mince plein d'eau, la célérité des ébranlements est seulement de quelques m : s . Cela était d'ailleurs à prévoir : des parois élastiques permettent d'emmagasiner une grande masse de fluide entre deux sections distantes de dX ; elles jouent donc un rôle semblable à celui d'une augmentation fictive de la compressibilité du fluide.

CHAPITRE IX

SOURCES EN MOUVEMENT PAR RAPPORT AU MILIEU AMBIANT

107. Hypothèses fondamentales. — Dans un milieu immobile où la célérité du son est a , se déplace une source d'ébranlements. Nous poserons que l'ébranlement produit entre les temps t et $t + dt$ se trouve à l'instant $t + T$ localisé dans une coquille sphérique ayant pour centre la position de la source au temps t , pour rayon extérieur aT , pour épaisseur adt . Ces hypothèses admettent implicitement d'abord que l'ébranlement est petit et ensuite que l'onde devient, dès sa production, indépendante de la source dont elle émane, qu'elle se propage, dès cet instant, comme si elle avait été émise par une source immobile ; elles permettent d'expliquer les phénomènes acoustiques observés avec les sources en mouvement.

108. Effet Doppler. — Quand une source sonore en mouvement assez rapide (sirène d'une automobile, sifflet d'une locomotive) passe devant un observateur, celui-ci constate au passage de la source une baisse dans la hauteur du son perçu. L'explication du phénomène est évidente : Supposons la source et l'observateur en mouvement suivant la droite qui les joint ; la source est animée d'une vitesse V , comptée positivement vers l'observateur, lequel

possède une vitesse v comptée positivement vers la source.

Soit D la distance séparant l'observateur de la source au temps O . La vibration émise à cet instant parvient à l'observateur au temps t_1 , durant lequel la vibration a parcouru un espace at_1 et l'observateur un espace vt_1 .
Donc

$$t_1(a + v) = D, \quad t_1 = D : (a + v).$$

Si N est la fréquence de la source, la deuxième vibration est émise au temps $\frac{1}{N}$, la source se trouvant alors à la distance $D' = D - (V + v) \frac{1}{N}$ de l'observateur. Pour que cette vibration atteigne l'observateur, il faudra un temps

$$t' = \frac{D'}{a + v}.$$

La rencontre de l'observateur avec la deuxième vibration aura donc lieu à l'instant

$$t_2 = \frac{1}{N} + t' = t_1 + \frac{1}{N} \frac{a - V}{a + v}.$$

Or $t_2 - t_1$ n'est autre que la période avec laquelle les vibrations atteignent l'observateur; par suite la fréquence apparente N' du son est

$$N' = \frac{1}{t_2 - t_1} = N \frac{a + v}{a - V}.$$

Ainsi lorsqu'une locomotive passe en sifflant devant un observateur immobile ($v = 0$) la fréquence apparente N' pendant que la locomotive s'approche ($V > 0$) est supérieure à la fréquence; lorsque la locomotive s'éloigne V est négatif; la fréquence apparente N'_2 est inférieure à la fréquence réelle, l'intervalle $N'_1 : N'_2$ atteint un ton si la locomotive est animée d'une vitesse de 72 km : h soit 20 m : s. C'est exactement ce que donne l'expérience.

Remarque. — L'intérêt acoustique du phénomène de Doppler est faible ; en revanche son importance optique est considérable : il a permis par exemple de mesurer la vitesse de certains astres, plus exactement la composante de cette vitesse dirigée vers la terre.

109. Acoustique des projectiles. — Le lancement d'un projectile entraîne la production de trois sortes d'ébranlements acoustiques.

1° La déflagration à la bouche de l'arme des gaz de la poudre produit un ébranlement : c'est le *départ* (vulgairement le *coup*) ; l'onde qui en résulte est dite *l'onde de bouche* ; sa célérité devient très rapidement égale à celle du son. Sa constitution est assez complexe : un manomètre inscripteur enregistre à son passage une série de surpressions et de dépressions, dont la fréquence est de l'ordre de 25 et dont la durée totale atteint quelques dixièmes de secondes : à quelque distance de la pièce, on a l'impression d'un bruit prolongé, soufflé, finissant même par dégénérer en infra-son.

2° Tout le long de la trajectoire est produit un bruit, d'autant plus faible que les propriétés balistiques du projectile sont meilleures. C'est le *son de sillage* perçu, selon les circonstances, sous forme de *claquement* ou de *sifflement*. Nous allons y revenir.

3° On a enfin *l'arrivée*, bruit dû au choc sur le but et éventuellement à l'éclatement des projectiles chargés d'explosifs : dans ce dernier cas, l'ébranlement qui en résulte comporte, comme l'onde de bouche, une série — plus amortie toutefois — d'oscillations de pression.

Or, les phénomènes acoustiques perçus par un observateur près duquel passe un projectile sont totalement différents suivant que la vitesse de ce projectile est inférieure ou supérieure à la célérité du son.

110. Sources animées d'une vitesse inférieure à la célérité du son. — Soit d'abord une source qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $v < a$. Traçons les positions au temps t des ondes émises par la source aux temps $t = 1, t = 2, \text{ etc.}$; on voit immédiatement qu'une onde quelconque est entièrement extérieure aux ondes de production plus récente. Le système des diverses ondes au temps t n'a donc pas d'enveloppe réelle.

Soit maintenant (fig. 27) une source décrivant la trajectoire courbe CA avec une vitesse variable, mais inférieure à a : un observateur placé en un point quelconque O extérieur à la trajectoire, reçoit :

1° Au temps $T_0 = CO : a$, le son émis à l'instant zéro par la source passant en C;

2° Au temps $T_1 = t + AO : a$ le son émis à l'instant t par la source passant en A.

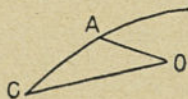


Fig. 27.

Or $at > CA$ puisque la vitesse du projectile est inférieure à celle du son. $CO < CA + AO$; donc $T_0 < T_1$. Quelle que soit la position de l'observateur, celui-ci reçoit les divers sons dans l'ordre de leur production. Pour un projectile animé d'une vitesse inférieure à la célérité du son, tel que ceux lancés par les obusiers actuels et toutes les anciennes armes de guerre, l'observateur entend d'abord le coup, puis un bruit continu correspondant aux sons émis tout le long de la trajectoire et désigné sous le nom de *sifflement*, quoique la dénomination convienne surtout au son de sillage provenant des projectiles de petit calibre. Enfin est perçue l'arrivée : choc sur le but et éventuellement éclatement.

111. Sources animées d'une vitesse supérieure à la célérité du son. — Soit d'abord une source se déplaçant d'un

mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v . La figure 28, qui représente au temps t , en traits pleins, les ondes émises par la source aux temps $0, 1, \dots$, fait voir immédiatement que ces diverses ondes ont à l'instant t une enveloppe en forme de cône, dite *onde balistique*. La trace de ce cône sur le tableau est constituée par deux droites passant par la position de la source

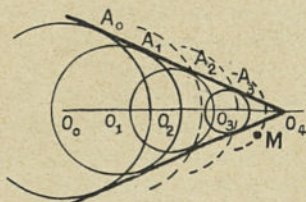


Fig. 28.

au temps t et faisant avec la direction de propagation un angle α tel que

$$\sin \alpha = \frac{O_0 A_0}{O_0 O_4} = \frac{at}{Vt} = \frac{a}{V}.$$

Cet angle est dit *l'angle de Mach*.

Un peu après, les diverses ondes ont les positions et les grandeurs figurées en pointillé. Un observateur placé en M est atteint au temps t par l'onde issue de O_3 au temps 3, et au temps $t + \theta$ par l'onde issue de O_2 au temps 2 ; dans l'intervalle sont arrivées en M dans l'ordre inverse de leur émission les ondes émises par la source de O_2 à O_3 : si donc la vitesse d'une source sonore est supérieure à la célérité du son, ce qui précède suffit à établir que, dans certaines circonstances, un observateur peut recevoir les différents bruits dans un ordre différent de celui de leur production. Une théorie plus complète tient naturellement compte de la courbure de la trajectoire suivie par le projectile, des variations de la vitesse possédée par ce dernier tout le long de la trajectoire. Mais dans leur allure générale les résultats précédents subsistent.

112. Propriétés de l'onde balistique. — L'enveloppe des différentes ondes, étant le lieu de rencontre des ondes infiniment voisines, est également un *lieu de concentration de l'énergie des ébranlements*. Si les ondes émises par la source sont, comme c'est par exemple le cas pour les projectiles modernes, des ondes de compression, il règne dans l'onde balistique une surpression très grande, de l'ordre du $\text{kg} : \text{cm}^2$. Mais l'épaisseur de l'onde est très faible — de l'ordre de quelques centimètres —, son passage dure extrêmement peu — moins de un millième de seconde. Ce passage produit donc sur un observateur les mêmes effets qu'une variation de pression assez grande et très rapide, c'est-à-dire les mêmes effets qu'un choc. D'où le nom *d'onde de choc*, donné à l'onde balistique.

En particulier, les phénomènes auditifs débutent par un *claquement*, analogue à un coup de fouet¹, au moment où l'onde balistique passe sur l'observateur. Ce dernier devrait ensuite percevoir une suite continue de bruits — de durée assez courte d'ailleurs — provenant des sons de sillage tout le long de la trajectoire; mais l'oreille est assourdie par le claquement, de sorte qu'après ce dernier, l'observateur ne perçoit guère que le départ et l'arrivée. Encore faut-il que les conditions locales ne soient pas défavorables.

113. Vérification de l'existence de l'onde balistique. — Pour mettre en évidence l'onde balistique, on lance un projectile à grande vitesse perpendiculairement à l'axe d'un striographe².

1. Le bruit du coup de fouet est d'ailleurs dû à une véritable onde balistique. Z. CARRIÈRE a en effet constaté, par chronophotographie, que, lorsqu'un fouet claque, l'extrémité de la mèche est animée d'une vitesse voisine de $400 \text{ m} : \text{s}$.

2. Cet appareil comprend une lentille L formant l'image d'une source lumineuse S sur un écran D, découpé de façon à arrêter la presque

La source lumineuse est fournie par une étincelle électrique, que le projectile déclenche quand il arrive dans le champ de l'appareil et dont la durée est une fraction de millionième de seconde. De la sorte le projectile et l'onde

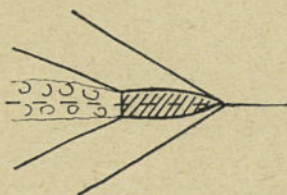


Fig. 29.

ballistique qui l'accompagne ne se déplacent que d'une petite fraction de millimètre pendant toute la durée de l'éclairement, et une plaque photographique peut enregistrer nettement l'existence de deux ondes de compression (fig. 29) partant res-

pectivement de l'avant et de l'arrière du projectile, lequel laisse derrière lui un sillage tourbillonnaire.

Pour des raisons sur lesquelles je ne puis insister ici, l'ouverture de ces deux ondes n'est pas exactement égale au double de l'angle de Mach ; l'angle avant α_1 est supérieur, l'angle arrière α_2 inférieur ; toutefois la moyenne des deux ouvertures correspond très sensible-

totalité de la lumière issue de la source. Un objectif photographique Λ donne sur la plaque sensible E l'image d'un plan π dit *plan de visée* et situé entre L et D . Si le milieu entre S et D est optiquement homogène, la plaque n'est pratiquement pas éclairée ; mais le moindre trouble optique existant dans cette région se traduit par une déviation des rayons lumineux dont certains peuvent alors impressionner la plaque ; en particulier celle-ci enregistre exactement le dessin de toute variation de pression survenant dans l'air environnant le plan π (fig. 30).

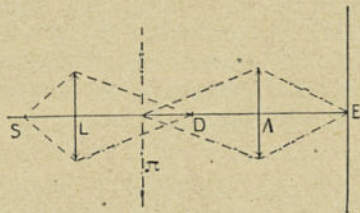


Fig. 30.

ment au double de l'angle de Mach. Il faut d'ailleurs remarquer que la théorie précédente n'est qu'une première approximation : des surpressions dépassant le $\text{kg} : \text{cm}^2$ ne sauraient être considérées comme infiniment petites ; d'autre part, l'influence de la rotation du projectile ne doit pas être négligeable.

Remarque. — Un manomètre enregistreur, placé au voisinage de la trajectoire, inscrit le passage de l'onde balistique sous forme d'une surpression violente et brève, qui se distingue bien de l'onde de bouche et de l'éclatement, caractérisés tous deux par l'existence de pressions oscillantes.

MUSEE COMMERCE
et COLLEGE
2 Rue du Lombard,
LILLE

CHAPITRE X

AUDITION

114. Généralités. — La sensation sonore a son origine dans un mouvement vibratoire transmis à notre oreille, pour la presque totalité des cas, par l'intermédiaire de l'air. Mais pour qu'un tel ébranlement soit *audible*, c'est-à-dire pour qu'un observateur le perçoive comme sensation sonore, il faut que la fréquence et l'intensité soient comprises entre certaines limites. D'autre part, lorsque deux sons différant, soit d'intensité, soit de hauteur, parviennent successivement à un écouteur, la différence, pour être perceptible, ne doit pas être inférieure à une certaine valeur. Nous allons examiner ces différents aspects physiques du problème de l'audition.

115. Limite inférieure de fréquence audible. — La fréquence minimum que doit posséder une vibration pour être audible paraît, à première vue, facile à déterminer. Il semble en effet qu'il suffise de faire osciller un système de période ajustable — par exemple une corde chargée en son milieu et soumise à une tension réglable, ou bien un diapason à masses additionnelles déplaçables — et d'augmenter la fréquence de ce système jusqu'à obtention de la sensation acoustique. Avec un diapason comme source sonore, l'impression de son ne commence pas certaine-

ment avant la fréquence 16^1 . De plus et jusqu'à la fréquence 36 (ré₀) environ, l'oreille perçoit, en coups distincts dont la succession produit une sorte de roulement, chacune des condensations que le corps vibrant provoque dans l'air². La continuité complète, caractéristique du son musical, n'apparaît guère avant le $mi_0 = 40$.

Un point important est à préciser : les vibrations d'un système comme une corde chargée ou bien un diapason ne sont pas rigoureusement sinusoïdales. Il y existe des harmoniques dont l'amplitude est sans doute petite par rapport à celle du fondamental, mais qui, en raison de l'inégale sensibilité de l'oreille aux diverses fréquences, peuvent avoir dans l'effet auditif un rôle bien plus important que ne l'indiquerait leur seule grandeur cinématique. Aussi, pour être correct, faut-il dire qu'il est possible d'entendre un diapason de fréquence 16, et non pas seulement la fréquence 16.

146. Limite supérieure de fréquence audible. — On admet actuellement que la limite supérieure des sons perceptibles transmis par l'air se trouve au voisinage de la fréquence 20 000 pour les enfants ; elle décroît à mesure que le sujet avance en âge et elle ne dépasse guère 12 000 pour les vieillards. La moyenne 16 000 de ces deux nombres est notablement inférieure aux valeurs (de l'ordre de 40 000) admises il y a cinquante ans. Pour déterminer cette limite supérieure, il faut en effet réaliser des vibrateurs possédant la fréquence dont on veut

1. Un *infra-son*, c'est-à-dire une vibration de fréquence inférieure à 16 approximativement sinusoïdale, et dont l'intensité est suffisante, donne naissance à des perceptions tactiles de surpressions rythmées. Ces dernières peuvent être ressenties à l'intérieur du crâne ; il s'agit évidemment d'une transmission à l'oreille interne des surpressions exercées sur le tympan, lequel agit alors comme simple manomètre.

2. L'expérience est aisée à faire sur un piano, instrument dont la note la plus grave est le $la_{-1} = 27$; elle est tout à fait démonstrative avec un harmonium.

déterminer l'audibilité, et *cette fréquence seulement*. C'est précisément cette réalisation qui constitue la difficulté principale du problème expérimental.

Comme générateurs de vibrations aériennes, on a utilisé :

1° Une tige d'acier exécutant des vibrations longitudinales ; la fréquence d'une telle tige peut se calculer aisément ; mais il faut éviter soigneusement la production de toute vibration transversale ou torsionnelle, dont la fréquence est notablement plus faible que celle des vibrations longitudinales, et risque par suite de se trouver dans le domaine des fréquences audibles.

2° Le sifflet de Galton, constitué essentiellement par un *petit tuyau fermé* à embouchure de flûte circulaire. On excite ce sifflet par un *courant d'air* sous une pression qui doit être maintenue rigoureusement *constante*, car la fréquence du son produit varie très rapidement avec la *pression p* de l'air d'alimentation, par exemple de 6 000 à 20 000 quand *p* monte de 400 à 800 mm. d'eau. Aussi, dans les expériences correctes, *doit-on* déterminer la hauteur du son produit par un tel appareil au cours même de l'emploi.

3° Un récepteur téléphonique alimenté par le courant provenant d'un arc chantant, ou d'un émetteur à triodes. — C'est actuellement la méthode la plus correcte, la plus simple et la plus aisée à mettre en œuvre.

Les vibrations dont la fréquence est trop grande pour être audible sont souvent appelées maintenant *ultra-sons*.

117. Seuil d'audibilité. — Dans l'air une onde plane sinusoïdale possède par unité de volume une énergie

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho u_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m^2}{\gamma p}$$

Pour qu'un observateur, recevant l'onde, éprouve une sensation sonore, il est nécessaire que cette densité d'énergie — ou l'amplitude de pression acoustique correspondante σ_m — dépasse un certain minimum, dit *seuil d'audibilité*¹ — lequel dépend de la fréquence de l'onde

1. Les puristes remarqueront peut-être que le terme « seuil d'excitation » est depuis longtemps employé dans ce sens par les psycho-phy-

et de l'observateur. La méthode anciennement utilisée pour la détermination de ce seuil est, en principe, la suivante :

Une source sonore absorbe pendant le temps dt une énergie Pdt : admettons¹ qu'au temps t toute cette énergie se retrouve à l'état d'énergie sonore dans une coquille hémisphérique de rayon $r = at$ et d'épaisseur adt ; sa densité y sera donc $\frac{P}{2\pi ar^2}$, correspondant à une pression acoustique d'amplitude $\sigma_m^2 = \frac{\gamma P^2}{\pi ar^2}$.

Pour la détermination du seuil, l'observateur cherche la distance r à laquelle il cesse d'entendre la source ; il suffit alors pour connaître σ_m de déterminer P .

Application numérique : Rayleigh trouve qu'un sifflet de fréquence 2 730, consommant 196 cm³ : s d'air sous une pression de 9,5 cm d'eau (dépensant par conséquent $P = 196 \cdot 9,5 \cdot 981 = 1,83 \cdot 10^6$ erg : s) s'entend jusqu'à $r = 820$ m. Il en résulte pour σ_m la valeur $16 \cdot 10^{-2}$ barye = 1,6 micron d'eau. Ce chiffre est évidemment erroné par excès ; la puissance du courant d'air alimentant le sifflet était certainement très supérieure à celle transformée en énergie vibratoire.

148. Technique actuelle. — L'observateur applique un écouteur téléphonique contre son oreille de façon à constituer une chambre *close*, dont deux parois sont l'une le tympan, l'autre le diaphragme de l'écouteur. Un émetteur à triodes envoie dans les électros du téléphone un courant de fréquence constante et dont on diminue l'intensité

siologistes. J'ai préféré la nomenclature du texte, comme plus précise et plus internationale.

1. Cette hypothèse est certainement inexacte. 1° Toute l'énergie de la source ne se transforme pas en énergie vibratoire. 2° Une partie de l'énergie vibratoire se dissipe dans la propagation. La valeur trouvée pour le seuil est donc approchée par excès. Il est possible d'ailleurs de déterminer, pour certains vibrateurs, la puissance effectivement cédée au milieu ambiant. Le lecteur pourra se reporter à RAYLEIGH (*Sound*, II) et à BOUASSE (*Acoustique*, pp. 305-310).

jusqu'à cessation de la sensation acoustique ; un étalement préalable donne l'amplitude de la vibration prise par la membrane à cet instant ; on en déduit immédiatement la surpression dans la chambre close.

L'intérêt de cette technique réside essentiellement dans sa souplesse. Par exemple, au lieu de diminuer l'intensité du courant, on peut l'augmenter jusqu'à ce que l'audition devienne pénible, jusqu'à ce que le patient ait, suivant la hauteur du son, « la tête cassée » ou « les oreilles déchirées ». On obtient ainsi le *seuil de sensation douloureuse* ou *seuil de douleur*. De même, si on fait varier périodiquement l'intensité du courant, par exemple en intercalant et en supprimant (toutes les secondes environ) une résistance dans le circuit des électros, on détermine la variation minimum $\delta\sigma$ — et mieux la variation relative $\frac{\delta\sigma}{\sigma}$ que doit subir l'amplitude σ de la pression acoustique pour que l'oreille éprouve la sensation d'un changement dans l'intensité. On peut aussi changer périodiquement les caractéristiques de l'émetteur de façon qu'il émette tantôt la fréquence N , tantôt la fréquence $N + \delta N$; on détermine alors la variation minimum de fréquence δN que l'oreille peut distinguer dans deux sons consécutifs¹. Enfin, en n'envoyant le courant dans les électros que pendant une petite fraction connue de seconde, il est possible de trouver le nombre minimum de vibrations nécessaires pour permettre de déterminer la hauteur du son.

Voici les principaux résultats :

119. Courbe d'audibilité. — La figure 31 donne la *courbe d'audibilité normale* (courbe A) obtenue en portant en

1. Quand les sons sont produits simultanément, l'observation des battements permet de déterminer une différence de fréquence encore plus faible.

abscisses les fréquences¹ et en ordonnées, les seuils d'audibilité repérés par l'amplitude de pression acoustique correspondante.

La courbe d'audibilité précise la nature de la difficulté rencontrée dans la détermination de la fréquence minimum des sons audibles. Soit, à titre d'exemple, un son — constitué par un fondamental de fréquence 15 et par l'harmonique 4 de fréquence 60 — produisant en un point une variation de pression de la forme

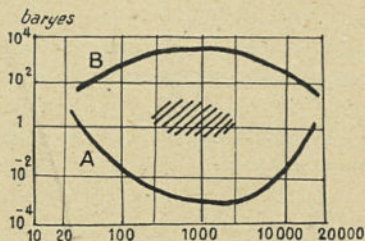


Fig. 31.

$$\pi \text{ (baryes)} = 30 \sin 2\pi \cdot 15 \cdot t + 0,3 \sin 2\pi \cdot 60t.$$

Si on enregistre cette variation de pression, quelle que soit la méthode d'inscription, l'harmonique 4 est pratiquement invisible sur le tracé ; on est ainsi tenté de croire que la vibration est simple. D'autre part, l'harmonique 4, dépassant le seuil d'excitation relatif à la fréquence 60 est entendu ; mais l'origine de l'impression acoustique ressentie peut être attribuée par un observateur non prévenu à la seule fréquence dont l'existence lui est révélée par l'inscription graphique, c'est-à-dire au fondamental.

120. Limite des sensations douloureuses. — La courbe B (fig. 31) représente la courbe normale des sensations douloureuses, c'est-à-dire la courbe donnant la pression pour

1. En fait, leurs logarithmes.

laquelle un son de fréquence connue commence à « résonner dans la tête ». L'espace compris entre la courbe d'audibilité et la courbe des sensations douloureuses représente en intensité et en hauteur tout le domaine des perceptions sonores ; celui de la voix humaine courante correspond approximativement à la partie hachurée.

121. Sensibilité de l'oreille aux variations d'intensité ou de hauteur. — La figure 32 donne en fonction de la fréquence :

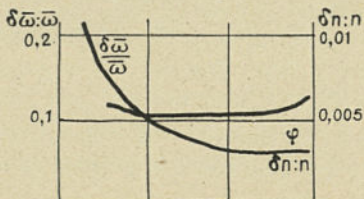


Fig. 32.

Les quatre ordonnées marquent les fréquences 0,200, 800, 6 400.

une variation de 5 p. 100 dans la pression, de 10 p. 100 dans la densité d'énergie est à peine perceptible.

2° La variation relative minimum de fréquence nécessaire pour que deux sons *immédiatement consécutifs* paraissent ne pas avoir même hauteur : on voit qu'un observateur moyen peut distinguer tout juste le son 132 du son 135 (intervalle 20 savarts, près d'un quart de ton), le son 1 000 du son 997 ou le son 3200 du son 3210 (intervalle 1 savart).

Remarque importante. — On notera que les mesures de sensibilité sont faites par étude de la *pression* acoustique : l'oreille est en effet sensible aux variations de pression — et non aux variations de vitesse. Sans importance pour les ondes progressives où vitesse et condensa-

1° La variation relative minimum que doit subir l'amplitude de la pression dans une vibration aérienne pour que l'oreille éprouve la sensation d'un changement d'intensité. On voit qu'aux fréquences usuelles

tion sont proportionnelles, la distinction est utile pour les ondes stationnaires où les nœuds de vitesse coïncident avec les ventres de pression.

122. Nombre minimum de vibrations nécessaires pour déterminer la hauteur d'un son. — Un observateur *très exercé* semble pouvoir déterminer par comparaison avec un sonomètre la hauteur d'un son à un quart de ton près en percevant seulement :

Deux vibrations depuis le mi_0 (40) au sol_6 (3072)¹ ;

Cinq vibrations au voisinage du sol_7 (6144) ;

Dix vibrations au voisinage du do_8 (8192).

En fait, pour avoir une bonne impression de hauteur un observateur *moyen* a besoin de recevoir les ondes sonores pendant un temps voisin du centième de seconde : par exemple, il doit recevoir 5 vibrations au voisinage du $do_4 = 512$, 10 au voisinage du $do_5 = 1024$.

123. Remarque très importante. — Les courbes des figures 31 et 32 sont les courbes dites normales, parce qu'elles représentent les résultats moyens d'expériences effectuées en Amérique sur un grand nombre d'observateurs.

Étant des moyennes, elles ne mettent pas en évidence les écarts extrêmement importants (parfois dans le rapport de 1 à 10 ou même à 30) que présentent les nombres obtenus par deux observateurs différents, n'ayant aucune tare auditive et opérant avec le même appareil ; on n'y aperçoit pas non plus les irrégularités, se traduisant par de véritables crochets, caractéristiques du système auditif moyen et interne de chaque opérateur. Il n'y a d'ailleurs nullement à s'étonner de ces différences dans la perception. L'oreille de « l'écouteur moyen » perçoit comme

1. On notera que pour le sol_6 , deux vibrations correspondent à 0,65 milliseconde.

sensation sonore une onde de fréquence 4 000 où la variation totale de pression est inférieure à 10^{-3} barye, soit à un millimicron de mercure ; dans cette onde l'amplitude de la vibration aérienne est de 10^{-9} cm, soit 1 : 10 du rayon attribué à la molécule d'hydrogène et 1 : 3 000 de la distance moyenne des molécules d'un gaz dans les conditions normales. Un seuil d'excitation dix fois plus fort ne dénote vraiment pas une oreille bien « dure » ; et certains observateurs, comme Max Wien, sont capables de percevoir dans le domaine 1 500-3 000 des vibrations où l'amplitude de la variation de pression atteint à peine 10^{-5} barye.

124. Logarithmes acoustiques. — Dans les recherches relatives à l'acoustique, on est souvent conduit à exprimer le rapport de deux grandeurs de même espèce par le logarithme de ce rapport. Un exemple — extrêmement intéressant parce que d'origine purement intuitive — est fourni par la mesure des intervalles musicaux où un usage immémorial considère comme *somme* des deux intervalles $m : n$ et $p : q$ l'intervalle i tel que

$$i = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} \quad \log i = \log \frac{m}{n} + \log \frac{p}{q} ;$$

l'octave (2 : 1) a toujours paru être la somme d'une quinte (3 : 2) et d'une quarte (4 : 3). Une pratique analogue s'impose quand il s'agit de comparer les intensités acoustiques ; par exemple, pour les sons de fréquence 1 000 perceptibles sans atteindre au seuil de la douleur, les pressions acoustiques peuvent varier de 0,0004 à 4 000 baryes, c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 10^7 . Les intensités correspondantes varient donc dans le rapport de 1 à 10^{14} . Cela ne laisserait pas de surprendre si l'on oubliait la loi de sensibilité de l'oreille. D'après cette loi, il existe un seuil d'audibilité avant lequel rien n'est perçu ; ensuite la sensation apparaît assez brusquement,

puis croît, d'abord très vite, de plus en plus lentement après, de sorte que dans les derniers stades l'intensité sonore doit être multipliée de façon colossale pour que l'expression ressentie paraisse avoir vraiment augmenté. Ce résultat — schématisé dans la fameuse règle de Fechner, suivant laquelle *la sensation croît comme le logarithme de l'excitation* — conduit tout naturellement à utiliser pour les intensités sonores une mesure par logarithmes.

125. Mesure de l'intensité en bels. — Soient dès lors deux sons, dont les intensités acoustiques sont respectivement I_1 et I_0 correspondant à des pressions acoustiques p_1 et p_0 . Par définition, si on prend pour intensité de référence l'intensité I_0 , la quantité $\log I_1 : I_0 = 2 \log_{10} p_1 : p_0$ constitue la mesure en *bels* de l'intensité I_1 . On utilise généralement comme unité pratique le *décibel* (dbl).

Pour un son simple, l'intensité de référence est souvent l'intensité du son de même fréquence correspondant au seuil d'audibilité ; dans cette convention il résulte du paragraphe précédent qu'à la fréquence 1 000 le seuil douloureux vaut $\log 10^{14} = 14$ bels = 140 dbl ; la courbe B de la figure 31 montre également qu'au voisinage du do_2 , avec un seuil d'audibilité correspondant à une pression de 0,3 baryes, le seuil de la douleur s'établit à 92 dbl. Pour un son complexe ou pour un bruit, pour lesquels il ne saurait être question d'un seuil d'audibilité, il faut définir, au moyen de la puissance traversant l'unité d'aire, une intensité acoustique de référence. Jusqu'à présent aucune entente internationale n'a été établie sur ce point ; toutefois les bases adoptées dans les divers pays sont de même ordre de grandeur, correspondant au seuil d'audibilité au voisinage du do_2 , soit quelques millimicrowatts par mètre carré. Voici, à titre d'exemple, quelques nombres obtenus en Amérique avec la base $I = 6,3 \text{ m}\mu\text{W} : \text{m}^2$.

La voix de conversation courante possède une intensité

de 40 dbL : nous parlons donc en général dix mille fois plus fort ($40 = 10 \log_{10} 10\ 000$) qu'il ne serait strictement nécessaire. Le tonnerre — moyen évidemment — a beau avec ses 70 dbL égaler en intensité mille personnes [$70 - 40 = 10 \log 1\ 000$] parlant simultanément, il est quand même 30 fois plus faible qu'un lion rugissant 85 décibels à la face des expérimentateurs. Quand le lecteur aura calculé combien de lions sont nécessaires pour faire autant de bruit qu'un métro en souterrain (90 dbL) ou pour égaler les 106 dbL d'un marteau pilon, il aura compris le sens profond de la réflexion de W. Sabine : « La millième partie d'un son fort est un son fort et seulement sa millionième partie commence à être faible ».

126. Sensation de timbre. — Le lecteur sait que le timbre d'un son dépend du nombre des harmoniques et de leurs amplitudes¹. Les sons simples ou presque simples, comme ceux de la flûte, sont doux, voilés et ternes. Ceux où dominent les cinq ou six premiers harmoniques (instruments à cordes) sont plus pleins, plus brillants, tout en restant nuancés ; ils constituent le fond de la musique expressive ; enfin quand les harmoniques supérieurs prennent de l'importance (cuivres), on obtient des sons éclatants, pénétrants, destinés surtout à des effets de puissance.

Une précision est nécessaire : le timbre d'un son ne dépend pas de la phase des harmoniques : par exemple, les deux vibrations $x_1 = \sin 2\pi \cdot 100 t + \sin 2\pi \cdot 200 t$ et $x_2 = \sin 2\pi \cdot 100 t + \cos 2\pi \cdot 200 t$ se traduisent pour notre oreille par la même sensation d'octave. Autrement dit, dans la perception du timbre, ce qui importe, c'est

1. Je ne discuterai pas si ce sont les amplitudes absolues qui interviennent, ou seulement les amplitudes relatives. Le fait invoqué parfois à l'appui de la première opinion que les sons affaiblis n'ont pas de timbre caractéristique prouve simplement que les harmoniques supérieurs sont tombés au-dessous du seuil d'audibilité correspondant.

non pas la forme même de la vibration, mais seulement son spectre acoustique¹. Corrélativement, lorsqu'on émet simultanément plusieurs harmoniques d'une même note au moyen d'appareils indépendants, on peut reproduire — tout au moins de façon approchée — le timbre que cette note prend sur tel ou tel instrument ; on peut même obtenir des timbres ne correspondant à aucun instrument connu. C'est le principe qui est à la base des orgues électroniques.

127. Perception de deux sons simultanés. — Les phénomènes fondamentaux sont connus depuis longtemps : Pour se faire entendre dans le bruit, il faut crier et, à cet égard, les voix aiguës sont supérieures aux voix graves ; d'autre part, pour couvrir la voix d'un orateur, les sifflets sont préférables aux cris. Les acousticiens énoncent cela en disant que le seuil d'audibilité d'un son S_1 s'élève quand on entend simultanément un son S_2 ; et que l'élévation du seuil dépend de la fréquence et de l'intensité de S_2 .

2° Quand on produit simultanément deux sons de hauteurs voisines, c'est-à-dire dont les fréquences diffèrent de quelques unités, on entend des battements (de tout temps utilisés pour l'accord des instruments à cordes). A mesure que l'intervalle des deux sons simultanés augmente, l'effet devient dur, faux ; finalement les deux sons composants éclatent distincts.

3° Quand on produit simultanément avec deux appareils différents² deux sons de fréquences assez distinctes p et q , on entend — en même temps que ces deux sons — assez facilement le différentiel du premier ordre $p - q$;

1. Cela tient sûrement à ce que ce ne sont pas les mêmes éléments de l'oreille interne qui sont sensibles aux fréquences 100 et 200.

2. Il faut en effet avoir combinaison dans l'oreille de deux sons d'origine différente, et non pas perception par l'oreille d'un son d'intensité périodiquement variable, lequel se produit par exemple quand deux tuyaux sonores sont montés sur une même caisse à vent.

avec de l'habitude, parce qu'il est bien moins intense, l'additionnel $p + q$; enfin moyennant certaines précautions les différentiels $2p - q$, $2q - p$, etc. L'origine de ce phénomène doit évidemment être cherchée dans l'élasticité dissymétrique (§ 29 et 42) du système formé par le tympan, les osselets et l'oreille interne.

Ces résultats ont été précisés par divers auteurs; par exemple Wegel et Lane¹ envoient dans un écouteur téléphonique (dont ils

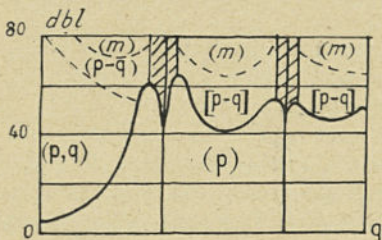


Fig. 33.

considèrent la distorsion comme négligeable) simultanément un son pur de fréquence $p = 1\,200$, dont l'intensité (rapportée au seuil d'audibilité correspondant) est de 80 dbL,

et un son pur dont la fréquence q peut varier entre 400 et 4 000 et dont l'intensité I , rapportée au seuil d'audibilité de la fréquence q , peut varier entre 0 et 80 dbL.

Représentant (fig. 33) une expérience en portant en abscisses q et en ordonnée I , ils trouvent que :

1° Pour tous les points au-dessous de la courbe en trait plein, on entend seulement le son p ; cette courbe représente donc l'effet de masque provoqué par le son p .

2° Pour tous les points de la zone marquée (p, q) on entend simultanément et distinctement les sons p et q et ceux-là seulement.

3° Pour tous les points des trois zones marquées $[p - q]$, on entend p, q et le différentiel $p - q$.

1. R. WEGEL et C. E. LANE. *Phys. Rev.*, 23 (1924), 272. Les quatre ordonnées de la fig. 33 correspondent respectivement aux fréquences 600 (axe des dbL), 1 200, 2 400, 3 600.

4° Pour tous les points de la zone marquée m , on entend une masse sonore contenant p , q , les différentiels $2p - q$, $2q + q$ l'additionnel $p + q$, etc. .

5° Enfin pour les points des deux zones hachurées on entend des roulements et même des battements de basse fréquence. Chose au premier abord surprenante, on entend ces battements alors que l'intervalle entre q et p (ou $2p$) atteint et dépasse le demi-ton.

128. Influence des harmoniques sur la hauteur apparente.

— Voici une curieuse conséquence de l'audition des sons différentiels : On produit avec un piano ou un tuyau d'orgue une note riche en harmoniques, de fréquence fondamentale N ; cette note parvient à l'oreille après avoir traversé un filtre passe haut, arrêtant les fréquences inférieures à $3,5 N$; le timbre est profondément changé, il devient métallique ; mais la hauteur apparente ne semble pas modifiée : en effet, le filtre a eu beau supprimer les fréquences N , $2N$, $3N$, l'oreille reconstitue le fondamental comme différentiel des sons $5N$ et $4N$, ou bien $6N$ et $5N$; de même l'harmonique 2 réapparaît comme différentiel des harmoniques $6N$ et $4N$, etc... Naturellement l'intensité de ces différentiels est bien plus faible que celle des sons de même hauteur dans la note primitive ; d'où le changement de timbre.

129. Audition binaurculaire. — A la simple audition, nous reconnaissons la direction par où un bruit nous parvient. De cette faculté, il a été donné plusieurs explications qui vraisemblablement contiennent chacune une part de vérité :

1° Pour les sons de fréquence supérieure à 750, il semble bien que le rôle essentiel soit joué par la différence des intensités que perçoit chaque oreille, du fait que la tête fait ombre sur l'oreille opposée au bruit.

2° Pour les sons de fréquence inférieure à 750, la sensa-

tion de direction tient principalement à ce qu'une oreille est impressionnée avant l'autre. Prenons par exemple un tube de caoutchouc à gaz dont les deux extrémités D et G aboutissent respectivement à l'oreille droite et à l'oreille gauche, et frappons dessus à petits coups avec le bord d'un couteau à papier ; nous accusons le bruit à gauche ou à droite suivant qu'on a frappé plus près de G ou de D ; le « son de milieu » est observé quand on frappe *très près* du milieu du tube, à moins de 1 cm par exemple. Cela revient à dire que le cerveau reconnaît une différence de marche de 1 cm correspondant à une différence de temps de 1 : 30 000 de seconde¹.

Or la distance des deux oreilles est d'environ 18 cm ; par suite, nous plaçons l'origine du son à droite ou à gauche dès que la source fait un angle de $3^\circ = 1 : 18$ avec le plan de symétrie de la tête : telle est la précision avec laquelle l'oreille *nue* apprécie la direction d'un son. Mais on peut monter aux deux extrémités d'une barre assez longue, 3 m par exemple, deux écouteurs reliés chacun à une oreille ; une différence de marche de 1 cm correspond alors à un angle de $1 : 300 = 10'$. Par suite, quand on a avec un tel appareil l'impression de son de milieu, c'est que son axe est dirigé vers la source sonore à $10'$ près. La défense contre-avions utilise des appareils fondés sur ce principe, qui a trouvé dans les mains de J. Perrin d'autres applications militaires, par exemple le repérage des travaux de mine, la détermination du gisement des sous-marins, etc.

1. Quand on a des sons continus, on ne peut plus parler de différence de temps, mais bien de différence de phase. Rayleigh a effectivement montré que lorsqu'on fait arriver aux deux oreilles par deux tubes les sons de deux diapasons différents réglés de façon à avoir à peu près la même fréquence n , on a l'impression d'un son unique, accusé à droite ou à gauche suivant le signe de la différence de phase et donnant l'impression de venir du milieu lorsque la différence de phase, évaluée en temps ($t = \frac{\phi}{2\pi n}$), est précisément de 1 : 30 000 de seconde.

CHAPITRE XI

MESURES ACOUSTIQUES

130. Généralités. — Considérons d'abord une onde sinusoïdale se propageant avec la célérité a dans un milieu élastique de masse spécifique ρ . Admettons qu'en un point M on puisse considérer cette onde comme plane. Le mouvement d'une particule du milieu entourant le point M obéissant à la loi $x = X \sin 2\pi Nt$, on sait que la vitesse de cette particule et la pression acoustique ont respectivement pour amplitudes $U_0 = 2\pi NX$ et $\sigma_0 = 2\pi NX \cdot \rho a$. Si donc on connaît la fréquence, il suffira de déterminer l'une des quantités X_0 , U_0 ou σ_0 pour avoir la valeur des deux autres.

Lorsqu'on a affaire à une onde plane périodique non sinusoïdale, il devient nécessaire de déterminer la *forme* de la vibration en M, c'est-à-dire la courbe représentant le déplacement x en fonction du temps ; si on connaît déjà la fréquence et le déplacement maximum, on possède alors tous les éléments nécessaires pour calculer la vitesse, la pression acoustique instantanée, l'énergie sonore, etc. ; mais il faut pour cela effectuer préalablement une décomposition de la vibration en série de Fourier.

MESURE DES FRÉQUENCES

131. Étalons primaires de fréquence. — Pour déterminer la fréquence d'un système vibrant on la compare géné-

ralement à celle d'un étalon de fréquence ; pendule d'une horloge garde-temps, pour les fréquences de l'ordre de la seconde¹ ; diapasons à vibrations naturelles ou entretenues, dans l'intervalle de fréquences 25 — 2 000 ; tiges de quartz entretenues piézoélectriquement en vibrations longitudinales pour les fréquences ultrasonores supérieures à 20 000.

132. Étalons secondaires de fréquence. — Pour beaucoup d'expériences, il est nécessaire d'avoir des étalons secondaires, dont la fréquence est réglable de façon continue dans certaines limites, mais qui, corrélativement, ne peuvent être utilisés qu'après étalonnement préalable et surtout moyennant vérifications fréquentes. Je les désignerai sous le nom générique de *tonomètres*. Les principaux sont :

1° Les diapasons à masses additionnelles, réglables au repos seulement.

2° La sirène.

3° Les cordes métalliques entretenues par un dispositif dérivant du trembleur des sonneries électriques.

On règle la tension — et par suite la période — de ces cordes pendant la marche au moyen d'une vis. On peut ainsi avoir, dans une même corde, un intervalle de fréquence allant par exemple de 100 à 300.

4° Les circuits oscillants électriques, excités par triodes². Bien construits et correctement employés, ces cir-

1. Les grands réseaux de distribution électrique fournissent l'énergie sous forme de courants polyphasés dont la fréquence nominale est de l'ordre de 50 et dont la fréquence réelle est maintenue constante avec une précision qui, dans la région parisienne, dépasse le 1 : 200. Par suite si on monte sur un tel réseau un moteur synchrone à $2p$ pôles sur l'axe duquel est fixée une roue à n bras, la fréquence de passage des bras est égale à $50 n : p$ avec une précision égale à celle avec laquelle la fréquence du secteur est maintenue à sa valeur nominale.

2. Voir C. GUTTON, *Télégraphie et téléphonie sans fil* (Coll. A. Collin).

cuits fournissent des courants périodiques dont la fréquence peut être au cours d'un essai maintenue constante avec une précision dépassant nettement le millième. D'autre part, le réglage de la période se réalise par variation de la capacité ou de l'inductance du circuit ; il peut donc être effectué en marche et dans de très larges limites de fréquence. Si on envoie ces courants dans un haut parleur convenable, on réalise des sources sonores très employées dans la technique acoustique actuelle (Cf. § 118).

133. Méthodes générales de mesure des fréquences. — Soit à déterminer la fréquence N d'un système vibrant S par comparaison avec celle n (supposée exactement connue) d'un étalon de fréquence E .

1° Dans certains cas, on peut effectuer l'inscription simultanée des vibrations de S et de E ; ou tout au moins enregistrer les instants où chacun de ces systèmes prend dans sa période un état défini. La détermination de la fréquence de S est alors une simple affaire de dénombrement.

2° Le lecteur connaît également la méthode stroboscopique¹, applicable toutes les fois que l'étalon de fréquence peut, à chaque période, produire un éclair lumineux. Si l'étalon E a même fréquence que le système S , ce dernier, toujours au même instant de sa période, paraît immobile. Si au contraire la fréquence n de E est inférieure à celle N de S , celui-ci paraît vibrer avec une amplitude égale à l'amplitude réelle et avec une fréquence ν égale à $N - n$. D'où N si, connaissant déjà n , on détermine ν . Cette détermination de la différence des fréquences n'est d'ailleurs précise que si la différence est très faible (de l'ordre de 2 s^{-1} au maximum) ; si ν est

1. Voir J. RAIBAUD, *Appareils et méthodes de mesures mécaniques* (Coll. A. Colin) (p. 88) ; je signalerai l'intéressant article de Z. CARRIÈRE, *Revue d'Acoustique* (1932), p. 26.

plus grand, le comptage exact des vibrations apparentes pendant un temps suffisant pour que la mesure puisse prétendre à être précise devient vite extrêmement difficile.

Remarque. — La stroboscopie est également possible lorsque la fréquence à mesurer N est voisine d'un multiple ou d'un sous-multiple entier de la fréquence n de l'étalon ; il y a lieu alors de connaître le rang de ce multiple, ce qui n'est pas toujours facile.

134. Comparaison acoustique de deux fréquences. — Je signalerai tout d'abord qu'une « oreille » exercée peut apprécier, avec une précision voisine de 2 p. 100, si deux sons produits successivement sont à l'unisson (fréquences égales), à la quinte juste (fréquence dans le rapport de 3 à 2) et même à la tierce juste (fréquences dans le rapport de 5 à 4).

Si donc on dispose d'un tonomètre, il suffit de le mettre à l'unisson du son étudié pour avoir la hauteur de ce dernier.

135. Emploi des battements. — La mise à l'unisson devient particulièrement commode et précise quand le son étudié et le son du tonomètre pourront être soutenus pendant un temps assez long : si leurs fréquences sont voisines, il se produit des battements ; en agissant sur la fréquence du son de référence, on peut espacer les battements de plus en plus : lorsqu'ils disparaissent c'est que l'égalité des fréquences est réalisée. Il n'est d'ailleurs pas besoin d'aller jusqu'à la disparition complète : il suffit de mesurer leur fréquence ν , supposée assez faible ; elle est égale à la différence des fréquences des deux sons à comparer. Comme on perçoit encore des battements dont la période dépasse 3 sec., la fréquence étudiée peut être comme à un tiers d'unité près (en admettant naturellement que la fréquence du tonomètre est connue exactement).

MESURE DES VITESSES VIBRATOIRES

136. Détermination directe. — Je signalerai d'abord le très remarquable procédé de Z. Carrière¹ qui met en suspension dans l'air d'un tuyau à parois de verres, de fines poussières de carbonate de magnésium ou de sulfate de baryum. Sous un éclairage suffisamment intense, ces poussières s'illuminent ; si on fait parler le tuyau, la trajectoire de chacune apparaît comme un bâtonnet parallèle à l'axe du tuyau et dont la demi-longueur est égale à l'amplitude de la vibration de la poussière. D'où la mesure de l'amplitude de l'air environnant ; moyennant l'hypothèse toute naturelle que chaque poussière suit exactement le mouvement de l'air qui l'entoure.

Détermination de la vitesse vibratoire : Disque de Rayleigh. — Un disque léger, parfaitement mobile autour d'un axe vertical, est placé dans un courant gazeux alternatif. L'expérience montre que :

1° Le disque tend à s'orienter normalement au courant.

2° Si on le maintient dans une position telle que la normale à son plan fasse un angle θ avec la direction du courant, le disque est soumis à un couple C qui dépend évidemment du rayon R du disque, de l'amplitude V de la vitesse vibratoire, de la masse spécifique ρ de l'air, et de l'angle θ . Admettons — ce que confirme l'expérience — que le couple ne dépend pas de la fréquence n ; nous pouvons alors écrire l'égalité

$$C = f(R, V, \rho, \theta) = \Sigma AR^x V^y \rho^z \theta^u$$

dont tous les termes doivent avoir les dimensions d'un travail, ce qui exige que

$$C = \rho V^2 R^3 f(\theta).$$

1. *Journ. Phys.* (1929), p. 198.

Par symétrie le couple et par suite la fonction $f(\theta)$ s'annulent par $\theta = 0$ et $\theta = \pi : 2$; on retrouve par ces considérations élémentaires (H. Bouasse) l'essentiel du résultat

$$C = \frac{2}{3} \rho V^2 R^3 \sin 2\theta$$

calculé par W. König et vérifié très simplement par Zernow. Celui-ci monte à l'extrémité d'un diapason une petite boîte : l'air contenu dans cette dernière suit les oscillations du diapason et possède ainsi par rapport à un disque de Rayleigh fixe un mouvement alternatif dont l'amplitude et par suite la vitesse sont connues.

137. Appareils à fil chaud. — Si on place dans un courant d'air vibratoire une grille de platine (5μ environ) traversée par un courant qui la porte au rouge sombre, cette grille se refroidit. Du refroidissement — mesuré par la variation corrélative de résistance électrique — se déduit la vitesse de l'air. L'appareil (qu'on étalonne en montant la grille à l'extrémité d'un diapason effectuant des vibrations de fréquence et d'amplitude connues) — convient surtout pour les sons de fréquences inférieures à 50.

138. Remarque. — Les deux appareils précédents exigent pour leur fonctionnement des intensités acoustiques relativement importantes. Quand l'intensité à mesurer est faible, il est nécessaire de monter le disque ou le fil chaud à la gorge d'un résonateur convenable ; on peut ainsi obtenir des amplifications de vitesse calculables de l'ordre de 100.

MESURE DES PRESSIONS ACOUSTIQUES

139. En règle générale, les pressions acoustiques n'ont guère pu être déterminées qu'à l'intérieur des tuyaux so-

nores, ou des résonateurs ; les pressions acoustiques efficaces des sons se propageant à l'air libre sont en effet de l'ordre de la barye, elles se trouvent par suite à la limite de sensibilité des micromanomètres, dont les meilleurs ne mesurent fidèlement qu'à un centième de millimètre d'eau près. Les principales méthodes utilisées appartiennent à trois classes.

140. Méthode interférentielle. — Si un faisceau lumineux parcourt dans un milieu d'indice n un espace de longueur e , la quantité ne constitue ce qu'on appelle la *longueur optique* du chemin géométrique ; cette longueur optique peut être déterminée, comme on sait, au moyen d'*interféromètres* divers. Mais l'indice n d'un gaz est lié à sa masse spécifique ρ par la relation $(n - 1)\rho = \text{Constante}$; d'autre part, dans une transformation adiabatique, la densité ρ du gaz et sa pression p sont liées par la relation $p : \rho^\gamma = \text{Constante}$; par suite à une variation adiabatique dp de pression correspond une variation d'indice

$$dn = \frac{(n-1)}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

et sur le parcours e une variation de la longueur optique égale à $\frac{(n-1)e}{\gamma} \frac{dp}{p}$.

Généralement, cette longueur optique s'évalue en longueurs d'onde λ de la lumière utilisée supposée monochromatique, les interféromètres usuels mettant en évidence une variation de longueur optique de l'ordre de $0,1\lambda$.

Or, soit par exemple un tuyau plein d'air à la pression atmosphérique ($n = 1,0003$, $\gamma = 1,41$), à parois de verre et dont la section est un carré de 50 mm de côté. Si la pression à l'intérieur du tuyau diminue de 1 cm de mercure, la longueur optique du trajet qu'effectue dans le tuyau un rayon perpendiculaire à deux parois opposées diminue de un quart de longueur d'onde pour une lumière de $\lambda = 0^s,56$; en d'autres termes, on peut mettre en évidence des pressions acoustiques dont l'amplitude atteint 2 mm de mercure, soit 20 000 baryes.

141. Méthode stroboscopique. — Les micromanomètres usuels ont une inertie telle, que soumis directement à une onde sonore ils sont incapables de suivre les variations de la pression acoustique : ils n'indiquent jamais que la valeur moyenne, soit pratiquement une surpression nulle. Mais relions le manomètre à une prise de pression pratiquée dans la paroi d'un tuyau par un tube portant sur son parcours un robinet tournant, qui établit la communication du tuyau avec le manomètre pendant une faible fraction du tour.

Faisons résonner le tuyau ; si la période de celui-ci est égale à celle du robinet (ou à un multiple de cette dernière) la communication sera établie toujours au même instant de la période et l'air s'accumulera dans le manomètre sous une pression égale à celle régnant dans le tuyau à cet instant.

Le dispositif précédent est susceptible de diverses variantes (Raps, Carrière).

142. Emploi de diaphragmes. — Sous l'action d'une onde sonore sinusoïdale, une plaque élastique effectue des vibrations forcées dont l'amplitude dépend d'une part de la pression acoustique maxima et d'autre part de la fréquence n de l'onde. L'amplitude du mouvement de la plaque est généralement très faible, au point de ne pouvoir être mesurée même avec un levier optique ; aussi cherche-t-on à l'augmenter dans le phonomètre de Wien (fig. 34) d'une part en constituant avec la plaque le fond d'un résonateur accordé sur la fréquence n , d'autre part, en choisissant cette plaque de façon que sa période naturelle soit très voisine de celle de l'onde. On réalise ainsi des amplifications de l'ordre



Fig. 34.

de 1 000 très intéressantes ; malheureusement le facteur d'amplification n'est jamais bien connu, ce qui interdit l'emploi de l'appareil dans les mesures absolues précises.

La méthode de compensation de Gerlach évite la difficulté précédente : La plaque soumise à l'action d'une onde plane se propageant normalement au tableau est une mince feuille d'aluminium tendue dans un champ magnétique parallèle à sa largeur. Elle porte deux bornes A et B par lesquelles on peut faire arriver un courant alternatif de fréquence et d'intensité réglables ; la règle d'Ampère montre que sur la feuille s'exerce normalement au tableau une force électromagnétique périodique dont on fait varier l'intensité et la fréquence de façon à compenser exactement les effets de pression acoustique. Cette compensation est réalisée quand la bande reste au repos, ce que l'on reconnaît au moyen d'un petit microphone placé sous la bande, presque au contact de cette dernière, et qui se tait seulement lorsque le diaphragme reste immobile.

Pour un son complexe, il serait évidemment nécessaire d'effectuer la compensation pour chaque harmonique.

FORME DES VIBRATIONS ACOUSTIQUES

143. *Inscription graphique.* — Nous verrons (§ 145) que, lorsqu'une pression acoustique s'exerce sur un diaphragme convenable, les déplacements du centre de ce dernier traduisent les variations de la pression : sans doute (§ 35) les sons dont la fréquence est voisine de la fréquence naturelle du diaphragme donnent lieu à déplacements amplifiés et de ce fait, l'inscription des mouvements du centre ne doit pas être acceptée sans correction. Toutefois, un choix convenable du diaphragme peut rendre cette correction relativement faible pour les premiers harmoniques, en général les plus importants ; pour les harmoniques

plus élevés dont l'amplitude est ordinairement faible, un calcul approximatif de la correction suffit dans la presque totalité des cas.

Le problème se pose donc d'inscrire les déplacements du centre du diaphragme : le sillon tracé sur un disque phonographique réalise précisément une telle inscription : La meilleure preuve que cet enregistrement est fidèle se trouve dans le fait que le phonographe est réversible, c'est-à-dire qu'il suffit d'obliger le stylet à suivre un sillon déjà tracé pour obtenir une reproduction souvent remarquable des sons primitifs. Au lieu d'actionner un stylet réalisant l'inscription mécanique, le diaphragme peut provoquer la rotation d'un miroir, sur lequel se réfléchit un rayon lumineux qui permet l'enregistrement photographique. C'est ainsi que dans le *phonodéik* de Raman et Day, le diaphragme porte une tige CC' qui frotte sans glisser sur une aiguille A normale tournant autour de son axe, et qui provoque ainsi la rotation d'un miroir M au dos duquel l'aiguille est collée ; on voit aisément que si $2r$ est le diamètre de l'aiguille, un déplacement e du diaphragme provoque une rotation $\alpha = 2e : r$ du rayon lumineux réfléchi ; par exemple si $r = 0,25$ mm, un déplacement de 1 micron pour le centre du diaphragme dévie de 8 mm le tracé du rayon réfléchi sur un écran à 1 mm du miroir¹.

1. Des dispositifs de même principe sont utilisés pour étudier les inscriptions d'un phonogramme.

CHAPITRE XII

INSCRIPTEURS, MICROPHONES ET ÉMETTEURS

144. **Généralités.** — Les appareils dont il est question dans ce chapitre réalisent la transformation de l'énergie sonore en énergie mécanique (phonographe) ou en énergie électrique (microphones). A l'exception près du microphone à graphite, ils peuvent également réaliser la transformation inverse, et fonctionner alors comme émetteurs de sons, appelés suivant les cas *écouteurs* ou *haut-parleurs*. Leur partie essentielle est un diaphragme pouvant prendre un mouvement analogue à celui d'un piston rigide qui se déplace en bloc normalement à son axe.

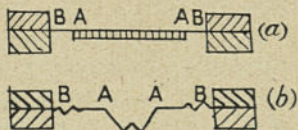


Fig. 35.

Pour cela la partie centrale AA du diaphragme est rendue rigide, soit par surépaisseur (fig. 35 a), soit par nervures (fig. 35 b) ; et elle est fixée à la monture par l'intermédiaire d'une collerette AB, constituée par une plaque mince flexible, dont la souplesse est souvent augmentée par des ondulations périphériques au voisinage de la région d'encastrement (fig. 35 b).

145. **Action d'une onde sonore sur un diaphragme.** — Supposons une onde progressive $X = X_0 \sin \omega \left(t + \frac{x}{a} \right)$ pro-

pagée par un milieu d'élasticité $E = a^2 \rho$ arrivant normalement sur un diaphragme D de surface S , de masse m placé à l'origine des coordonnées. L'onde exerce sur le diaphragme une force périodique $\varpi S = Sa\omega\rho X_0 \cos \omega t$ (§ 71). Le déplacement du diaphragme obéit donc à la loi

$$mx'' + fx' + kx = Sa\omega\rho X_0 \cos \omega t,$$

f étant un terme qui représente l'ensemble des absorptions d'énergie dont le diaphragme est le siège ; parmi ces absorptions figure essentiellement celle qui constitue la raison d'être du diaphragme, savoir la transformation de l'énergie acoustique incidente en énergie mécanique, laquelle se traduit (§ 73) par la présence dans f d'un terme de la forme $A\rho\omega^2 S^2 : a$ qui se justifie d'ailleurs par de simples considérations d'homogénéité. Négligeons les frottements internes du diaphragme, l'équation précédente devient

$$mx'' + A \frac{\rho\omega^2 S^2}{a} x' + kx = a\omega\rho X_0 S \cos \omega t = S\varpi_m \cos \omega t.$$

Par conséquent : 1° un diaphragme relativement rigide (k grand vis-à-vis de m) et relativement peu amorti, c'est-à-dire empruntant assez peu de puissance au milieu ambiant, suit fidèlement en amplitude et en phase les variations de pression : il constitue donc un excellent *récepteur de pression*.

2° Un diaphragme très souple et très léger, par exemple une membrane, prend un mouvement dont l'amplitude vaut $\frac{a^2 X_0}{\omega AS}$ et dont par suite la vitesse est proportionnelle au déplacement X_0 existant dans l'ébranlement incident. Si donc le diaphragme entraîne dans ses mouvements une bobine placée dans un champ magnétique fixe, il se développera dans la bobine une

f. é. m. induite proportionnelle au déplacement ; on aura réalisé un excellent *récepteur de mouvement*¹.

146. **Création d'une onde par un diaphragme.** — Supposons maintenant un diaphragme D constituant l'un des fonds d'une boîte circulaire plate rigide (fig. 36). L'autre est percé d'un trou sur lequel est monté un tube AB s'élargissant en pavillon. Si on impose au diaphragme un mouvement vibratoire, l'air contenu dans la boîte subit des variations de pression proportionnelles aux déplacements du diaphragme ; par suite une onde de pression prend naissance en A, se propage dans le tube AB et, arrivée en B, se répand librement dans l'atmosphère ; en d'autres termes les variations de pression en B suivent, à un retard près, les déplacements du diaphragme D. Mais imaginons que, grâce à des liaisons convenables, les déplacements de D reproduisent fidèlement les déplacements qu'un diaphragme Δ , *du type récepteur de pression*, prend sous l'action d'une pression vibratoire σ . Nous nous trouverons avoir reproduit au débouché B du pavillon l'état vibratoire existant en Δ , nous répéterons en B les sons émis en Δ .



Fig. 36.

1. En fait, un même diaphragme peut, suivant le milieu où il est plongé, appartenir à l'un ou à l'autre des types précédents. Imaginons par exemple un diaphragme constitué par une plaque de tôle de 1 mm d'épaisseur bouchant un trou circulaire de 1 m de diamètre percé dans une paroi inébranlable. Une onde de fréquence 1 000 et d'amplitude 1 : 10 de mm exerce une pression de 2g : cm² quand elle est transmise par l'air et de 8 kg : cm² quand elle est transmise par l'eau. Il est évident que le diaphragme précédent se comportera comme une plaque à grande rigidité vis-à-vis de l'onde aérienne, et comme une membrane plutôt flexible vis-à-vis de l'ébranlement sous-marin. La distinction entre les appareils sensibles à la pression et les dispositifs décelant la vitesse n'est donc pas absolue : elle permet cependant une classification utile.

Le problème se pose donc d'obliger D à répéter exactement les mouvements de Δ : il est résolu par voie électrique dans la téléphonie, qui réalise la transmission des mouvements à distance ; il l'est par voie mécanique dans le phonographe, qui réalise la transmission dans le temps, la mise en conserve du son.

147. Phonographe. — *Principe de l'enregistrement et de la reproduction.* — Dans le phonographe, en effet,

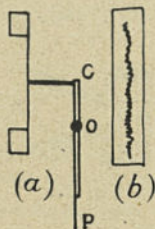


Fig. 37.

l'énergie des déplacements forcés du diaphragme Δ est utilisée à graver dans un corps pas trop dur¹ la courbe représentant, en fonction du temps, les déplacements de la région centrale du diaphragme. Pour cela le centre de ce dernier est relié à l'extrémité C d'un stylet CP, pivoté en O. Si on meut une plaque de cire D, normalement au tableau, devant la pointe du stylet, cette pointe inscrit sur la plaque les déplacements

du diaphragme sous forme d'un sillon sinueux de largeur et de profondeur sensiblement uniformes (fig. 37).

Supposons maintenant que, l'enregistrement terminé, on durcisse la surface de la plaque, de façon qu'elle ne puisse plus être entamée par la pointe. Obligeons cette dernière à suivre à nouveau le sillon déjà tracé ; le diaphragme prend, sous l'action du stylet, par rapport à sa monture précisément les mêmes déplacements que ceux qu'il effectuait lors de l'enregistrement, sous l'action de la pression sonore. Le mouvement de l'air se trouve donc exactement reproduit au voisinage du diaphragme, lequel agit comme source sonore.

1. Généralement une « cire », mélange d'acides gras et de paraffine porté à la température de ramollissement.

b) *Réalisation.* — En fait, pour la commodité de l'enregistrement, la plaque de cire est un disque circulaire animé autour de son axe d'un mouvement de rotation uniforme; d'autre part pendant l'inscription une vis sans fin imprime au diaphragme et au stylet un mouvement radial vers le centre du disque. L'enregistrement se présente ainsi sous forme d'une ligne sinueuse enroulée en une spirale¹.

La cire originale pourrait — au prix, il est vrai, d'une usure assez rapide — être utilisée directement sur les appareils reproducteurs du son; pour l'édition phonographique, on en tire par galvanoplastie des contretypes en fer, dans lesquels on obtient les disques bien connus² par moulage à chaud à la presse hydraulique.

c) *Reproduction.* — L'appareil reproducteur est tout à fait analogue au système enregistreur: toutefois le bout tranchant du stylet est remplacé par une *aiguille* mousse, aisément remplaçable; le diaphragme est monté à l'extrémité d'un *bras* creux, lequel pivote librement (autour d'un axe vertical parallèle au diaphragme) à l'entrée d'un *pavillon* progressivement évasé. Dans ces conditions, il n'est besoin, comme on sait, d'aucun mécanisme pour que le bras porte-diaphragme suive le sillon, tandis que l'aiguille effectue les déplacements transversaux exigés pour la reproduction des sons.

148. Microphones et émetteurs sonores. — Les microphones réalisent la transformation de l'énergie sonore en

1. Cette spirale comporte dans les disques de 30 cm de diamètre environ 300 spires, dont le pas est voisin de trois dixièmes de mm. Pour une vitesse de rotation de 78 t : mn cela correspond à une longueur d'inscription voisine de 200 m, à une durée d'enregistrement de 4 minutes.

2. La matière de ces disques est une composition à base de gomme-laque fortement chargée en émeri très fin; cette composition, — pâteuse à chaud, ce qui permet un moulage rapide — est à froid extrêmement dure: elle use en quelques minutes de fonctionnement la pointe d'une aiguille d'acier.

énergie électrique ; plus précisément les déplacements d'un diaphragme sont utilisés à *moduler* un courant électrique (généralement fourni par une source d'énergie extérieure), c'est-à-dire à imprimer à ce courant des variations d'intensité proportionnelles aux déplacements eux-mêmes. Il n'y a donc aucune relation nécessaire entre l'énergie vibratoire du diaphragme et la puissance fournie par le microphone.

a) *Microphone à graphite*. — Ces appareils, trop connus pour qu'il soit utile de les décrire ici¹, ne peuvent effectuer la transformation inverse, c'est-à-dire restituer un son à partir d'un courant modulé. Aussi est-il nécessaire de les *combiner* avec un écouteur convenable. Lorsqu'on ne désire pas une reproduction sonore de haute qualité, ces écouteurs peuvent être du type électromagnétique² vulgarisé par les écouteurs téléphoniques courants et les haut-parleurs bon marché de T. S. F.

b) *Microphones électrodynamiques*. — Dans ces appareils, la partie centrale du diaphragme est solidaire d'une bobine B coaxiale et placée dans le champ radial d'un électroaimant. Les déplacements du diaphragme entraînent la bobine où il naît des courants induits dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse de B. Convenablement construits, ces appareils présentent une sensibilité³ pratiquement constante entre 15 et 10 000 périodes par seconde. D'autre part, ils sont réversibles, c'est-à-dire que si on alimente la bobine au moyen d'un courant déjà modulé par un microphone, ils reproduisent les sons émis devant ce dernier. Les bons « haut-parleurs » équipant les postes récepteurs radiophoniques utilisent ce principe.

1. Voir P. SÈVE, *Courants alternatifs* (Coll. A. Colin), p. 48.

2. P. SÈVE, *ibid.*, p. 106.

3. Définie par le rapport de la tension efficace du courant modulé à la pression efficace dans l'ordre sonore.

c) *Microphones électrostatiques.* — Le diaphragme y est formé d'une feuille plane d'aluminium (quelques dizaines de microns d'épaisseur) constituant une armature d'un condensateur, dont la deuxième armature n'est autre que le boîtier même du microphone. Lorsqu'on produit des sons, devant le diaphragme, celui-ci se déforme, la capacité du condensateur varie, et il est possible d'utiliser cette variation de capacité à la modulation d'un courant produit dans un circuit à haute fréquence¹.

Ces appareils présentent une sensibilité suffisamment constante entre 60 et 5 000 périodes par seconde. Ils sont réversibles.

149. **Enregistrement électrique.** — Pour qu'un diaphragme réponde à peu près également à toutes les fréquences, il est indispensable que sa période propre soit nettement inférieure à celle des ondes incidentes. Sa masse par unité de surface ne pouvant descendre au-dessous d'une certaine limite, il faut que la force de rappel soit relativement élevée. Par suite, la sensibilité générale est faible et il faut des sons relativement intenses pour obtenir des déplacements appréciables du diaphragme. Le lecteur a certainement constaté le phénomène réciproque : quand on joue de la musique d'orchestre sur un phonographe mécanique, les *pianissimos* disparaissent à peu près complètement.

Aussi développe-t-on de plus en plus les enregistrements dits électriques : l'onde sonore agissant sur le diaphragme d'un microphone² module un courant. Cette modulation peut être très faible, mais cela est sans importance pour le résultat final, car on amplifie le courant au

1. Voir par exemple C. GUTTON, *Télégraphie et téléphonie sans fil* (Coll. A. Collin).

2. En général, un microphone à condensateur (E. C. Wente, H. Rugger).

moyen de tubes électroniques, dans des proportions suffisantes pour qu'il soit possible d'enregistrer ses variations, sans distorsion exagérée, au moyen d'oscillographes appropriés¹.

Je crois d'autre part inutile de rappeler au lecteur que les bons disques de phonographes sont, à l'heure actuelle, toujours enregistrés électriquement : le courant émis par un microphone arrive, après avoir été suffisamment amplifié, dans un électroaimant polarisé. La palette de ce dernier actionne avec puissance le stylet, qui est ainsi capable d'inscrire sur la cire toutes les finesses du son initial ; réciproquement, pour entendre toutes ces finesses, il ne faut pas procéder à la transformation directe en son de l'énergie commandée par les déplacements latéraux de l'aiguille dans le sillon enregistré ; il est préférable d'utiliser ces déplacements à moduler des courants microphoniques, qui, après amplifications, sont envoyés dans un haut-parleur puissant : c'est ce qui est réalisé dans les *pick-up*.

150. Microphones piézoélectriques. — Principe. —

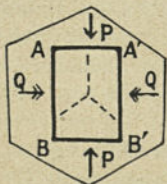


Fig. 38.

P. Curie a découvert en 1882 que certains cristaux méridiens (quartz, tourmaline, etc.) s'électrisent lorsqu'ils sont soumis à une pression de direction convenable. Par exemple (fig. 38) dans un cristal de quartz d'axe ternaire perpendiculaire au tableau, découpons un prisme droit $AA'B'B$ ayant deux faces (projetées en $AABB$)

normales à l'axe ternaire et dont les deux bases projetées respectivement en AA' et BB' sont normales à un axe bi-

1. Pour donner une idée de la sensibilité réalisable, je dirai que Trendelenburg a pu inscrire des sons aussi faibles que les bruits du cœur ou les souffles respiratoires.

naire. Appliquons entre les faces AA' et BB' (donc parallèlement à l'axe binaire) une pression uniforme PP. Il apparaît sur les mêmes faces des quantités d'électricité égales et de signes contraires proportionnelles à cette pression ; en d'autres termes, on a créé entre AA' et BB' une différence de potentiel qui dépend de la force appliquée par unité de surface et qui change de sens si la compression devient une traction¹. Or ce phénomène est réversible. Entre les faces AA' et BB', métallisées au préalable, appliquons une différence de potentiel correspondant à un champ dirigé de A vers B ; la dimension AB s'allonge².

On peut mettre cet allongement en évidence par des procédés interférentiels, par exemple.

Réalisation. — Plaçons le cristal, la face métallisée BB' contre un support rigide S, la face métallisée AA' contre un diaphragme Δ . Si on parle devant le diaphragme, les pressions acoustiques provoquent des différences de potentiel ondulatoires qui, convenablement amplifiées, pourront actionner un écouteur ou bien un haut-parleur ; réciproquement si on applique entre S et Δ une différence de potentiel de fréquence N, le diaphragme effectuera des mouvements vibratoires de même fréquence ; il fonctionnera donc comme émetteur d'ondes acoustiques s'il est placé dans un milieu élastique.

151. Application à la production des ultra-sons (Langevin). — En général l'amplitude des vibrations forcées d'un diaphragme solidaire d'un quartz piézoélectrique est excessivement faible ; mais si la fréquence N coïncide avec la

1. Sous l'action d'une pression uniforme QQ appliquée entre les faces AB et A'B' (donc perpendiculairement à l'axe binaire), l'électricité apparaît encore sous les faces AA' et BB' ; le phénomène général est encore plus complexe.

2. On remarquera que, si une *pression* provoque un champ électrique dirigé de A vers B, un champ électrique dirigé de A vers B produit dans le cristal le même effet qu'une *traction*.

fréquence naturelle que possède le cristal vibrant longitudinalement suivant l'épaisseur AB, les mouvements du diaphragme prennent par résonance une amplitude suffisante pour transmettre au milieu élastique ambiant une puissance considérable :

Par exemple, on peut constituer un émetteur d'ultrasons, avec une plaque de quartz¹ de 10 cm de diamètre¹ et de 5 cm d'épaisseur¹. Considérant la plaque comme une verge de 5 cm libre aux deux extrémités et vibrant longitudinalement, la fréquence naturelle est de

$$\frac{a}{2l} = 5,5 \times 10^5 : 2 \times 0,5 = 55\,000.$$

Pour envoyer dans l'eau une onde plane dont la puissance atteindrait 1 kw soit $1,27 \times 10^8$ erg : cm² s, il suffit que l'amplitude du déplacement des extrémités dépasse (§ 72) 2,8 μ .

C'est un allongement relatif de $\frac{1}{2\,000}$ tout à fait dans la limite élastique du cristal.

1. Les cristaux de cette dimension étant exceptionnellement rares, la plaque est en réalité une mosaïque de petites lames de 2 à 5 mm d'épaisseur serrées entre deux plaques d'acier de 3 cm d'épaisseur qui constituent les véritables surfaces émettrices. Pour la théorie détaillée d'un tel émetteur, le lecteur pourra se reporter à LANGEVIN, *Bulletin de la Soc. des Ing. civils* (1928). L'exposé du texte suffit quant au principe.

CHAPITRE XIII

PRODUCTION THERMIQUE DES SONS

152. Pour transformer l'énergie thermique en énergie sonore, il existe plusieurs procédés qui peuvent être rangés en deux classes.

Dans l'une un apport périodique d'énergie thermique se fait, avec une fréquence qui est imposée par une source de puissance extérieure et qui peut avoir une valeur quelconque, dans certaines limites tout au moins. On a alors une véritable vibration forcée : il en est ainsi pour le thermophone, l'arc chantant, etc...

Dans la deuxième classe au contraire, l'énergie thermique est en quelque sorte fournie en vrac par une source à laquelle le système vibrant vient, au cours de chaque période, au moment convenable, emprunter la chaleur qui assure l'entretien de l'oscillation. On a alors une oscillation autoentretenu thermiquement ; c'est le cas par exemple rencontré dans le vibreur de Trevelyan, l'harmonica thermique, etc...

VIBRATIONS THERMIQUES FORCÉES

153. **Thermophone.** — Le thermophone est constitué par une lame d'or ou de platine de quelques microns d'épaisseur, enfermée dans une cavité de petit volume.

Cette lame est parcourue par un courant périodique obtenu en superposant à un courant continu d'intensité I_0 , assez grande (de l'ordre de 0,5 amp) un faible courant alternatif (de l'ordre du milliampère) $I \cos \omega t$; à tout instant, la puissance dépensée par effet Joule dans la lame est

$$R(I_0 + I \cos \omega t)^2,$$

soit

$$RI_0[I_0 + 2I \cos \omega t]$$

en négligeant le terme en I^2 .

La chaleur ainsi dégagée engendre dans la cavité une variation de pression, laquelle, grâce à la présence du courant permanent, a la même période *que le courant alternatif*; son amplitude peut se calculer à partir des constantes électriques, du volume de la cavité, des propriétés thermiques de la lame et du gaz¹. Aussi le thermophone a-t-il été proposé et même utilisé comme étalon d'intensité acoustique.

154. Arc chantant. — Un mécanisme analogue explique les phénomènes constatés sur l'arc chantant². Un arc étant alimenté à la manière ordinaire en courant continu, on réunit ses deux charbons respectivement aux deux bornes d'un générateur A de courant alternatif : la flamme de l'arc joue un rôle analogue à la bande métallique du thermophone : sous l'action des variations du courant produit elle subit périodiquement des variations de température et de volume qui engendrent une vibration acoustique, modulée en quelque sorte par le courant de A. En particulier si A est un microphone, l'arc répète devant un auditoire les paroles ou les chants émis devant le micro.

1. E. C. WENTE, *Phys. Rev.*, 19 (1922), 333.

2. P. SÈVE, *Courants Alternatifs* (Coll. A. Colin), p. 88.

AUTO-ENTRETIEN THERMIQUE

155. Vibreur de Trevelyan. — Le vibreur (vu en coupe fig. 39) est un prisme de cuivre, bon conducteur de la chaleur. Il porte sur sa face inférieure deux arêtes A_1 et A_2 , séparées par un étroit sillon, de sorte que, lorsqu'on le pose sur une plaque horizontale, un faible changement d'inclinaison suffit à faire porter le poids sur l'une ou l'autre arête. On chauffe le prisme vers 400° , et on le porte sur une plaque horizontale de plomb (métal assez dilatable et plutôt mauvais conducteur de la chaleur) : il suffit alors d'un léger choc sur le vibreur pour que ce dernier émette un son qui se maintient tant que la température du prisme est suffisante. L'explication du phénomène est la suivante :

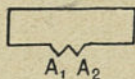


Fig. 39.

Si le poids du vibreur porte sur l'arête A_1 , il s'établit sur cette arête un contact franc entre cuivre et plomb, de sorte que la chaleur peut passer facilement du vibreur à la plaque ; mais en raison de la faible conductibilité du plomb, cette chaleur reste localisée aux parties de la plaque voisine de A_1 ; celles-ci, gênées dans leur dilatation latérale, se bombent alors verticalement, ce qui imprime au vibreur une impulsion dirigée vers le haut et appliquée sur l'arête A_1 . Mais cette impulsion a pour effet secondaire de faire porter le poids du vibreur sur l'arête A_2 ; un contact franc s'établira alors le long de cette dernière, qui, à son tour, recevra une impulsion vers le haut et ainsi de suite. D'où l'entretien de la vibration.

De ce qui précède, il résulte que la demi-période du phénomène est le temps nécessaire pour que l'arête A_1 se soulève contre la pesanteur d'une quantité h et retombe sur la plaque. Si la masse du vibreur pouvait être consi-

dérée comme concentrée sur les arêtes A_1 et A_2 , la période serait égale à $4\sqrt{2h:g}$. Je laisse au lecteur le soin d'établir la formule exacte (donnée dans l'exercice suivant). Je dirai simplement que l'expérience vérifie convenablement la constance du rapport $T^2 : hk$.

Exercice. — Montrer que la période du phénomène de Trevelyan est donnée par la formule $T = 2\sqrt{hk : a^2g}$ où a est la distance des arêtes A_1 et A_2 , h l'amplitude de leur mouvement et k le rayon de giration du vibreur par rapport à l'une des arêtes.

156. Rappel de notions sur l'écoulement des fluides¹. —

Lorsqu'un fluide s'écoule à travers un tube de diamètre D , les frottements internes provoquent tout le long du tube une *perte de charge* c'est-à-dire une diminution progressive de la pression depuis l'amont jusqu'à l'aval. L'expérience montre que, après une certaine zone d'admission, la perte de charge P existant entre deux sections distantes de l est proportionnelle à l et qu'elle

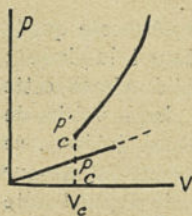


Fig. 40.

dépend de la vitesse. Appelons perte de charge linéaire le quotient $p = P : l$, on trouve (fig. 40) que si la vitesse moyenne V est inférieure à une certaine valeur critique V_c , p est proportionnel à V (régime laminaire ou régime de Poiseuille); si au contraire V est supérieur à cette vitesse critique, il peut exister deux régimes d'écoulement, un régime laminaire peu stable, ayant tendance, sous l'influence de perturbations, à laisser la place au deuxième, correspondant à un écoulement turbulent. Dans ce dernier la

perte de charge linéaire est nettement plus forte et elle croît un peu moins vite que le carré de la vitesse. Dès que la vitesse moyenne dépasse nettement la vitesse critique, le régime turbulent est le seul qu'il soit pratiquement possible d'obtenir.

Or, la valeur de la vitesse critique est donnée par la relation

1. Pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à mon *Introduction à la Mécanique des Fluides* (Coll. A. Colin), p. 114 et suivantes.

$\frac{\rho V_c D}{\mu} = 2\,400$ où ρ et μ sont respectivement la masse spécifique et le coefficient de viscosité du fluide¹.

Soit ν la viscosité cinématique du fluide, c'est-à-dire le rapport $\mu : \rho$: on voit apparaître dans la relation précédente le nombre² de Reynolds $\frac{VD}{\nu}$ dont l'importance est considérable dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. Nous aurons d'ailleurs à revenir là-dessus. On se rappellera que ν dépend de la température (croissant avec elle pour les gaz, variant en sens inverse pour les liquides).

157. Harmonica thermique. — Dans un tube vertical ($D = 4$ à 5 cm, $L = 1$ m) ouvert aux deux bouts, on place, au voisinage du quart inférieur, une source de chaleur — par exemple une toile métallique chauffée électriquement par un courant continu — : on constitue ainsi une véritable cheminée qui *tire*, c'est-à-dire qui est parcourue par un courant d'air ascendant, dès qu'est suffisante la différence des densités moyennes ρ_0 de l'air extérieur froid et ρ de l'air intérieur chaud. La *dépression* $L(\rho_0 - \rho)g$ qui produit le tirage est employée : 1° à mettre en vitesse l'air, ce qui exige une différence de pression égale à $\frac{1}{2}\rho V^2$. 2° à surmonter la perte de charge pL le long du tube. Soient p_c et p'_c les pertes de charge linéaires à la vitesse critique respectivement en régime laminaire et en régime turbulent, admettons que l'on ait

$$p_c < (\rho_0 - \rho)g - \frac{1}{2L}\rho V_c^2 < p'_c.$$

Si la vitesse a d'abord la valeur V légèrement inférieure à la vitesse critique, la dépression $L(\rho_0 - \rho)g$ est plus forte que celle $\frac{1}{2}\rho V^2 + p_c L$ strictement nécessaire

1. Au lieu de la vitesse critique, on introduit parfois le débit critique Q_c évidemment égal à $600 \pi D \nu$.

2. Cette expression est effectivement sans dimensions.

pour assurer le tirage, l'air intérieur est donc accéléré ; sa vitesse franchit la valeur critique et l'écoulement devient turbulent. Mais alors la dépression se trouve inférieure au minimum $\frac{1}{2} \rho V'^2 + p'_c L$ indispensable pour maintenir la vitesse V' , le tirage se ralentit, retombe au-dessous de la vitesse critique et ainsi de suite. L'air intérieur au tube devient le siège d'une succession d'ébranlements, et vibre en produisant un son intense assez pur, comparable à celui d'un tuyau d'orgue à embouchure de flûte. Le lecteur désireux de préciser mathématiquement l'explication précédente pourra traiter l'exercice suivant :

Exercice. — On réalise un harmonica thermique avec un tube vertical de 1 m, 20 de long et de 4 cm de diamètre. Calculer la puissance minimum à dissiper dans la toile de chauffage en admettant que le débit passant dans le tube soit précisément égal au débit critique. On prendra la chaleur spécifique de l'air égale à 1 watt : g, et le coefficient de viscosité de l'air à la température absolue T égal en C. G. S. à $142 \times 10^{-7} T \sqrt{T} : (T + 102)$; on admettra enfin que

$$p_c = \frac{1}{2} \rho V_c^2 \cdot 0,028 \quad \text{et} \quad p'_c = \frac{1}{2} \rho V_c^2 \cdot 0,043.$$

158. Harmonica chimique. — Dans l'expérience précédente, on peut remplacer le chauffage électrique par une flamme convenablement réglée de gaz de ville : on obtient ainsi l'harmonica chimique, lequel produit un son plutôt mordant, apparenté au son des tuyaux à anche battante. Sa découverte (1777) est de quatre-vingts ans antérieure à celle de l'harmonica thermique ; mais la théorie, quoique de même principe, est un peu plus compliquée : les variations de pression tant dans la colonne d'air vibrante que dans le tube amenant le gaz de ville réagissent en effet sur l'écoulement et l'inflammation du gaz de chauffage. Je ne puis insister ; le lecteur se reportera à Rayleigh (*Sound*, II, 227).

CHAPITRE XIV

CORDES VIBRANTES

159. **Définitions.** — Appelons *fil* un corps dont la longueur est très grande par rapport à ses dimensions transversales ; et *corde* un fil parfaitement flexible, c'est-à-dire tel qu'il prenne et conserve toute forme, si contournée soit-elle, qu'on veut lui imposer. Cette flexibilité parfaite, cette absence de *raideur*, exige évidemment (fig. 41) que dans une corde AMB en équilibre l'action \mathcal{E} de la partie AM sur la partie MB se réduise, quel que soit le point M, à une *tension* appliquée en ce point et dirigée tangentiellement au fil, puisque la *raideur* n'est autre qu'une capacité de résistance aux déformations normales.

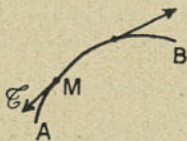


Fig. 41.

Telle que nous l'avons définie, la corde n'est qu'un être de raison, tenant dans la mécanique des fils un rôle analogue à celui joué par le gaz parfait en thermodynamique. Les corps réels présentent toujours une certaine rigidité. Cependant, dans certaines applications, les effets de cette rigidité sont pratiquement négligeables : soit par exemple un fil d'acier de 1 m de long et de 1 mm de diamètre, soumis à une tension de plusieurs dizaines de kg : mm² ; si le fil n'éprouve que des déformations élastiques, les fatigues

de flexion restent de l'ordre du dag : mm^2 ; elles n'ont donc — en première approximation tout au moins — aucun effet sensible. Aussi est-ce légitimement que de tels fils ont reçu le nom de *cordes à piano* : à plus forte raison en est-il de même pour la *corde à boyau*, utilisée dans les violons, les raquettes de tennis ; quant aux cordes faites de fibres végétales (coton, lin, chanvre) ou de fils de soie, leur flexibilité peut être considérée comme à peu près parfaite pourvu que leur longueur soit assez grande.

Du fait qu'une corde n'a aucune rigidité transversale, il résulte que :

Pour qu'un élément de corde MM_1 soit en équilibre, il faut et il suffit que le système constitué par les tensions à ses deux extrémités et par les forces extérieures appliquées à MM_1 soit lui-même en équilibre.

160. Mouvement d'une corde vibrant transversalement.

— Soit (fig. 42) une corde tendue entre deux points A et B par une force de tension suffisante pour qu'il soit légitime de confondre la figure d'équilibre avec la droite AB¹ ; nous prendrons cette droite pour axe des x avec origine

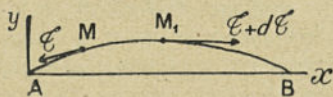


Fig. 42.

en A. Si, après avoir écarté légèrement la corde de sa position d'équilibre, on l'abandonne à elle-même, on constate que chacun de

ses points décrit une figure située dans un plan perpendiculaire à AB, conservant donc une abscisse x constante.

Nous supposons les déformations assez petites, pour qu'on puisse confondre x avec la longueur s de l'arc AM de la courbe dessinée par la corde à un instant quelconque.

1. Ce qui revient à négliger, vis-à-vis de la tension, les forces extérieures.

Soient alors $m ds$ la masse de l'élément MM' de longueur ds (m , masse de l'unité de longueur, est dite *masse linéaire* — et aussi, mais improprement, *densité linéaire*) ; désignons par α l'angle avec ox de la tangente en M à la courbe et écrivons l'équation de d'Alembert relative au mouvement de l'élément MM_1 . Tout d'abord :

$$m ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - (T \cos \alpha)_M + (T \cos \alpha)_{M_1} = d(T \cos \alpha).$$

x étant constant, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$; par suite $T \cos \alpha$ est constant tout le long de la corde ; mais, pour pouvoir confondre x et s à tout instant, il faut que $\cos \alpha$ puisse être confondu avec l'unité ; nos hypothèses reviennent donc à poser que la force de tension est constante tout le long de la corde.

La deuxième équation de d'Alembert s'écrit alors en désignant par β l'angle petit que fait avec ox la projection sur oxy de la tangente en M à la corde

$$\begin{aligned} m ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= (-T \sin \beta)_M + (T \sin \beta)_{M_1} = d(T \sin \beta) \\ &= T ds \frac{\partial}{\partial s} (\sin \beta). \end{aligned}$$

Mais, d'après nos hypothèses, nous pouvons confondre x avec s et $\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial y}{\partial x}$ avec $\sin \beta$; l'équation précédente s'écrit alors

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

On établit alors de la même façon que :

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Les équations étant linéaires et à variables séparées, le mouvement de la corde apparaît comme la résultante de deux mouvements indépendants dans deux plans rectangulaires. Nous pourrions donc borner notre étude à l'exa-

men d'un des mouvements plans élémentaires, dans le plan *xoy* par exemple.

Or posons $V^2 = \frac{T}{m}$ [V, quotient d'une force par une masse linéaire, a visiblement les dimensions d'une vitesse]. L'équation (2) apparaît comme étant *l'équation des cordes vibrantes* étudiée au chapitre 2. Nous pouvons donc appliquer immédiatement les résultats acquis dans cet endroit. En particulier la corde étant fixée en A et B, le déplacement est nul aux points A d'abscisse 0 et B d'abscisse L. *Le mouvement est donc périodique et de fréquence*

$$N = \frac{V}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} = 0. \quad (1)$$

161. Lois des cordes vibrantes. — La relation précédente, connue sous le nom de formule de Taylor, en souvenir du savant qui l'établit théoriquement en 1715, traduit les résultats expérimentaux énoncés par le P. Mersenne dès 1636 et qu'on énonce actuellement comme suit :

La fréquence fondamentale des vibrations d'une corde tendue homogène est :

1° *Inversement proportionnelle à la longueur L (Loi des longueurs) ;*

2° *Proportionnelle à la racine carrée de la tension \mathcal{T} (Loi des tensions) ;*

3° *Inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse linéaire m de la corde sous tension (Loi des masses).*

Il s'agit ici de la fréquence fondamentale : mais, en attaquant convenablement la corde, et en fixant, pendant l'attaque, un point bien choisi sur cette dernière, on peut obtenir, non pas le son N, mais un son de fréquence pratiquement identique à un harmonique de N ; plus exactement, on peut obtenir que la fréquence fondamentale soit insensible dans le mouvement de la corde. La corde paraît alors se diviser en plusieurs fuseaux vibrant

chacun pour son propre compte. L'expérience est classique, son importance spéculative est grande ; ses applications sont exceptionnelles.

Je ne détaillerai pas toutes les applications que trouvent les lois précédentes, par exemple dans les instruments de musique : le violoniste utilise la loi des longueurs quand il limite avec son doigt la longueur de sa chanterelle, de façon à en tirer tous les sons allant du mi_4 au sol_5 ; la loi des tensions lui permet d'accorder son instrument ; enfin il ne pourrait obtenir des sons graves de bonne qualité s'il n'employait pas des cordes filées, constituées par une âme de boyau fortement tendue, mais dont la masse linéaire se trouve augmentée corrélativement à la tension, au moyen d'un *trait*, c'est-à-dire d'un fil de cuivre enroulé sur l'âme en spirales jointives. Le lecteur pourra se reporter à *Cordes et Membranes* de H. Bouasse.

162. Influence de la rigidité des cordes et de la flexibilité des appuis. — Les fils réels possèdent toujours une certaine raideur dont l'effet est d'autant plus marqué que le fil est plus court, la section plus grande et la corde moins tendue ; le son obtenu est plus haut que celui calculé par la formule de Taylor : par exemple avec des fils de cuivre de 100 mm de long soumis à des tensions de l'ordre de 20 kg : mm², la différence est négligeable lorsque le diamètre d est de l'ordre du dixième de millimètre, elle vaut quelques commas si $d = 0,25$ mm ; elle atteint le demi-ton pour $d = 0,9$ mm.

En sens inverse, dans nombre d'instruments, les supports limitant la partie utile de la corde — le chevalet par exemple dans un violon — ne sont pas absolument fixes et ne doivent pas l'être de par le principe même de l'instrument (§ 174). Il est évident que cette flexibilité produit le même effet qu'une diminution de la tension, c'est-à-dire un abaissement du son.

MISE EN VIBRATION DES CORDES PINCÉES

163. Pour faire vibrer une corde, on utilise quatre modes principaux d'attaque.

1° Par *pincement* : la corde est écartée de sa position d'équilibre, puis sans vitesse abandonnée à elle-même, pour la guitare, la mandoline, la harpe, etc. ;

2° Par *choc* d'un *marteau* vivement lancé (piano) ;

3° Par *frottement* au moyen d'un archet (tournant comme dans la vielle ou animé d'un mouvement alternatif comme dans le violon).

4° Par *résonance*, par exemple en imprimant à un point de la corde des déplacements transversaux rythmés, ou bien en imposant des variations périodiques à la tension. Je me bornerai à signaler l'existence de ce mode d'attaque, pratiquement sans applications dans les instruments de musique.

Les deux premiers procédés donnent naissance à des mouvements vibratoires amortis : les deux derniers au contraire fournissent des mouvements entretenus.

164. **Corde pincée par un plectre.** — Une corde de longueur L est primitivement tendue entre les deux points A et B (fig. 43). En un point C, on exerce au moyen d'un

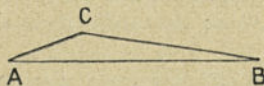


Fig. 43.

plectre (corps dur à bord vif) une force normale sous l'action de laquelle la corde prend une forme d'équilibre constituée par deux segments de droite AC et CB.

Au temps $t = 0$, on supprime la force : la corde part *sans vitesse* et effectue autour de sa position d'équilibre des oscillations libres amorties dans la réalité, mais dont en première étude nous négligerons l'amortissement.

L'étude de ces oscillations peut être faite de deux points de vue qui se complètent mutuellement. L'un, analytique, permet de déterminer l'importance relative des harmoniques, l'autre fournit d'intéressantes indications sur la cinématique du mouvement.

165. Développement trigonométrique du mouvement. —

La partie physiquement utile de la corde est évidemment limitée au segment AB ; mais analytiquement ce segment peut être considéré comme partie d'une corde indéfinie ayant deux points fixes : la fonction représentant le mouvement de la corde indéfinie a donc (§ 22) une double périodicité $2L$ dans l'espace et $\frac{2L}{V} = T$ dans le temps. Développons en série de Fourier le déplacement y du point d'abscisse fixe x ; nous avons

$$y = \sum_1^{\infty} A_p \sin [2\pi p N t - \varphi_p] \sin \left(\pi p \frac{x}{L} - \psi_p \right).$$

Mais d'une part y doit être constamment nul pour $x = 0$ et $x = L$; donc, quel que soit p , $\psi_p = 0$; d'autre part au temps $t = 0$ la vitesse de tous les points de la corde est nulle ; y a donc nécessairement la forme

$$y = \sum_1^{\infty} A_p \sin p \frac{\pi x}{L} \cos 2\pi p N t. \quad (1)$$

Pour déterminer les A_p à l'origine des temps, on a :

$$y_{t=0} = x \frac{h}{l} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq l$$

et

$$y_{t=0} = \frac{L-x}{L-l} \cdot h \quad \text{pour} \quad l \leq x \leq L.$$

Mais

$$y_{t=0} = \sum_1^{\infty} A_p \sin p \frac{\pi x}{L}.$$

Or, l'expression générale de A_p est

$$A_p = \frac{2}{L} \int_0^L y \sin \frac{p\pi x}{L} dx ;$$

$$A_p = \frac{2h}{L} \int_0^l \frac{x}{l} \sin \frac{p\pi x}{L} dx + \frac{2h}{L} \int_l^L \frac{L-x}{L-l} \sin \frac{p\pi x}{L} dx ;$$

$$A_p = \frac{2hL^2}{p^2\pi^2l(L-l)} \sin p \frac{\pi l}{L}. \quad (2)$$

Les amplitudes des harmoniques successifs varient comme $\frac{1}{p^2} \sin \frac{p\pi l}{L} = \frac{1}{p^2} \sin p\pi \cdot \lambda$; leurs intensités varient comme le carré de ce nombre.

Le facteur $\frac{1}{p^2}$ affaiblit les harmoniques supérieurs, d'autant plus que leur numéro est plus élevé ; le facteur $\sin p\pi \cdot \lambda$ renforce l'importance des harmoniques pour lesquels $2p\lambda$ est voisin d'un entier impair et fait disparaître au contraire ceux pour lesquels $2p\lambda$ est voisin d'un entier pair. Par exemple pour une corde pincée aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur, les harmoniques 3, 6, 9 sont supprimés. Le rôle joué par la position du point d'application du plectre apparaîtra nettement par l'exercice suivant :

Exercice. — Calculer les intensités relatives des harmoniques 1 à 8 pour une corde pincée en un point tel que $1 : L = 2-3-4 \dots 8$. Courbe représentative. On prendra l'intensité du fondamental égale à 100.

166. Étude cinématique du mouvement. — Le calcul précédent ne fournit aucune indication directe sur les formes successives prises par la corde au cours d'une vibration ; sans doute, il ne serait pas impossible de déduire ces formes de l'expression (1) où l'on aurait préalablement remplacé les A_p par leurs valeurs ; il suffit toutefois d'ap-

plier au cas actuel la méthode du § 21 pour obtenir immédiatement l'aspect que présente la corde à un instant quelconque de la période : on trouvera sur la figure 44 les aspects successifs au cours d'une demi-période d'une corde pincée au tiers de sa longueur. Ce n'est pas du tout le schéma sinusoïdal des cours élémentaires ; la corde présente au contraire la forme d'une ligne brisée à trois tronçons ; la pente de chaque tronçon ne peut prendre que deux valeurs au cours de toute la période. Ces résultats théoriques ont été soumis au contrôle de l'expérience par Krigar-Menzel et Raps, qui les ont vérifiés pour les premières périodes tout au moins. La raideur des cordes et l'amortissement interviennent après comme facteurs déformants.

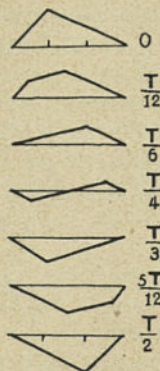


Fig. 44.

167. Remarque. — Si, au lieu d'utiliser un plectre dur à bord franc appuyant en un point, on pince la corde avec un corps mou et arrondi, comme le gras du doigt, la pente de la corde cesse de présenter la discontinuité rencontrée plus haut ; tout au plus peut-il exister une discontinuité dans la courbure ; aussi l'amplitude des harmoniques varie-t-elle alors en raison inverse d'une puissance du rang au moins égale à la troisième ; en d'autres termes les harmoniques supérieurs ne seront pratiquement plus perceptibles à partir d'un numéro assez faible : au « grincement forcené » des guitares pincées par l'ongle, s'oppose le son de la harpe, doux, langoureux, pour tout dire manquant de mordant.

CORDE FRAPPÉE

168. Description sommaire d'un piano. — Dans un piano (fig. 45), les cordes — au nombre de 220 environ¹ — sont tendues sur un cadre (*barrage*) entre une *pointe* A et une *cheville* de tension C. Le barrage doit être très résistant ; il supporte en effet des efforts dépassant 10 t. Le fond du

barrage est occupé par une *table d'harmonie* Θ, ordinairement constituée par une planche de contreplaqué renforcée par des barres *b b*.

La partie utile de chaque corde est limitée par un *sillet* S (solidaire du barrage), et un *chevalet* X collé sur la table d'harmonie à laquelle il transmet la vibration de la corde. Le *marteau* feutré M est fixé sur une *noix* N, mobile autour de l'axe D. Abaissons à fond la *touche* T, pivotée en O : le *pilote* P monte et appuyant sous le nez de la

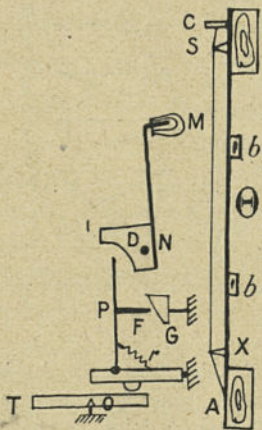


Fig. 45.

noix met en mouvement le marteau. A l'instant où celui-ci va venir en contact avec la corde, le pilote, rencontrant par sa rampe F le bouton G, est projeté vers la droite ; le marteau est ainsi dégagé au moment du choc, il heurte librement la corde et au bout d'un certain temps de contact, retourne sur son *repos*.

1. Par exemple une corde filée par note du la_{-1} au la_0 ; deux cordes filées par note du la_0 au $ré_2$, trois en *corde à piano* par note au-dessus jusqu'au la_6 .

Lorsque le doigt abandonne la touche, le pilote redescend et, rappelé par le ressort r , vient se placer à nouveau sous le nez de la noix.

Il résulte de ce qui précède que le marteau, après avoir ébranlé la corde en certaines régions, l'abandonne ensuite à elle-même. Le problème des cordes frappées exige l'examen préalable du mouvement du système marteau-corde pendant la durée du choc, de façon à connaître la répartition des élongations et des vitesses le long de la corde au moment où le contact cesse définitivement.

169. Mouvement de l'ensemble corde-marteau¹. —

Sous l'action du marteau, la région frappée prend un mouvement dirigé vers la table d'harmonie ; ce mouvement se propage de part et d'autre de la région frappée en intéressant progressivement toute la corde ; corrélativement le marteau se ralentit ; il arriverait asymptotiquement à l'arrêt *sans jamais rebondir*, si on avait une corde de longueur infinie. Mais la corde est nécessairement limitée : l'ébranlement, qui, dirigé vers la table, se propageait vers une extrémité fixe, se réfléchit sur cette dernière et, dirigé en sens inverse, revient vers le marteau, auquel il communique une impulsion tendant à renvoyer ce dernier vers son repos. En somme, le marteau ne rebondit qu'en raison de l'existence d'ondes réfléchies sur les extrémités de la corde ; par suite le contact marteau-corde doit avoir une durée comparable au temps qu'exige l'ébranlement pour parcourir la corde : c'est effectivement ce qu'a montré en particulier W. H. Georges, par l'oscillographie des variations de courant passant entre une corde d'acier et un marteau de cuivre² ou par chronopho-

1. W. KAUFFMANN, *Ann. der Physik*, 54 (1895), 675.

2. W. H. GEORGE, *Proc. Roy. Soc. London*, 108 (1925), 284.

tographie du point d'impact de la corde pendant et après la durée du choc¹.

170. Mouvement de la corde libérée. — Je ne développerai pas l'analyse permettant de trouver la répartition du mouvement sur la corde à l'instant où le marteau rebondit ; je ne reproduirai pas non plus les formules obtenues à grand renfort d'hypothèses simplificatrices et donnant le mouvement de la corde libérée du marteau. En raison de la difficulté qu'il y a à tenir exactement compte de facteurs comme l'élasticité des feutres de marteau ou la rigidité de la table d'harmonie, on peut dire² que les calculs des différents auteurs confirment les faits expérimentaux dans leurs grandes lignes.

CORDES ATTAQUÉES PAR UN ARCHET

171. A partir du moment où une corde pincée par un plectre ou frappée par un marteau est abandonnée à elle-même, elle effectue des vibrations libres que les résistances diverses amortissent graduellement. Au contraire, le mouvement d'une corde attaquée par un archet est entretenu ; l'archet transmet à la corde le travail compensateur de l'énergie dissipée dans les frottements ou rayonnements divers. Aussi pour étudier un tel mouvement, est-il tout d'abord nécessaire de préciser le mécanisme par lequel s'effectue le transfert d'énergie précédent. Nous connaissons ainsi, au moins de façon schématique, la loi donnant le déplacement du point de la corde en contact avec l'archet, et il nous sera possible d'en déduire le mouvement de toute la corde.

1. GEORGE et BECKETT, *Proc. Roy. Soc. London*, 114 (1927), 117.

2. S. K. DATTA, *Proc. Ind. Assoc. Sci.*, 8 (1923) ; 107.

172. Variation du frottement avec la vitesse. — On sait depuis longtemps que le frottement qui s'exerce entre deux corps en contact dépend de la vitesse relative des deux corps, et qu'il diminue lorsque cette vitesse croît. Par exemple Charron¹ constitue les deux corps frottants par deux disques se touchant par leurs bords, l'un faisant archet tournant, entraîné par un moteur, l'autre ayant pour axe un fil métallique servant de dynamomètre de torsion. Il trouve ainsi que le frottement F est proportionnel à la force de pression normale N et qu'il varie avec la vitesse suivant la loi $F = \frac{fx}{1 + bv}$ (f étant le coefficient de frottement au repos). La constante b est pratiquement nulle si les surfaces du contact sont mouillées de pétrole ou d'huile fine, le frottement est alors quasi-indépendant de la vitesse; au contraire b est considérable, de l'ordre de $1 \text{ s} : \text{m}$, si les surfaces sont colophanées. En d'autres termes, la colophane assure l'adhérence aux faibles vitesses relatives; elle agit au contraire comme un véritable lubrifiant, si la vitesse relative devient grande. Cette double propriété fait le bonheur de tous les spécialistes de corde lisse ou de barre fixe.

173. Mécanisme de l'entretien par archet. — L'archet est constitué, comme on sait, par une mèche colophanée de crins tendus sur un arc en bois¹. On le déplace — en maintenant les crins normaux à la corde — avec une vitesse qui varie *suivant l'intensité du son à produire* entre $2 \text{ cm} : \text{s}$ pour le pianissimo et $150 \text{ cm} : \text{s}$ pour le fortissimo. Au contraire, la pression (de l'ordre de 100 g) qui s'exerce sur la corde est pratiquement sans influence sur les qualités du son. Supposons-la constante. Tant qu'il y a adhérence entre la corde et l'archet, la première,

1. Cf. H. BOVASSE, *Cordes et membranes*, p. 267.

sous l'action de celui-ci, s'écarte de plus en plus de sa forme d'équilibre. Il arrive un instant où la réaction au point de contact devient supérieure à fN , f étant le coefficient de frottement au repos ; la corde est alors rappelée vers sa position d'équilibre. Son mouvement est quasiment libre. Le frottement entre l'archet et la corde se trouve en effet considérablement réduit, en raison de la grande vitesse relative (de l'ordre de $m : s$) existant au point de contact. Mais la réaction de la corde ne cesse de diminuer. Elle peut même devenir négative, c'est-à-dire agir dans le sens du mouvement de l'archet, si la corde dépasse la position d'équilibre ; aussi à un moment donné, le point de contact avec l'archet s'immobilise ; l'archet adhère à nouveau à la corde, l'entraîne à nouveau et le même phénomène recommence périodiquement. On reconnaît l'allure générale des oscillations de relaxation ; on voit également qu'il est possible d'apporter l'énergie pour compenser les frottements divers, grâce au fait que pour un même déplacement dx , les travaux de l'archet sont respectivement $fN dx$ à l'aller et $-\frac{fN}{1 + b_v} dx$ au retour.

174. Cinématique du mouvement de la corde. — En

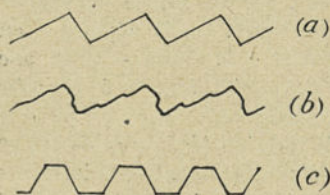


Fig. 46.

somme, le point de contact possède à l'aller une vitesse U_a constante égale à celle de l'archet ; au retour sa vitesse dépend de divers facteurs agissant dans des sens divers ; nous admettrons, pour ne pas compliquer, qu'elle est constante et égale à $-U_r$. Cette hypothèse possède d'ailleurs un solide fondement

expérimental ; quand on enregistre en effet le mouvement d'un point de la corde¹ les courbes obtenues ont couramment des formes analogues à celles représentées sur la figure 46.

Le problème se pose donc de trouver pour la corde à l'instant $t = 0$, une répartition des vitesses telle que le point de contact possède pendant le temps T_a la vitesse U_a

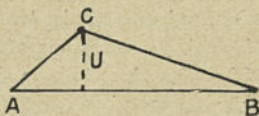


Fig. 47.

et pendant le temps T_r la vitesse $-U_r$ (On a évidemment $T_a + T_r = T$ et $T_a U_a = T_r U_r$). Le lecteur vérifiera aisément que, si à l'instant $t = 0$ la répartition des vitesses le long de la corde AB est celle donnée par la ligne ACB (fig. 47), la vitesse au point M d'abscisse x a la valeur

$$U_s = U \frac{L-x}{L} \quad \text{du temps } -\frac{xT}{2L} \text{ au temps } \frac{xT}{2L}$$

et la valeur

$$U_r = -U \frac{x}{L} \quad \text{du temps } \frac{xT}{2L} \text{ au temps } \frac{(2L-x)T}{2L}.$$

Une telle répartition de vitesses constitue donc une solution possible du problème schématique posé. Je ne puis insister, il suffit au lecteur de savoir que l'ébranlement produit par l'archet est en fait la propagation d'une discontinuité de vitesse. Quant aux calculs donnant l'importance relative des harmoniques, leur intérêt du point de vue musical est secondaire : en effet, tous les instruments à archet possèdent une *table* qui est la véritable source sonore : sous l'archet, la corde effectue des vibrations grossièrement parallèles à la table ; dans son mouvement, elle impose au chevalet sur lequel elle appuie des oscillations autour d'un axe parallèle à elle-

1. KRIGAR-MENZEL et RAPS, *Ann. der Physik*, 44 (1891), 623.

même ; les oscillations du chevalet se transmettent à la table qui le supporte ; et cette table, en raison de sa grande surface, peut mettre en vibration une masse d'air assez importante pour que le son acquière l'ampleur qu'on exige d'un instrument de musique. On a donc affaire à un ensemble vibrant très complexe ; par suite il n'y a pas à s'étonner si le spectre acoustique des sons émis par un violon diffère complètement de ce que l'on peut calculer dans l'hypothèse simpliste d'une corde tendue entre deux supports inébranlables. D'ailleurs on peut tenir compte, au moins qualitativement, des différents facteurs capables de régir la production du son ; les particularités que l'on observe sur les spectres expérimentaux reçoivent alors une explication tout à fait satisfaisante.

175. Notions sur les vibrations des membranes. — Une membrane est une lame mince, d'épaisseur constante, parfaitement flexible, et qui, par suite, ne peut vibrer que lorsqu'elle a été préalablement tendue sur un cadre

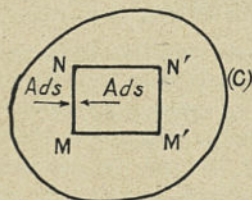


Fig. 48.

rigide. A cette définition répondent pratiquement les feuilles de papier, les étoffes, les parchemins (qui constituent les peaux de tambour ou de grosse caisse), etc. Fendons (fig. 48) suivant une ligne MN de longueur ds une membrane tendue sur un cadre C ; pour empêcher l'écartement des deux lèvres de la coupure, il faut exercer une force égale à $A ds$; A est la tension superficielle de la membrane suivant la ligne AB ; cette tension est indépendante de la position MN quand la membrane est uniformément tendue.

L'équation du mouvement d'une membrane uniformé-

L'équation du mouvement d'une membrane uniformé-

ment tendue s'obtient très aisément en considérant cette membrane comme formée de deux nappes de fils à angle droit dirigés respectivement suivant Ox et Oy ; si un élément de surface rectangulaire $MN M'N'$ ayant ses côtés parallèles aux axes est déplacé parallèlement à Oz , il est rappelé vers sa position d'équilibre par les composantes suivant Oz des forces de tensions provenant chacune des deux nappes de fils. Or sur l'élément $MN M'N'$ de masse $m dx dy$, les fils parallèles à Ox exercent une tension $A dy$, dont la composante suivant Oz est (§ 160) $A dy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$. De même, l'action des fils parallèles à Oy se traduit par une composante suivant Oz de grandeur $A dx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$.

L'équation de D'Alembert s'écrit donc

$$m dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = A dx dy \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{A}{m} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = a^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]$$

avec $z = 0$ sur tout le contour ; $a^2 = \frac{A}{m}$ a les dimensions d'une vitesse.

176. Solutions stationnaires pour la membrane carrée. — Soit une membrane carrée de côté l . L'équation précédente peut être satisfaite par une expression de la forme

$$z = Z_0 \cos 2\pi nt \cdot \sin p\pi \frac{x}{l} \cdot \sin q\pi \frac{y}{l}$$

où p et q sont des entiers quelconques.

Cette expression s'annule bien sur le contour carré limité par les droites $x = 0$, $x = l$; $y = 0$, $y = l$.

Pour qu'elle satisfasse à l'équation du § 175 il faut que

$$p^2 + q^2 = 4n^2 \frac{l^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{a}{2l} \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Donc 1° les sons correspondant aux vibrations station-

naires de la membrane forment une suite discontinue. Voici en effet les premiers sons

p	1	1	2	3	3	3	3
q	1	2	2	1	2	1	3
Fréquence relative.	1 000	1 581	2 000	2 236	2 550	2 915	3 000

2° Chaque fréquence peut être obtenue de plusieurs manières différentes.

a) Dans certains cas un même n peut être obtenu avec des groupements (p, q) différents ; par exemple le son de fréquence relative 5 000 peut être obtenu soit avec $p = 7, q = 1$, soit avec $p = q = 5$.

b) On peut d'ailleurs interchanger p et q , puisque la plaque est carrée, et combiner linéairement les solutions obtenues. Le son le plus général, de fréquence

$$n = \frac{a}{2l} \sqrt{p^2 + q^2},$$

correspond ainsi au déplacement

$$z = Z_0 \cos 2\pi nt \left[\sin p\pi \frac{x}{l} \sin q\pi \frac{y}{l} + m \sin q\pi \frac{x}{l} \sin p\pi \frac{y}{l} \right]$$

où m peut prendre une valeur quelconque de $-\infty$ à $+\infty$. p et q étant donnés, à chaque valeur de m correspondent des lignes nodales ($z = 0$) se déformant avec m de façon continue. Je n'insiste pas : le lecteur a certainement compris dans quel sens on peut développer les calculs, traiter le cas de membranes à contour circulaire, elliptique, triangulaire. Aussi bien les vibrations des membranes n'ont-elles guère d'applications en dehors des caisses (grosse caisse, « tambour ») qui servent surtout à marquer un rythme, indépendamment de toute préoccupation de hauteur¹.

1. Cependant dans les timbales d'orchestre, constituées par une peau tendue sur un bassin hémisphérique, on règle la tension de la peau de façon à accorder les sons produits à la tonique ou à la dominante du morceau dont les timbales doivent marquer la cadence.

VIBRATIONS DES VERGES

177. **Rappel de propriétés.** — Considérons le solide engendré par une surface plane S , dite *section*, qui se déplace en restant normale à la *ligne centrale*, décrite par son centre de gravité. Si la courbure de la ligne centrale reste faible, et si, au cours du déplacement, les déformations de la section S sont nulles ou petites, le solide engendré constitue ce que l'Acoustique appelle une *verge*. La théorie de la vibration des verges suppose la connaissance de quelques résultats d'élasticité, que j'établirai d'abord sommairement.

Dans une verge en équilibre sous l'action d'un système de forces, supprimons par la pensée la partie D à droite d'une section S (fig. 49) ; pour maintenir la partie gauche G en équilibre, il faut alors appliquer en chacun des éléments de S des forces, dites *forces moléculaires*, dont l'ensemble représente l'action de D sur G . Réduisons cet ensemble à une force F appliquée au centre de gravité O de S et à un couple Γ ; la composante N de F normale à S constitue une *traction* ; la composante T de F dans le plan S constitue un *cisaillement*. De même on peut décomposer le couple Γ en un couple de *flexion* M , d'axe situé dans la section S , et en un couple de *torsion* C autour d'un axe normal à S . Les raisons de ces dénominations sont évidentes.

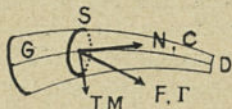


Fig. 49.

Il est manifeste que l'action de G sur D est représentée par la force $-F$ et le couple $-\Gamma$.

Traction pure. Soit une verge rectiligne. AB de section constante S fixée en A (fig. 50).

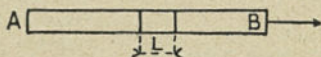


Fig. 50.

Appliquons à l'extrémité B une force N parallèle à l'axe; on peut admettre comme évident que chaque section de la verge sera soumise à une *traction pure*, c'est-à-dire que

T , M et C seront nuls dans toute la section; si on ne dépasse pas la limite élastique de la verge, l'expérience montre que l'allongement ΔL d'un élément de verge de longueur L ne dépend que de la fatigue $N : S$ et est donné par la formule

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{N}{S},$$

E , dite le module d'Young, est une quantité qui a les dimensions d'une pression et qui vaut par exemple 20 000 kg : mm² pour l'acier; réciproquement un allongement relatif $\Delta L : L$ indique une fatigue $N : S = E \Delta L : L$.

178. Vibrations longitudinales des verges. — Or il est possible de provoquer dans une verge des vibrations longitudinales, par exemple en la frottant dans le sens de la longueur avec une étoffe colophanée, ou bien en exerçant à une extrémité libre des tractions rythmées. La théorie de la propagation des ébranlements dans une verge est une réplique de celle

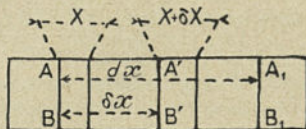


Fig. 51.

exposée au chapitre VII à propos des vibrations longitudinales des colonnes gazeuses. Prenons en effet (fig. 51) l'axe de la verge — supposée rectiligne — pour axe des x ; le déplacement suivant Ox d'un point d'une section AB d'abscisse initiale x est par hypothèse le même pour tous

les points de la section et à l'instant t vaut $X = f(x, t)$. Or au même instant le déplacement de la section $A'B'$ d'abscisse initiale $x + \delta x$ vaut $X + \frac{\partial X}{\partial x} \delta x$. Le prisme $AA'BB'$ subit donc un allongement relatif $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}$; lequel est corrélatif (§ 177) de l'existence dans la section AB d'une tension moléculaire $E \frac{\partial X}{\partial x}$ en appelant E le module d'Young de la verge. Par suite si nous considérons l'élément ABA_1B_1 de longueur dx , il subit :

1° De la part de la portion de verge à gauche de AB une force $- ES \frac{\partial X}{\partial x}$.

2° De la part de la portion de verge à droite de A_1B_1 une force $+ ES \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_{x+\delta x}$.

Sous l'action de la résultante cet élément éprouve une accélération $\rho S dx \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$. D'où, pour équation du mouvement, la relation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

En d'autres termes le déplacement obéit à l'équation des cordes vibrantes; on peut répéter pour les vibrations longitudinales des verges tout ce qui a été dit pour les colonnes gazeuses. Par exemple :

1° Les ébranlements se propagent avec une célérité indépendante de la fréquence, valant par exemple pour l'acier 5 100 m : s, pour le laiton 3 600 m : s, etc.

2° On peut obtenir dans une verge des ondes stationnaires : c'est ainsi qu'une verge fixée en son milieu, ou bien par ses deux extrémités, peut vibrer en demi-onde, avec, dans le premier cas, des ventres de vitesse aux extrémités, dans le second un ventre de vitesse au centre ;

on peut donc avoir, en excitant longitudinalement une tige d'acier de 1 m de longueur fixée en son milieu, une onde stationnaire de fréquence $N = a : 2L = 2\ 550$ (sensiblement mi_6) ; une tige d'acier de 7 cm de long fixée à un bout donne des vibrations longitudinales à la limite supérieure des fréquences audibles ¹.

179. Flexion d'une verge. — Une verge initialement rectiligne soumise à des forces extérieures perpendiculaires à son axe

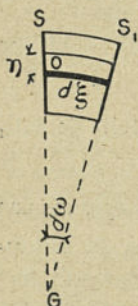


Fig. 52.

fléchit ; les fibres les plus proches du centre de courbure sont comprimées, les fibres les plus éloignées sont tendues ; donc d'une part il existe une fibre (*fibre neutre*) dont la longueur ne change pas ; d'autre part la déformation des fibres situées d'un côté d'une section de la verge engendre des forces moléculaires qui équilibrent les forces extérieures appliquées de l'autre côté. Prenons (fig. 52) un axe des ξ tangent à la ligne neutre en O. La section S' qui avant déformation se trouvait à la distance $d\xi$ de S, est après déformation venue en S_1 , et fait avec S un angle $d\omega = \frac{d\xi}{OG} = \frac{d\xi}{\rho}$

en appelant ρ le rayon de courbure de la fibre neutre déformée ². Or une fibre de section dS à la distance η de la fibre neutre et dont la longueur initiale était $\rho d\omega$, prend après flexion une longueur $(\rho + \eta)d\omega$; elle exerce donc sur la partie de la verge à droite de S_1 une réaction dont la composante suivant $O\xi$ est égale à $\frac{\eta}{\rho} E dS$.

Écrivons que

1° La somme de ces réactions suivant $O\xi$ est nulle (elle doit en effet équilibrer les forces extérieures initialement perpendicu-

1. D'une façon générale, les vibrations longitudinales des verges correspondent à des sons relativement aigus. D'où leur emploi pour déterminer la limite audible supérieure ; malheureusement il faut éviter toute oscillation de torsion — dont on peut démontrer que la fréquence se trouverait environ une quinte plus bas — et surtout toute oscillation de flexion (§ 181) ; et cela est fort difficile.

2. On fait ici l'hypothèse de Navier, d'après laquelle les sections de la verge déformée sont les anciennes sections de la verge avant déformation.

lares à l'axe et par suite sensiblement perpendiculaires à $O\xi$ si la flexion reste faible). On a $\frac{E}{\rho} \int \gamma dS = 0$, ce qui exprime que le centre de gravité G_1 de S_1 se trouve sur la fibre neutre.

2° Le moment résultant de ces réactions équilibre celui — M — des forces extérieures appliquées à droite de S . Prenons les moments par rapport à un axe Δ normal au plan de flexion et passant par le centre de gravité de la section ; il vient

$$M = \int \frac{E}{\rho} \gamma^2 dS = \frac{E}{\rho} \int \gamma^2 dS = \frac{EI}{\rho},$$

I étant le moment d'inertie de la section droite par rapport à Δ .

Remarque. — La formule précédente prend une forme intéressante quand on rapporte la verge fléchie à un axe ox confondu avec la position initiale de la ligne centrale et à un axe oy situé dans le plan de flexion. En effet un point de la ligne neutre (fig. 53) situé à la distance ox de l'origine a subi après flexion un déplacement y ; la courbure $1 : \rho$ de la ligne neutre fléchie



Fig. 53.

vaut donc $y''(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$, soit sensiblement y'' si la flexion est faible ; d'où l'expression ¹

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

180. Effort tranchant et flexion. — Dans une verge en équilibre, l'effort tranchant en une section équilibre les composantes normales à l'axe des forces extérieures situées d'un même côté de la section ; il en résulte que si nous avons un élément de verge $ABA'B'$ la différence des efforts tranchants en AB et

1. Le lecteur fera attention aux signes : M , couple exercé par les forces extérieures appliquées sur la partie P de la verge située par rapport à S du côté des x positifs, est positif quand ces forces tendent à donner à la verge une courbure telle que le centre de courbure soit du côté des y positifs ; de même T est la composante normale à l'axe des forces extérieures appliquées sur la partie P , etc.

$A'B'$ est en valeur absolue égale à la somme des composantes des forces appliquées sur l'élément. Supposons alors (fig. 54) une verge en équilibre sous l'action de forces extérieures réparties de façon continue; soient $-M$ et $-T$ le moment de flexion et l'effort tranchant dans la section (équiliibrant les forces agissant sur la verge à droite de AB , vers les x croissants)

$-M' = -\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx\right)$ et $-T' = -\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right)$ les mêmes

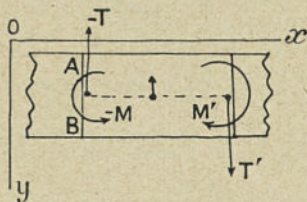


Fig. 54.

quantités en $A'B'$. On peut considérer l'élément $ABA'B'$ comme en équilibre sous l'action des forces extérieures appliquées sur l'élément des réactions moléculaires ($-T, -M$) provenant de la partie à gauche de AB et des réactions moléculaires ($+T', +M'$) exercées par la partie à droite de $A'B'$.

Prenons les moments de toutes ces réactions par rapport à un axe passant par la résultante des forces extérieures, en remarquant que $-T$ et T' forment sensiblement un couple de moment $+T dx$; il vient

$$+ \left[M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right] - M + T dx = 0,$$

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx = 0.$$

181. Vibrations transversales des verges. — Soit alors une verge de masse spécifique ρ , de module d'Young E et de section constante S exécutant des vibrations transversales. Un élément $ABA'B'$ de cette verge, limité à deux sections d'abscisses x et $x + dx$ prend sous l'action des efforts tranchants $-T$ et $\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right)$ une accélération

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Donc

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = + \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

Mais $M = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot EI$. Donc l'équation des vibrations de la verge est¹

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} EI$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - k^2 \frac{E}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - k^2 a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (1)$$

en mettant en évidence le rayon de giration $k = \sqrt{I : S}$ de la section et la célérité a des ondes longitudinales dans la verge.

182. Théorème. — L'équation précédente indique qu'une verge peut propager sans déformation un ébranlement transversal sinusoïdal; mais la célérité d'un tel ébranlement dépend de sa période. Essayons en effet de satisfaire à l'équation précédente avec une expression de la forme $y = y_0 \sin 2\pi n \left(t - \frac{x}{c} \right)$ impliquant (§ 17) propagation sans déformation de l'ébranlement sinusoïdal y tout le long de la barre. Cela est possible si

$$4\pi n^2 = \frac{EI}{\rho S} \frac{16\pi^4 n^4}{c^4}$$

$$c^2 = 2\pi n \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 2\pi n k a.$$

La célérité c variant comme la racine carrée de la fréquence, il y a dispersion : les sons aigus gagnent sur les sons graves; si on voulait transmettre un concert à distance par l'intermédiaire d'une longue barre vibrant transversalement, les violons seraient entendus avant les contrebasses.

1. Nous négligeons l'effet de la rotation de l'élément autour d'un axe perpendiculaire au plan xoy ; si on en tenait compte, les résultats obtenus seraient à modifier très légèrement.

183. Remarque. — Avec les fréquences usuelles et les barres ordinaires (k de l'ordre du cm), la célérité c des ébranlements transversaux est bien inférieure à la célérité a des ébranlements longitudinaux, de l'ordre du dixième par exemple : aussi pour une verge donnée, les vibrations transversales ont-elles des fréquences bien inférieures aux fréquences des vibrations longitudinales.

184. Ondes stationnaires. — Quand on met une verge en vibration transversale, il s'y établit souvent une onde stationnaire, qui doit satisfaire d'une part à l'équation (1, § 181), d'autre part à certaines conditions aux limites. Par exemple si une extrémité A de la verge est libre, le couple de flexion M et l'effort tranchant T sont nuls à cette extrémité ; il faut donc écrire que $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_A$ et $\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_A$ sont nuls tous les deux. Si la verge est encastrée, la section d'encastrement B conserve une position fixe ($y_B = 0$) et une direction fixe $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B = 0$. Je vais, sur un exemple particulier, et sans insister sur le détail des calculs, montrer comment se traite le problème des ondes stationnaires.

185. Verge encastrée à un bout et libre à l'autre. — D'une façon générale, une solution stationnaire de l'équation (1, § 181) s'écrit $y = Y \sin 2\pi nt$, Y étant une fonction de x satisfaisant à la relation

$$\begin{aligned} 4\pi n^2 Y &= k^2 a^2 \frac{d^4 Y}{dx^4} \\ \lambda^4 Y_{IV} &= Y, \end{aligned} \quad (1)$$

λ étant une quantité homogène à une longueur. Or l'équation (1) admet la solution

$$Y = Y_0 \left[A \cos \frac{x}{\lambda} + B \sin \frac{x}{\lambda} + C \operatorname{Ch} \frac{x}{\lambda} + D \operatorname{Sh} \frac{x}{\lambda} \right].$$

La connaissance de la parenthèse détermine, à une dilatation près, la forme de la barre. Or celle-ci est encastree à son origine ($x = 0$). Donc, puisque $y = 0$, on a $A + C = 0$ et comme $y'_0 = 0$, on a $B + D = 0$.

D'autre part la verge est libre à son extrémité $x = L$. Donc puisque $Y''_L = 0$

$$-A \cos \frac{L}{\lambda} - B \sin \frac{L}{\lambda} + C \operatorname{Ch} \frac{L}{\lambda} + D \operatorname{Sh} \frac{L}{\lambda} = 0,$$

et puisque $Y'''_L = 0$

$$A \sin \frac{L}{\lambda} - B \cos \frac{L}{\lambda} + C \operatorname{Sh} \frac{L}{\lambda} + D \operatorname{Ch} \frac{L}{\lambda} = 0.$$

L'élimination de A, B, C, D entre les relations précédentes donne

$$\cos \frac{L}{\lambda} \operatorname{Ch} \frac{L}{\lambda} + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont les produits de $\frac{\pi}{2}$ par les nombres

$$\nu_1 = 1,49 \quad \nu_2 = 2,99 \quad \nu_3 = 5,00 \quad \nu_4 = 7,00 \dots$$

ainsi qu'on peut le prévoir par une résolution graphique. Il en résulte que les fréquences des ondes stationnaires possibles dans une telle barre obéissent à la relation

$$n_p = \nu_p^2 \sqrt{\frac{Ka}{L}}.$$

Le fondamental excepté, ces fréquences croissent comme les carrés des nombres impairs : prenant pour fondamental $ut_2 = 128$, les partiels suivants sont approximativement 800 (sol₄—), 2240 (do₆+), 4370 (do₇+), etc. La figure 55 montre les formes prises par la verge donnant les trois premiers partiels. Le lecteur calculera la

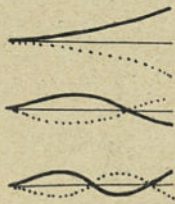


Fig. 55.

position des nœuds pour chacun de ces partiels. Il étendra sans difficulté l'étude précédente aux cas d'une verge encastrée à ses deux extrémités et d'une verge libre à ses deux extrémités. Enfin il établira aisément des lois de similitude relatives à des barres de même matière (a identique) qui sont le siège de mouvements stationnaires semblables, c'est-à-dire comportant la même distribution de nœuds et de ventres ; il trouvera ainsi que si les deux barres sont géométriquement semblables, les hauteurs sont en raison inverse du rapport de similitude ; et si deux barres ne diffèrent que par la longueur (k et a identiques), les hauteurs sont en raison inverse du carré des longueurs : une barre coupée en son milieu donne la double octave (en réalité le son produit est légèrement plus haut — de quelques savarts — que le son théorique).

186. Applications des verges. — Les partiels supérieurs d'une verge rectiligne n'étant pas des harmoniques du fondamental, les sons émis par une telle verge effectuant une vibration naturelle sont toujours mordants et souvent même criards, lorsqu'on ne prend la précaution d'éliminer par des appuis convenables les partiels trop gênants. Aussi les instruments de musique qui mettent en jeu les vibrations transversales naturelles des verges sont-ils réservés à des effets très spéciaux (imitation de cloches par exemple, ou simplement accentuation d'un rythme).

Au contraire la musique utilise couramment les vibrations autoentretenues des lames, soit seules (harmonium), soit associées à un tuyau (chapitre XVII). Mais alors la véritable source sonore est non pas la lame elle-même, mais le courant d'air périodiquement haché par la lame.

187. Diapasons. — Les diapasons sont constitués, comme on sait, par une verge courbée en U, dont la section décroît assez régulièrement du milieu jusqu'aux extrémi-

tés. Une théorie complète exigerait que l'on tint compte de la courbure de la verge, de la variation de section. Il nous suffira de dire que, lorsque le diapason donne son fondamental, il présente approximativement deux nœuds voisins de sa partie médiane (fig. 56). On voit que cette partie médiane s'élève et s'abaisse périodiquement ; par conséquent, si on relie par une queue rigide la partie médiane à une plaque élastique horizontale, cette plaque fonctionnant comme diaphragme (§ 146) va ébranler une masse d'air bien supérieure à celle que pourrait intéresser le diapason agissant seul. D'où production d'un son intense que l'on peut encore augmenter en constituant avec la plaque le fond d'un résonateur (*caisse de résonance*) accordé sur le fondamental du diapason.



Fig. 56.

188. Entretien des diapasons. — A l'heure actuelle, les diapasons sont essentiellement utilisés comme étalons de fréquence : convenablement consultés, c'est-à-dire compte tenu des influences que la température, la masse spécifique du milieu ambiant, l'amplitude de l'oscillation, etc., peuvent avoir sur la fréquence¹, ils peuvent donner des indications dont la précision dépasse couramment le dix-millième. Naturellement il faut pour cela que les oscillations soient aussi régulières que possible : de ce point de vue, les diapasons à entretien électromagnétique, utilisant le principe de la sonnerie électrique², sont un peu défec

1. Une élévation de 1° diminue la fréquence d'un diapason en acier ordinaire de 1 : 10 000, celle d'un diapason en acier au nickel de 1 millionième ; une diminution de 10 p. 100 dans l'amplitude diminue couramment la fréquence de plusieurs cent millièmes, etc.

2. Voir par exemple J. RAIBAUD, *App. et méth. de mesures mécaniques* (Coll. A. Colin), p. 38.

tueux. Actuellement, dans les mesures de précision, on utilise surtout l'entretien par triodes : les branches du diapason vibrent chacune devant un électro polarisé, dans l'enroulement duquel se trouve par suite induite une f. e. m. ayant même fréquence que le diapason. Cette f. e. m. est envoyée dans le circuit grille d'une triode, dont le courant-plaque, ainsi modulé à la fréquence du diapason, alimente l'électro d'entretien de ce dernier¹.

1. H. ABRAHAM et E. BLOCH, *Journ. Phys.* (1920), 225.

CHAPITRE XVI

RÉSONATEURS ET FILTRES ACOUSTIQUES

189. **Oscillations en bloc de l'air renfermé dans une cavité.** — On sait depuis longtemps qu'une cavité de forme quelconque mise en communication avec l'atmosphère par un trou de petites dimensions peut agir comme *résonateur acoustique*, c'est-à-dire que les sons de certaines fréquences, émis au voisinage du trou, sont considérablement renforcés. Cette résonance est souvent extrêmement sélective ; une variation de 1 p. 100 dans la hauteur du son excitateur à partir de la hauteur de plus forte résonance entraîne dans certains cas une baisse notable de l'intensité renforcée. La théorie des résonateurs se ramène à celle des oscillations d'une masse d'air renfermée dans une cavité de volume U , de forme quelconque, séparée de l'atmosphère par un trou de surface S que nous supposons d'abord fermé par un piston de masse m . Nous admettrons que les mouvements périodiques qui prennent naissance sont assez lents et assez petits pour que à tout instant la pression ait dans la cavité une même valeur p , toujours voisine de la pression atmosphérique P . Pour un déplacement x du piston à partir de sa position d'équilibre (pression intérieure égale à la pression atmosphérique) le volume de l'air renfermé dans la cavité augmente de Sx , et la pression de $dP = -\frac{\gamma PSX}{U}$ dans l'hy-

pothèse d'une détente adiabatique. En d'autres termes, le piston est rappelé vers sa position d'équilibre par une force égale à $S dP = \frac{\gamma P S^2 dx}{U}$.

Négligeons les amortissements divers; l'équation du mouvement du piston $m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2 x}{U} = 0$ montre que la fréquence propre du système, correspondant à la fréquence des excitations extérieures pour laquelle il prendra le maximum d'amplitude, vaut

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma P S^2}{U_m}} \quad (1)$$

Soit ρ la masse spécifique de l'air à la pression P ; si on pose $m = \rho v$, v ayant les dimensions d'un volume, l'expression précédente s'écrit :

$$n = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\gamma P}{\rho} \times \frac{S^2}{v} = \frac{L}{U} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{S^2}{\rho U}} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{RU}} \quad (2)$$

(a , célérité du son dans les conditions de l'expérience). $R = \rho : S^2$ a les dimensions d'une longueur; elle représente la *résistance acoustique* du trou, elle dépend évidemment de la forme de ce dernier. (L'inverse de la résistance est la *conductance* du trou.)

190. Théorie des résonateurs. — Résonateurs de Pinaud.

— Supposons d'abord une sphère de rayon R fixée au bout d'un tube long et étroit de section S et de longueur L . Admettons que le piston, que dans le § 189 nous avons supposé séparer la cavité sphérique de l'atmosphère, est constitué précisément par l'air intérieur au tube. On a :

$$m = \rho S L \quad C = S : L$$

$$n = \frac{a}{2\pi} \frac{S}{UL} = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{U}}$$

Par exemple si le tube a un diamètre égal au $\frac{1}{5}$ du

rayon de la sphère et une longueur égale à ce rayon, on trouve $n = 0,0278 \frac{a}{R}$.

La longueur d'onde du son de même fréquence est $\lambda = a : n = 36R$; l'hypothèse d'une pression ayant à chaque instant la même valeur dans toute la cavité est donc parfaitement justifiée, puisque la longueur d'onde du mouvement périodique de l'air est très grande vis-à-vis des dimensions de la cavité.

Résonateurs de Helmholtz. — Les résonateurs de Helmholtz (fig. 57) sont constitués par une sphère (ou un cylindre à peu près aussi large que haut) portant deux ouvertures opposées; l'une A — pourvue ou non d'un col — met en communication l'intérieur du résonateur avec l'atmosphère, l'autre B est munie d'un bout de tuyau effilé qu'on introduit dans l'oreille fonctionnant comme récepteur acoustique.

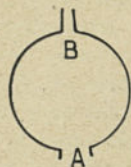


Fig. 57.

Lorsque on produit au voisinage un son de fréquence ν égale à la fréquence propre n du résonateur, il retentit avec intensité. On peut remplacer l'oreille par un détecteur sonore convenable : membrane manométrique, accordée au besoin sur la fréquence du résonateur (Wien) — anémomètre à fil chaud (Tucker et Paris), etc. L'indication devient maximum au moment de la résonance.

La résistance de l'ouverture A peut être calculée dans certaines hypothèses; par exemple elle vaut $1 : 2r$ pour un orifice circulaire de rayon r percé en mince paroi. Si on adapte à cet orifice un col de longueur l , on peut poser que la résistance acoustique de l'ensemble est la somme de la résistance de l'orifice et de la résistance du col; d'où pour valeur de la conductance, l'expression

$$1 : \left[\frac{1}{2r} + \frac{l}{\pi r^2} \right].$$

Pour l'établissement de ces formules on pourra se reporter aux travaux de Rayleigh¹; on n'oubliera pas toutefois que son raisonnement part de l'hypothèse que les particules d'air ne se déplacent pas en *jet* au voisinage de l'ouverture, mais au contraire intéressent, dès leur sortie du col ou dès leur entrée dans le résonateur, toute la masse d'air avoisinante. Dans quelle mesure en est-il ainsi, c'est ce qui ne semble pas avoir été à l'heure actuelle l'objet d'une étude expérimentale détaillée. En tout cas, l'expérience et la théorie présentent un désaccord de l'ordre du tiers de ton.

Résonateurs à trous et à cols multiples. — Une cavité de forme quelconque est percée d'orifices placés n'importe où, mais de dimensions convenables. En découvrant ou en fermant un certain nombre de ces trous, on fait varier la masse m du piston fictif équivalent à l'ensemble des trous découverts; on peut ainsi utiliser une même cavité au renforcement de plusieurs sons. Sur ce principe (qui est celui de l'instrument connu sous le nom d'ocarina) Rayleigh a construit un résonateur réagissant aux divers harmoniques d'un son déterminé.

Exercice I. — Dans une série de résonateurs sphériques, l'orifice d'entrée est un trou circulaire percé en mince paroi et dont le rayon r est le cinquième du rayon du résonateur. Calculer les diamètres des résonateurs renforçant do_1 , do_3 , do_6 , calculer les longueurs des cols cylindriques à adapter aux résonateurs précédents pour qu'ils renforcent respectivement so_0 , mi_2 et do_4 .

Exercice II. — On admet que dans un résonateur à orifices multiples, la conductance de l'ensemble constitué par plusieurs trous débouchés simultanément est égale à la somme des conductances de chaque trou.

On veut réaliser un résonateur de volume intérieur 150 cm^3 renforçant les harmoniques 1 à 8 du do_2 . Montrer que cela est possible avec 8 orifices dont les conductances varient comme les nombres impairs de 1 à 15. Calculer les conductances de cha-

1. RAYLEIGH, *Sound*, II, p.176 et 39.

cun des orifices ; admettant que le diamètre de chacun des trous percés dans la cavité doit rester compris entre 5 et 12 mm, calculer la longueur du col à adapter éventuellement à chaque orifice. Parmi les divers sons que l'on peut renforcer par une combinaison convenable des orifices précédents, quels sont ceux qui se rapprochent le plus des notes de l'échelle diatonique naturelle appartenant à l'intervalle $do_3 - do_4$?

191. Impédance acoustique. — I. Faisons régner à l'entrée du col d'un résonateur une pression acoustique $\varpi = P \sin \omega t$. L'air qui se trouve au col prend un mouvement alternatif de même fréquence, ayant pour équation

$$\rho^v \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2 x}{U} = PS \sin \omega t,$$

le débit instantané $q = \frac{S dx}{dt}$ qui passe à travers le col est donc

$$q = Q \cos \omega t = P \cos \omega t \times \frac{1}{\frac{S\gamma p}{U\omega} - \frac{\omega \rho^v}{S}}.$$

On notera que l'énergie cinétique de l'air du col est

$$\frac{1}{2} \rho^v \frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\rho^v}{S^2} q^2$$

$L = \frac{\rho^v}{S^2}$ est ce qu'on appelle l'*inertance*, elle est l'équivalent acoustique de l'inductance électrique ; de même le travail que doit fournir la pression acoustique pour imposer un déplacement adiabatique dx à l'air du col est

$\varpi S dx = \frac{U \omega dx}{\gamma p}$, $C = \frac{U}{\gamma p}$ est la *capacitance* du résonateur.

L'*impédance acoustique* du résonateur soumis à une pression acoustique de pulsation ω est $\frac{1}{\omega C} - \omega L$; son inverse est l'*admittance*.

Exemples. — Exerçons une pression sinusoïdale à l'entrée d'un tube qui, à la sortie, débouche à l'air libre ; cela

revient à supposer infini le volume de la cavité d'un résonateur. On a alors :

$$Q = \frac{-PS}{\omega \rho v}$$

l'amplitude du débit varie en sens inverse de la fréquence ; en d'autres termes ce dispositif oppose une barrière infranchissable aux mouvements de faible période.

II. — Supposons au contraire un résonateur dont l'entrée offre une faible résistance acoustique. Pour les basses fréquences, on pourra négliger le terme en $\frac{\omega \rho v}{S}$ vis-à-vis de $\frac{\gamma p S}{U \omega}$ et écrire

$$Q = \frac{PU \omega}{\gamma p S} \quad P = \frac{Q \gamma p S}{U \omega}$$

Donc, aux faibles fréquences, *a)* pour assurer un débit acoustique donné à travers le col d'un tel résonateur, il faut aux faibles fréquences des différences de pression proportionnellement grandes ; *b)* pour une pression acoustique donnée le débit vibratoire à l'entrée d'un tel résonateur est petit, si le volume du résonateur n'est pas important.

192. Filtres acoustiques. — Un tube ES (fig. 58) porte, branchés en dérivation à intervalles réguliers, des résonateurs AA_1, BB_1, CC_1, \dots

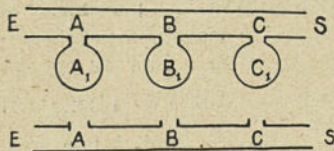


Fig. 58.

On fait régner à l'entrée E une pression acoustique $P \sin \omega t$; on demande les débits aux divers points du tube.

A chaque branchement le débit vibratoire venant de l'amont se partage entre l'aval du tuyau et le résonateur correspondant proportionnellement à leurs admittances respectives.

Supposons d'abord un tuyau plutôt large mis en communication à distances régulières avec l'atmosphère par des trous de petit diamètre ; au besoin pour augmenter l'inertance du branchement, ces trous sont munis de tubes débouchant dans l'atmosphère. Dans ces conditions, une onde de période très courte ne pourra pénétrer dans les tubes de dérivation ; elle sera canalisée par le tuyau principal ; au contraire les variations de pression à grande période provoqueront un débit d'air par les tubes latéraux, elles arriveront par suite très affaiblies à la sortie : un tel tuyau fonctionne donc comme *filtre passe-haut*, c'est-à-dire affaiblissant considérablement toutes les fréquences inférieures à une limite donnée.

Supposons au contraire le tuyau ES plutôt étroit fendu en A, B, C et relié, en chacun de ces points, respectivement aux capacités A_1 , B_1 , C_1 ; quand une onde de faible période arrive en A, la plus grande partie du débit vibratoire passe dans la capacité A_1 ; de la fraction qui se dirige sur B, une faible part seulement peut gagner C et ainsi de suite, le dispositif fonctionne comme *filtre passe-bas*, affaiblissant considérablement toutes les fréquences supérieures à une limite donnée.

Mettant en série un filtre passe-haut et un filtre passe-bas, on réalise un *filtre passe-bande*. Le lecteur désireux d'une théorie plus complète, pourra se reporter aux travaux de Stewart et de Canac¹.

193. Remarque. — Les filtres acoustiques précédents ne font qu'affaiblir, les réduisant au dixième, par exemple, les intensités des sons dont les fréquences sont extérieures à certaines limites. Ils ne les arrêtent pas entièrement, mais cela est sans importance pratique : Un bruit

1. L. E. STEWART, *Phys. Rev.*, 20 (1923), p. 528, 23 (1924), p. 520. — F. CANAC, *Journ. Phys.*, 7 (1926), p. 161.

parasite suffisamment diminué cesse d'être gênant ; c'est un fait constaté tous les jours par les auditeurs des réceptions radiotéléphoniques ou les amateurs de musique enregistrée.

CHAPITRE XVII

SONS D'ÉCOULEMENT

194. **Définitions.** — Dans un fluide qui se déplace avec la vitesse U par rapport à un obstacle, l'expérience courante montre l'existence de tourbillons — au sens physique du mot — c'est-à-dire de régions animées d'un mouvement giratoire. Ces tourbillons paraissent prendre naissance dans la couche limite, au voisinage immédiat de l'obstacle, puis se détachent de ce dernier et sont emportés dans le mouvement général. Or, dans nombre de cas, la formation des tourbillons est périodique et par suite, si la période est convenable, elle s'accompagne d'un *son d'écoulement*, lequel rentre dans l'un des trois types principaux suivants :

1^o *Sons de sillage*, produits lorsqu'un obstacle de dimensions limitées se déplace au sein d'un fluide dans l'ensemble immobile (sifflements d'une cravache, d'un projectile) ; on les appelle également *sons éoliens* lorsque le fluide s'écoule en masse autour de l'obstacle immobile (bruit du vent dans les fils télégraphiques, etc.).

2^o *Sons de jet*, obtenus lorsqu'un fluide légèrement comprimé se détend à travers un orifice (sifflement d'un brûleur bunsen non allumé).

3^o *Sons de biseau*, obtenus lorsqu'un jet sortant d'un

orifice frappe un obstacle ; les phénomènes dépendent à la fois de l'orifice par où sort le jet et de l'obstacle.

195. Sons de sillage. — Je décris les phénomènes pour un cylindre ; la description est générale, seules changent les valeurs numériques.

Dans un courant fluide animé d'une vitesse uniforme, on immerge un obstacle cylindrique, normal à la direction de l'écoulement ; de l'obstacle partent des *tourbillons alternés*, se détachant alternativement d'un côté ou de l'autre (fig. 59).

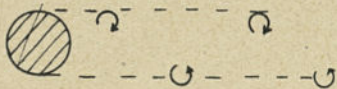


Fig. 59.

L'expérience est aisée à faire en plongeant dans un ruisseau une baguette et en examinant les entonnoirs tra-
duisant à la surface de l'eau les mouvements tourbillonnaires intérieurs (Bénard).

Pour un obstacle entièrement immergé de forme donnée, la fréquence du détachement des tourbillons dépend évidemment de la vitesse U du fluide, d'une dimension D caractéristique de l'obstacle (le diamètre par exemple pour un cylindre circulaire), et des propriétés du fluide défini par sa masse spécifique ρ et sa viscosité cinématique ν ; des considérations d'homogénéité conduisent à écrire

$$n = \frac{U}{D} f\left(\frac{UD}{\nu}\right).$$

Lorsque l'obstacle est constitué par un cylindre de diamètre D d'axe normal à la direction de la vitesse U , Strouhal, puis Kruger ont montré que si le nombre (sans dimension) de Reynolds $R = UD : \nu$ est compris entre 100 et 200 000, c'est-à-dire en fait pour tous les cas pratiques, la fonction $f(UD : \nu)$ se réduit à une constante très sensiblement égale à 0,2. Il y a donc toujours en

somme proportionnalité entre la vitesse de l'écoulement et la fréquence du son ; d'autre part la nature du fluide [définie ici par la viscosité] ne paraît pas intervenir dans le phénomène courant¹.

Ce qui précède revient à dire qu'avec un cylindre rigide il faut pour obtenir des tourbillons alternés de fréquence n un vent (relatif) de vitesse $U_n = 5Dn$. Avec les vents de l'ordre du m : s, les fréquences audibles exigent donc l'emploi de fils dont le diamètre est de l'ordre du millimètre. Avec les tensions nécessaires pour leur maintenir la forme rectiligne, de tels fils possèdent des fréquences propres qui appartiennent également au domaine audible. Or quand la vitesse du vent agissant sur un fil de fréquence propre n est seulement voisine de $5Dn$, différant par exemple de cette valeur de plus de un dixième en plus ou en moins, on constate que :

a) Le fil exécute des vibrations transversales et de grande amplitude, de fréquence n , s'effectuant normalement au vent (Rayleigh).

b) La fréquence des tourbillons alternés qui se détachent du fil est précisément la fréquence propre du fil (Richardson) ; il y a donc eu accommodation de la fréquence des tourbillons alternés sur celle du fil². En somme le détachement des tourbillons alternés présente tous les caractères d'une oscillation de relaxation : fourniture d'énergie de sens constant, proportionnalité de la

1. Mais si R devient inférieur à 100 (ce qui exige l'emploi de fluides visqueux ou de fils minces) l'influence de la viscosité apparaît indiscutable : le rapport $nD : U$ diminue avec R et devient égal à 0 lorsque R est inférieur à 30. Il n'y a plus détachement de tourbillons alternés.

2. Ce phénomène est utilisé dans la harpe éolienne constituée par une série de fils accordés sur la même note N , mais de diamètres différents : Par exemple avec une grille d'une dizaine de fils de diamètres échelonnés entre 0,2 et 1,5 mm, on obtient le $d\acute{o}_4$ (512) de façon permanente lorsque la grille est placée dans un vent dont la vitesse peut varier entre 2 et 6 m : s.

fréquence à la vitesse en l'absence de perturbation; accommodation de la fréquence sur celle des perturbations, supposées périodiques.

196. Sons de jet. — Quand on fait écouler à travers un orifice un fluide sous pression dans le même fluide, on obtient ainsi un jet séparé du fluide ambiant par une zone tourbillonnaire : les tourbillons constitutifs prennent naissance sur l'orifice et de cette dernière sont entraînés par le jet avec une vitesse W toujours inférieure à la vitesse d'écoulement U . Cela n'a rien qui

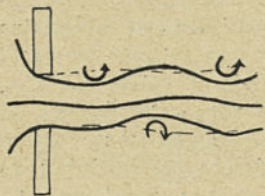


Fig. 60.

doive étonner, puisque les tourbillons marquent la limite entre le jet proprement dit et le fluide ambiant immobile.

Supposons un orifice constitué par une fente rectiligne étroite normale au tableau (fig. 60). Pour un observateur voyageant à la vitesse moyenne des tourbillons, les particules fluides constituant le corps du jet paraissent suivre des trajectoires serpentant entre les noyaux tourbillonnaires; ces noyaux sont équidistants, alternés, et l'expérience montre que leur fréquence n dans le temps est liée à la vitesse U du jet et à la largeur D de la fente par la relation $n = 0,055 U : D$ (soit deux octaves environ au-dessous du son de sillage produit par un vent soufflant à la vitesse U sur un cylindre de diamètre D).

Avec une fente circulaire de largeur D , on met en évidence dans la zone tourbillonnaire l'existence de tourbillons toroïdaux, équidistants, à sens de rotation alternés (Krüger et Marscherer) dont la fréquence obéit encore à la loi $n = 0,055 U : D$.

On peut obliger les sons de jet à accommoder leur fré-

quence n sur celle peu différente d'une perturbation extérieure, par exemple en transmettant à l'orifice les vibrations d'un diapason. On peut également recevoir le jet sur une membrane tendue : les vibrations de cette dernière remontent alors par le jet lui-même ou le fluide immobile ambiant jusqu'à l'orifice où elles forcent le détachement de tourbillon à leur propre fréquence¹.

197. Sons de biseau. — Un jet s'écoule par une fente rectiligne mince, face au milieu de laquelle est placé un coin, dont l'arête est parallèle aux bords de la fente. Nous avons vu au § 196 que la trajectoire médiane du jet est sinueuse ; par suite, elle aborde le coin alternativement du côté droit et du côté gauche ; en d'autres termes, le gros du jet passe



Fig. 61.

alternativement de droite à gauche, le jet oscille perpendiculairement à sa direction. L'étude stroboscopique de ces oscillations a été faite par Carrière avec un jet d'air chargé de fumée et dirigé contre un biseau ; la figure 61 représente de façon schématique la structure périodique du jet : on constate en particulier l'existence d'enroulements tourbillonnaires alternativement placés d'un côté et de l'autre du jet, la distance de deux enroulements situés d'un même côté du jet étant égale à la distance l biseau-fente, ou à un sous-multiple de cette dernière.

1. On réalise dans les cours des expériences de même principe avec un jet cylindrique d'eau dans l'air : les forces capillaires provoquent en effet au bout d'un certain parcours la résolution *périodique* du jet en gouttes. On oblige cette résolution à s'accommoder soit sur la fréquence d'un diapason dont la queue appuie sur la paroi du vase près de l'orifice de sortie, soit sur celle de la membrane que le jet vient frapper.

198. Fréquence des sons de biseau. — La fréquence n des oscillations de jet dépend de la vitesse U , de la distance l entre fente et arête, de la largeur D de la fente et des propriétés spécifiques du fluide (masse spécifique, viscosité cinématique ν). Des considérations d'homogénéité conduisent à écrire

$$n = \frac{U}{l} f\left(\frac{VD}{\nu}, \frac{d}{l}\right).$$

En fait, l'expérience montre que pour les fentes minces la nature du fluide et la largeur de la fente n'interviennent pas ; on a sensiblement

$$n = 2,0 \frac{U}{kl}.$$

k étant un nombre entier : de façon précise, partons d'un ensemble donné fente-biseau et augmentons progressivement la vitesse d'écoulement U ; nous constatons que :

1° Au-dessous d'une vitesse U_0 , on n'entend rien.

2° Le son s'établit pour la vitesse U_0 avec une hauteur un peu inférieure à $n_0 = 2,0 \frac{U_0}{l}$; cette hauteur monte avec la vitesse d'enroulement, dépasse l'octave $2n_0$ et pour une vitesse U_1 supérieure à $2U_0$ tombe brusquement de la fréquence $n_1 = 2,0 \frac{U_1}{l}$ à l'octave grave $n_1 = 2,0 \frac{U_1}{2l}$.

3° La vitesse continuant à croître, le son monte avec elle, et pour une vitesse U_2 supérieure à $\frac{3}{2} U_0$ tombe de la fréquence $n_2 = 2,0 \frac{U_2}{2l}$ à la quarte grave $n_2 = 2,0 \frac{U_2}{3l}$ et ainsi de suite.

Opérant par valeurs décroissantes de la vitesse, on constaterait qu'au passage par une vitesse U_2' inférieure à $\frac{3}{2} U_0$, la fréquence $n_3 = 2,0 \frac{U_2'}{3l}$ du son de biseau aug-

mente d'une quinte prenant la valeur $n'_3 = 2,0 \frac{U}{2l}$, et qu'au passage par une valeur U_1 inférieure à $2U_0$ on revient des sons $2,0 \frac{U}{2l}$ aux sons $2,0 \frac{U}{l}$. Le caractère relaxatif des sons d'écoulement se retrouve toujours.

199. Anche. — La partie essentielle de l'anche est constituée par une lame élastique L (*languette*) oscillant devant un orifice qu'elle découvre et ferme alternativement. A travers l'orifice passe un courant d'air, dont l'action réalise l'auto-entretien des oscillations de la languette.

Dans l'anche *battante* (fig. 62), la languette recouvre entièrement l'orifice percé dans une *rigole* R, sur les bords de laquelle la languette vient donc buter dans une de ses positions extrêmes; dans l'anche *libre* au contraire, la languette, étant de dimensions légèrement inférieures à l'orifice, peut pénétrer dans ce dernier avec un certain jeu, assez faible toutefois pour que le passage de l'air soit pratiquement interrompu à l'instant où la languette pénètre dans l'orifice et tout le temps qu'elle y reste.

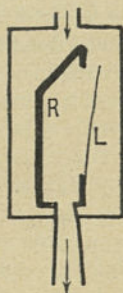


Fig. 62.

L'anche est dite *en dedans*, si elle découvre l'orifice quand elle va contre le vent (clarinette); elle est *en dehors* dans le cas contraire (embouchure de cor).

200. Fonctionnement de l'anche. — Soit une anche battante en dedans, d'aire S. Admettons que sous l'action d'une force $F = pS$, correspondant à une surpression p s'exerçant sur la face intérieure de l'anche (face située du côté d'où vient le vent), la languette tende à fermer l'orifice, mais ne le ferme qu'incomplètement. Si on fait

arriver du côté intérieur de l'air sous la pression p , l'écoulement de l'air autour de la lame provoque sur la face extérieure une *dépression* ajoutant son effet à la surpression intérieure ; l'anche peut ainsi arriver jusqu'à la position où elle appuie sur la rigole et ferme complètement l'orifice. Mais à ce moment, le courant d'air cesse ; avec lui disparaît la dépression sur la face extérieure. Soumise uniquement à la surpression p , l'anche revient en arrière, découvre à nouveau l'orifice ; le courant d'air reprend et ainsi de suite. Cette conception du fonctionnement explique le fait connu depuis longtemps que la fréquence des vibrations autoentretenuës d'une anche battante augmente rapidement avec la pression du vent, les forces qui lancent la languette vers la rigole augmentant en effet avec cette pression.

Dans l'anche libre au contraire, une partie notable de l'oscillation s'effectue à l'intérieur de l'orifice sous l'action des seules forces élastiques (la surpression *constante* ayant pour seul effet de déplacer la position d'équilibre). Une telle anche est donc assez peu sensible à l'influence de la pression du vent pour qu'il soit possible de constituer de véritables étalons secondaires de fréquence au moyen d'anches libres.

201. Anches membraneuses. — Un type d'anche important est celui qu'on réalise au moyen de deux bandes de caoutchouc tendues à l'entrée de l'orifice de façon à laisser entre elles une fente très mince ; quand on souffle à travers cette fente, on obtient un son, à la vérité peu agréable, mais qui offre un schéma excellent des embouchures de cor. La phonation repose sur un phénomène analogue. Pour émettre un son, nous tendons les cordes vocales¹ de façon à ne laisser qu'un étroit passage entre

1. Il serait plus exact de les nommer *lèvres vocales*, ce sont en effet des masses musculomembraneuses situées en deux régions diamétralement opposées du larynx, libres à une extrémité et fixées par l'autre.

leurs bords libres : les cordes vocales entrent en auto-vibration sous l'action du courant d'air des poumons ; les sons produits sont renforcés par les cavités buccales, nasales et pharyngées.

202. Remarque très importante. — La théorie précédente du fonctionnement des anches se base sur le fait que la face extérieure de la languette (c'est-à-dire la face située du côté par où s'écoule le vent) est soumise à une pression variable : *Une anche ne peut donc fonctionner comme telle quand elle est placée en une région où un nœud de pression tendrait à s'établir.*

CHAPITRE XVIII

VIBRATIONS DES COLONNES D'AIR

203. **Généralités.** — Dans un grand nombre d'instruments de musique, la production du son est liée aux vibrations d'une colonne d'air renfermée dans un tuyau. Celui-ci est muni près d'une extrémité d'une *embouchure* par laquelle l'exécutant souffle pour réaliser l'entretien des vibrations. A l'extrémité opposée à l'embouchure, le tuyau peut être *fermé* par un *tampon* (*bourdons* ou *quintatons* des orgues), ou bien *ouvert*, c'est-à-dire qu'il communique avec l'atmosphère par débouché direct (flûte) ou par l'intermédiaire d'un pavillon (cor).

Quelle que soit la forme du tuyau, qu'il soit à *perce cylindrique* — c'est-à-dire qu'il ait une section constante¹ — ou à *perce conique*, c'est-à-dire que sa section croisse continuellement d'une extrémité à l'autre, généralement à partir de l'embouchure, on en fait ordinairement la théorie en admettant d'une part qu'il existe dans le tuyau une onde stationnaire S, entretenue par l'embouchure, — d'autre part que d'une région R de la colonne fluide (la section terminale du pavillon pour les instru-

1. La forme de l'axe du tube n'intervient pas. Dans une trompette, le tube est enroulé en une sorte d'ellipse sur deux tours et demi. Or la trompette achevée et le tube initial ont pratiquement les mêmes partiels.

ments ouverts) se détache et se propage dans l'atmosphère une onde progressive Σ , qu'on pose être sphérique à quelque distance de l'instrument. La théorie des tuyaux sonores consiste donc :

1° A trouver une onde stationnaire compatible avec la forme du tuyau et les conditions aux limites ;

2° A raccorder l'onde stationnaire S et l'onde progressive Σ , c'est-à-dire à aménager les constantes arbitraires qui figurent dans l'expression analytique de ces ondes de façon que ces deux mouvements concordent dans la région R.

204. Traduction analytique des conditions aux limites.

— Dans un tuyau fermé il faut évidemment exprimer que la vitesse est nulle dans la section terminale, contre le tampon. Par analogie, on serait tenté d'écrire que dans

un tuyau ouvert, la pression est constante au débouché dans l'atmosphère ; mais le raccordement des ondes S et Σ entraîne ce qu'on appelle une *correction à l'extrémité ouverte* : pour retrouver par le calcul les fréquences expérimentalement données, il faut en effet supposer au

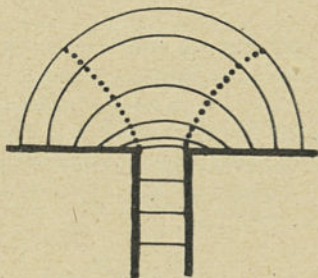


Fig. 63.

tuyau non pas sa longueur réelle L , mais une longueur supérieure $L + l$, l étant une quantité de l'ordre des dimensions transversales du tuyau. Helmholtz donne par exemple pour un tuyau cylindrique de rayon r débouchant à l'air libre dans un plan défini P formant pavillon la valeur $L = 0,8 r$. La raison de cette correction est intuitive : les surfaces d'onde, normales à la vitesse vibratoire,

sont en effet (fig. 63) planes à l'intérieur du tuyau, dans l'onde stationnaire ; et sphériques à l'extérieur, à quelque distance du débouché, dans l'onde progressive. Par continuité, au voisinage immédiat du débouché, la vitesse vibratoire possède une direction intermédiaire entre la direction radiale et la direction axiale ; en d'autres termes tout se passe comme si le débit vibratoire s'effectuait à l'intérieur d'un pavillon fictif, prolongeant le tuyau cylindrique au delà du plan P et représenté en ponctué sur la figure. Or un tel pavillon, s'il existait réellement, aurait pour effet de reporter dans l'espace libre, après le plan P, la région où la pression devient effectivement égale à la pression atmosphérique : la correction à l'extrémité ouverte correspond donc à un allongement fictif du tuyau. Pour le détail des calculs, le lecteur pourra se reporter à Helmholtz (*Wiss. Abhandl.*, I, p. 303) et Rayleigh (*Sc. Papers*, I, pp. 33 et 303).

205. Tuyaux cylindriques. Théorie élémentaire. — Soit un tuyau cylindrique de longueur L dont l'axe est pris pour axe des x , et où nous admettons que le mouvement est le même en tous les points d'une section perpendiculaire à l'axe, d'abscisse moyenne x . La vitesse u d'une particule et la pression ϖ aux points de la tranche x satisfont (§ 66) aux équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \varpi}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

lesquelles admettent la solution périodique stationnaire.

$$u = A \sin \left(2\pi \frac{nx}{a} + \varphi \right) \sin (2\pi nt + \psi)$$

$$\varpi = + Aa\rho \cos \left(2\pi \frac{nx}{a} + \varphi \right) \cos (2\pi nt + \psi).$$

La fréquence n et les phases φ et ψ doivent satisfaire à

certaines conditions aux limites imposées par la constitution du tuyau.

206. Tuyau ouvert aux deux bouts. — La théorie élémentaire pose que la pression acoustique doit être constante aux extrémités ouvertes ; il faut donc que, quel que soit t , $\varpi = 0$ pour $x = 0$ et $x = L$; la première condition entraîne que $\varphi = \frac{\pi}{2}$; la deuxième entraîne que

$$2\pi \left(\frac{nL}{a} + \frac{\pi}{2} \right) = (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$n = \frac{ka}{2L}.$$

Les fréquences des divers partiels possibles forment la série complète des harmoniques du fondamental de fréquence $N = \frac{L}{2a}$; le tuyau contient un nombre entier de demi-longueurs d'onde $\lambda = a : n$.

207. Tuyau ouvert à un bout et fermé à l'autre. — A l'extrémité ouverte d'abscisse $x = 0$, on obtient $\varphi = \frac{\pi}{2}$; à l'extrémité fermée d'abscisse $x = L$, on doit avoir $u = 0$, $\sin \left(2\pi \frac{nL}{a} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$; donc $n = \frac{(2k + 1)a}{4L}$.

Les fréquences des diverses ondes stationnaires possibles forment la série complète des harmoniques impairs du fondamental de fréquence $N' = \frac{a}{4L}$; le tuyau contient un nombre impair de quarts de longueurs d'onde $\lambda = a : n$. Le lecteur n'aura aucune difficulté à montrer que les ventres de pression — c'est-à-dire les sections où la pression acoustique est maximum — s'intercalent au milieu de l'intervalle des ventres de vitesse.

208. Ondes stationnaires dans un tuyau conique. — Soit (fig. 64) un tuyau conique limité à deux sections situées respectivement aux distances R et $R' = R - L$ du

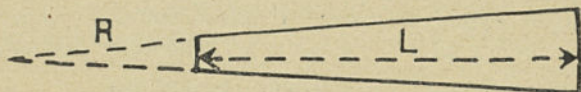


Fig. 64.

sommet du cône ; pour ne pas multiplier les exemples, nous nous limiterons à deux cas, où l'on suppose le tuyau ouvert au bout large, ce qui permet [§ 91] d'écrire que le potentiel des vitesses est de la forme

$$\varphi = \frac{1}{r} \sin 2\pi n \frac{R - R'}{a} \cos 2\pi nt.$$

Tuyau ouvert aux deux bouts. — Écrivons qu'au bout étroit règne une pression constante, il vient :

$$\sin 2\pi n \frac{R - R'}{a} = 0 ; \quad R - R' = \frac{ka}{2n}$$

ou

$$n = \frac{ka}{2L} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{2} k\lambda,$$

k étant un nombre entier ; la fréquence du tuyau conique ouvert aux deux bouts est égale à la fréquence du tuyau cylindrique ouvert de même longueur.

Tuyau conique ouvert au bout large, fermé au bout étroit. — Si le tuyau conique est fermé au bout étroit, c'est qu'en cette section la vitesse est constamment nulle ; donc (§ 87)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{1}{R'^2} \sin 2\pi n \frac{L}{a} + \frac{2\pi n}{aR'} \cos 2\pi n \frac{L}{a} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\pi n \frac{L}{a} = \frac{2\pi n R'}{a}.$$

Cette équation transcendante donne les fréquences des ondes stationnaires périodiques dont le tuyau peut être le siège ; sa résolution graphique n'offre aucune difficulté ; on constate immédiatement que ces fréquences ne forment pas une suite harmonique ; toutefois, si le bout étroit se trouve suffisamment près du sommet de cône, l'écart avec la série harmonique n'est pas très grand : à la limite, les fréquences du tuyau conique complet fermé au sommet et ouvert à la base sont les mêmes que celles du tuyau cylindrique ouvert aux deux bouts de même longueur.

Exercice I. — Montrer que dans un tuyau conique les sections ventrales (à pression constante) sont équidistantes ; les sections nodales (à vitesse constante) ne sont ni équidistantes entre elles, ni équidistantes des sections ventrales intermédiaires.

Exercice II. — Calculer les fréquences des 10 premiers partiels d'un tuyau long de 125 cm et supposé

1° Cylindrique et ouvert aux deux bouts.

2° Cylindrique ouvert à un bout et fermé à l'autre.

3° Conique et ouvert à la base.

4° Tronc-conique, et fermé à la petite section distante de 20 cm du sommet du cône.

Tracer dans chacune des hypothèses pour les partiels 3, 6, 10 la répartition des sections nodales et des sections ventrales.

209. Entretien dans un tuyau d'une onde stationnaire.

— Soit, pour fixer les idées, un tuyau de longueur L , cylindrique, ouvert

à son extrémité A

et muni à l'autre

d'un piston oscil-

lant P . Posons qu'il

existe (fig. 65) dans

le tuyau une onde

stationnaire possédant entre A et P , ces sections exclues,

$p - 1$ nœuds et $p - 1$ ventres de vitesse, et comparons

l'amplitude de la vitesse de l'air au voisinage du piston

à l'amplitude V de la vitesse en un ventre. Si l'amplitude



Fig. 65.

au piston est faible, c'est qu'on y est au voisinage d'un nœud de vitesse, la fréquence est donc proche de $(2p-1)\frac{a}{4L}$; si au contraire l'amplitude au piston est voisine de V , c'est qu'il existe un ventre à proximité immédiate du piston; la fréquence de l'onde est donc sensiblement égale à $\frac{pa}{2L}$. Or ce piston oscillant constitue le schéma d'une embouchure entretenant dans le tuyau une onde stationnaire; en d'autres termes, suivant que nous pouvons considérer l'embouchure comme créant à son voisinage immédiat un nœud ou un ventre de vitesse (un ventre ou un nœud de pression), le tuyau émettra l'une ou l'autre des séries suivantes de partiels.

N° du partiel	Hauteurs relatives		Rapport des fréquences des partiels de même rang
	Ventre de vitesse à l'embouchure	Nœud de vitesse à l'embouchure	
1	1	0,5	2
2	2	1,5	4 : 3
3	3	2,5	6 : 5
4	4	3,5	8 : 7
5	5	4,5	10 : 9
6	6	5,5	12 : 11
7	7	6,5	14 : 13
8	8	7,5	16 : 15
9	9	8,5	18 : 17

L'intervalle entre les partiels correspondants est réduit au ton dès que le rang atteint 5, au demi-ton dès que le rang atteint 8. Comme l'embouchure n'est jamais au niveau exact d'un nœud ou d'un ventre, il devient, dès que le rang du partiel est élevé, impossible de savoir si le tuyau se comporte comme ouvert aux deux bouts ou fermé à l'un et ouvert à l'autre. D'ailleurs, comme l'a fait

remarquer H. Bouasse, le fait que les clairons peuvent faire des *couacs*, c'est-à-dire émettre non pas la note juste, mais un son voisin, établit indiscutablement que la position d'une anche membraneuse par rapport au ventre de pression le plus voisin peut varier dans des limites fort larges : il serait par exemple possible de faire descendre de plus d'un ton le partiel $6 = fa_2$ d'un trombone ; le nœud le plus voisin de l'embouchure subit dans ces conditions un déplacement égal aux six dixièmes de l'internœud primitif !

210. Embouchure de flûte. — Les embouchures usuelles appartiennent à trois types principaux :

1° *Embouchure de flûte*, dont le type est réalisé dans le flageolet ; la flûte de concert, ou *flûte traversière*, présente une modification du type.

2° *Embouchure à anche battante*.

3° *Embouchure de cor*.

La figure 66 donne le schéma d'une embouchure de flûte.

Le vent arrive dans la *chambre C* par l'*ajutage A*, sort en jet par la *lumière L* et vient frapper le bord du *biseau B* ; l'espace entre la *lèvre inférieure* (appartenant à la lumière) et la *lèvre supérieure* (appartenant au biseau) constitue la *bouche* (dont l'aire totale est de l'ordre du cinquième de la section du tuyau) ; la distance des deux lèvres est la *hauteur de bouche*.

Si le tuyau n'existait pas, l'embouchure seule donnerait un son de biseau (§ 197) de fréquence dépendant de la vitesse du vent et de la hauteur de bouche ; mais la colonne d'air renfermée dans le tuyau possède une série de fréquences propres : le son de biseau s'accommode sur l'une de ces fréquences.

Par conséquent : 1° pour un vent donné (défini par la

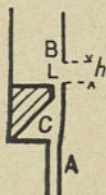


Fig. 66.

pression existant dans le sommier sur lequel est monté le tuyau) et un tuyau de dimensions données, la hauteur de bouche h doit être soigneusement adaptée à la hauteur du son à produire : une diminution de h facilite l'émission des partiels supérieurs et gêne la production des premiers partiels.

2° Pour une embouchure donnée, les partiels supérieurs sortent d'autant mieux que la force du vent est plus grande ; quand on force progressivement le vent, le son émis par un tuyau ouvert passe à l'octave pour une pression p_1 , puis à la douzième pour une pression p_2 , etc. ; si alors on diminue le vent, le son retombe à l'octave pour une pression p_2 plus petite que p_1 , et revient au fondamental pour une pression $p'_1 < p_1$.

Tout cela est conforme aux lois régissant les sons de biseau et vient à l'appui de leur caractère relaxatif.

241. Remarque. — Le jet qui s'échappe par la lumière a pratiquement la pression atmosphérique, son passage d'un bord à l'autre du biseau provoque simplement des *augmentations locales de vitesse*, sans variation sensible de pression. Par suite un tuyau à embouchure de flûte peut être considéré comme possédant au niveau de la bouche un ventre de vitesse, un nœud de pression. *Les partiels d'un tel tuyau ouvert à l'extrémité opposée à l'embouchure forment pratiquement la série harmonique complète*, puisque la pression y est constante aux deux extrémités. Au contraire les partiels d'un bourdon à embouchure de flûte sont pratiquement les harmoniques impairs du fondamental, puisqu'il y a un nœud de pression au niveau de la bouche et un nœud de vitesse contre le tampon. Dans les instruments usuels à embouchure de flûte, on n'utilise guère d'ailleurs que le fondamental et les partiels 2 et 3.

212. Tuyaux à anche battante. — Dans les instruments de la famille des *bois* (le lecteur sait qu'on les construit aussi bien en laiton qu'en bois) une anche du type battant est associée à un tuyau à peu près cylindrique dans la clarinette ou le basson, ou à perce conique dans le saxophone ou le hautbois.

Dans la clarinette ou le saxophone, cette anche est *simple*, c'est-à-dire qu'elle comprend une *languette* (de roseau) vibrante qui vient battre contre la *table* d'une rigole. Dans le basson ou le hautbois l'anche est *double* : elle est constituée par deux languettes (de roseau) en forme de gouttière dont les creux se font face ; lorsque l'anche fonctionne, les deux gouttières se rapprochent, viennent en contact par leurs bords — chaque languette servant alors de rigole à l'autre — s'écartent en rebondissant et ainsi de suite.

Nous avons vu (§ 200) que dans les vibrations autoentretenues d'une anche, la pression éprouve immédiatement à l'aval de cette dernière des variations considérables. Par conséquent lorsqu'elle est associée à un tuyau l'anche est bien plus près d'un ventre de pression que d'un ventre de vitesse. En pratique on peut, *dans les conditions normales de l'emploi de l'anche*, admettre l'existence d'un ventre de pression au niveau immédiat de l'anche. Les partiels d'un tuyau muni d'une anche battante et ouvert à l'extrémité opposée constitueront donc (§ 208) :

1° la suite des harmoniques impairs d'un fondamental si la perce est cylindrique (clarinette) ;

2° la suite complète des harmoniques du fondamental pour une perce conique (hautbois, saxophone).

213. Remarque importante. — Une anche seule vibre avec une fréquence qui *croît avec la force du vent* : adaptons cette anche sur un tuyau ouvert ; pour que le son émis soit de bonne qualité, il semble nécessaire que la fréquence du

son émis par le système soit inférieure à la fréquence de l'anche fonctionnant isolément *avec la même force de vent* ; elle peut même l'être de beaucoup : la languette d'une clarinette donne, quand elle vibre comme verge, le la_4 ; montée sur le bec, elle peut donner en vibrations autoentretenues jusqu'au $ré_5$ quand on force le vent au maximum. Or la clarinette complète va du $ré_2$ au $ré_5$; d'autre part, pour donner les sons élevés, l'exécutant doit pincer fortement le bec de l'instrument entre ses lèvres fonctionnant comme rasette, ce qui diminue la partie utile de l'anche et élève par suite la fréquence de cette dernière (§ 185). La réaction du tuyau sur l'anche abaisse donc toujours le son de cette dernière.

214. Embouchure de cor. — Les *cuvres* (cor, trombones, tuba, trompettes, etc.) sont constitués par un *long* tuyau *conique* (en réalité cylindro-conique) muni à l'extrémité évasée d'un pavillon, à l'extrémité étroite d'un *bassin* hémisphérique en cuivre, dont le diamètre est de l'ordre de 2 à 3 cm. Pour émettre un son, l'artiste appuie sur le bassin les lèvres pincées, et souffle en donnant un *coup de langue*, c'est-à-dire en prononçant quelque chose comme *tu* ou *tip* : le son éclate et se maintient tant que dure le souffle.

La perce d'un instrument de cuivre étant intermédiaire entre le cylindre géométrique et le cône, les partiels d'un tel instrument formeront une série intermédiaire entre la série complète des harmoniques du fondamental et la série des harmoniques impairs ; en fait ils se confondent pratiquement avec la série complète. Écrivons donc les noms de cette série dans la gamme naturelle en prenant le do_0 comme fondamental :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
do_0	do_1	sol_1	do_2	mi_2	sol_2	(la_2^+)	do_3	$ré_3$	mi_3
		11	12	13	14	15	16		
		(fa_3^+)	sol_3	(la_3^-)	(la_3^+)	si_3	do_4		

Certains de ces partiels n'appartiennent pas à la gamme naturelle ; ils sonneraient donc faux si l'anche membraneuse constituée par les lèvres avait pour simple rôle de faire éclater les partiels du tuyau. Mais nous avons vu (§ 209) que cette anche membraneuse peut, au voisinage d'un partiel déterminé, déterminer l'émission d'à peu près n'importe quel son dans des limites assez larges : il suffit que l'exécutant ajuste convenablement la force du souffle et la tension des lèvres. Par suite il peut corriger les partiels 7, 11 et 12 ; il peut réaliser les dièzes et les bémols. C'est de sa part question d'oreille d'abord, d'exercice ensuite.

215. Emploi des tons et des coulisses. — Les instruments comportant un tuyau n'utilisent jamais qu'un nombre limité de partiels : une clarinette ou une flûte ne dépassent pas le n° 3 ; le clairon monte jusqu'au n° 6, mais délaisse les numéros 1 et 2 ; les trompettes actuelles ne sont jamais employées au delà de l'harmonique 12. D'où deux inconvénients :

D'abord l'échelle musicale est par trop réduite, bien que l'exemple du clairon prouve qu'il est possible d'obtenir des effets assez variés avec quatre notes convenablement rythmées. Mais surtout l'emploi d'un instrument donné se trouve limité à l'exécution de pièces d'une tonalité déterminée ; son changement s'imposerait chaque fois que change la tonalité du morceau. Aussi les cuivres sont-ils pourvus de « tons » de rechange : ce sont des tubes de cuivre qu'on adapte à l'instrument entre le corps et le bassin et qui, en allongeant la longueur efficace, abaissent le fondamental : un instrument en do par exemple, c'est-à-dire émettant la série do_1 do_2 sol_2 do_3 mi_3 , etc., est, par l'adjonction d'un ton convenable, transformé en instrument en si bémol, c'est-à-dire qu'il émet la série

si bémol₀ si bémol₁ fa₂ si bémol₂ ré₃

On voit donc que s'il était possible d'introduire ou de supprimer instantanément un ton déterminé, un même instrument non seulement pourrait concorder dans des

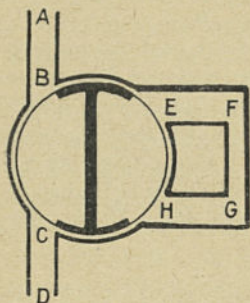


Fig. 67.

tonalités différentes, mais se trouverait par surcroît doté d'une échelle musicale considérablement enrichie. C'est précisément ce qui est réalisé dans les instruments dits à pistons : un robinet à plusieurs voies (dans le cas de la figure 67, un barillet tournant) permet à volonté d'intercaler dans le circuit principal ABCD ou de mettre en court-circuit sur elle-même une coulisse EFGH dont

l'introduction abaisse le fondamental de l'instrument; avec un nombre suffisant de coulisses convenables, on obtient des instruments d'une étendue considérable. On peut par exemple avec trois coulisses obtenir tous les demi-tons dans un intervalle de trois octaves.

216. Emploi de trous. — J'ai dit que les « bois » n'utilisent jamais que les trois premiers partiels de leur tuyau, soit pour une clarinette trois sons que je note

$$do_2, sol_3, mi_4.$$

Mais le lecteur sait que ces instruments portent une série de trous que l'on peut boucher ou déboucher au moyen de *tampons* commandés par des *clés*. Imaginons alors que, l'instrument fonctionnant tous trous bouchés, on débouche un trou T; la pression au niveau de ce trou va se rapprocher de la pression atmosphérique; corrélativement un nœud de pression tendra à se former au voisinage de T — je ne dis pas à son niveau exact —. Or si T se

trouve au voisinage du pavillon de l'instrument, la section proche du pavillon où régnait la pression constante caractéristique du tuyau ouvert doit, lorsqu'on débouche T, pénétrer à l'intérieur de l'instrument, diminuer la longueur efficace de ce dernier, élever le son produit. On conçoit que pour une position *donnée* de T, un *choix* convenable des dimensions de ce dernier élève d'un demi-ton le fondamental quand on vient à déboucher le trou, et que par suite l'instrument ajoute aux trois notes précédentes les trois notes nouvelles

do dièze₂, sol dièze₃, fa₄.

En perçant convenablement dans la paroi 18 trous ou leur équivalent — on peut en effet réaliser des combinaisons de trous (§ 190) —, il est possible d'obtenir 18 fondamentaux constituant la série *complète* des demi-tons compris dans l'intervalle do₂-fa dièze₃. On a ainsi un instrument donnant *tous* les demi-tons de l'intervalle do₂-do dièze₅, les sons sol₃ et au-dessus étant réalisables comme partiels de l'un des 18 fondamentaux précédents.



BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

I. — Pour une première vue d'ensemble sur les propriétés vibratoires de la matière, on peut consulter :

POYNTING ET THOMSON : *Sound* (élémentaire). — C. Griffin and Co, 1900.

J. VIOLLE : *Acoustique*. — Masson, 1888.

J. BECQUEREL : *Traité d'Acoustique*. — J. Herrmann, 1926.

E.-G. RICHARDSON : *Sound*. — E. Arnold, 1927.

II. — Les ouvrages suivants renferment d'excellents exposés en même temps que des bibliographies assez abondantes, parfois cependant un peu exclusives :

F. AUERBACH : *Akustik* [tome 4 (1910) du *Handbuch der Physik*, de Winkelmann, édité par J. A. Barth].

F. TRENDELENBURG : *Akustik* [tome 8 (1927) du *Handbuch der Physik* de H. Geiger et K. Scheel, édité par J. Springer].

III. — Le lecteur français désireux d'approfondir l'Acoustique ne peut trouver mieux que les 12 ouvrages consacrés par H. Bouasse aux phénomènes vibratoires de la matière :

H. BOUASSE : *Pendule, spiral et diapason* (2 vol.). — *Acoustique générale*. — *Cordes et membranes*. — *Verges et plaques*. — *Tuyaux et résonateurs* (2 vol.). — *Instruments à vent* (2 vol.). — *Tourbillons et forces acoustiques* (2 vol.). — *Séismes et sismographes*. — Ch. Delagrave, éditeur.

D'une conception et d'une écriture très personnelles, rédigés de façon extrêmement critique, ces ouvrages apportent en nombre de points des idées nouvelles et une contribution expérimentale remarquable. Les indications bibliographiques y sont systématiquement très sommaires ; on pourra les compléter, pour les références antérieures à 1908, avec les indications du *Traité de Physique* de A. CHWOLSON (traduction française, A. Herrmann, éd.) et avec la bibliographie que publie la REVUE D'ACOUSTIQUE (pour les références postérieures à 1925).

IV. — Comme « classiques », il faut citer essentiellement :

H. VON HELMHOLTZ : *Lehre von den Tonempfindungen*, traduit en français sous le titre *Théorie physiologique de la musique*. — Masson, 1868.

L. RAYLEIGH : *Theory of Sound* (2 vol.). — Macmillan and Co, 1895.

Nota.

La nomenclature adoptée dans le présent ouvrage est, un peu simplifiée, celle proposée par la *Revue d'Acoustique*. Pour la notation des hauteurs, j'ai employé partout l'échelle dite des physiiciens où les fréquences des divers *do* sont des puissances successives de 2, mais en écrivant avec H. Bouasse :

$$\begin{aligned} \text{do}_{-1} &= 16; & \text{do}_0 &= 32; & \text{do}_1 &= 64; \\ \dots, \text{do}_3 &= 256; & \dots\dots \text{do}_6 &= 2064, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Je crois enfin à peine utile de rappeler que, dans la gamme « naturelle » de Zarlin, les intervalles des diverses notes d'une octave au *do* commençant l'octave sont :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{8}$	2

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
CHAPITRE PREMIER : Cinématique des mouvements vibratoires	3
CHAPITRE II : Cinématique des ondes	14
CHAPITRE III : Oscillations naturelles des systèmes vibrants	24
Oscillations élastiques non amorties d'un point matériel, 26. — Oscillations amorties d'un point matériel, 29.	
CHAPITRE IV : Oscillations forcées des systèmes vibrants	33
CHAPITRE V : Systèmes à plusieurs degrés de liberté	46
CHAPITRE VI : Oscillations de relaxation	54
CHAPITRE VII : Dynamique des ondes	64
Propagation d'une onde plane longitudinale, 65. — Passage du son d'un milieu dans un autre, 73. — Propagation d'une onde longitudinale sphérique, 77.	
CHAPITRE VIII : Propagation des éléments acoustiques	85
Propagation en milieu libre, 85. — Propagation dans les tuyaux, 91.	

CHAPITRE IX : Sources en mouvement par rapport au milieu ambiant	96
CHAPITRE X : Audition	104
CHAPITRE XI : Mesures acoustiques	119
Mesure des fréquences, 119. — Mesure des vitesses vibratoires, 123. — Mesure des pressions acousti- ques, 124. — Forme des vibrations acoustiques, 127.	
CHAPITRE XII : Inscripteurs, microphones et émet- teurs	129
CHAPITRE XIII : Production thermique des sons ..	139
Vibrations thermiques forcées, 139.	
CHAPITRE XIV : Cordes vibrantes	145
Corde frappée, 154. — Cordes attaquées par un archet, 156.	
CHAPITRE XV : Vibration des verges	163
CHAPITRE XVI : Résonateurs et filtres acoustiques	175
CHAPITRE XVII : Sons d'écoulement	183
CHAPITRE XVIII : Vibrations des colonnes d'air ..	192
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.....	207



