ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma*	Enrico Betti *in Pisa*
Eugenio Beltrami *in Pavia*	Felice Casorati *in Pavia.*

SERIE II – TOMO XII

(dal maggio 1883 al dicembre 1884).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XII.° (SERIE II.ª)

PAG.

Indice.

Sul grado e sopra i discriminanti di una equazione algebrico differenziale del primo ordine fra quattro variabili e della sua primitiva completa algebrica.

(*Nota di* Francesco d'Arcais, *a Padova.*)

1. Il chiarissimo prof. Felice Casorati in una importante Nota letta nell'adunanza 6 luglio 1876 del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere ed avente per titolo: *Sulle soluzioni singolari delle equazioni alle derivate parziali,* stabilisce il legame esistente tra il grado di una equazione algebrica alle derivate parziali di primo ordine fra tre variabili, che si suppone ammettere una primitiva completa algebrica, ed il grado di questa primitiva e tra i discriminanti delle medesime equazioni. Secondo il prof. Casorati, algebrico differenziale vien detta una equazione o legame fra più variabili quando tale legame si possa esprimere con un numero finito di operazioni algebriche da farsi sui simboli delle variabili e delle derivate parziali di una fra queste rispetto alle altre. Tale equazione si può sempre supporre ridotta a forma razionale intera rispetto a questi simboli. La primitiva completa è algebrica quando il legame che esiste tra le variabili e le costanti è pure espresso con un numero finito di operazioni algebriche a farsi su queste quantità. Il discriminante dell'equazione alle derivate parziali si intende preso considerando le derivate parziali, quello della primitiva completa considerando le costanti arbitrarie come le variabili della forma della quale si calcola il discriminante medesimo.

Sia

$$f_1(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta)=0$$

o più semplicemente

$$f_1(\xi,\ \eta)=0, \tag{a}$$

ξ, η essendo le costanti arbitrarie, la primitiva completa algebrica; ovvero, posto $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ in luogo di ξ, η,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

essendo ora f una funzione razionale intera ed omogenea di ξ, η, ζ i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z.

Sia

$$F_1(p, q) = 0$$

la equazione algebrica alle derivate parziali, dove al solito $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, ottenuta eliminando le ξ, η tra la (a) e le sue derivate rapporto alla x e alla y; ovvero, posto $-\frac{p}{r}$, $-\frac{q}{r}$ in luogo di p, q

$$F(p, q, r) = 0$$

essendo allora F funzione razionale intera ed omogenea di p, q, r i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z.

Il prof. Casorati ha dimostrato che se n è il grado della primitiva rapporto alle costanti, n^2 è in generale il grado della equazione alle derivate parziali rapporto alle derivate, ma che tale grado può riuscire minore in casi particolari. A questo risultato Egli è pervenuto mediante una ingegnosa considerazione geometrica.

Relativamente al discriminante G della $F = 0$ e g della $f = 0$, prendendo in speciale esame il caso $n = 2$, dimostra che se l'equazione alle derivate parziali è del terzo o quarto grado rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di secondo grado rispetto alle costanti arbitrarie il suo discriminante è nullo (*); ed in seguito, prendendo a considerare il caso in cui

$$f = c + l\eta + m\xi + n\xi\eta,$$

nel quale la $F = 0$ risulta di secondo grado nelle derivate, trova tra i discriminanti una relazione semplice ed importante, ed introduce nella equazione alle derivate parziali il discriminante g invece di una delle funzioni c, l, m,

(*) Questo teorema è contenuto nel seguente generale, che si può facilmente dimostrare col metodo del prof. Casorati.

Quando l'equazione a derivate parziali fra tre variabili è del grado n^2, $n^2 - 1$, $n^2 - 2, \ldots n + 1$, rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di grado n rispetto alle costanti arbitrarie, il suo discriminante è nullo.

n (*), riducendola ad una forma che, insieme colla relazione tra G e g, è di fondamentale importanza per lo studio delle soluzioni singolari.

Nella presente Nota, con analoghi procedimenti, vengono studiate le equazioni algebrico differenziali di primo ordine fra quattro variabili, stabilendo la relazione tra i gradi della equazione e della primitiva completa, il modo col quale il grado della equazione alle derivate parziali può riuscire minore del normale, i casi nei quali G è zero identicamente, e determinando la relazione tra g e G in un caso particolare quando $n = 2$.

2. Si abbia l'equazione

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{1}$$

dove ξ, η, ζ indicano delle costanti arbitrarie, f_1 è una funzione razionale intera di grado n delle ξ, η, ζ i cui coefficienti sono funzioni razionali intere delle variabili x, y, z, w.

Derivando la (1) rapporto alle variabili indipendenti x, y, z e posto

$$p = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial y}. \qquad r = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(*) Un altro caso nel quale si arriva facilmente a stabilire la relazione tra i discriminanti g e G è il seguente:

Essendo $n = 3$, sia

$$f = a\eta^2\zeta + b\zeta^2\xi + c\xi^2\eta + 2l\xi\eta\zeta = 0.$$

Allora le curve di terzo ordine (ξ, η, ζ coordinate)

$$f = 0, \qquad f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0$$

passano, per qualunque valore di x, y, z, pei punti

$$\xi = 0, \quad \eta = 0; \qquad \eta = 0, \quad \zeta = 0; \qquad \xi = 0, \quad \zeta = 0$$

in modo che risultano nel primo punto tangenti alla retta $\xi = 0$, nel secondo alla $\eta = 0$, nel terzo alla $\zeta = 0$.

Potremo prendere

$$g = 27abc + 8l^3;$$

e posto

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c & l \\ a_x & b_x & c_x & l_x \\ a_y & b_y & c_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & l_z \end{vmatrix}$$

dove a_x, a_y, a_z,... indicano le derivate di a,... rapporto ad x, y, z, si trova

$$G = k^6 g.$$

Anche qui si introduce facilmente g in vece di una delle a, b, c, l nella equazione alle derivate parziali.

otteniamo

$$\left.\begin{aligned} f'_{1x}+f'_{1w}p=0 \\ f'_{1y}+f'_{1w}q=0 \\ f'_{1z}+f'_{1w}r=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dalle quali e dalla (1) eliminando ξ, η, ζ otteniamo una equazione della forma

$$F_1(p, q, r)=0 \tag{3}$$

dove F_1 è una funzione razionale intera di p, q, r i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di x, y, z, w.

Ponendo poi $\frac{\xi}{v}$, $\frac{\eta}{v}$, $\frac{\zeta}{v}$ in luogo di ξ, η, ζ e $-\frac{p}{s}$, $-\frac{q}{s}$, $-\frac{r}{s}$ in luogo di p, q, r le equazioni (1), (2), (3) assumono la forma

$$f(\xi, \eta, \zeta, v)=0 \tag{1$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho p=f'_x(\xi, \eta, \zeta, v) \\ \rho q=f'_y(\xi, \eta, \zeta, v) \\ \rho r=f'_z(\xi, \eta, \zeta, v) \\ \rho s=f'_w(\xi, \eta, \zeta, v) \end{aligned}\right\} \tag{2$'$}$$

$$F(p, q, r, s)=0; \tag{3$'$}$$

ed allora nella equazione (1)′ (primitiva completa algebrica) f è una funzione razionale intera ed omogenea di grado n delle ξ, η, ζ, v e nella (3)′ (equazione algebrica alle derivate parziali del primo ordine) F è razionale intera ed omogenea di un grado, che indicheremo con N, rispetto alle p, q, r, s.

Determiniamo N. Adottando il metodo geometrico così opportunamente tenuto dal prof. Casorati nella Nota citata, noi potremo supporre le ξ, η, ζ, v siano le coordinate omogenee dei punti di uno spazio (primo) e p, q, r, s le coordinate dei punti di un altro spazio (secondo).

Le formole (2)′ stabiliscono una corrispondenza tra i punti del primo spazio e del secondo per modo che alla superficie (1)′ del primo spazio corrisponde nel secondo la superficie (3)′. In questa guisa una equazione alle derivate parziali di primo ordine algebrica fra quattro variabili x, y, z, w stabilisce una corrispondenza fra i punti di due spazî a tre dimensioni; le x, y, z, w figurano come parametri nelle equazioni delle superficie corrispondentesi nei due spazî e nelle formole (2)′. Ora N è dato dal numero di punti nei quali la

$F=0$ viene incontrata da una retta qualunque

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$$
$$\alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r + \delta_1 s = 0,$$

ovvero dal numero dei punti comuni nel primo spazio alle tre superficie, tutte di ordine n,

$$f(\xi, \eta, \zeta, v) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z + \delta f'_w = 0 \\ \alpha_1 f'_x + \beta_1 f'_y + \gamma_1 f'_z + \delta_1 f'_w = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Avremo dunque $N=n^3$, cioè: *il grado della equazione algebrico differenziale rispetto alle derivate parziali è uguale, in generale, alla terza potenza del grado della primitiva completa rispetto alle costanti.*

Ma il grado N potrà riuscire minore di n^3. Ciò avverrà se le superficie

$$f=0, \qquad f'_x=0, \qquad f'_y=0, \qquad f'_z=0, \qquad f'_w=0 \tag{5}$$

hanno in comune un certo numero di punti fissi, cioè indipendentemente dai valori di x, y, z, w, ovvero se queste medesime superficie passano tutte per una o più curve fisse, perchè allora ciò pure avrà luogo per le superficie (4), qualunque siano i valori di x, y, z, w, α, β...

3. Data la $f=0$, per calcolare il discriminante G della $F=0$, seguendo un procedimento analogo a quello tenuto nella Nota già citata, si vede come basti eliminare ξ, η, ζ, v dalla equazione

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} & \frac{\partial f}{\partial \zeta} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f'_y}{\partial \xi} & \frac{\partial f'_y}{\partial \eta} & \frac{\partial f'_y}{\partial \zeta} & \frac{\partial f'_y}{\partial v} \\ \frac{\partial f'_z}{\partial \xi} & \frac{\partial f'_z}{\partial \eta} & \frac{\partial f'_z}{\partial \zeta} & \frac{\partial f'_z}{\partial v} \\ \frac{\partial f'_w}{\partial \xi} & \frac{\partial f'_w}{\partial \eta} & \frac{\partial f'_w}{\partial \zeta} & \frac{\partial f'_w}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

e dalle tre equazioni ottenute da questa scrivendo successivamente f'_z, f'_w, f'_x; f'_w, f'_x, f'_y; f'_x, f'_y, f'_z in luogo di f'_y, f'_z, f'_w.

4. Vediamo ora come si comporta G in relazione coi gradi di F e f.

Osserviamo che i generi (*) delle superficie $f=0$, $F=0$ univocamente corrispondenti, sono uguali.

(*) Vedi Salmon: *Analytische Geometrie des Raumes deutsch bearbeitet von Fiedler*, 1874, pag. 505, 2.ª parte e Noether: *Curve multiple di superficie algebriche.* Annali di Matematica, tomo V, serie II, pag. 173.

Quando $n=1$ non si hanno discriminanti. Per $n=2$, il genere di $f=0$ è zero, e la $F=0$, generalmente di grado 8, dovrà pure essere di genere zero, per il che occorre che essa possieda curve doppie o punti tripli; dicasi lo stesso se la $F=0$ risulterà di 7°, 6°, 5°, 4° grado. Se poi, per avere le (5) cinque punti in comune, la $F=0$ sarà di grado 3, allora essa non potrà avere alcuna retta doppia, ma solo potrà avere dei punti doppi. Se la $F=0$ risulterà di secondo grado, non avrà punto doppio. Da ciò concludiamo:

Quando una equazione a derivate parziali tra quattro variabili di primo ordine è di grado ottavo, settimo,.... quarto rispetto alle derivate ed ammette una primitiva completa di secondo grado rispetto alle costanti arbitrarie, il suo discriminante è identicamente nullo. Se l'equazione è di terzo grado (*) il suo discriminante potrà non essere nullo. Se l'equazione è di secondo grado esso è diverso da zero, se tale è quello della $f=0$.

Quando si ha in mira lo studio comparativo dei discriminanti g e G è d'uopo partirci da una $f=0$ priva di quelle singolarità per le quali sia nullo il g. Così, come per $n=2$, quando $n=3$ dovremo supporre zero il genere della superficie $f=0$; ed allora finchè $N>3$ il discriminante G risulterà sempre nullo dovendo la $F=0$ essere di genere zero.

Rammentando che le superficie di ordine n che hanno in comune

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-3$$

punti passano tutte per altri

$$n^3+3-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

punti fissi, vediamo che potremo solamente supporre le (5) passino al più per $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-4$ punti fissi.

Questo numero essendo 16 per $n=3$, avremo $N=27-16=11$. Perciò, quando $n=3$, non si ottiene alcun caso utile per la comparazione di g e G finchè ci si limita a supporre che le (5) abbiano solamente dei punti in comune.

Ma, come abbiamo accennato, le (5) possono avere in comune una linea.

(*) Calcolando il G pel caso particolare in cui

$$f=a\xi\eta+b\zeta\xi+cv\xi+d\eta\zeta+g\eta v-(a+b+c+d+g)\zeta v$$

e nel quale perciò le (5) passano pei quattro vertici del tetraedro di riferenza e pel punto unità $\xi=\eta=\zeta=v$ e conseguentemente F è di terzo grado, si trova $G=0$.

È noto che se tre superficie di ordine n_1, n_2, n_3 passano per una curva C_m d'ordine m con h punti doppi apparenti, esse si tagliano in altri

$$n_1 n_2 n_3 - m(n_1 + n_2 + n_3 - m - 1) - 2h$$

punti non situati sopra C_m (*). Per cui supponendo che le superficie (5) abbiano in comune una tal curva C_m, le (4) che pure passeranno per la medesima curva si segheranno in altri

$$n^3 - m(3n - m - 1) - 2h$$

punti e conseguentemente

$$N = n^3 - m(3n - m - 1) - 2h.$$

Per $n = 2$ avremo $N = 2$ se si suppone che le superficie (5) passino per una conica. Allora G è diverso da zero. Questo caso è studiato in appresso.

Quando $n = 3$ si verifica facilmente che N è sempre superiore a 3, e quindi $G = 0$, finchè le (5) passano per una curva comune C_1 o C_2 o C_3 o C_4 o C_5. Quando hanno in comune una C_6 con 6 punti doppi apparenti allora avremo $N = 3$ e questo caso si presta allo studio comparativo dei discriminanti. Una tal curva C_6 la si otterrebbe ad es. considerando la intersezione di due superficie di secondo e quarto ordine che si incontrano inoltre in una conica, oppure colla intersezione di due superficie di ordine secondo e quinto che si intersecano inoltre in una C_4 con due punti doppi apparenti.

5. Prendiamo ora a considerare, quando $n = 2$, il caso nel quale le (5) abbiano una conica comune, e determiniamo la relazione tra g e G.

Supponendo la conica comune sia la

$$v = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

prendiamo

$$f = l(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + dv^2 + 2a\xi v + 2b\eta v + 2c\zeta v = 0.$$

Il discriminante della f è

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & a \\ 0 & l & 0 & b \\ 0 & 0 & l & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = l^2(ld - a^2 - b^2 - c^2),$$

(*) Vedi Salmon, opera citata, pag. 115.

e potremo quindi prendere

$$g = l d - a^2 - b^2 - c^2.$$

La $F = 0$ si otterrebbe molto semplicemente in questo caso e per determinarne il discriminante G osserviamo che il determinante del paragrafo 3 diviene ora

$$\begin{vmatrix} l\xi + av & l\eta + bv & l\zeta + cv & a\xi + b\eta + c\zeta + dv \\ l_y\xi + a_y v & l_y\eta + b_y v & l_y\zeta + c_y v & a_y\xi + b_y\eta + c_y\zeta + d_y v \\ l_z\xi + a_z v & l_z\eta + b_z v & l_z\zeta + c_z v & a_z\xi + b_z\eta + c_z\zeta + d_z v \\ l_w\xi + a_w v & l_w\eta + b_w v & l_w\zeta + c_w v & a_w\xi + b_w\eta + c_w\zeta + d_w v \end{vmatrix} = 0$$

indicando con $l_y\ l_z\ l_w \ldots$ le derivate di $l, \ldots$ rapporto ad y, z, w ovvero sviluppando

$$\left.\begin{aligned} -|a b_y c_z l_w|(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - |b c_y d_z l_w| \xi v + |a c_y d_z l_w| \eta v \\ -|a b_y d_z l_w| \zeta v + |a b_y c_z d_w| v^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

dove abbiamo posto

$$|a b_y c_z l_w| = \begin{vmatrix} a & b & c & l \\ a_y & b_y & c_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & l_z \\ a_w & b_w & c_w & l_w \end{vmatrix} \text{ ecc.}$$

Poniamo ora

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c & d & l \\ a_x & b_x & c_x & d_x & l_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y & l_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z & l_z \\ a_w & b_w & c_w & d_w & l_w \end{vmatrix};$$

e

$$\chi = k^4 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \lambda \\ \alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z \\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w \end{vmatrix}$$

sia il determinante ad elementi reciproci del determinante k.

La equazione (6) allora assume l'aspetto

$$-\delta_x(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_x\xi v+\beta_x\eta v+\gamma_x\zeta v-\lambda_x v^2=0. \tag{7}$$

Applicando lo stesso calcolo alle altre tre equazioni di cui è parola nel paragrafo 3, otteniamo:

$$-\delta_y(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_y\xi v+\beta_y\eta v+\gamma_y\zeta v-\lambda_y v^2=0$$
$$-\delta_z(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_z\xi v+\beta_z\eta v+\gamma_z\zeta v-\lambda_z v^2=0$$
$$-\delta_w(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\alpha_w\xi v+\beta_w\eta v+\gamma_w\zeta v-\lambda_w v^2=0.$$

Rimane ora da eliminare ξ, η, ζ, v tra queste tre equazioni e la (7). Per far ciò ricaviamo da esse i valori di $\frac{\xi^2}{v^2}+\frac{\eta^2}{v^2}+\frac{\zeta^2}{v^2}$ e di $\frac{\xi}{v}$, $\frac{\eta}{v}$, $\frac{\zeta}{v}$ ed esprimiamo che la prima quantità è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre. Avremo così

$$-\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \delta_x\\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \delta_y\\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \delta_z\\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \delta_w\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \gamma_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \beta_w & \gamma_w & \lambda_w\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\beta_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x\\ \beta_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y\\ \beta_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z\\ \beta_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2$$
$$-\begin{vmatrix}\alpha_x & \gamma_x & \delta_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \gamma_y & \delta_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \gamma_z & \delta_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \gamma_w & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix}\alpha_x & \beta_x & \delta_x & \lambda_x\\ \alpha_y & \beta_y & \delta_y & \lambda_y\\ \alpha_z & \beta_z & \delta_z & \lambda_z\\ \alpha_w & \beta_w & \delta_w & \lambda_w\end{vmatrix}^2=0$$

ovvero

$$\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right)^2-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\right)^2-\left(\frac{\partial\chi}{\partial\gamma}\right)^2=0$$

cioè

$$k^6(ld-a^2-b^2-c^2)=0.$$

Il primo membro di questa equazione è il discriminante G ed avremo quindi

$$G=k^6 g.$$

Mediante g si esprimono poi f e F colle formole

$$lf=l^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+dl+2al\xi+2bl\eta+2cl\zeta$$
$$=(a+l\xi)^2+(b+l\eta)^2+(c+l\zeta)^2+g$$

nella quale abbiamo posto $v = 1$, e

$$
Fd^2 = 4g \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2g & b & c & d \\ g_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ g_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ g_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2
$$

$$
+ \begin{vmatrix} 2g & a & c & d \\ g_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ g_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ g_3 & a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2g & a & b & d \\ g_1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ g_2 & a_2 & b_2 & d_2 \\ g_3 & a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}^2
$$

indicando con a_1 b_1 c_1 g_1 d_1 le derivate di a b c g d rapporto ad x considerando w come funzione di x, con a_2, b_2,... e con a_3, b_3,... le analoghe rapporto ad y e a z.

Padova, marzo 1883.

Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi.

(*Prima Memoria di* S. PINCHERLE, *a Bologna*.)

Lo studio delle serie di funzioni sferiche nel campo della variabile complessa conduce all'osservazione che molte proprietà di quelli sviluppi sono suscettibili di una generalizzazione molto ampia e tale da dare origine ad una speciale teoria, quella degli sviluppi in serie della forma

$$\sum c_n p_n(x)$$

dove con

$$p_n(x) \qquad (n=0,\ 1, \dots \infty)$$

s'intende una determinata successione di funzioni analitiche. Una simile teoria può venir considerata sotto varî punti di vista, perchè varî sono i modi di definire una successione di funzioni: in questa prima Memoria ho tentato di trattare la questione in modo da conservare l'analogia colla teoria delle serie di funzioni sferiche.

Richiamerò dapprima quelle proprietà degli sviluppi in serie di funzioni sferiche la cui generalizzazione è sembrata maggiormente importante:

1.° « La funzione sferica $p_n(x)$ di una variabile è definita come coefficiente di y^n nello sviluppo di

$$(1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

» in serie di potenze intere e positive di y.

» Essa funzione $p_n(x)$ è un polinomio razionale intero di grado n in x, e » come tale regolare per tutti i valori finiti di x.

2.° » Uno sviluppo in serie di funzioni sferiche

$$\sum c_n p_n(x)$$

» converge entro un'ellisse descritta nel piano della variabile x coi fuochi nei

» punti 1 e —1. I semi assi di questa ellisse sono

$$\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$$

» se ρ è il raggio di convergenza della serie $\sum c_n x^n$. Le ellissi del sistema » omofocale coi fuochi ± 1 sono per le serie di funzioni sferiche, ciò che le » circonferenze col centro nell'origine sono per le serie di potenze. Nei campi » chiusi da linee di questo sistema le serie di funzioni sferiche godono della » convergenza incondizionata ed in egual grado.

3.° » Al sistema delle funzioni sferiche $p_n(x)$ si può associare un secondo » sistema di funzioni $q_n(y)$ dette *di seconda specie;* queste, limitando conve» nientemente il campo delle variabili x ed y, danno luogo all'identità

$$\frac{1}{y-x}=\sum p_n(x)\,q_n(y)$$

» da cui e dal teorema di Cauchy si deduce che ogni funzione analitica $f(x)$ » regolare entro un'ellisse di fuochi ± 1 è sviluppabile in serie di funzioni » sferiche $p_n(x)$, e lo sviluppo converge incondizionatamente ed in egual grado » entro l'ellisse, il contorno escluso. Una funzione analitica regolare fuori di » una simile ellisse è sviluppabile invece in serie di funzioni di seconda specie, » ed una funzione regolare nell'anello compreso fra due ellissi omofocali è svi» luppabile in serie di funzioni $p_n(x)$ e $q_n(x)$.

» Inoltre lo sviluppo di una funzione analitica in serie di $p_n(x)$ o $q_n(x)$ è » possibile in un sol modo, cioè non esistono *sviluppi dello zero* in serie di » funzioni sferiche.

4.° » Le proposizioni precedenti permettono di risolvere il seguente pro» blema: dato un sistema di punti

$$a_n \qquad (n=0,\dots\infty)$$

» nel piano della variabile x ed i punti limiti del sistema a_n trovandosi sopra » un'ellisse, costrurre una funzione analitica che nei punti a_n ammetta singo» larità di specie determinata, ed in particolare costruire una funzione analitica » che abbia uno spazio lacunare (interno od esterno) di forma ellittica (*). »

La presente Memoria ha per oggetto la generalizzazione delle proprietà ora ricordate. Nel primo capitolo si premettono alcune definizioni e proposizioni

(*) Per le proprietà 2ª e 3ª, v. Neumann (Halle, 1862) e Thomé (J. de Crelle, t. 66); per la 4ª, v. una mia Nota nei Rendiconti dell'Accademia di Bologna, marzo 1883.

generali sui gruppi di numeri ed i sistemi di funzioni, nel secondo si indica un modo generale di ottenere sistemi di funzioni analitiche, e si cerca quali siano le linee che limitano i campi di convergenza delle serie procedenti per tali funzioni. Nel terzo si suppone che ad un dato sistema di funzioni $p_n(x)$ corrisponda un altro sistema, che si dirà associato; si cerca, mediante il teorema di Cauchy, quali funzioni siano sviluppabili in serie di funzioni $p_n(x)$, e si mostra come sotto certe condizioni si conservino in questi sviluppi le proprietà riscontrate nelle serie di funzioni sferiche. Infine gli ultimi due capitoli sono dedicati allo studio di un metodo che si può, entro certi limiti, sostituire al teorema di Cauchy e che si presenta in qualche modo come una estensione della teoria delle equazioni lineari in casi in cui il numero delle equazioni e delle incognite diventa infinito.

Una seconda Memoria tratterà dello studio degli sviluppi dello zero, che non vengono considerati in questo primo lavoro, e all'esame della ques ione: se, dato un sistema di funzioni, si possa dire se esso ammette o no un sistema associato e nel caso affermativo, in qual modo si possa giungere a determinarlo.

I.

1. Un sistema di numeri reali o complessi in numero infinito

$$a_n \qquad (n=0,\ 1, \ldots \infty)$$

verrà detto un *gruppo* ed indicato con (a_n).

Un insieme ∞^∞ di gruppi verrà detto una *varietà*.

Un gruppo (a_n) si dirà *interno alla varietà* r, indicando r un numero positivo, se si potrà determinare un numero positivo $r' < r$ tale che da un valore di n in avanti, sia sempre

$$|a_n| \leqq Cr'^n$$

dove C è un numero positivo finito ed indipendente da n.

Un gruppo (a_n) si dirà *esterno* alla varietà r se si potrà determinare un numero positivo $r'' > r$ e tale che per infiniti numeri a_n del gruppo si abbia

$$|a_n| \geqq Cr''^n.$$

Risulta evidentemente da queste definizioni che se un gruppo (a_n) è interno alla varietà r, è interno altresì a tutte le varietà r'' maggiori (per le quali r'' è $> r$) e che se il gruppo è esterno alla varietà r, è esterno a tutte le varietà minori.

2. Se un gruppo (a_n) non è nè interno nè esterno ad una varietà r, esso si dirà *sul contorno* della varietà stessa; così i gruppi

$$(n), \quad \left(\frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{n-1}{n+1}\right),$$

sono sul contorno della varietà 1 (*). Questa definizione è giustificata dalle considerazioni che seguono.

Se il gruppo (a_n) è sul contorno della varietà r esso non può essere esterno ad alcuna varietà maggiore, nè interno ad alcuna varietà minore.

Se la serie $\sum a_n x^n$ ammette il raggio effettivo di convergenza R, il gruppo (a_n) è sul contorno della varietà $\frac{1}{R}$: infatti esso non è interno, poichè si avrebbe per $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$

$$|a_n| \leqq \frac{C}{r^n}$$

ossia la serie convergerebbe in un cerchio di raggio $r > R$, contro l'ipotesi, nè esterno, poichè si avrebbe per infiniti valori di n e per $r' < R$

$$|a_n| \geqq \frac{C}{r'^n}$$

il che non può essere, come dalla teoria delle serie di potenze. Inversamente, se il gruppo (a_n) è sul contorno della varietà r, la serie $\sum a_n x^n$ ha per cerchio effettivo di convergenza il cerchio di raggio $\frac{1}{r}$; infatti essa non ha un cerchio di raggio maggiore $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{r}$ perchè dovrebbe essere per $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{r}$

$$|a_n| \leqq C\xi^n$$

cioè (a_n) sarebbe interno alla varietà r, nè minore, perchè per r' maggiore di r di tanto poco quanto si vuole deve essere

$$|a_n| \leqq C r'^n,$$

che dimostra che $\sum a_n x^n$ converge entro il cerchio $\frac{1}{r}$.

Risulta da questo teorema che uno stesso gruppo non può trovarsi contem-

(*) Una serie Σa_n è convergente incondizionatamente se i suoi termini formano un gruppo (a_n) interno alla varietà 1, è divergente se formano un gruppo esterno, vi è dubbio se il gruppo è sul contorno della varietà 1.

poraneamente sul contorno di due diverse varietà, e che se il gruppo (a_n) è sul contorno della varietà r, esso è interno ad ogni varietà maggiore ed esterno ad ogni varietà minore di r.

3. Se un gruppo (a_n) è tale che preso un numero positivo ε arbitrariamente piccolo sia, a partire da un certo valore dell'indice n,

$$|a_n| \leqq C\varepsilon^n,$$

il gruppo sarà interno a qualunque varietà, per quanto piccola, e si potrà dire *gruppo ologene,* perchè dà origine, mediante la serie $\sum a_n x^n$, ad una funzione intera.

Se un gruppo (a_n) è tale che preso un numero positivo M arbitrariamente grande, vi siano infiniti termini del gruppo tali che sia

$$|a_n| \geqq CM^n$$

il gruppo sarà esterno a qualunque varietà, per quanto grande, e si potrà dire al contorno della varietà ∞; in tal caso la $\sum a_n x^n$ non è mai convergente.

Per ogni altro gruppo (a_n) esisterà un numero determinato r che sarà l'inverso del raggio di convergenza della serie $\sum a_n x^n$, e tale che il gruppo si trova sul contorno della varietà r.

4. Se due gruppi (a_n) e (b_n) sono, l'uno interno alla varietà r, l'altro interno o sul contorno della varietà $r' \geqq r$, il gruppo $(a_n \pm b_n)$ sarà interno alla varietà r', o sul contorno.

Se due gruppi (a_n) e (b_n) sono interni rispettivamente alle varietà r ed r', il gruppo $(a_n b_n)$ sarà interno alla varietà rr'; se i gruppi (a_n) e (b_n) sono sul contorno delle varietà r ed r', il gruppo $(a_n b_n)$ sarà interno ad ogni varietà maggiore di rr', ma non si potrà asserire che sia esterno ad ogni varietà minore e perciò non si potrà dire sul contorno della varietà rr'; talchè se R ed R' sono i raggi di convergenza di $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$, $\sum a_n b_n x^n$ avrà il raggio di convergenza non minore di RR'.

Se (a_n) è interno alla varietà r, $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sarà esterno alla varietà $\frac{1}{r}$ e se (a_n) è sul contorno della varietà r, $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sarà esterno ad ogni varietà minore di $\frac{1}{r}$.

5. Se un sistema di funzioni ad un valore, in numero infinito

$$\varphi_n(x) \qquad (n = 0,\ 1, \dots\ \infty)$$

dà origine per ogni valore x contenuto entro un campo A ad un gruppo posto nell'interno o sul contorno della varietà r, si dirà che il sistema di funzioni è, per quei valori di x, rispettivamente *interno* o *sul contorno* della varietà.

Se un sistema di funzioni $\varphi_n(x)$ è interno alla varietà r pei valori di x contenuti in un campo A, la serie $\sum c_n \varphi_n(x)$ sarà convergente assolutamente entro il campo A se il gruppo (c_n) è interno alla varietà $\frac{1}{r}$ o sul contorno.

Se un sistema di funzioni $\varphi_n(x)$ è tale che per tutti i valori di x contenuti in un campo A entro il quale le funzioni rimangono tutte finite, ed escluso il punto $x=0$, il quoziente

$$\frac{\varphi_n(x)}{x^n}$$

sia sempre sul contorno di una varietà r, la serie $\sum c_n \varphi_n(x)$ converge e diverge rispett. nei punti del campo A interni od esterni al cerchio di convergenza di $\sum c_n r^n x^n$. In particolare se il quoziente $\frac{\varphi_n(x)}{x^n}$ si trova al contorno della varietà 1, la serie $\sum c_n \varphi_n(x)$ converge e diverge rispett. nei punti del campo A interni od esterni al cerchio di convergenza di $\sum c_n x^n$.

II.

6. Sia

$$T(u, v) \tag{1}$$

una funzione analitica di due variabili che per ogni coppia $(u_0\ v_0)$ di valori delle variabili sia regolare (cioè sviluppabile in serie della forma

$$\sum_{m,n} c_{m,n}(v-v_0)^m(u-u_0)^n$$

per valori di $|u-u_0|$, $|v-v_0|$ abbastanza piccoli) eccettuate le coppie soddisfacenti ad un'equazione

$$f(u, v)=0 \tag{2}$$

dove si suppone $f(u, v)$ funzione intera di u e v. Per $v=0$ la funzione (1) sarà regolare per tutti i valori di u, tranne quelli che soddisfanno all'equazione

$$f(u, 0)=0 \tag{3}$$

e che saranno punti separati

$$0_1,\ \ 0_2,\ \ 0_3, \ldots\ \ 0_n, \ldots$$

del piano u, tali che entro un cerchio di raggio finito se ne trovi sempre solo un numero finito. Se u_0 è un punto che non sia radice della (3), si avrà

$$T(u, v)=\sum_{m,n} a_{m,n}(u-u_0)^n v^m \tag{4}$$

e questo sviluppo, per valori di $|u-u_0|$ e di $|v|$ abbastanza piccoli, converge incondizionatamente, per cui si può ordinare rispetto alle potenze di v ed il coefficiente di v^m sarà

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(u-u_0)^n \tag{5}$$

che converge, qualunque sia l'indice m, entro un cerchio di centro u_0 e di raggio determinato.

Ora è noto (*) che la serie (5) costituisce un *elemento* di una funzione analitica che diremo $p_m(u)$; questa funzione è pienamente definita dal suo elemento ed i suoi valori si possono dedurre dalla serie (5) per ogni punto del campo di validità della funzione: in altri termini, per ogni punto $\overline{u}$ dell'interno del suo campo di validità $p_m(u)$ è sviluppabile in una serie di potenze di $u-\overline{u}$ che si può ricavare, con processo conosciuto, dalla serie (5). Ma preso un punto u_1 entro il campo di convergenza della serie (4), si avrà d'una parte, indicando con $\mathfrak{P}_m(u-u_1)$ la serie dedotta *immediatamente* dalla (5) relativamente al punto u_1:

$$T(u,\ v)=\sum v^m\,\mathfrak{P}_m(u-u_1)$$

per valori di $|u-u_1|$ abbastanza piccoli; d'altra parte, dallo sviluppo (4) di $T(u,\ v)$ relativo al posto $(0,\ u_0)$ si potrà *dedurre* uno sviluppo relativo al posto $(0,\ u_1)$, della forma

$$T(u,\ v)=\sum a'_{m,n}v^m(u-u_1)^n$$

e poichè questo, per valori di $|u-u_1|$ abbastanza piccoli, converge incondizionatamente, si avrà ordinando per le potenze di v:

$$T(u,\ v)=\sum v^m\,\mathfrak{P}'_m(u-u_1)$$

e per teoremi noti sulle serie di potenze, $\mathfrak{P}'_m$ non potrà differire da $\mathfrak{P}_m$. Se ora si ragiona in modo analogo per un punto u_2 dell'intorno di u_1, indi per un punto u_3 dell'intorno di u_2, ecc., si giunge alla conclusione che:

« Per ogni punto del piano u vale l'eguaglianza

$$T(u,\ v)=\sum v^m p_m(u) \tag{6}$$

» tolti i soli punti 0_n; dove le funzioni $p_m(u)$ definite da un loro elemento (5),

(*) Per la nomenclatura quì usata, v. Weierstrass: *Zur Functionenlehre* (Monatsbericht der Berl. Akad.) e suo corso litografato di lezioni: *Sulle funzioni di più variabili* (Berlino, presso Hermann) od anche il mio Saggio di una *Introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principî di C. Weierstrass* (Giornale di Battaglini, t. 18).

» sono regolari in tutto il piano, eccettuati al più gli stessi punti 0_n. Ed il » valore da assegnarsi ad ogni funzione $p_m(u)$ in un punto $\bar{u}$ del piano u che » non sia uno dei punti 0_n è dato dal coefficiente di v^m nello sviluppo di $T(\bar{u}, v)$ » per le potenze intere e positive di v. »

Se l'equazione (3) non ha soluzioni finite, le funzioni $p_m(u)$ sono intere.

La funzione $T(u, v)$ si dirà *funzione generatrice* del sistema di funzioni $p_m(u)$.

7. Indichiamo con A il campo che si ottiene togliendo dal piano u i punti 0_n, e fissiamo entro A un punto qualunque u_0: per esso si avrà

$$T(u_0, v) = \sum v^m p_m(u_0)$$

e la serie del secondo membro convergerà entro un cerchio posto nel piano v col centro 0 e di raggio determinato; ma siccome la convergenza della serie non può cessare che in una circonferenza sulla quale si trovi qualche punto singolare della funzione, così il raggio del suddetto cerchio « sarà eguale al » minimo valore assoluto delle radici dell'equazione

$$f(u_0, v) = 0. \text{ »}$$

8. Prendiamo dunque a considerare la corrispondenza stabilita fra i punti dei due piani u e v dalla relazione

$$f(u, v) = 0. \tag{2}$$

Ad ogni valore u_0 di A corrisponde per questa equazione un sistema di valori di v, i cui valori assoluti

$$|v_0|, \quad |v'_0|, \quad |v''_0|, \dots \quad |v_0^n|, \dots$$

non possono avere altro posto limite fuorchè l'∞ per la forma della funzione $f(u, v)$; per cui ve ne sarà uno minimo ed inoltre diverso da zero, perchè u_0 è interno al campo A. Si denoti con $\rho(u_0)$ questo minimo. Al variare di u_0, varierà pure la quantità definita con $\rho(u_0)$ e posto $u = \xi + i\eta$, $\rho(u)$ sarà funzione di ξ ed η nel senso generale ed anche, come risulta dai principî della teoria delle funzioni, sarà funzione continua; ad ogni valore di u corrisponde inoltre un valore di $\rho(u)$ ed uno solo. Se fissiamo un valore α, e cerchiamo tutti i punti del piano u per i quali

$$\rho(u) = \alpha,$$

l'insieme di questi punti costituirà generalmente una linea che diremo curva C_α e che sarà composta di uno o più rami di curva analitica: più precisamente, essa sarà parte di una fra quelle curve che nel piano u corrispondono mediante la rappresentazione (2) ai cerchi descritti nel piano v dall'origine come centro; infine, per l'osservazione fatta dianzi, le C_α si deformeranno con continuità al variare con continuità di α, e per ogni punto del campo A passerà una curva C_α ed una sola. Però non esisteranno sempre, per tutti i valori α positivi e diversi da zero, punti u nei quali sia $\rho(u)=\alpha$, ossia non tutti i valori α saranno possibili come valori assoluti minimi delle radici delle equazioni (2), e quindi non tutti i cerchi α si possono far corrispondere alle linee definite con C_α. Infatti se qualunque valore α fosse possibile, esso potrebbe prendersi grande quanto si vuole, cioè dovrebbero esistere valori $\overline{u}$ di u per i quali l'equazione

$$f(\overline{u},\ v)=0$$

avrebbe tutte le sue radici infinite, il che non avviene che in casi particolari, qualora $f(\overline{u},\ v)$ prenda la forma $e^{G(v)}$, oppure, posto

$$f(u,\ v)=\sum v^m f_m(u),$$

quando il valore $\overline{u}$ sia tale da annullare tutte le $f_m(u)$, ad eccezione della $f_0(u)$. Risulta da ciò e dalla continuità di $\rho(u)$, che i valori possibili di α saranno compresi fra 0 ed un numero R, che non è infinito se non per forme speciali della $f(u,\ v)$.

I soli punti del piano u ai quali possa corrispondere un cerchio di raggio 0 sono i punti 0_n, talchè il sistema dei punti (discreti) 0_n si potrà riguardare come la curva C_0.

9. Fissato un valore α fra quelli possibili, si potranno considerare nel campo A due regioni: la prima, che si dirà E_α, per il punto della quale sia $\rho(u)>\alpha$, l'altra E'_α, nei cui punti sia $\rho(u)<\alpha$. Queste regioni constano di aree connesse o no, che ricoprono una sol volta il campo A e sono separate dalla linea C_α.

Consideriamo ora la serie

$$\sum v^m p_m(u): \tag{6}$$

per un punto u posto sulla linea C_α, essa converge entro il cerchio di centro 0 e di raggio α del piano v; per un punto u preso nella regione E_α, essa converge entro un cerchio concentrico di raggio maggiore. Se dunque si fa $v=\alpha$, si ottiene la serie

$$\sum \alpha^m p_m(u) \tag{7}$$

che convergerà certamente per tutti i valori u presi nell'interno della regione E_α, e poichè la serie $\sum v^m p_m(u)$ considerata come serie di potenze di v, converge incondizionatamente entro il suo cerchio di convergenza, così la (7) convergerà incondizionatamente *entro* il campo E_α.

Si considerino ora le coppie (u, v) tali che u sia interno ad E_α e v al cerchio α: per queste coppie la serie (6) non può cessare di convergere poichè u è preso in modo che sia $\rho(u) > \alpha$, e se si prende un'area $\overline{E}_\alpha$ *interna* ad E_α ed un cerchio α' minore di α e differente da α di tanto poco quanto si vuole, per le coppie (u, v) tali che u sia interno ad $\overline{E}_\alpha$ e v al cerchio α' i valori della serie (6) avranno un limite superiore L. Sia ora un numero $\alpha'' > \alpha$, d'altronde differente da α di tanto poco quanto si vuole: il campo $E_{\alpha''}$ differirà di pochissimo da E_α e per tutti i punti u comuni ai campi $\overline{E}_\alpha$ ed $E_{\alpha''}$, si avrà

$$|p_m(u)| < \frac{L}{\alpha''^m}$$

da cui

$$|\sum \alpha^m p_m(u)| < L \sum \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^m,$$

il che dimostra:

« Che pei valori di α compresi fra 0 ed R (§ 8), le serie (7) convergono » incondizionatamente entro i campi indicati con E_α e limitati dalle curve C_α, » e che in un campo qualunque interno ad E_α esse convergono in egual grado » e sono quindi suscettibili di rappresentare funzioni analitiche di u. »

Non si può dire nulla di generale sul modo di comportarsi delle serie (7) lungo le curve C_α; entro i campi E'_α esse divergono.

10. Sia (c_m) un gruppo di numeri posto al contorno della varietà α (§ 2): si avrà, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo ed H un numero positivo finito:

$$|c_m| < H(\alpha + \varepsilon)^m$$

e quindi

$$|\sum c_m p_m(u)| < H \sum (\alpha + \varepsilon)^m \cdot |p_m(u)|;$$

ma la serie del secondo membro converge entro il campo $E_{\alpha+\varepsilon}$, onde lo stesso sarà di $\sum c_m p_m(u)$, e poichè ε è arbitrariamente piccolo e le curve C_α si deformano con continuità al variare di α, la $\sum c_m p_m(u)$ convergerà incondizionatamente in tutto l'interno di E_α. Mediante il ragionamento fatto nel paragrafo precedente, se ne dimostrerebbe ancora la convergenza in egual grado in qualunque campo interno ad E_α, per cui:

« Le proprietà delle serie (7) espresse alla fine del paragrafo precedente si

» conservano nelle serie più generali

$$\sum c_m p_m(u)$$

» dove (c_m) è un gruppo al contorno della varietà α. »

11. Le curve C_α ed i campi di convergenza E_α determinati in ciò che precede, sono indipendenti dalla natura della funzione generatrice $T(u, v)$ e dipendono unicamente dalla equazione $f(u, v) = 0$ che ne dà i posti singolari. Risulta pure dalle cose dette che se $\alpha' > \alpha$, tutti i punti di $E_{\alpha'}$ appartengono ad E_α e siccome essi non possono coincidere (§ 8) così E_α deve essere maggiore di $E_{\alpha'}$.

12. Se per un sistema di funzioni $p_m(u)$ sono determinati i campi di convergenza E_α, ed un secondo sistema $\varpi_m(u)$ è tale che per ogni valore di u, esclusi al più punti discreti, il gruppo

$$\left(\frac{\varpi_m(u)}{p_m(u)}\right)$$

sia sul contorno della varietà 1, le serie

$$\sum c_m \varpi_m(u)$$

convergeranno negli stessi campi delle

$$\sum c_m p_m(u).$$

Infatti, preso ε positivo e piccolo quanto si vuole, si avrà

$$|\varpi_m(u)| < (1+\varepsilon)^m |p_m(u)|$$

onde

$$|\sum c_m \varpi_m(u)| < \sum |c_m| (1+\varepsilon)^m |p_m(u)|$$

e se c_m è sul contorno della varietà α, il secondo membro e quindi anche il primo convergeranno entro il campo $E_{\alpha(1+\varepsilon)}$, e poichè ε è piccolo quanto si vuole, la

$$\sum c_m \varpi_m(u)$$

convergerà (eziandio incondizionatamente) entro il campo E_α.

Inversamente, se è tracciato nel piano il sistema delle anzidette curve C_α, ognuna delle quali separi le due regioni E ed E'_α, e se due sistemi di funzioni $p_m(u)$ e $\varpi_m(u)$ singolari solo nei punti della C_0 sono tali che le serie

$$\sum \alpha^m p_m(u) \quad \text{e} \quad \sum \alpha^m \varpi_m(u)$$

convergono incondizionatamente in E_α e divergono in $E_{\alpha'}$, il gruppo

$$\left(\frac{p_m(u)}{\varpi_m(u)}\right)$$

sarà per ogni valore di u, eccettuati quelli sulla C_0, sul contorno delle varietà 1. Infatti, se fosse al contorno di una varietà minore r, si avrebbe, preso

$$1 > r' > r:$$

$$|p_m(u)| < r'^m |\varpi_m(u)|$$

onde

$$\sum \alpha^m |p_m(u)| < \sum \alpha_m r'^m \varpi_m(u);$$

ora $E_{\alpha r'}$ per $r' < 1$, è maggiore di E_α, cioè contiene anche punti di E'_α; se quindi u è un punto comune ad E'_α e $E_{\alpha r'}$, la serie del 2' membro converge e quindi a maggior ragione quello del primo, il che è contro l'ipotesi. Analogamente se il gruppo fosse al contorno di una varietà maggiore d'uno, si considererebbe

$$\left(\frac{\varpi_m(u)}{p_m(u)}\right)$$

e si ripeterebbe lo stesso ragionamento.

Ritenendo una notazione usata da Frœbenius (*) in circostanza analoga, ma più particolare assai, potremo scrivere

$$\varpi_m(u) \sim p_m(u)$$

ad esprimere che il rapporto delle funzioni corrispondenti è sul contorno della varietà 1; ed i sistemi ϖ_m e p_m si potranno dire *equivalenti.*

13. Riprendiamo la funzione analitica v di u definita dall'equazione (2), e fra i rami di questa funzione multiforme, distinguiamo quello (variabile anche da regione a regione del campo u) minimo in valore assoluto: indicandolo con $\varphi(u)$, la $\varphi(u)$ avrà un valore unico, senza discontinuità, per ogni valore di u e potrà essere al più infinita (in casi eccezionali, § 8) in punti separati. Se ora consideriamo la funzione

$$\frac{1}{v - \varphi(u)},$$

questa sarà sviluppabile in serie convergente

$$\sum \frac{v^m}{\varphi^{m+1}(u)}$$

per tutte le coppie u e v tali che sia

$$|\varphi(u)| > |v|;$$

(*) Journal de Crelle, t. 73, 1871.

ma se poniamo $|v| = \alpha$, questa condizione è soddisfatta per i valori u dell'area E_α (§ 9), e nel campo E'_α la stessa serie è divergente: onde segue (§ 12) che se $p_m(u)$ è un sistema di funzioni generate dalla funzione $T(u, v)$ i cui posti singolari soddisfanno alla (2), si avrà

$$p_m(u) \sim \varphi^{-(m+1)}(u), \text{ od anche } p_m(u) \sim \varphi^{-m}(u).$$

14. Si consideri come esempio l'equazione delle singolarità

$$f(u, v) = u^2 + v^2 - 1 = 0. \tag{a}$$

Da questa equazione risulta

$$\varphi(u) = \sqrt{1-u^2} \ (*), \qquad \rho(u) = |\sqrt{1-u^2}|$$

e posto

$$u = r(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

viene

$$\rho^4 = (1 + r^2 + 2r\cos t)(1 + r^2 - 2r\cos t),$$

ossia le curve C_α sono cassinoidi aventi per fuochi i punti ± 1; facendo $\alpha = 0$ si ottengono i punti ± 1 per punti singolari; essi corrispondono ai punti 0_1, 0_2 della teoria generale. Ogni cassinoide C_α divide il piano in due regioni: l'una E_α indefinita nella quale è $\rho > \alpha$, l'altra E'_α, con $\rho < \alpha$, limitata e sconnessa se $\alpha < 1$, semplicemente connessa per $\alpha > 1$; per $\alpha = 1$ la curva C_α è la lemniscata.

Se $T(u, v)$ è la funzione generatrice di un sistema $p_m(u)$ colle singolarità nei posti (u, v) soddisfacenti alla (a), si avrà

$$p_m(u) \sim (1-u^2)^{-\frac{m}{2}}.$$

Una serie

$$\sum c_m p_m(u)$$

dove (c_m) sia al contorno della varietà α, converge fuori della cassinoide

$$r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 = \alpha^4;$$

essa converge fuori della lemniscata se (c_m) è al contorno della varietà 1, ed in tutto il piano eccettuati i due punti ± 1, se il gruppo (c_m) è ologene.

Sia ora l'altra equazione di singolarità

$$f(u, v) = 1 - 2uv + v^2 = 0 \tag{b}$$

(*) I due rami della funzione v di u avendo lo stesso valore assoluto, si può ritenere il segno $+$ per $\varphi(u)$.

che è quella delle funzioni sferiche. I punti 0_n si riducono all'infinito, per cui le funzioni $p_n(u)$ saranno intere qualunque sia la funzione generatrice. Dalla (b) risulta

$$\varphi(u) = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$$

dove il segno $\pm$ va preso in modo che si abbia la radice minore in valore assoluto, cioè $\rho(u)$ o α deve essere costantemente minore dell'unità, e eguale ad 1 solo per u reale e minore d'uno in valore assoluto. Posto $u = \xi + i\eta$, si ha per $|\varphi(u)| = \alpha$:

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2} = 1$$

ossia il sistema delle curve C_α consta di ellissi coi fuochi nei punti ± 1. Variando α da 0 ad 1, le ellissi variano dal cerchio di raggio infinito al segmento rettilineo da $+1$ a -1. L'area E_α è l'interno dell'ellisse C_α, l'area E'_α ne è l'esterno.

Se $T(u, v)$ è una funzione colle singolarità nei punti soddisfacenti alla (b), e generatrice di un sistema $p_m(u)$, si avrà

$$p_m(u) \sim (u \pm \sqrt{u^2 - 1})^m$$

il segno $\pm$ corrispondente al ramo maggiore dell'unità. Una serie

$$\sum c_m p_m(u)$$

(in particolare una serie di funzioni sferiche) convergerà entro l'ellisse C_α se (c_m) è sul contorno di una varietà $\alpha < 1$, cioè se la serie $\sum c_m z^m$ converge in un cerchio > 1; essa convergerà in tutto il piano se il gruppo (c_m) è ologene.

III.

15 Fra i sistemi di funzioni considerati nel capo precedente, hanno speciale importanza quelli che danno luogo ad uno sviluppo in serie della forma

$$\sum c_m p_m(u)$$

per qualunque funzione analitica $f(u)$ regolare entro un campo abbastanza grande. Ciò avviene per esempio quando sia possibile, sotto certe condizioni, lo sviluppo

$$\frac{1}{y - x} = \sum p_m(x) P_m(y) \tag{1}$$

giacchè il teorema di CAUCHY permette di dedurre da questa formola lo sviluppo in serie di funzioni $p_m(x)$ o $P_m(y)$ per qualunque funzione regolare in un campo abbastanza grande da conservare le condizioni di validità dello sviluppo (1).

Dato un sistema di funzioni $p_m(u)$, in generale diremo: « che un secondo » sistema di funzioni $P_m(u)$ è *associato* al sistema $p_m(u)$, se entro un determi- » nato campo per le variabili x ed y, la serie

$$\sum p_m(x) P_m(y) \tag{2}$$

» converge assolutamente ed in egual grado ed ha per ogni coppia di valori » di x ed y, il valore

$$\frac{1}{x-y} \text{ ».}$$

16. Riprendiamo ora uno dei sistemi $p_m(u)$ quali si sono esaminati nel capo precedente: se esiste un sistema di funzioni $P_m(u)$ tali che sia $P_m(u) \sim \frac{1}{p_m(u)}$ la serie (2) convergerà per tutte le coppie x ed y tali che se x è interna ad E_α, y sia interna ad E'_α.

Infatti preso y in E'_α, si ha per il § 13:

$$P_m(y) \sim \frac{1}{p_m(y)} \sim \varphi^m(y)$$

ma si ha pure in E'_α:

$$|\varphi(y)| < \alpha$$

onde presa una quantità ε positiva e piccola ad arbitrio, sarà

$$|P_m(y)| < \alpha^m (1+\varepsilon)^m$$

da cui risulta che la (2) converge per tutti i valori di x compresi entro $E_{\alpha(1+\varepsilon)}$, ed essendo ε piccolo ad arbitrio, la (2) converge per tutti i valori interni ad E_α. Essa converge inoltre incondizionatamente, ed in egual grado rispetto ad x entro E_α se si dà ad y un valor fisso, e rispetto ad y entro E'_α se si dà un valor fisso ad x; quest'ultima parte si dimostrerebbe come a § 10.

Ciò posto, supponiamo che questi sistemi $p_m(u)$ e $P_m(u)$ siano associati, ed inoltre che le curve C_α siano chiuse ed il campo da esse racchiuso sia semplicemente connesso: in tal modo, o la E_α sarà l'interno di C_α e la E'_α l'esterno, ed allora le curve C_α andranno diminuendo al crescere di α, perchè per $\alpha' > \alpha$ la $E_{\alpha'}$ è compresa in E_α, o inversamente; il primo caso è per es. quello delle funzioni sferiche, il secondo è quello delle funzioni $\frac{1}{u^m}$. Dato il numero α, si considerino altri due numeri vicini arbitrariamente ad α,

$$\alpha'' > \alpha' > \alpha:$$

le curve $C_{\alpha'}$ e $C_{\alpha''}$ saranno vicinissime a C_α, e $C_{\alpha'}$ sarà entro E_α e $C_{\alpha''}$ entro $E_{\alpha'}$. Preso ora y lungo la $C_{\alpha'}$, per tutti i punti x interni o al contorno del campo $E_{\alpha''}$ la serie (2) sarà convergente in egual grado rispetto ad y: se dunque $f(x)$ è una funzione regolare in tutto l'interno di E_α, si avrà

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha'}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} = \sum C_m p_m(x)$$

dove

$$C_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha'}} f(y) P_m(y)\,dy.$$

In modo analogo si otterrebbero sviluppi in serie di funzioni P_m per una funzione regolare entro un campo E'_α, ed in serie di funzioni p_m e P_m per una funzione regolare in un campo connesso compreso fra due curve C_α e C_β del sistema.

17. Dato il sistema di curve C_α ed i sistemi associati di funzioni p_m e P_m di cui al paragrafo precedente, e supponendo di più le funzioni p_m intere, si abbiano i punti

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots \quad a_n, \ldots$$

in numero infinito aventi per limite una linea C_ρ del sistema e d'altronde tutti contenuti entro il campo E_ρ o sul contorno, ed altrettante funzioni intere

$$G_1(x), \quad G_2(x), \ldots \quad G_n(x), \ldots$$

Si domanda se esisterà una funzione analitica $F(x)$ che in tutto il campo E_ρ sia regolare, eccettuati i punti a_n, nei quali essa abbia rispettivamente le stesse singolarità delle $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$.

A quest'uopo, consideriamo le linee del sistema C_α:

$$C_{\alpha(a_1)}, \quad C_{\alpha(a_2)}, \ldots \quad C_{\alpha(a_n)}, \ldots$$

passanti per i punti

$$a_1, \quad a_2, \ldots \quad a_n, \ldots$$

rispettivamente, e curve parallele

$$C'_1, \quad C'_2, \ldots \quad C'_n, \ldots$$

tali che C'_n sia nel campo $E_{\alpha(a_n)}$ parallela a $C_{\sigma(a_n)}$ e ad una distanza δ_n contata sulle normali per modo che

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0;$$

indichiamo infine con F_n il campo che rimane da $E_{\alpha(a_n)}$ togliendovi l'anello compreso fra $C_{\sigma(a_n)}$ e C'_n.

La funzione $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ essendo regolare entro tutto il campo $E_{\alpha(a_n)}$, si avrà (§ 16)

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} p_m(x):$$

si prenda ora un sistema di numeri positivi

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots \quad \varepsilon_n, \ldots$$

tali che $\sum \varepsilon_n$ sia convergente, e si faccia μ_n tanto grande che sia entro tutto F_n

$$\left| \sum_{m=\mu_n}^{\infty} c_{n,m} p_m(x) \right| < \varepsilon_n,$$

il che è possibile.

Ponendo

$$\varphi_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - \sum_{m=0}^{\mu_n} c_{n,m} p_m(x)$$

questa sarà una funzione analitica regolare in tutto il piano, tranne il punto a_n nel quale essa diventa singolare come la G_n.

Si consideri infine la funzione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Per un punto x interno ad C_ρ e che non sia uno dei punti a_n, si può sempre prendere N tanto grande che tutti i punti a_n per $n > N$ siano fuori dell'area $E_{\alpha(x)}$ relativa a quel punto. Si avrà dunque

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \varphi_N(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

ed essendo x interno a tutte le aree F_n per $n > N$, verrà

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \varphi_n(x) \right| < \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_n$$

cioè la $F(x)$ è finita e regolare nell'intorno di x. Se invece x è uno dei punti a_n, $(x = a_\nu)$ si dimostra in modo analogo che

$$F(x) - \varphi_\nu(x)$$

è regolare, onde $F(x)$ è singolare in a_ν come $G\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$.

Se i punti dati a_n tendessero alla linea C_ρ per modo che ogni punto della C_ρ sia punto limite per il sistema dei punti a_n, la funzione $F(x)$ costruita come si è detto avrebbe l'area E'_ρ per spazio lacunare.

Lo stesso problema si può anche risolvere in modo analogo senza supporre le funzioni $p_m(x)$ intere; le funzioni $\varphi_n(x)$ e quindi la $F(x)$ sarebbero allora singolari anche nei posti già detti 0_1, 0_2,... 0_n,... a § 6.

IV.

18. Lo sviluppo di una funzione analitica in serie procedente per un sistema dato di funzioni $p_m(x)$ si ottiene generalmente per mezzo di due metodi ben noti, che si possono adoperare:

Il primo, quando esiste uno sviluppo di $\frac{1}{y - x}$ in serie di funzioni $p_m(x)$; in tal caso lo sviluppo della funzione analitica si ottiene applicando il teorema di Cauchy;

Il secondo, quando esiste un secondo sistema di funzioni $q_n(x)$, una costante C ed una linea γ nel piano, tali che sia

$$\int_{(\gamma)} p_m(x)\, q_n(x) = \begin{cases} C \text{ se } m = n \\ 0 \text{ se } m \gtrless n, \end{cases}$$

ed in tal caso lo sviluppo della funzione si ottiene con un processo di coefficienti indeterminati.

In questo capitolo e nel seguente mi propongo di accennare ad un altro metodo atto a risolvere lo stesso problema e che presenta il vantaggio di mettere in chiaro come le relazioni per mezzo d'integrali definiti che servono nel secondo dei metodi ricordati altro non siano che passaggi al limite di relazioni notissime elementari. Questo metodo presentandosi però come applicazione di considerazioni più generali sui gruppi di numeri, queste verranno esposte per prime.

19. Abbiasi un gruppo di numeri doppiamente infinito

$$(a_{m,n}) \quad \begin{cases} m=0,\ 1, \dots \infty \\ n=0,\ 1, \dots \infty \end{cases} \tag{1}$$

soggetto alla condizione che sia possibile determinare tre numeri positivi A, r, s tali che per ogni valore di m e di n sia

$$|a_{m,n}| < \frac{A}{r^m s^n}. \tag{2}$$

È chiaro che determinata una coppia di numeri r ed s, ne esistono infinite altre che permettono di soddisfare alla disuguaglianza (2).

Il gruppo (1) potendosi scrivere

$$\begin{array}{llll} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \dots & a_{0,n} \dots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} \dots & a_{m,n} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

sarà lecito dire che il primo indice esprime la *linea* ed il secondo la *colonna* cui appartiene un numero od elemento del gruppo.

Se (x_n) è un gruppo posto nell'interno della varietà s, le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x_n \tag{3}$$

saranno convergenti incondizionatamente per ogni valore di m, come si verifica immediatamente, ed indicando con y_m il valore delle serie (3) corrispondente all'indice m e con M un numero positivo finito ed indipendente da m, sarà

$$|y_m| < \frac{M}{r^m}$$

cioè il gruppo (y_m) sarà interno o al contorno della varietà $\frac{1}{r}$. Adunque, ad ogni gruppo (x_n) interno alla varietà s, le formole

$$y_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x_n \tag{3'}$$

fanno corrispondere un gruppo determinato interno o al contorno della varietà $\frac{1}{r}$.

Analogamente, le formole

$$y'_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} x'_m \tag{3''}$$

farebbero corrispondere ad ogni gruppo (x'_m) interno alla varietà r, un gruppo determinato interno o al contorno della varietà $\frac{1}{s}$.

20. Supponiamo ora che insieme alle $(a_{m,n})$ esista un secondo gruppo doppiamente infinito

$$(\alpha_{m,n})$$

per il quale sia possibile determinare tre numeri positivi B, ρ, σ tali che sia

$$|\alpha_{m,n}| < \frac{B}{\rho^m \sigma^n}; \tag{4}$$

e sia per ogni valore di n

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \alpha_{m,\nu} = \begin{cases} 0 \text{ per } n \gtrless \nu \\ 1 \text{ per } n = \nu; \end{cases} \tag{5}$$

infine fra le infinite determinazioni di r, s, ρ e σ ve ne siano che soddisfacciano alle condizioni

$$r\rho > 1, \qquad s\sigma > 1. \tag{6}$$

Sotto queste ipotesi, dico:

1.° Che dalle equazioni (3') si può ricavare

$$x_n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} y_m, \tag{7}$$

2.° Che fra le $a_{m,n}$ e le $\alpha_{m,n}$ passa l'altra relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \alpha_{\mu,n} = \begin{cases} 0 \text{ per } m \gtrless \mu \\ 1 \text{ per } m = \mu. \end{cases} \tag{8}$$

a) Si ponga infatti

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} y_m:$$

la serie del secondo membro è convergente incondizionatamente se si ha

$$|y_m| < \frac{M}{r^m}$$

ed indicando con N una quantità finita, viene

$$|X_n| < \frac{N}{\sigma^n},$$

e per la (6)

$$X_n < N s^n,$$

ossia le X_n sono nell'interno o al contorno della varietà s. Ma si ha altresì, ponendo per le y_m i loro valori (3'):

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m,\nu} x_\nu; \tag{9}$$

ora un termine di questa serie doppia è in valore assoluto

$$< \frac{A B s'^\nu}{(r\rho)^m \varsigma^n s^\nu}$$

cioè la serie doppia ha i suoi termini minori in valore assoluto della serie a termini positivi

$$\frac{AB}{\varsigma^n} \sum_{m,\nu} \frac{1}{(r\rho)^m} \left(\frac{s'}{s}\right)^\nu$$

che è convergente; per cui nel secondo membro della (9) i termini si possono ordinare come si vuole e viene

$$X_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} a_{m,\nu} \Big)$$

e per le (5)

$$X_n = x_n.$$

Dunque sotto le ipotesi fatte, le (3') si possono riguardare come un sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite, di cui le (7) danno la soluzione.

b) Nelle (3') poniamo per x_n i loro valori (7), e vengono le serie doppie della forma

$$\sum_n a_{m,n} \sum_\mu \alpha_{\mu,n} y_\mu; \tag{10}$$

ora un termine di questa serie è in valore assoluto

$$< \frac{AB}{r^m} \frac{1}{(s\sigma)^n} \frac{1}{(r\rho)^\mu}$$

ma la serie di questi termini positivi è

$$< \frac{AB}{r^m} \sum_{n,\mu} \frac{1}{(s\sigma)^n (r\rho)^\mu}$$

cioè è convergente, per cui la (10) sarà convergente assolutamente ed i suoi termini potendosi ordinare come si vuole, si potrà scrivere

$$y_m = \sum_\mu y_\mu \Big(\sum_n a_{m,n} \alpha_{\mu,n} \Big).$$

Ma le y_m sono numeri arbitrarî soggetti alla sola condizione

$$|y^m| < \frac{1}{r^m};$$

prendiamo pertanto

$$y_m = \eta^m$$

dove η è un numero complesso arbitrario e tale che

$$|\eta| < \frac{1}{r}$$

e viene dallo sviluppo precedente per ogni valore di η soggetto a questa condizione:

$$\eta^m = \sum_\mu \eta^\mu \sum_n a_{m,n}\alpha_{\mu,n}$$

il che è impossibile, a meno che non sia

$$\sum_n a_{m,n}\alpha_{\mu,n} = \begin{cases} 0 \text{ per } m \gtrless \mu \\ 1 \text{ per } m = \mu. \end{cases}$$

21. Due sistemi di numeri che soddisfanno alle relazioni

$$\sum_m a_{m,n}\alpha_{m,\nu} = \begin{cases} 0 \text{ per } n \gtrless \nu \\ 1 \text{ per } n = \nu, \end{cases} \qquad \sum_n a_{m,n}\alpha_{\mu,n} = \begin{cases} 0 \text{ per } m \gtrless \mu \\ 1 \text{ per } m = \mu \end{cases}$$

(le serie dei primi membri essendo d'altronde convergenti) si diranno *associati;* sono dunque associati i sistemi $a_{m,n}$ ed $\alpha_{m,n}$ del paragrafo precedente, sotto le ipotesi fatte al principio del paragrafo stesso.

Sotto quelle ipotesi, nello stesso modo che da

$$y_m = \sum_n a_{m,n} x_n$$

si ricava

$$x_n = \sum_m \alpha_{m,n} y_m \qquad (a)$$

così da

$$u_n = \sum_m a_{m,n} v_m$$

si ricaverà

$$v_m = \sum_n \alpha_{m,n} u_n. \qquad (b)$$

prendendo le u_n nell'interno della varietà $\sigma' < \sigma$, e le v_m essendo di conseguenza nell'interno o al contorno della varietà $\frac{1}{\rho}$.

E chiamando le (b) formole di trasformazione *inversa* delle (a), viene che sotto le stesse ipotesi se in una serie

$$\sum u_n x_n$$

sulle x si fa la trasformazione (a) e sulle u la trasformazione inversa, la serie si trasformerà in

$$\sum v_m y_m;$$

infatti la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} y_m \tag{11}$$

ha i suoi termini minori in valore assoluto di quelli della serie a termini positivi

$$\sum_n \sigma'^n \sum_m \frac{B}{\rho^m \sigma^n} \cdot \frac{1}{r^m} = B \sum_{m,n} \frac{1}{(r\rho)^m} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^n$$

che è convergente; adunque la (11) si può ordinare come si vuole, e viene d'una parte

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} y_m \right) = \sum u_n x_n$$

dall'altra

$$\sum_{m=0}^{\infty} y^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m,n} u_n \right) = \sum y^m v_m.$$

Da queste considerazioni risulta che i gruppi

$$(a_{m,n}) \quad \text{ed} \quad (\alpha_{m,n})$$

sotto le ipotesi dei §§ 19 e 20, si comportano come il sistema degli elementi di un determinante D col sistema degli elementi reciproci divisi per D. Le formole (a) e (b) estendono alle varietà (spazî ad ∞ dimensioni) i concetti della trasformazione lineare degli spazî di n dimensioni.

22. In certi casi si può determinare il gruppo associato di un gruppo dato.

a) Se si ha una funzione analitica y di x, nulla del prim'ordine per $x = 0$ e regolare in un certo intorno R di $x = 0$,

$$y = a_{1,1} x + a_{1,2} x^2 + \cdots a_{1,n} x^n + \cdots \tag{12}$$

è noto che se ne può dedurre in un certo intorno R' di $y = 0$

$$x = \alpha_{1,1} y + \alpha_{2,1} y^2 + \cdots \alpha_{n,1} y^n + \cdots \tag{13}$$

Coi noti teoremi della moltiplicazione delle serie se ne deduce

$$y^n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n,n+r} x^{n+r} \tag{14}$$

$$x^n = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{n+r,n} y^{n+r}; \tag{15}$$

ora i gruppi $(a_{m,n})$, $(\alpha_{m,n})$ sono associati. Infatti ponendo nella (14) le espressioni di x^{n+r} date dalle (15) osserviamo che per $|y|$ abbastanza piccolo viene $|x|<R$ e quindi la serie di funzione di y del secondo membro della (14) è convergente in egual grado; si potrà quindi ordinarla rispetto alle potenze di y, ed eguagliando nei due membri i coefficienti di y^n, verrà

$$\left.\begin{aligned} a_{n,n}\alpha_{n,n} &= 1 \\ a_{n,n}\alpha_{r,n}+a_{n,n+1}\alpha_{\nu,n+1}+\cdots+a_{n,\nu}\alpha_{\nu,\nu} &= 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

queste sono le relazioni (5) o (8) del paragrafo precedente.

b) Se il gruppo $(a_{m,n})$ è tale che sia

$$a_{m,n}=0 \quad \text{per} \quad n>m$$

gli elementi del gruppo associato dovranno essere nulli per $n<m$: si ha così lo specchio

$$\begin{array}{lllll|lllll} a_{0,0} & 0 & 0\ldots & 0\ldots & & \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2}\ldots & \alpha_{0,m}\ldots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 0\ldots & 0\ldots & & 0 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2}\ldots & \alpha_{1,m}\ldots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2}\ldots & 0\ldots & & 0 & 0 & \alpha_{2,2}\ldots & \alpha_{2,m}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2}\ldots & a_{m,m}\ldots & & 0 & 0 & 0\ldots & \alpha_{m,m}\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

e le relazioni (5) e (8) del paragrafo precedente divengono:

$$\left.\begin{aligned} a_{m,m}\alpha_{m,m} &= 1 \\ a_{m,\mu}\alpha_{\mu,\mu}+a_{m,\mu+1}\alpha_{\mu,\mu+1}+\cdots+a_{m,m}\alpha_{\mu,m} &= 0 \qquad (\mu<m) \\ a_{n,n}\alpha_{n,\nu}+a_{n+1,n}\alpha_{n+1,\nu}+\cdots+a_{\nu,n}\alpha_{\nu,\nu} &= 0 \qquad (\nu>n). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

I numeri $\alpha_{m,n}$ si possono determinare di mano in mano formando i determinanti d'ordine n colle prime $a_{m,n}$ e calcolando gli elementi reciproci, indi dividendo per il determinante.

In questo caso, si semplificano le condizioni date al § 20; per es. se si ha

$$a_{m,m}=1$$

ed

$$|a_{m+\nu,m}|<\frac{A}{s^\nu}$$

saranno valide le formole di trasformazione (a) e (b) del § 21; ciò si trova dimostrato in altro mio lavoro (*).

c) Al caso precedente si riducono pure i gruppi tali che sia

$$a_{m,n} = 0 \quad \text{per} \quad n \lessdot m;$$

un tal gruppo si otterrebbe dal precedente mutando le linee in colonne e inversamente.

V.

23. Applichiamo ora le considerazioni precedenti a sistemi di funzioni; riprendiamo le ipotesi del § 20, supponiamo cioè di avere due gruppi $(a_{m,n})$, $(\alpha_{m,n})$ tali che sia

$$|a_{m,n}| < \frac{A}{r^m s^n}, \qquad |\alpha_{m,n}| < \frac{B}{\rho^m \sigma^n}, \tag{1}$$

$$r\rho > 1, \qquad s\sigma > 1 \tag{2}$$

$$\sum_m a_{m,n}\alpha_{m,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \gtrless \nu \\ 1 & \text{per } n = \nu, \end{cases} \qquad \sum_n a_{m,n}\alpha_{\mu,n} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \gtrless \mu \\ 1 & \text{per } m = \mu \end{cases} \tag{3}$$

dove uno dei sistemi (3) è conseguenza dell'altro.

Un sistema $(a_{m,n})$ soddisfacente alla (1) ci sarà dato ogniqualvolta avremo una funzione di due variabili u, v regolare in un intorno del posto $(u = 0,\ v = 0)$; se sarà infatti

$$T(u,\ v) = \sum a_{m,n} u^m v^n$$

r, s saranno numeri qualunque positivi inferiori ai raggi di convergenza nei piani u e v. La $T(u,\ v)$ sarà funzione generatrice dei due sistemi di funzioni

$$p_m(v) = \sum_n a_{m,n} v^n$$

$$q_n(u) = \sum_m a_{m,n} u^m,$$

le prime regolari tutte entro il cerchio di raggio s, le seconde entro il cerchio di raggio r.

Il sistema associato definirà una seconda funzione di due variabili

$$\Theta(u,\ v) = \sum \alpha_{m,n} u^m v^n$$

(*) *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.* Memorie dell'Accademia di Bologna, serie IV, t. 3.

che genererà i due sistemi di funzioni di una variabile

$$P_m(u) = \sum_n \alpha_{m,n} v^n$$

$$Q_n(v) = \sum_m \alpha_{m,n} u^m$$

regolari rispettivamente entro i cerchi di raggio σ e ρ.

24. « Ogni funzione $f(x)$ regolare entro un cerchio di centro $x=0$ e di » raggio maggiore di s, è sotto le ipotesi del paragrafo precedente, svilup» pabile in serie di funzioni $p_m(x)$. »

Sia

$$f(x) = \sum A_\nu x^\nu$$

la funzione data; essendo essa regolare entro un cerchio maggiore di s, il gruppo (A_ν) sarà interno alla varietà $\frac{1}{s}$, e per le (2), alla varietà σ.

Ne segue (§ 19) che ponendo

$$C_m = \sum_n \alpha_{m,n} A_n, \tag{4}$$

le C_m avranno valori determinati e tali che sia

$$|C_m| < \frac{M}{\rho^m}$$

e dalle formole (4) risulterà (§ 20)

$$A_n = \sum_m a_{m,n} C_m.$$

Formando la

$$f(x) = \sum_\nu A_\nu x^\nu = \sum_\nu x^\nu \sum_m a_{m,\nu} C_m$$

questa serie doppia ha per $|x| \leq s' < s$ i suoi termini minori in valore assoluto di quelli della serie convergente e a termini positivi

$$AM \sum_{m,\nu} \left(\frac{s'}{s}\right)^\nu \frac{1}{(r\rho)^m}$$

per cui i suoi termini si potranno ordinare come si vuole, ed in particolare si potrà scrivere

$$f(x) = \sum_m C_m \sum_\nu a_{m,\nu} x^\nu = \sum_m C_m p_m(x), \tag{5}$$

c. d. d.

25. Sotto le stesse ipotesi è possibile determinare un sistema di funzioni associate (§ 15) di $p_m(x)$ e quindi uno sviluppo della forma (5) applicando il

teorema di CAUCHY. Si ha infatti (§ 21) che

$$\sum u_n x_n = \sum v_m y_m.$$

Se si limitano convenientemente le varietà cui appartengono i gruppi

$$(u_n), \qquad (x_n), \qquad (v_m), \qquad (y_m)$$

e se questi gruppi si legano dalle relazioni

$$y_m = \sum_n a_{m,n} x_n \text{ equivalente a } x_n = \sum \alpha_{m,n} y_m$$

$$u_n = \sum_m a_{m,n} v_m \quad \text{»} \quad \text{»} \quad v_m = \sum_n \alpha_{m,n} u_n;$$

ponendo ora

$$x_n = x^n, \qquad y_m = p_m(x) = \sum_n a_{m,n} x^n$$

$$u_n = x'_n, \qquad v_m = P_m(x') = \sum_n \alpha_{m,n} x'^n$$

sotto le condizioni

$$|x| < s, \qquad |x'| < \sigma, \qquad |xx'| < 1$$

varrà l'eguaglianza

$$\frac{1}{1 - xx'} = \sum p_m(x) P_m(x')$$

e ponendo

$$\frac{1}{y} P_m\left(\frac{1}{y}\right) = \varpi_m(y)$$

si ha

$$\frac{1}{y - x} = \sum_m p_m(x) \varpi_m(y) \tag{6}$$

formola valida almeno per $|x| < s$ ed $|y| > \frac{1}{\sigma}$; inoltre avendosi sotto le stesse condizioni

$$|p_m(x)| < \frac{M}{r^m}, \qquad \left|P_m\left(\frac{1}{y}\right)\right| < \frac{M'}{\rho^m}$$

con $r\rho > 1$, ne risulta la convergenza assoluta ed in egual grado della serie (6) rispetto alle due variabili.

Risulta dalla (6) che se $f(x)$ è una funzione regolare entro un cerchio di centro 0 e di raggio maggiore di s, si avrà

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum p_m(x) \int f(y) \varpi_m(y) dy = \sum C'_m p_m(x) \tag{7}$$

l'integrazione essendo estesa ad una curva chiusa compresa entro il cerchio di convergenza di $f(x)$ ma esterna al cerchio di centro 0 e di raggio s.

26. Tanto nello sviluppo (5) che nello sviluppo (7) i coefficienti C_m e C'_m sono interni alla varietà r infatti nel primo si ha

$$|C_m| < \sum_n |A_n \alpha_{m,n}| < \frac{B}{\rho^m} \sum \frac{1}{(s\,\cdot)^\mu}$$

e nel secondo,

$$|C'_m| < \frac{LM'}{\rho^m}$$

essendo L il massimo della funzione $f(x)$ nell'interno della curva d'integrazione; dico che essi coincidono, cioè che non può esistere uno sviluppo dello zero

$$\sum c_m p_m(x) = 0 \tag{8}$$

nel quale (c_m) sia interno alla varietà r ed inoltre convergente in egual grado in un campo che comprenda il punto zero, sia pure arbitrariamente piccolo. Si potrebbe infatti in tale ipotesi sviluppare la (8) in serie di potenze di x e si sa che dovrebbero essere nulli tutti i coefficienti, per cui

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m a_{m,\nu} = 0 \qquad (r = 0,\ 1, \dots \infty); \tag{9}$$

considerando ora la serie doppia

$$S_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_m a_{m,\nu} \alpha_{\mu,\nu},$$

essendo per ipotesi

$$|c_m| < H r'^m, \qquad r' < r$$

i termini di questa serie sono in valore assoluto minori dei termini della serie

$$ABH \sum_{\nu,m} r'^m \frac{1}{r^m s^\nu} \frac{1}{\rho^\mu \sigma^\nu} = \frac{ABH}{\rho^\mu} \sum_{\nu,m} \left(\frac{r'}{r}\right)^m \frac{1}{(s\sigma)^\nu}$$

certamente convergente: per cui i termini della S si potranno ordinare come si vuole e si avrà d'una parte

$$S_\mu = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m,\nu} \alpha_{\mu,\nu}\right)$$

e per le relazioni (8) del § 20:

$$S_\mu = c_\mu;$$

d'altra parte

$$S_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu,\nu} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m a_{m,\nu}\right)$$

ossia, per le (9)

$$S_\mu = c_\mu = 0;$$

onde non può esistere uno sviluppo della forma (8) nel quale i coefficienti siano diversi da zero. Ne risulta l'identità fra gli sviluppi (5) e (7) della $f(x)$, e quindi

$$\sum_n \alpha_{m,n} A_n = \frac{1}{2\pi i} \int f(y) \varpi_m(y)\, dy. \tag{10}$$

Le considerazioni fatte sulle funzioni $p_m(x)$ nei due paragrafi precedenti si possono ripetere per le $q_n(x)$ definite da

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} x^m$$

le cui associate sono

$$\frac{1}{y} Q_n\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} \frac{1}{y^{m+1}}.$$

27. Dalle posizioni

$$T(u,\ v) = \sum a_{m,n} u^m v^n$$

$$\Theta(u,\ v) = \sum \alpha_{m,n} u^m v^n$$

risulta

$$p_m(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(u)} \frac{T(u,\ v)\, du}{u^{m+}}, \qquad q_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(v)} \frac{T(u,\ v)\, dv}{v^{n+1}} \tag{11}$$

l'integrazione essendo estesa la prima volta ad un cerchio di raggio $< r$ nel piano u, la seconda volta nel piano v ad un cerchio di raggio $< s$; da queste

$$a_{m,n} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(u)} \int_{(v)} \frac{T(u,\ v)\, du\, dv}{u^{m+1} v^{n+1}}.$$

Analogamente

$$P_m(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(u)} \frac{\Theta(u,\ v)\, du}{u^{m+1}}, \qquad Q_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Theta(u,\ v)\, dv}{v^{n+1}}.$$

Si ponga ora nella (7)

$$f(x) = p_m(x)$$

e verrà

$$p_m(x) = \sum C_\mu^{(m)} p_\mu(x)$$

ma poichè non possono esistere sviluppi dello zero per funzioni $p_\mu(x)$, sarà

$$C_\mu^{(m)} = \begin{cases} 0 \text{ per } \mu \gtrless m \\ 1 \text{ per } \mu = m \end{cases}$$

e ponendo per questi coefficienti le loro espressioni in forma d'integrali

$$\int_{(C)} \varpi_\mu(y) p_m(y) dy = \begin{cases} 0 \text{ per } \mu \gtrless m \\ 2\pi i \text{ per } \mu = m \end{cases} \tag{12}$$

l'integrazione essendo estesa come a § 25. Una formola analoga vale per le $q_n(x)$. Queste formole (12) sono l'espressione in forma d'integrale definito delle formole (5) e (8) del § 20, e come tali si possono riguardare come una estensione delle relazioni fra gli elementi di un determinante ed i rispettivi elementi reciproci.

Bologna, aprile 1883.

INDICE.

Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali.

(*Nota del prof.* G. Ricci, *a Padova.*)

Se si estende la definizione data da Ampère (*) per l'integrale generale di una equazione differenziale ai sistemi di equazioni simultanee o no, la proprietà di ammettere integrali generali, la cui arbitrarietà sia rappresentata da un numero finito di costanti arbitrarie, non appartiene soltanto alle equazioni a derivate ordinarie, ma anche a quei sistemi completi (**) di equazioni a derivate parziali di ordine qualunque m, in cui tutte le derivate di ordine m^{simo} delle funzioni incognite sono o possono ottenersi espresse per le variabili indipendenti, per le funzioni stesse e per le derivate di ordine inferiore. È in fatti evidente che la differenza fra il numero delle equazioni di ordine qualunque $\mu > m$ che si possono ottenere colla differenziazione dalle *funzioni primitive* e dalle equazioni proposte è costante ed eguale a quello delle funzioni stesse e delle loro derivate di grado inferiore ad m.

Se si indica questo numero con N l'integrale generale del sistema proposto deve, secondo la citata definizione di Ampère, contenere N costanti arbitrarie.

Alcune ricerche, che spero poter pubblicare fra breve, mi hanno condotto ad un sistema di equazioni di 2° ordine con una sola funzione incognita della forma di quelli sopra indicati. Poichè dovrò valermi dei risultati relativi a questo caso, è sopra di esso che mi fermerò specialmente in questo breve studio,

(*) Pour qu'une intégrale soit générale il faut qu'il n'en résulte entre les variables, que l'on considère et leurs dérivées à l'infini que les relations exprimées par l'équation donnée et par les équations, qu'on en déduit en différentiant. — *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles,* § 1er. Journal de l'École Polytechnique, vol. 10, pag. 550.

(**) Estendo quì in modo facilmente intelligibile e che sarà precisato una denominazione introdotta da Clebsch pei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di 1° ordine.

ma il metodo della dimostrazione renderà evidente la generalità delle conclusioni, a cui esso conduce. Indicando con n il numero delle variabili indipendenti, la determinazione dell'integrale generale dipende da quella di tutti gli integrali indipendenti di un sistema jacobiano di n equazioni a derivate parziali lineari omogenee di 1° ordine con $N+n$ variabili indipendenti. In esso poi le costanti arbitrarie entrano per guisa che determinandole convenientemente si possono far prendere alle funzioni incognite e alle loro derivate di ordine inferiore all'm^{simo} in un punto scelto ad arbitrio dello spazio ad n dimensioni valori arbitrarî.

Come vedremo, questi risultati possono essere utili anche per la integrazione di sistemi di equazioni, che non si possono immediatamente ridurre alla forma quì considerata.

Supponiamo che una funzione φ di n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ contenga $n+1$ parametri $c_0, c_1, \ldots c_n$, rispetto a cui sia risolubile il sistema di equazioni

$$\varphi = p_0; \qquad \frac{d\varphi}{dx_r} = p_r \qquad (r=1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

e la risoluzione dia

$$c_s = f_s(x_1, x_2, \ldots x_n; p_0; p_1, p_2, \ldots p_n) \qquad (s=0, 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Se questi valori delle c si sostituiscono nelle espressioni

$$\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_g} = a_{ig} \qquad (i, g=1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

delle derivate seconde di φ si ottiene un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni della forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_g} = A_{ig} \qquad (i, g=1, 2, \ldots n), \tag{a}$$

essendo identicamente

$$A_{ig} = A_{gi} \tag{b}$$

e le A_{ig} funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n; p_0; p_1, p_2, \ldots p_n$. Se per le p si intendono poste le espressioni (1) esse costituiscono un sistema di equazioni a derivate parziali di 2° ordine, a cui soddisfa φ, e poichè i valori delle p dati dalle (1) rendono identiche anche le (2), le equazioni

$$\frac{df_s}{dx_i} + \sum_g A_{ig} \frac{df_s}{dp_g} + p_i \frac{df_s}{dp_0} = 0, \qquad (s=0, 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

che si ottengono derivando queste identità e servendosi delle (1) ed (a), se non sono identità, dovranno contenere le p ed essere soddisfatte dai valori (1) di queste. E siccome le (2) ci dicono che almeno in un punto dello spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ i valori di φ e delle sue derivate prime sono arbitrarî, mentre invece le (4), se non fossero identità, ci darebbero una o più delle p in funzione delle altre e di $x_1, x_2, \ldots x_n$, conviene concludere che $f_0, f_1, \ldots f_n$ considerate come funzioni delle $2n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$; p_0; $p_1, p_2, \ldots p_n$ soddisfanno al sistema di n equazioni lineari ed omogenee

$$\frac{df}{dx_i} + \sum_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} + p_i \frac{df}{dp_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (\alpha)$$

Siccome noi supponiamo le c indipendenti fra di loro questo sistema ammette dunque $n+1$ integrali indipendenti e però esso è completo e per la sua forma speciale jacobiano. Ciò del resto si verifica facilmente come segue.

Posto

$$(ig, l) = \frac{dA_{ig}}{dx_l} + \sum_1^n {}_h \frac{dA_{ig}}{dp_h} A_{hl} + p_l \frac{dA_{ig}}{dp_0} \qquad (i, g, l = 1, 2, \ldots n) \qquad (5)$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema (α) sia jacobiano consistono in ciò che si abbia identicamente

$$(ig, l) = (lg, i) \qquad (i, g, l = 1, 2, \ldots n). \qquad (b_1)$$

Ora ricordando che le A_{ig} non sono che le a_{ig}, in cui per le c si sono sostituiti i loro valori dati dalle (2), si trova

$$(ig, l) = \frac{da_{ig}}{dx_l} + \sum_0^n {}_k \frac{da_{ig}}{dc_k} \left(\frac{df_k}{dx_l} + \sum_1^n {}_h A_{hl} \frac{df_k}{dp_h} + p_l \frac{df_k}{dp_0} \right)$$

e per le (3) e (4)

$$(ig, l) = \frac{d^3 \varphi}{dx_i dx_g dx_l} = (lg, i).$$

Reciprocamente se si ha un sistema di equazioni della forma (α), dove le A_{ig} sono funzioni delle variabili indipendenti, di φ e delle sue derivate prime tali che, fatte le posizioni (1), si abbiano le identità (b) e (b_1), il sistema (α), in cui si considerano le x e le p come indipendenti fra di loro è jacobiano. Esso ammette dunque $n+1$ integrali indipendenti $f_0, f_1, \ldots f_n$, i quali eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie daranno il sistema di equazioni (2) risolubile rispetto alle p e da cui trarremo quindi $p_0, p_1, \ldots p_n$ espresse in funzione di $x_1, x_2, \ldots x_n$ e delle costanti arbitrarie. Da esse si avrà pure

$$\frac{df_s}{dx_i} + \sum_0^n {}_g \frac{df_s}{dp_g} \frac{dp_g}{dx_i} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots n)$$

e ricordando che le f_s soddisfanno alle (α), dal confronto di queste con quelle, che si hanno dalle (α) facendovi $f=f_s$,

$$p_i=\frac{dp_0}{dx_i};\qquad \frac{dp_g}{dx_i}=A_{ig}\qquad\qquad (i,\ g=1,\ 2,\dots\ n).$$

Queste ci dicono che $p_1,\ p_2,\dots\ p_n$ sono le derivate prime di una stessa funzione p_0 di $x_1,\ x_2,\dots\ x_n$, la quale contiene $n+1$ costanti arbitrarie e soddisfa al sistema di equazioni (α). Le (2) ci dicono di più che si può sempre disporre di queste costanti in guisa che p_0 e le sue derivate prime prendano valori arbitrarî in un punto arbitrario dello spazio ad n dimensioni ($x_1,\ x_2,\dots\ x_n$).

Se ora deriviamo la (a) rispetto ad x_l e per le derivate seconde di φ, che compariscono nel secondo membro, poniamo i valori dati dalle (a) stesse noi otteniamo

$$\frac{d^3\varphi}{dx_i\,dx_g\,dx_l}=(ig,\ l). \qquad (c)$$

Dunque l'essere verificate le identità (b_1) importa che, come nel primo, anche nel secondo membro di queste equazioni si possa scambiare l'indice i coll'indice l, come le identità (b) permettono di ciò fare rispetto agli indici i e g nei secondi membri delle equazioni (a) e (c). Se le (a) e (b) non fossero identità, esse costituirebbero delle equazioni differenziali di 1° ordine, a cui dovrebbero soddisfare tutti gli integrali del sistema (a), e che sarebbero quindi da aggiungere al sistema stesso. Per questo noi chiameremo *completo* un sistema di equazioni della forma (a), quando i suoi secondi membri considerati come funzioni delle variabili *indipendenti* $x_1,\ x_2,\dots\ x_n;\ p_0;\ p_1,\ p_2,\dots\ p_n$ soddisfacciano alle equazioni (b) e (b_1).

Noi abbiamo dunque:

« Se un sistema di equazioni della forma (a), i cui secondi membri conten-
» gono oltre alle variabili indipendenti la funzione incognita e le sue derivate
» prime, è completo, il suo integrale generale contiene $n+1$ costanti arbitrarie,
» di cui si può disporre in modo che esso e le sue derivate prime prendano
» in un punto qualunque dello spazio ad n dimensioni ($x_1,\ x_2,\dots\ x_n$) valori
» arbitrarî. »

« Di più in questo caso considerando le A_{ig} come funzioni delle $2n+1$ va-
» riabili indipendenti $x_1,\ x_2,\dots\ x_n;\ p_0;\ p_1,\ p_2,\dots\ p_n$ dopo aver fatte le posi-
» zioni (1) il sistema di equazioni (α) è jacobiano, e i suoi $n+1$ integrali in-
» dipendenti eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie ci danno in $p_0,\ p_1,\dots$
» p_n l'integrale generale del sistema (a) e le sue derivate. »

Se nelle φ le c_h invece che costanti si suppongono funzioni delle x, invece del sistema (1) si ha l'altro

$$\varphi = p_0, \qquad \frac{d\varphi}{dx_r} = p_r + \sum_0^n{}_h \frac{d\varphi}{dc_h}\frac{dc_h}{dx_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

il quale coincide col sistema (1), se le c soddisfanno alle equazioni

$$\frac{d\varphi}{dc_h} = 0.$$

Ne viene che, determinato l'integrale generale del sistema (a) se ne trarranno degli integrali singolari, se per alcune o per tutte le c, per esempio per c_0, $c_1, \ldots c_m$ (con $m \leqq n$) si porranno in φ i valori dati per esse in funzione delle x e di c_{m+1}, $c_{m+2}, \ldots c_n$ dalle equazioni

$$\frac{d\varphi}{dc_0} = \frac{d\varphi}{dc_1} = \cdots = \frac{d\varphi}{dc_m} = 0,$$

che supponiamo risolubili rispetto a c_0, $c_1, \ldots c_m$.

Se i secondi membri delle equazioni (a) non contengono la funzione incognita, φ si ha dalle (5)

$$(ig, l) = \frac{dA_{ig}}{dx_l} + \sum_1^n{}_h \frac{dA_{ig}}{dp_h} A_{hl} \qquad (i, g, l = 1, 2, \ldots n)$$

e l'essere verificate le identità (b_1) importa che non soltanto il sistema (α), ma anche il sistema

$$\frac{df}{dx_i} + \sum_1^n{}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad (\alpha_1)$$

che ha una variabile indipendente di meno, sia jacobiano. Esso ammette soltanto n integrali indipendenti e come si è fatto nel caso generale si dimostra che questi eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie ci danno per p_1, $p_2, \ldots p_n$ le derivate prime di una stessa funzione φ, che soddisfa alle equazioni (a) e ne è l'integrale generale. In questo caso la determinazione di questo integrale si riduce dunque a quella degli n integrali indipendenti del sistema (α_1) e ad una quadratura così che una delle $n+1$ costanti arbitrarie riesce, come è naturale, semplicemente additiva.

Per farne poi una speciale applicazione darò ancora un cenno sull'uso di questo metodo per la integrazione di un sistema completo di equazioni simultanee a derivate parziali di primo ordine. Se m è il numero delle funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, n quello delle variabili indipendenti un tale sistema è della forma

$$\frac{d\varphi_r}{dx_s} = A_s^{(r)}, \qquad (r = 1, 2, \ldots m;\ s = 1, 2, \ldots n) \qquad (\alpha_1)$$

dove le $A_s^{(r)}$ sono funzioni delle variabili indipendenti e di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$. Posto

$$\varphi_r = q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots m)$$

$$\{st, r\} = \frac{dA_s^{(r)}}{dx_t} + \sum_1^m {}_k \frac{dA_s^{(r)}}{dq_k} A_r^{(k)} \qquad (r = 1, 2, \ldots m;\ s, t = 1, 2, \ldots n),$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema (a_1) sia completo consistono in ciò che, le $A_s^{(r)}$ considerate come funzioni delle $n+m$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$; $q_1, q_2, \ldots q_m$ soddisfacciano al sistema di equazioni simultanee a derivate parziali lineari

$$\{st, r\} = \{ts, r\} \qquad (r = 1, 2, \ldots m;\ s, t = 1, 2, \ldots n). \qquad (b')$$

Queste stesse condizioni sono quelle necessarie e sufficienti, perchè il sistema di n equazioni lineari a derivate parziali con $n+m$ variabili indipendenti

$$\frac{df}{dx_r} + \sum_1^m {}_h A_r^{(h)} \frac{df}{dq_q} = 0 \qquad (A_1)$$

sia jacobiano e il *sistema integrale generale* delle equazioni (a_1) si ottiene eguagliando ad altrettante costanti arbitrarie gli m integrali indipendenti del sistema (A_1).

Se invece di nm equazioni simultanee, a derivate parziali di 1° ordine con m funzioni incognite ed n variabili indipendenti risolubili rispetto alle derivate prime di quelle, se ne hanno soltanto $nm - 1$, che permettano di esprimere tutte le derivate, ad eccezione di una, che supporremo essere $\frac{d\varphi_1}{dx_1}$, per questa, per le φ e per le x, noi abbiamo un sistema di equazioni della forma (a_1), in cui manca quella, che corrisponde ad $r = 1$, $s = 1$ e in cui posto

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = A,$$

le $A_r^{(s)}$ saranno funzioni delle x, delle q e di A. Se questa si potrà determinare in funzione delle x e delle q, per guisa che le equazioni (b') restino soddisfatte, noi potremo ridurre il sistema (a_1) alla forma (a) ed integrarlo col metodo dato per questo. E poichè in questa ipotesi si ha

$$\{st, r\} = \frac{dA_s^{(r)}}{dx_t} + \frac{dA_s^{(r)}}{dA}\frac{dA}{dx_t} + \sum_1^{(m)} {}_k \left(\frac{dA_s^{(r)}}{dq_k} + \frac{dA_s^{(r)}}{dA}\frac{dA}{dq_k}\right),$$

le derivate essendo prese col considerare le x, le q ed A come variabili indipendenti, si vede che il sistema di equazioni (b'), a cui deve soddisfare A è a derivate parziali di 1° ordine e lineare. Il numero delle equazioni è poi

$$N = \frac{m\,n(n-1)}{2}$$

e quelle delle variabili indipendenti dopo averle rese omogenee con un metodo noto

$$\mu = n + m + 1.$$

Nel caso di $m = 1$ ed $n = 2$ è $N = 1$, $\mu = 4$. Vediamo così che la integrazione delle equazioni a derivate parziali di primo ordine con due variabili indipendenti, si può far dipendere dalla determinazione dell'integrale generale di una equazione lineare ed omogenea con quattro variabili indipendenti e poi da quella dell'integrale comune di due equazioni pure lineari ed omogenee con tre variabili indipendenti.

Padova, giugno 1883.

Sulla teoria delle funzioni ellittiche.

(*Memoria di* F. BRIOSCHI, *in Milano.*)

PARTE PRIMA.

1.° Indicheremo con $\vartheta(x, \omega)$, $\vartheta_1(x, \omega)$, $\vartheta_2(x, \omega)$, $\vartheta_3(x, \omega)$ le quattro funzioni di JACOBI:

$$\vartheta(x, \omega) = Q\Pi_r(1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}) = \sum_m (-1)^m q^{m^2} e^{2mix}$$

$$\vartheta_1(x, \omega) = 2q^{\frac{1}{4}} Q \operatorname{sen} x\, \Pi_r(1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}) = \frac{1}{i} \sum_m (-1)^m q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} e^{(2m+1)ix}$$

$$\vartheta_2(x, \omega) = 2q^{\frac{1}{4}} Q \cos x\, \Pi_r(1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}) = \sum_m q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2} e^{(2m+1)ix}$$

$$\vartheta_3(x, \omega) = Q\Pi_r(1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}) = \sum_m q^{m^2} e^{2mix}$$

nelle quali:

$$Q = \Pi_r(1 - q^{2r}) = \sum_m q^{3m^2+m}$$

(*Fundamenta nova,* pag. 185, equaz.^{e} 6), e gli indici r, m devono assumere tutti i valori numerici interi, il primo dall'unità all'infinito, il secondo da $-\infty$ a $+\infty$; inoltre $\omega = i\frac{K'}{K}$ e $q = e^{i\pi\omega}$.

Si indichi col sig. DEDEKIND (*) $\eta(\omega)$ la espressione:

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \Pi_r(1 - q^{2r}) = \sum_m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}$$

si avrà per la doppia rappresentazione di $\vartheta_1(x, \omega)$:

$$\eta(\omega) = \frac{i}{\sqrt{-3}}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\omega}{3}\right) = -iq^{\frac{1}{3}}\vartheta_1(\omega\pi, 3\omega)$$

essendo $i = \sqrt{-1}$.

(*) Schreiben an Herrn BORCHARDT: *Ueber die Theorie der elliptischen Modul-Functionen.* Journal für die Mathematik, Bd. 83.

Sia n un numero primo, α, β due numeri interi che possono prendere i valori 1, 2, 3,... $\frac{n-1}{2}$, ed s un numero intero da zero ad $n-1$; pongasi:

$$F_\alpha(\omega) = (-1)^\alpha q^{\frac{\alpha^2}{n}} i\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$

$$G_{\beta,s}(\omega) = -(-1)^\beta i \frac{\vartheta_1\left(\frac{\beta\pi}{n},\ \frac{\omega+8s}{n}\right)}{\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}}$$

saranno evidentemente $F_\alpha(\omega)$, $G_{\beta,s}(\omega)$ eguali ciascuna ad $\eta(\omega)$ per $n=3$, $s=0$. Nel caso generale rammentando una delle relazioni contenute in una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze del luglio 1858 (*), cioè la:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1(x,\ \omega) = \vartheta_1(nx,\ n^2\omega) + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha(-1)^\alpha q^{\alpha^2}\{e^{2\alpha ix}\vartheta_1[n(x+\alpha\omega\pi),\ n^2\omega] + \\ + e^{-2\alpha ix}\vartheta_1[n(x-\alpha\omega\pi),\ n^2\omega]\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

e ponendo in questa $x=\frac{\beta\pi}{n}$ ed $\frac{\omega+8s}{n}$ in luogo di ω, si giunge facilmente alla:

$$(-1)^\beta\vartheta_1\left(\frac{\beta\pi}{n},\ \frac{\omega+8s}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha(-1)^\alpha\varepsilon^{4s\alpha^2}q^{\frac{\alpha^2}{n}}(\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta})\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$

nella quale $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Posto quindi:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^{-\alpha\beta}-\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}}$$

si ottiene fra le funzioni $G_{\beta,s}(\omega)$ ed $F_\alpha(\omega)$ la relazione lineare:

$$G_{\beta,s}(\omega) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha\,\varepsilon^{4s\alpha^2}A_{\alpha\beta}F\alpha(\omega). \quad (2)$$

2.° La funzione:

$$F_\alpha(\omega) = (-1)^\alpha i q^{\frac{\alpha^2}{n}}\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$

(*) *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des functions elliptiques.* Comptes Rendus, t. 47, pag. 339, formola 2.

la quale per $n=3$ coincide colla $\eta(\omega)$ del sig. DEDEKIND, ha varie proprietà che passiamo a stabilire. In primo luogo mutando l'indice α in $n-\alpha$ oppure in $n+\alpha$ si hanno le:

$$F_{n-\alpha}(\omega)=-F_\alpha(\omega)$$
$$F_{n+\alpha}(\omega)=F_\alpha(\omega);$$

alle quali può aggiungersi la $F_{-\alpha}(\omega)=-F_\alpha(\omega)$. Poi sostituendo $\omega+1$ ad ω si ottiene la:

$$F_\alpha(\omega+1)=e^{\frac{i\pi}{4n}(n+2\alpha)^2}F_\alpha(\omega)$$

e per mezzo della nota relazione:

$$\vartheta_1(x,\ \omega)=\frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{\omega}}\cdot e^{-\frac{ix^2}{\omega\pi}}\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega},\ -\frac{1}{\omega}\right)$$

si deduce la:

$$F_\alpha\left(-\frac{1}{\omega}\right)=-e^{\frac{i\pi n}{4}}\sqrt{\omega}\cdot G_{\alpha,0}(\omega)$$

le quali due ultime relazioni pel caso di $n=3$ conducono alle:

$$\eta(\omega+1)=e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\omega),\qquad \eta\left(-\frac{1}{\omega}\right)=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\omega}\cdot\eta(\omega)$$

già trovate dal sig. DEDEKIND (pag. 281).

Sostituendo nella relazione (1) sopra rammentata $3\frac{\omega+8s}{n}$ in luogo di ω, e ponendo in seguito nella medesima $x=\omega\pi$, si ottiene la seguente:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\omega\pi,\ 3\frac{\omega+8s}{n}\right)=\vartheta_1(n\omega\pi,\ 3n\omega)+$$
$$+\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha(-1)^\alpha\varepsilon^{12s\alpha^2}q^{\frac{3\alpha^2}{n}}\{q^{2\alpha}\vartheta_1[(n+3\alpha)\omega\pi,\ 3n\omega)+q^{-2\alpha}\vartheta_1[(n-3\alpha)\omega\pi,\ 3n\omega]\}.$$

Ora da una delle formole date dal sig. SCHROETER nella sua dissertazione: *De aequationibus modularibus* (pag. 14, formola 7) deducesi la seguente:

$$\vartheta_1(u-v,\ \omega)\vartheta_1(u+3v,\ 3\omega)-\vartheta_1(u+v,\ \omega)\vartheta_1(u-3v,\ 3\omega)=\vartheta_1(2u,\ 3\omega)\vartheta_1(2v,\ \omega)$$

e supponendo in questa $u = n\omega\pi$, $v = \alpha\omega\pi$ dopo aver posto $n\omega$ in luogo di ω, osservando essere:

$$\vartheta_1[(n-\alpha)\omega\pi,\ n\omega] = q^{-(n-2\alpha)}\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$
$$\vartheta_1[(n+\alpha)\omega\pi,\ n\omega] = -q^{-(n+2\alpha)}\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$
$$q^n\vartheta_1(2n\alpha\omega,\ 3n\omega) = \vartheta_1(n\omega\pi,\ 3n\omega)$$

si giunge alla:

$$\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)\{q^{2\alpha}\vartheta_1[(n+3\alpha)\omega\pi,\ 3n\omega] +$$
$$+ q^{-2\alpha}\vartheta_1[(n-3\alpha)\omega\pi,\ 3n\omega]\} = \vartheta_1(n\omega\pi,\ 3n\omega)\vartheta_1(2\alpha\omega\pi,\ n\omega)$$

per la quale la relazione superiore può scriversi:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\omega\pi,\ 3\frac{\omega+8s}{n}\right) = \vartheta_1(n\omega\pi,\ 3n\omega)\left[1 + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha\,\varepsilon^{12s\alpha^2}\frac{F_{2\gamma}(\omega)}{F_\alpha(\omega)}\right].$$

Ma dal valore di $\eta(\omega)$ si ha tosto essere:

$$\eta(n\omega) = -iq^{\frac{n}{3}}\vartheta_1(n\omega\pi,\ 3n\omega)$$

e dimostrasi facilmente che:

$$\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right) = \pm iq^{\frac{n}{3}}\vartheta_1\left(\omega\pi,\ 3\frac{\omega+8s}{n}\right)$$

secondo che n è della forma $6t-1$ oppure della $6t+1$. Si avrà così la relazione:

$$\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right) = \mp(-1)^{\frac{n-1}{2}}\eta(n\omega)\left[1 + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha\,\varepsilon^{12s\alpha^2}\frac{F_{2\gamma}(\omega)}{F_\alpha(\omega)}\right] \qquad (3)$$

e siccome moltiplicando fra loro le $\frac{n-1}{2}$ funzioni $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$,... si ottiene dopo alcune riduzioni essere:

$$\Pi_\alpha F(\alpha) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}}\eta(\omega)\eta(n\omega)^{\frac{n-3}{2}}$$

ed analogamente dal prodotto $G_{1,s}(\omega)$, $G_{2,s}(\omega)$,... si ha:

$$\Pi_\beta G_{\beta\ s}(\omega) = \frac{1}{n^{\frac{n-3}{4}}}\eta(\omega)\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}};$$

se si pongono:

$$y_\alpha = \frac{F_\alpha(\omega)}{\eta(\omega)}, \qquad \xi_{\beta,s} = \frac{G_{\beta,s}(\omega)}{\eta(\omega)}$$

si deducono tosto le seguenti:

$$\Pi_\alpha y_\alpha = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} \left[\frac{\eta(n\omega)}{\eta(\omega)}\right]^{\frac{n-3}{2}}, \qquad \Pi_\beta \xi_{\beta,s} = \left[\frac{\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right)}{\eta(\omega)\sqrt{n}}\right]^{\frac{n-3}{2}} \tag{4}$$

od infine ponendo:

$$\left[\frac{\eta(n\omega)}{\eta(\omega)}\right]^2 = \frac{1}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{z_\infty}{n}; \qquad \left[\frac{\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right)}{\eta(\omega)}\right]^2 = z_s \tag{5}$$

si giunge alle rimarchevoli relazioni:

$$\left[\frac{z_\infty}{n}\right]^{\frac{n-3}{4}} = \Pi_\alpha y_\alpha; \qquad \left[\pm \frac{z_s}{n}\right]^{\frac{n-3}{4}} = \Pi_\beta \xi_{\beta,s} \tag{6}$$

e la relazione superiore (3) prenderà la forma:

$$\sqrt{z_s} = \mp (-1)^{\frac{n-1}{4}} \sqrt{\frac{z_\infty}{n}} \left[1 + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha\, \varepsilon^{12s\alpha^2} \frac{y_{2\alpha}}{y_\alpha}\right] \tag{7}$$

il doppio segno avendo anche in queste ultime formole il significato esposto sopra.

3.° Le equazioni modulari di cui le radici sono le z_∞, z_0, $z_1, \ldots z_{n-1}$ hanno quindi, per quest'ultima equazione, la proprietà caratteristica delle equazioni Jacobiane, cioè fra le radici quadrate delle radici stesse sussistono $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari. Ma questa classe va distinta dalle altre sia per la speciale proprietà delle radici stabilita nelle relazioni (6), quanto per quelle relative alle funzioni $F_\alpha(\omega)$, $G_{\beta,s}(\omega)$.

Un'altra interessante proprietà delle espressioni y_α fu indicata dal prof. Klein nel suo pregevole lavoro: *Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function,* pubblicato nel volume 17 (1881) dei Math. Annalen, pag. 565, deducendola da un noto teorema relativo alle funzioni ϑ.

Essendo, come è noto;

$$\begin{aligned}&\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)\,\vartheta_1(w+t)\,\vartheta_1(w-t)+\\+&\vartheta_1(v+t)\,\vartheta_1(v-t)\,\vartheta_1(w+u)\,\vartheta_1(w-u)+\\+&\vartheta_1(t+u)\,\vartheta_1(t-u)\,\vartheta_1(w+v)\,\vartheta_1(w-v)=0\end{aligned}$$

se si pone in essa:

$$u=l\omega\pi,\qquad v=m\omega\pi,\qquad w=g\omega\pi,\qquad t=h\omega\pi$$

si deducono le relazioni:

$$y_{l+m}y_{l-m}y_{g+h}y_{g-h}+y_{m+h}y_{m-h}y_{g+l}y_{g-l}+y_{h+l}y_{h-l}y_{g+m}y_{g-m}=0 \tag{8}$$

nello sviluppo delle quali si terrà conto delle:

$$y_{n-\alpha}=-y_\alpha,\qquad y_{n+\alpha}=y_\alpha,\qquad y_{-\alpha}=-y_\alpha. \tag{9}$$

Infine una condizione alla quale soddisfanno le funzioni y_α si ottiene moltiplicando fra loro gli n valori della funzione $\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right)$ corrispondenti ad $s=0$, 1, 2,... $n-1$. Questo prodotto dà:

$$\Pi_s\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right)=\frac{\eta(\omega)^{n+1}}{\eta(n\omega)}$$

e per esso dalla seconda delle equazioni (4) si deduce la:

$$\Pi_s\Pi_\beta\xi_{\beta,s}=\frac{1}{n^{\frac{n(n-3)}{4}}}\left[\frac{\eta(\omega)}{\eta(n\omega)}\right]^{\frac{n-3}{2}}$$

o per la prima delle stesse (4):

$$\Pi_\alpha y_\alpha\cdot\Pi_s\Pi_\beta\xi_{\beta,s}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}}\frac{1}{n^{\frac{n(n-3)}{4}}} \tag{10}$$

ma le $\xi_{\beta,s}$ sono, per la relazione (2), funzioni lineari delle y_α, quindi il primo membro di quest'ultima equazione sarà una forma in y_1, y_2,. . $y_{\frac{n-1}{2}}$ dell'ordine $\frac{n^2-1}{2}$, e la forma stessa sarà eguale ad una costante. Il prodotto delle radici z_∞, z_0,... z_{n-1} sarà poi per l'equazione stessa eguale a $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n$.

4.° Posto:

$$x = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$

dove k è il modulo dell'integrale ellittico, la funzione $\eta(\omega)$ può esprimersi nel modo seguente (*):

$$\eta(\omega) = \text{Cost.}\, x^{-\frac{1}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Sieno x_∞, x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$ gli $n+1$ valori di x corrispondenti ai moduli λ_∞, $\lambda_0, \ldots$ si avranno analogamente alla superiore le:

$$\eta(n\omega) = \text{Cos}\, x_\infty^{-\frac{1}{6}}(1-x_\infty)^{-\frac{1}{8}} n^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{dx_\infty}{d\omega}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\eta\left(\frac{\omega+8s}{n}\right) = \text{Cost.}\, x_s^{-\frac{1}{6}}(1-x_s)^{-\frac{1}{8}} n^{\frac{1}{4}}\left(\frac{dx_s}{d\omega}\right)^{\frac{1}{4}}$$

per le quali dalle relazioni si ottengono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} z_\infty &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{4}}}{x_\infty^{\frac{1}{3}}(1-x_\infty)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{dx_\infty}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \\ z_s &= n^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{4}}}{x_s^{\frac{1}{3}}(1-x_s)^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{dx_s}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

A queste relazioni si giunge, come è noto, anche nel modo seguente. Posto:

$$u = \eta^2(\omega), \qquad p = \frac{1}{6}\frac{4-7x}{x(1-x)}, \qquad q = -\frac{1}{144\,x(1-x)}$$

la u soddisfa alla equazione differenziale del secondo ordine:

$$u'' + pu' + qu = 0$$

nella quale $u' = \frac{du}{dx}$. Analogamente indicando con X una qualsivoglia delle x_∞, x_0, $x_1, \ldots$; con U il valore di u corrispondente e con P, Q i valori di p,

(*) Vedi Dedekind, Memoria citata, pag. 281.

q nei quali siasi sostituito X ad x, si avrà:

$$\frac{d^2 U}{d X^2}+P\frac{dU}{dX}+QU=0.$$

Se ora si pone:

$$\upsilon_\infty=\mp(-1)^{\frac{n-1}{4}}\sqrt{\frac{z_\infty}{n}},\qquad \upsilon_s=\sqrt{z_s}$$

e si indica con υ una qualsivoglia delle υ_∞, υ_0, $\upsilon_1,\ldots$ si ha dalla (5):

$$u=\frac{1}{\upsilon^2}U$$

e quindi dalle equazioni differenziali superiori si dedurranno le:

$$PX'^2=X''-4\frac{\upsilon'}{\upsilon}X'+pX'$$

$$QX'^2=-2\frac{\upsilon''}{\upsilon}+6\left(\frac{\upsilon'}{\upsilon}\right)^2-2p\frac{\upsilon'}{\upsilon}+q.$$

La prima di queste, integrata, conduce tosto alle relazioni (11); eliminando la υ dalle due si giunge ad una nota equazione differenziale del terzo ordine non lineare fra X ed x, ed infine essendo:

$$\upsilon^4=\text{Cost.}\frac{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{X^{\frac{2}{3}}(1-X)^{\frac{1}{2}}}\frac{dX}{dx}$$

si avrà dalla seconda pel valore di Q:

$$X^{\frac{1}{3}}=\text{Cost.}\frac{e^{2\int p\,dx}}{\upsilon^{10}}[2\upsilon\upsilon''-6\upsilon'^2+2p\upsilon\upsilon'-q\upsilon^2]$$

il quale valore di X sostituito nella precedente relazione darà per la determinazione di υ una equazione differenziale del terzo ordine non lineare.

5.° Se la relazione (1) si deriva rispetto ad x e ponesi quindi nella medesima $x=0$ ed $\frac{\omega+8s}{n}$ in luogo di ω, si ottiene la:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta'_1\left(0,\ \frac{\omega+8s}{n}\right)=n\vartheta'_1(0,\ n\omega)+$$

$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\cdot\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha(-1)^\alpha\varepsilon^{4s\alpha^2}q^{\frac{\alpha^2}{n}}[n\vartheta'_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)+2\alpha i\vartheta_1(\alpha\omega\pi,\ n\omega)]$$

essendo $\vartheta'_1(0, n\omega)$, $\vartheta'_1(\alpha\omega\pi, n\omega)$ i valori della derivata di $\vartheta_1(x, n\omega)$ rispetto ad x nella quale sia sostituito ad x lo zero oppure $\alpha\omega\pi$. Ora:

$$\vartheta'_1(0, \omega) = 2\eta^3(\omega)$$

si avrà perciò dalla equazione superiore:

$$\eta^3\left(\frac{\omega+8s}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n \cdot \eta^3(n\omega) +$$

$$+\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha (-1)^\alpha \varepsilon^{4s\alpha^2} q^{\frac{\alpha^2}{n}} [n\vartheta'_1(\alpha\omega\pi, n\omega) + 2\alpha i \vartheta_1(\alpha\omega\pi, n\omega)] \cdot$$

la quale dimostra che non solo le v_∞, v_0, $v_1, \ldots v_{n-1}$ in causa della relazione (7) sono legate fra loro da $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari, ma sussistere altresì la stessa proprietà per le v^3_∞, v^3_0, $v^3_1, \ldots$ (*).

6.° I coefficienti delle equazioni modulari di cui le radici sono le z_∞, z_0, $z_1, \ldots z_{n-1}$ sono numerici oppure funzioni di x. Il sig. Klein in una lettera a me diretta e pubblicata nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo ed il sig. Kiepert nella sua Memoria: *Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen* (**) hanno stabilito alcuni criterî per la determinazione di quei coefficienti che riassumiamo brevemente.

Se $n \equiv 5$ (mod. 12) i coefficienti della equazione modulare sono numerici oppure eguali a $cx^{\frac{\mu}{3}}$ essendo c numerico e μ un numero intero.

Se $n \equiv 7$ (mod. 12) i coefficienti stessi sono numerici oppure eguali a $c(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$ essendo ν intero.

Se $n \equiv 11$ (mod. 12) quei coefficienti sono numerici oppure eguali a $cx^{\frac{\mu}{3}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$ potendo essere μ oppure ν anche eguali a zero.

Se infine $n \equiv 1$ (mod. 12) i coefficienti sono numeri o funzionî di x e di $1-x$.

Indicando con a_1, a_2, $a_3, \ldots a_r, \ldots a_{n+1}$ quei coefficienti si ha che:

Se $n \equiv 5$ (mod. 12) sono numerici tutti i coefficienti a_r pei quali $r \equiv 0$

(*) Vedi la mia Nota: *Sopra una classe di equazioni modulari.* Annali di Matematica, t. 9, pag. 167.

(**) *Sulle equazioni del moltiplicatore.* Seduta del 2 gennajo, 1879 ed anche Math. Annalen, Bd. 15, pag. 86. Journal für die Mathematik, Bd. 87, pag. 199.

(mod. 3); sono eguali a $cx^{\frac{\mu}{3}}$ i coefficienti a_r pei quali $r+\mu\equiv 0$ (mod. 3) per $r>4$, sono nulli gli altri.

Se $n\equiv 7$ (mod. 12) sono numerici tutti i coefficienti a_r pei quali $r\equiv 0$ (mod. 2); eguali a $c(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$ quelli pei quali $r+\nu\equiv 0$ (mod. 2) per $r>6$, nulla gli altri.

Se $n\equiv 11$ (mod. 12) numerici i coefficienti a_r pei quali $r\equiv 0$ (mod. 6), ed eguali a $cx^{\frac{\mu}{3}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$ quelli che danno $r+2\mu+9\nu\equiv 0$ (mod. 6) per $r>7$; gli altri nulli.

Se infine $n\equiv 1$ (mod. 12) non esiste alcun coefficiente nullo.

Applicando questi criterî ai casi di $n=5$, 7, 11 si ha tosto che indicando con s_r la somma delle potenze erresime delle radici z_∞, z_0, z_1,... sono per:

$$n=5 \qquad s_1=s_2=s_4=0, \qquad s_3=c, \qquad s_5=cx^{\frac{1}{3}}$$

$$n=7 \qquad s_1=s_3=s_5=0, \qquad s_2=c, \qquad s_4=c, \qquad s_6=c, \qquad s_7=c(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$n=11 \qquad s_1=s_2=s_3=s_4=s_5=s_7=0, \qquad s_6=c, \qquad s_8=cx^{-\frac{1}{3}},$$

$$s_9=c(1-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad s_{10}=cx^{\frac{2}{3}}, \qquad s_{11}=cx^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad s_{12}=c$$

essendo le c coefficienti numerici.

Richiamando ora le relazioni (6) si otterranno le seguenti:

Per $n=5$:

$$\left.\begin{aligned}&(\Pi_\alpha y_\alpha)^6+\textstyle\sum_s(\Pi_\beta\xi_{\beta,s})^6=c && c=-\frac{6}{5^2}\\ &(\Pi_\alpha y_\alpha)^{10}+\textstyle\sum_s(\Pi_\beta\xi_{\beta,s})^{10}=cx^{\frac{1}{3}} && c=\frac{12}{5^4}\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

per $n=7$:

$$(\Pi_\alpha y_\alpha)^2+\textstyle\sum_s(\Pi_\beta\xi_{\beta,s})^2=c \qquad c=\frac{4}{7}$$

e così per le potenze 4^a e 6^a; inoltre   (13)

$$(\Pi_\alpha y_\alpha)^7-\textstyle\sum_s(\Pi_\beta\xi_{\beta,s})^7=c(1-x)^{\frac{1}{2}} \qquad c=\frac{24\sqrt{3}}{7^6}$$

e per $n=11$:

$$\left.\begin{array}{ll}(\Pi_\alpha y_\alpha)^3+\sum_s(\Pi_\beta \xi_{\beta,s})^3=c & c=\dfrac{6\cdot 90}{\sqrt{11}^5} \\ (\Pi_\alpha y_\alpha)^4+\sum_s(\Pi_\beta \xi_{\beta,s})^4=c x^{\frac{1}{3}} & c=-\dfrac{8\cdot 40\cdot 12}{\sqrt{11}^7}\end{array}\right\} \qquad (14)$$

alle quali relazioni devono aggiungersi le (8) (10).

PARTE SECONDA.

1.° Considereremo in questa seconda parte in modo speciale i tre casi $n=5,\ 7,\ 11$, e porremo:

$$\upsilon=\mp(-1)^{\frac{n-1}{4}}\sqrt{\frac{z_\infty}{n}}$$

cioè:

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon=y_1y_2 \text{ per } n=5; \qquad \upsilon^2=-y_1y_2y_3 \text{ per } n=7; \\ \upsilon^4=y_1y_2y_3y_4y_5 \text{ per } n=11.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Supponendo $n=5$ si ha:

$$\Pi_\beta\xi_{\beta,s}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varepsilon^{2s}y_2^2-\varepsilon^{3s}y_1^2+y_1y_2\right]$$

e quindi dalla prima delle (12) si ottiene la:

$$y_1y_2(y_1^{10}-y_2^{10}-11\,y_1^5y_2^5)=1,$$

e dalla seconda la:

$$(y_1^{10}-y_2^{10})^2+228\,y_1^5y_2^5(y_1^{10}-y_2^{10})+496\,y_1^{10}y_2^{10}=12\,x^{\frac{1}{3}}.$$

Eliminando da queste $y_1^{10}-y_2^{10}$ e ponendo υ in luogo di y_1y_2, si giunge alla equazione modulare:

$$12\,x^{\frac{1}{3}}\upsilon^2=1+2\cdot 5^3\upsilon^6+5^5\cdot\upsilon^{12}$$

la quale può presentarsi sotto l'una o l'altra delle forme seguenti:

$$x=\frac{P^3}{\sqrt{12}^3\cdot\upsilon^6} \qquad 1-x=-\frac{Q^2R}{\sqrt{12}^3\cdot\upsilon^6} \qquad (2)$$

posto:

$$P = 5^5 \upsilon^{12} + 10 \cdot 5^2 \cdot \upsilon^6 + 1, \qquad Q = 5^6 \cdot \upsilon^{12} + 4 \cdot 5^3 \cdot \upsilon^6 - 1,$$
$$R = 5^3 \cdot \upsilon^{12} + 22 \upsilon^6 + 1.$$

Derivando la prima delle equazioni superiori rispetto a υ si ha:

$$\frac{dx}{d\upsilon} = \frac{6}{\overline{12}^3} \frac{P^2 Q}{\upsilon^7}$$

e quindi per le stesse (1):

$$x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1-x} \cdot \upsilon' = -\frac{R^{\frac{1}{2}}}{12\sqrt{-3}}, \tag{3}$$

in cui $\upsilon' = \frac{d\upsilon}{dx}$.

Derivando logaritmicamente questa equazione si ha tosto:

$$\upsilon'' + p\upsilon' = \tfrac{1}{2} \frac{R'(\upsilon)}{R} \cdot \upsilon'^2 \tag{4}$$

essendo $p = \frac{1}{6} \frac{4-7x}{x(1-x)}$. Derivando nuovamente quest'ultima equazione ed aggiungendo alla derivata l'equazione stessa moltiplicata per $2p$ si ottiene la:

$$\upsilon''' + 3p\upsilon'' + (p' + 2p^2)\upsilon' = \tfrac{1}{2} \frac{R''(\upsilon)}{R} \cdot \upsilon'^3 = \frac{11}{5^2} \frac{P+Q}{\upsilon^2 R} \cdot \upsilon'^3.$$

Ora se si pone $q = \frac{m}{x(1-x)}$, in cui m è un coefficiente numerico a determinarsi, le (2) (3) danno:

$$q = -36m \frac{P}{\upsilon^2 R} \upsilon'^2$$

e per la (4):

$$q' + 2pq = -72m \frac{Q}{\upsilon^3 R} \upsilon'^3$$

si avrà in conseguenza:

$$4q\upsilon' + 2(q' + 2pq)\upsilon = -144m \frac{P+Q}{\upsilon^2 R} \upsilon'^3$$

la quale sommata alla superiore conduce alla nota equazione differenziale lineare del terzo ordine:

$$\upsilon''' + 3p\upsilon'' + (p' + 2p^2 + 4q)\upsilon' + 2(q' + 2pq)\upsilon = 0$$

allorquando sia:

$$m = \frac{11}{\overline{12}^2 \cdot 5^2}.$$

Le funzioni y_1, y_2 sono quindi in questo caso integrali fondamentali della equazione differenziale ipergeometrica del secondo ordine:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Sviluppando la equazione differenziale superiore in υ si ha:

$$x^2(x-1)\upsilon''' + \tfrac{1}{2}(7x-4)x\upsilon'' + \frac{1}{900}(1389x - 200)\upsilon' - \frac{11}{5400}\upsilon = 0$$

e se ponesi $u = \upsilon^3$ cioè considerasi l'altra classe di equazioni modulari rammentata al § 5.° della prima parte, si ha collo stesso procedimento l'altra equazione differenziale:

$$x^2(x-1)u''' + \tfrac{1}{2}(7x-4)xu'' + \frac{1}{900}(1341x - 200)u' - \frac{1}{200}u = 0.$$

Queste due equazioni differenziali appartengono alla specie considerata recentemente dal sig. Goursat nella sua Memoria: *Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (*). Quest'Autore presenta la equazione differenziale ipergeometrica del terzo ordine sotto la forma:

$$x^2(x-1)y''' + [(3 + a_1 + a_2 + a_3)x - (1 + b_1 + b_2)]xy'' +$$
$$+ [(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)x - b_1 b_2]y' + a_1 a_2 a_3 y = 0;$$

ora se $y = \upsilon$ si hanno tosto i valori:

$$a_1 = \tfrac{11}{30}, \qquad a_2 = -\tfrac{1}{30}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{6}; \qquad b_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{3}$$

e siccome:

$$a_3 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2), \qquad b_2 = 2b_1 - 1$$

sarà y o υ eguale al prodotto di due funzioni ipergeometriche del secondo ordine, come si è trovato sopra. Nell'altro caso, cioè se $y = 11$ si hanno:

$$a_1 = \tfrac{1}{10}, \qquad a_2 = -\tfrac{1}{10}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}; \qquad b_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{3}$$

(*) Annales de l'École Normale Supérieure. Août 1883.

e si avrà per uno degli integrali fondamentali la funzione ipergeometrica del terzo ordine:

$$u = F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & x \end{pmatrix} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(a_1 m)(a_2 m)(a_3 m)}{(1m)(b_1 m)(b_2 m)} x^m$$

in cui il simbolo $(ab) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+b-1)$ ed $(a0) = 1$.

2.° Passiamo al secondo caso in cui $n = 7$. In primo luogo la relazione (8) della Parte 1.ª nella quale pongasi $h = 0$ $l - m = g$ dà, avuto riguardo alle susseguenti condizioni (9) la:

$$y_g^3 y_{l+m} - y_m^3 y_{l+g} + y_l^3 y_{m-g} = 0$$

e supponendo $l = 3$, $m = 2$ quindi $g = 1$, si ha la forma ternaria del quarto ordine:

$$y_2^3 y_4 + y_4^3 y_1 + y_1^3 y_2 = 0 \tag{5}$$

essendosi posto $-y_4$ in luogo di y_3. Dalle (6) si hanno le:

$$\sqrt{z_\infty} = -7 y_1 y_2 y_4 \qquad \sqrt{z_s} = -7 \xi_{1s} \xi_{2s} \xi_{3s}$$

e si ottiene tosto:

$$\Pi_\beta \xi_{\beta,s} = -\tfrac{1}{7}[y_1 y_2 y_4 + 2(\varepsilon^s y_1 y_2^2 + \varepsilon^{4s} y_2 y_4^2 + \varepsilon^{2s} y_4 y_1^2) +$$
$$+ \varepsilon^{6s}(y_1 y_4^2 - y_2^3) + \varepsilon^{3s}(y_2 y_1^2 - y_4^3) + \varepsilon^{5s}(y_4 y_2^2 - y_1^3)].$$

Ora:

$$\sum_s (\Pi_\beta \xi_{\beta,s})^2 = \tfrac{1}{7}[13 y_1^2 y_2^2 y_4^2 - 4(y_2 y_4^5 + y_4 y_1^5 + y_1 y_2^5)]$$

si avrà così per la prima delle (13)

$$5 y_1^2 y_2^2 y_4^2 - (y_2 y_4^5 + y_4 y_1^5 + y_1 y_2^5) = 1,$$

ma il primo membro di questa equazione è l'hessiano della forma ternaria (5), quindi le y_1, y_2, y_4 funzioni di ω o di x che annullano quella forma ternaria rendono l'hessiano della medesima costante.

Rammentando le (1) si avrà in questo caso $y_1 y_2 y_4 = \nu^2$ e quindi:

$$\mu = y_2 y_4^5 + y_4 y_1^5 + y_1 y_2^5 = 5\nu^4 - 1.$$

Pongasi:

$$a = y_2^3 y_4, \qquad b = y_4^3 y_1, \qquad c = y_1^3 y_2$$

la (5) darà la $a + b + c = 0$ e le superiori le:

$$abc = \nu^8, \qquad bc^2 + ca^2 + ab^2 = \nu^4(5\nu^4 - 1).$$

Suppongasi:

$$bc+ca+ab=3t\upsilon^{\frac{16}{3}}$$

essendo t una funzione indeterminata di υ; si avranno le:

$$a=\left(\frac{\upsilon^8}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\ (1+\delta)^{\frac{1}{3}}+\ (1-\delta)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$b=\left(\frac{\upsilon^8}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\omega^2(1+\delta)^{\frac{1}{3}}+\omega\,(1-\delta)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$c=\left(\frac{\upsilon^8}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\omega\,(1+\delta)^{\frac{1}{3}}+\omega^2(1-\delta)^{\frac{1}{3}}\right]$$

nelle quali $\delta=\sqrt{1+4t^3}$ ed ω una radice cubica immaginaria dell'unità. Da questi valori si ha tosto che:

$$bc^2+ca^2+ab^2=-\tfrac{3}{2}\upsilon^8[1+(\omega^2-\omega)\delta]$$

e da questa deducesi il valore di t e quindi quello di:

$$bc+ca+ab=-\upsilon^{\frac{8}{3}}P^{\frac{1}{3}}$$

posto: $P=7^2\cdot\upsilon^8-13\upsilon^4+1$. Analogamente trovasi essere:

$$bc^3+ca^3+ab^3=-\upsilon^{\frac{16}{3}}P^{\frac{2}{3}}$$

le quali due ultime danno le:

$$\lambda=y_2^2y_4^3+y_4^2y_1^3+y_1^2y_2^3=-\upsilon^{\frac{2}{3}}P^{\frac{1}{3}},\qquad \nu=y_1^7+y_2^7+y_4^7=-\left(\frac{P}{\upsilon}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ora il primo membro della seconda delle equazioni (13) (1.ª Parte) si può esprimere in funzione delle μ, ν, υ, e l'equazione stessa può scriversi come segue:

$$-\nu^3-4\upsilon^2(129\mu^3+3534\upsilon^4\mu^2+14128\upsilon^8\mu+31371\upsilon'^2)=24\sqrt{3}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

nella quale sostituendo per μ, ν i loro valori in υ si giunge alla equazione modulare:

$$1-x=\frac{R^2}{\overline{12}^3\cdot\upsilon^4}\tag{6}$$

alla quale può anche darsi la forma:

$$x = -\frac{PQ^3}{12 \cdot \upsilon^4} \tag{7}$$

essendo:

$$Q = 7^4 \cdot \upsilon^8 - 5 \cdot 7^2 \cdot \upsilon^4 + 1, \qquad R = 7^7 \cdot \upsilon^{16} - 14 \cdot 7^5 \cdot \upsilon^{12} + 63 \cdot 7^3 \cdot \upsilon^8 - 70 \cdot 7 \cdot \upsilon^4 - 1.$$

Le y_1, y_2, y_4 possono considerarsi siccome funzioni di υ, ed in questo caso ponendo $u_1 = \frac{d \log y_1}{d\upsilon}, \ldots$, dalle $y_1 y_2 y_4 = \upsilon^2$, $a + b + c = 0$ si hanno le:

$$t_1 + t_2 + t_4 = 0$$

$$t_1(b + 3c) + t_2(c + 3a) + t_4(a + 3b) = 0$$

essendosi posto:

$$u_1 = \frac{2}{3\upsilon} + t_1, \qquad u_2 = \frac{2}{3\upsilon} + t_2, \qquad u_4 = \frac{2}{3\upsilon} + t_4.$$

Dalle due superiori indicando con ρ una indeterminata si hanno le:

$$\rho t_1 = 5b + c, \qquad \rho t_2 = 5c + a, \qquad \rho t_4 = 5a + b$$

e quindi:

$$\rho \frac{da}{d\upsilon} = a\left[\frac{8\rho}{3\upsilon} + 7(c - b)\right]$$

$$\rho \frac{db}{d\upsilon} = b\left[\frac{8\rho}{3\upsilon} + 7(a - c)\right]$$

$$\rho \frac{dc}{d\upsilon} = c\left[\frac{8\rho}{3\upsilon} + 7(b - a)\right]$$

i quali valori sostituiti nella derivata rispetto a υ della:

$$bc^2 + ca^2 + ab^2 = \upsilon^4(5\upsilon^4 - 1)$$

conducono alla:

$$\rho = -\frac{21}{4} \upsilon^{\frac{4}{3}} P^{\frac{2}{3}}.$$

Determinati così i valori di u_1, u_2, u_4 in funzioni di υ, si ottiene con breve calcolazione la equazione differenziale lineare del terzo ordine di cui le y_1, y_2, y_4 sono integrali fondamentali; essa è la seguente:

$$\frac{d^3 y}{d\upsilon^3} + l \frac{d^2 y}{d\upsilon^2} + m \frac{dy}{d\upsilon} + ny = 0$$

nella quale:

$$l = \frac{1}{\upsilon P}\left[P + 2\upsilon\frac{dP}{d\upsilon}\right], \qquad m = \frac{1}{3}\frac{dl}{d\upsilon} + \frac{2}{9}l^2 - \frac{4\cdot 5}{7\cdot 9}\frac{Q}{\upsilon^2 P}$$

$$n = -\frac{5\cdot 8\cdot 17}{3^2\cdot 7^3}\cdot\frac{R}{\upsilon^3 P^2}$$

le P, Q, R essendo le tre funzioni di υ sopra indicate.

Questa equazione differenziale si può facilmente trasformare mediante le relazioni (6) (7) fra x e υ. Infatti dalla (7) si ha:

$$\frac{dx}{d\upsilon} = -\frac{Q^2}{\overline{12}^3\upsilon^5}\left[\upsilon\left(Q\frac{dP}{d\upsilon} + 3P\frac{dQ}{d\upsilon}\right) - 4PQ\right] = -\frac{4Q^2R}{\overline{12}^3\upsilon^5}$$

e quindi per le stesse (6) (7):

$$\frac{dx}{d\upsilon} = -8\sqrt{3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\upsilon^{\frac{1}{3}}P^{\frac{2}{3}}} \tag{8}$$

da cui:

$$\left(\frac{dx}{d\upsilon}\right)^2 = -16x(1-x)\frac{Q}{\upsilon^2 P}, \qquad \left(\frac{dx}{d\upsilon}\right)^3 = -64x^2(1-x)\frac{R}{\upsilon^3 P}$$

$$3\frac{d^2x}{d\upsilon^2} + l\frac{dx}{d\upsilon} = \frac{1}{2}\,\frac{4-7x}{x(1-x)}\left(\frac{dx}{d\upsilon}\right)^2$$

$$\frac{d^3x}{d\upsilon^3} + l\frac{d^2x}{d\upsilon^2} + m\frac{dx}{d\upsilon} = \frac{1}{4\cdot 7\cdot 9}\,\frac{56-387x}{x^2(1-x)}\left(\frac{dx}{d\upsilon}\right)^3.$$

L'equazione differenziale trasformata potrà quindi porsi sotto la forma:

$$x^2(x-1)y''' + \tfrac{1}{2}(7x-4)xy'' + \frac{1}{4\cdot 7\cdot 9}(387x-56)y' - \frac{5\cdot 17}{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3}y = 0$$

equazione differenziale ipergeometrica del terzo ordine, nella quale:

$$a_1 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}, \qquad a_2 = \frac{5}{2\cdot 3\cdot 7}, \qquad a_3 = \frac{17}{2\cdot 3\cdot 7}; \qquad b_1 = \frac{2}{3}, \qquad b_2 = \frac{1}{3}.$$

Infine la stessa equazione (8) conduce mediante il procedimento indicato nel precedente paragrafo alla equazione differenziale lineare del quarto ordine:

$$x^2(x-1)^2\upsilon^{\text{IV}} + (7x-4)x(x-1)\upsilon''' + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}(27\cdot 191\cdot x^2 - 5899x + 80\cdot 14)\upsilon'' +$$
$$+ \frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 7^3}(27\cdot 4099x - 2\cdot 39779)\upsilon' - \frac{3\cdot 19}{4^4\cdot 7^3}\upsilon = 0$$

alla quale fa riscontro l'altra che si ottiene ponendo $u = v^3$, ossia la:

$$x^2(x-1)^2 u^{\mathrm{IV}} + (7x-4)x(x-1)u''' + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}(9\cdot 569x^2 - 5863x + 80\cdot 14)u'' +$$
$$+ \frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 7^3}(9\cdot 11741x - 2\cdot 38159)u' - \frac{3^4}{4^4\cdot 7^3}u = 0.$$

3.° Il caso di $n = 11$ presenta maggiori difficoltà per le molte relazioni esistenti fra le funzioni y_α. Esso fu considerato dal sig. Klein nella sua Memoria: *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen*, pubblicata nel vol. 15 dei Mathematische Annalen, ma in modo incompleto. Perciò salvo le dieci relazioni seguenti fra le y_α, i risultati che quì si ottengono sono affatto nuovi.

Scrivendo $-y_9$ in luogo di y_2 le dieci relazioni che si deducono dalla (8) della Parte 1.ª, sono le seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll}
y_1^3y_4 + y_4^3y_9 + y_3^3y_5 = 0 & y_1^2y_4y_3 - y_9^2y_5y_4 - y_5^2y_1y_3 = 0 \\
y_4^3y_5 + y_5^3y_3 + y_1^3y_9 = 0 & y_4^2y_5y_1 - y_3^2y_9y_5 - y_9^2y_4y_1 = 0 \\
y_9^3y_3 + y_3^3y_4 + y_5^3y_1 = 0 & y_9^2y_3y_5 - y_4^2y_1y_3 - y_1^2y_9y_5 = 0 \\
y_5^3y_4 + y_9^3y_1 + y_4^3y_3 = 0 & y_5^2y_9y_4 - y_1^2y_3y_9 - y_3^2y_5y_4 = 0 \\
y_3^3y_1 + y_1^3y_5 + y_9^3y_4 = 0 & y_3^2y_1y_9 - y_5^2y_4y_1 - y_4^2y_3y_9 = 0.
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Noteremo dapprima che le relazioni (6) della Parte 1.ª, ossia le:

$$z_\infty^2 = -\overline{11}^2\cdot y_1y_4y_9y_5y_3, \qquad z_s^2 = \overline{11}^2\cdot \Pi_\beta \xi_{\beta,s}$$

danno per le superiori (9):

$$z_s^2 = 11\cdot y_1y_4y_9y_5y_3 + \varepsilon^s c_1 + \varepsilon^{4s}c_9 + \varepsilon^{9s}c_3 + \varepsilon^{5s}c_4 + \varepsilon^{3s}c_5 +$$
$$+ \varepsilon^{10s}\gamma_1 + \varepsilon^{7s}\gamma_9 + \varepsilon^{2s}\gamma_3 + \varepsilon^{6s}\gamma_4 + \varepsilon^{8s}\gamma_5$$

essendo:

$$c_1 = 12y_9y_5y_3^3 - 21y_9^2y_5^2y_3 + 30y_1^2y_9y_5^2 - 3y_1^2y_5y_3^2 - 5y_4^3y_9^2 - 5y_4^4y_5 + y_3^5$$
$$\gamma_1 = -2y_1y_9y_3^3 - 12y_4^2y_9^2y_5 + 2y_1^3y_3^2 + 4y_1y_4^4 + 6y_4y_9^4 + 8y_5^4y_3$$

ed i valori di c_4, γ_4; c_9, γ_9; c_5, γ_5; c_3, γ_3 si otterranno da quelli di c_1, γ_1 moltiplicando gli indici delle $y_1, y_4, \ldots$ per 4, 9, 5, 3 (mod. 11).

In secondo luogo la prima delle relazioni (14 Parte 1.ª) conduce alla:

$$f = y_1^2y_3 + y_4^2y_1 + y_9^2y_5 + y_5^2y_4 + y_3^2y_9 = 1$$

e siccome questa funzione f e le altre della stessa specie che considereremo in seguito hanno la proprietà che il secondo, terzo... termine si possono dedurre dal primo moltiplicando nel medesimo gli indici delle y per 4, 9, 5, 3 (mod. 11), si potranno rappresentare col solo primo termine e scrivere, per esempio:

$$f = (y_1^2 y_3) = 1. \tag{10}$$

Ciò posto si osservi che dalle relazioni (9) si deducono le seguenti:

$$(y_1^3 y_4 y_5) = l \qquad (y_1^3 y_9^2) = -2l$$

essendo:

$$l = y_1 y_4 y_9 y_5 y_3 \tag{11}$$

si avrà così che l'hessiano h della forma f ossia:

$$h = 3 y_1 y_4 y_9 y_5 y_3 + (y_1^3 y_9^2) - (y_1^3 y_4 y_5) = 0$$

ed inoltre, come lo dimostrano tosto le relazioni (9), saranno:

$$\frac{dh}{dy_1} = 0, \qquad \frac{dh}{dy_4} = 0, \qquad \frac{dh}{dy_9} = 0, \qquad \frac{dh}{dy_5} = 0, \qquad \frac{dh}{dy_3} = 0.$$

Alle forme f, l degli ordini 3° e 5°, aggiungiamo ora le tre seguenti degli ordini 4°, 6°, 11° e cioè:

$$m = (y_1^2 y_4 y_9), \qquad n = (y_1^3 y_4^2 y_9), \qquad p = (y_1^{11}) \tag{12}$$

e notiamo che fra queste cinque forme sussistono le tre relazioni che seguono:

$$\left.\begin{aligned} m^2 n + 22 l^2 m - 11 f l n + 2 f^3 l = 0 \\ 11 n^2 - 4 m^3 - 4 f l m - 2 f^2 n = 0 \\ l p + 44 l^2 n + m^4 - 6 f l m^2 - 6 f^2 l^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

La prima di esse dà:

$$n = 2l \frac{11 l m + f^3}{11 f l - m^2}$$

il qual valore di n sostituito nella seconda conduce alla equazione del quinto grado in m:

$$m^5 - 21 f l m^3 + 88 f^2 l^2 m - l(\overline{11}^3 l^3 + f^5) = 0 \tag{14}$$

e per queste due la terza diventa:

$$p = \frac{1}{11 f l - m^2} [4 f m^4 - 28 f^2 l m^2 + (3 \cdot \overline{11}^2 l^3 + f^5) m - 22 f^3 l^2].$$

Ne segue che le tre forme m, n, p saranno date da tre equazioni del quinto grado di cui i coefficienti sono funzioni delle f, l, o della sola l essendo $f=1$. Ora il valore di $x^{\frac{1}{3}}$ dato dalla seconda delle formole (14 Parte 1.ª) si può esprimere, per le relazioni (9), col mezzo delle cinque forme superiori nel modo seguente:

$$-12x^{\frac{1}{3}}=p-238fm^2-1678f^2l+11\cdot 664\cdot ln$$

trascurando un fattore f^3 perchè eguale all'unità. Da questa, per le relazioni (13) e per le altre che da esse si ponno dedurre, si giunge alla:

$$24\sqrt{3}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{l}=-m^2p-510fm^4-13590f^2lm^2+$$

$$+22(2869lm^2n-144\cdot\overline{11}^2\cdot l^3m+28\cdot 11\cdot f^3l^2)$$

e sostituendo in queste i valori di n, p trovati sopra si otterranno le:

$$\left.\begin{aligned}-12x^{\frac{1}{3}}&=\frac{1}{11fl-m^2}[2\cdot\overline{11}^2\cdot fm^4-8\cdot\overline{11}^2f^2lm^2+\\&\qquad+(\overline{11}^5\cdot l^3+f^5)m-32\cdot\overline{11}^2f^3l^2]\\24\sqrt{3}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{l}&=\frac{1}{11fl-m^2}[14\cdot\overline{11}^3f^2lm^4+(\overline{11}^6l^3-f^5)m^3-\\&\qquad-56\cdot\overline{11}^3f^3l^2m^2-2\cdot 11fl(\overline{11}^5l^3-23\cdot f^5)m+56\cdot\overline{11}^3f^4l^3];\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

perciò tanto $x^{\frac{1}{3}}$, quanto $\sqrt{x-1}$, soddisferanno ciascuna, analogamente alle tre forme m, n, p, una equazione del quinto grado i coefficienti della quale sono funzioni di l. Queste due ultime equazioni sono evidentemente due forme diverse della equazione modulare del dodicesimo grado.

4.° Sostituendo nella (14) per f, l i loro valori $f=1$, $l=-\frac{z^2}{\overline{11}^2}$, e ponendo $m=\frac{tz}{11}$, la equazione stessa diventa:

$$t^5+21t^3+88t-Z=0 \tag{16}$$

essendo:

$$Z=\frac{z^6-\overline{11}^3}{z^3}$$

e le (15) prendono la forma:

$$\left.\begin{aligned}(t^2+11)\rho z &= 2z^3t^4+8z^3t^2-(z^6-11)t-32z^3\\ (t^2+11)\delta &= 14z^3t^4+(z^6+1)t^3+56z^3t^2+2(z^6+11\cdot 23)t+56z^3\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

essendosi posto per brevità:

$$\rho = 12x^{\frac{1}{3}},\qquad \delta = 24\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x}.$$

Da queste, osservando essere:

$$\Pi(t^2+11) = \frac{(z^6+\overline{11}^3)^2}{z^6} = \tfrac{1}{9}z^2\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2$$

si dedurranno le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{z^6+\overline{11}^3}{z^2}\rho &= (z^6+11)t^4+120z^3t^3+8(z^6-11\cdot 29)t^2+\\ &\quad +1200z^3t-8(z^6-\overline{11}^2\cdot 19)\\ -(z^6+\overline{11}^3)\delta &= 9z^3(z^6+5\cdot 11)t^4+36\cdot 29\cdot z^6t^3+4z^3(19z^6-11\cdot 311)t^2-\\ &\quad -(z^{12}-36\cdot 23\cdot 11\cdot z^6+\overline{11}^3)t-4z^3(25z^6-247\cdot\overline{11}^2)\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

le quali moltiplicate per la prima delle (17) danno:

$$\begin{aligned}-(t^2+11)\rho^2z^2 &= 98z^6t^4+15z^3(z^6-3)t^3+304z^6t^2+6z^3(13z^6+937)t-\\ &\quad -(z^{12}-1238z^6+\overline{11}^2)\\ -(t^2+11)\rho\delta z &= 6\cdot\overline{11}^2\cdot z^6t^4+15\cdot 11\cdot z^3(z^6-7)t^3+(z^{12}+178\cdot 11\cdot z^6-11)t^2+\\ &\quad +2\cdot 11\cdot z^3(43z^6+2047)t-11(z^{12}-1346z^6+23\cdot 11).\end{aligned}$$

Se ora per mezzo delle (17) e di queste ultime si forma la espressione:

$$(t^2+11)[11a\rho z^4+11b\delta z^3+11c\rho^2z^2+d\rho\delta z]$$

nella quale a, b, c, d sono quattro indeterminate, trovasi tosto che supponendo $a=40$, $b=-15$, $c=-2$, $d=1$, il secondo membro riducesi alla espressione:

$$-(t^2+11)(z^{12}+90\cdot 11\cdot z^6-11)$$

si avrà così la equazione modulare del dodicesimo grado:

$$z^{12}+90\cdot 11\cdot z^6+40\cdot 11\cdot\rho z^4-15\cdot 11\cdot\delta z^3-2\cdot 11\cdot\rho^2\cdot z^2+\rho\delta z-11=0$$

nella forma già nota pei lavori di Klein e di Kiepert.

5.° Indicando con $F(t)$ il primo membro della equazione (16) si ha:

$$F'(t)=(5t^2+8)(t^2+11)$$

e la:

$$F'(t)\frac{dt}{dz}=\frac{dZ}{dz} \tag{20}$$

per la quale, derivando rispetto a z la prima delle equazioni (19), dopo alcune riduzioni, si ottiene la seguente:

$$6z^2F'(t)x^{-\frac{2}{3}}\frac{dx}{dz}=-11[14z^3t^4+(z^6+1)t^3+56z^3t^2+2(z^6+11\cdot 23)t+56z^3]$$

e quindi rammentando la seconda delle (17) si giungerà alla importante relazione:

$$g\frac{d\sqrt{z}}{dx}=-(5t^2+8)z\sqrt{z} \tag{21}$$

nella quale $g=11\cdot 16\sqrt{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x}$; od alla:

$$g\frac{dt_0}{dx}=t_1$$

essendosi posto:

$$t_0=\sqrt{z}, \qquad t_1=-(5t^2+8)z\sqrt{z}$$

e la espressione t_1^2 sarà quindi, come la t_0^2, radice di una equazione modulare Jacobiana del dodicesimo grado.

Per mezzo della successiva derivazione rispetto ad x si giungerà così a determinare in funzione di t e di z, le *sei* espressioni t_0^2, t_1^2, t_2^2,... t_5^2, le quali tutte hanno la proprietà indicata. Queste espressioni possono tutte essere poste sotto una stessa forma, cioè la seguente:

$$t_r=[at^{2r}+bt^{2(r-1)}+\cdots+et^2+f]z^r\sqrt{z}$$

nella quale a, b,... f sono coefficienti numerici; ma per giungere ad esse senza gravi difficoltà di calcolazione importa premettere alcune osservazioni sui valori sopra esposti di ρ, δ, ρ^2, $\rho\delta$.

Indicando con $\Psi(t)$ la espressione:

$$\Psi(t)=-22(t^4+10t^2-22)+Zt(t^2+10)$$

si ha che:

$$(t^2+11)\Psi(t)=\frac{r^2}{z^6}$$

posto $r=z^6+\overline{11}^3$; ed i valori di ρ, δ ponno esprimersi nel seguente modo:

$$-\overline{11}^2\cdot\rho=60\frac{z^5}{r}t\Psi(t)+(61t^4+368t^2+352)z^2$$

$$\overline{11}^3\cdot\delta=18\frac{z^6}{r}t(37t^2+88)\Psi(t)+7(95t^6+1104t^4+3\cdot 11\cdot 4^3t^2+8\cdot\overline{11}^2)z^3.$$

Se ora si osservi che per le (20) (21) si ha:

$$g\frac{dt}{dx}=-6\frac{z^4}{r}\Psi(t)$$

si otterrà tosto dal valore di t_1 che:

$$g\frac{dt_1}{dx}=60\frac{z^5\sqrt{z}}{r}t\Psi(t)+3(5t^2+8)^2z^2\sqrt{z}$$

e pel valore precedente di ρ:

$$g\frac{dt_1}{dx}=\overline{11}^2\cdot\rho t_0+2t_2$$

posto:

$$t_2=(7t^4-64t^2-80)z^2\sqrt{z}.$$

Così essendo:

$$-g\frac{dt_2}{dx}=24\frac{z^6\sqrt{z}}{r}t(7t^2-32)\Psi(t)+5(5t^2+8)(7t^4-64t^2-80)z^3\sqrt{z}$$

si ha pei valori superiori di ρ, δ, la:

$$g\frac{dt_2}{dx}=-5\cdot\overline{11}^2\cdot\rho t_1+2\cdot\overline{11}^3\delta t_0+4t_3$$

nella quale:

$$t_3=(5t^6-624t^4-372t^2+4\cdot 233)z^3\sqrt{z}.$$

I valori di ρ^2, e di $\rho\delta$ necessari nella ricerca delle ultime due espressioni t_4, t_5 si ottengono facilmente da quelli di ρ, δ osservando essere:

$$\Psi^2(t)=\frac{r^2}{z^6}[t^6+20t^4+56t^2+44].$$

Così si avrà la relazione:

$$4g\frac{dt_3}{dx} = -35\cdot\overline{11}^2\cdot\rho t_2 - 42\cdot\overline{11}^3\delta t_1 + 17\cdot\overline{11}^4\cdot\rho^2 t_0 - 4t_4$$

essendo:

$$t_4 = [113t^8 + 2\cdot 4^5\cdot t^6 - 6\cdot 4^3\cdot 223\cdot t^4 - 2\cdot 4^2\cdot 8321\cdot t^2 - 25\cdot 4^4\cdot 37]z^4\sqrt{z}$$

e collo stesso procedimento si determinerà il valore di t_5. Derivata nuovamente quest'ultima funzione rispetto ad x si otterrà pel suo valore una espressione lineare delle t_0, t_1,... i coefficienti della quale saranno funzioni di ρ, δ. La eliminazione delle cinque funzioni t_1, t_2,... t_5 darà infine per t_0 o per $\sqrt{z}$, una equazione differenziale lineare del sesto ordine, analoga a quelle che abbiamo determinate nei due casi precedenti.

Dicembre 1883.

Le involuzioni di 3^a e 4^a classe.

(*Memoria del dott.* MARTINETTI VITTORIO, *a Pisa.*)

Il sig. BERTINI in una Nota: *Sopra alcune involuzioni piane* (*) dà la configurazione dei punti fondamentali e la costruzione di tutte le involuzioni di JONQUIÈRES, e di quelle di 1^a e 2^a classe. Seguendo la stessa via, tenuta dal sig. BERTINI, pervenni a trovare la configurazione dei punti fondamentali e la costruzione delle involuzioni di 3^a e 4^a classe.

Omettendo la discussione, che mi condusse a stabilire quali sistemi di curve Ω diano luogo ad involuzioni di 3^a e 4^a classe, mi limito qui ad esporre i soli risultati finali ai quali sono giunto, ed in questa esposizione mi atterrò interamente al modo di classificazione ed alle notazioni adottate dal sig. BERTINI nel citato lavoro.

Involuzioni di 3^a classe.

Nelle involuzioni di 3^a classe le curve Ω relative ai varî punti del piano sono di 7^o ordine ed hanno 6 intersezioni variabili.

1. *1^a Specie.* Chiameremo di 1^a specie le involuzioni di 3^a classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1_4^5\, 2\, 3 \ldots 15)_7.$$

Tali involuzioni sono di JONQUIÈRES, e cioè:

1^a Involuzione: Involuzione di 8^o ordine,
2^a Involuzione: Involuzione di 7^o ordine,
3^a Involuzione: Involuzione di 6^o ordine,

considerate nel citato lavoro dal sig. BERTINI, rispettivamente ai n.[i] 26, 22, 18.

(*) BERTINI: Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 16, fasc. II-III.

2. *2^a Specie.* Diremo di 2^a specie quelle involuzioni di 3^a classe nelle quali le curve Ω sono:

$$(1_2^4\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11)_7 .$$

I punti 1, 2,... 11 devono essere disposti in modo, che i gruppi di sei punti:

1, 2, 3, 4, 10, 11; 1, 2, 3, 5, 9, 11; 1, 2, 3, 6, 9, 10;
1, 2, 4, 5, 8, 11; 1, 2, 4, 6, 8, 10;
1, 2, 5, 6, 8, 9; 1, 3, 4, 5, 7, 11; 1, 3, 4, 6, 7, 10;
1, 3, 5, 6, 7, 9; 1, 4, 5, 6, 7, 8,

siano sopra altrettante coniche. Queste condizioni (non tutte indipendenti) sono necessarie per l'esistenza delle involuzioni di 2^a specie, le quali si possono effettivamente costruire con due dei cinque fasci di cubiche:

$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 11)_3, \quad (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 10)_3, \quad (1^2\, 2\, 3\, 5\, 6\, 9)_3, \quad (1^2\, 2\, 4\, 5\, 6\, 8)_3$$
$$(1^2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3 .$$

3. *Involuzione I.* L'involuzione più generale della 2^a specie è di 10^o ordine e nasce dalla detta costruzione non imponendo ulteriori condizioni ai punti 1, 2, 3,... 11. Essa possiede:

un punto settuplo 1,
cinque punti tripli 2, 3, 4, 5, 6,
cinque punti semplici . . . 7, 8, 9, 10, 11,

la curva punteggiata unita è:

$$\Gamma = (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6)_4 ,$$

e la Jacobiana della involuzione è:

$$I = (1^5\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11)_7^1\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^2\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^3 \ldots$$
$$(1\, 2)_1^7\, (1\, 3)_1^8\, (1\, 4)_1^9\, (1\, 5)_1^{10}\, (1\, 6)_1^{11} .$$

Da questa involuzione si ottengono con successivi allineamenti le altre della stessa specie, cioè:

4. *Involuzione II.* Per l'allineamento dei punti 1, 6, 11 si ha una involuzione di 9^o ordine con:

un punto sestuplo 1,
quattro punti tripli 2, 3, 4, 5,
un punto doppio 6,
quattro punti semplici . . . 7, 8, 9, 10,
un punto unito 11,

essendo:

$$\Gamma = (1^2\,2\,3\,4\,5)_3,$$

$$I = (1^4\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7\,8\,9\,10)_6^1\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^2\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^3 \ldots$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)_2^6\,(1\,2)_1^7\,(1\,3)_1^8\,(1\,4)_1^9\,(1\,5)_1^{10}.$$

5. *Involuzione III.* Se poniamo nel caso precedente 1, 5, 10 in linea retta avremo una involuzione di 8° ordine con:

un punto quintuplo . . . 1,
tre punti tripli 2, 3, 4,
due punti doppi 5, 6,
tre punti semplici 7, 8, 9,
due punti uniti 10, 11,

in cui sarà:

$$\Gamma = (1\,2\,3\,4)_2;$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^1\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^2\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^3 \ldots (1\,2\,3\,4\,6)_2^5$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)_2^6\,(1\,2)_1^7\,(1\,3)_1^8\,(1\,4)_1^9.$$

6. *Involuzione IV.* Collochiamo in questa involuzione i punti 1, 4, 9 in linea retta. L'involuzione che si ottiene è del 7° ordine con:

un punto quadruplo . . . 1,
due punti tripli 2, 3,
tre punti doppi 4, 5, 6,
due punti semplici 7, 8,
tre punti uniti 9, 10, 11;

e si ha:

$$\Gamma = (2\,3)_1,$$

$$I = (1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^1\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^2\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^3\,(1\,2\,3\,5\,6)_2^4\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^5$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)_2^6\,(1\,2)_1^7\,(1\,3)_1^8.$$

7. *3ª Specie.* Si diranno di 3ª specie quelle involuzioni di 3ª classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)_7.$$

I punti 1 2... 11 devono essere sopra una medesima cubica, però non in modo arbitrario, ma tale che le quintiche del fascio $(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)_5$ non siano in generale spezzate (per cui uno dei punti è determinato dalla posizione degli altri). Questo fascio e quello di coniche $(1\,2\,3\,4)_2$ danno la costruzione delle involuzioni di 3ª specie.

8. *Involuzione I.* L'involuzione più generale di questa specie è del 15° ordine con:

quattro punti settupli . . . 1, 2, 3, 4,
sette punti doppi . . . . . 5, 6,... 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5\,6\ldots 11)_9,$$

$$I = (1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\ldots 11)_7^1\,(1^3\,2^4\,3^3\,4^3\,5\,6\ldots 11)_7^2\ldots(1\,2\,3\,4\,5)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^6\ldots$$
$$(1\,2\,3\,4\,11)_2^{11}.$$

9. *Involuzione II.* Poniamo 3, 4, 11 in linea retta; si ha una involuzione di 14° ordine con:

due punti settupli . . . 1, 2,
due punti sestupli . . . 3, 4,
sei punti doppi. . . . . 5, 6,... 10,
uno semplice 11,

e sarà:

$$\Gamma = (1^4\,2^4\,3^3\,4^3\,5\,6\ldots 10)_8,$$

$$I = (1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\ldots 11)_7^1\,(1^3\,2^4\,3^3\,4^3\,5\,6\,..\,11)_7^2\,(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\ldots 10)_6^3$$
$$(1^3\,2^3\,3^2\,4^3\,5\ldots 10)_6^4\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^6\ldots(1\,2)_1^{11}.$$

10. *Involuzione III.* Coi due allineamenti 3, 4, 11; 1, 2, 11 si ha una involuzione di 13° ordine che possiede:

quattro punti sestupli . . . 1, 2, 3, 4,
sei punti doppi 5, 6, 7, 8, 9, 10,
un punto unito 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6 \ldots 10)_7,$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^3\,4^3\,5 \ldots 10)_6^1\,(1^2\,2^3\,3^3\,4^3\,5 \ldots 10)_6^2\,(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5 \ldots 10)_6^3$$
$$(1^3\,2^3\,3^2\,4^3\,5 \ldots 10)_6^4\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^5 \ldots$$

Involuzione IV. Un'altra involuzione di 13° ordine nasce pei due allineamenti 2, 4, 10; 3, 4, 11. Si hanno così:

un punto settuplo 1,
due punti sestupli 2, 3,
un punto quintuplo . . . 4,
cinque punti doppi . . . 5, 6, 7, 8, 9,
due semplici 10, 11,

essendo:

$$\Gamma = (1^4\,2^3\,3^3\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_7,$$

$$I = (1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5 \ldots 11)_7^1\,(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5 \ldots 9\,11)_6^2\,(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5 \ldots 9\,10)_6^3$$
$$(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5 \ldots 9)_5^4\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^5 \ldots (1\,2\,3\,4\,9)_2^9\,(1\,3)_1^{10}\,(1\,2)_1^{11}.$$

11. *Involuzione V.* Nella involuzione III poniamo i punti 2, 4, 10 in linea retta (ovvero nella IV i punti 1, 2, 11) e scambiamo le indicazioni dei punti 2 e 3, onde si hanno i tre allineamenti 1, 3, 11; 2, 4, 11; 3, 4, 10; e avremo una involuzione di 12° ordine con:

due punti sestupli 1, 2,
due punti quintupli . . . 3, 4,
cinque doppi . . . . 5, 6,... 9,
uno semplice 10,
ed uno unito 11,

e si ha:

$$\Gamma = (1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5 \ldots 9)_6;$$

$$I = (1^3\,2^3\,3^2\,4^3\,5 \ldots 10)_6^1\,(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5 \ldots 10)_6^2\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5 \ldots 9)_5^3\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5 \ldots 9)_5^4$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)_2^5 \ldots (1\,2)_1^{10}.$$

Involuzione VI. Nella involuzione IV poniamo 1, 4, 9 in linea retta. L'involuzione diverrà del 12° ordine, ed avrà:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
un punto quadruplo . . . 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4\, 5 \dots 8)_6,$$

$$I = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \dots 8\, 10\, 11)_6^1\, (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \dots 8\, 9\, 11)_6^2\, (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \dots 8\, 9\, 10)_6^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5 \dots 8)_4^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5 \dots (2\, 3)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}\, (1\, 2)_1^{11}.$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 12° ordine si ha situando nella IV i punti 2, 3, 9 in linea retta. Essa possiede:

un punto settuplo 1,
tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^4\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8)_6,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \dots 11)_7^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8\, 11)_6^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8\, 10)_6^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8\, 9)_6^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \dots (1\, 4)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}\, (1\, 2)_1^{11}.$$

12. *Involuzione VIII.* Ponendo 2, 3, 9 in linea retta nell'involuzione VI (ovvero 1, 4, 9 nella VII) e scambiando poi le indicazioni dei punti 9, 11 si ottengono i quattro allineamenti 1, 4, 11; 2, 4, 10; 3, 4, 9; 2, 3, 11. L'involuzione è dell'11° ordine con:

un punto sestuplo 1,
due punti quintupli . . . 2, 3,
un punto quadruplo . . . 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
due punti semplici 9, 10,
ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \dots 9\, 10)_6^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8\, 9)_5^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5 \dots 8\, 10)_5^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5 \dots 8)_4^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6, \dots (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}.$$

Questa involuzione si ottiene anche dalla V, prendendo in linea retta i punti 1, 4, 9 e scambiando rispettivamente fra loro le denominazioni dei punti 2, 3; 1, 3.

Involuzione IX. Una seconda involuzione di 11° ordine nasce dalla V prendendo in linea retta i punti 1, 2, 10. Essa avrà:

quattro punti quintupli . . . 1, 2, 3, 4,
cinque punti doppi 5, 6, 7, 8, 9,
due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5$$

$$I = (1^2\,2^2\,3^2\,4^3\,5\dots 9)_5^1\,(1^2\,2^2\,3^3\,4^2\,5\dots 9)_5^2\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5\dots 9)_5^3\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\dots 9)_5^4$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)_2^5\dots$$

13. *Involuzione X.* Se nella involuzione VIII si collocano i punti 1, 3, 10 in linea retta si ottiene una involuzione di 10° ordine la quale ha:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due quadrupli 3, 4,
quattro doppi 5, 6, 7, 8,
un punto semplice . . . 9,
e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2\,2^2\,3\,4\,5\dots 8)_4,$$

$$I = (1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5\dots 9)_5^1\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\dots 9)_5^2\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\dots 8)_4^3\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\dots 8)_4^4$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)^5\dots(1\,2)_1^9.$$

14. *Involuzione XI.* Se nella precedente si collocano 1, 2, 9 in linea retta, onde i punti 9, 10, 11 sono diagonali del quadrangolo 1 2 3 4 otteniamo una involuzione di 9° ordine con:

quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
tre punti uniti 9, 10, 11,

ed è:

$$\Gamma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3,$$

$$I = (1\,2^2\,3^2\,4^2\,5\dots 8)_4^1\,(1^2\,2\,3^2\,4^2\,5\dots 8)_4^2\dots(1\,2\,3\,4\,5)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^6\dots$$

15. *4^a Specie.* Quelle involuzioni nelle quali le curve Ω sono

$$(1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9)_7,$$

verranno dette di 4^a specie. I punti 1, 2,... 9 devono essere punti base di un fascio di cubiche. Le quartiche della rete $(1^2\, 2^2\, 3\, 4 \ldots 8)_4$ sono unite e servono quindi a costruire tutte le involuzioni di questa specie.

16. *Involuzione I.* Se i punti 1, 2,... 9 non sono soggetti ad alcun altra condizione, all'infuori d'esser punti base di un fascio di cubiche, allora la detta costruzione conduce ad una involuzione di 14° ordine con:

due punti settupli 1, 2,
sei punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6, 7, 8,
un punto semplice . . . 9,

ed è:

$$\Gamma = (1^4\, 2^4\, 3^2\, 4^2 \ldots 8^2)_8,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^2\, 4^2 \ldots 8^2\, 9)_7^1\, (1^3\, 2^4\, 3^2\, 4^2 \ldots 8^2\, 9)_7^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4 \ldots (1\, 2)_1^9.$$

17. *Involuzione II.* Ponendo nella precedente in linea retta i punti 1, 2, 9, si ha una involuzione di 13° ordine, che possiede:

due punti sestupli 1, 2,
sei punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6, 7, 8,
un punto unito 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2 \ldots 8^2)_7,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^1\, (1^2\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3 \ldots$$
$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8^2)_4^8.$$

Involuzione III. Un'altra involuzione di 13° ordine nasce dalla I per l'allineamento 2, 7, 8. Si hanno allora:

un punto settuplo 1,
un punto sestuplo 2,
quattro punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6,
due tripli 7, 8,
uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^4\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_7,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9)_7^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3 \ldots$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^8\, (1\, 2)_1^9.$$

18. *Involuzione IV.* Col nuovo allineamento 2, 5, 6 dalla III si ottiene una involuzione di 12° ordine con:

un punto settuplo 1,
un punto quintuplo . . . 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
un punto semplice . . . . 9.

E sarà:

$$\Gamma = (1^4\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_6,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9)_7^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)_3^6\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^8\, (1\, 2)_1^9.$$

Involuzione V. Poniamo nella III 1, 6, 8 in linea retta; si ha una involuzione di 12° ordine che possiede:

due punti sestupli 1, 2,
tre punti quadrupli . . . 3, 4, 5,
due punti tripli 6, 7,
un punto doppio 8,
uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\, 7)_6,$$

$$I = (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\, 7^2\, 8\, 9)_6^1\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3 \ldots$$
$$(1\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^8\, (1\, 2)_1^9.$$

Involuzione VI. Una terza involuzione di 12° ordine si ha pei duc allineamenti 1, 2, 9; 2, 7, 8, essa possiede:

un punto sestuplo 1,
un punto quintuplo 2,
quattro punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6,
due punti tripli 7, 8,
uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_6,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)^1_6\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)^2_5\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)^3_4 \ldots$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)^7_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)^8_3.$$

19. *Involuzione VII.* Nell'involuzione IV prendiamo in linea retta i punti 2, 3, 4. L'involuzione che si ottiene è dell'11^0 ordine con:

un punto settuplo 1,
un punto quadruplo . . . 2,
sei punti tripli 3, 4, 5, 6, 7, 8,
uno semplice 9,

$$\Gamma = (1^4\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9)^1_7\, (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)^2_4\, (1^2\, 2\, 3\, 5\, 6\, 7\, 8)^3_3\, (1^2\, 2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)^4_3$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)^5_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)^6_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)^7_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)^8_3\, (1\, 2)^9_1.$$

Involuzione VIII. Un'altra involuzione di 11^0 ordine nasce dalla IV per l'allineamento 1, 2, 9 (o dalla VI per l'allineamento 2, 5, 6). Avremo così:

un punto sestuplo 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
un punto unito 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2 \ldots 8^2)^1_6\, (1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5 \ldots 8)^2_4\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5 \ldots 8)^3_4\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5 \ldots 8)^4_4$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)^5_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)^6_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)^7_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)^8_3.$$

Involuzione IX. Collochiamo nella IV i punti 1, 6, 8 in linea retta (ovvero nella V i punti 2, 5, 6) e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 6, 7, onde si hanno i tre allineamenti 1, 7, 8; 2, 5, 7; 2, 6, 8. Si ottiene una involuzione di 11^0 ordine, che ha:

un punto sestuplo 1,
un punto quintuplo . . . 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
due punti tripli 5, 6,
due doppi 7, 8,
ed uno semplice 9,

$$\Gamma=(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6)_5,$$

$$I=(1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)_6^1\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^2\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^3$$
$$(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^4\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^5\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^6\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^7\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^8\,(1\,2)_1^9.$$

Involuzione X. Un'altra involuzione di 11° ordine si ha dalla V e VI ponendo rispettivamente in linea retta i punti 1, 2, 9; 1, 6, 8. Essa possiede:

due punti quintupli . . . 1, 2,
tre punti quadrupli . . . 3, 4, 5,
due punti tripli 6, 7,
un punto doppio 8,
uno unito 9;

$$\Gamma=(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7)_5,$$

$$I=(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7^2\,8)_5^1\,(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)_5^2\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^3\ldots$$
$$(1\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^6\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^7\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^8.$$

20. *Involuzione XI.* Nella involuzione VII si pongano in linea retta i punti 1, 2, 9 (ovvero 2, 3, 4 nell'VIII) e si avrà una involuzione di 10° ordine con

un punto sestuplo . . . 1,
sette punti tripli . . . . 2, 3,... 8,
un punto unito 9;

essendo:

$$\Gamma=(1^3\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_4$$

$$I=(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\ldots8^2)_6^1\,(1^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3^2\,(1^2\,2\,3\,5\,6\,7\,8)_3^3\,(1^2\,2\,4\,5\,6\,7\,8)_3^4$$
$$(1^2\,2\,3\,4\,5\,7\,8)_3^5\ldots$$

Involuzione XII. Suppongasi nell'involuzione IX i punti 1, 2, 9 in linea retta e si avrà un'altra involuzione di 10° ordine (che si può ottenere anche dall'VIII e dalla X ponendo in linea retta rispettivamente i punti 1, 6, 8; 2, 5, 6 e scambiando fra loro le denominazioni dei punti 6 e 7) la quale ha:

un punto quintuplo . . . 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
due punti tripli 5, 6,
due doppi 7, 8,
uno unito 9;

$$\Gamma = (1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6)_4$$

$$I = (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_5^1\, (1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^7\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^8.$$

Involuzione XIII. Nasce un'altra involuzione di 10° ordine dalla IX prendendo 1, 5, 6 in linea retta. Si ha:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro doppi. 5, 6, 7, 8,
ed uno semplice 9;

$$\Gamma = (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2)_4$$

$$I = (1^2\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 8)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 7)_2^6\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^7\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^8\, (1\, 2)_1^9.$$

21. *Involuzione XIV.* Nella involuzione XII poniamo in linea retta i punti 1, 5, 6 (o nella XIII i punti 1, 2, 9) ed avremo una involuzione di 9° ordine la quale avrà:

quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
ed uno unito 9,

$$\Gamma = (1\, 2\, 3^2\, 4^2)_3$$

$$I = (1\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^1\, (1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4$$
$$(1\, 2\, 3\, 4\, 8)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 7)_2^6 \ldots$$

22. Queste sono tutte le involuzioni di 3ª classe e 4ª specie.

Notiamo che oltre alla costruzione generale già detta ve n'ha un'altra che può servire per tutte eccettuate le due prime; essa si ottiene per mezzo dei due fasci di cubiche unite

$$(1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_3\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6)_3;$$

anzi in alcune di esse si può al secondo fascio sostituire altri fasci analoghi di cubiche razionali unite.

Di più le involuzioni di questa specie le quali posseggono soli 8 punti fondamentali possono essere generate per mezzo del sistema tre volte infinito di sestiche (*)

$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6$$

le quali in quelle involuzioni sono unite.

23. *5^a Specie.* Vi è ancora una sola involuzione di 3^a classe, la quale sarà chiamata di 5^a specie, ed è quella per la quale le curve Ω sono:

$$(1^3_2\, 2^3_2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11)_7.$$

Essa è di 6^o ordine, non possiede curva punteggiata unita ed ha:

due punti tripli 1, 2,
quattro punti doppi . . . 3, 4, 5, 6,
uno semplice 7,
e quattro uniti . . . . . 8, 9, 10, 11.

Le cubiche fondamentali hanno un punto doppio nel punto corrispondente e passano semplicemente per gli altri punti fondamentali; le coniche fondamentali passano per i punti tripli e doppi eccettuato quello al quale corrispondono.

Scegliamo affatto arbitrariamente i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e consideriamo le due involuzioni nei fasci $(1\,2\,3\,4)_2$, $(1\,2\,3\,5)_2$ determinate rispettivamente dalle due coppie di elementi corrispondenti:

$$(1\,2\,3\,4\,5)_2,\quad (1\,2\,3\,4\,6)_2;\qquad (1\,3)_1\,(2\,4)_1,\quad (1\,4)_1\,(2\,3)_1;$$
$$(1\,2\,3\,5\,4)_2,\quad (1\,2\,3\,5\,6)_2;\qquad (1\,3)_1\,(2\,5)_1,\quad (1\,5)_1\,(2\,3)_1.$$

I punti del piano restano riferiti fra loro univocamente ed involutoriamente, quando si chiamino corrispondenti due punti, se le coniche dei due fasci che si segano in uno di essi, corrispondono, nelle rispettive involuzioni, a quelle che si segano nell'altro.

L'involuzione così ottenuta è appunto quella di 6^o ordine 3^a classe e 5^a specie.

Il punto 7 non è arbitrario, ma è l'intersezione delle coniche dei due fasci che corrispondono rispettivamente alle

$$(1\,2)_1\,(3\,4)_1,\qquad (1\,2)_1\,(3\,5)_1.$$

La costruzione della involuzione di 5^a specie si può avere in 12 modi diversi potendosi considerare sei diversi fasci di coniche in involuzione.

(*) Bertini: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie*, § 5. Annali di Mat., serie II, tomo 8.

Involuzioni di 4ª classe.

Nelle involuzioni di 4ª classe le curve Ω sono del 9° ordine e posseggono 73 intersezioni fisse.

24. *1ª Specie.* Le involuzioni di Jonquières di 4ª classe sono tre, degli ordini 10, 9, 8 (*) e verranno dette di 1ª specie. In esse le curve Ω sono:

$$(1_6^7\, 2\, 3 \ldots 19)_9.$$

25. *2ª Specie.* Si chiameranno di 2ª specie le involuzioni di 4ª classe per le quali le curve Ω sono:

$$(1_2^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9.$$

Gli 11 punti 1, 2, 3,... 11 devono essere disposti in modo che i gruppi di sei punti

(1, 2, 3, 5, 7, 11) (1, 2, 3, 6, 8, 11) (1, 2, 4, 5, 7, 10)
(1, 2, 4, 6, 8, 10) (1, 3, 4, 6, 8, 9) (1, 3, 4, 5, 7, 9)

esistano sopra altrettante coniche (ed allora gli undici punti sono sopra una cubica).

Coi due fascî $(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7)_3$ $(1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 8)_3$ si costruiscono tutte le involuzioni di 2ª specie.

26. *Involuzione I.* Assoggettando i punti 1 2... 11 a queste sole condizioni, la detta costruzione dà una involuzione di 14° ordine nella quale si ha:

un punto nonuplo 1,
tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^4\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_6$$

$$I = (1^6\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_5^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 11)_5^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)_3^7$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)_3^8\, (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}\, (1\, 4)_1^{11}.$$

(*) Bertini: *Sopra alcune involuzioni piane,* l. c., num. 26, 22, 18.

27. *Involuzione II.* Coll'allineamento (2, 3, 4) si ottiene una involuzione di 13° ordine, che ha:

un punto nonuplo . . . 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
tre semplici 9, 10, 11,

ed è:

$$\Gamma = (1^4\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^6\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9^1\, (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_4^2\, (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_4^3$$
$$(1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 11)_4^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)_3^7$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)_3^8\, (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}\, (1\, 4)_1^{11}.$$

Involuzione III. Poniamo 1, 7, 8 in linea retta; si ha una involuzione di 13° ordine, che ha:

un punto ottuplo 1,
tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
due punti tripli 5, 6,
due punti doppi 7, 8,
e tre semplici 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6)_5,$$

$$I = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11)_8^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_5^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 11)_5^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^7\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^8$$
$$(1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}\, (1\, 4)_1^{11}.$$

Involuzione IV. Un'altra involuzione di 13° ordine nasce dall'allineamento 1, 4, 11. Si hanno allora:

un punto ottuplo 1,
due punti quintupli . . . 2, 3,
un punto quadruplo . . . 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
due semplici 9, 10,
ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10)_8^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_5^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6 \ldots (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}.$$

28. *Involuzione V.* Per i due allineamenti 2, 3, 4; 1, 4, 11 abbiamo una involuzione di 12° ordine con:

un punto ottuplo 1,
due punti quadrupli . . . 2, 3,
cinque punti tripli 4, 5, 6, 7, 8,
due punti semplici 9, 10,
ed uno unito 11;

essendo:

$$\Gamma = (1^3\, 2\, 3\, 5\, 6\, 7\, 8)_4,$$

$$I = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10)_8^1\, (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_4^2\, (1^3\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_4^3$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 5\, 6\, 7\, 8)_3^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6 \ldots (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}.$$

Involuzione VI. Dalle III e IV nasce una seconda involuzione di 12° ordine allineando rispettivamente i punti 1, 4, 11; 1, 7, 8 essa possiede:

un punto settuplo 1,
due punti quintupli . . . 2, 3,
un punto quadruplo . . . 4,
due punti tripli. 5, 6,
due punti doppi 7, 8,
due semplici 9, 10,
ed uno unito 11,

$$\Gamma = (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6)_4,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10)_7^1\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^2\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 10)_5^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^5\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^6\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^7$$
$$(1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^8\, (1\, 2)_1^9\, (1\, 3)_1^{10}.$$

Involuzione VII. Nella III poniamo in linea retta i punti 1, 5, 6. L'involuzione, che nasce è del 12° ordine con

un punto settuplo 1,
tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
quattro doppi 5, 6, 7, 8,
e tre semplici 9, 10, 11:

$$\Gamma=(1^2\,2^2\,3^2\,4^2)_4,$$

$$I=(1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11)_7^1\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^2\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,10)_5^3$$
$$(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,11)_5^4\,(1\,2\,3\,4\,8)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,7)_2^6\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^7\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^8$$
$$(1\,2)_1^9\,(1\,3)_1^{10}\,(1\,4)_1^{11}.$$

Involuzione VIII. Un'altra involuzione di 12° ordine si ottiene dalla IV per l'allineamento 1, 3, 10. Essa ha

un punto settuplo 1,
un punto quintuplo . . . 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
uno semplice 9,
e due uniti 10, 11,

$$\Gamma=(1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_4,$$

$$I=(1^4\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2\,9)_7^1\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^2\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^3$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^4\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^5\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^6\ldots(1\,2)_1^9.$$

29. *Involuzione IX.* Poniamo nella VI in linea retta i punti 1, 5, 6 (od anche nella VII i punti 1, 4, 11). L'involuzione che risulta è di 11° ordine, con:

un punto sestuplo 1,
due punti quintupli . . . 2, 3,
un punto quadruplo . . . 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
due semplici 9, 10,
ed uno unito 11,

ed è:

$$\Gamma = (1\ 2^2\ 3^2\ 4)_3,$$

$$I = (1^3\ 2^3\ 3^3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)_7^1\ (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2\ (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10)_5^3$$
$$(1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4\ (1\ 2\ 3\ 4\ 8)_2^5\ (1\ 2\ 3\ 4\ 7)_2^6\ (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^7\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^8\ (1\ 2)_1^9\ (1\ 3)_1^{10}.$$

Involuzione X. Nella V si pongano 1, 3, 10 in linea retta (od anche nella VIII, 2, 3, 4). L'involuzione si riduce all'11° ordine, ed avrà:

un punto settuplo 1,
un punto quadruplo . . . 2,
sei punti tripli 3, 4, 5, 6, 7, 8,
uno semplice 9,
e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1^2\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8)_3,$$

$$I = (1^4\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7^2\ 8^2\ 9)_7^1\ (1^3\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_4^2\ (1^2\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^3\ (1^2\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 8)_3^4$$
$$(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^5\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^6\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8)_3^7\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8)_3^8\ (1\ 2)_1^9.$$

Involuzione XI. Se nella VI prendiamo in linea retta i punti 1, 3, 10 (od anche nell'VIII i punti 1, 7, 8) si ha una involuzione di 11° ordine con

un punto sestuplo 1,
un punto quintuplo . . . 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
due punti tripli 5, 6,
due punti doppi 7, 8,
uno semplice 9,
e due uniti 10, 11,

$$\Gamma = (1\ 2^2\ 3\ 4\ 5\ 6)_3$$

$$I = (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^1\ (1^3\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)_5^2\ (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3$$
$$(1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^5\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^6\ (1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^7\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^8\ (1\ 2)_1^9.$$

Involuzione XII. Un'altra involuzione di 11° ordine nasce dall'VIII per l'allineamento 1, 2, 9. Essa avrà:

un punto sestuplo 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
quattro tripli 5, 6, 7, 8,
e tre uniti 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)_3$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)^1_6\,(1^2\,2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8)^2_4\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)^3_4$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)^4_4\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)^5_3 \ldots$$

30. *Involuzione XIII.* Si prendano nella IX i punti 1, 3, 10 in linea retta (od anche 1, 5, 6 nell'XI). Si ha una involuzione di 10° ordine la quale possiede:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
uno semplice 9,
e due uniti 10, 11

$$\Gamma = (2^2\,3\,4)_2$$

$$I = (1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)^1_5\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)^2_5\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)^3_4$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)^4_4\,(1\,2\,3\,4\,8)^5_2\,(1\,2\,3\,4\,7)^6_2 \ldots (1\,2)^9_1.$$

Involuzione XIV. Nella involuzione X poniamo in linea retta i punti 1, 2, 9 (od i punti 2, 3, 4 nella XII). Otteniamo una involuzione di 10° ordine, che avrà:

un punto sestuplo . . . 1,
sette punti tripli 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
tre uniti 9, 10, 11,

$$\Gamma = (1\,5\,6\,7\,8)_2,$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)^1_6\,(1^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)^2_3\,(1^2\,2\,4\,5\,6\,7\,8)^3_3\,(1^2\,2\,3\,5\,6\,7\,8)^4_3$$
$$(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)^5_3\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)^6_3 \ldots$$

Involuzione XV. Un'ultima involuzione di 2' specie si può ottenere dalla

XI per l'allineamento 1, 2, 9 (od anche dalla XII per l'allineamento 1, 7, 8). Essa è di 10° ordine con:

un punto quintuplo . . . 1,
tre quadrupli 2, 3, 4,
due tripli 5, 6,
due doppi 7, 8,
e tre uniti 9, 10, 11,

$\Gamma = (2\,3\,4\,5\,6)_2$,

$$I = (1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)_5^1\,(1^2\,2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^2\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^3\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^4$$
$$(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)_3^5\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^6\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^7\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^8.$$

31. *3^a Specie.* Verranno dette di 3^a specie quelle involuzioni nelle quali le curve Ω sono:

$$(1^4\,2^4\,3^4\,4^4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13)_9.$$

Il fascio delle quintiche, che hanno quattro punti doppi nei punti 1, 2, 3, 4 e passano semplicemente per *sette* dei *nove* punti 5, 6,... 13, deve avere gli altri due per punti base. Questo fascio insieme all'altro $(1\,2\,3\,4)_2$ dà la costruzione delle involuzioni di 3^a specie.

32. *Involuzione I.* Se non assoggettiamo ad altri vincoli i punti 1, 2,... 13, la detta costruzione conduce ad una involuzione di 19° ordine con:

quattro punti nonupli . . . 1, 2, 3, 4,
e nove doppi . . . . 5, 6,... 13,

$\Gamma = (1^5\,2^5\,3^5\,4^5\,5 \ldots 13)_{11}$

$$I = (1^5\,2^4\,3^4\,4^4\,5 \ldots 13)_9^1\,(1^4\,2^5\,3^4\,4^4\,5 \ldots 13)_9^2 \ldots (1\,2\,3\,4\,5)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^6 \ldots$$

33. *Involuzione II.* Per l'allineamento 3, 4, 13 nasce una involuzione di 18° ordine, che ha:

due punti nonupli . . . 1, 2,
due punti ottupli . . . 3, 4,
otto punti doppi . . . . 5, 6,... 12,
uno semplice 13;

ed è:

$$\Gamma = (1^5\, 2^5\, 3^4\, 4^4\, 5\, 6 \ldots 12)_{10},$$

$$I = (1^5\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5\, 6 \ldots 12\, 13)_9^1\, (1^4\, 2^5\, 3^4\, 4^4\, 5\, 6 \ldots 12\, 13)_9^2\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5\, 6 \ldots 12)_8^3$$
$$(1^4\, 2^4\, 3^3\, 4^4\, 5\, 6 \ldots 12)_8^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5 \ldots (1\, 2)_1^{13}.$$

34. *Involuzione III.* Da quest'ultima involuzione ponendo in linea retta i punti 2, 4, 12 si deduce una involuzione di 17° ordine, che possiede:

un punto nonuplo . . . 1,
due punti ottupli . . . 2, 3,
un punto settuplo . . . 4,
sette doppi . . . . 5, 6,... 11,
due semplici 12, 13,

e si ha:

$$\Gamma = (1^5\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5\, 6 \ldots 11)_9,$$

$$I = (1^5\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11\, 12\, 13)_9^1\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 11\, 12)_8^2$$
$$(1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 11\, 13)_8^3\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \ldots (1\, 2)_1^{12}\, (1\, 3)_1^{13}.$$

Involuzione IV. Se invece nella II poniamo in linea retta i punti 1, 2, 13 otteniamo una involuzione di 17° ordine con:

quattro punti ottupli . . . 1, 2, 3, 4,
otto punti doppi . . . . . 5, 6,... 12,
ed uno unito 13;

essendo:

$$\Gamma = (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5 \ldots 12)_9,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^4\, 4^4\, 5 \ldots 12)_8^1\, (1^3\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5 \ldots 12)_8^2\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 12)_8^3$$
$$(1^4\, 2^4\, 3^3\, 4^4\, 5 \ldots 12)_8^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5 \ldots$$

35. *Involuzione V.* Poniamo nella III, in linea retta i punti 2, 3, 11. Abbiamo una involuzione di 16° ordine con:

un punto nonuplo . . . 1,
tre punti settupli . . . 2, 3, 4,
sei punti doppi . . . . 5, 6, 7,... 10,
tre punti semplici . . . 11, 12, 13,

e sarà:

$$\Gamma = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5\, 6 \ldots 10)_8$$

$$I = (1^5\, 2^4\, 3^4\, 4^4\, 5 \ldots 13)_9^1\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 11)_7^2\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 12)_7^3$$
$$(1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 13)_7^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \ldots (1\, 2)_1^{11}\, (1\, 3)_1^{12}\, (1\, 4)_1^{13}.$$

Involuzione VI. Nella III prendiamo in linea retta i punti 1, 2, 13 (ovvero nella IV 2, 4, 12) e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 2 e 3, onde si hanno i tre allineamenti 1, 3, 13; 2, 4, 13; 3, 4, 12. Avremo un'altra involuzione di 16° ordine con:

due punti ottupli . . . 1, 2,
due punti settupli . . . 3, 4,
sette punti doppi . . . 5, 6,... 11,
uno semplice 12,
ed uno unito 13,

$$\Gamma = (1^4\, 2^4\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_8$$

$$I = (1^4\, 2^4\, 3^3\, 4^4\, 5 \ldots 12)_8^1\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 12)_8^2\, (1^3\, 2^4\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^3$$
$$(1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5 \ldots (1\, 2)_1^{12}.$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 16° ordine si deduce dalla III ponendo *11* sulla retta $(1,\, 4)_4$. Questa involuzione possiede:

tre punti ottupli 1, 2, 3,
un punto sestuplo . . . 4,
sei punti doppi . . . . 5, 6,... 10,
tre punti semplici . . . 11, 12, 13,

$$\Gamma = (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^2\, 5 \ldots 10)_8$$

$$I = (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 12\; 13)_8^1\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 11\; 13)_8^2\, (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 11\; 12)_8^3$$
$$(1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \ldots 10)_6^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \ldots (2\, 3)_1^{11}\, (1\, 3)_1^{12}\, (1\, 2)_1^{13}.$$

36. *Involuzione VIII.* Ponendo 1, 4, 11 in linea retta nella involuzione V (o nella VII i punti 2, 3, 11) e scambiando le denominazioni dei punti 11 e 13, si ha una involuzione di 15° ordine, che ha:

un punto ottuplo . . . 1,
due punti settupli . . . 2, 3,
un punto sestuplo . . . 4,
sei punti doppi . . . . 5, 6,... 10,
due semplici 11, 12,
ed uno unito . . . . . 13.

Essendo:

$$\Gamma = (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \ldots 10)_7$$

$$I = (1^4\, 2^4\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 12)_8^1\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 11)_7^2\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10\; 12)_7^3$$
$$(1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \ldots 10)_6^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \ldots (1\, 2)_1^{11}\, (1\, 3)_1^{12}.$$

Involuzione IX. Nell'involuzione VI prendiamo il punto *12* sulla $(1, 2)_1$. L'involuzione diviene di 15° ordine con:

quattro punti settupli . . . 1, 2, 3, 4,
sette punti doppi . . . . . 5, 6,... 11,
due punti uniti 12, 13,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7$$

$$I = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^4\, 5 \ldots 11)_7^1\, (1^3\, 2^3\, 3^4\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^2\, (1^3\, 2^4\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^3$$
$$(1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^4\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^5\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^6 \ldots$$

37. *Involuzione X.* Poniamo nella VIII i punti 1, 3, 12 in linea retta (ovvero nella IX i punti 2, 3, 11 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti 12 e 13; 2 e 4), si ottengono i cinque allineamenti

1, 3, 12; 1, 4, 13; 2, 3, 13; 2, 4, 12; 3, 4, 11.

L'involuzione diviene di 14° ordine con:

due punti settupli . . . 1, 2,
due punti sestupli . . . 3, 4,
sei punti doppi . . . . 5, 6,... 10,
uno semplice 11,
e due uniti 12, 13,

Ed è:

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5 \ldots 10)_6$$

$$I = (1^3\, 2^4\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^1\, (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 11)_7^2\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^3\, 5 \ldots 10)_6^3$$

$$(1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5 \ldots 10)_6^4\, (1\,2\,3\,4\,5)_2^5 \ldots (1\,2)_1^{11}.$$

38. *Involuzione XI.* Da questa poi per l'allineamento 1, 2, 11 si ottiene una involuzione di 13' ordine nella quale i punti 11, 12, 14 sono diagonali del quadrangolo 1, 2, 3, 4. Essa ha:

quattro punti sestupli . . . 1, 2, 3, 4,
sei punti doppi 5, 6, 7, 8, 9, 10,
e tre uniti . . . . 11, 12, 13.

La curva punteggiata unita sarà:

$$\Gamma = (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6 \ldots 10)_5,$$

e la Jacobiana:

$$I = (1^2\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10)_6^1\, (1^3\, 2^2\, 3^3\, 4^3\, 5 \ldots 10)_6^2 \ldots (1\,2\,3\,4\,5)_2^5\, (1\,2\,3\,4\,6)_2^6 \ldots$$

39. *4ª Specie.* Se le curve Ω sono:

$$(1_2^4\, 2_2^4\, 3_2^4\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9\, 10\, 11\, 12\, 13)_9$$

abbiamo una sola involuzione, che verrà detta di 4ª specie. Essa è dell'8° ordine e possiede:

tre punti quadrupli . . . 1, 2, 3,
tre punti doppi 4, 5, 6,
tre semplici 7, 8, 9,
e quattro uniti . . . . . 10, 11, 12, 13.

Non esiste curva punteggiata unita, e la Jacobiana è:

$$I = (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 8\, 9)_4^1\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 9)_4^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3\, (1\,2\,3\,5\,6)_2^4$$

$$(1\,2\,3\,4\,6)_2^5\, (1\,2\,3\,4\,5)_2^6\, (2\,3)_1^7\, (1\,3)_1^8\, (1\,2)_1^9.$$

Le coniche del fascio $(1\,2\,3\,4)_2$ hanno per corrispondenti coniche del fascio stesso, quindi si ha nel fascio una involuzione, nella quale devono essere corrispondenti le coppie:

$$(1\,2\,3\,4\,5)_2,\ (1\,2\,3\,4\,6)_2; \qquad (1\,2\,3\,4\,7)_2,\ (1\,4)_1\,(2\,3)_1;$$

$$(1\,2\,3\,4\,8)_2,\ (1\,3)_1\,(2\,4)_1; \qquad (1\,2\,3\,4\,9)_2,\ (1\,2)_1\,(3\,4)_1.$$

Lo stesso dicasi pei fasci $(1\,2\,3\,5)_2$, $(1\,2\,3\,6)_2$.

Per mezzo di due di questi tre fasci di coniche si può costruire l'involuzione.

40. *5^a Specie.* Di 5^a specie si diranno le involuzioni di 4^a classe, nelle quali le curve Ω sono:

$$(1_2^4\, 2_2^4\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9\, 10\, 11)_9.$$

In queste involuzioni devono i punti 1, 2,... 11 giacere sopra una medesima cubica, in modo, che la cubica $(1\,2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_3$ passi per 9, e che i gruppi di sei punti 1, 2, 3, 4, 10, 11; 1, 2, 5, 6, 7, 8 giacciano sopra due coniche. Soddisfatte queste condizioni ne consegue l'esistenza delle curve

$$(1\,2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_3,\quad (1\,2\,3\,5\,7\,10)_2,\quad (1\,2\,3\,6\,7\,11)_2,\quad (1\,2\,3\,5\,8\,11)_2,$$
$$(1\,2\,3\,6\,8\,10)_2,\quad (1\,2\,4\,5\,8\,10)_2,\quad (1\,2\,4\,6\,8\,11)_2,$$
$$(1\,2\,4\,5\,7\,11)_2,\quad (1\,2\,4\,6\,7\,10)_2.$$

Queste involuzioni si costruiscono poi col fascio $[1^2\,2^2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,10\,(11)]_4$ insieme ad uno dei due

$$(1^2\,2^2\,3^2\,5\,6\,7\,8)_4,\qquad (1^2\,2^2\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4.$$

41. *Involuzione I.* Non sottoponendo ad altri vincoli i punti 1, 2,... 11 nasce una involuzione di 10^0 ordine con:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
uno semplice 9,
e due uniti 10, 11,

essendo:

$$\Gamma = (1\,2\,3\,4)_2,$$
$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^1\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^2\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^3$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^4\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^6\,(1\,2\,3\,4\,8)_2^7\,(1\,2\,3\,4\,7)_2^8\,(1\,2)_1^9.$$

42. *Involuzione II.* Per l'allineamento (1, 2, 9) nasce una involuzione di 9^0 ordine con:

quattro punti quadrupli . . . 1, 2, 3, 4,
quattro punti doppi 5, 6, 7, 8,
e tre uniti 9, 10, 11,

e si ha:

$$\Gamma = (3\ 4)_1,$$

$$I = (1^2\ 2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^1\ (1\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^2\ (1^2\ 2^2\ 3\ 4^2\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^3\ (1^2\ 2^2\ 3^2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)_4^4$$
$$(1\ 2\ 3\ 4\ 6)_2^5\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^6\ (1\ 2\ 3\ 4\ 8)_2^7\ (1\ 2\ 3\ 4\ 7)_2^8.$$

43. *6^a Specie.* Le involuzioni di 6^a specie sono quelle che danno il sistema di curve Ω:

$$(1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7^2\ 8^2\ 9^2)_9.$$

In esse i punti fondamentali 1, 2,... 9 sono i punti base di un fascio di cubiche, il quale insieme all'altro $(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)_3$ serve a costruire tutte queste involuzioni di 6^a specie.

44. *Involuzione I.* L'involuzione più generale di questa specie è di 17° ordine, e possiede:

un punto nonuplo 1,
cinque punti sestupli . . . 2, 3, 4, 5, 6,
e tre tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7\ 8\ 9)_9$$

$$I = (1^5\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7^2\ 8^2\ 9^2)_9^1\ (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^2\ (1^3\ 2^2\ 3^3\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^3 \ldots$$
$$(1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^7 \ldots$$

45. *Involuzione II.* Per l'allineamento 1, 6, 9 si ha una involuzione di 16° ordine, con:

un punto ottuplo 1,
quattro punti sestupli . . . 2, 3, 4, 5,
un punto quintuplo 6,
due tripli 7, 8,
uno doppio 9,

ed è:

$$\Gamma = (1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^2\ 7\ 8)_8,$$

$$I = (1^4\ 2^3\ 3^3\ 4^3\ 5^3\ 6^2\ 7^2\ 8^2\ 9)_8^1\ (1^3\ 2^3\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^2\ (1^3\ 2^2\ 3^3\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8\ 9)_6^3 \ldots$$
$$(1^2\ 2^2\ 3^2\ 4^2\ 5^2\ 6^2\ 7\ 8)_5^6\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)_3^7\ (1^2\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8)_3^8\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)_2^9.$$

Involuzione III. Per l'allineamento 4, 5, 6 si ha un'altra involuzione di

16° ordine, che ha:

un punto nonuplo . . . 1,
due punti sestupli . . . 2, 3,
tre punti quintupli . . . 4, 5, 6,
tre punti tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_8,$$

$$I = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^3\, 6^3\, 7^2\, 8^2\, 9^2)_9^1\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^2\, (1^3\, 2^2\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^4\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5^2\, 6\, 7\, 8\, 9)_5^5\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_5^6$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^8\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 9)_3^9.$$

46. *Involuzione IV.* Poniamo nella II i punti 1, 5, 8 in linea retta. Si ha una involuzione di 15° ordine con:

un punto settuplo 1,
tre punti sestupli 2, 3, 4,
due punti quintupli . . . 5, 6,
un punto triplo 7,
e due doppi 8, 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7)_7,$$

$$I = (1^3\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8\, 9)_7^1\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^2\, (1^3\, 2^2\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^3\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8\, 9)_6^4\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 9)_5^5\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_5^6$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^7\, (1\, 2\, 3\, 4\, 6)_2^8\, (1\, 2\, 3\, 4\, 5)_2^9.$$

Involuzione V. Se nella II si prendono in linea retta i punti 4, 5, 6 (od anche nella III i punti 1, 6, 9) si ottiene una involuzione di 15° ordine con:

un punto ottuplo 1,
due punti sestupli 2, 3,
due punti quintupli . . . 4, 5,
un punto quadruplo . . . 6,
due tripli 7, 8,
ed uno doppio 9;

essendo:

$$\Gamma = (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6\; 7\; 8)_7,$$

$$I = (1^4\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^3\, 6^2\, 7^2\, 8^2\, 9)_8^1\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9)_6^2\, (1^3\, 2^2\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9)_6^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\; 6\; 7\; 8\; 9)_5^4\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9)_5^5\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5\; 6\; 7\; 8)_4^6$$
$$(1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7)_3^7\, (1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 8)_3^8\, (1\; 2\; 3\; 4\; 5)_2^9.$$

Involuzione VI. Un'altra involuzione di 15° ordine si ha dalla III ponendo in linea retta i punti 2, 3, 6, sicchè abbiamo:

un punto nonuplo 1,
quattro punti quintupli . . . 2, 3, 4, 5,
un punto quadruplo 6,
e tre tripli 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^5\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9)_7,$$

$$I = (1^5\, 2^3\, 3^3\, 4^3\, 5^3\, 6^3\, 7^2\, 8^2\, 9^2)_9^1\, (1^3\, 2^2\, 3\; 4^2\, 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9)_5^2\, (1^3\, 2\; 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9)_5^3$$
$$(1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\; 6\; 7\; 8\; 9)_5^4\, (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4\; 5^2\, 6\; 7\; 8\; 9)_5^5\, (1^3\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7\; 8\; 9)_4^6$$
$$(1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7)_3^7\, (1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 8)_3^8\, (1^2\, 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 9)_3^9.$$

47. *Involuzione VII.* Dalla IV pel nuovo allineamento 1, 4, 7 nasce una involuzione di 14° ordine, che ha:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
tre punti quintupli . . . 4, 5, 6,
tre doppi 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^2\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2)_6,$$

$$I = (1^2\, 2^3\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9)_6^1\, (1^3\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9)_6^2\, (1^3\, 2^2\, 3^3\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8\; 9)_6^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 8\; 9)_5^4\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 9)_5^5\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\; 8)_5^6$$
$$(1\; 2\; 3\; 5\; 6)_2^7\, (1\; 2\; 3\; 4\; 6)_2^8\, (1\; 2\; 3\; 4\; 5)_2^9.$$

Involuzione VIII. Nella IV poniamo in linea retta i punti 4, 5, 6 (ovvero nella V 1, 5, 8). Si ha una involuzione di 14° ordine con:

un punto settuplo 1,
due punti sestupli 2, 3,
un punto quintuplo . . . 4,
due punti quadrupli . . . 5, 6,
un punto triplo 7,
e due doppi 8, 9,

ed è:

$$\Gamma = (1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5\,6\,7)_6,$$

$$\begin{aligned} I = {} & (1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^2\,6^2\,7^2\,8\,9)^1_7\,(1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)^2_6\,(1^3\,2^2\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)^3_6 \\ & (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)^4_5\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,9)^5_4\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)^6_4 \\ & (1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)^7_3\,(1\,2\,3\,4\,6)^8_2\,(1\,2\,3\,4\,5)^9_2. \end{aligned}$$

Involuzione IX. Una terza involuzione di 14° ordine si ha dalla V per l'allineamento 2, 3, 6 (od anche dalla VI per l'allineamento 1, 6, 9); essa possiede:

un punto ottuplo 1,
quattro punti quintupli . . . 2, 3, 4, 5,
tre punti tripli 6, 7, 8,
ed uno doppio . . . . 9.

Si ha:

$$\Gamma = (1^4\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,7\,8)_6,$$

$$\begin{aligned} I = {} & (1^4\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^2\,7^2\,8^2\,9)^1_8\,(1^3\,2^2\,3\,4^2\,5^2\,6\,7\,8\,9)^2_5\,(1^3\,2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7\,8\,9)^3_5 \\ & (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)^4_5\,(1^3\,2^2\,3^2\,4\,5^2\,6\,7\,8\,9)^5_5\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,7\,8)^6_3 \\ & (1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)^7_3\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,8)^8_3\,(1\,2\,3\,4\,5)^9_2. \end{aligned}$$

48. *Involuzione X.* Nella involuzione VII poniamo in linea retta i punti 4, 5, 6 (ovvero i punti 1, 4, 7 nell'VIII). Nasce così una involuzione di 13° ordine con:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
tre punti quadrupli . . . 4, 5, 6,
tre doppi 7, 8, 9,

$$\Gamma = (1^2\,2^3\,3^3\,4\,5\,6)_5$$

$$\begin{aligned} I = {} & (1^2\,2^3\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)^1_6\,(1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)^2_6\,(1^3\,2^2\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8\,9)^3_6 \\ & (1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,8\,9)^4_4\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,9)^5_4\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)^6_4 \\ & (1\,2\,3\,5\,6)^7_2\,(1\,2\,3\,4\,6)^8_2\,(1\,2\,3\,4\,5)^9_2. \end{aligned}$$

49. *7^a Specie.* Le involuzioni di 4^a classe nelle quali le curve Ω sono:

$$(1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8^3\,9)_9$$

verranno chiamate di 7^a specie.

In queste involuzioni i nove punti 1, 2,... 9 sono punti base di un fascio di cubiche, e tutti si possono costruire col sistema tre volte infinito di sestiche (*)

$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6$$

50. *Involuzione I.* Questa costruzione, nel caso in cui i punti 1, 2, 3,... 9 non siano soggetti ad altre condizioni, dà una involuzione di 17° ordine, con:

otto punti sestupli . . . 1, 2,... 8,
ed uno unito 9,

ed è:

$$\Gamma=(1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^3\,7^3\,8^3)_9,$$
$$I=(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^1\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^2\ldots$$

51. *Involuzione II.* Per l'allineamento 6, 7, 8 si ha una involuzione di 16° ordine con:

cinque punti sestupli . . . 1, 2,... 5,
tre punti quintupli 6, 7, 8,
ed uno unito 9,

$$\Gamma=(1^3\,2^3\,3^3\,4^3\,5^3\,6^2\,7^2\,8^2)_8$$
$$I=(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^1\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^2\ldots(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)_5^6$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7^2\,8)_5^7\ldots$$

Poichè una rete particolare del sistema $(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6$ basta a costruire l'involuzione, così potremo prendere la rete $(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7\,8)_5$.

52. *Involuzione III.* Coi due allineamenti 4, 5, 8; 6, 7, 8 si ottiene una involuzione di 15° ordine la quale possiede:

tre punti sestupli 1, 2, 3,
quattro punti quintupli . . . 4, 5, 6, 7,
uno quadruplo 8,
ed uno unito 9;

e si ha:

$$\Gamma=(1^3\,2^3\,3^3\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8)_7$$
$$I=(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^1\ldots(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6^2\,7^2\,8)_5^4\ldots(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^8.$$

(*) BERTINI: *Ricerche*, ecc., l. c., § 5.

Questa involuzione, e le altre che verranno in seguito (casi particolari di questa) possono essere generate coi due fasci di curve unite: $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)_3$, $(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7)_4$.

53. *Involuzione IV.* Ponendo nella precedente i punti 2, 3, 8 in linea retta nasce una involuzione di 14° ordine con:

un punto sestuplo . . . 1,
sei punti quintupli . . . 2, 3,... 7,
uno triplo 8,
ed uno unito 9:

essendo:

$$\Gamma = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2)_6,$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^1\,(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8)_5^2\,(1^2\,2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8)_5^3$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6^2\,7^2\,8)_5^4\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5^2\,6^2\,7^2\,8)_5^5\,(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)_5^6$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7^2\,8)_5^7\,(1^2\,2\,3\,4\,5\,6\,7)_3^8.$$

Involuzione V. Nella III poniamo in linea retta i punti 3, 5, 7 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti *5* e *6*, per cui abbiamo i tre allineamenti 3, 6, 7; 4, 6, 8; 5, 7, 8. Avremo una involuzione di 14° ordine con:

due punti sestupli 1, 2,
tre punti quintupli . . . 3, 4, 5,
tre punti quadrupli . . . 6, 7, 8,
ed uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7\,8)_6,$$

$$I = (1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^1\,(1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7^2\,8^2)_6^2\,(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7\,8^2)_5^3$$
$$(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6\,7^2\,8)_5^4\,(1^2\,2^2\,3^2\,4^2\,5^2\,6^2\,7\,8)_5^5\,(1^2\,2^2\,3\,4\,5^2\,6\,7\,8)_4^6$$
$$(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^7\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^8.$$

54. *Involuzione VI.* Nella IV poniamo in linea retta i punti 3, 5, 6 e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 7 (ovvero nella V allineamo i punti 2, 3, 8 e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 5; 6, 7; 2, 4). L'involu-

zione diviene di 13° ordine, e possiede:

un punto sestuplo 1,
tre punti quintupli . . . 2, 3, 4,
tre punti quadrupli . . . 5, 6, 7,
un punto triplo 8,
ed uno unito 9,

e si ha:

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7)_5,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^1\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_5^2\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6\, 7^2\, 8)_5^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6^2\, 7^2\, 8)_5^4\, (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^5\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^6$$
$$(1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^7\, (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^8.$$

Involuzione VII. Un'altra involuzione di 13° ordine si deduce dalla V pel nuovo allineamento 3, 4, 5. Si avrà:

due punti sestupli 1, 2,
sei punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6, 7, 8,
uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2^3\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_5,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^1\, (1^2\, 2^3\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^2\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8\,)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7^2\, 8)_4^4\, (1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6^2\, 7\, 8)_4^5 \ldots$$

55. *Involuzione VIII.* Nella involuzione VI poniamo in linea retta i punti 2, 3, 8 e scambiamo fra loro le denominazioni dei punti *3* e *7* (ovvero prendiamo nella VII i punti 3, 4, 7 in linea retta e scambiamo le denominazioni dei punti 3, 4 e poi 3, 5); avremo una involuzione di 12° ordine, la quale possiederà:

un punto sestuplo 1,
un punto quintuplo 2,
quattro punti quadrupli . . . 3, 4, 5, 6,
due tripli 7, 8,
ed uno unito 9,

e si avrà:

$$\Gamma = (1^3\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6)_4,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^1 (1^2\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7\, 8)_5^2 (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4 (1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5\, 6^2\, 7\, 8)_4^5 (1^2\, 2^2\, 3\, 4\, 5^2\, 6\, 7\, 8)_4^6$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^7 (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^8.$$

56. *Involuzione IX.* Poniamo in quest'ultima involuzione, il punto 2 sulla retta $(5\,6)_1$, sicchè i punti 2, 3, 4 sono diagonali nel quadrangolo 5, 6, 7, 8. Nasce così una involuzione di 11° ordine con:

un punto sestuplo 1,
tre punti quadrupli . . . 2, 3, 4,
quattro punti tripli . . . 5, 6, 7, 8,
ed uno unito 9,

$$\Gamma = (1^3\, 2\, 3\, 4)_3,$$

$$I = (1^3\, 2^2\, 3^2\, 4^2\, 5^2\, 6^2\, 7^2\, 8^2)_6^1 (1^2\, 2\, 3^2\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^2 (1^2\, 2^2\, 3\, 4^2\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^3$$
$$(1^2\, 2^2\, 3^2\, 4\, 5\, 6\, 7\, 8)_4^4 (1^2\, 2\, 3\, 4\, 6\, 7\, 8)_3^5 (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 7\, 8)_3^6$$
$$(1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 8)_3^7 (1^2\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7)_3^8.$$

57. Trovata così la configurazione dei punti fondamentali, e la costruzione delle involuzioni di 3^a e 4^a classe, essendo già nota quella delle involuzioni di classe $\nu = 0,\ 1,\ 2$, veniamo anche a conoscere tutte le involuzioni di ordine $n < 10$.

Ma notiamo, che se, oltre alle considerate, esistono altre involuzioni di 10° ordine, esse non possono essere che di 5^a classe, quindi non possiederanno curva punteggiata unita; perciò dovranno le curve fondamentali passare un numero pari di volte pei punti fondamentali cui corrispondono. Per questa osservazione si deduce facilmente, che vi sono due sole involuzioni di 5^a classe e 10° ordine:
la 1^a è di Jonquières, che rientra nel caso generale trattato dal sig. Bertini;
la 2^a possiede:

due punti quintupli . . . 1, 2,
due punti quadrupli . . . 3, 4,
quattro punti doppi . . . 5, 6, 7, 8,
un punto semplice 9,
e quattro uniti 10, 11, 12, 13,

ed ha per Jacobiana:

$$I = (1^2\,2^3\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^1\,(1^3\,2^2\,3^2\,4^2\,5\,6\,7\,8\,9)_5^2\,(1^2\,2^2\,3^2\,4\,5\,6\,7\,8)_4^3$$
$$(1^2\,2^2\,3\,4^2\,5\,6\,7\,8)_4^4\,(1\,2\,3\,4\,6)_2^5\,(1\,2\,3\,4\,5)_2^6\,(1\,2\,3\,4\,8)_2^7\,(1\,2\,3\,4\,7)_2^8\,(1\,2)_1^9.$$

Tale involuzione si costruisce per mezzo di due fasci in involuzione, uno di coniche $(1\,2\,3\,4)_2$ nel quale devono essere coppie di elementi corrispondenti le:

$$(1\,2\,3\,4\,5)_2,\quad (1\,2\,3\,4\,6)_2;\qquad (1\,2\,3\,4\,7)_2,\quad (1\,2\,3\,4\,8)_2;$$
$$(1\,2\,3\,4\,9)_2,\quad (1\,2)_1\,(3\,4)_1;\qquad (1\,3)_1\,(2\,4)_1,\quad (1\,4)_1\,(2\,3)_1,$$

l'altro di cubiche $(1^2\,2\,3\,4\,5\,7)_3$ in cui devono essere corrispondenti le coppie:

$$(1\,7)_1\,(1\,2\,3\,4\,5)_2,\quad (1^2\,2\,3\,4\,5\,7\,6)_3;\qquad (1\,5)_1\,(1\,2\,3\,4\,7)_2,\quad (1^2\,2\,3\,4\,5\,7\,8)_3;$$
$$(1\,2)_1\,(1\,3\,4\,5\,7)_2,\quad (1^2\,2\,3\,4\,5\,7\,9)_3;\qquad (1\,3)_1\,(1\,2\,4\,5\,7)_2,\quad (1\,4)_1\,(1\,2\,3\,5\,7)_2.$$

Al fascio $(1^2\,2\,3\,4\,5\,7)_3$ si può sostituire un altro analogo, sicchè questa stessa involuzione può essere generata in varî modi.

Ora possiamo dire di conoscere tutte le involuzioni (a punti fondamentali distinti) di ordine $n \leqq 10$.

Pisa, 27 novembre 1883.

Sui sistemi di funzioni analitiche e gli sviluppi in serie formati coi medesimi.

(*Seconda Memoria di* S. Pincherle, *a Bologna.*)

I.

Nei §§ 6-13 della prima Memoria sul presente argomento, pubblicata nel t. 12, serie II degli *Annali,* ho indicato un metodo generale per trovare i campi di convergenza delle serie

$$\sum c_n p_n(u)$$

essendo

$$p_n(u) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots\ \infty)$$

un sistema di funzioni analitiche definite dallo sviluppo di una funzione di due variabili

$$T(u,\ v)=\sum v^n p_n(u)$$

che diventa singolare nei posti $(u,\ v)$ soddisfacenti ad una data equazione

$$f(u,\ v)=0.$$

Aggiungo qui alcune nuove osservazioni.

1. Il metodo stesso è suscettibile di una generalizzazione nei seguenti termini.

Sia

$$\sum v^n p_n(u)$$

una serie di potenze di v i cui coefficienti sono funzioni di u ad un valore, potendosi anche intendere funzioni nel senso più generale. Ad ogni valore di u corrisponderà un valore determinato per il raggio $\rho(u)$ di convergenza della serie, ed il gruppo $p_n(u)$ sarà al contorno della varietà $\frac{1}{\rho(u)}\cdot$ Se dunque si considera una serie $\sum c_n p_n(u)$ dove c_n è al contorno della varietà α, la serie convergerà assolutamente ed in egual grado in quelle regioni del piano u in cui è $\rho(u) > \alpha$.

2. Se si hanno due serie

$$\sum v^n p_n(u), \qquad \sum v^n q_n(u)$$

coi raggi di convergenza $\rho(u)$ e $\sigma(u)$ rispettivamente, la serie

$$\sum v_n \{p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_{n-1} q_1 + p_n q_0\}$$

converge entro il minore dei cerchi di raggi ρ e σ, e perciò il gruppo

$$t_n(u) = \sum_{h=0}^{n} p_{n-h}(u) q_h(u)$$

è al contorno della maggiore delle due varietà $\frac{1}{\rho}$ ed $\frac{1}{\sigma}$. La curva del piano u data da

$$\rho(u) = \sigma(u)$$

separa le regioni in cui il gruppo $t_n(u)$ è al contorno delle varietà $\frac{1}{\rho(u)}$ da quelle in cui esso è al contorno di $\frac{1}{\sigma(u)}$. La serie

$$\sum c_n t_n(u)$$

dove c_n è al contorno della varietà α, converge nelle regioni del piano u in cui si ha simultaneamente $\rho(u) > \alpha$ e $\sigma(u) > \alpha$.

3. Siano in particolare le due serie

$$\sum v^n p_n(u), \qquad \sum c_n v^n,$$

la prima col raggio di convergenza $\rho(u)$ funzione di u, la seconda col raggio di convergenza R. La serie

$$\sum v^n \tau_n(u) = \sum v^n \left[c_0 p_n(u) + c_1 p_{n-1}(u) + \cdots + c_{n-1} p_1(u) + c_n\right]$$

convergerà entro il minore dei due cerchi di raggio $\rho(u)$ ed R: da cui segue che il gruppo $\tau_n(u)$ sarà al contorno della varietà dipendente da u, $\frac{1}{\rho(u)}$, o della varietà $\frac{1}{R}$ indipendente da u, secondochè u si trova nell'una o l'altra delle regioni del piano u separate dalla curva

$$\rho(u) = R.$$

La serie

$$\sum c_n \tau_n(u)$$

dove c_n è al contorno della varietà α, convergerà nella regione del piano in cui è simultaneamente $R > \alpha$, $\rho(u) > \alpha$. Se dunque $\alpha > R$, la serie precedente cessa di essere assolutamente convergente.

Fra le varie applicazioni che si possono fare dei teoremi di questo paragrafo e del precedente, si noti che se il gruppo $p_n(u)$ è al contorno della varietà $\lambda(u)$ variabile con u, il gruppo

$$p_0(u) + p_1(u) + \cdots + p_n(u)$$

è al contorno della varietà $\lambda(u)$ dove è $\lambda(u) > 1$, e della varietà 1 dove è $\lambda(u) \leq 1$.

4. Sia $T(u, v)$ una funzione trascendente intera di due variabili. Se scriviamo

$$T(u, v) = \sum v^n p_n(u)$$

avremo nel secondo membro una serie convergente, per ogni valore di u, in un cerchio di raggio infinito. Adunque $p_n(u)$ sarà un gruppo *ologene* per qualunque valore di u, e perciò le curve C_α della teoria generale si ridurranno al punto $u = \infty$. In tal caso le serie

$$\sum c_n p_n(u)$$

convergono in tutto il piano tutte le volte che il gruppo c_n non è al contorno dell'infinito, e si presenta il problema di determinare le regioni di convergenza di quelle serie solo se il gruppo c_n è al contorno dell'infinito, nel qual caso il metodo può essere in difetto. Se per esempio si può porre

$$p_n(u) = k_n p'_n(u)$$

essendo k_n un gruppo ologene e $p'_n(u)$ un gruppo al contorno della varietà finita $\rho(u)$, la discussione si potrà fare per le serie della forma

$$\sum \frac{c_n}{k_n} p_n(u).$$

5. Indicando con $f(u)$ un elemento di funzione analitica definita da una serie di potenze di cui R è il raggio di convergenza, il gruppo

$$f^{(n)}(u) = \frac{d^n f}{d u^n}$$

dà luogo ad alcune osservazioni.

La serie

$$\sum v^n \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

converge per $|u|+|v|<R$, ossia il gruppo $\frac{f^{(n)}(u)}{n!}$ è al contorno della varietà $\frac{1}{R-|u|}$ o di una varietà minore, ma finita e diversa da zero se $f(u)$ non è funzione intera, da cui segue che il gruppo $f^{(n)}(u)$ sarà al contorno dell'infinito tutte le volte che $f(u)$ non è funzione intera. Se $f(u)$ è funzione intera, il gruppo $f^{(n)}(u)$ può, secondo i casi, essere al contorno dell'infinito, o ologene, o al contorno di una varietà finita.

Indichiamo invece con $f(u)$ una funzione analitica, con punti, linee ed aree singolari quante si vogliono, il gruppo

$$\frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

sarà al contorno della varietà $\frac{1}{\rho(u)}$, dove $\rho(u)$ indica la minima distanza del punto u dal contorno del campo di regolarità della $f(u)$. Perciò la serie

$$\sum c_n \frac{f^{(n)}(u)}{n!}$$

dove c_n è al contorno della varietà α, convergerà in tutto un campo limitato in modo che i suoi punti distino dal contorno del campo di regolarità della $f(u)$ di una quantità superiore ad α.

II.

6. Abbiasi una serie di potenze convergente entro un cerchio di raggio R

$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \tag{1}$$

dove c_0 si suppone diverso da zero. La serie reciproca sarà

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\cdots+\gamma_nx^n+\cdots \tag{2}$$

convergente entro un cerchio di raggio ρ, essendo ρ il minimo modulo delle radici di $\varphi(x)$. Fra le c_n e le γ_n passano le relazioni

$$\left.\begin{array}{c} c_0\gamma_0=1 \\ c_0\gamma_n+c_1\gamma_{n-1}+c_2\gamma_{n-2}+\cdots+c_n\gamma_0=0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Prendendo a considerare i due sistemi di numeri

$$\begin{array}{llllll} c_0 & & & & & \\ c_1 & c_0 & & & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2}\cdots & c_1 & c_0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{llll} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2\cdots & \gamma_n\cdots \\ & \gamma_0 & \gamma_1\cdots & \gamma_{n-1}\cdots \\ & & \gamma_0\cdots & \gamma_{n-2}\cdots \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ & & & \gamma_0\cdots \\ & & & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

questi, per la definizione stabilita a § 21 della prima Memoria, si potranno dire *associati,* poichè le relazioni (3) coincidono precisamente colle relazioni (5) ed (8) del paragrafo 20 della Memoria citata.

7. Al sistema lineare

$$y_n = c_n x_0 + c_{n-1} x_1 + \cdots + c_0 x_n$$

corrisponde, come si vede immediatamente, il sistema

$$x_n = \gamma_n y_0 + \gamma_{n-1} y_1 + \gamma_{n-2} y_2 + \cdots + \gamma_0 y_n$$

qualunque siano i gruppi (x_n) ed (y_n).

Al sistema lineare

$$y_n = c_0 x_n + c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+2} + \cdots + c_\nu x_{n+\nu} + \cdots \tag{4}$$

corrisponde il sistema

$$x_n = \gamma_0 y_n + \gamma_1 y_{n+1} + \cdots + \gamma_\nu y_{n+\nu} + \cdots \tag{5}$$

quando però i gruppi (x_n) ed (y_n) vanno assoggettati ad una limitazione. Possiamo dimostrare che è condizione sufficiente alla corrispondenza dei sistemi (4) e (5) che i due gruppi siano interni alla varietà ρ. Intanto, sotto questa condizione, sono convergenti assolutamente i secondi membri delle (4) e delle (5); inoltre, si consideri la serie

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (\gamma_0 y_{n+\nu} + \gamma_1 y_{n+\nu+1} + \cdots + \gamma_\mu y_{n+\nu+\mu} + \cdots):$$

esiste per ipotesi un numero $\rho'' < \rho$ tale che sia per tutti i valori di n

$$|y_n| < A\rho''^n;$$

di più, preso ρ' tale che sia

$$\rho'' < \rho' < \rho,$$

si ha

$$|\gamma_n| < \frac{B}{\rho'^n};$$

infine, essendo $R \geqq \rho$, si ha pure

$$|c_n| < \frac{C}{\rho'^n}$$

essendo A, B, C numeri positivi finiti ed indipendenti da n; verrà dunque

$$|S_n| < ABC\rho''^n \sum_{\nu,\mu} \left(\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{\nu+\mu};$$

perciò i termini della serie S_n si possono aggruppare come si vuole senza alterare la convergenza e la somma di questa serie. Ma assumendo il gruppo (y_n) come dato ed il sistema (5) come definizione del gruppo x_n, sarà

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x_{n+\nu},$$

ordinando invece i termini di S_n rispetto alle y_n e tenendo conto delle (3), si ha

$$S_n = y_n,$$

onde le (4) sono conseguenza delle (5).

8. La funzione di due variabili

$$\frac{\varphi(y)}{1-xy} = \sum y^n (c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n) \tag{6}$$

si riguarderà come generatrice (v. prima Memoria, § 6) del sistema di polinomî

$$p_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

La serie del secondo membro della (6) converge assolutamente ed in egual grado sotto le condizioni

$$|y| < R, \qquad |x| < \frac{1}{|y|}.$$

Da ciò risulta, per la Memoria citata, che la serie

$$\sum k_n p_n(x) \tag{7}$$

dove il gruppo (k_n) è al contorno della varietà $\alpha < R$, sarà convergente assolutamente ed in egual grado entro tutto il cerchio di raggio $\frac{1}{\alpha}$. Una tal serie sarà dunque atta a rappresentare entro il cerchio $\frac{1}{\alpha}$ un elemento di funzione analitica regolare.

Se poniamo

$$\sum k_n p_n(x) = \sum h_\nu x^\nu \tag{8}$$

avremo fra i gruppi (h_ν) e (k_n) la relazione

$$h_\nu = c_0 k_\nu + c_1 k_{\nu+1} + c_2 k_{\nu+2} + \cdots + c_\mu k_{\nu+\mu} + \cdots$$

che è precisamente della forma (4): se dunque il gruppo (h_ν) è interno alla varietà ρ, cioè se la serie $\sum h_\nu x^\nu$ converge in un cerchio di raggio maggiore di $\frac{1}{\rho}$, potremo dedurre dalla relazione precedente

$$k_\nu = \gamma_0 h_\nu + \gamma_1 h_{\nu+1} + \gamma_2 h_{\nu+2} + \cdots, \tag{4'}$$

cioè « Ogni funzione analitica regolare entro un cerchio di centro o e di raggio » maggiore dell'inversa del modulo della minor radice di $\varphi(x)$, è sviluppabile » in serie di polinomî

$$p_n(x) = c_n + c_{n-1} x + c_{n-2} x^2 + \cdots + c_0 x^n,$$

» essendo

$$\varphi(x) = \sum c_\nu x^\nu. \text{ »}$$

9. I coefficienti dello sviluppo precedente per una funzione analitica $f(x)$ regolare entro un cerchio di centro o e di raggio maggiore di $\frac{1}{\rho}$ si possono anche ottenere in altro modo, applicando cioè il teorema di Cauchy. Moltiplicando la (6) per

$$\frac{1}{\varphi(y)} = \sum \gamma_n y^n$$

si ottiene per $|y| < \rho$ ed $|xy| < 1$:

$$\frac{1}{1 - xy} = \sum \frac{y^n p_n(x)}{\varphi(y)}$$

e mutando y in $\frac{1}{y}$, si ha colle condizioni

$$|y| > \frac{1}{\rho}, \qquad |y| > |x|$$

l'identità:

$$\frac{1}{y - x} = \sum \frac{p_n(x)}{y^{n+1} \varphi\left(\frac{1}{y}\right)}. \tag{9}$$

Moltiplicando ambo i membri per $f(y)$ ed integrando lungo una circonferenza (c) di centro o e di raggio compreso fra $\frac{1}{\rho}$ ed il raggio di convergenza di $f(y)$, viene:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\sum\frac{p_n(x)f(y)\,dy}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}=\sum k_n p_n(x) \tag{10}$$

dove

$$k_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(y)\,dy}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Ed essendo $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ convergente per $|y|>\frac{1}{\rho}$ e per conseguenza lungo la circonferenza di convergenza, è facile verificare che questo coefficiente k_n coincide con quello dato dalla (4).

10. Cerchiamo ora se colle funzioni $p_n(x)$ sono possibili sviluppi dello zero, cioè se è possibile che entro tutto un campo determinato si abbia

$$\sum C_n p_n(x)=0 \tag{11}$$

essendo la serie del primo membro convergente in egual grado entro quel campo.

a) Non può esistere uno sviluppo dello zero (11) se il gruppo (C_n) è interno alla varietà ρ. Ne seguirebbe infatti:

$$c_0 C_n + c_1 C_{n+1} + \cdots + c_\nu C_{n+\nu} + \cdots = 0 \tag{12}$$

ma da questo sistema di relazioni lineari risulta, per la stessa dimostrazione fatta a § 7, che deve essere $C_n=0$.

b) Possono esistere sviluppi (11) se il gruppo (C_n) è interno alla varietà R, ma non interno alla varietà ρ. Se infatti $\varphi(x)$ è nulla per un valore α interno al cerchio R, si ha per $|x|<\frac{1}{|\alpha|}$:

$$\sum \alpha^n p_n(x)=\frac{\varphi(\alpha)}{1-\alpha x}\equiv 0$$

che è precisamente uno sviluppo dello zero: d'altronde ρ essendo il minimo modulo delle radici di $\varphi(x)$, si ha $|\alpha|\geqq\rho$.

c) La $\varphi(x)$ abbia entro il cerchio R il sistema di radici

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2, \ldots \qquad \alpha_m \ldots$$

i cui punti limiti non potranno essere che sulla circonferenza R stessa. Ogni espressione

$$\sum C_n p_n(x)$$

dove

$$C_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_m \alpha_m^n,$$

indicandosi con λ_i costanti arbitrarie in numero finito, sarà uno sviluppo dello zero. E se le radici si suppongono ordinate in modo che sia

$$|\alpha_n| \leqq |\alpha_{n+1}|,$$

questo sviluppo convergerà entro il cerchio $\dfrac{1}{|\alpha_m|}$.

d) Supponiamo che α sia una radice dell'ordine r di multiplicità per la $\varphi(x)$. In tal caso, le funzioni

$$\frac{\varphi(y)}{1-xy}, \qquad \frac{d}{dy}\cdot\frac{\varphi(y)}{1-xy}, \qquad \frac{d^2}{dy^2}\cdot\frac{\varphi(y)}{1-xy}, \ldots \qquad \frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\cdot\frac{\varphi(y)}{1-xy},$$

sono tutte nulle per $y=\alpha$, onde sarà nullo anche lo sviluppo

$$\frac{\varphi(y)}{1-xy} + (r-1)y\frac{d}{dy}\cdot\frac{\varphi(y)}{1-xy} + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dy^2}\frac{\varphi(y)}{1-xy} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{y^{r-1}}{r-1!}\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\frac{\varphi(y)}{1-xy};$$

ma il coefficiente di y^n è in questo sviluppo:

$$p_n(x)\Big\{1 + (r-1)\cdot n + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} +$$
$$\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{r-1!}\Big\}$$

ora la somma racchiusa fra parentesi è, per un noto teorema sui coefficienti binomiali, uguale a

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)}$$

onde sono sviluppi dello zero le serie

$$\left.\begin{array}{c}\sum \alpha_i^n p_n(x), \quad \sum \binom{n+1}{1} \alpha_i^n p_n(x), \ldots \quad \sum \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r_i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r_i-1)} \alpha_i^n p_n(x) \\ (i=1,\ 2,\ 3,\ldots\ m).\end{array}\right\} \tag{13}$$

e) Uno sviluppo dello zero in cui C_n sia al contorno della varietà $\sigma < R$ sarà necessariamente composto linearmente con sviluppi della forma (13). Infatti si ha dalle (12) che il prodotto

$$\sum C_n x^n \cdot \sum \frac{c_n}{x^n}$$

si riduce ad una serie di potenze $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ di $\frac{1}{x}$; ora posto

$$C(x) = \sum C_n x^n,$$

si ha che $C(x)$ converge entro il cerchio $\frac{1}{\sigma} > \frac{1}{R}$ e $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ fuori del cerchio $\frac{1}{R}$, perciò nella corona circolare compresa fra i cerchi $\frac{1}{R}$ ed $\frac{1}{\sigma}$ la serie prodotto sarà convergente. Ma da

$$C(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

risulta

$$C(x) = \frac{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)},$$

vale a dire la $C(x)$ ha carattere razionale in tutto l'esterno del cerchio $\frac{1}{R}$; ma essa ha altresì carattere razionale entro tutto il cerchio $\frac{1}{\sigma}$, per cui essa è una funzione razionale. Come tale essa non potrà avere che singolarità non essenziali, le quali saranno gli zeri di $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ esterni ad $\frac{1}{\sigma}$ cioè i posti $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$,... $\frac{1}{\alpha_m}$. Di più questa funzione $C(x)$ è finita per $x = \infty$, per cui essa dovrà essere della forma

$$C(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\lambda_{i,1}}{1-\alpha_i x} + \frac{\lambda_{i,2}}{(1-\alpha_i x)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{i,r_i}}{(1-\alpha_i x)^{r_i}}\right). \tag{13'}$$

essendo r_i l'ordine di multiplicità della radice α_i. Formando dunque i coefficienti C_n dello sviluppo di $C(x)$ in serie di potenze di x, indi costruendo con questi coefficienti lo sviluppo $\sum C_n p_n(x)$, si ottiene

$$\sum C_n p_n(x) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \lambda_{i,1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_i^n p_n(x) + \lambda_{i,2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{1} \alpha_i^n p_n(x) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \lambda_{i,r_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r_i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r_i-1)} \alpha_i^n p_n(x) \right\}$$

che dimostra precisamente l'enunciato.

Da ciò che precede risulta che il numero σ deve coincidere col modulo di una delle radici di $\varphi(x)$ e che il campo di convergenza dello sviluppo dello zero si estende in tutto il cerchio che ha per raggio il valore reciproco di questo modulo.

f) Se S, S_1 sono due sviluppi dello zero, l'espressione

$$S_2 = S + \lambda S_1$$

sarà pure uno sviluppo dello zero valido in tutto il campo comune di convergenza di S e di S_1. Lo sviluppo S_2 non si dirà allora indipendente da S e da S_1. In generale diremo sistema *indipendente* o *fondamentale* (*) di sviluppi dello zero entro un dato campo un sistema di sviluppi validi tutti entro quel campo, e fra i quali non passa alcuna relazione lineare.

Se gli sviluppi

$$\sum C_{1,n} p_n(x), \qquad \sum C_{2,n} p_n(x)$$

sono indipendenti fra loro linearmente, è facile vedere che lo sono pure le funzioni

$$\sum C_{1,n} x^n, \qquad \sum C_{2,n} x^n, \ldots$$

e inversamente: ora le funzioni

$$\sum \alpha^n x^n, \qquad \sum (n+1)\alpha^n x^n, \ldots \qquad \sum \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)} \alpha^n x^n$$

costituiscono, per ognuna delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, un sistema linearmente indipendente come si può dimostrare elementarmente, perciò gli sviluppi (13) costituiscono un sistema fondamentale.

(*) Espressione usata da FROEBENIUS (CRELLE, t. 73) in un altro esempio di sviluppi dello zero.

Riassumendo, possiamo dire: « Che gli sviluppi dello zero secondo il sistema » di polinomî

$$p_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

» convergono entro cerchi aventi il centro nell'origine e per raggi le inverse » dei moduli delle radici α_m di

$$\varphi(x) = \sum c_n x^n;$$

» ed entro il cerchio di raggio $\frac{1}{|\alpha_m|}$ si ha un sistema fondamentale di sviluppi, » formato con tanti sviluppi indipendenti quante sono le radici di $\varphi(x)$ comprese » entro il cerchio $|\alpha_m|$ e sulla circonferenza, ogni radice essendo contata tante » volte quante sono le unità del suo ordine di multiplicità. Ogni sviluppo dello » zero valido entro il cerchio di raggio $\frac{1}{|\alpha_m|}$ si esprime in funzione lineare » degli sviluppi che costituiscono il sistema fondamentale. »

11. Tornando ora alla corrispondenza lineare data dalle formole (4) e (5), vediamo che dato un gruppo (y_n) interno alla varietà ρ, il sistema incognito (x_n) definito dalle equazioni

$$y_n = c_0 x_n + c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+2} + \cdots$$

si potrà determinare in infiniti modi: fra questi vi sarà un gruppo (x_n) ed uno solo interno alla varietà ρ, e gli altri saranno dati da

$$x'_n = x_n + C_n \cdot$$

essendo C_n i coefficienti di uno sviluppo dello zero. Da ciò si vede una differenza notevole fra i sistemi di equazioni lineari ordinarî e quelli che contengono un numero infinito di equazioni.

Inoltre abbiamo visto che ogni funzione $f(x)$ regolare in un cerchio di centro o e di raggio maggiore di $\frac{1}{\rho}$ è sviluppabile in serie di funzioni $p_n(x)$ della forma (7); possiamo ora aggiungere che lo sviluppo della $f(x)$ in tale forma e convergente in un cerchio di raggio maggiore di $\frac{1}{\rho}$ è unico, ma che vi sono infiniti sviluppi convergenti in cerchi minori $\left(\text{di raggi } \frac{1}{|\alpha_m|}\right)$ i quali si ottengono aggiungendo al primo uno degli sviluppi dello zero. Resterebbe però da esaminare la questione se una $f(x)$ regolare fuori di $\frac{1}{R}$ ma non in tutto $\frac{1}{\rho}$ si possa o no sviluppare in serie di funzioni $p_n(x)$, a questa però risponderà la formola (9) per $|y| > \frac{1}{R}$.

12. Sui sistemi di funzioni $p_n(x)$ possiamo ancora aggiungere le seguenti osservazioni:

a) Dalla formola (6) risulta l'espressione di $p_n(x)$ in forma d'integrale definito:

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{\varphi(y)\,dy}{(1-xy)\,y^{n+1}} \tag{14}$$

l'integrazione essendo estesa ad una circonferenza di raggio $< R$.

b) Fra le funzioni

$$H(x) = \sum k_n p_n(x) \quad \text{e} \quad K(x) = \sum k_n x^n$$

passa una notevole relazione, ed è che $H(x)$ è la parte ordinata per le potenze positive di x nello sviluppo di $K(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, talchè

$$K(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = H(x) + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right); \tag{15}$$

in altri termini, data una $H(x)$, il problema di determinare lo sviluppo di $H(x)$ in serie di funzioni $p_n(x)$ coincide col problema di determinare una funzione $K(x)$ tale che il prodotto $K(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ abbia per parte intera $H(x)$.

13. Data una serie di potenze

$$K(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots k_\nu x^\nu + \cdots,$$

poniamo

$$D^n K(x) = k_n + k_{n+1} x + k_{n+2} x^2 + \cdots k_{n+\nu} x^\nu + \cdots, \tag{16}$$

e supposto che il gruppo (k_n) sia interno alla varietà R, consideriamo la serie

$$S = \sum c_n D^n K(x).$$

Essendo il gruppo (c_n) al contorno della varietà $\frac{1}{R}$, si avrà per $R' < R$

$$c_n < \frac{A}{R'^n},$$

ma essendo (k_n) interno alla varietà R, si potrà trovare un numero $R'' < R$ tale che sia

$$|k_\nu| < B R''^\nu$$

e la scelta dei numeri R', R'' si faccia in modo che sia

$$R''<R'<R.$$

Si avrà allora

$$|D^n K(x)|<BR''^n\sum R''^\nu |x|^\nu$$

e preso $|x|<\frac{1}{R}$, ne viene che la serie S è convergente anche riducendo tutti i termini ai loro valori assoluti, e come tale si può scrivere ordinando arbitrariamente i termini. Viene perciò

$$S=\sum k_n p_n(x)=H(x).$$

Riguardando dunque il sistema (c_n) come dato, e data pure la funzione $H(x)$, consideriamo la relazione

$$\sum c_n D^n K(x)=H(x) \tag{17}$$

come un'*equazione* in cui la funzione $K(x)$ sia la soluzione; dalle cose esposte ai §§ 8-11 segue che: « Un'equazione funzionale della forma (17) è sempre » possibile se la funzione data $H(x)$ converge in un cerchio di raggio maggiore » di $\frac{1}{\rho}$. »

14. Essendo manifestamente

$$D^n[K(x)+K_1(x)]=D^nK(x)+D^nK_1(x)$$

viene che se $K(x)$ e $K_1(x)$ sono due soluzioni dell'equazione (17), la loro differenza

$$K(x)-K_1(x)$$

sarà soluzione dell'*equazione incompleta*

$$\sum c_n D^n C(x)=0. \tag{18}$$

Le soluzioni dell'equazione (18) sono tante quanti sono i gruppi (C_n) che ci danno sviluppi dello zero della forma (11); perciò possiamo dire che: « Le so- » luzioni dell'equazione (18) sono funzioni razionali della forma (13'), aventi » per infiniti le radici della funzione $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. »

E se chiamiamo *sistema fondamentale* nell'interno di un cerchio di raggio $\sigma>\frac{1}{R}$ un sistema di soluzioni dell'equazione (18) fra loro linearmente indipendenti e tali che tutte le soluzioni regolari nell'interno del cerchio σ siano esprimibili linearmente per quelle, potremo dire che i raggi σ sono dati dai moduli delle inverse delle radici di $\varphi(x)$, e che un sistema fondamentale entro il cerchio di raggio $\frac{1}{\alpha_m}$ è dato dalle funzioni (13'). Qualunque altro sistema di $r_1+r_2+\cdots r_m$ soluzioni regolari entro $\frac{1}{|\alpha_m|}$ e linearmente indipendenti costituisce pure un sistema fondamentale. Osserviamo infine che date n soluzioni

$$C^{(1)}(x),\qquad C^{(2)}(x),\ldots\qquad C^{(n)}(x)$$

dell'equazione (18), la condizione necessaria e sufficiente affinchè esse siano linearmente indipendenti è data dall'essere il determinante

$$\begin{vmatrix} C^{(1)} & C^{(2)}\ldots & C^{(n)} \\ D\,C^{(1)} & D\,C^{(2)}\ldots & D\,C^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}C^{(1)} & D^{n-1}C^{(2)}\ldots & D^{n-1}C^{(n)} \end{vmatrix}$$

diverso da zero (*).

15. Riprendiamo la formola (10). Se in questa riguardiamo l'integrazione fatta una volta lungo il cerchio c, una seconda volta lungo il cerchio c' di raggio $\frac{1}{\sigma}$ tale che fra σ e ρ siano comprese le radici $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_m$ di $\varphi(x)$, avremo per $f(x)$ i due sviluppi:

$$f(x)=\sum k_n p_n(x),\qquad f(x)=\sum k'_n p_n(x)$$

dove

$$k_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(y)\,dy}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)},\qquad k'_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c')}\frac{f(y)\,dy}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)};$$

ma si ha

$$k_n-k'_n=\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{m}\int_{(\alpha_s)}\frac{f(y)\,dy}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}=C_n^{(1)}+C_n^{(2)}+\cdots+C_n^{(m)}$$

dove con (α_s) intendiamo che l'integrazione va estesa ad un cerchio di centro

(*) Questa ultima proposizione è un caso particolare di un teorema generale che dimostro in una Nota attualmente in corso di stampa nel Giornale di Matematiche diretto dal professor BATTAGLINI.

$\frac{1}{\alpha_s}$ e di raggio arbitrariamente piccolo. Da ciò risulta che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \cdots + C_n^{(m)}) p_n(x)$$

ed in particolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(s)} p_n(x)$$

sono sviluppi dello zero. Vediamo in questo modo che gli sviluppi dello zero ottenuti nel § 10 si possono anche ritrovare come applicazioni del teorema di Cauchy.

III.

16. Abbiasi un gruppo (a_n) dato arbitrariamente al contorno della varietà $\frac{1}{r}$; la funzione

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{19}$$

sarà perciò regolare entro il cerchio di centro o e di raggio r.

Si consideri poi la funzione

$$T(x, y) = E(xy)\varphi(y) \tag{20}$$

essendo la $\varphi(y)$ data dalla (1) dove si sostituisca y ad x, cioè

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n.$$

Il secondo membro della (20) si potrà sviluppare in serie di potenze di x e di y sotto le condizioni

$$|y| < R, \qquad |xy| < r$$

e si avrà

$$T(x, y) = \sum y^n p_n(x) \tag{21}$$

con

$$p_n(x) = c_0 a_n x^n + c_1 a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} a_1 x + c_n a_0. \tag{22}$$

La funzione $T(x, y)$ si potrà riguardare come funzione generatrice del sistema di polinomî $p_n(x)$.

Si scorgono immediatamente le seguenti proprietà:

a) Lo sviluppo

$$\sum \alpha^n p_n(x)$$

converge per qualunque valore di α tale che sia

$$|\alpha| < R$$

entro il cerchio di raggio $\frac{r}{|\alpha|}$.

b) Lo sviluppo

$$\sum k_n p_n(x) \tag{23}$$

dove (k_n) è un gruppo al contorno della varietà $\alpha < R$ converge entro il cerchio $|x| < \frac{r}{\alpha}$, ed entro quel cerchio esso converge altresì assolutamente ed in egual grado e rappresenta un elemento di funzione analitica sviluppabile nell'intorno di $x = 0$ nella serie di potenze di x:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (c_0 k_\nu + c_1 k_{\nu+1} + \cdots + c_n k_{\nu+n} + \cdots) x^\nu.$$

c) Se è dato un elemento di funzione analitica regolare nell'intorno di $x = 0$ nella forma

$$f(x) = \sum a_\nu h_\nu x^\nu$$

e si vuole che sia

$$\sum k_n p_n(x) = f(x),$$

si hanno fra i coefficienti h_n e k_n precisamente le relazioni (4') trovate a § 8, e perciò: « Ogni funzione analitica regolare in un cerchio di raggio maggiore » di $\frac{r}{\rho}$ si può sviluppare in una serie della forma (23). »

d) Se la funzione $E(x)$ è trascendente intera, lo è pure la (23).

e) Se

$$C(x) = \sum C_n x^n$$

è una funzione razionale della forma (13), lo sviluppo

$$\sum C_n p_n(x) \tag{24}$$

si potrà ordinare per le potenze di x, e poichè il coefficiente di x^ν sarà

$$c_0 C_\nu + c_1 C_{\nu+1} + \cdots + c_n C_{\nu+n} + \cdots$$

che è nullo per il § 10, ne segue che la (24) ci dà uno sviluppo dello zero per funzioni $p_n(x)$. Inversamente, uno sviluppo dello zero per funzioni $p_n(x)$ dovrà essere tale che la $\sum C_n x^n$ abbia la forma (13'): ciò si dimostra mediante lo stesso ragionamento fatto a § 10, *e*). Possiamo aggiungere che la determinazione del sistema completo degli sviluppi dello zero per funzioni $p_n(x)$ è indipendente dal gruppo (a_n) e dipende soltanto dalla risoluzione dell'equazione

$$\varphi(x)=0.$$

17. Generalizzando l'operazione introdotta a § 13, poniamo:

$$K(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu k_\nu x^\nu$$

e

$$D^n K(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu k_{n+\nu} x^\nu \ (*);$$

ora la serie (23), che sotto la condizione che (k_n) sia al contorno della varietà α e che sia $|x|<\frac{r}{\alpha}$ converge anche se i suoi termini si riducono ai loro valori assoluti, si potrà ordinare rispetto agli indici crescenti di c_ν e verrà

$$\sum k_n p_n(x)=\sum c_\nu D^\nu K(x).$$

Perciò il problema dello sviluppo di una funzione $f(x)$ in serie della forma (23) coincide colla risoluzione dell'*equazione funzionale*

$$\sum c_\nu D^\nu K(x)=f(x) \tag{25}$$

rispetto alla funzione incognita $K(x)$. Come caso speciale, abbiamo l'*equazione incompleta*

$$\sum c_\nu D^\nu K(x)=0 \tag{26}$$

corrispondente agli sviluppi dello zero (24), e le soluzioni di questa equazione sono gli sviluppi

$$\sum a_n C_n x^n,$$

essendo $\sum C_n x^n$ una delle funzioni (13'). Anche quì si può, come a § 14, definire un sistema fondamentale o indipendente di soluzioni.

18. I polinomî $p_n(x)$ soddisfanno alla proprietà

$$Dp_n(x)=p_{n-1}(x); \tag{27}$$

infatti per la definizione del simbolo D data al paragrafo precedente, $Dp_n(x)$ si forma moltiplicando $a_\nu x^\nu$ per il coefficiente di $x^{\nu+1}$ in $p_n(x)$. Se consideriamo

(*) Su questa operazione si troveranno maggiori particolari nella accennata Nota del Giornale di Matematiche.

un secondo sistema di polinomî $q_n(x)$, generati da

$$E(xz)\psi(z)$$

come i polinomî $p_n(x)$ lo sono da

$$E(xz)\varphi(z),$$

il sistema di polinomî

$$\lambda p_n(x)+\mu q_n(x)$$

dove λ e μ sono costanti arbitrarie, avrà per funzione generatrice la

$$E(xz)[\lambda\varphi(z)+\mu\psi(z)]$$

e soddisferà all'equazione (27).

Se nelle $p_n(x)$ sostituiamo alle $a_\nu x^\nu$ le $q_\nu(x)$, avremo un nuovo sistema di polinomî aventi per funzione generatrice la

$$E(xz)\varphi(z)\psi(z)$$

e soddisfacenti alla stessa equazione (27).

19. Facendo $a_n=\frac{1}{n!}$ si ha un caso particolare molto notevole:

a) L'operazione D si riduce alla derivazione.

b) La funzione $E(z)$ si riduce alla funzione esponenziale e^z.

c) I polinomî $p_n(x)$ divengono

$$p_n(x)=c_n+\frac{c_{n-1}}{1}x+\frac{c_{n-2}}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{c_0}{n!}x^n \tag{28}$$

ed hanno per funzione generatrice la

$$e^{xz}\varphi(z).$$

d) Le equazioni (25) e (26) divengono equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, complete o no, e la soluzione dell'equazione incompleta *anche con un numero infinito di termini* è data dalle funzioni

$$\sum\frac{1}{n!}C_n x^n$$

che sono le soluzioni delle equazioni incomplete il cui primo membro è *fattore* del primo membro della (26). È facile verificare come queste, che sono quindi soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti ordinarie — cioè con un numero finito di termini — siano precisamente le soluzioni date dalle ordinarie teorie, tanto per il caso delle radici semplici della $\varphi(z)$ quanto per il caso delle radici multiple.

e) La teoria precedente dimostra ancora come date due funzioni analitiche arbitrarie $f(x)$ e $K(x)$, non sia possibile *in generale* ed in un campo a due dimensioni, di sviluppare la $f(x)$ in serie della forma

$$f(x)=\sum c_n \frac{d^n K(x)}{dx^n},$$

mentre data la $f(x)$ ed il sistema c_n di coefficienti, è possibile *in generale* di determinare una funzione $K(x)$ che soddisfaccia all'eguaglianza precedente.

20. Rimarrebbero da studiare gli sviluppi dello zero [che potrebbero contenere nei loro coefficienti infinite radici della $\varphi(x)$] per i quali la funzione $C(x)$ corrispondente assume la forma [cfr. la (13')]

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{i,1}}{1-\alpha_i x}+\frac{\lambda_{i,2}}{(1-\alpha_i x)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{i,r_i}}{(1-\alpha_i x)^{r_i}}\right)$$

questa funzione $C(x)$ cessa di essere razionale, e non ha carattere razionale oltre al cerchio $\frac{1}{R}$. Ma tale questione, che si collega colla ricerca della soluzione più generale possibile dell'equazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n K(x)=0$$

o più particolarmente dell'equazione differenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n K(x)}{dx^n}$$

mi sembra presentare difficoltà di natura speciale, e mi propongo di riprenderla in altra occasione.

21. Se nelle (28) sostituiamo a c_n rispettivamente $\frac{\alpha_n}{n!}$ abbiamo

$$p_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\alpha_n+\frac{n}{1}\alpha_{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha_{n-2}x^2+\cdots+\alpha_0 x^n\right);$$

i polinomî $n!p_n(x)$ sono già stati considerati in un interessante lavoro del sig. Appell (*), e si può osservare che mediante l'introduzione del nostro sim-

(*) *Sur une classe de polynômes.* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, tom. 9, 1880, 2ème série.)

bolo di operazione D, riesce molto semplice la estensione ai nostri polinomî generali dati dalla (22) delle proprietà date dal sig. APPELL per i polinomî da esso studiati. Alcune di queste proprietà generalizzate si trovano enunciate a § 18.

IV.

22. Nei due Capitoli precedenti si sono presentati esempi di sviluppi dello zero, cioè di serie convergenti i cui termini sono funzioni di una variabile e la cui somma in un'area finita è costantemente nulla. Esempi di simili sviluppi (*Nullentwickelungen*) erano già stati considerati da FRŒBENIUS (*) e LINDEMANN (**). In ciò che segue ho cercato di giungere ad una generalizzazione degli sviluppi trovati precedentemente, considerando un sistema di funzioni $p_n(x)$ che ammetta un sistema associato.

Prima però importa notare che sviluppi dello zero sono possibili *a priori* anche per sistemi di funzioni quali sono stati considerati nella prima Memoria. Tale possibilità risulta dalle seguenti osservazioni: Prendiamo due gruppi di numeri

$$a_{m,n} \quad \text{ed} \quad \alpha_{m,n}$$

pei quali siano soddisfatte le ipotesi fatte a § 20 della prima Memoria, e riteniamo le notazioni ivi usate. Sappiamo che se (x_n) è un gruppo interno alla varietà s, si potrà dal sistema

$$y_m = \sum_n a_{m,n} x_n$$

ricavare

$$x_n = \sum_m \alpha_{m,n} y_n$$

e perciò non si potrà soddisfare al sistema di equazioni

$$\sum_n a_{m,n} x_n = 0$$

con un gruppo (x_n) interno alla varietà s se i numeri x_n non sono tutti nulli.

(*) FRŒBENIUS: *Ueber die Entwickelungen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten* (CRELLE, t. 73).

(**) LINDEMANN: *Entwickelungen der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen* (Math. Annalen, t. 19).

Ma potrà darsi che per un'altra determinazione r_1, s_1, dei numeri r, s, tale che sia

$$s_1 > s, \qquad r_1 < r$$

non si possa avere una corrispondente determinazione dei numeri ρ e σ; se quindi (x'_n) è un gruppo interno alla varietà s_1, ma non alla varietà s, le serie che figurano nei secondi membri del sistema

$$y'_n = \sum_n a_{m,n} x'_n$$

sono bensì ancora convergenti, ma non si sarà autorizzati a dire che questo sistema è risolubile. Potrà dunque darsi che il sistema

$$\sum_n a_{m,n} x'_n = 0$$

sia soddisfatto anche senza che siano nulle tutte le x'_n, e per conseguenza se poniamo

$$p_n(u) = \sum_m a_{m,n} u^m$$

lo sviluppo

$$\sum x'_n p_n(u)$$

sarà convergente in egual grado per $|u| < r_1$ e costantemente nullo, e ci darà così uno sviluppo dello zero.

23. Si abbia nel piano della variabile x un sistema di curve C_t, ognuna delle quali divida il piano in due campi, il primo che diremo E_t chiuso e semplicemente connesso, il secondo infinito. Queste curve si succedano in modo che ognuna di esse sia interna alle successive, e che siano tutte comprese fra due curve estreme C e C', la prima esterna e la seconda interna a tutte: in casi speciali C possa ridursi ad una curva infinita e C' ad un punto. Diciamo E ed E' i campi interni a C e C' rispettivamente. Per ogni punto del campo compreso fra C e C' passi una curva del sistema C_t ed una sola.

Si abbiano due sistemi di funzioni associate $p_n(x)$ e $\varpi_n(x)$, sotto le seguenti ipotesi:

Le funzioni $p_n(x)$ siano a carattere razionale intero in tutto il campo E.

Le funzioni $\varpi_n(x)$ abbiano carattere razionale nel campo compreso fra le curve C e C'.

Fra le funzioni $p_n(x)$ e $\varpi_n(x)$ passi la relazione

$$\sum p_n(x) \varpi_n(y) = \frac{1}{y-x},$$

intendendosi che per ogni valore $\bar{y}$ di y preso nel campo fra le curve C e C', la serie del primo membro converga in egual grado per tutti i valori di x contenuti nel campo E_t interno alla curva C_t che passa per $\bar{y}$, e per ogni valore $\bar{x}$ di x preso pure fra le curve C e C' la serie stessa converga in egual grado per tutti i valori di y compresi fra la curva C_t passante per $\bar{x}$ e la curva estrema C.

24. Sia $f(x)$ una funzione analitica regolare entro il campo E; si avrà, estendendo l'integrazione ad una curva C_t:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_t)} \frac{f(y)\,dy}{y-x} = \sum k_n p_n(x)$$

con

$$k_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_t)} f(y)\varpi_n(y)\,dy,$$

e lo sviluppo sarà valido entro il campo E_t.

Estendendo invece l'integrazione ad una curva C_{t_1}, si avrà

$$f(x) = \sum k'_n p_n(x)$$

con

$$k'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_{t_1})} f(y)\varpi_n(y)\,dy,$$

e questo secondo sviluppo sarà valido in E_{t_1}. Se ora accadrà che k'_n non sia eguale a k_n, la serie

$$\sum (k_n - k'_n) p_n(x)$$

ci darà uno sviluppo dello zero valido nel minore dei due campi E_t ed E_{t_1}.

25. Supponiamo che la funzione $\varpi_m(y)$ abbia un punto singolare non essenziale (polo) α fra le curve C_t e C_{t_1}, mentre tutte le altre funzioni $\varpi_n(y)$ $(n \gtrless m)$ mantengono il carattere razionale intero entro quel campo: in tal caso tutte le differenze $k_n - k'_n$ saranno nulle, eccettuata $k_m - k'_m$; ma questa sarà

$$A = \text{Residuo per } y = \alpha \text{ di } \varpi_m(y) f(y)$$

e perciò dovrà essere

$$A p_m(x) = 0.$$

Ma A si può sempre imaginare diverso da zero perchè la funzione $f(y)$ essendo soggetta alla sola condizione di essere regolare nel campo E, si potrà sempre scegliere in modo che il residuo di $\varpi_n(y)f(y)$ per $y=\alpha$ sia diverso da zero. Ne segue dunque che deve essere

$$p_m(x)=0$$

in tutto il campo E_t od E_{t_1}, e quindi in tutto il campo E.

In modo analogo si dimostrerebbe che se un punto α è polo per un numero finito di funzioni

$$\varpi_{m_1}(y), \qquad \varpi_{m_2}(y), \dots \qquad \varpi_{m_r}(y),$$

le funzioni

$$p_{m_1}(x), \qquad p_{m_2}(x), \dots \qquad p_{m_r}(x),$$

dovranno essere nulle in tutto il campo E. Supponendo dunque che nessuna delle funzioni $p_n(x)$ sia identicamente nulla entro il campo E, dobbiamo concludere che se un punto α è polo per una funzione $\varpi_m(y)$, esso dovrà essere polo per infinite funzioni $\varpi_n(y)$.

26. Supponiamo che le funzioni $\varpi_n(y)$ abbiano nel punto α compreso fra le curve C_t e C_{t_1} una singolarità non essenziale di ordine non maggiore di μ, e sia A_n il residuo della funzione

$$\varpi_n(y)f(y)$$

per $y=\alpha$: in tal caso la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n p_n(x) \tag{1}$$

sarà convergente nel minore dei due campi E_t, E_{t_1} e ci darà uno sviluppo dello zero.

Ora, sia per l'intorno del punto α:

$$f(y)=f_0+f_1(y-\alpha)+f_2(y-\alpha)^2+\cdots$$

$$\varpi_n(y)=\frac{a_{n,1}}{y-\alpha}+\frac{a_{n,2}}{(y-\alpha)^2}+\cdots+\frac{a_{n,\mu}}{(y-\alpha)^\mu}+\mathfrak{P}(y-\alpha);$$

ne seguirà

$$2\pi i A_n = a_{n,1}f_0+a_{n,2}f_1+\cdots+a_{n,\mu}f_{\mu-1},$$

per cui lo sviluppo dello zero sarà

$$f_0\sum a_{n,1}p_n(x)+f_1\sum a_{n,2}p_n(x)+\cdots+f_{\mu-1}\sum_{n,\mu}p_n(x);$$

ma osservando che i numeri

$$f_0, \qquad f_1, \qquad f_2, \dots \qquad f_{\mu-1}$$

si possono riguardare come arbitrarî poichè la funzione $f(x)$ è soggetta alla sola condizione di essere regolare entro il campo E, ne viene che dovranno essere separatamente sviluppi dello zero le serie

$$\sum a_{n,1} p_1(x), \qquad \sum a_{n,2} p_n(x), \ldots \qquad \sum a_{n,\mu} p_n(x), \tag{2}$$

le quali convergeranno tutte nel minore dei due campi E_t, E_{t_1}, e poichè le curve C_t, C_{t_1} si possono avvicinare fra loro tanto quanto si vuole, si potrà dire « che gli sviluppi (2) convergeranno entro il campo E_t limitato dalla curva » C_t che passa per α. »

Se fra le curve C_t e C_{t_1} si trovano poli delle funzioni $\varpi_n(y)$ in numero finito

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2, \ldots \qquad \alpha_m$$

il cui ordine d'infinito non possa rispettivamente superare i numeri

$$\mu_1, \qquad \mu_2, \ldots \qquad \mu_m,$$

potremo ripetere lo stesso ragionamento sostituendo alle curve d'integrazione altre che comprendano fra loro un solo dei punti α, ed avremo

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_m$$

sviluppi dello zero, rispettivamente validi nei campi E_i limitati dalle curve C_i passanti per i punti α_i: questi sviluppi si potranno indicare, analogamente ai (2), con

$$\sum a^{(i)}_{n,r} p_n(x), \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \ 2, \ 3, \ldots \ \mu_i \\ i = 1, \ 2, \ 3, \ldots \ m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Riassumendo: « Se le funzioni $\varpi_n(y)$ hanno fra le curve C e C' un numero » finito od infinito di poli, i cui posti limiti siano sulle curve C e C', e se per » ogni polo α_i esiste un numero intero e positivo μ_i che indichi l'ordine mas- » simo d'infinito delle funzioni $\varpi_n(y)$ in quel punto, vi saranno μ_i sviluppi dello » zero indipendenti relativi al polo α_i, e la forma di questi sviluppi sarà

$$\sum a^{(i)}_{n,r} p_n(x)$$

» dove

$$a^{(i)}_{n,r} = \frac{1}{\mu_i - r} \left[\frac{\partial^{\mu - r} \{ \varpi_n(y)(y - \alpha_i)^{\mu_i} \}}{\partial y^{\mu - r}} \right]_{y = \alpha_i}. \text{ »}$$

È facile vedere che i varî sviluppi dello zero contenuti in queste formole sono fra loro linearmente indipendenti. Non resta però escluso che oltre a questi sviluppi dello zero non ve ne possano essere altri pure da questi linearmente indipendenti.

27. Se le funzioni $p_n(x)$ sono

$$p_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \ (*)$$

dove con $a_1, a_2, \ldots a_n$, si indica un gruppo di numeri avente per limite zero e tali che sia convergente la serie

$$\sum |a_n|,$$

le funzioni associate saranno (**)

$$\varpi_n(y) = \frac{1}{p_{n+1}(y)} = \frac{1}{(y - a_1)(y - a_2) \cdots (y - a_{n+1})};$$

le curve C e C' si riducono in questo caso rispettivamente al cerchio di centro o e di raggio infinito, ed al punto zero. Vi è uno sviluppo dello zero relativo ad ogni punto a_n, il quale converge entro il cerchio di centro o e di raggio $|a_n|$.

Se le funzioni $p_n(x)$ sono quelle da noi considerate nel Cap. II, cioè

$$p_n(x) = c_n + c_{n-1}x + c_{n-2}x^2 + \cdots + c_0 x^n$$

con

$$\varphi(x) = \sum c_n x^n,$$

le funzioni associate saranno

$$\varpi_n(y) = \frac{1}{y^{n+1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}:$$

i poli di queste funzioni sono le inverse $\frac{1}{\alpha_n}$ delle radici di $\varphi(x)$, e queste sono tutte esterne alla circonferenza $\frac{1}{R}$: le curve C e C' si riducono in questo caso alla circonferenza di centro o e di raggio ∞ ed alla circonferenza di centro o e di raggio $\frac{1}{R}$. Ora abbiamo appunto dimostrato che ad ogni radice α_n corrispondono tanti sviluppi dello zero quant'è l'ordine di multiplicità della radice stessa, ed il campo di validità di questi sviluppi è il cerchio di centro o e di raggio $\frac{1}{|\alpha_n|}$.

Bologna, dicembre 1883.

(*) Queste funzioni sono quelle considerate da FRŒBENIUS nella Memoria citata a pag. 127.
(**) FRŒBENIUS, Memoria citata, § 3.

INDICE.

Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche.

(*Memoria del prof.* G. Ricci, *a Padova.*)

Molti lavori sono stati pubblicati sulle forme differenziali quadratiche dopo che le ricerche moderne sulla natura dello spazio hanno richiamata su di esse la attenzione dei Geometri. Così oltre alla memorabile *Tesi di abilitazione* di Riemann ed alla *Commentatio Mathematica,* in cui viene trattato in ispecial modo il problema di riconoscere quando una data forma sia trasformabile in altra a coefficienti costanti e che, sebbene presentata alla Accademia delle Scienze di Parigi nel 1865, fu pubblicata soltanto nel 1876, apparvero contemporaneamente nel volume 70 del Giornale di Borchardt del 1868 una Memoria di Christoffel sul problema generale della trasformabilità l'una nell'altra di due date forme con egual numero di variabili, ed una di Lipschitz, in cui viene risoluto completamente quello speciale già considerato da Riemann.

In altri lavori pubblicati nei volumi 71 ed 81 del Giornale di Borchardt il Lipschitz si propone di determinare degli invarianti delle forme differenziali quadratiche e vi giunge prendendo a guida i risultati già noti per l'elemento lineare di una superficie, cioè nel caso di due sole variabili indipendenti. Si sa infatti che, se un punto materiale non soggetto alla azione di alcuna forza è costretto a muoversi sopra una superficie, la pressione da esso esercitata sopra questa in ciascun punto è inversamente proporzionale al raggio di curvatura della sezione piana normale alla superficie e tangente alla traiettoria in quel punto. Se quindi ci si propone di determinare le pressioni massima e minima tra quelle corrispondenti alle diverse traiettorie si arriva ad una equazione di secondo grado, che ha per radici i valori reciproci dei raggi di curvatura principali della superficie, e il cui termine noto è la curvatura di Gauss, che si sa essere appunto un invariante differenziale dell'elemento lineare della superficie. Il problema analogo più generale di Càlcolo delle variazioni, in cui ci si propone la determinazione delle pressioni massime e minime nel caso che il moto di un punto materiale non soggetto alla azione di alcuna forza in uno spazio ad n dimensioni debba soddisfare ad m condizioni, conduce ad una equazione di grado $n-m$, coi coefficienti della quale si costruiscono gli invarianti cercati. Così, se è $m=1$, come appunto nel caso del moto di un punto materiale del nostro spazio sopra una superficie, e quindi la equazione accennata è della forma

$$\omega^{n-1}+D_1\omega^{n-2}+\cdots+D_{n-2}\omega+D_{n-1}=0,$$

i coefficienti $D_2, D_4, D_6, \ldots$ sono invarianti della forma differenziale quadratica, che rappresenta l'elemento lineare della *superficie ad* $n-1$ *dimensioni,* su cui il punto materiale dello spazio ad n è costretto a muoversi, e lo sono pure i prodotti $D_{2r+1}\, D_{2s+1}$, le quante volte sia $2(r+s+1)\geqq n+1$. Il coefficiente D_{n-1} è riguardato naturalmente come la generalizzazione della curvatura di Gauss.

Il sig. Voss in una Memoria pubblicata a pag. 129 e seguenti del vol. 16 dei *Mathematische Annalen,* prese a considerare due forme $\sum_1^m{}_{rs} a_{rs}\, du_r\, du_s$, $\sum_1^n{}_{ik} c_{ik}\, dx_i dx_k$, dove è $m<n$, e di cui la prima si può dedurre dalla seconda stabilendo tra le x $n-m$ relazioni, che sono identicamente soddisfatte dalle loro espressioni per le u, generalizza per questo caso i concetti delle curvature di Monge e di Gauss e guidato da analogie puramente geometriche giunge ai risultati, cui era pervenuto il Lipschitz seguendo delle analogie tolte alla Meccanica razionale. E ad analogie geometriche sono pure inspirate molte indagini sulla curvatura degli spazî pubblicate nell'ultimo decennio, come quelle del sig. Beez contenute nel vol. 7 dei *Mathematische Annalen* e nelle Annate 1875, 76 e 79 della *Zeitschrift für Mathematik und Physik* diretta da Schlömilch.

Così quasi tutti i Geometri, che si sono fino ad ora occupati di questo argomento seguendo il corso delle idee, quale si è infatti sviluppato e che ha introdotto nel campo della Analisi le forme differenziali quadratiche come rappresentanti gli elementi lineari di spazî ad n dimensioni chiesero alle teorie, che valgono pel nostro spazio e per le superficie ordinarie a due dimensioni, norma alle loro ricerche. E se i risultati, a cui giunsero, furono notevoli, i metodi non appaiono sempre chiari e non rendono dei risultati stessi sufficiente ragione come quelli, che muovono da vedute e considerazioni, che non hanno colle questioni da risolvere una connessione necessaria. E ciò tanto più che, come vedremo, il caso di due sole variabili indipendenti rappresenta sotto molti aspetti nella Teoria, che ci occupa, un caso di eccezione.

Oggetto di questo scritto è di iniziare sulle forme differenziali quadratiche una serie di ricerche le quali condotte su concetti puramente analitici meglio ci addentrino nella conoscenza della loro natura, e sfuggano anche così alle discussioni, a dir vero, alquanto oziose sulla esistenza e sulla natura degli spazî a più di tre dimensioni. Le interpretazioni dettate da analogie geometriche o meccaniche, che a quei risultati si potranno dare, non saranno che illustrazioni di una tale Teoria.

Una osservazione fatta dallo SCHLÆFLI (*), secondo cui una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili deve sempre potersi dedurre dalla $\sum_1^{n+h} {}_r\, dy_r^2$, dove è $0 \leqq h \leqq \frac{n(n-1)}{2}$, prendendo per $y_1, y_2, \ldots y_{n+h}$ delle funzioni opportune di n variabili indipendenti, è il punto di partenza di queste ricerche. Se infatti, preso per h il minore tra i numeri intieri positivi, per cui ciò è possibile per una data forma, questa si dice di *classe h*, è evidente che per le questioni più importanti, che si possono proporre nello studio di una forma differenziale quadratica, sarà essenziale il conoscere a quale classe essa appartenga. Così, per esempio, perchè due forme collo stesso numero di variabili indipendenti si possano trasformare l'una nell'altra, sarà necessario anzi tutto che esse siano della medesima classe: e già i risultati, che si conoscono in questa Teoria, si appalesano essenzialmente dipendenti dalla indicata classificazione delle forme.

A me pare che si avrebbe una teoria completa e razionale delle forme differenziali quadratiche, le quante volte si possedessero i criterî per riconoscere a quale classe una data forma appartiene e, partendo da questi, si facesse uno studio speciale delle forme stesse classe per classe.

Qui, chiamate riducibili le forme ad n variabili, che si possono dedurre da una forma ad $n-1$ ponendo le variabili di questa eguali ad altrettante funzioni delle variabili di quella, daremo nel § 1 il modo di riconoscere quando una forma è riducibile e, se lo è, di effettuare la riduzione.

Ristrette poi le nostre considerazioni alle forme non riducibili, daremo nel § 2 una nuova dimostrazione del teorema già dimostrato da LIPSCHITZ e in parte anche da CHRISTOFFEL e RIEMANN sulle condizioni necessarie e sufficienti

(*) Vedasi il Volume 5 della Serie II di questi *Annali* a pag. 178.

perchè una tale forma sia di classe 0. E reputo opportuno il dare una tale dimostrazione, sia perchè essa mi appare chiara e naturale, sia perchè è basata sul teorema del § 1, come quella del paragrafo successivo sul teorema del § 2, e rende così tutto lo studio più completo e le sue parti meglio coordinate fra di loro.

Nel § 3 in fine, date alcune formule, che valgono per delle forme di classe qualunque, daremo i criterî per riconoscere se una forma data sia di 1ª classe. A questo ci condurrà la ricerca della forma speciale, che prendono in questo caso le $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ espressioni (lm, pq) dipendenti dai coefficienti della forma data e dalle loro derivate prime e seconde, le quali si annullano tutte, quando la forma è di classe 0. Si trova che nel caso di una forma di 1ª classe esse sono invece i minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di ordine n. Indicati con (lp) gli $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi di questo determinante, se è $n=2$, uno solo di essi è determinato in funzione della unica espressione $(12, 12)$ e degli altri due; se è $n=3$, lo sono tutti; e per $n>3$ la loro eliminazione conduce ad $\frac{n^2(n^2-1)}{12}-\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni tra le (lm, pq), cioè ad altrettante relazioni differenziali di 2° ordine, a cui debbono soddisfare i coefficienti della forma data perchè questa sia di 1ª classe. Si trova di più che le quantità (lp) debbono soddisfare ad $\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ relazioni differenziali di 1° ordine, le quali nel caso di $n>2$ corrispondono ad altrettante relazioni differenziali di 3° ordine tra i coefficienti della forma data.

Se si considera poi la forma ψ di coefficienti (lp) si trova che essa è covariante alla data φ, così che, se si indicano rispettivamente con Δ ed a i loro discriminanti, per $n=2$, $\frac{\Delta}{a}$ è un *invariante differenziale di 2° ordine* di φ, che si trova coincidere colla curvatura di Gauss della superficie, di cui φ rappresenta l'elemento lineare: e per $n>2$ sono invarianti differenziali di 2° ordine di φ tutti gli n invarianti algebrici assoluti del sistema di forme φ e ψ. Si determina poi facilmente il significato geometrico di tali invarianti, poichè, se si estende il nome di superficie a tutti gli spazî, il cui elemento lineare φ è una forma differenziale di 1ª classe, e corrispondentemente si estende la definizione delle linee di curvatura e dei raggi di curvatura principali, si trova che per ogni punto di una superficie ad n dimensioni passano n linee di curvatura, a cui corrispondono altrettanti raggi di curvatura principali, e quegli invarianti rappresentano le somme dei prodotti r ad r dei valori reciproci di questi raggi, essendo $r=1, 2,\ldots n$. Così l'invariante $(-1)^n \frac{\Delta}{a}$ rappresenta anche nel caso generale il prodotto di tutti quei valori reciproci e si riguarda quindi come la espressione della curvatura di GAUSS per le superficie di un numero qualunque di dimensioni, tanto più che anche per queste il suo annullarsi corrisponde all'essere la superficie piana.

Le formule generali contenute nel § 3 possono servire come punto di partenza per lo studio delle forme di classe superiore alla prima; ma in questo studio io non mi sono peranco addentrato.

§ 1.

Forme riducibili.

Diremo che una forma differenziale quadratica ad n variabili

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \tag{1}$$

è *riducibile*, le quante volte sia identicamente

$$\varphi = \sum_1^{n-1} {}_{lm}\, b_{lm}\, du_l\, du_m, \tag{2}$$

$u_1, u_2,\ldots u_{n-1}$ essendo funzioni di $x_1, x_2,\ldots x_n$ e i coefficienti b_{lm} di $u_1, u_2,\ldots u_{n-1}$. Se ciò è, posto

$$e_{r,m} = \sum_1^{n-1} {}_l\, b_{l,m} \frac{du_l}{dx_r} \qquad (r=1, 2,\ldots n,\ m=1, 2,\ldots n-1)$$

si ha

$$a_{rs} = \sum_1^{n-1} {}_m\, e_{rm} \frac{du_m}{dx_s}, \tag{3}$$

cioè il discriminante a della forma φ è il prodotto delle due matrici

$$\left|\begin{matrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_1} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_1} \\ \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_2} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_1}{dx_n} & \frac{du_2}{dx_n} \cdots & \frac{du_{n-1}}{dx_n} \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} e_{11} & e_{1,2} \cdots & e_{1,n-1} \\ e_{21} & e_{2,2} \cdots & e_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n,2} \cdots & e_{n\,n-1} \end{matrix}\right|,$$

che indicheremo con U ed E e che hanno n linee orizzontali ed $n-1$ verticali. È dunque

$$a=0. \tag{I}$$

Si ha di più dalla (3)

$$\frac{d\,a_{rs}}{d\,x_i}=\sum_1^{n-1}{}_{lmh}\frac{d\,b_{l,m}}{d\,u_h}\frac{d\,u_h}{d\,x_i}\frac{d\,u_l}{d\,x_r}\frac{d\,u_m}{d\,x_s}+\sum_1^{n-1}{}_{lm}b_{l,m}\left(\frac{d\,u_l}{d\,x_r}\frac{d^2u_m}{d\,x_s\,d\,x_i}+\frac{d\,u_m}{d\,x_s}\frac{d^2u_l}{d\,x_r\,d\,x_i}\right)$$

e posto

$$2\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}=\frac{d\,a_{is}}{d\,x_r}+\frac{d\,a_{ir}}{d\,x_s}-\frac{d\,a_{rs}}{d\,x_i} \tag{4}$$

e indicato con α_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in a

$$\left.\begin{aligned} 2\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}&=\sum_1^{n-1}{}_{lmh}\left(\frac{d\,b_{l,m}}{d\,u_h}+\frac{d\,b_{lh}}{d\,u_m}-\frac{d\,b_{hm}}{d\,u_l}\right)\frac{d\,u_l}{d\,x_i}\frac{d\,u_h}{d\,x_r}\frac{d\,u_m}{d\,x_s}+2\sum_1^{n-1}{}_{lm}b_{lm}\frac{d\,u_l}{d\,x_i}\frac{d^2\,u_m}{d\,x_r\,d\,x_s}. \\ 2\sum{}_i\alpha_{pi}\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}&=\sum_1^{n-1}{}_{lm}\left\{2\,b_{lm}\frac{d^2\,u_m}{d\,x_r\,d\,x_s}+\sum_1^{n-1}{}_h\left(\frac{d\,b_{l,m}}{d\,u_h}+\frac{d\,b_{lh}}{d\,u_m}-\frac{d\,b_{hm}}{d\,u_l}\right)\frac{d\,u_h}{d\,x_r}\frac{d\,u_m}{d\,x_s}\right\}\sum{}_i\alpha_{pi}\frac{d\,u_l}{d\,x_i}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ora dalla (3), fattovi $s=i$, moltiplicata per α_{pi} e sommata rispetto ad i tenendo conto della (I), si ha

$$\sum_1^{n-}{}_l e_{rl}\sum_1^{n}{}_i\alpha_{pi}\frac{d\,u_l}{d\,x_i}=0.$$

Se tutti i determinanti, che si traggono dalla matrice E sopprimendone una linea orizzontale, non sono nulli, questo sistema di equazioni conduce alle

$$\sum_1^{n}{}_i\alpha_{pi}\frac{d\,u_l}{d\,x_i}=0$$

e quindi per le (5) alle

$$\sum{}_i\alpha_{pi}\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}=0, \tag{II}$$

mentre nel caso opposto si giunge a queste immediatamente osservando che, se si indicano con U_i ed E_i i determinanti, che si traggono dalle matrici U ed E trascurandone le orizzontali i^{sime}, si ha

$$\alpha_{pi}=E_pU_i=0.$$

Supponiamo ora verificate le condizioni (I) e (II) e poniamo

$$x_r=x_r(u_1,\ u_2,\dots\ u_{n-1},\ x_n)\qquad(r=1,\ 2,\dots\ n-1). \tag{6}$$

La φ prende mediante questa posizione la forma

$$\varphi = \sum_1^{n-1}{}_{lm} b_{lm}\, du_l\, du_m + 2\sum_1^{n-1}{}_{rh} \frac{dx_r}{du_h} du_h \sum_1^{n} a_{rs}\, dx_s$$
$$+ dx_n\left(\sum_1^{n}{}_s a_{ns}\, dx_s + \sum_1^{n-1}{}_r \frac{dx_r}{dx_n}\sum_1^{n}{}_s a_{rs}\, dx_s\right),$$

essendosi posto

$$b_{lm} = \sum_1^{n-1}{}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}. \tag{7}$$

La precedente espressione di φ si riduce alla (2) le quante volte $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ si determinino in funzione di x_n per guisa da soddisfare al sistema di equazioni simultanee

$$\sum_1^{n}{}_s a_{rs}\, dx_s = 0 \qquad (r = 1,\ 2, \dots\ n), \tag{8}$$

che sono compatibili fra di loro, quando la condizione (I) è soddisfatta.

Dalle (7), in cui per $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ si intendano posti i valori dati dalle (6), si trae

$$\frac{db_{l,m}}{dx_n} = \sum_1^{n-1}{}_{rs} \frac{da_{rs}}{dx_n}\frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m} + \sum_1^{n-1}{}_{rs} a_{rs}\left(\frac{dx_r}{du_l}\frac{d^2x_s}{dx_n\, du_m} + \frac{dx_r}{du_m}\frac{d^2x_s}{dx_n\, du_l}\right),$$

ovvero osservando che

$$\frac{da_{rs}}{dx_n} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1}{}_p \frac{da_{rs}}{dx_p}\frac{dx_p}{dx_n}$$

e per le (8)

$$\sum_1^{n-1}{}_s a_{rs} \frac{d^2x_s}{dx_n\, du_m} = -\sum_1^{n-1}{}_p \frac{da_{rn}}{dx_p}\frac{dx_p}{du_m} - \sum_1^{n-1}{}_{sp} \frac{da_{rs}}{dx_p}\frac{dx_p}{du_m}\frac{dx_s}{dx_n}$$

$$\frac{db_{lm}}{dx_n} = -2\sum_1^{n-1}{}_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}\sum_1^{n}{}_p \begin{bmatrix} rs \\ p \end{bmatrix} \frac{dx_p}{dx_n}.$$

Infine poichè le (8), tenuto conto della (I), ci dicono che le dx_i sono proporzionali alle α_{pi} e quindi le (II) conducono alle

$$\sum_1^{n}{}_p \begin{bmatrix} rs \\ p \end{bmatrix} dx_p = 0,$$

la precedente equazione ci dà $\frac{db_{l,m}}{dx_n} = 0$, cioè ci dice che i coefficienti b_{lm} sono funzioni soltanto delle costanti $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, che vengono introdotte dalla integrazione del sistema (8).

Si è dunque dimostrato che: *Le condizioni* (I) *e* (II) *sono necessarie e sufficienti perchè la forma* (1) *sia riducibile. Per effettuare la riduzione conviene integrare il sistema di equazioni simultanee* (8); *le costanti di integrazione rappresentano le nuove variabili.*

Si può pure dedurre dalla dimostrazione data che, se è verificata soltanto la condizione (I), la forma (1) si può ridurre alla (2), ma i coefficienti di questa dipenderanno oltre che dalle nuove anche da una delle antiche variabili.

§ 2.

Forme di classe 0.

Supponiamo ora che la forma

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s \tag{1}$$

non sia riducibile e, almeno quando la variabilità delle x_r sia convenientemente limitata, sia positiva. In tal caso, come ha notato lo Schlæfli (*), essa può dedursi dalla

$$ds^2 = \sum_1^{n+h} {}_t dy_t^2, \tag{2}$$

essendo $0 \leq h \leq \frac{n(n-1)}{2}$ e le y_t funzioni di $x_1, x_2, \ldots x_n$: il numero rappresentato da h darà la *classe* della forma φ.

Se indichiamo per brevità la $\frac{dy_t}{dx_r}$ con $\frac{dt}{dr}$ abbiamo le

$$a_{rs} = \sum_1^{n+h} {}_t \frac{dt}{dr} \frac{dt}{ds}, \tag{3}$$

dalle quali si deducono per le quantità $\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}$ (§ 1, 4) le espressioni

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \sum_1^{n+h} {}_t \frac{dt}{di} \frac{d^2 t}{dr\, ds}. \tag{4}$$

(*) Si veda il volume 5 della Serie II di questi *Annali* a pag. 190.

Posto poi

$$(lm,\, pq) = \frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}}{dq} - \frac{d\begin{bmatrix} lq \\ m \end{bmatrix}}{dp} + \sum_{rs} c_{rs} \left\{ \begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} lp \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mq \\ s \end{bmatrix} \right\} \tag{5}$$

e

$$c_{rs} = \frac{\alpha_{rs}}{a} \tag{6}$$

si ha dalle (4)

$$\left.\begin{aligned} (lm,\, pq) &= \sum_1^{n+h}{}_t \left(\frac{d^2 t}{dl\,dp}\frac{d^2 t}{dm\,dq} - \frac{d^2 t}{dl\,dq}\frac{d^2 t}{dm\,dp} \right) \\ &+ \sum_1^{n+h}{}_{tu} \sum_1^{n}{}_{rs} c_{rs} \frac{dt}{dr}\frac{du}{ds}\left(\frac{d^2 t}{dl\,dq}\frac{d^2 u}{dm\,dp} - \frac{d^2 t}{dl\,dp}\frac{d^2 u}{dm\,dq} \right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Supponendo dapprima $h=0$ e posto

$$D = \sum \pm \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_2}\cdots\frac{dy_n}{dx_n}$$

$$e_{r,t} = \frac{dD}{d\frac{dt}{dr}}$$

dalle (3) si ha

$$a = D^2 \qquad \alpha_{rs} = \sum_1^n{}_q e_{rq} e_{sq}. \tag{8}$$

Avremo quindi

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n{}_r \alpha_{rs}\frac{dt}{dr} = \sum_1^n{}_q e_{sq} \sum_1^n{}_r e_{rq}\frac{dt}{dr} = D e_{st} \\ &\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs}\frac{dt}{dr}\frac{du}{ds} = D\sum{}_s e_{st}\frac{du}{ds} = \begin{cases} D^2 = a & (\text{per } u = t) \\ 0 & (\text{per } u \lessgtr t). \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Queste assieme alle (7) dicono che, quando la forma φ è di classe 0, i suoi coefficienti soddisfano alle equazioni

$$(lm,\, pq) = 0. \tag{I}$$

Per dimostrare il teorema inverso di questo risolviamo le equazioni (4) nel caso di $h=0$ rispetto alle derivate seconde delle y. Tenuto conto delle (6) e (9) si ottiene così

$$\frac{d^2 t}{di\,dg} = \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix} \frac{dt}{dr}, \tag{10}$$

le quali derivate rispetto ad x_h e sostituiti per le derivate seconde, che compariscono nei secondi membri, i valori dati dalle (10) stesse, si ha

$$\frac{d^3 t}{d i\, d g\, d h}=\sum_1^n{}_{rs}\left(\begin{bmatrix} i g \\ s \end{bmatrix}\frac{d c_{rs}}{d h}+c_{rs}\left\{\frac{d\begin{bmatrix} i g \\ s \end{bmatrix}}{d h}+\sum_1^n{}_{pq} c_{pq}\begin{bmatrix} i g \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h q \\ s \end{bmatrix}\right\}\right)\frac{d t}{d r}.$$

E poichè dalle equazioni (4) del § 1, che definiscono il simbolo $\begin{bmatrix} r s \\ i \end{bmatrix}$, si ha

$$\frac{d a_{qs}}{d h}=\begin{bmatrix} h q \\ s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} h s \\ q \end{bmatrix} \tag{11}$$

e quindi

$$\sum_1^n{}_q c_{pq}\begin{bmatrix} h q \\ s \end{bmatrix}=-\sum{}_q c_{pq}\begin{bmatrix} h s \\ q \end{bmatrix}-\sum{}_q a_{qs}\frac{d c_{pq}}{d h}$$

$$\sum{}_{qs} c_{rs} c_{pq}\begin{bmatrix} h q \\ s \end{bmatrix}=-\sum{}_{qs} c_{pq} c_{rs}\begin{bmatrix} h s \\ q \end{bmatrix}-\frac{d c_{pr}}{d h},$$

la precedente si trasforma nella

$$\frac{d^3 t}{d i\, d g\, d h}=\sum{}_{rs} c_{rs}\left\{\frac{d\begin{bmatrix} i g \\ s \end{bmatrix}}{d h}-\sum{}_{pq} c_{pq}\begin{bmatrix} i g \\ p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h s \\ q \end{bmatrix}\right\}\frac{d t}{d r}.$$

Se si pone ora mente alle (7), si vede che l'essere verificate le equazioni (I) equivale all'essere il sistema (10) *completo* nel senso definito in una mia recente Nota pubblicata in questi stessi *Annali* (*). Come in essa dimostrai, il sistema (10) si integra determinando gli n integrali comuni indipendenti del sistema di equazioni

$$\frac{d f}{d x_i}+\sum_1^n{}_g A_{ig}\frac{d f}{d p_g}=0 \qquad (i=1,\ 2,\dots\ n) \tag{a}$$

dopo aver posto

$$A_{ig}=\sum_1^n{}_{rs}\begin{bmatrix} i g \\ s \end{bmatrix} c_{rs} p_r; \tag{12}$$

sistema, che è jacobiano. Indicando infatti quegli integrali con $f_1, f_2,\dots f_n$ le equazioni

$$f_r=c_r \qquad (r=1,\ 2,\dots\ n),$$

dove le c_r sono costanti arbitrarie, danno per $p_1, p_2,\dots p_n$ le derivate rispetto ad $x_1, x_2,\dots x_n$ di una funzione y, la quale rappresenta l'*integrale generale* del sistema (10).

(*) Tomo 12, pag. 43.

Prendiamo

$$f = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} p_r p_s$$

ed avremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx_i} &= \sum_1^n {}_{rs} \frac{d c_{rs}}{d i} p_r p_s \\ \frac{df}{dp_g} &= 2 \sum_1^n {}_h c_{hg} p_h \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

e per questa e per le (12)

$$\sum_1^n {}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = 2 \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} p_r \sum_1^n {}_h p_h \sum_1^n {}_g c_{hg} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix}$$

e siccome dalle (4) del § 1 si ha

$$2 \sum_1^n {}_g c_{hg} \begin{bmatrix} ig \\ s \end{bmatrix} = \sum_1^n {}_g c_{hg} \frac{d a_{is}}{dg} + \sum_1^n {}_g \left(a_{ig} \frac{d c_{hg}}{ds} - a_{sg} \frac{d c_{hg}}{d i} \right)$$

$$\sum_1^n {}_g A_{ig} \frac{df}{dp_g} = - \sum_1^n {}_{rs} \frac{d c_{rs}}{d i} p_r p_s .$$

Questa e la (13) ci dicono che f soddisfa alle equazioni (a) e prendendo eguale ad 1 la costante arbitraria, a cui deve essere eguagliata secondo il metodo esposto per integrare il sistema (10), avremo

$$\sum {}_{rs} c_{rs} p_r p_s = 1. \tag{14}$$

Siano poi $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ altri $n-1$ integrali indipendenti fra loro e da f del sistema (a), si ponga

$$f_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1) \tag{14'}$$

e si indichi con y l'integrale particolare del sistema (10), per cui è $\frac{dy}{dx_r} = p_r$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ essendo date dalle equazioni (14) e (14'), e che conterrà quindi oltre alle costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ una costante additiva pure arbitraria c_0.

Si consideri la forma

$$\psi = \varphi - dy^2 = \sum_1^n {}_{rs} e_{rs} dx_r dx_s, \tag{15}$$

dove sarà

$$e_{rs} = a_{rs} - p_r p_s . \tag{15'}$$

Indicando con e il suo discriminante si ha

$$e = a - \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} p_r p_s = a(1 - \sum_{rs} c_{rs} p_r p_s)$$

per la (6) e quindi per la (14)

$$e = 0. \tag{16}$$

Se poi con E_{il} si denota il complemento algebrico di e_{il} in e, osservando che $\sum_1^n {}_i a_{ir} E_{il}$ non è che il determinante e, in cui invece di $a_{il} - p_i p_l$ si è posto a_{ir}, si dimostra facilmente la eguaglianza

$$\sum_1^n {}_i a_{ir} E_{il} = p_r \sum_1^n {}_i \alpha_{il} p_i \qquad (r,\ l = 1,\ 2, \ldots\ n).$$

Da questa moltiplicata per α_{qr} e sommata rispetto all'indice r si trae

$$E_{ql} = \sum_1^n {}_i c_{il} p_i \sum_1^n {}_r \alpha_{qr} p_r.$$

Siccome di più, posto

$$2\begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = \frac{d\,e_{rl}}{d\,x_s} + \frac{d\,e_{sl}}{d\,x_r} - \frac{d\,e_{rs}}{d\,x_l},$$

dalle (15′) si ha

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix} - p_l \frac{d\,p_r}{d\,x_s},$$

ricorrendo alla (14) e ricordando che è $p_l = \frac{dy}{dx_l}$ e che y soddisfa alle equazioni (10) si trova

$$\sum_1^n {}_l E_{ql} \begin{bmatrix} r\,s \\ l \end{bmatrix}' = 0.$$

Per quanto si vide nel § 1 questa e la (16) ci permettono di concludere che la forma ψ è riducibile e la riduzione si fa integrando il sistema di equazioni simultanee $\sum_1^n {}_s e_{rs} dx_r = 0$ ovvero per le (15′)

$$\sum_1^n {}_s a_{rs} dx_s = p_r dy.$$

Queste risolute rispetto alle dx_s e posto

$$P_s = \sum_1^n {}_r c_{rs} p_r \tag{17}$$

si trasformano nelle

$$dx_s = P_s\, dy. \tag{18}$$

Se quindi si indicano con $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ $n-1$ integrali indipendenti della equazione

$$\sum_1^n {}_s P_s \frac{df}{dx_s} = 0$$

abbiamo

$$\psi = \sum_1^{n-1} {}_{lm} b_{lm}\, du_l\, du_m, \tag{15''}$$

posto

$$b_{lm} = \sum_1^{n-1} {}_{rs} (a_{rs} - p_r p_s) \frac{dx_r}{du_l} \frac{dx_s}{du_m}. \tag{19}$$

In queste le derivate sono prese considerando $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ come funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ e di x_n. Se invece $x_1, x_2, \ldots x_n$ si considerano come funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ e di y, le derivate delle x_s rispetto ad y son date dalle (18) e distinguendo quelle prese rispetto alle u_l nella nuova ipotesi con delle parentesi si ha

$$\frac{dx_r}{du_l} = \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{P_r}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right)$$

e quindi

$$\sum_1^{n-1} {}_r a_{rs} \frac{dx_r}{du_l} = \sum_1^n {}_r a_{rs} \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{p_s}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right), \tag{20}$$

essendosi fatto uso della

$$\sum_1^n {}_r a_{rs} P_r = p_s, \tag{21}$$

che si deduce immediatamente dalle (17). Da questa combinata colla (14) si trae pure

$$\sum {}_s p_s P_s = 1 \tag{22}$$

e siccome è anche

$$\sum_1^n {}_r p_r \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) = \sum_1^n {}_r \frac{dy}{dx_r}\left(\frac{dx_r}{du_l}\right) = \frac{dy}{du_l} = 0 \tag{23}$$

dalle (20) si ha

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m} = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \left(\frac{dx_r}{du_l}\right)\left(\frac{dx_s}{du_m}\right) + \frac{1}{P_n^2}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right)\left(\frac{dx_n}{du_m}\right).$$

Si ha pure

$$\sum_1^{n-1} {}_r p_r \frac{dx_r}{du_l} = \sum_1^{n-1} {}_r p_r \left(\frac{dx_r}{du_l}\right) - \frac{1}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right) \sum_1^{n-1} {}_r p_r P_r$$

e per le (22) e (23)

$$\sum_1^{n-1} {}_r p_r \frac{dx_r}{du_l} = -\frac{1}{P_n}\left(\frac{dx_n}{du_l}\right).$$

Per queste le (19) danno luogo alle

$$b_{lm} = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{du_l}\frac{dx_s}{du_m}, \tag{24}$$

dove le derivate sono prese considerando $x_1, x_2, \ldots x_n$ come funzioni di u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$ e di y.

Indicando con b il discriminante di ψ ridotta alla forma (15″), con β_{rs} il complemento algebrico di b_{rs} in b e posto

$$2\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}_1 = \frac{db_{is}}{du_r} + \frac{db_{ir}}{du_s} - \frac{db_{rs}}{du_i}$$

si trova

$$\frac{\beta_{rs}}{b} = \frac{1}{a}\sum_1^n {}_{pq} \alpha_{pq} \frac{du_r}{dx_p}\frac{du_s}{dx_q}$$

$$\begin{bmatrix} r\,s \\ i \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n {}_{lpq} \begin{bmatrix} l\,q \\ p \end{bmatrix} \frac{dx_l}{du_r}\frac{dx_q}{du_s}\frac{dx_p}{du_i} + \sum_1^n {}_{pq} a_{pq} \frac{dx_p}{du_i}\frac{d^2 x_q}{du_r\, du_s}$$

e facendo uso della (11)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\begin{bmatrix} l\,p \\ m \end{bmatrix}_1}{du_q} - \frac{d\begin{bmatrix} l\,q \\ m \end{bmatrix}_1}{du_p} = \sum_1^n {}_{ihkg} \left\{ \frac{d\begin{bmatrix} i\,k \\ h \end{bmatrix}}{dg} - \frac{d\begin{bmatrix} i\,g \\ h \end{bmatrix}}{dk} \right\} \frac{dx_g}{du_q}\frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_h}{du_m}\frac{dx_k}{du_p} \\ &\quad + \sum_1^n {}_{ihk} \begin{bmatrix} i\,k \\ h \end{bmatrix} \left\{ \frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_k}{du_p}\frac{d^2 x_h}{du_m\, du_q} - \frac{dx_i}{du_l}\frac{dx_k}{du_q}\frac{d^2 x_h}{du_m\, du_p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dx_k}{du_q}\frac{dx_i}{du_m}\frac{d^2 x_h}{du_l\, du_p} - \frac{dx_k}{du_p}\frac{dx_i}{du_m}\frac{d^2 x_h}{du_l\, du_q} \right\} \\ &\quad + \sum_1^n {}_{ih} a_{ih} \left\{ \frac{d^2 x_i}{du_m\, du_q}\frac{d^2 x_h}{du_l\, du_p} - \frac{d^2 x_i}{du_m\, du_p}\frac{d^2 x_h}{du_l\, du_q} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Si ha pure facendo uso delle

$$\sum_1^{n-1} {}_r \frac{dx_h}{du_r}\frac{du_r}{dx_v} = \begin{cases} -\dfrac{dx_h}{dy}\dfrac{dy}{dx_v} = -P_h \dfrac{dy}{dx_v} & (\text{per } v \lessgtr h) \\ -P_h \dfrac{dy}{dx_v} + 1 & (\text{per } v = h) \end{cases}$$

e di alcune facili riduzioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{b}\sum_1^{n-1}{}_r\beta_{rs}\begin{bmatrix} l\,q \\ r \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n{}_i \frac{d u_s}{d x_i}\left\{\frac{d^2 x_i}{d u_l\, d u_q} + \frac{1}{a}\sum{}_{vwk}\, a_{vi}\begin{bmatrix} w k \\ v \end{bmatrix}\frac{d x_w}{d u_l}\frac{d x_k}{d u_q}\right\} \\
&\frac{1}{b}\sum_1^{n-1}{}_{rs}\beta_{rs}\begin{bmatrix} l\,q \\ r \end{bmatrix}_1\begin{bmatrix} m\,p \\ s \end{bmatrix}_1 = \sum_1^n{}_{ih}\, a_{ih}\frac{d^2 x_i}{d u_m\, d u_p}\frac{d^2 x_h}{d u_l\, d u_q} + \sum_1^n{}_{ihk}\begin{bmatrix} i\,k \\ h \end{bmatrix}\left\{\frac{d x_i}{d u_l}\frac{d x_k}{d u_q}\frac{d^2 x_h}{d u_m\, d u_p}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{d x_i}{d u_m}\frac{d x_k}{d u_p}\frac{d^2 x_h}{d u_l\, d u_q}\right\} + \sum_1^n{}_{ghkivw}\, c_{vw}\begin{bmatrix} i\,g \\ v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ w \end{bmatrix}\frac{d x_i}{d u_l}\frac{d x_g}{d u_q}\frac{d x_h}{d u_m}\frac{d x_k}{d u_p} \\
&\qquad - \sum_1^n{}_i\left(p_i\frac{d^2 x_i}{d u_l\, d u_q} + \sum_1^n{}_{kvw}\, c_{iv}\, p_i\begin{bmatrix} w\,k \\ v \end{bmatrix}\frac{d x_w}{d u_l}\frac{d x_k}{d u_q}\right) \\
&\qquad \times \sum_1^n{}_{gj}\left(a_{jg}\frac{d^2 x_j}{d u_m\, d u_p} + \sum_1^n{}_f\begin{bmatrix} j\,f \\ g \end{bmatrix}\frac{d x_j}{d u_m}\frac{d x_f}{d u_p}\right)\frac{d x_g}{d y}
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

e poichè dalla $\sum_1^n{}_w \frac{d y}{d x_w}\frac{d x_w}{d u_l} = 0$ si ha

$$\sum_1^n{}_w \frac{d^2 y}{d x_w\, d x_k}\frac{d x_w}{d u_l} = -\sum_1^n{}_w\sum_1^{n-1}{}_r \frac{d y}{d x_w}\frac{d^2 x_w}{d u_l\, d u_r}\frac{d u_r}{d x_k}$$

$$\sum_1^n{}_{wk}\frac{d^2 y}{d x_w\, d x_k}\frac{d x_w}{d u_l}\frac{d x_k}{d u_q} = -\sum{}_i p_i \frac{d^2 x_i}{d u_l\, d u_q}$$

e sostituendo per $\frac{d^2 y}{d x_w\, d x_k}$ il valore dato dalle (10)

$$\sum_1^n{}_{ikvw}\, c_{vi}\, p_i\begin{bmatrix} w\,k \\ v \end{bmatrix}\frac{d x_w}{d u_l}\frac{d x_k}{d u_q} = -\sum{}_i p_i\frac{d^2 x_i}{d u_l\, d u_q},$$

l'ultima sommatoria del secondo membro della (26) sparisce e da questa e dalla (25), indicando con $(lm,\ pq)_1$ la espressione, che si deduce dalla ψ posta sotto la forma (15″), come la $(lm,\ pq)$ dalla φ [formula (5)] si deduce

$$(lm,\ pq)_1 = \sum_1^n{}_{ighk}(ih,\ kg)\frac{d x_i}{d u_l}\frac{d x_g}{d u_q}\frac{d x_h}{d u_m}\frac{d x_k}{d u_p},$$

e quindi per le (I)

$$(lm,\ pq)_1 = 0.$$

Ne viene che, come la forma φ (15), anche la ψ può mettersi sotto la forma $dy_1^2 + \chi$, dove la χ è una forma differenziale quadratica con una variabile di meno di quelle contenute in ψ cioè con $n-2$ variabili, e a χ applicando lo stesso ragionamento e così di seguito n volte si conclude in fine che a φ può darsi la forma $\sum_1^n{}_r dy_r^2$, cioè che la forma φ è di classe 0.

Possiamo dunque concludere che: *Le condizioni espresse dalle equazioni* (I) *sono necessarie e sufficienti perchè la forma irriducibile* φ *sia di classe* 0.

È facile verificare dalle (5) che si ha $(ll, pq)=0$, $(lm, pq)+(ml, pq)=0$, $(lm, pq)=(pq, lm)$, dalle quali deduciamo che nelle espressioni (lm, pq) non si possono supporre più di due indici eguali senza che esse spariscano identicamente; che esse non si alterano scambiando il gruppo di indici lm, col gruppo pq e che cambiano soltanto il segno scambiando fra loro gli indici di uno stesso gruppo. Esse si potranno quindi distinguere in tre categorie assegnando alla prima quelle, in cui i due gruppi coincidono e che sono della forma (lm, lm); alla seconda quelle, in cui un indice del primo gruppo coincide coll'indice corrispondente dell'altro, gli altri due essendo distinti, e che sono della forma (lm, lq) e alla terza quelle, in cui tutti gli indici sono distinti. Il numero delle prime è evidentemente $\frac{n(n-1)}{2}$, quello delle seconde, che si ottengono combinando coi gruppi lm in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ gli $n-2$ indici distinti da l e da m, è $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, e quello delle terze, che si ottengono ciascuna due volte combinando coi gruppi (lm) quelli (pq) fatti cogli $n-2$ indici differenti da l e da m sono $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. Se si nota però ancora che queste ultime sono legate tre a tre dalle relazioni

$$(lm, pq)+(lp, qm)+(lq, mp)=0,$$

il numero di quelli, che sono indipendenti fra loro, si riduce ad

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

Il numero totale delle espressioni (lm, pq) indipendenti le une dalle altre è dunque $N=\frac{n(n-1)}{2}\left\{1+n-2+\frac{(n-2)(n-3)}{6}\right\}$, ovvero

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12} \; (*). \tag{27}$$

Ricordiamo che nel ridurre φ alla forma $dy^2+\psi$ abbiamo fatto uso di n costanti arbitrarie, di cui una additiva alla y e che, quando la avremo tras-

(*) Ho riprodotto qui per essere completo un ragionamento già fatto da Christoffel e Lipschitz nelle citate Memorie.

formata nella $\sum_1^n{}_r dy_r^2$, ne avremo usate $\frac{n(n+1)}{2}$, di cui n additive. Esse rappresentano evidentemente la arbitrarietà, che abbiamo nella scelta del sistema di assi ortogonali $y_1, y_2, \ldots y_n$ nello spazio piano ad n dimensioni, di cui $y_1, y_2, \ldots y_n$ possono riguardarsi come le coordinate cartesiane ortogonali, mentre $x_1, x_2, \ldots x_n$ rappresentano un altro sistema di coordinate qualunque.

§ 3.

Forme di 1ª classe.

Nel caso di $h>0$ a è il quadrato della matrice

$$\left|\begin{matrix} \frac{d1}{d1}, & \frac{d2}{d1}, \ldots & \frac{d(n+h)}{d1} \\ \frac{d1}{d2}, & \frac{d2}{d2}, \ldots & \frac{d(n+h)}{d2} \\ \frac{d1}{dn}, & \frac{d2}{dn}, \ldots & \frac{d(n+h)}{dn} \end{matrix}\right| \qquad (\alpha)$$

cioè, indicando con $e_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ il determinante, che da essa si ottiene trascurandone le verticali t_1^{sima}, $t_2^{sima}, \ldots t_h^{sima}$ e indicando con $\sum_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ una sommatoria estesa a tutte le combinazioni della classe h degli indici $1, 2, \ldots n+h$, si ha

$$a = \sum{}_{t_1 t_2 \ldots t_h} e^2_{t_1 t_2 \ldots t_h}. \qquad (1)$$

Indicando poi con $\overset{(r,t)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ il complemento algebrico di $\frac{dy_t}{dx_r}$ in $e_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ si vede facilmente che è

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{2} \sum{}_{\tau t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(r,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h}. \qquad (2)$$

Per calcolare ora la somma

$$\sum_1^n{}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{2} \sum{}_{\tau t_1 \ldots t_h} \overset{(s,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \sum_1^n{}_r \overset{(r,\tau)}{e}_{t_1 t_2 \ldots t_h} \frac{dt}{dr}$$

si noti che, come una riflessione molto semplice fa vedere, se la colonna t^{sima} della matrice (α) occupa il posto $\alpha^{simo}_{tt_1 \ldots t_{h-1}}$ in quella, che se ne ottiene sopprimendone le colonne t_1^{sima}, t_2^{sima},... t_{h-1}^{sima} si ha

$$\sum_1^n {}_r \overset{(r,\tau)}{e_{t_1 t_2 \ldots t_h}} \frac{dt}{dr} = \begin{cases} 0 \text{ se } \tau, t_1, t_2, \ldots t_h \text{ son tutti differenti da } t \\ e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \text{ se è } \tau = t \\ (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} \text{ se è } t_h = t. \end{cases} \tag{3}$$

Noi abbiamo dunque

$$\sum_1^n {}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{2} \sum_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,t)}{e_{t_1 t_2 \ldots t_h}} + \frac{1}{2} \sum_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}} \overset{(s,\tau)}{e_{t t_1 \ldots t_{h-1}}}$$

e poichè, come è facile vedere, si ha

$$(-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{\tau t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} \overset{(s,\tau)}{e_{t t_1 \ldots t_{h-1}}} = \overset{(s,t)}{e_{\tau t_1 \ldots t_{h-1}}} \tag{3'}$$

$$\sum_1^n {}_r \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} = \sum_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \overset{(s,t)}{e_{t_1 t_2 \ldots t_h}}. \tag{4}$$

Da questa poi si deduce la

$$\sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{du}{ds} = \sum_{t_1 t_2 \ldots t_h} e_{t_1 t_2 \ldots t_h} \sum_1^n {}_s \overset{(s,t)}{e_{t_1 t_2 \ldots t_h}} \frac{du}{ds},$$

in cui dalla sommatoria del secondo membro si escluderanno le combinazioni, che contengono t. Essa, tenuto conto anche delle (1) e (3), dà quindi luogo alle

$$\sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{ds} = a - \sum_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} e^2_{t t_1 \ldots t_{h-1}}$$

$$\sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} \frac{dt}{dr} \frac{du}{ds} = \sum_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{u t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{t t_1 \ldots t_{h-1}} e_{u t_1 \ldots t_{h-1}},$$

di cui la seconda vale per t differente da u. Per esse le (6) del § 2 danno luogo alle

$$\left. \begin{aligned} (lm, pq) = \frac{1}{a} \sum_1^n {}_{tu} \sum_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}} (-1)^{\alpha_{t t_1 \cdots t_{h-1}} + \alpha_{u t_1 \cdots t_{h-1}} - 1} e_{t t_1 \ldots t_{h-1}} e_{u t_1 \ldots t_{h-1}} \\ \left\{ \frac{d^2 t}{dl\,dq} \frac{d^2 u}{dm\,dp} - \frac{d^2 t}{dl\,dp} \frac{d^2 u}{dm\,dq} \right\}, \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

dove dalla $\sum_{t_1 t_2 \ldots t_{h-1}}$ debbono essere escluse le combinazioni, che contengono t ed u.

Posto ora simbolicamente

$$\sqrt{a}(lq) = \begin{vmatrix} \frac{d^2 1}{dl\,dq} & \frac{d^2 2}{dl\,dq} \cdots & \frac{d^2(n+h)}{dl\,dq} \\ \frac{d1}{d1} & \frac{d2}{d1} \cdots & \frac{d(n+h)}{d1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d1}{dn} & \frac{d2}{dn} \cdots & \frac{d(n+h)}{dn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

alla (5) si può dare la forma simbolica

$$(lm, pq) = (lp)(mq) - (lq)(mp). \tag{I}$$

Nel caso di $h = 1$, cioè delle forme di prima classe, le (6) e (I) non sono simboliche, ma effettive e ci dicono che le espressioni (lm, pq) sono i minori di secondo ordine di un determinante simmetrico, che ha gli elementi (lp).

Posto

$$b_{l,p} = \sqrt{a}(lp) \tag{7}$$

si ha dalle (6)

$$b_{lp} = \sum_1^{n+1} {}_t (-1)^{t-1} e_t \frac{d^2 t}{dl\,dp}, \tag{8}$$

dalla quale si trae

$$\frac{d b_{lp}}{dm} - \frac{d b_{lm}}{dp} = \sum_1^n {}_r \sum {}_{tu} (-1)^{t-1} \overset{(r,u)}{e_t} \left\{ \frac{d^2 t}{dl\,dp} \frac{d^2 u}{dr\,dm} - \frac{d^2 t}{dl\,dm} \frac{d^2 u}{dr\,dp} \right\}. \tag{9}$$

Indicando con $s, t, u, v, \ldots w$ una permutazione qualunque degli indici $1, 2, \ldots n+1$, abbiamo il sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n {}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dt}{dr} = (-1)^{t+u-1} e_u \\ &\sum_1^n {}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{du}{dr} = e_t \\ &\sum_1^n {}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dv}{dr} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_1^n {}_r \overset{(r,u)}{e_t} \frac{dw}{dr} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

il quale risoluto rispetto alle $\overset{(r,u)}{e_t}$ dà

$$e_s \overset{(r,u)}{e_t} = (-1)^{t+u-1} e_u \overset{(r,t)}{e_s} + e_t \overset{(r,u)}{e_s}.$$

Queste, sebbene ottenute supponendo s differente da t ed u, valgono, come è facile verificare, per s qualunque e per mezzo loro alla equazione (9) può darsi la forma

$$e_s\left\{\frac{d\,b_{lp}}{dm} - \frac{d\,b_{lm}}{dp}\right\} = \sum_{rtu}\left\{(-1)^{t-1} e_t \overset{(r,u)}{e_s} - (-1)^{u-1} e_u \overset{(r,t)}{e_s}\right\}$$
$$\left\{\frac{d^2t}{dl\,dp}\frac{d^2u}{dr\,dm} - \frac{d^2t}{dl\,dm}\frac{d^2u}{dr\,dp}\right\}$$

e per le (8) l'altra

$$e_s\left\{\frac{d\,b_{lp}}{dm} - \frac{d\,b_{lm}}{dp}\right\} = \sum_{rt} \overset{(r,t)}{e_s}\left\{b_{lp}\frac{d^2t}{dr\,dm} - b_{lm}\frac{d^2t}{dr\,dp} + b_{rp}\frac{d^2t}{dl\,dm} - b_{rm}\frac{d^2t}{dl\,dp}\right\}.$$

Moltiplicando poi questa per e_s, sommando rispetto ad s e tenendo conto delle (1) e (4), che nel nostro caso prendono la forma

$$a = \sum_1^{n+1}{}_s e_s^2, \qquad \sum_1^n{}_k a_{rk}\frac{dt}{dk} = \sum_s e_s \overset{(r,t)}{e_s}, \tag{10^{bis}}$$

nonchè delle (4) del § 2, si ottiene

$$a\left\{\frac{d\,b_{lp}}{dm} - \frac{d\,b_{lm}}{dp}\right\} = \sum_{rs} a_{rs}\left\{b_{lp}\begin{bmatrix}rm\\s\end{bmatrix} - b_{lm}\begin{bmatrix}rp\\s\end{bmatrix} + b_{rp}\begin{bmatrix}lm\\s\end{bmatrix} - b_{rm}\begin{bmatrix}lp\\s\end{bmatrix}\right\}. \tag{11}$$

E in queste sostituendo per le b_{lp} i loro valori dati dalle (7) e notando che per le (11) del § 2 è

$$\frac{da}{dm} = 2\sum_1^n{}_{rs} a_{rs}\begin{bmatrix}rm\\s\end{bmatrix},$$

posto

$$(l,\ mp) = \frac{d(lp)}{dm} - \frac{d(lm)}{dp} + \sum^n_{rs} c_{rs}\left\{(rm)\begin{bmatrix}lp\\s\end{bmatrix} - (rp)\begin{bmatrix}lm\\s\end{bmatrix}\right\}, \tag{12}$$

si ottengono in fine le

$$(l,\ mp) = 0. \tag{II}$$

Supponiamo ora che le espressioni (lm, pq) siano i minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di ordine n di guisa che le equazioni (I) siano effettive e che gli elementi di questo determinante soddisfacciano alle equazioni (II). Risolviamo le n equazioni, che si ottengono dalle (4) del § 2, facendovi $h=1$, $r=i$, $s=g$, rispetto a tutte le derivate seconde contenutevi, eccettuata la $\frac{d^2 t}{di\,dg}$. Otterremo così le

$$e_t \frac{d^2 s}{di\,dg} = \sum_1^n {}_k \overset{(k\,s)}{e_t} \left\{ \begin{bmatrix} g\,i \\ k \end{bmatrix} - \frac{dt}{dk}\frac{d^2 t}{di\,dg} \right\},$$

in cui s deve essere differente da t. Moltiplicando per e_t e sommando rispetto a t da 1 ad $n+1$ con esclusione di s si trova

$$(a-e_s^2)\frac{d^2 s}{di\,dg} = \sum_1^n {}_k \sum{}_t e_t \overset{(k,s)}{e_t} \begin{bmatrix} g\,i \\ k \end{bmatrix} - \sum{}_{tk} e_t \overset{(k,s)}{e_t} \frac{dt}{dk}\frac{d^2 t}{di\,dg}$$

e per le (10), (6), la seconda delle (10^{bis}) e la (6) del § 2, posto

$$z_t = (-1)^{t-1}\frac{e_t}{\sqrt{a}} \tag{13}$$

$$\frac{d^2 t}{di\,dg} = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} g\,i \\ s \end{bmatrix} \frac{dt}{dr} + (g\,i) z_t. \tag{14}$$

Da queste si ha

$$\frac{d^3 t}{di\,dg\,dh} = \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} g\,i \\ s \end{bmatrix} \frac{d^2 t}{dr\,dh} + \sum_1^n {}_{rs} \frac{d}{dh}\left\{ c_{rs} \begin{bmatrix} g\,i \\ s \end{bmatrix} \right\} \frac{dt}{dr} + (g\,i)\frac{dz_t}{dh} + z_t \frac{d(g\,i)}{dh}$$

e poichè dalle (14) combinate colle (11) del § 2 e colle

$$\sum_1^n {}_q c_{pq} \frac{d\,a_{rq}}{dh} = -\sum_1^n {}_q a_{rq} \frac{d\,c_{pq}}{dh}, \tag{15}$$

che sono elementari, si traggono le

$$\frac{d^2 t}{dr\,dh} = -\sum_1^n {}_{pq} a_{rq} \frac{d\,c_{pq}}{dh}\frac{dt}{dp} - \sum_1^n {}_{pq} c_{pq} \begin{bmatrix} q\,h \\ r \end{bmatrix} \frac{dt}{dp} + (r\,h) z_t \tag{16}$$

dopo poche e facili riduzioni

$$\frac{d^3 t}{dg\,di\,dh} = \sum_1^n {}_{pq} c_{pq} \left\{ \frac{d}{dh} \begin{bmatrix} g\,i \\ q \end{bmatrix} - \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} \begin{bmatrix} q\,h \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g\,i \\ s \end{bmatrix} \right\} \frac{dt}{dp} + (g\,i)\frac{dz_t}{dh}$$

$$+ z_t \left\{ \frac{d(g\,i)}{dh} + \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} (r\,h) \begin{bmatrix} g\,i \\ s \end{bmatrix} \right\}.$$

Sottraendo poi da questa quella, che se ne ottiene scambiando i con h e ponendo mente alle (4) del § 1, alle (6) del § 2 ed alle (12) e (II) di questo

$$(gi)\left\{\frac{dz_t}{dh}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qh)\frac{dt}{dp}\right\}=(gh)\left\{\frac{dz_t}{di}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qi)\frac{dt}{dp}\right\}.$$

Se, come supporremo, la forma φ non è di classe o, per quanto si dimostrò nel § 2, nè gli elementi, nè i minori di 2° ordine del determinante Δ possono essere tutti nulli e le precedenti equazioni non possono quindi essere tutte verificate senza che si abbia

$$\frac{dz_t}{dh}+\sum_1^n{}_{pq}c_{pq}(qh)\frac{dt}{dp}=0 \qquad (h=1,\ 2,\dots\ n). \tag{17}$$

Posto

$$\Delta=\pm(11)(22)\cdots(nn) \tag{18}$$

ed indicato con $[rs]$ il complemento algebrico di (rs) in Δ si ha dalla (17)

$$\sum{}_h[rh]\frac{dz_t}{dh}+\Delta\sum{}_p c_{pr}\frac{dt}{dp}=0. \tag{19}$$

Se supponiamo dapprima

$$\Delta=0, \tag{α'}$$

queste prendono la forma

$$R(z)=\sum_1^n{}_h[rh]\frac{dz}{dh}=0, \qquad (r=1,\ 2,\dots\ n) \tag{β}$$

delle quali $n-1$ soltanto sono indipendenti. Da esse si ha

$$R\{S(z)\}-S\{R(z)\}=\sum_1^n{}_{hk}\left\{[rh]\frac{d[sk]}{dh}-[sh]\frac{d[rk]}{dh}\right\}\frac{dz}{dk}. \tag{γ}$$

Ora è

$$\frac{d[sk]}{dh}=\sum{}_{tu}\frac{d^2\Delta}{d(sk)d(tu)}\frac{d(tu)}{dh},$$

dove (sk) deve essere considerato distinto da (ks) e la sommatoria estesa a tutti i valori di t ed u da 1 fino ad n, eccettuati rispettivamente s e k, e dalle (II) avendosi

$$\frac{d(tu)}{dh}=\frac{d(th)}{du}+\sum_1^n{}_{vw}c_{vw}\left\{(vu)\begin{bmatrix}th\\w\end{bmatrix}-(vh)\begin{bmatrix}tu\\w\end{bmatrix}\right\}$$

e tenendo conto anche della (α')

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d[sk]}{dh} = \sum_1^n{}_{tu} \frac{d^2\Delta}{d(sk)d(tu)} \left\{ \sum_1^n{}_h [rh] \frac{d(th)}{du} + \sum_1^n{}_{vw} c_{vw}(vu) \sum{}_h [rh] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix} \right\}.$$

E poichè per la (α') si ha anche

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d(th)}{du} = -\sum{}_h (th) \frac{d[rh]}{du}$$

ed è

$$\sum{}_t \frac{d^2\Delta}{d(sk)\,d(tu)}(th) = \begin{cases} 0 \text{ per } h \text{ differente da } u \text{ e } k \\ [sk] \text{ per } h = u \\ -[su] \text{ per } h = k \end{cases}$$

$$\sum_1^n{}_h [rh] \frac{d[sk]}{dh} = \sum_1^n{}_h [sh] \frac{d[rk]}{dh} - [sk] \left\{ \sum_1^n{}_h \frac{d[rh]}{dh} - \sum_1^n{}_{twh} c_{tw} [rh] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix} \right\}$$
$$- \sum_1^n{}_{twh} c_{sw} [rh][tk] \begin{bmatrix} th \\ w \end{bmatrix}$$

dalla quale e dalla (γ) si deduce che il sistema di equazioni (β) è completo. Esso ammette dunque un integrale z e poichè se ne trae

$$(ih) = M_i \frac{dz}{dh},$$

essendo M_i un fattore indeterminato, e da questa e dalle (I)

$$(lm, pq) = 0$$

e quindi (§ 1) che la forma φ è di classe o, concludiamo che, se questa è di prima classe, il determinante Δ non può mai annullarsi.

Sia ora

$$\Delta \gtrless 0, \tag{20}$$

si ponga

$$c'_{rh} = \frac{[rh]}{\Delta}, \tag{21}$$

e si trarrà dalle (19)

$$\frac{dt}{dg} = -\sum_1^n{}_{rh} a_{rg} c'_{rh} \frac{dz_t}{dh}. \tag{22}$$

Da questa si ha

$$\frac{d^2 t}{di\, dg} = -\sum_1^n{}_{hr}\left\{a_{gr} c'_{rh} \frac{d^2 z_t}{di\, dh} + c'_{rh} \frac{d a_{gr}}{di} \frac{d z_t}{dh} + a_{gr} \frac{d c'_{rh}}{di} \frac{d z_t}{dh}\right\}, \tag{23}$$

per mezzo della quale e della (19) dalla (14) si passa alla

$$\sum_1^n{}_{hr}\, a_{gr}\, c'_{rh} \frac{d^2 z_t}{dh\, di} + \sum_1^n{}_{hr}\left\{c'_{rh}\begin{bmatrix} ri \\ g \end{bmatrix} + a_{gr}\frac{d c'_{rh}}{di}\right\}\frac{d z_t}{dh} + (gi) z_t = 0$$

e da questa moltiplicata per c_{gs} e sommata rispetto all'indice g e poi per (sk) e sommata rispetto all'indice s

$$\frac{d^2 z_t}{di\, dk} = \sum_1^n{}_{rs}\, c'_{rs}\left\{\frac{d(sk)}{di} - \sum_1^n{}_{pq}(pk) c_{pq}\begin{bmatrix} si \\ q \end{bmatrix}\right\}\frac{d z_t}{dr} - z_t \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}(ir)(ks). \tag{24}$$

Applichiamo per la integrazione di questo sistema di equazioni il metodo indicato nella mia Nota già citata, mentre dalla via, che terremo per tale applicazione, risulterà di per sè che il sistema stesso è completo. Ciò, per quanto è stato dimostrato in quella Nota, equivale ad essere jacobiano il sistema di n equazioni lineari omogenee con $2n+1$ variabili indipendenti

$$\frac{df}{dx_k} + \sum_1^n{}_i A_{ik}\frac{df}{dp_i} + p_k\frac{df}{dz} = 0, \tag{δ}$$

dove è

$$A_{ik} = \sum_1^n{}_{rs}\, c'_{rs}\left\{\frac{d(sk)}{di} - \sum_1^n{}_{pq}(pk) c_{pq}\begin{bmatrix} si \\ q \end{bmatrix}\right\} p_r - z\sum{}_{rs}\, c_{rs}(ir)(ks). \tag{25}$$

Trasformiamo il sistema stesso ponendo in luogo delle variabili p le ψ legate ad esse dalle relazioni

$$\psi_s = \sum_1^n{}_r\, c'_{rs}\, p_r; \qquad p_r = \sum_1^n{}_q (rq)\psi_q. \tag{26}$$

Indicando per un momento con $\left(\frac{df}{dx_k}\right)$ la derivata di f rapporto ad x_k presa dopo la sostituzione si trova

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx_k} &= \left(\frac{df}{dx_k}\right) + \sum_1^n{}_{qrs}(rq)\frac{d c'_{rs}}{dx_k}\psi_q\frac{df}{d\psi_s} \\ \frac{df}{dp_i} &= \sum_1^n{}_u\, c'_{iu}\frac{df}{d\psi_u} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

e da questa e dalle (25) e (II)

$$\sum_1^n{}_i A_{ik} \frac{df}{dp_i} = -\sum_1^n{}_{qrs} \left\{ (rq) \frac{dc'_{rs}}{dx_k} + c_{rs} \begin{bmatrix} qk \\ r \end{bmatrix} \right\} \psi_q \frac{df}{d\psi_s} - z \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} (kr) \frac{df}{d\psi_s}$$

Per queste e per le (26) e (27) le (δ) prendono la forma

$$\frac{df}{dx_k} + \sum_1^n{}_s B_{sk} \frac{df}{d\psi_s} + \sum_1^n{}_u (ku) \psi_u \cdot \frac{df}{dz} = 0, \tag{δ_1}$$

essendo

$$B_{sk} = -\sum_1^n{}_r c_{rs} \left\{ z(kr) + \sum_1^n{}_u \begin{bmatrix} uk \\ r \end{bmatrix} \psi_u \right\}. \tag{28}$$

È facile vedere che il sistema di equazioni (δ_1) ammette per integrale il primo membro della equazione

$$z^2 + \sum_1^n{}_{rs} a_{rs} \psi_r \psi_s = 1. \tag{29}$$

Sostituendolo come variabile indipendente a z e ponendolo poi eguale all'unità, il sistema (δ_1) prende la forma

$$K(f) = \frac{df}{dx_k} + \sum_1^n{}_s B_{sk} \frac{df}{d\psi_s} = 0, \tag{ε}$$

dove le B_{sk} sono date dalle (28), in cui per z deve intendersi posto il valore dato dalla (29).

Dalla (ε) si ha

$$H\{K(f)\} - K\{H(f)\} = \sum_1^n{}_s (C_{s,hk} - C_{s,kh}) \frac{df}{d\psi_s},$$

essendo

$$C_{s,hk} = \frac{dB_{sk}}{dx_h} + \sum_1^n{}_r B_{rh} \frac{dB_{sk}}{d\psi_r},$$

ovvero, come si ha immediatamente dalle (28), tenendo conto della (29)

$$C_{s,hk} = z \left(\sum_1^n{}_t c_{st} \left\{ -\frac{d(kt)}{dh} + \sum_1^n{}_{vw} c_{vw} (hv) \begin{bmatrix} kw \\ t \end{bmatrix} \right\} - \sum_1^n{}_t (kt) \frac{dc_{st}}{dh} \right)$$

$$- \sum_1^n{}_{tu} c_{ts} \psi_u \left\{ \frac{d}{dh} \begin{bmatrix} uk \\ t \end{bmatrix} + (hu)(kt) - \sum_1^n{}_{vw} c_{vw} \begin{bmatrix} uh \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hw \\ t \end{bmatrix} + \sum_1^n{}_t \begin{bmatrix} uk \\ t \end{bmatrix} \frac{dc_{ts}}{dh} \right\}$$

e poichè per la (11) del § 2 è

$$\sum_1^n {}_w c_{vw}\begin{bmatrix}kw\\t\end{bmatrix}=-\sum_1^n {}_w c_{vw}\begin{bmatrix}kt\\w\end{bmatrix}+\sum_1^n {}_w c_{vw}\frac{d a_{tw}}{dk}=-\sum_1^n {}_w c_{vw}\begin{bmatrix}kt\\w\end{bmatrix}-\sum_1^n {}_w a_{tw}\frac{d c_{vw}}{dk}$$

$$\sum_1^n {}_{tw} c_{st} c_{vw}\begin{bmatrix}kw\\t\end{bmatrix}=-\sum_1^n {}_{tw} c_{st} c_{vw}\begin{bmatrix}kt\\w\end{bmatrix}-\frac{d c_{v,s}}{d x_k},$$

se si pon mente alle (5) del § 2 ed alle (12) di questo si trova

$$C_{s,hk}-C_{s,kh}=-z\sum_1^n {}_t c_{st}(t,\ hk)+\sum_1^n {}_{us} c_{st}\psi_u\{(hu)(kt)-(ku)(ht)+(ut,\ kh)\}.$$

E poichè supponiamo soddisfatte le equazioni (I) e (II), da questa si deduce che il sistema di equazioni (ε) è jacobiano. Esso ammette quindi n integrali, che eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie, ci daranno le ψ espresse per queste costanti e per le x. La (29) ci darà z per le stesse quantità, e le p_h date dalle (26), come è del resto facile il verificare, le derivate di z. Sostituendo questi valori delle p_h alle $\frac{d z_t}{dh}$ nei secondi membri delle (22), questi divengono le derivate di una stessa funzione y, per la quale si ha quindi

$$\frac{dy}{dx_g}=-\sum_1^n {}_{hrs} a_{rg} c'_{rh}(sh)\psi_s=-\sum_1^n {}_r a_{rg}\psi_r, \tag{30}$$

e di cui è facile riconoscere che soddisfa alle equazioni (14), in cui sia posto $z_t=z$, così che avendosi anche dalla (30)

$$\sum_1^n {}_r c_{rs}\frac{dy}{dx_r}=-\psi_s \tag{31}$$

si ha

$$\frac{d^2 y}{dx_i\, dx_g}=-\sum_1^n {}_r\begin{bmatrix}gi\\r\end{bmatrix}\psi_r+(gi)z. \tag{32}$$

Prendiamo anche qui a considerare la forma

$$\psi=\varphi-dy^2=\sum_1^n {}_{rs}\left(a_{rs}-\frac{dy}{dx_r}\frac{dy}{dx_s}\right)dx_r\, dx_s,$$

per la quale manterremo le stesse notazioni che per la φ, aggiunti degli apici. Avremo così

$$a'_{rs}=a_{rs}-\frac{dy}{dx_r}\frac{dy}{dx_s}, \qquad a'=a-\sum_1^n {}_{rs}\alpha_{rs}\frac{dy}{dx_r}\frac{dy}{dx_s}$$

e dalle (29), (30) e (31) avendosi

$$\sum_1^n{}_{rs} c_{rs} \frac{dy}{dx_r}\frac{dy}{dx_s} = \sum_1^n{}_{rs} a_{rs}\psi_r\psi_s = 1 - z^2 \tag{33}$$

$$a' = a z^2, \qquad a'_{rs} = a(c_{rs}z^2 + \psi_r\psi_s)$$

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} - \frac{dy}{dx_i}\frac{d^2 y}{dx_r\, dx_s}$$

$$\frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}'}{dq} = \frac{d\begin{bmatrix} lp \\ m \end{bmatrix}}{dq} - \frac{d^2 y}{dx_m\, dx_q}\frac{d^2 y}{dx_l\, dx_p} - \frac{dy}{dx_m}\frac{d^3 y}{dx_l\, dx_p\, dx_q} \tag{34}$$

e, facendo uso delle (29), (31) e (32),

$$\frac{1}{a'}\sum_1^n{}_r \alpha'_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}' = \sum_1^n{}_r c_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix} + \frac{(lq)}{z}\psi_s$$

$$\frac{1}{a'}\sum_1^n{}_{rs} \alpha'_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix}' = \sum_1^n{}_{rs} c_{rs}\begin{bmatrix} lq \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mp \\ s \end{bmatrix} - \frac{d^2 y}{dx_m\, dx_p}\frac{d^2 y}{dx_l\, dx_q} + (lq)(mp).$$

Per mezzo poi di questa, delle (34) e delle (5) del § 2 si trova

$$(lm,\, pq)' = (lm,\, pq) + (lq)(mp) - (lp)(mq)$$

e per le (I)

$$(lm,\, pq)' = 0.$$

Da queste pel teorema del § 2 si deduce che la forma ψ è di classe *o* e quindi la forma φ è di 1ª classe. Possiamo dunque concludere:

Le condizioni (I) *e* (II) *sono necessarie e sufficienti perchè una forma* φ, *che non è di classe o, sia di prima classe.*

Ed anche:

Per ogni forma di 1ª classe il determinante simmetrico, che ha gli elementi (lp) *definiti dalle equazioni* (I) *è differente da o.*

Poichè (§ 2) il numero delle espressioni $(lm,\, pq)$ indipendenti fra di loro è $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ e quello delle (lp) è $\frac{n(n+1)}{2}$

$$N_1 = \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{6} - 1\right\} \tag{35}$$

sarà il numero delle condizioni (I).

Dalle (12) si deduce facilmente

$$(l,\ mm)=0 \qquad (l,\ mp)+(l,\ pm)=0$$

$$(l,\ mp)+(m,\ pl)+(p,\ lm)=0,$$

e si vede che le espressioni $(l,\ mp)$ si possono distinguere in due categorie secondo che esse contengono o no due indici eguali. Quelle della prima categoria sono evidentemente in numero di $n(n-1)$ e quelle della seconda in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, di cui però $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ soltanto indipendenti fra loro. Per conseguenza il numero delle condizioni (II) distinte fra loro è

$$N_2=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \tag{36}$$

Nel caso di $n=2$ è $N_1=-2$, $N_2=2$ cioè non esistono condizioni (I) ed anzi due delle quantità (lp) sono indeterminate e soltanto debbono soddisfare a due equazioni simultanee a derivate parziali di 1° ordine, cioè alle (II), nelle quali, ad una di quelle quantità, sia sostituita la sua espressione in funzione delle altre due tratta dalla equazione (I).

Nel caso di $n=3$ è $N_1=0$, $N_2=8$, cioè le quantità (lp) sono completamente determinate dalle equazioni (I) e debbono soddisfare ad otto relazioni differenziali di 1° ordine.

Per $n>3$ è sempre $N_1>0$.

Se, come si suole, si da ai risultati, che abbiamo ottenuti, una interpretazione geometrica, essi appariscono di qualche importanza nella Teoria generale degli spazî. Se infatti conveniamo di chiamare *superficie* gli spazî ad n dimensioni, che senza alterazione del loro elemento lineare possono essere riportati in uno spazio piano ad $n+1$ dimensioni, il metodo da noi seguito per dimostrare il teorema di questo paragrafo ci conduce alla effettiva determinazione della equazione della superficie in coordinate cartesiane ortogonali, datone l'elemento lineare φ. Una tale equazione contiene, come è facile vedere, $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie, di cui $n+1$ additive alle coordinate y_1, $y_2, \ldots y_{n+1}$, costanti, che sono necessarie e sufficienti a fissare la posizione della superficie nello spazio, e soltanto nel caso di $n=2$ la equazione stessa contiene di più tutta la arbitrarietà, che proviene dalla integrazione del sistema di due equazioni a derivate parziali di 2° ordine con due funzioni incognite, di cui abbiamo parlato. Di qui si conclude che, la proprietà delle superficie ordinarie a due dimensioni di potere essere deformate, senza alterazione del loro elemento lineare, non si estende alle superficie con un numero maggiore di dimensioni, le quali possono soltanto mediante traslazioni e rotazioni, quasi fossero rigide, mutar posto nello spazio. A questa stessa conclusione è già pervenuto il sig. BEEZ (*) fondandosi su considerazioni puramente geometriche, le quali però mi sembrano non avere la stessa forza di dimostrazione di quelle, su cui ci siamo qui fondati.

Si abbia ora una forma di prima classe

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

e alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ se ne sostituiscano delle nuove $u_1, u_2, \ldots u_n$. Essa allora si trasformerà nella

$$\varphi_1 = \sum_1^n {}_{pq} b_{pq}\, du_p\, du_q$$

e, se si indica con U_x il determinante funzionale delle u rispetto alle x, con b il discriminante di φ_1 si ha

$$a_{rs} = \sum_1^n {}_{pq} b_{pq} \frac{du_p}{dx_r} \frac{du_q}{dx_s}, \qquad a = U_x^2 b.$$

Dalle (6) si deduce poi facilmente che, indicando con $(pq)'$ la espressione analoga alla (pq), introdotte le nuove variabili, si ha

$$(rs) = \sum_1^n {}_{pq} (pq)' \frac{du_p}{dx_r} \frac{du_q}{dx_s}.$$

Se quindi insieme alla φ si considera la forma

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs} (rs)\, dx_r\, dx_s,$$

questa è covariante di φ e costruendo il sistema di n invarianti algebrici assoluti delle due forme φ e ψ si avranno per $n > 2$ altrettante espressioni dipendenti dai coefficienti di φ e dalle loro derivate prime e seconde dotate della proprietà di assoluta invarianza.

(*) *Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 21, pag. 374 e seguenti.

Per riconoscere il significato geometrico di questi invarianti assoluti procediamo col metodo tenuto dal sig. Beez nella Memoria citata (*). Indicando con σ la sŭperficie, che ha per elemento lineare φ, ed i cui punti sono determinati dalle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, con $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ le coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto P, con $y'_1, y'_2, \ldots y'_{n+1}$ quelle di un punto P' della normale a σ in P, con ρ la distanza PP', si ha

$$y'_t - y_t = \frac{(-1)^t e_t}{\sqrt{a}} \rho, \qquad (t = 1, 2, \ldots n+1) \tag{37}$$

poichè le quantità $\frac{(-1)^t e_t}{\sqrt{a}}$ rappresentano i coseni di direzione di quella normale.

Se dal punto P lungo una linea di curvatura di σ passiamo ad un punto vicinissimo Q e prendiamo per P' il punto d'incontro delle due normali a σ in P e Q noi dobbiamo differenziare le (37) considerandovi le y_t come funzioni delle x_r e queste di una sola variabile indipendente e le y'_t e ρ come costanti. Noi abbiamo così

$$\sum_1^n{}_r \left(\frac{d y_t}{d x_r} + (-1)^t \rho \frac{d}{d x_r} \frac{e_t}{\sqrt{a}} \right) d x_r = 0$$

e moltiplicando per $\frac{d y_t}{d x_s}$, sommando rispetto a t, tenendo conto delle (3) del § 2 e della

$$\sum_1^{n+1}{}_t (-1^t e_t \frac{d y_t}{d x_r} = 0,$$

che è evidente, e da cui si ha per le (7) ed (8)

$$\sum_1^{n+1}{}_t (-1)^t \frac{d e_t}{d x_s} \frac{d y_t}{d x_r} = \sum_1^{n+1}{}_t (-1)^{t-1} e_t \frac{d^2 y_t}{d x_r d x_s} = \sqrt{a}\,(r s)$$

$$\sum_1^n{}_r \left\{ \frac{a_{rs}}{\rho} + (r s) \right\} d x_r = 0. \qquad (s = 1, 2, \ldots n).$$

Queste equazioni sono quelle delle linee di curvatura di σ e ci dicono che i valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ (che sono in numero di n e a cui corrispondono altrettante linee di curvatura) sono le radici della

(*) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 20, Seite 427.

equazione di grado n in $\frac{1}{\rho}$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\rho}+(11), & \frac{a_{12}}{\rho}+(12),\ldots & \frac{a_{1n}}{\rho}+(1n) \\ \frac{a_{21}}{\rho}+(21), & \frac{a_{22}}{\rho}+(22),\ldots & \frac{a_{2n}}{\rho}+(2n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{a_{n1}}{\rho}+(n1), & \frac{a_{n2}}{\rho}+(n2),\ldots & \frac{a_{nn}}{\rho}+(nn) \end{vmatrix}=0.$$

Posta questa sotto la forma

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{1}{\rho}\right)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{\rho}+a_n=0,$$

i suoi coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n$, come si sa dalla Teoria delle forme, costituiscono un sistema di n invarianti assoluti indipendenti delle due forme φ e ψ e $(-1)^r a_r$ rappresenta la somma dei prodotti r ad r dei valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ. In particolare l'invariante assoluto

$$k=(-1)^n a_n=(-1)^n\frac{\Delta}{a}$$

rappresenta il prodotto di tutti i valori reciproci dei raggi di curvatura principali di σ e si riguarda quindi a ragione come la espressione generalizzata della curvatura di Gauss per le superficie di quante si vogliano dimensioni. In un altro suo lavoro (*) il sig. Beez ha dimostrato che anche nel caso di $n>2$, facendo di σ la rappresentazione di Gauss sopra una sfera ad n dimensioni di raggio eguale all'unità k rappresenta il rapporto dell'elemento della sfera di raggio 1 a quello corrispondente di σ. Infine si è qui dimostrato che analogamente a quanto si sapeva pel caso di $n=2$, l'annullarsi di k equivale ad essere la superficie σ piana.

Per $n>2$ le equazioni (I) ci danno tutti gli elementi di Δ espressi per i coefficienti di φ e per le loro derivate prime e seconde. Se si nota di più che secondo le (I) i minori di 2° ordine di Δ sono funzioni razionali di queste quan-

(*) *Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung.* Mathematische Annalen, 7^er Band, Seite 387.

tità, si riconosce subito che a_1, $a_2, \dots a_n$ sono alternativamente funzioni irrazionali e razionali delle quantità stesse.

Noi chiameremo la forma ψ, che ha per coefficienti le quantità (rs), *forma derivata di* φ, *ed invarianti differenziali di ordine* m della forma φ tutte le espressioni, che dipendendo soltanto dai coefficienti di φ e dalle loro derivate fino a quelle di ordine m^{simo} godono della proprietà di assoluta invarianza per ogni trasformazione di φ, e possiamo concludere che:

Ogni forma differenziale quadratica φ *di* 1^a *classe ad* n *variabili, per* $n > 2$, *ammette* n *invarianti differenziali di* 2^o *ordine, i quali si ottengono costruendo coi metodi noti il sistema di invarianti algebrici assoluti comuni a* φ *ed alla sua forma derivata. Essi presi con segno conveniente rappresentano le somme dei prodotti* r *ad* r $(r = 1, 2, \dots n)$ *dei valori reciproci dei raggi di curvatura principali della superficie, che ha* φ *per elemento lineare, e sono alternativamente irrazionali e razionali.*

Siccome nel caso di n dispari gli elementi reciproci di Δ sono esprimibili pei minori di 2° ordine dello stesso Δ, se invece che alle forme φ e ψ si ha ricorso alle loro controvarianti

$$\Phi = \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs} X_r X_s$$

$$\Psi = \sum_1^n {}_{rs}\, [rs]\, X_r X_s$$

si ottengono n invarianti differenziali di 2° ordine di φ tutti razionali e indipendenti fra loro. Noi possiamo dunque dire che:

Ogni forma differenziale quadratica φ *di* 1^a *classe con un numero* n *dispari di variabili indipendenti ammette* n *invarianti differenziali di* 2^o *ordine tutti razionali, i quali si ottengono costruendo il sistema di invarianti algebrici assoluti indipendenti comuni alle forme controvarianti di* φ *e della sua derivata.*

È questo il metodo tenuto dal Christoffel, (*) nel caso di $n = 3$, mentre nello stesso caso il Souvorof (**) giunse agli stessi risultati con un metodo diretto di eliminazione.

Nel caso di n dispari la espressione della curvatura di Gauss è irrazionale,

---

(*) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, § 12. (Borchardt's Journal, 70er Band, Seite 65.)

(**) *Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions.* (Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, vol. 4, pag. 180.)

ma è razionale la sua potenza $(n-1)^{\text{sima}}$, poichè si ha

$$k^{n-1} = \frac{\Delta^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{\Delta_1}{a^{n-1}},$$

con Δ_1 indicando il determinante reciproco di Δ.

Il caso di $n=2$ è un caso di eccezione pei teoremi sopra dimostrati, perchè in esso le equazioni (I) non bastano a determinare le quantità (lp) per le (lm, pq). In questo caso si ha un solo invariante differenziale di 2° ordine, che è

$$k = \frac{\Delta}{a} = \frac{(12,\ 12)}{a},$$

e di cui sarebbe facile verificare che coincide colla nota espressione della curvatura di Gauss.

Padova, febbraio 1884.

Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.

(*Memoria del prof.* G. Jung, *a Milano.*)

Le configurazioni investigate per la prima volta da S. Kantor (*) e poi generalizzate da Veronese agli spazi di n dimensioni (**) si presentano spontaneamente anche nella Statica, quando si studiino in tutta la generalità le condizioni d'equilibrio dei sistemi piani di forze, le condizioni d'equilibrio dei poligoni articolati, ecc. Gli è in questo studio che sia considerando direttamente le linee d'azione delle forze equilibrate e delle loro risultanti parziali sia applicando e generalizzando un elegante teorema di Cremona (***) io avevo a mia volta trovato quelle configurazioni fin da quando Schell (****) richiamava l'attenzione dei geometri sulla questione.

Ora, dopo che Reye in una breve Nota (*****) inserita nel tomo I degli *Acta Mathematica* ha messo in maggior rilievo l'importanza del problema delle configurazioni, considerato in sè stesso e nei suoi rapporti con varî rami di Analisi e di Geometria, stimo non inutile di raccogliere e pubblicare i risultati

(*) *Wiener Sitzungsbericht,* B. 80, 2ᵉ Abth., (pag. 715-723).

(**) *Mathem. Annalen,* t. 19, (pag. 161-234).

(***) Cfr. *Le figure reciproche nella Statica Grafica,* 3ª ediz. Milano, Hoepli, 1879.

(****) v. *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* Il sig. Schell, stabilita, col metodo delle sezioni, la configurazione d'equilibrio del *quadrangolo articolato* (1ª ediz., 1870, pagina 632) ha aggiunto nella 2ª edizione (1880, t. II, pag, 74) alcune proprietà geometriche della configurazione stessa, concludendo: « Auf den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit Sätzen der neueren synthetischen Geometrie soll hier ganz besonders aufmerksam gemacht werden. » Nella presente Memoria dò, fra altro, la *configurazione d'equilibrio di un poligono articolato di quantisivogliano vertici* (§ 2), come caso particolare della *configurazione di un sistema piano di forze equilibrate* (§ 1, n.ⁱ 6-9).

(*****) *Das Problem der Configurationen.*

del mio studio, come modesto contributo alle ricerche sull'interessante argomento; tanto più che il problema delle configurazioni, a quanto so, non è stato ancora esaminato dal punto di vista della Statica. Sopprimo naturalmente la parte che nel frattempo è stata pubblicata da altri Autori (e che si riferisce a proprietà puramente geometriche), rimandando per questa alle belle Memorie dei signori Veronese ed S. Kantor.

PARTE I.

§ 1.

Cfz. F_m di m forze equilibrate nel piano. Cfz. $F_{m,n}$ di m forze equilibrate connesse da n poligoni funicolari. Loro reciproche.

1. Col simbolo Cfz. $(q, p)^{\nu}_{\mu}$ dinoteremo una configurazione piana contenente μ punti (*fondamentali*) e ν rette (*fondamentali*) disposte in modo che per ogni punto passino p rette della Cfz. e su ogni retta si trovino q punti della medesima.

Quando $p = q$ epperò $\mu = \nu$ la Cfz. è *duale* e la si può indicare più semplicemente col simbolo μ_p adottato da Reye.

Due Cfz.i $(q, p)^{\nu}_{\mu}$, $(q', p')^{\nu'}_{\mu'}$ sono *della stessa specie* quando $p = p'$, $q = q'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$; le due Cfz.i sono *identiche* quando hanno le stesse rette e gli stessi punti fondamentali.

2. Date in un piano m forze in equilibrio e fissatone l'ordine (*ordine ciclico*) intenderemo rispettivamente per *risultanti cicliche binarie, ternarie,... i-narie* le risultanti di 2, 3,... i forze prese *consecutivamente* fra le date, considerate in quell'ordine.

Le linee d'azione di *tutte* le risultanti cicliche sono in generale $\frac{m(m-3)}{2}$ rette distinte.

3. Due poligoni funicolari connettenti le stesse forze equilibrate nel dato ordine ciclico individuano una retta (*asse*) sulla quale s'incontrano i rispettivi lati omologhi (teorema di Culmann).

Tre poligoni funicolari determinano in tal modo altrettanti assi, i quali o sono tre rette distinte e *concorrenti in un punto* (n.° 5) o coincidono in una sola retta. Nel primo caso diremo che i tre poligoni sono ad assi differenti; e per brevità chiameremo *differenti* n poligoni funicolari connettenti nello stesso ordine ciclico un medesimo sistema di forze, quando siano ad assi differenti tutte le terne di poligoni formate con quegli n, ed inoltre per nessun punto passino più di tre assi.

4. Se in un piano m forze sono in equilibrio sotto la condizione che, per $m>3$, più di due forze non concorrano mai in uno stesso punto (*); e si connettono in un ordine prestabilito con n poligoni funicolari differenti, si ottiene una configurazione

$$F_{m,n} \equiv \text{Cfz. } (q, p)_{\mu}^{\nu}$$

nella quale

$$\mu = \binom{m+n}{3}, \qquad \nu = \binom{m+n}{2}$$

$$p = 3, \qquad q = m+n-2.$$

Questa $F_{m,n}$, dell'ordine $m+n$, si dirà la configurazione corrispondente ad m forze equilibrate e ad n poligoni funicolari.

Oltre ai lati di tutti i poligoni funicolari ed agli assi da questi determinati, le rette della Cfz. sono le linee d'azione delle m forze e delle loro risultanti cicliche di tutti gli ordini.

I punti della Cfz. sono:

gli $\frac{mn(m-1)}{2}$ vertici e punti diagonali degli n poligoni funicolari;

le $\frac{mn(n-1)}{2}$ intersezioni di lati omologhi di questi poligoni, distribuite sugli assi che dai medesimi sono determinati;

gli $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ punti comuni alle terne degli assi anzidetti;

gli $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ punti fondamentali della Cfz. F_m, corrispondente alle forze, e definiti al n.° 6.

Infatti, generalizzando un teorema di CREMONA (l. c., § 22), le m linee d'a-

(*) Ove non si dica espressamente il contrario, i sistemi piani di forze considerati nel corso di questa Memoria s'intenderanno sempre vincolati da questa condizione.

zione delle forze equilibrate si possono riguardare come projezioni degli spigoli laterali di un m-edro semplice Π; quelle delle loro risultanti cicliche come projezioni degli spigoli diagonali di Π; i lati, i vertici e i punti diagonali dei poligoni funicolari come projezioni dei lati, vertici e punti diagonali dei poligoni determinati sulle facce di Π da n piani seganti $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ (tre qualunque dei quali supporremo non passanti per una retta e non più di tre concorrenti in un punto); finalmente gli assi degli n poligoni funicolari come projezioni delle rette comuni ai piani σ_i presi due a due. Le facce dell'm-edro e i piani σ_i sono $m+n$ piani i quali determinano nello spazio $\binom{m+n}{3}$ punti ed $\binom{m+n}{2}$ rette: per ogni punto passano 3 rette, comuni ai tre piani che lo determinano; ogni retta, come individuata da due piani, contiene $m+n-2$ punti, intersezioni sue coi piani rimanenti; onde ecc.

5. Se nella Cfz. corrispondente ad m forze equilibrate e ad n poligoni funicolari si sopprimono, oltre i lati di questi, tutte le linee d'azione delle forze e delle loro risultanti cicliche, si ha il teorema: Gli assi di n poligoni funicolari *differenti* che connettono un sistema piano di forze equilibrate sono, indipendentemente dal numero e dalla posizione delle medesime, le rette di una Cfz. $(n-2, 3)^{\binom{n}{2}}_{\binom{n}{3}}$ dell'ordine n. Infatti quegli assi son projezioni degli spigoli dell'n-edro completo avente per facce i piani seganti σ_i.

Se gli n poligoni non sono *differenti*, nel senso indicato al n.° 3, i loro assi possono ancora riguardarsi come projezioni delle rette comuni ad n piani σ_i; ma questi piani non formano più un n-edro completo, cosicchè gli assi possono anche concorrere in un punto, o coincidere in una retta, e via dicendo. Nel caso di $n=3$ i piani σ_i appartengono ad un fascio o individuano un triedro; onde la proposizione relativa a tre poligoni funicolari enunciata al n.° 3.

6. Per $n=0$ il teorema del n.° 4 somministra il seguente:

Dato un sistema piano di m forze in equilibrio (tre qualunque delle quali non concorrenti in un punto, quando $m>3$) le loro linee d'azione e quelle delle loro risultanti cicliche sono le rette di una configurazione F_m, contenente $\binom{m}{3}$ punti ed $\binom{m}{2}$ rette, in ogni punto della quale concorrono 3 rette e su ogni retta della quale si trovano $m-2$ punti fondamentali.

Questa

$$F_m \equiv \text{Cfz.}\left(m-2,\ 3\right)_{\binom{m}{3}}^{\binom{m}{2}}$$

dell'ordine m si dirà la configurazione corrispondente alle m forze equilibrate.

In generale, se il numero i è primo con m, le m risultanti i-narie formano un unico sistema equilibrato di forze. In questo caso le loro linee d'azione, prese nell'ordine ciclico, sono i lati di un m-gono semplice (poligono delle risultanti i-narie) i cui vertici appartengono alla Cfz. F_m.

Ma se i è un divisore di m, cosicchè $i \cdot j = m$, le risultanti i-narie costituiscono i gruppi di j forze equilibrate ciascuno. Onde, se $j > 3$, le loro linee d'azione, prese ciclicamente in ciascun gruppo, formano in generale i j-goni semplici i cui m vertici appartengono alla Cfz., epperò il poligono delle risultanti i-narie si spezza in più poligoni; se $j = 3$ esse formano $\frac{m}{3}$ terne di rette, concorrenti in altrettanti punti della Cfz.; se $j = 2$ esse formano un $\frac{m}{2}$—latero i cui vertici *non* appartengono alle Cfz. In questi due ultimi casi si può dire che il poligono delle risultanti i-narie degenera in $\frac{m}{3}$ punti fondamentali (centri di fasci di raggi) o rispettivamente in $\frac{m}{2}$ rette fondamentali della Cfz.

D'altra parte, secondo che m è pari o dispari, i assume i valori 2, 3, 4,... $\frac{m}{2}$, o rispettivamente i valori 2, 3, 4,... $\frac{m-1}{2}$. Dunque in generale:

Oltre ai vertici del poligono-forze (*) e dei poligoni di tutte le risultanti cicliche (inclusi quelli che eventualmente riuscissero spezzati o degeneri) la Cfz. F_m corrispondente ad m forze equilibrate contiene altri φ punti, intersezioni di risultanti i-narie con risultanti cicliche d'ordine differente (incluso l'ordine $i=1$

(*) Per *poligono-forze* intendiamo qui l'm-gono semplice avente per lati le linee d'azione delle m forze prese nell'ordine fissato. Non dovendoci occupare in questo scritto delle intensità delle forze, non può nascere ambiguità fra il poligono-forze ora definito e il solito poligono delle forze, i cui lati misurano le intensità delle medesime. Del resto il nostro poligono-forze potrebbe anche riguardarsi come il poligono di risultanti i-narie corrispondente al caso $i = 1$ e chiamarsi perciò *poligono primario.*

che corrisponde alle forze date); essendo

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m(m-4)(m-2)}{6} \quad \text{se } m \text{ pari} \\ \varphi &= \frac{m(m-5)(m-1)}{6} \quad \text{» } m \text{ dispari}\end{aligned}\right\} \text{ ed } m \text{ non} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m(m-4)(m-2)}{6} + \frac{2m}{3} \quad \text{se } m \text{ pari} \\ \varphi &= \frac{m(m-5)(m-1)}{6} + \frac{2m}{3} \quad \text{» } m \text{ dispari} \\ &= \frac{m(m-3)^2}{6}\end{aligned}\right\} \text{ ed } m \equiv 0 \pmod{3}.$$

7. La Cfz. F_m, corrispondente a un dato sistema di forze in equilibrio, può riguardarsi in altri $\left\{\frac{(m-1)!}{2} - 1\right\}$ modi diversi come Cfz. di m forze equilibrate; in altri termini esistono, compreso il dato, $\frac{(m-1)!}{2}$ differenti (*) sistemi equilibrati di m forze, a ciascun dei quali corrisponde una Cfz. identica alla F_m (n.° 1).

Infatti un m-edro completo contiene $\frac{(m-1)!}{2}$ m-edri semplici; se le linee d'azione delle m forze date sono projezioni degli spigoli laterali di uno di questi, gli spigoli laterali dei rimanenti danno in projezione le linee d'azione di altrettanti sistemi equilibrati di m forze ciascuno.

8. La configurazione di m forze in equilibrio contiene $m-3$ Cfz.[i] F_r (d'ordine inferiore ad m) corrispondenti ad $r = 3, 4, \ldots (m-1)$ forze in equilibrio, e le contiene ciascuna più volte; precisamente la F_r vi è contenuta $\binom{m}{r}$ volte. [Tanti sono infatti gli r-edri (completi) contenuti in un m-edro (completo); e se questo dà in projezione la F_m, quelli in projezione somministrano le anzidette configurazioni F_r]. È poi evidente che ad ogni F_r è accoppiata una figura complementare contenuta pure nella F_m. D'altra parte si riconosce dai n.[i] 4 e 6 che, quando $m = m' + n'$, la Cfz. $F_{m',n'}$ corrispondente ad m' forze connesse da n' poligoni funicolari e la Cfz. F_m di m forze equilibrate sono della stessa specie (n.° 1). Dunque:

(*) Non riguardiamo qui come differenti due sistemi di forze aventi le stesse linee d'azione e le intensità proporzionali.

Le linee d'azione di m forze in equilibrio e delle loro risultanti cicliche si possono separare in due figure complementari per modo, che riguardate le rette di una figura come linee d'azione di r forze equilibrate e delle rispettive risultanti cicliche, quelle della figura complementare siano i lati e gli assi di $m-r$ differenti poligoni funicolari connettenti le dette r forze. Per ogni valore r vi è una serie di $\binom{m}{r}$ gruppi di tali figure; con le rette della Cfz. si possono formare $m-3$ serie differenti, le quali ordinatamente corrispondono ai valori 3, 4,... $(m-1)$ di r. (v. Esempi nel § 3.)

Tenuto presente il n.° 7, si può in altri termini concludere: la Cfz. F_m, che corrisponde ad m forze in equilibrio, si può riguardare in $\frac{(r-1)!}{2}\binom{m}{r}$ modi diversi come la Cfz. $F_{r,m-r}$, corrispondente ad r forze equilibrate e a $m-r$ poligoni funicolari; r essendo uno qualunque dei numeri 3, 4,... $(m-1)$.

9. Nel piano il solo sistema generale di forze in equilibrio cui corrisponde una Cfz. duale è quello di 5 forze, pel quale si ha $F_5=(3,\ 3)_{10}^{10}\equiv 10_3$.

Dal numero precedente risulta però che la F_m, corrispondente ad $m>5$ forze equilibrate, senza essere duale, contiene sempre parecchie Cfz.$^{\rm i}$ duali del tipo μ_3 (v. § 6). Dal § 3 si rileva poi che al crescere di m queste Cfz. duali diventano vieppiù numerose e si aggruppano secondo il valore di μ. Così la Cfz. di 6 forze contiene 6 Cfz. 10_3; quella di 7 forze contiene 21 Cfz. 10_3 e 120 Cfz. 21_3; quella di 8 forze contiene 56 Cfz. 10_3 e 960 Cfz. 21_3; quella di 9 forze contiene 126 Cfz. 10_3, 4320 Cfz. 21_3 e 280 Cfz. 27_3; ecc. ecc.

10. Al sistema di 4 forze equilibrate e 1 poligono funicolare, e al sistema di 3 forze equilibrate e 2 poligoni funicolari, corrispondono Cfz.$^{\rm i}$ $F_{4,1}$ ed $F_{3,2}$ di specie non diversa dalla $F_5\equiv 10_3$. Essi sono i soli sistemi generali di m forze equilibrate connesse da n differenti poligoni funicolari, ai quali corrisponda una Cfz. duale. Ma, se $m+n>5$, ogni $F_{m,n}$, contiene Cfz.$^{\rm i}$ duali del tipo μ_3 (n.° 8).

11. La figura reciproca (nel senso di Maxwell e di Cremona) della Cfz. $F_{m,n}$, corrispondente ad m forze in equilibrio e ad n poligoni funicolari, è un $(m+n)$-gono piano completo, avente i lati paralleli uno ad uno a tutte le rette della configurazione.

§ 2.

a. Configurazione generale d'equilibrio dei poligoni piani articolati (*).

12. È nota la condizione necessaria e sufficiente perchè un poligono articolato Q_m si trovi in equilibrio sotto l'azione di m forze poste nel suo piano e passanti pei suoi vertici: bisogna che Q_m coincida con un poligono funicolare delle forze (**) date ossia in altri termini bisogna che queste si possano scomporre in $2m$ forze, due a due eguali e contrarie, e agenti lungo i lati di Q_m. Sono appunto tali componenti che rappresentano le tensioni o pressioni dei varî lati.

Questa condizione permette di risolvere in modo generale il problema dell'equilibrio di qualsivoglia poligono piano articolato. Infatti in base ai teoremi precedentemente esposti si può enunciare senz'altro la proposizione:

Se un poligono articolato Q_m è tenuto in equilibrio da m forze poste nel suo piano, passanti pei suoi vertici e delle quali tre qualunque non concorrenti in un punto; le linee d'azione di quelle forze, prese nell'ordine ciclico dei vertici cui sono applicate, le linee d'azione delle loro risultanti cicliche binarie, ternarie, ecc. e i lati di Q_m costituiscono, qualunque sia m, una Cfz.

$$F_{m,1} = \left(m-1,\ 3\right)_{\binom{m+1}{3}}^{\binom{m+1}{2}} \equiv F_{m+1}$$

(dell'ordine $m+1$).

Oltre ai vertici e ai punti diagonali del poligono articolato Q_m questa configurazione contiene tutt'i punti appartenenti alla Cfz. F_m (n.° 6) che corrisponde alle m forze equilibrate.

Di qui si rileva che la Cfz. di $m+1$ forze equilibrate, e la Cfz. di un poligono articolato, in equilibrio sotto l'azione di m forze applicate ai suoi vertici, sono della stessa specie e dello stesso ordine; cosicchè trovata la prima configurazione si può ritener nota anche l'altra. Per es. nel § 3 abbiamo dato le Cfz.[i] di 4, 5, 6,... forze equilibrate; le Cfz.[i] stesse corrispondono all'equilibrio del *triangolo, quadrangolo, pentagono,...* articolati.

(*) Cfr. *Appendice,* § 9.
(**) v. Levy, *La Statique Graphique.* Paris, 1874, § 61.

b. Reciprocità fra il poligono articolato e la Cfz. delle forze ai vertici che lo tengono in equilibrio.

13. Il poligono articolato Q_m e la Cfz. F_m sono figure dotate di proprietà reciproche. Questa contiene $\frac{m(m-1)}{2}$ rette, linee d'azione delle m forze e delle rispettive risultanti cicliche, quello, considerato come un poligono semplice, contiene $\frac{m(m-1)}{2}$ punti, cioè m vertici ed $\frac{m(m-3)}{2}$ punti diagonali.

14. Distinguendo i punti diagonali di un m-latero semplice in binarî, ternarî, ecc., intenderemo in generale per punto diagonale i-nario il punto comune a due lati del poligono fra i quali se ne trovano altri $i-1$; e per poligono diagonale i-nario il poligono semplice conlatero al dato e avente per vertici tutti i suoi punti diagonali dell'ordine i. (Definizioni correlative si possono dare per le diagonali dell'm-gono semplice).

15. Siccome Q_m è sezione ed F_m è projezione di un medesimo m-edro Π, ad ogni retta di F_m si può far corrispondere *un* punto di Q_m, assumendo per es. che quella sia projezione e questo sezione di uno stesso spigolo. Ad ogni forza corrisponde così il vertice cui è applicata; ad ogni risultante i-naria il punto diagonale i-nario in essa situato; al poligono forze il poligono articolato; al poligono delle risultanti i-narie il poligono diagonale i-nario. Se il poligono delle risultanti i-narie è un m-gono semplice i cui vertici appartengono alla Cfz. F_m, il poligono diagonale i-nario è un m-gono semplice avente per lati i lati di Q_m; se quello si spezza in i j-goni semplici o rispettivamente degenera in $\frac{m}{3}$ terne di rette concorrenti in punti della Cfz. (n.° 6), questo si spezza in i j-goni semplici o rispettivamente degenera in $\frac{m}{3}$ triangoli aventi per lati i lati di Q_m; se quello degenera in $\frac{m}{2}$ rette, le cui intersezioni non appartengono alla Cfz., questo degenera in $\frac{m}{2}$ punti le cui congiungenti non sono lati di Q_m. È poi facile vedere che non solo a ogni retta di F_m corrisponde un punto di Q_m, ma inoltre a ogni punto di F_m corrisponde un triangolo di Q_m, a ogni Cfz. F_r contenuta in F_m, un r-latero di Q_m, ecc. ecc.

Ed è evidente che il poligono diagonale i-nario di Q_m, considerato come poligono articolato, è in equilibrio sotto l'azione delle risultanti i-narie delle m forze applicate ai vertici di Q_m; e ove esso si spezzi in i j-goni distinti, questi son tenuti in equilibrio dai corrispondenti i gruppi di j risultanti i-narie.

§ 3.

Applicazione a casi particolari. Notazione.

16. Si dinotino ordinatamente con a, b, c, d, e,... le m forze equilibrate; con ab, bc, cd, de,... le risultanti cicliche binarie; con abc, bcd, cde... le risultanti cicliche ternarie;...; e con le segnature $a \cdot b$, $ab \cdot c$, $a \cdot bcd$, $ab \cdot cd$,... s'indichino rispettivamente i punti di concorso delle forze a e b, ab e c, a e bcd, ab e cd,...; è evidente che per questi punti passano ordinatamente le forze ab, abc, $abcd$, $abcd$,... Si esprimerà questo fatto scrivendo $ab \equiv a \cdot b$, $abc \equiv ab \cdot c$, $abcd \equiv a \cdot bcd \equiv ab \cdot cd$,...

17. Insieme a questa notazione non omogenea è opportuno di adoperarne un'altra, nella quale le linee d'azione delle forze e rispettive risultanti cicliche, ossia *tutte* le rette fondamentali della corrispondente Cfz., sono rappresentate da simboli della stessa forma, cioè da combinazioni binarie, e *tutti* i punti fondamentali della Cfz. da simboli pure della stessa forma, cioè da combinazioni ternarie, di m simboli o indici 1, 2, 3,... m.

Due rette passano per un punto se i loro simboli hanno un indice comune; per es. le rette rs, rt, st concorrono nel punto rst. Queste tre rette si potranno anche rappresentare col simbolo (r, s, t).

Tutti i punti i cui simboli differiscono per un solo indice giacciono in una retta, il simbolo della quale contiene i due indici comuni.

Con questa notazione, se le linee d'azione delle m forze, prese nell'ordine ciclico dato, hanno i simboli: 12, 23, 34,... $m1$; quelle delle risultanti cicliche binarie avranno i simboli: 13, 24, 35,...; quelle delle ternarie i simboli: 14, 25, 36,...; e, in generale, le linee d'azione delle risultanti cicliche i-narie i simboli: $1\overline{1+i}$, $2\overline{2+i}$, $3\overline{3+i}$,...

18. La Cfz. F_m (corrispondente ad m forze equilibrate) potrà quindi rappresentarsi col simbolo

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$$

ove α_1, α_2,... α_m sono m indici differenti, che conviene di considerare come corrispondenti ad altrettanti piani ξ_{α_1}, ξ_{α_2},... ξ_{α_m}, formanti un m-edro completo (v. § 8).

Col simbolo

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m$$

senza parentesi dinoteremo in generale il poligono *semplice* avente per lati *successivi* le seguenti m rette della Cfz.:

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_3\alpha_4, \ldots \quad \alpha_m\alpha_1$$

e per vertici *successivi* i seguenti m punti della Cfz.:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots \quad \alpha_m\alpha_1\alpha_2;$$

e riguarderemo sempre $\alpha_1\alpha_2$ come il primo lato ed $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ come il primo vertice del poligono.

Coi simboli

$$\alpha_m \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1})$$

$$\alpha_m \cdot \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{m-1}$$

dinoteremo rispettivamente l'$\overline{m-1}$-latero completo e l'$\overline{m-1}$-latero semplice aventi per lati le rette:

$$\alpha_m\alpha_1, \quad \alpha_m\alpha_2, \ldots \quad \alpha_m\alpha_{m-1};$$

cosicchè mentre il primo di questi simboli esclude, il secondo include l'idea dell'ordine col quale gli $m-1$ lati si succedono; e mentre il primo, oltre ai lati, rappresenta $\frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{2}$ punti fondamentali (vertici dell'$\overline{m-1}$-latero) il secondo ne rappresenta soltanto $m-1$.

Valendoci promiscuamente delle due notazioni accennate, daremo in questo paragrafo le Cfz.[i] relative ai sistemi di m forze equilibrate (cfr. n.° 12), per alcuni valori particolari di m: cioè per $m=3, 4, 5, \ldots 11$.

Es. 1.° Configurazione di 3 forze in equilibrio.

$m=3$ $\qquad F_3 \equiv (1, 3)_1^3 \equiv (1, 2, 3).$

19. Le tre rette r (*) della Cfz. $F_3 \equiv (1, 2, 3)$ sono:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{le linee d'azione} \ldots & 12 & 23 & 31 \\ \text{delle forze date} \ldots\ldots & a & b & c \end{array}\right\};$$

esse concorrono nel punto $G \equiv 123$, il solo appartenente alla Cfz. F_3, *la quale consiste in una semplice terna* (1, 2, 3) *di rette concorrenti* (fascio di raggi).

(*) In questo e in tutti gli esempi seguenti si rappresenteranno genericamente con r e con G le rette e i punti fondamentali della Cfz. corrispondente al sistema delle forze date.

Es. 2.° Configurazione di 4 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del triangolo.

$m=4$ $\qquad\qquad F_4 \equiv (2, 3)_4^6 \equiv (1, 2, 3, 4).$

20. Le sei rette r della Cfz. $F_4 \equiv (1, 2, 3, 4)$ sono:

$$\left.\begin{array}{lcccc} \text{le linee d'azione} \ldots & 12 & 23 & 34 & 41 \\ \text{delle forze date} \ldots & a & b & c & d \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{lcc} \text{le linee d'azione} \ldots & 13 & 24 \\ \text{delle ris. binarie} \ldots & ab \equiv cd & bc \equiv da \end{array}\right\};$$

i quattro punti fondamentali G sono:

$$123 \qquad 234 \qquad 341 \qquad 412.$$

Il poligono delle forze è il quadrangolo semplice (n.° 18)

$$P_1 \equiv 1234;$$

quello P_2 delle risultanti cicliche binarie degenera in due rette (diagonali di P_1) il cui punto comune non appartiene alla Cfz.

Onde *la Cfz. F_4 consiste in un quadrangolo completo.* Essa corrisponde a tre diversi sistemi di 4 forze: i relativi poligoni-forze sono i quadrangoli semplici 1234, 1324, 1243, le corrispondenti risultanti binarie coincidono con le diagonali di questi quadrangoli.

La F_4 si scinde in quattro modi in una terna di rette concorrenti e in un corrispondente triangolo inscritto, epperò in quattro modi si può essa riguardare come la *Cfz. $F_{3,1}$ corrispondente all'equilibrio del triangolo,* cioè:

sistema forze:	(1, 2, 3);	triangolo equilibrato:	$4 \cdot 123$
»	(2, 3, 4);	»	$1 \cdot 234$
»	(1, 3, 4);	»	$2 \cdot 134$
»	(1, 2, 4);	»	$3 \cdot 124.$

Es. 3.° Configurazione di 5 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del quadrangolo articolato.

$m=5$ $\qquad\qquad F_5 \equiv (3, 3)_{10}^{10} \equiv 10_3.$

21. Le dieci rette r della Cfz. $F_5 \equiv (1, 2, 3, 4, 5)$ sono:

$$\left.\begin{array}{lccccc} \text{le linee d'azione} \ldots & 12 & 23 & 34 & 45 & 51 \\ \text{delle forze} \ldots\ldots\ldots & a & b & c & d & e \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{lccccc} \text{le linee d'azione} \ldots & 13 & 35 & 52 & 24 & 41 \\ \text{delle ris. binarie} \ldots & ab & cd & ea & bc & de \end{array}\right\};$$

Il poligono P_1 delle forze è il pentagono semplice

$$P_1 \equiv 12345,$$

quello P_2 delle risultanti binarie è il pentagono semplice

$$P_2 \equiv 13524.$$

Oltre ai vertici 123, 234,... 512 e 135, 352,... 413 di questi due poligoni la Cfz. non contiene altri punti fondamentali ($\varphi = 0$, n.° 6).

I lati di P_2 passano ordinatamente pei vertici alternati I III V II IV di P_1, e i lati di P_1 pei vertici alternati IV II V I III di P_2; infatti per es. il primo lato 13 di P_2 passa pel primo vertice 123 di P_1, e il primo lato 12 di P_1 pel quarto vertice 241 di P_2. Onde *i pentagoni P_1 e P_2 sono simultaneamente inscritti l'uno nell'altro.*

22. La stessa F_5 corrisponde a dodici sistemi differenti di 5 forze equilibrate (incluso il dato) ossia può in dodici modi riguardarsi come Cfz. di 5 forze in equilibrio. Contiene dodici pentagoni analoghi a P_1 (poligoni-forze) e altrettanti analoghi a P_2 (poligoni di risultanti binarie), i quali però si riducono a soli dodici differenti e si separano in due distinti gruppi di sei pentagoni:

$$P_1 \equiv A_1;\ A_2;\ A_3;\ A_4;\ A_5;\ A_6$$
$$P_2 \equiv B_1;\ B_2;\ B_3;\ B_4;\ B_5;\ B_6;$$

ovvero anche in sei coppie

$$(A_i,\ B_i) \qquad i = 1,\ 2, \ldots 6$$

di pentagoni, associati per modo, che ogni A_i è simultaneamente inscritto e circoscritto all'associato B_i, e che se A_i (o B_i) si riguarda come poligono delle forze, l'associato B_i (o A_i) è il corrispondente poligono delle risultanti cicliche binarie. Queste sei coppie di pentagoni associati sono:

$(A_i,\quad B_i)$
(12345, 13524)
(12354, 13425)
(12435, 14523)
(12453, 14325)
(12534, 15423)
(12543, 15324).

23. La Cfz. si scinde in cinque maniere diverse in un quadrangolo completo e in un corrispondente quadrilatero completo *inscritto*, cioè avente i vertici opposti situati sui lati opposti del quadrangolo. I cinque quadrangoli $F_4^{(i)}$ coi corrispondenti quadrilateri $Q_4^{(i)}$ sono i seguenti:

$F_4^{(i)}$	$Q_4^{(i)}$
(1, 2, 3, 4)	5·(1, 2, 3, 4)
(1, 2, 3, 5)	4·(1, 2, 3, 5)
(1, 2, 4, 5)	3·(1, 2, 4, 5)
(1, 3, 4, 5)	2·(1, 3, 4, 5)
(2, 3, 4, 5)	1·(2, 3, 4, 5).

Ognuno di questi quadrangoli completi corrisponde a tre diversi sistemi equilibrati di 4 forze (per es. il primo corrisponde ai tre sistemi, descritti nell'Es. 2.°, n.° 20, e i cui poligoni-forze sono i quadrangoli semplici 1234, 1324, 1243); si hanno così quindici Cfz.[i] $F_{4,1}^{(i)}$ contenute nella F_5 e delle quali *ciascuna corrisponde all'equilibrio di un quadrangolo articolato.* (Cfr. Schell, l. c., 2ª ediz., pag. 73).

24. La F_5 in dieci modi si scinde in una terna di rette concorrenti e in due triangoli inscritti (prospettivi), ossia contiene le dieci Cfz. $F_{3,2}$ corrispondenti ad altrettanti sistemi equilibrati di 3 forze, connessi ciascuno da 2 differenti poligoni funicolari, cioè:

sistema forze	triangoli funicolari	sistema forze	triangoli funicolari.
(1, 2, 3)	4·123 e 5·123	(1, 3, 5)	2·135 e 4·135
(2, 3, 4)	5·234 » 1·234	(3, 5, 2)	4·352 » 1·352
(3, 4, 5)	1·345 » 2·345	(5, 2, 4)	1·524 » 3·524
(4, 5, 1)	2·451 » 3·451	(2, 4, 1)	3·241 » 5·241
(5, 1, 2)	3·512 » 4·512	(4, 1, 3)	5·413 » 2·413.

Es. 4.° Configurazione di 6 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del pentagono articolato.

$m=6$ $\qquad\qquad$ $F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15}$.

25. Le quindici rette r della Cfz. $F_6 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	61	;
delle forze date	a	b	c	d	e	f	

le linee d'azione . . .	13	35	51;	24	46	62	⎫
delle ris. binarie . . .	ab	cd	ef;	bc	de	fa	⎭;

le linee d'azione . . .	14	25	36	⎫
delle ris. ternarie . . .	$abc \equiv def$	$bcd \equiv efa$	$cde \equiv fab$	⎭.

Il poligono-forze P_1 coincide con l'esagono semplice

$$P_1 \equiv 123456 \equiv E_{1,23}; \tag{1}$$

il poligono P_2 delle risultanti binarie degenera nelle due terne conjugate di rette concorrenti

$$P_2 \equiv \{(1,\ 3,\ 5);\quad (2,\ 4,\ 6)\}, \tag{2}$$

la prima delle quali projetta i vertici di posto dispari, la seconda quelli di posto pari di P_1 (n.° 18); il poligono P_3 delle risultanti ternarie degenera nel trilatero

$$P_3 \equiv 14 \cdot 25 \cdot 36 \equiv \Delta \tag{3}$$

del quale i lati, 14, 25, 36, sono rette r, ma i vertici sono punti estranei alla Cfz.

26. Oltre ai vertici 123, 234, 345, 456, 561, 612 del poligono-forze e ai centri 135, 246 delle due terne di risultanti binarie, la Cfz. contiene altri $\varphi = 12$ punti (n.° 6) che sono intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine i differente (incluso l'ordine $i = 1$ che corrisponde alle forze date) cioè

$$\left.\begin{array}{llllllll}
\text{i punti} & \left\{\begin{array}{llll} 124 & 134 & 145 & 146 \\ a\cdot bc & ab\cdot c & d\cdot ef & de\cdot f \end{array}\right. & \text{situati sulla retta} & \left\{\begin{array}{c} 14 \\ abc \equiv def \end{array}\right. \\
\text{"} & \left\{\begin{array}{llll} 125 & 235 & 245 & 256 \\ ef\cdot a & b\cdot cd & bc\cdot d & e\cdot fa \end{array}\right. & \text{"}\quad\text{"} & \left\{\begin{array}{c} 25 \\ bcd \equiv efa \end{array}\right. \\
\text{"} & \left\{\begin{array}{llll} 136 & 236 & 346 & 356 \\ f\cdot ab & fa\cdot b & c\cdot de & cd\cdot e \end{array}\right. & \text{"}\quad\text{"} & \left\{\begin{array}{c} 36 \\ cde \equiv fab. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \tag{4}$$

La Cfz. F_6 è della stessa specie (n.° 1) *di quella che presentano le rette e i punti di* Steiner *nell'esagrammo di* Pascal (v. § 7).

Essa può in *sessanta* modi diversi riguardarsi come sistema di 6 forze in equilibrio, con le relative risultanti cicliche binarie e ternarie, ossia corrisponde ad altrettanti sistemi differenti (incluso il dato) di 6 forze equilibrate;

perciò contiene *sessanta* esagoni semplici (poligoni-forze $P_1^{(i)}$), a ciascun dei quali corrispondono *due* terne conjugate di raggi (poligoni $P_2^{(i)}$ di ris. binarie) che ne projettano i vertici dispari e i vertici pari, ed *un* trilatero Δ (poligono $P_3^{(i)}$ di risultanti ternarie) i cui lati appartengono, ma i cui vertici non appartengono alla Cfz. — ben inteso che ognuno di questi gruppi

$$(P_1^{(i)},\ P_2^{(i)},\ P_3^{i}),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\dots,\ 60,$$

comprende tutte le rette, ma soltanto 8 punti della Cfz., epperò determina un corrispondente gruppo ρ_i di 12 punti residui.

27. I dodici punti (4) sono vertici di due esagoni semplici

$$E_{2,31}\equiv 125634,\qquad E_{3,12}\equiv 145236$$

che formano, insieme al $P_1 \equiv E_{1,23}$, una *tripla* T_{123} *di esagoni consociati;* consociati nel senso che *ciascuno* dei tre esagoni, considerato come poligono-forze, conduce alle stesse terne conjugate (2) di risultanti binarie, e che inoltre i dodici punti del *corrispondente* gruppo residuo ρ coincidono coi vertici degli altri due esagoni della tripla.

28. Gli stessi punti (4) sono anche vertici di tre quadrangoli semplici

$$q_{14}\equiv 2356,\qquad q_{25}\equiv 1346,\qquad q_{36}\equiv 1245$$

i quali rispettivamente corrispondono ai lati 14, 25, 36 di Δ (in quanto essi appartengono ai quadrangoli completi individuati da queste tre rette, n.° 37) e hanno per diagonali le due rette non corrispondenti; per es. q_{14} corrisponde a $r\equiv 14$ e ha per diagonali $r\equiv 25$ e $r\equiv 36$.

29. Ogni retta r, per es. 12, è lato di tre trilateri $12\cdot 34\cdot 56$, $12\cdot 35\cdot 46$, $12\cdot 36\cdot 45$; ma ogni trilatero contiene tre rette r, onde in tutta la Cfz. F_6 esistono $\frac{3\cdot 15}{3}=15$ trilateri, i vertici dei quali non coincidono con punti G. Indicandoli col simbolo Δ_{ij} (*) essi sono figurati nella seguente

TABELLA DEI TRILATERI Δ.

$\Delta_{12}\equiv 12\cdot 34\cdot 56$	$\Delta_{13}\equiv 16\cdot 23\cdot 45$	$\Delta_{14}\equiv 14\cdot 26\cdot 35$	$\Delta_{15}\equiv 13\cdot 25\cdot 46$	$\Delta_{16}\equiv 15\cdot 24\cdot 36$
$\Delta_{23}\equiv 14\cdot 25\cdot 36$	$\Delta_{24}\equiv 15\cdot 23\cdot 46$	$\Delta_{25}\equiv 16\cdot 24\cdot 35$	$\Delta_{26}\equiv 13\cdot 26\cdot 45$	$\Delta_{34}\equiv 13\cdot 24\cdot 56$
$\Delta_{35}\equiv 15\cdot 26\cdot 34$	$\Delta_{36}\equiv 12\cdot 35\cdot 46$	$\Delta_{45}\equiv 12\cdot 36\cdot 45$	$\Delta_{46}\equiv 16\cdot 25\cdot 34$	$\Delta_{56}\equiv 14\cdot 23\cdot 56$.

(*) I 45 punti P, vertici di questi trilateri, e i 20 punti fondamentali della Cfz. (ciascun dei quali conta per *tre*) costituiscono *tutte* le intersezioni delle rette r (v. n.° 40).

30. Non esistendo che *venti* terne di raggi concorrenti (cioè tante quanti sono i punti G) le quali sono conjugate due a due, in quantochè il simbolo dell'una, per es. (1, 3, 5), determina univocamente il simbolo complementare (2, 4, 6) dell'altra; ogni pajo di terne conjugate corrisponde a $\frac{60}{10}=6$ esagoni, che determinano altrettanti trilateri. Dunque gli esagoni delle Cfz. si distribuiscono in 6 serie π_i di 10 esagoni ai quali corrispondono differenti paja di terne conjugate, e trilateri differenti, ovvero in *dieci* serie di *sei* esagoni, ai quali corrispondono le medesime due terne conjugate di raggi, ma differenti trilateri [v. tabella I ove nella segnatura di ogni esagono (per es. **1**2**3**4**5**6) tre cifre sono scritte in caratteri più marcati delle altre, nell'intento di mettere concisamente in evidenza le due corrispondenti terne conjugate (1, 3, 5) (2 4 6)].

31. I sei esagoni appartenenti a ciascuna di queste serie si separano in due *triple* (n.° 27) *conjugate* T_{ijk}, T_{rst} (i, j, k, r, s, t rappresentano i sei indici 1, 2, 3, 4, 5, 6); i trilateri corrispondenti agli esagoni della tripla T_{ijk} sono Δ_{jk}, Δ_{ki}, Δ_{ij}, quelli corrispondenti alla tripla T_{rst} sono Δ_{st}, Δ_{tr}, Δ_{rs}. Nella F_6 vi sono evidentemente *venti triple* T_{ijk} *di esagoni consociati,* le quali si possono riguardare come univocamente corrispondenti ai *venti* punti ijk della Cfz. e sono due a due conjugate. Nella tabella I accanto a ogni esagono si trova segnato: *a*) il relativo trilatero Δ_{ij}; *b*) la tripla T_{ijk} alla quale l'esagono appartiene.

32. Poichè ogni esagono individua un trilatero, uno stesso trilatero corrisponde a $\frac{60}{15}=4$ esagoni, che determinano 4 differenti paja di terne conjugate epperò appartengono a 4 triple differenti. Dunque gli esagoni, le terne di raggi concorrenti e le triple di esagoni consociati si distribuiscono rispettivamente in *quindici* quaterne, che univocamente corrispondono ai *quindici* trilateri (v. tabella II ove accanto a ogni esagono si trova segnata e la serie π_i, n.° 30, e la tripla T_{ijk}, alle quali l'esagono appartiene).

33. Riassumendo e rappresentando i 60 sistemi equilibrati (n.° 26) mediante i relativi poligoni-forze, vale a dire mediante i 60 esagoni della Cfz., si può concludere che essi si distribuiscono in *dieci* serie di *sei* sistemi, separati in due triple conjugate, e conducenti al medesimo poligono di risultanti binarie, ma a differenti trilateri di risultanti ternarie (tab. I); oppure anche si distribuiscono in *quindici* gruppi di *quattro* sistemi, appartenenti a triple diverse, e conducenti al medesimo trilatero di risultanti ternarie ma a differenti poligoni di risultanti binarie (tab. II).

Tabella I.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
T_{123} 123456 Δ_{23}	T_{231} 125634 Δ_{31}	T_{312} 163254 Δ_{12}	T_{456} 125436 Δ_{56}	T_{564} 145632 Δ_{64}	T_{645} 165234 Δ_{45}
T_{145} 135264 Δ_{45}	T_{236} 136254 Δ_{36}	T_{362} 146352 Δ_{62}	T_{451} 126354 Δ_{51}	T_{514} 125463 Δ_{14}	T_{623} 135462 Δ_{23}
T_{156} 136425 Δ_{56}	T_{234} 152364 Δ_{34}	T_{342} 142563 Δ_{42}	T_{423} 156423 Δ_{23}	T_{561} 132564 Δ_{61}	T_{615} 142365 Δ_{15}
T_{146} 153624 Δ_{46}	T_{235} 163524 Δ_{35}	T_{352} 143625 Δ_{52}	T_{461} 143526 Δ_{61}	T_{523} 153426 Δ_{23}	T_{614} 152436 Δ_{14}
T_{126} 124365 Δ_{26}	T_{261} 126543 Δ_{61}	T_{345} 156243 Δ_{45}	T_{453} 124563 Δ_{53}	T_{534} 126345 Δ_{34}	T_{612} 136245 Δ_{12}
T_{136} 154236 Δ_{36}	T_{245} 153246 Δ_{45}	T_{361} 123546 Δ_{61}	T_{452} 123645 Δ_{52}	T_{524} 163542 Δ_{24}	T_{613} 153642 Δ_{13}
T_{124} 126534 Δ_{24}	T_{241} 123465 Δ_{41}	T_{356} 153462 Δ_{56}	T_{412} 153264 Δ_{12}	T_{563} 156234 Δ_{63}	T_{635} 146532 Δ_{35}
T_{134} 145326 Δ_{34}	T_{256} 135426 Δ_{56}	T_{341} 132456 Δ_{41}	T_{413} 135624 Δ_{13}	T_{562} 165324 Δ_{62}	T_{625} 145623 Δ_{25}
T_{125} 125643 Δ_{25}	T_{215} 124356 Δ_{15}	T_{346} 135642 Δ_{46}	T_{463} 134256 Δ_{63}	T_{512} 135246 Δ_{12}	T_{634} 125346 Δ_{34}
T_{135} 132546 Δ_{35}	T_{246} 154623 Δ_{46}	T_{351} 154326 Δ_{51}	T_{462} 152346 Δ_{62}	T_{513} 134625 Δ_{13}	T_{624} 134526 Δ_{24}

Tabella II.

Δ_{12}	π_3	163254	T_{123}	π_4	153264	T_{124}	π_5	135246	T_{125}	π_6	136245	T_{126}
Δ_{13}	π_2	125634	T_{132}	π_4	135624	T_{134}	π_5	134625	T_{135}	π_6	153642	T_{136}
Δ_{14}	π_2	123465	T_{142}	π_3	132456	T_{143}	π_5	125463	T_{145}	π_6	152436	T_{146}
Δ_{15}	π_2	124356	T_{152}	π_3	154326	T_{153}	π_4	126354	T_{154}	π_6	142365	T_{156}
Δ_{16}	π_2	126543	T_{162}	π_3	123546	T_{163}	π_4	143526	T_{164}	π_5	132564	T_{165}
Δ_{23}	π_1	123456	T_{231}	π_4	156423	T_{234}	π_5	153426	T_{235}	π_6	135462	T_{236}
Δ_{24}	π_1	126534	T_{241}	π_3	142563	T_{243}	π_5	163542	T_{245}	π_6	134526	T_{243}
Δ_{25}	π_1	125643	T_{251}	π_3	143625	T_{253}	π_4	123645	T_{254}	π_6	145623	T_{256}
Δ_{26}	π_1	124365	T_{261}	π_3	146352	T_{263}	π_4	152346	T_{264}	π_5	165324	T_{265}
Δ_{34}	π_1	145326	T_{341}	π_2	152364	T_{342}	π_5	126345	T_{345}	π_6	125346	T_{346}
Δ_{35}	π_1	132546	T_{351}	π_2	163524	T_{352}	π_4	124563	T_{354}	π_6	146532	T_{356}
Δ_{36}	π_1	154236	T_{361}	π_2	136254	T_{362}	π_4	134256	T_{364}	π_5	156234	T_{365}
Δ_{45}	π_1	135264	T_{451}	π_2	153246	T_{452}	π_3	156243	T_{453}	π_6	165234	T_{456}
Δ_{46}	π_1	153624	T_{461}	π_2	154623	T_{462}	π_3	135642	T_{463}	π_5	145632	T_{465}
Δ_{56}	π_1	136425	T_{561}	π_2	135426	T_{562}	π_3	153462	T_{563}	π_4	125436	T_{564}

34. Le rette della F_6 si separano nella Cfz. $F_5 \equiv 10_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5)$ e nel corrispondente cinquilatero completo inscritto $Q_5 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4, 5)$; la F_6 contiene sei distinte Cfz.^{i} $F_5^{(i)}$ coi rispettivi cinquilateri inscritti $Q_5^{(i)}$, $i=1, 2, \dots 6$, cioè:

i	$F_5^{(i)} \equiv 10_3$	$Q_5^{(i)}$
6	(1, 2, 3, 4, 5)	6·(1, 2, 3, 4, 5)
5	(1, 2, 3, 4, 6)	5·(1, 2, 3, 4, 6)
4	(1, 2, 3, 6, 5)	4·(1, 2, 3, 6, 5)
3	(1, 2, 6, 4, 5)	3·(1, 2, 6, 4, 5)
2	(1, 6, 3, 4, 5)	2·(1, 6, 3, 4, 5)
1	(6, 2, 3, 4, 5)	1·(6, 2, 3, 4, 5).

35. I pentagoni semplici $A_1 \equiv 12345$ e $B_1 \equiv 13524$, associati (n.° 22) nella Cfz. $F_5^{(6)} \equiv (1, 2, \dots 5)$, sono rispettivamente e ordinatamente circoscritti ai pentagoni semplici $A'_1 \equiv 6 \cdot 12345$ e $B'_1 \equiv 6 \cdot 13524$, *appartenenti* al cinquilatero completo $Q_5^{(6)}$; quelli sono *ciclicamente inscritti* fra loro, cioè ciascuno è in pari tempo inscritto e circoscritto all'altro — questi sono fra loro *ciclicamente diagonali,* cioè hanno i lati comuni (sono conlateri) e ciascuno è il pentagono diagonale dell'altro (ha per vertici i punti diagonali dell'altro).

36. La Cfz. F_6 contiene 144 pentagoni semplici corrispondentisi due a due in modo che 72 pentagoni A_i (o B_i) sono circoscritti rispettivamente e ordinatamente agli altri 72 A'_i (o B'_i); essi si aggruppano in 36 paja di pentagoni (A_i, B_i) *ciclicamente inscritti* e in 36 corrispondenti paja di pentagoni (A'_i, B'_i) *ciclicamente diagonali.*

La F_6 può dunque in 72 modi riguardarsi come *la Cfz.* $F_{5,1}$ *corrispondente all'equilibrio del pentagono articolato.*

Le 36 paja (A_i, B_i) e le corrispondenti 36 paja (A'_i, B'_i) sono:

$(A_i$,	$B_i)$	$(A'_i$,	$B'_i)$
(12345,	13524)	(6·12345,	6·13524)
(12354,	13425)	(6·12354,	6·13425)
(12435,	14523)	(6·12435,	6·14523)
(12453,	14325)	(6·12453,	6·14325)
(12534,	15423)	(6·12534,	6·15423)
(12543,	15324)	(6·12543,	6·15324);

le altre trenta coppie di paja corrispondenti si ottengono operando successivamente, su queste sei, le sostituzioni (61); (62); (63); (64); (65).

37. La Cfz. F_6 si scinde nel quadrangolo completo

$$F_4 \equiv \mathbf{F}_{56} \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

nella corrispondente coppia di quadrilateri-completi (conjugati)

$$Q_4 \equiv \mathbf{Q}_{56} \equiv 5 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$Q'_4 \equiv \mathbf{Q}'_{65} \equiv 6 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

in esso inscritti (i vertici *opposti* dei quadrilateri completi si trovano sui lati *opposti* del quadrangolo); e nella retta

$$r \equiv a_{56} \equiv 56,$$

asse sul quale si segano i lati omologhi di Q_4 e Q'_4; la F_6 contiene quindici distinti quadrangoli completi $\mathbf{F}_{ij}$, con le corrispondenti coppie di quadrilateri *conjugati* inscritti $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Q}'_{ji}$, e i relativi quindici assi a_{ij}, cioè:

a_{ij}	$\mathbf{F}_{ij}$	$\mathbf{Q}_{ij}$	$\mathbf{Q}'_{ji}$
12	(3, 4, 5, 6)	1·(3, 4, 5, 6)	2·(3, 4, 5, 6)
13	(2, 4, 5, 6)	1·(2, 4, 5, 6)	3·(2, 4, 5, 6)
14	(2, 3, 5, 6)	1·(2, 3, 5, 6)	4·(2, 3, 5, 6)
15	(2, 3, 4, 6)	1·(2, 3, 4, 6)	5·(2, 3, 4, 6)
16	(2, 3, 4, 5)	1·(2, 3, 4, 5)	6·(2, 3, 4, 5)
23	(1, 4, 5, 6)	2·(1, 4, 5, 6)	3·(1, 4, 5, 6)
24	(1, 3, 5, 6)	2·(1, 3, 5, 6)	4·(1, 3, 5, 6)
25	(1, 3, 4, 6)	2·(1, 3, 4, 6)	5·(1, 3, 4, 6)
26	(1, 3, 4, 5)	2·(1, 3, 4, 5)	6·(1, 3, 4, 5)
34	(1, 2, 5, 6)	3·(1, 2, 5, 6)	4·(1, 2, 5, 6)
35	(1, 2, 4, 6)	3·(1, 2, 4, 6)	5·(1, 2, 4, 6)
36	(1, 2, 4, 5)	3·(1, 2, 4, 5)	6·(1, 2, 4, 5)
45	(1, 2, 3, 6)	4·(1, 2, 3, 6)	5·(1, 2, 3, 6)
46	(1, 2, 3, 5)	4·(1, 2, 3, 5)	6·(1, 2, 3, 5)
56	(1, 2, 3, 4)	5·(1, 2, 3, 4)	6·(1, 2, 3, 4).

A ogni retta $r \equiv ij$ corrispondono così un quadrangolo *complementare* completo $\mathbf{F}_{ij}$ e un pajo di quadrilateri completi conjugati $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Q}'_{ji}$.

38. Nel quadrangolo completo (3, 4, 5, 6) sono inclusi i tre quadrangoli semplici 3456, 3546, 3465; i lati dei quali passano ordinatamente pei vertici dei tre quadrilateri semplici $1\cdot 3456$, $1\cdot 3546$, $1\cdot 3465$ contenuti in $1\cdot(3, 4, 5, 6)$ e per quelli dei tre $2\cdot 3456$, $2\cdot 3546$, $2\cdot 3465$ contenuti in $2\cdot(3, 4, 5, 6)$.

La F_6 può dunque in *quarantacinque* maniere diverse riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,2}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari;* epperò contiene *quarantacinque* quadrangoli semplici (poligoni-forze) circoscritti rispettivamente ed ordinatamente ad altrettante corrispondenti paja di quadrilateri semplici conjugati (2 poligoni funicolari), i lati omologhi dei quali s'incontrano sulle quindici rette r (assi dei poligoni funicolari).

39. Le rette della F_6 si separano anche nella terna di triangoli prospettivi *appartenenti* alla Cfz.

$$4\cdot 123, \qquad 5\cdot 123, \qquad 6\cdot 123$$

e nelle due terne conjugate di rette concorrenti

$$(1, 2, 3), \qquad (4, 5, 6);$$

delle quali la prima contiene i raggi d'omologia, la seconda gli assi d'omologia.

Indicando genericamente con λ i triangoli *appartenenti* alla Cfz., cioè aventi per lati rette fondamentali e per vertici punti fondamentali della medesima, la F_6 comprende *venti* terne analoghe di triangoli omologici λ, con le corrispondenti terne di assi e raggi d'omologia; e può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,3}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.* I punti della Cfz. sono conjugati due a due per modo, che se le tre forze concorrono in un punto, gli assi dei corrispondenti tre poligoni funicolari concorrono nel punto conjugato. Le dieci paja di punti conjugati sono

123	124	125	126	134	135	136	145	146	156
456	356	346	345	256	246	245	236	235	234;

questi stessi simboli, se racchiusi in parentesi, rappresentano anche le dieci paja di terne conjugate di raggi (n.i 30-25): per es. (1, 2, 3) e (4, 5, 6) rappresentano risp. le due terne 12, 13, 23 e 45, 46, 56.

40. È facile riconoscere che i vertici del quadrangolo completo $\mathbf{F}_{12}$ (n.o 37) sono conjugati ai quattro punti della Cfz. allineati sulla retta $r \equiv 12$. Le intersezioni di questa retta coi lati opposti di $\mathbf{F}_{12}$ sono tre paja di punti conjugati in involuzione (Desargues) e coincidono evidentemente coi vertici P dei tre trilateri Δ_{ij} aventi per lato comune la 12.

Onde ogni retta r contiene sei dei 45 punti P, i quali si separano in tre coppie conjugate in involuzione.

Es. 5.° Configurazione di 7 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'esagono articolato.

$m=7$ $\qquad\qquad F_7\equiv(5,\ 3)^{21}_{35}.$

41. Le ventuna rette r della Cfz. $F_7\equiv(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$ sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	71
delle forze date	a	b	c	d	e	f	g
le linee d'azione . . .	13	35	57	72	24	46	61
delle ris. binarie . . .	ab	cd	ef	ga	bc	de	fg
le linee d'azione . . .	14	47	73	36	62	25	51
delle ris. ternarie . . .	abc	def	gab	cde	fga	bcd	efg .

Il poligono-forze P_1, e i poligoni P_2, P_3 delle risultanti binarie e ternarie coincidono rispettivamente con gli ettagoni semplici:

$$P_1\equiv1234567\equiv A$$
$$P_2\equiv1357246\equiv B$$
$$P_3\equiv1473625\equiv C$$

i quali, presi nell'ordine (A, B, C) sono *ciclicamente inscritti* fra loro, cioè A è inscritto in B, B in C e C in A: perciò (n.° 98) i vertici di questi tre ettagoni insieme alle rette r costituiscono una Cfz. 21_3, appartenente alla F_7.

42. Oltre ai vertici 123, 234,... 712; 135, 357,... 613; 147, 473,... 514 dei poligoni P_1, P_2, P_3, la Cfz. F_7 contiene altri $\varphi=14$ punti (n.° 6), che sono intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine differente e sono distribuiti due a due sulle ventuna rette r; esse sono i seguenti:

punti	124 / $a\cdot bc$	134 / $ab\cdot c$	situati sulla retta	14 / abc
"	457 / $d\cdot ef$	467 / $de\cdot f$	" "	47 / def
"	713 / $g\cdot ab$	723 / $ga\cdot b$	" "	37 / gab

$$\text{punti} \begin{cases} 346 & 356 \\ c\cdot de & cd\cdot e \end{cases} \quad \text{situati sulla retta} \begin{cases} 36 \\ cde \end{cases}$$

$$\text{,,} \begin{cases} 672 & 612 \\ f\cdot ga & fg\cdot a \end{cases} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \begin{cases} 62 \\ fga \end{cases}$$

$$\text{,,} \begin{cases} 235 & 245 \\ b\cdot cd & bc\cdot d \end{cases} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \begin{cases} 25 \\ bcd \end{cases}$$

$$\text{,,} \begin{cases} 561 & 571 \\ e\cdot fg & ef\cdot g \end{cases} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \begin{cases} 51 \\ efg \end{cases}$$

e costituiscono, insieme alle r, una Cfz. $(2, 3)_{14}^{21}$.

Questi *quattordici* punti sono vertici di tre (e tre soli) quatordecagoni semplici α, β, γ *appartenenti* alla Cfz. (ossia aventi tutt'i vertici e tutt'i lati appartenenti alla medesima) cioè

$$P_{23} \equiv 13726157463524 \equiv (BC) \equiv \alpha$$
$$P_{31} \equiv 14365173254762 \equiv (CA) \equiv \beta$$
$$P_{12} \equiv 12457134672356 \equiv (AB) \equiv \gamma.$$

Dei tre quatordecagoni (*associati*) α, β, γ il primo corrisponde ad A, in quanto è doppiamente inscritto in questo ettagono ed ha inoltre per lati i lati di B e di C; e nello stesso modo sono corrispondenti β e B, γ e C.

43. La medesima Cfz. F_7 corrisponde identicamente a 360 differenti sistemi di 7 forze equilibrate (compreso il dato). Essa contiene trecentosessanta ettagoni analoghi a P_1 (poligoni-forze) e altrettanti analoghi a P_2 e a P_3 (poligoni di risultanti binarie e ternarie) i quali però si riducono effettivamente a soli 360 poligoni differenti e si separano in tre distinte serie di *centoventi* ettagoni

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 \ldots & A_i \ldots & A_{120} \\ B_1 & B_2 \ldots & B_i \ldots & B_{120} \\ C_1 & C_2 \ldots & C_i \ldots & C_{120} \end{matrix}$$

ossia in *centoventi terne* di ettagoni *ciclicamente inscritti*

$$(A_i, B_i, C_i) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots 120.$$

E siccome una terna (A_i, B_i, C_i) assorbe tutte quante le rette, ma soli 21 punti, della Cfz., essa individua un gruppo ρ_i di 14 punti residui, i quali son vertici di tre quatordecagoni $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ associati e appartenenti alla Cfz.

I 35 punti della F_7 si possono dunque in 120 maniere diverse separare in un gruppo τ_i di 21 punti e nel corrispondente gruppo ρ_i di 14 punti residui. Ogni gruppo τ_i si scinde, come s'è veduto, in tre ettagoni ciclicamente inscritti A_i, B_i, C_i e ogni gruppo ρ_i contiene tre quatordecagoni associati α_i, β_i, γ_i i quali uno ad uno corrispondono, nel senso indicato superiormente, a quegli ettagoni.

I 21 punti di ogni gruppo τ_i e le 21 rette r costituiscono una Cfz. 21_3; i 14 punti di ogni gruppo ρ_i e le 21 rette r costituiscono una Cfz. $(2, 3)_{14}^{21}$. Nella F_7 vi sono dunque 130 distinte Cfz.ⁱ 21_3 ed altrettante corrispondenti Cfz.ⁱ $(2, 3)_{14}^{21}$.

44. La Cfz. F_7 si scinde in 7 modi in una Cfz. $F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15}$ e in un corrispondente silatero completo inscritto Q_6, cioè:

$$\begin{array}{ll}
F_6^{(7)} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6) & Q_6^{(7)} \equiv 7 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\
F_6^{(6)} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 7) & Q_6^{(6)} \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 7) \\
F_6^{(5)} \equiv (1, 2, 3, 4, 6, 7) & Q_6^{(5)} \equiv 5 \cdot (1, 2, 3, 4, 6, 7) \\
F_6^{(4)} \equiv (1, 2, 3, 5, 6, 7) & Q_6^{(4)} \equiv 4 \cdot (1, 2, 3, 5, 6, 7) \\
F_6^{(3)} \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(3)} \equiv 3 \cdot (1, 2, 4, 5, 6, 7) \\
F_6^{(2)} \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(2)} \equiv 2 \cdot (1, 3, 4, 5, 6, 7) \\
F_6^{(1)} \equiv (2, 3, 4, 5, 6, 7) & Q_6^{(1)} \equiv 1 \cdot (2, 3, 4, 5, 6, 7).
\end{array}$$

Essa può in 420 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{6,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'esagono articolato.*

Contiene 840 esagoni semplici; i quali si distribuiscono in due serie, tali che ogni esagono della prima è circoscritto a un esagono (corrispondente) della seconda, ossia si aggruppano in 420 coppie di esagoni corrispondenti. Le quattrocentoventi coppie si separano in 7 sistemi di 60 coppie, in ciascun dei quali queste si combinano in *sei* gruppi di *dieci* coppie d'esagoni corrispondenti, dotati di certe proprietà comuni, o anche si combinano in *quattro* gruppi di *quindici* coppie, ecc.

Con le rette r si formano 105 trilateri Δ (n.° 29) i cui vertici P sono punti estranei alla Cfz.; ogni trilatero è circoscritto a un triangolo $\overline{\Delta}$, che gli corrisponde univocamente, e i cui lati p sono rette estranee alla Cfz.; per es. se $\Delta \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$ il corrispondente triangolo inscritto è $\overline{\Delta} \equiv 712 \cdot 734 \cdot 756$. Vi sono dunque nella Cfz. centocinque paja $(\Delta, \overline{\Delta})$ di *trilateri-triangoli* corrispondenti, le quali si aggruppano in 7 sistemi di 15 paja dotati di certe proprietà comuni; ecc. ecc.

Questi trilateri Δ si possono rappresentare col simbolo $\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$, intendendosi che nel trilatero Δ_{ij} (n.° 29) l'indice α ($\alpha=1, 2, 3, \ldots 7$) va sostituito con l'indice fisso 7. I corrispondenti triangoli $\overline{\Delta}$ si possono analogamente rappresentare col simbolo $\overline{\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}}$.

45. La F_7 si può anche scindere nel gruppo

$$\begin{aligned} F_5 &\equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv 10_3 \\ Q_5 &\equiv 6.(1, 2, 3, 4, 5) \\ Q'_5 &\equiv 7.(1, 2, 3, 4, 5) \\ r &\equiv 67; \end{aligned}$$

nel quale i due cinquilateri completi (*conjugati*) Q_5 e Q'_5, sono ordinatamente inscritti nella Cfz. F_5 ed hanno i lati omologhi concorrenti sulla retta $r \equiv 67$. Essa contiene 21 differenti gruppi, simili a questo, i quali uno ad uno corrispondono alle 21 rette r; e può in 252 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,2}$ *corrispondente a 5 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari differenti.*

Contiene 756 pentagoni semplici, che si distribuiscono in tre serie di 252, cioè:

$$\left.\begin{matrix} L_1 & L_2\ldots & L_i\ldots & L'_1 & L'_2\ldots & L'_i\ldots \\ M_1 & M_2\ldots & M_i\ldots & M'_1 & M'_2\ldots & M'_i\ldots \\ N_1 & N_2\ldots & N_i\ldots & N'_1 & N'_2\ldots & N'_i\ldots \end{matrix}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, 126).$$

Ogni pentagono L_i della prima serie è circoscritto a due pentagoni M_i, N_i (*corrispondenti* ad L_i e *conjugati* fra loro) appartenenti uno alla seconda e uno alla terza serie, e i lati dei quali s'incontrano due a due sopra una retta r.

In ciascuna serie i pentagoni si aggruppano in 126 coppie. Ogni coppia (L_i, L'_i) appartenente alla prima serie è costituita di due pentagoni *ciclicamente inscritti;* ogni coppia (M_i, M'_i) o (N_i, N'_i) appartenente alle altre due serie è costituita di due pentagoni *ciclicamente diagonali.* Le coppie conjugate (M_i, M'_i), (N_i, N'_i) corrispondono alla coppia (L_i, L'_i).

Ognuna delle ventuna rette r individua *sei* coppie di pentagoni ciclicamente inscritti e le *sei* corrispondenti paja di coppie conjugate di pentagoni ciclicamente diagonali.

46. La $F_7 \equiv (5,\ 3)^{21}_{35}$ si spezza nel gruppo

$$\begin{aligned} F_4 &\equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q_4 &\equiv 5\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q'_4 &\equiv 6\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q''_4 &\equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ F_3 &\equiv (5,\ 6,\ 7); \end{aligned}$$

nel quale i tre quadrilateri (conjugati) Q_4, Q'_4, Q''_4 sono ordinatamente inscritti nel quadrangolo completo F_4 e hanno i lati omologhi segantisi due a due sulle tre rette r, che concorrono nel punto $G \equiv 567$.

La Cfz. contiene 35 gruppi differenti analoghi a questo, i quali corrispondono uno ad uno ai 35 punti G. Essa può in 105 modi diversi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,3}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.*

Contiene 420 quadrangoli *semplici,* distribuiti in quattro serie di 105, cioè

$$\begin{array}{llll} k_1, & k_2,\ldots & k_i,\ldots & k_{105} \\ l_1, & l_2,\ldots & l_i,\ldots & l_{105} \\ m_1, & m_2,\ldots & m_i,\ldots & m_{105} \\ n_1, & n_2,\ldots & n_i,\ldots & n_{105}; \end{array}$$

ogni quadrangolo k_i della prima serie è circoscritto a uno l_i, a uno m_i e a uno n_i delle altre serie; i lati di questi tre quadrangoli (costituenti una *terna di quadrangoli conjugati, corrispondente* a k_i) s'incontrano due a due sopra tre rette r concorrenti in un punto G.

Ogni punto della Cfz. individua *tre* quadrangoli k e le *tre* corrispondenti terne di quadrangoli conjugati $(l,\ m,\ n)$.

47. La Cfz. F_7 si scinde nel gruppo

$$F_3 \equiv (1,\ 2,\ 3), \qquad F_4 \equiv (4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

$$Q_3 \equiv 4\cdot123, \qquad Q'_3 \equiv 5\cdot123, \qquad Q''_3 \equiv 6\cdot123, \qquad Q'''_3 \equiv 7\cdot123.$$

I quattro triangoli conjugati Q_3 Q'_3 Q''_3 Q'''_3 sono a due a due variamente omologici; centro comune e raggi comuni d'omologia sono il punto $G \equiv 123$ e le rette r della terna $(1,\ 2,\ 3)$; gli assi d'omologia sono i sei lati del quadrangolo completo F_4.

La F_7 contiene 35 differenti gruppi simili a questo, i quali corrispondono uno ad uno ai 35 punti G; e può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,4}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 4 poligoni funicolari.*

Contiene 140 triangoli di vertici G e lati r (*triangoli* λ), i quali si separano in 70 *paja di triangoli associati,* per esempio

$$\lambda \equiv 7\cdot 123 \equiv 712\cdot 713\cdot 723$$

$$\lambda' \equiv 7\cdot 456 \equiv 745\cdot 746\cdot 756.$$

Se quattro triangoli λ appartengono a uno stesso quadrangolo completo, i quattro triangoli associati sono due a due omologici e viceversa.

48. Si rileva dagli ultimi due numeri che mentre un punto G individua le *tre* rette in esso concorrenti e i *sei* lati del quadrangolo corrispondente (complementare), le rimanenti *dodici* rette r si aggruppano (in una sola maniera) sia in una terna di quadrangoli semplici conjugati, sia in una quaterna di triangoli λ conjugati; i lati omologhi di quelli s'incontrano due a due sulle tre r concorrenti in G, i lati omologhi di questi s'incontrano due a due sopra i sei lati del quadrangolo corrispondente a G.

Es. 6.° Configurazione di 8 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ettagono articolato.

$m = 8$ $\qquad\qquad$ $F_8 \equiv (6,\ 3)_{56}^{28}$

49. Le ventotto rette r della Cfz. $F_8 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	78	81
delle forze date . . .	a	b	c	d	e	f	g	h
le linee d'azione . . .	13	35	57	71	24	46	68	82
delle ris. binarie . . .	ab	cd	ef	gh	bc	de	fg	ha
le linee d'azione . . .	14	47	72	25	58	83	36	61
delle ris. ternarie . . .	abc	def	gha	bcd	efg	hab	cde	fgh

la linee d'azione	15	26	37	48
delle ris. quaternarie . . .	$abcd$	$bcde$	$cdef$	$defg$
	$\equiv efgh$	$fgha$	$ghab$	$habc$.

Il poligono-forze P_1 coincide con l'ottagono semplice (n.° 18)

$$P_1 \equiv 12345678;$$

il poligono P_2 delle risultanti binarie si spezza nei due quadrangoli semplici (conjugati)

$$P_2 \equiv (p_2 \equiv 1357;\quad p'_2 \equiv 2468);$$

il poligono P_3 delle risultanti ternarie coincide con l'ottagono semplice

$$P_3 \equiv 14725836;$$

il poligono P_4 delle risultanti quaternarie degenera nel quadrilatero

$$P_4 \equiv 15 \cdot 26 \cdot 37 \cdot 48 \equiv \delta$$

del quale i lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. F_8.

I lati di p_2 passano pei vertici dispari di P_1 e di P_3; quelli di p'_2 pei vertici pari degli stessi due poligoni. Le diagonali di p_2 sono $r \equiv 15$ e $r \equiv 37$, quelle di p'_2 sono $r \equiv 26$ e $r \equiv 48$; cioè coincidono coi quattro lati di P_4.

Oltre ai vertici di P_1, p_2, p'_2, P_3, la Cfz. contiene altri $\varphi = 32$ punti (n.° 6), intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine i differente (incluso $i = 1$); i due 16-goni semplici

$$P_{1,3} \equiv 1276341832547856$$
$$P'_{1,3} \equiv 1256327834761854,$$

i cui lati coincidono alternativamente con quelli di P_1 e di P_3, rappresentano coi loro vertici questi 32 punti residui.

50. La F_8 può in duemilacinquecentoventi maniere riguardarsi come la Cfz. corrispondente a un sistema equilibrato di 8 forze (incluso il dato: a, b, c,... h). I 2520 ottagoni (semplici) ch'essa contiene sono *associati* due a due per modo, che, considerato l'uno come poligono-forze, l'altro rappresenta il corrispondente poligono delle risultanti ternarie, e, considerati ambedue come poligoni-forze, ad ambedue corrisponde come poligono P_2 l'identica coppia (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati, e come poligono P_4 l'identico quadrilatero δ.

Il sistema (P_1, P_2, P_3, P_4), sopra descritto, assorbendo tutte quante le rette r, ma soli 24 punti G, individua un gruppo τ_i di 24 punti fondamentali e il corrispondente gruppo ρ_i di 32 punti residui. Con le rette r si formano 1260 sistemi analoghi a quello; onde i punti G si separano in altrettanti modi in due gruppi τ_i, ρ_i di 24 e di 32 punti rispettivamente.

51. Un pajo di quadrangoli (completi) complementari (v. n.° 53, gruppo IV) contiene *nove* coppie di quadrangoli (semplici) conjugati, che appartengono ad altrettanti ottagoni P_1 (tabella I, n.° 52). Vi sono 35 paja di quadrangoli complementari (tabella II, n.° 52) epperò anche 315 coppie (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati. E poichè a ogni ottagono P_1 corrisponde una di queste coppie, ogni coppia (p_2, p'_2) di quadrangoli (semplici) conjugati corri-

sponde a $\frac{2520}{315}=8$ ottagoni differenti (tabella III, n.° 52). Dunque gli ottagoni della Cfz. si separano in 8 gruppi di 315 ottagoni ciascuno, i quali, considerati come poligoni-forze, conducono a differenti poligoni $P_2\equiv(p_2, p'_2)$ di risultanti binarie, o anche si separano in 315 gruppi di 8, conducenti a un identico $P_2\equiv(p_2, p'_2)$.

52. Una retta r è lato comune di quindici quadrilateri δ; un quadrilatero δ contiene quattro rette r, dunque vi sono $\frac{28\cdot 15}{4}=105$ quadrilateri δ i cui lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. E poichè ogni ottagono P_1 ne individua uno, ogni δ corrisponde a $\frac{2520}{105}=24$ ottagoni differenti (tabella III). Gli ottagoni della Cfz. si separano dunque in 105 gruppi di 24 ottagoni (poligoni-forze P_1) conducenti all'identico quadrilatero δ (poligono P_4 di risultanti quaternarie) ovvero anche in 24 gruppi di 105 ottagoni P_1, conducenti a differenti quadrilateri $\delta(\equiv P_4)$.

Questi quadrilateri si possono esprimere col simbolo $\delta_{\alpha.ij}\equiv\alpha 8\cdot\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$ ove $\alpha=1, 2,\ldots 7$; purchè s'intenda che le quattro rette di $\delta_{\alpha.ij}$ siano la $r\equiv\alpha 8$ e i lati del trilatero $\Delta_{ij}^{(\alpha 7)}$ definito al n.° 44; così per esempio $\delta_{5.36}\equiv 58\cdot 12\cdot 37\cdot 46$, $\delta_{7.23}\equiv 78\cdot 14\cdot 25\cdot 36$, ecc.

Tabella I.

Tipo delle 9 *coppie* (p, p') *di quadrangoli* (*semplici*) *conjugati, contenute in un pajo* (1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8) *di quadrangoli* (*completi*) *complementari, e dei* 9 *ottagoni cui esse appartengono.*

(1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8)

(p, p')	1357, 2468	1537, 2468	1375, 2468	(p, p')
P_1	12345678	12543678	12347658	P_1
(p, p')	1357, 2648	1537, 2648	1375, 2648	(p, p')
P_1	12365478	12563478	12367458	P_1
(p, p')	1357, 2486	1537, 2486	1375, 2486	(p, p')
P_1	12345876	12543876	12347856	P_1

Tabella II

contenente le 35 paja di quadrangoli (completi) complementari.

(1, 2, 3, 4) (5, 6, 7, 8)	(1, 2, 3, 5) (4, 6, 7, 8)	(1, 2, 3, 6) (4, 5, 7, 8)	(1, 2, 3, 7) (4, 5, 6, 8)	(1, 2, 3, 8) (4, 5, 6, 7)
(1, 2, 4, 5) (3, 6, 7, 8)	(1, 2, 4, 6) (3, 5, 7, 8)	(1, 2, 4, 7) (3, 5, 6, 8)	(1, 2, 4, 8) (3, 5, 6, 7)	(1, 2, 5, 6) (3, 4, 7, 8)
(1, 2, 5, 7) (3, 4, 6, 8)	(1, 2, 5, 8) (3, 4, 6, 7)	(1, 2, 6, 7) (3, 4, 5, 8)	(1, 2, 6, 8) (3, 4, 5, 7)	(1, 2, 7, 8) (3, 4, 5, 6)
(1, 3, 4, 5) (2, 6, 7, 8)	(1, 3, 4, 6) (2, 5, 7, 8)	(1, 3, 4, 7) (2, 5, 6, 8)	(1, 3, 4, 8) (2, 5, 6, 7)	(1, 3, 5, 6) (2, 4, 7, 8)
(1, 3, 5, 7) (2, 4, 6, 8)	(1, 3, 5, 8) (2, 4, 6, 7)	(1, 3, 6, 7) (2, 4, 5, 8)	(1, 3, 6, 8) (2, 4, 5, 7)	(1, 3, 7, 8) (2, 4, 5, 6)
(1, 4, 5, 6) (2, 3, 7, 8)	(1, 4, 5, 7) (2, 3, 6, 8)	(1, 4, 5, 8) (2, 3, 6, 7)	(1, 4, 6, 7) (2, 3, 5, 8)	(1, 4, 6, 8) (2, 3, 5, 7)
(1, 4, 7, 8) (2, 3, 5, 6)	(1, 5, 6, 7) (2, 3, 4, 8)	(1, 5, 6, 8) (2, 3, 4, 7)	(1, 5, 7, 8) (2, 3, 4, 6)	(1, 6, 7, 8) (2, 3, 4, 5)

Tabella III.

Tipo degli 8 *ottagoni*
corrispondenti a una stessa coppia (p, p') *di quadrangoli* (*semplici*) *conjugati* *e tipo dei* 24 *ottagoni corrispondenti a uno stesso quadrilatero* δ.

α	12345678	13245768	13425786
β	32547618	23546718	43528716
α'	52741638	53641728	53821746
β'	72143658	63142758	83124756
γ	12745638	13645728	13825746
ε	32147658	23146758	43128756
γ'	52341678	53241768	53421786
ε'	72543618	63542718	83524716
	$(p, p') \equiv (1357 \cdot 2468)$	$(1256 \cdot 3478)$	$(1458 \cdot 3276)$

$$\delta \equiv 15 \cdot 37 \cdot 26 \cdot 48$$

NB. In ogni colonna gli ottagoni α, α'; β, β'; γ, γ'; ε, ε' sono *associati* (n.° 50).

53. La Cfz. $F_8 \equiv (6,\ 3)^{28}_{56}$ contiene inoltre (n.° 8) i seguenti gruppi

$$\text{I.}\ \left\{\begin{array}{l} F_7 \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7) \equiv (5,\ 3)^{21}_{35} \\ Q_7 \equiv 8\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7) \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\ \left\{\begin{array}{ll} F_6 & \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \equiv (4,\ 3)^{15}_{20} \\ Q_6 & \equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \\ Q'_6 & \equiv 8\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) \\ r & \equiv 78 \end{array}\right. \qquad \text{III.}\ \left\{\begin{array}{ll} F_5 & \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \equiv (3,\ 3)^{10}_{10} \equiv 10_3 \\ Q_5 & \equiv 6\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \\ Q'_5 & \equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \\ Q''_5 & \equiv 8\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \\ F_3 & \equiv (6,\ 7,\ 8) \equiv G \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\ \left\{\begin{array}{ll} F_4 & \equiv \ (1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q_4 & \equiv 5\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q'_4 & \equiv 6\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q''_4 & \equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ Q'''_4 & \equiv 8\cdot(1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ F'_4 & \equiv \ (5,\ 6,\ 7,\ 8) \end{array}\right. \qquad \text{V.}\ \left\{\begin{array}{ll} F_3 & \equiv (1,\ 2,\ 3) \equiv G \\ Q_3 & \equiv 4\cdot(1,\ 2,\ 3) \\ Q'_3 & \equiv 5\cdot(1,\ 2,\ 3) \\ Q''_3 & \equiv 6\cdot(1,\ 2,\ 3) \\ Q'''_3 & \equiv 7\cdot(1,\ 2,\ 3) \\ Q^{\text{IV}}_3 & \equiv 8\cdot(1,\ 2,\ 3) \\ F_5 & \equiv (4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8) \equiv 10_3. \end{array}\right.$$

54. Vi sono *otto* differenti gruppi I. Onde la F_8 contiene 960 Cfz. 21_3 circoscritte rispettivamente ad altrettanti settilateri completi; contiene $8\cdot 120$ terne di ettagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante terne di ettagoni (semplici) ciclicamente diagonali, ecc., ecc.; e può in $8\cdot 360$ maniere diverse riguardarsi come la *Cfz.* $F_{7,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'ettagono articolato.*

55. Vi sono 28 gruppi II, corrispondenti uno ad uno alle 28 rette r. La F_8 contiene 5040 esagoni semplici, che si separano in tre serie, ecc.; e può in 1680 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{6,2}$ *di 6 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari.*

56. Esistono 56 gruppi III, corrispondenti uno ad uno ai 56 punti G. La F_8 contiene dunque 56 Cfz.^{i} 10_3, 336 coppie di pentagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti terne di coppie di pentagoni (semplici) ciclicamente diagonali, e può in 672 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,3}$ *di 5 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari.*

57. Vi sono 70 gruppi IV. La F_8 può in 210 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{4,4}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 4 poligoni funicolari.* — I 70 quadrangoli completi contenuti nella Cfz. F_8 si separano (v. tab. II, n.° 52) in 35 paja di quadrangoli (completi) complementari (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8). Un pajo qualsivoglia assorbe *dodici* rette r; le altre *sedici* r si aggruppano, in due maniere diverse, in una quaterna di quadrilateri completi conjugati, inscritti in uno dei due quadrangoli; i loro lati omologhi si segano due a due sui lati del quadrangolo (completo) complementare.

58. Vi sono 56 gruppi V, corrispondenti uno ad uno ai punti G. La F_8 può in altrettanti modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{3,5}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 5 poligoni funicolari.* Essa contiene 280 triangoli λ (triangoli i cui lati e i cui vertici appartengono alla Cfz.); ogni punto G ne determina *cinque*, i quali due a due sono variamente omologici: centro comune e raggi comuni d'omologia sono il punto G e le tre rette r ivi concorrenti; assi di omologia sono le *dieci* rette della Cfz. $F_5 \equiv 10_3$ che appartiene al gruppo V corrispondente a G. I gruppi V sono complementari uno ad uno ai gruppi III.

Es. 7.° Configurazione di 9 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ottagono articolato.

$m = 9$ $\qquad\qquad\qquad\qquad F_9 \equiv (7, 3)^{36}_{84}.$

59. Le trentasei rette r della Cfz. $F_9 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ sono:

le linee d'azione . .	12	23	34	45	56	67	78	89	91
delle forze date . . .	a	b	c	d	e	f	g	h	i
le linee d'azione . .	13	35	57	79	92	24	46	68	81
delle ris. binarie . .	ab	cd	ef	gh	ia	bc	de	fg	hi
le linee d'azione . .	14	47	71	25	58	82	36	69	93
delle ris. ternarie . .	abc	def	ghi	bcd	efg	hia	cde	fgh	iab
le linee d'azione . .	15	59	94	48	83	37	72	26	61
delle ris. quaternarie	$abcd$	$efgh$	$iabc$	$defg$	$hiab$	$cdef$	$ghia$	$bcde$	$fghi$

Il poligono-forze P_1 e i poligoni P_2, P_4 delle risultanti binarie e quaternarie coincidono rispettivamente coi tre ennagoni semplici

$$P_1 \equiv 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \equiv A$$
$$P_2 \equiv 1\,3\,5\,7\,9\,2\,4\,6\,8 \equiv B$$
$$P_4 \equiv 1\,5\,9\,4\,8\,3\,7\,2\,6 \equiv C$$

i quali, presi nell'ordine (A, B, C) sono ciclicamente inscritti fra loro: cioè A è inscritto in B, B in C e C in A; e perciò i lati e i vertici di questi ennagoni formano una Cfz. 27_3 (n.° 98). Il poligono P_3 delle risultanti ternarie degenera in una *tripla di punti conjugati* della Cfz. cioè

$$P_3 \equiv (147,\ 258,\ 369) \equiv \tau;$$

con che s'intenda che i 9 lati di P_3 si separano in tre terne (conjugate) di rette r, rispettivamente concorrenti nei detti punti.

60. Oltre alla tripla τ di punti conjugati e ai vertici dei poligoni A, B, C, la Cfz. contiene altri $\varphi = 54$ punti (n.° 6), intersezioni scambievoli di risultanti cicliche di diverso ordine, i quali si trovano sei a sei sui nove raggi concorrenti in τ. Essi sono:

$$\overbrace{\begin{matrix}142 & 143 & 145 & 146 & 148 & 149\\ 472 & 473 & 475 & 476 & 478 & 479\\ 712 & 713 & 715 & 716 & 718 & 719\end{matrix}}^{(1,\ 4,\ 7)} \qquad \overbrace{\begin{matrix}251 & 253 & 254 & 256 & 257 & 259\\ 581 & 583 & 584 & 586 & 587 & 589\\ 821 & 823 & 824 & 826 & 827 & 829\end{matrix}}^{(2,\ 5,\ 8)}$$

$$\overbrace{\begin{matrix}361 & 362 & 364 & 365 & 367 & 368\\ 691 & 692 & 694 & 695 & 697 & 698\\ 931 & 932 & 934 & 935 & 937 & 938\end{matrix}}^{(3,\ 6,\ 9)}$$

e possono anche distribuirsi, come vertici, in tre terne di esagoni semplici appartenenti alla Cfz., cioè

$$\begin{array}{llll} & 147 & 258 & 369\\ P_{12} \equiv (235689; & 346791; & 124578) & \\ P_{24} \equiv (359268; & 137946; & 572481) & \\ P_{41} \equiv (598326; & 943761; & 154872). & \end{array}$$

I tre esagoni che si trovano in un'orizzontale hanno per lati i lati di due ennagoni del gruppo (P_1, P_2, P_4); per es. quelli dell'orizzontale P_{12} hanno i lati di P_1 e di P_2. I tre esagoni che si trovano in una colonna appartengono a una stessa Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ e vi formano un gruppo di esagoni *consociati* (n.° 27); ad esempio quelli della prima colonna sono consociati nella Cfz. F_6 individuata dal punto 147 (n.° 67) — le altre due colonne corrispondono così ai due punti che con 147 formano la tripla $\tau \equiv 147,\ 258,\ 369$.

61. Compreso il sistema $(a, b, c, \ldots h, i)$ che l'ha somministrata, la Cfz. F_9 corrisponde identicamente a 20160 sistemi diversi di 9 forze equilibrate; e contiene altrettanti ennagoni semplici, i quali si separano in 6720 *terne* $(A_i\, B_i\, C_i) \equiv \varepsilon_i$ di ennagoni *ciclicamente inscritti.* Se un ennagono (per es. B_i) di una terna si riguarda come poligono-forze P_1, gli altri due, presi ciclicamente (cioè C_i e A_i) rappresentano i corrispondenti poligoni P_2 e P_4 delle risultanti binarie e quaternarie; il poligono P_3 delle risultanti ternarie invece è in ogni modo rappresentato da una stessa *tripla di punti conjugati* τ_i, la quale, come ora si vedrà, non sempre varia con la terna ε_i.

Infatti ogni terna ε_i individua una tripla τ; ma poichè un punto della Cfz., per es. 789, appartiene a *dieci* τ diverse, cioè:

$$123 \cdot 456 \cdot 789 \quad 124 \cdot 356 \cdot 789 \quad 125 \cdot 346 \cdot 789 \quad 126 \cdot 345 \cdot 789 \quad 234 \cdot 156 \cdot 789$$

$$235 \cdot 146 \cdot 789 \quad 145 \cdot 236 \cdot 789 \quad 256 \cdot 314 \cdot 789 \quad 246 \cdot 315 \cdot 789 \quad 245 \cdot 316 \cdot 789,$$

e ogni τ contiene *tre* punti della Cfz., il numero di tutte le triple è $\frac{84 \cdot 10}{3} = 280$, epperò una stessa tripla τ di punti conjugati corrisponde a $\frac{6720}{280} = 24$ differenti terne ε di ennagoni ciclicamente inscritti (*). Ne segue che i suddetti 20160 sistemi di forze equilibrate si separano in 280 gruppi di 72 sistemi, conducenti allo stesso poligono (degenere) P_3 di risultanti ternarie. I poligoni P_2 e P_4 delle risultanti binarie e quaternarie

(*) Per es. la tripla di punti conjugati $\tau \equiv 147.258.369$ corrisponde alle seguenti 24 terne ε di ennagoni ciclicamente inscritti:

$\varepsilon_1 \equiv$	123456789	135792468	159483726	$\varepsilon_{13} \equiv$	132465798	126783459	168492735
$\varepsilon_2 \equiv$	123459786	135762498	156483729	$\varepsilon_{14} \equiv$	132495768	129783456	198462735
$\varepsilon_3 \equiv$	129453786	195762438	156489723	$\varepsilon_{15} \equiv$	192435768	123789456	138462795
$\varepsilon_4 \equiv$	129456783	195732468	153489726	$\varepsilon_{16} \equiv$	192465738	126789453	168432795
$\varepsilon_5 \equiv$	126459783	165732498	153486729	$\varepsilon_{17} \equiv$	162495738	129786453	198432765
$\varepsilon_6 \equiv$	126453789	165792438	159486723	$\varepsilon_{18} \equiv$	162435798	123786459	138492765
$\varepsilon_7 \equiv$	123756489	135492768	159783426	$\varepsilon_{19} \equiv$	132765498	126483759	168792435
$\varepsilon_8 \equiv$	123759486	135462798	156783429	$\varepsilon_{20} \equiv$	132795468	129483756	198762435
$\varepsilon_9 \equiv$	129753486	195462738	156789423	$\varepsilon_{21} \equiv$	192735468	123489756	138762495
$\varepsilon_{10} \equiv$	129756483	195432768	153789426	$\varepsilon_{22} \equiv$	192765438	126489753	168732495
$\varepsilon_{11} \equiv$	126759483	165432798	153786429	$\varepsilon_{23} \equiv$	162795438	129486753	198732465
$\varepsilon_{12} \equiv$	126753489	165492738	159786423	$\varepsilon_{24} \equiv$	162735498	123486759	138792465

relativi ad un sistema qualsivoglia, si trovano fra i 72 ennagoni del gruppo cui appartiene il poligono-forze P_1, che corrisponde a quel sistema; e completano quella delle 24 terne ε del gruppo, che è individuata da P_1.

62. Una tripla τ di punti conjugati individua tre terne conjugate di rette r e il gruppo ρ dei 54 punti che sulle medesime sono distribuiti; i 27 punti del rimanente gruppo σ costituiscono, insieme alle restanti rette r, una Cfz. 27_3 e si distribuiscono in 24 maniere diverse come vertici di tre ennagoni semplici ciclicamente inscritti. Coi punti della Cfz. $F_9 \equiv (7, 3)^{36}_{84}$ si formano 280 di tali gruppi (τ, ρ, σ); e altrettante sono le Cfz. 27_3 che si possono formare coi suoi punti e con le sue rette fondamentali.

63. La Cfz. $F_9 \equiv (7, 3)^{36}_{84}$ si scinde inoltre nei seguenti gruppi principali (n.° 8):

$$\mathrm{I.}\ \left\{\begin{array}{l} F_8 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \equiv (6, 3)^{28}_{56} \\ Q_8 \equiv 9 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{array}\right.$$

$$\mathrm{II.}\ \left\{\begin{array}{l} F_7 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \equiv (5, 3)^{21}_{35} \\ Q_7 \equiv 8 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q'_7 \equiv 9 \cdot (\qquad\qquad) \\ r \equiv 89 \end{array}\right.$$

$$\mathrm{III.}\ \left\{\begin{array}{l} F_6 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6) \equiv (4, 3)^{15}_{20} \\ Q_6 \equiv 7 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ Q'_6 \equiv 8 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q''_6 \equiv 9 \cdot (\qquad\qquad) \\ F_3 \equiv (7, 8, 9) \equiv G \end{array}\right.$$

$$\mathrm{VI.}\ \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{F_3 \equiv (7, 8, 9) \equiv G} \\ Q_3 \equiv 1 \cdot 789 & Q'''_3 \equiv 4 \cdot 789 \\ Q'_3 \equiv 2 \cdot 789 & Q^{\mathrm{IV}}_3 \equiv 5 \cdot 789 \\ Q''_3 \equiv 3 \cdot 789 & Q^{\mathrm{V}}_3 \equiv 6 \cdot 789 \\ \multicolumn{2}{l}{F_6 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6) \equiv (4, 3)^{15}_{20}} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{IV.}\ \left\{\begin{array}{l} F_5 \equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv 10_3 \\ Q_5 \equiv 6 \cdot (1, 2, 3, 4, 5) \\ Q'_5 \equiv 7 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q''_5 \equiv 8 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q'''_5 \equiv 9 \cdot (\qquad\qquad) \\ F_4 \equiv (6, 7, 8, 9) \end{array}\right.$$

$$\mathrm{V.}\ \left\{\begin{array}{l} F_4 \equiv (6, 7, 8, 9) \\ Q_4 \equiv 1 \cdot (6, 7, 8, 9) \\ Q'_4 \equiv 2 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q''_4 \equiv 3 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q'''_4 \equiv 4 \cdot (\qquad\qquad) \\ Q^{\mathrm{IV}}_4 \equiv 5 \cdot (\qquad\qquad) \\ F_5 \equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv 10_3 \end{array}\right.$$

64. Vi sono *nove* differenti gruppi del tipo I. La F_9 può dunque in 9×2520 maniere riguardarsi come la *Cfz.* $F_{8,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'ottagono articolato.* Essa contiene due distinte serie di 22680 ottagoni (semplici), tali che ogni ottagono della prima serie è circoscritto a un (corrispondente) ottagono della seconda; in altri termini vi sono ventiduemilaseicentottanta coppie di ottagoni corrispondenti, che a due a due sono associate, e le quali inoltre si separano in 9 sistemi di 2520 coppie, in ognun dei quali queste si combinano in 8 gruppi di 315 coppie d'ottagoni corrispondenti, ecc.

65. Le *trentasei* rette r si aggruppano in 945 quadrilateri δ, i cui vertici P sono punti estranei alla Cfz. $(7, 3)_{84}^{36}$; ogni quadrilatero δ (per es. $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$) è circoscritto a un corrispondente quadrangolo $\overline{\delta}$ ($\equiv 912 \cdot 934 \cdot 956 \cdot 978$) i cui lati p sono rette estranee alla Cfz. — epperò la F_9 contiene 945 paja $(\delta, \overline{\delta})$ di quadrilateri-quadrangoli corrispondenti, le quali si distribuiscono in 9 sistemi di 105 paja, ecc., ecc.

I quadrilateri δ si possono rappresentare col simbolo $\delta_{\alpha.ij}^{(\beta 9)}$; purchè s'intenda che sul quadrilatero $\delta_{\alpha.ij}$ della Cfz. F_8 (n.° 52) si operi la sostituzione $(\beta 9)$ cioè si ponga successivamente l'indice fisso 9 in luogo dell'indice $\beta = 1, 2, \ldots 9$. I corrispondenti quadrangoli $\overline{\delta}$ si possono allora rappresentare col simbolo $\overline{\delta_{\alpha.ij}^{(\beta 9)}}$.

66. I gruppi del tipo II sono *trentasei* e corrispondono univocamente alle rette r. La F_9 contiene dunque: 36 Cfz.[i] $(5, 3)_{35}^{21}$; 36×120 Cfz.[i] 21_3, circoscritte rispettivamente ad altrettante coppie di settilateri (completi) conjugati; 36×120 terne di ettagoni (semplici) ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti coppie di terne conjugate d'ettagoni (semplici) ciclicamente diagonali (per es. i tre ettagoni ciclicamente inscritti

$$1234567, \quad 1357246, \quad 1526374$$

sono rispettivamente e ordinatamente circoscritti alle due terne conjugate

$$8 \cdot 1234567, \quad 8 \cdot 1357246, \quad 8 \cdot 1526374$$

e

$$9 \cdot 1234567, \quad 9 \cdot 1357246, \quad 9 \cdot 1526374$$

di ettagoni ciclicamente diagonali).

In 36×360 maniere la F_9 si può riguardare come la *Cfz.* $F_{7,2}$ *di 7 forze equilibrate connesse da 2 poligoni funicolari.*

67. I due gruppi III e VI sono complementari come pure la terna F_3 e la Cfz. F_6 in essi contenute. Nella F_9 vi sono 84 paja di gruppi complementari, del tipo (III, VI), le quali univocamente corrispondono agli 84 punti G.

Un punto G, per es. 789, entra in *dieci* triple τ; in altri termini esistono *dieci* paja di punti conjugati fra loro e conjugati a $G \equiv 789$: esse coincidono precisamente con le *dieci* coppie di punti che sono conjugati nella Cfz. $F_6 \equiv (4, 3)_{20}^{15} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ corrispondente al punto $G \equiv 789$, ossia appartenente ai due gruppi (III, VI) individuati da questo punto.

Tolta la terna di raggi r concorrenti in un punto G e tolte le *quindici* rette r della Cfz. complementare F_6, le rimanenti *dieciotto* rette r si aggruppano in una sola maniera sia in una terna di silateri completi conjugati, sia in una sestupla di triangoli λ conjugati; i lati omologhi dei tre silateri s'incontrano due a due sui raggi r concorrenti in G e i loro vertici sono distribuiti sulle rette r della F_6 (i tre omologhi sopra una medesima r) — i lati omologhi dei sei triangoli λ si segano due a due sulle rette r della F_6 e i loro vertici sono distribuiti sui raggi r concorrenti in G (i sei omologhi sopra un medesimo raggio).

68. I 20160 esagoni (semplici) della F_9 si separano in una serie di 60×84 esagoni L e in una di altrettante corrispondenti terne d'esagoni conjugati; ogni esagono L è ordinatamente circoscritto ai tre esagoni della terna corrispondente.

I triangoli λ sono 504. Ogni punto G ne individua *sei* che sono due a due variamente omologici; centro e raggi comuni d'omologia sono il punto G e i tre raggi r che vi s'incrociano; assi d'omologia le *quindici* rette r della Cfz. F_6, che corrisponde a G.

La F_9 può riguardarsi in 5040 maniere come la *Cfz.* $F_{6,3}$ *di 6 forze equilibrate connesse da 3 poligoni funicolari;* e in 84 maniere come la *Cfz.* $F_{3,6}$ *di 3 forze equilibrate connesse da 6 poligoni funicolari.*

69. Anche i due gruppi IV e V sono complementari e complementari o corrispondenti la Cfz. F_5 e il quadrangolo completo F_4 in essi contenuti. Vi sono 126 paja di gruppi complementari, del tipo (IV, V); onde la F_9 contiene *centoventisei* quadrangoli completi F_4 e le *centoventisei* corrispondenti Cfz.i 10_3.

Un quadrangolo F_4 e la Cfz. complementare F_5 assorbono $6+10$ rette r. Le rimanenti 20 si distribuiscono in una sola maniera sia in una quaterna di cinquilateri (completi) conjugati, sia in una quintupla di quadrilateri (completi) conjugati; i lati omologhi dei quattro cinquilateri si segano due a due sui lati di F_4 e i loro vertici si trovano sulle rette della Cfz. F_5 — i lati omologhi dei cinque quadrilateri si segano due a due sulle rette della Cfz. F_5 e i loro vertici si trovano sui lati di F_4.

70. I pentagoni (semplici) della Cfz. F_9 si aggruppano in $6 \times 126 = 756$ coppie di pentagoni ciclicamente inscritti fra loro e ordinatamente circoscritti ad altrettante corrispondenti quaterne di coppie di pentagoni ciclicamente diagonali. I suoi quadrangoli (semplici) si separano in una serie di $3 \cdot 126 = 378$ quadrangoli K e in una serie di altrettante corrispondenti quintuple di quadrangoli conjugati. Ogni K è ordinatamente circoscritto ai cinque quadrangoli della quintupla corrispondente; i lati di questi ultimi s'incontrano due a due sulle dieci rette della Cfz. 10_3 corrispondente a K. (Ai tre quadrangoli semplici contenuti in uno completo F_4 corrisponde una medesima Cfz. 10_3, cioè la Cfz. complementare di F_4).

La F_9 può in 12×126 modi riguardarsi come la *Cfz.* $F_{5,4}$ *di 5 forze in equilibrio connesse da 4 poligoni funicolari;* e in 3×126 modi come la *Cfz.* $F_{4,5}$ *di 4 forze equilibrate connesse da 5 poligoni funicolari.*

Es. 8.º Configurazione di 10 forze equilibrate nel piano. Equilibrio dell'ennagono articolato.

$m = 10$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $F_{10} \equiv (8, 3)^{45}_{120}$.

71. Le quarantacinque rette r della Cfz.

$$F_{10} \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) \ (*)$$

sono:

le linee d'azione . . .	12	23	34	45	56	67	78	89	90	01
delle forze date . . .	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
le linee d'azione . . .	13	35	57	79	91	24	46	68	80	02
delle ris. binarie . . .	*ab*	*cd*	*ef*	*gh*	*ij*	*bc*	*de*	*fg*	*hi*	*ja*
le linee d'azione . . .	14	47	70	03	36	69	92	25	58	81
delle ris. ternarie . . .	*abc*	*def*	*ghi*	*jab*	*cde*	*fgh*	*ija*	*bcd*	*efg*	*hij*
le linee d'azione . . .	15	59	93	37	71	26	60	04	48	82
delle ris. quaternarie .	*abcd*	*efgh*	*ijab*	*cdef*	*ghij*	*bcde*	*fghi*	*jabc*	*defg*	*hija*
le linee d'azione . . .	16	27	38	49	50					
delle ris. quinarie . . .	*abcde*	*bcdef*	*cdefg*	*defgh*	*efghi*					
	fghij	*ghija*	*hijab*	*ijabc*	*jabcd*					

(*) Qui ed in seguito ove i numeri 10, 11, 12,... hanno il significato di indici scriveremo in loro vece per brevità 0', 1', 2',...

I poligoni P_1 e P_3 delle forze e delle risultanti cicliche ternarie sono i due decagoni semplici *associati*

$$P_1 \equiv 1234567890$$

$$P_3 \equiv 1470369258;$$

quelli P_2, P_4 delle risultanti cicliche binarie e quaternarie si spezzano rispettivamente in due paja di pentagoni semplici (conjugati), cioè

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} p_2 = 13579 \\ p'_2 = 24680 \end{array} \right\}; \qquad P_4 = \left\{ \begin{array}{l} p_4 = 15937 \\ p'_4 = 26048 \end{array} \right\};$$

il poligono P_5 delle risultanti quinarie degenera in un cinquilatero

$$P_5 - 16 \cdot 27 \cdot 38 \cdot 49 \cdot 50 = \nabla$$

del quale i lati sono rette r, mentre i vertici sono punti estranei alla Cfz.

I due pentagoni (non conjugati) p_2 e p_4, come pure i due p'_2 e p'_4, sono ciclicamente inscritti fra loro. Inoltre i lati di p_2 e di p_4 passano rispettivamente pei vertici dispari (n.° 18) di P_1 e di P_3, quelli di p'_2 e di p'_4 rispettivamente pei vertici pari degli stessi poligoni.

Vi sono, oltre ai vertici di P_1, P_2, P_3, P_4, altri $\varphi = 80$ punti G (n.° 6), intersezioni di risultanti cicliche d'ordine differente. *Quaranta* di questi si trovano distribuiti *otto* a *otto* sui lati del cinquilatero $P_5 \equiv \nabla$; gli altri *quaranta* sono i vertici dei due icosagoni (semplici)

$$P_{1,2} \equiv 12457801346790235689$$

$$P_{3,4} \equiv 14039281706958473625$$

i quali appartengono alla Cfz. (invero i lati di P_{12} coincidono alternativamente con quelli di P_1 e P_2, e i lati di P_{34} coi lati di P_3 e di P_4; epperò sono rette r) e sono doppiamente inscritti il primo in P_3, l'altro in P_1.

72. I due decagoni semplici P_1 e P_3 sono *associati*, nel senso che, come P_3 è il poligono delle risultanti ternarie delle forze date, agenti secondo i lati di P_1, così, se si fanno agire dieci forze equilibrate lungo i lati di P_3, il relativo poligono delle risultanti ternarie coincide con P_1: corrispondentemente si scambiano fra loro anche i due poligoni degeneri P_2 e P_4, mentre invece le linee d'azione delle risultanti quinarie coincidono in ambo i casi coi lati del medesimo cinquilatero $P_5 \equiv \nabla$.

73. La Cfz. $F_{10} \equiv (8, 3)^{45}_{120}$ delle forze $(a, b, c, \ldots j)$ corrisponde identicamente a $M = 181440$ sistemi di 10 forze equilibrate, compreso il dato; e con-

tiene altrettanti decagoni semplici, che si distribuiscono in 90720 coppie di decagoni associati (P_1, P_3). E in 90720 modi i punti G si separano in tre gruppi τ, ρ, σ di 40 punti ciascuno: τ si scinde in quattro poligoni analoghi a P_1, P_2, P_3, P_4; ρ si scinde in due poligoni analoghi e $P_{1,2}$ e $P_{3,4}$; σ si scinde in cinque sistemi di otto punti collocati sui lati di un cinquilatero ∇.

Essa contiene 126 coppie di Cfz.[i] complementari (F_5, F'_5), quali per es. le

$$F_5 \equiv (1, 2, 3, 4, 5) \equiv 10_3, \qquad F'_5 \equiv (6, 7, 8, 9, 0) \equiv 10_3.$$

Una di queste coppie somministra 12×12 paja di pentagoni semplici conjugati (p, p'); a ogni decagono (come poligono-forze P_1) corrisponde un pajo (p, p') di pentagoni conjugati (come poligono P_2 di risultanti binarie); onde ogni pajo di pentagoni conjugati corrisponde a $\dfrac{M}{126 \times 12 \times 12} = 10$ decagoni differenti. Per es. il pajo di pentagoni conjugati $(p, p') \equiv (13579, 24680)$ corrisponde ai seguenti dieci decagoni:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	1 2 3 0 5 8 7 6 9 4
1 4 3 6 5 8 7 0 9 2	1 4 3 2 5 0 7 8 9 6
1 6 3 8 5 0 7 2 9 4	1 6 3 4 5 2 7 0 9 8
1 8 3 0 5 2 7 4 9 6	1 8 3 6 5 4 7 2 9 0
1 0 3 2 5 4 7 6 9 8	1 0 3 8 5 6 7 4 9 2.

Dunque gli M sistemi di dieci forze equilibrate ai quali corrisponde la stessa Cfz. F_{10} si separano in 10 serie di 126×12^2 sistemi conducenti a differenti poligoni P_2 di risultanti binarie epperò anche a differenti poligoni P_4 di risultanti quaternarie.

I *dieci* decagoni cui corrisponde uno stesso pajo (p, p') sono associati a *dieci* decagoni cui corrisponde pure un medesimo altro pajo $(\bar{p}, \bar{p}')$ di pentagoni conjugati; le due paja sono ciclicamente inscritte fra loro, cioè ciascun pentagono dell'uno è simultaneamente inscritto ad uno (e un solo) pentagono dell'altro pajo.

Per esempio i decagoni associati ai precedenti dieci sono:

1 4 7 0 3 6 9 2 5 8	1 0 7 4 3 8 9 2 5 6
1 6 7 2 3 8 9 4 5 0	1 2 7 6 3 0 9 4 5 8
1 8 7 4 3 0 9 6 5 2	1 4 7 8 3 2 9 6 5 0
1 0 7 6 3 2 9 8 5 4	1 6 7 0 3 4 9 8 5 2
1 2 7 8 3 4 9 0 5 6	1 8 7 2 3 6 9 0 5 4

ai quali corrisponde lo stesso pajo $(\overline{p}, \overline{p'}) \equiv (17395,\ 40628)$ di pentagoni conjugati; il pentagono 13579 è inscritto e circoscritto al pentagono 17395, e il 24680 al 40628.

74. Si riconosce facilmente che vi sono 945 cinquilateri ∇ (i cui lati, ma non i vertici, appartengono alla Cfz. F_{10}) ognun dei quali corrisponde a 192 decagoni P_1 ossia a 96 coppie (P_1, P_3) di decagoni associati. Dunque gli M sistemi di *dieci* forze equilibrate, ai quali corrisponde la stessa Cfz. F_{10}, si separano in 945 serie di 192 ciascuna: i sistemi appartenenti a una stessa serie, sono associati due a due, e conducono tutti a un identico cinquilatero ∇ di risultanti quinarie.

75. La $F_{10} \equiv (8,\ 3)_{120}^{45}$ si scinde in dieci gruppi del tipo

$$F_9 \equiv \quad (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9) \equiv (7,\ 3)_{84}^{36}$$
$$Q_9 \equiv 0 \cdot (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9);$$

e si può in 201600 modi riguardare come la *Cfz.* $F_{9,1}$ *corrispondente all'equilibrio dell'ennagono articolato.*

76. Si omettono per brevità gli altri gruppi principali della Cfz. (n.° 8), perchè mentre non offrono difficoltà, presentano molta analogia coi casi precedentemente trattati. Notiamo soltanto che oltre alle 252 Cfz.ⁱ 10_3 delle quali già sopra si è tenuto parola, la F_{10} contiene anche altre Cfz.ⁱ duali, cioè: 14400 Cfz.ⁱ 21_3 (ogni punto G ne determina *centoventi*) e 2800 Cfz.ⁱ 27_3.

Es. 9.° Configurazione di 11 forze equilibrate nel piano. Equilibrio del decagono articolato.

$$m = 11 \qquad\qquad F_{11} \equiv (9,\ 3)_{165}^{55}.$$

77. Le cinquantacinque rette r della Cfz.

$$F'_{11} \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0,\ 1')$$

sono:

le linee d'azione . .	12	23	34	45	56	67	78	89	90	01′	1′1
delle forze date . . .	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
le linee d'azione . .	13	35	57	79	91′	1′2	24	46	68	80	01
delle ris. binarie . .	*ab*	*cd*	*ef*	*gh*	*ij*	*ka*	*bc*	*de*	*fg*	*hi*	*jk*
le linee d'azione . .	14	47	70	02	25	58	81′	1′3	36	69	91
delle ris. ternarie . .	*abc*	*def*	*ghi*	*jka*	*bcd*	*efg*	*hij*	*kab*	*cde*	*fgh*	*ijk*

le linee d'azione . .	15	59	92	26	60	03	37	71'	1'4	48	81
delle ris. quaternarie	*abcd*	*efgh*	*ijka*	*bcde*	*fghi*	*jkab*	*cdef*	*ghij*	*kabc*	*defg*	*hijk*
le linee d'azione . .	16	61'	1'5	50	04	49	93	38	82	27	71
delle ris. quinarie . .	*abcde*	*fghij*	*kabcd*	*efghi*	*jkabc*	*defgh*	*ijkab*	*cdefg*	*hijka*	*bcdef*	*ghijk*.

I poligoni delle forze e delle risultanti cicliche binarie, ternarie,... quinarie coincidono rispettivamente coi seguenti endecagoni semplici:

$$P_1 \equiv 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,0\,1'$$

$$P_2 \equiv 1\,3\,5\,7\,9\,1'\,2\,4\,6\,8\,0$$

$$P_3 \equiv 1\,4\,7\,0\,2\,5\,8\,1'\,3\,6\,9$$

$$P_4 \equiv 1\,5\,9\,2\,6\,0\,3\,7\,1'\,4\,8$$

$$P_5 \equiv 1\,6\,1'\,5\,0\,4\,9\,3\,8\,2\,7$$

i quali, presi nell'ordine ($P_1\,P_2\,P_4\,P_3\,P_5$) formano un gruppo di endecagoni ciclicamente inscritti (cioè P_1 è inscritto in P_2, P_2 in P_4, P_4 in P_3, P_3 in P_5 e P_5 in P_1) epperò i vertici e i loro lati costituiscono (n.° 98) una Cfz. 55_3.

78. Oltre ai 55 vertici di questi poligoni, la Cfz. contiene (n.° 6) altri $\varphi = 110$ punti (intersezioni scambievoli di risultanti cicliche d'ordine differente) che si separano in cinque distinti gruppi di ventidue punti. Invero essi sono vertici dei seguenti 22-goni semplici:

$$P_{1,2} \equiv 1\,2\,4\,5\,7\,8\,0\,1'\,2\,3\,5\,6\,8\,9\,1'\,1\,3\,4\,6\,7\,9\,0 \equiv \pi_3$$

$$P_{2,4} \equiv 1\,3\,7\,9\,2\,4\,8\,0\,3\,5\,9\,1'\,4\,6\,0\,1\,5\,7\,1'\,2\,6\,8 \equiv \pi_5$$

$$P_{4,3} \equiv 1\,5\,2\,6\,3\,7\,4\,8\,5\,9\,6\,0\,7\,1'\,8\,1\,9\,2\,0\,3\,1'\,4 \equiv \pi_1$$

$$P_{3,5} \equiv 1\,4\,0\,2\,8\,1'\,6\,9\,4\,7\,2\,5\,1'\,3\,9\,1\,7\,0\,5\,8\,3\,6 \equiv \pi_2$$

$$P_{5,1} \equiv 1\,6\,5\,0\,9\,3\,2\,7\,6\,1'\,0\,4\,3\,8\,7\,1\,1'\,5\,4\,9\,8\,2 \equiv \pi_4$$

i quali *appartengono* alla Cfz. F_{11} e corrispondono ordinatamente ai cinque endecagoni P_3, P_5, P_1, P_2, P_4. Il doppio suffisso di $P_{1,2}$ significa che questo poligono ha per lati le stesse ventidue rette r che limitano P_1 e P_2; similmente $P_{2,4}$ ha per lati tutt'i lati di P_2 e di P_4, ecc.

Ogni 22-gono π_i è *doppiamente inscritto* nell'endecagono corrispondente P_i; in ciascun lato di P_3, per es., si trovano *due* vertici di $P_{1,2} \equiv \pi_3$.

79. La Cfz. $F_{11} \equiv (9, 3)^{55}_{165}$ delle forze $a, b, c, \ldots j, k$ corrisponde identicamente a $\frac{10!}{2} = N$ sistemi di 11 forze equilibrate (compreso il dato) e contiene altrettanti endecagoni (semplici) differenti. Questi si aggruppano in 9! cinquine di endecagoni ciclicamente inscritti, ciascuna delle quali contenendo *tutte* le rette r e un gruppo τ di soli *cinquantacinque* punti G, individua un gruppo (corrispondente) ρ di *centodieci* punti residui; i quali a loro volta si distribuiscono come vertici in una cinquina di 22-goni semplici. Onde i punti G si separano in 9! maniere in due gruppi τ e ρ di 55 e di 110 punti; e ogni gruppo (τ, ρ) si spezza in due cinquine $(P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$, $(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5)$ di endecagoni e di 22-goni corrispondenti, dotate delle proprietà sopra descritte. E conseguentemente alla F_{11} appartengono 9! Cfz.ⁱ 55_3.

80. La F_{11} si scinde in undici sistemi del tipo

$$\text{I.} \begin{cases} F_{10} \equiv \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) \equiv (8, 3)^{45}_{120} \\ Q_{10} \equiv 1' \cdot (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) \end{cases}$$

e quindi *può in* $\frac{9! \times 11}{2}$ *maniere riguardarsi come la Cfz.* $F_{10,1}$ *corrispondente all' equilibrio del decagono articolato.*

Senza fermarci alle altre proprietà deducibili dallo studio del tipo I, osserviamo che le *cinquantacinque* rette r si aggruppano in 10395 cinquilateri ∇, i cui vertici sono punti estranei alla Cfz. Ogni ∇ (per es. $12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 \cdot 90$) è circoscritto a *un* corrispondente pentagono $\overline{\nabla}$ $(\equiv 121' \cdot 341' \cdot 561' \cdot 781' \cdot 901')$, i cui lati sono rette estranee alla Cfz. Nella F_{11} si trovano 10395 paja $(\nabla, \overline{\nabla})$ di tali cinquilateri-pentagoni corrispondenti, le quali sono distribuite in 11 gruppi di 945 paja, ecc., ecc.

Omettendo gli altri gruppi principali, notiamo solamente che oltre alle 9! Cfz.ⁱ 55_3, la F_{11} contiene altre Cfz.ⁱ duali, cioè: 55×280 Cfz.ⁱ 27_3 (ogni retta r ne determina 280); 330×120 Cfz.ⁱ 21_3 e 462 Cfz.ⁱ 10_3.

PARTE II.

§ 4.

Cfz. $\Phi_{m,n}$ del poligono articolato e di n sistemi (di m forze) capaci di tenerlo in equilibrio. Sua reciproca.

81. La Cfz. W ch'è determinata nello spazio ordinario da n m-edri circoscritti a uno stesso m-latero piano σ_m contiene:

$$\mu = \binom{m+n}{m-2} \text{ punti}$$

$$\nu = \binom{m+n}{m-1} \text{ rette}$$

$$\varpi = \binom{m+n}{m} \text{ piani;}$$

per ogni punto passano $n+2$ rette ed $\binom{n+2}{2}$ piani, in ogni retta si segano $n+1$ piani e giaciono $m-1$ punti, su ogni piano si trovano m rette ed $\binom{m}{2}$ punti.

È facile dimostrare direttamente queste e le altre proprietà della W; ma noi le riterremo note senz'altro, in quanto che W è la Cfz. reciproca (per dualità) di quella (n.° 85) studiata da S. Kantor nella Nota: *Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume* (*) e da Veronese nella Memoria: *Behandlung d. projectiv. Verhältnisse d. Räume von verschiedenen Dimensionen,* ecc. (**).

82. Projettata la Cfz. W sopra un piano, si riguardi l'm-latero (semplice) Q_m, projezione di σ_m, come un poligono articolato, e le projezioni degli spigoli laterali degli m-edri si considerino come forze applicate ai vertici di Q_m e costituenti n sistemi, ciascun dei quali capace di tenere in equilibrio il poligono.

(*) *Wiener Sitzungsberichte,* B. 80, 2e Abth., l. c.
(**) *Mathem. Annalen,* t. 19, l. c.

Diremo corrispondenti od omologhe negli n sistemi le forze applicate a un medesimo vertice di Q_m; omologhe le risultanti di forze corrispondenti, omologhi i punti comuni a forze omologhe; onde non solamente ai vertici del poligono-forze e del poligono di risultanti i-narie relativi a un sistema corrispondono univocamente i vertici dei poligoni-forze e di risultanti i-narie degli altri $n-1$ sistemi, ma in generale si viene così a stabilire una corrispondenza univoca fra gli elementi omogenei (punti e punti; rette e rette) delle n Cfz.[i] F_m individuate da quegli n sistemi di forze (n.° 6).

83. Ciò posto, le $\binom{n}{2}\binom{m}{3}$ rette, diciamole a_2, che congiungono due a due i punti omologhi di queste Cfz.[i] F_m, sono projezioni di altrettante rette di W: e come tali esse concorrono quattro a quattro in punti, $m-3$ dei quali si trovano su ogni retta a_2; onde le a_2 determinano $\binom{n}{2}\binom{m}{4}$ nuovi punti che diremo A_4.

Questi sono projezioni di altrettanti punti di W, e son perciò distribuiti tre a tre su rette, $n-2$ delle quali passano per ogni punto A_4; onde i punti A_4 determinano $\binom{n}{3}\binom{m}{4}$ nuove rette a_3.

Le a_3 sono projezioni di altrettante rette di W; onde cinque a cinque concorrono in punti, $m-4$ dei quali sono situati in ogni a_3; epperò le rette a_3 determinano $\binom{n}{3}\binom{m}{5}$ nuovi punti A_5, che sono projezioni di altrettanti punti di W.

E così, tenute sempre presenti le proprietà della Cfz. W, si riconosce che questi punti A_5 determinano altre $\binom{n}{4}\binom{m}{5}$ nuove rette a_4, ciascuna delle quali ne contiene appunto quattro; che queste rette a_4 determinano altri $\binom{n}{4}\binom{m}{6}$ nuovi punti A_6 per ciascun dei quali ne passano precisamente sei; e via dicendo, la legge essendo ben manifesta.

Si ha dunque il teorema:

Se nel piano di un poligono articolato Q sono dati n differenti sistemi di forze (*) *applicate ai suoi m vertici, e tali, che ogni sistema sia da solo capace di tenere in equilibrio il poligono, e che in ciascuno l'ordine ciclico sia dato dall'ordine col quale si*

(*) v. Note al n.° 4 e al n.° 7.

succedono i vertici di Q, si ottiene in generale una configurazione

$$\Phi_{m,n} \equiv (q, p)_\mu^\nu$$

ove

$$p = n + 2 \qquad \mu = \binom{m+n}{n+2} \qquad m \geqslant 3$$

$$q = m - 1 \qquad \nu = \binom{m+n}{n+1} \qquad n \geqslant 1.$$

Le rette r della Cfz. $\Phi_{m,n}$ sono:

gli m lati del poligono articolato;

le $n \times \binom{m}{2}$ linee d'azione delle forze e risultanti cicliche di tutt'i sistemi;

le $\binom{n}{2}\binom{m}{3}$ rette a_2, che congiungono 2 a 2 i punti omologhi delle Cfz.[i] F_m corrispondenti agli n sistemi di forze;

le $\binom{n}{3}\binom{m}{4}$ rette a_3, sulle quali si trovano 3 a 3 i punti A_4, determinati dalle a_2;

le $\binom{n}{4}\binom{m}{5}$ rette a_4, sulle quali si trovano 4 a 4 i punti A_5, determinati dalle a_3;

. . . .

e i punti G della stessa $\Phi_{m,n}$ sono:

gli m vertici e gli $\frac{m(m-3)}{2}$ punti diagonali del poligono articolato;

gli $n\binom{m}{3}$ punti delle Cfz.[i] F_m corrispondenti agli n sistemi di forze (cioè i vertici degli n poligoni-forze, i vertici dei poligoni di tutte le risultanti i-narie e i punti comuni a risultanti cicliche di ordini diversi, in ogni sistema);

gli $\binom{n}{2}\binom{m}{4}$ punti A_4, nei quali concorrono 4 a 4 le rette a_2, determinate dai punti omologhi delle Cfz.[i] F_m;

gli $\binom{n}{3}\binom{m}{5}$ punti A_5, nei quali concorrono 5 a 5 le rette a_3, determinate dai punti A_4;

gli $\binom{n}{4}\binom{m}{6}$ punti A_6, nei quali concorrono 6 a 6 le rette a_4, determinate dai punti A_5;

. . . .

In questo teorema si suppone $m \geqq 3$, $n \geqq 1$; se $n=1$ la $\Phi_{m,1}$ coincide naturalmente con la $F_{m,1}$.

84. La reciproca (nel senso di MAXWELL e di CREMONA) della Cfz. $\Phi_{m,n}$, è projezione della figura che corrisponde alla W in un *Nullsystem;* e perciò è una Cfz.

$$\Phi'_{m,n} \equiv (q_1, p_1)^{\nu}_{\varpi}$$

nella quale

$$q_1 = n+1, \qquad p_1 = m$$

e ϖ, ν hanno il significato già detto (n.° 81).

85. In generale la Cfz. V determinata nello spazio ordinario da n' m'-goni inscritti in uno stesso angolo m'-spigolo $S_{m'}$ contiene

$$\left.\begin{aligned} \mu' &= \binom{m'+n'}{m'} \text{ punti} \\ \nu' &= \binom{m'+n'}{m'-1} \text{ rette} \\ \varpi' &= \binom{m'+n'}{m'-2} \text{ piani;} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

per ogni punto passano m' rette e $\binom{m'}{2}$ piani, in ogni retta si segano $m'-1$ piani e giaciono $n'+1$ punti, su ogni piano si trovano $n'+2$ rette ed $\binom{n'+2}{2}$ punti. [È questa la Cfz. cui si allude al n.° 81; cfr. KANTOR e VERONESE, l. c.]

86. Indicando con $\varphi_{m'n'}$ la Cfz. che si ottiene projettando la V sopra un piano, si trova

$$\varphi_{m'n'} \equiv (q', p')^{\nu'}_{\mu'}$$

ove

$$q' = n'+1, \qquad p' = m'$$

e μ', ν' hanno i valori (a).

Se $m'=m$ ed $n'=n$, la $\varphi_{m',n'}$ e la $\Phi'_{m,n}$ reciproca (secondo MAXWELL-CREMONA) della $\Phi_{m,n}$ sono evidentemente Cfz.[i] della stessa specie (n.° 1); ciò che si può esprimere scrivendo:

$$\varphi_{m,n} = \Phi'_{m,n}.$$

Invece, se $m' = n + 2$ ed $n' = m - 2$, si trova

$$\Phi_{m,n} = \varphi_{n+2,\,m-2}$$

dunque la $\Phi_{m,n}$, projezione di una figura W determinata da n m-edri circoscritti a uno stesso poligono piano σ_m, si può anche riguardare come projezione di una figura V determinata da $m-2$ poligoni gobbi inscritti in uno stesso angolo $n+2$-gono S_{n+2}. Il medesimo risultato si può interpretare altrimenti così:

La Cfz. $\Phi_{m,n}$, corrispondente a un poligono articolato Q_m e ad n sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, e la reciproca (secondo Maxwell-Cremona) della $\Phi_{n+2,\,m-2}$, corrispondente a un poligono articolato Q_{n+2} e ad $m-2$ sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, sono configurazioni della stessa specie.

87. Se ne ricava il seguente corollario:

La Cfz. $\Phi_{m,n}$ contiene:

1) $\binom{m+n}{m}$ m-lateri completi inscritti in altrettanti sistemi di n Cfz.[i] F_m; epperò può in $\frac{(m-1)!}{2}\binom{m+n}{m}$ modi diversi riguardarsi come la Cfz. di un poligono articolato Q_m e di n differenti sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio;

2) $\binom{m+n}{n+2}$ fasci di $n+2$ raggi circoscritti ad altrettanti sistemi di $m-2$ $\overline{n+2}$-goni completi; epperò si può in $\frac{(n+1)!}{2}\binom{m+n}{n+2}$ modi diversi riguardare come la reciproca (secondo Maxwell-Cremona) della Cfz. corrispondente a un poligono articolato Q_{n+2} e ad $m-2$ sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio.

88. Se $m-n=2$, hanno luogo le relazioni

$$q' = q = n+1, \qquad p' = p = n+2, \qquad \varpi = \mu = \binom{m+n}{n+2},$$

cosicchè

$$\Phi_{m,n} = \varphi_{m,n} = \Phi'_{m,n};$$

ossia la Cfz. $\Phi_{m,n}$ e la sua reciproca $\Phi'_{m,n}$ (secondo Maxwell-Cremona) sono Cfz.[i] della stessa specie, quando $m-n=2$.

Esempi:

$$\Phi_{4,2} = \Phi'_{4,2} = (3,\ 4)_{15}^{20}$$

$$\Phi_{5,3} = \Phi'_{5,3} = (4,\ 5)_{56}^{70}$$

ecc.

89. Se $m-n=3$, si verificano le identità

$$p=q=m-1, \qquad \mu=\nu=\binom{2p-1}{p},$$

epperò:

$$\Phi_{m,n}\equiv\mu_p;$$

se invece $m-n=1$, hanno luogo le identità

$$p_1=q_1=m, \qquad \varpi=\nu=\binom{2p_1-1}{p_1},$$

epperò

$$\Phi'_{m,n}\equiv\varpi_{p_1}.$$

Dunque la Cfz. $\Phi_{m,n}$, corrispondente a un poligono articolato Q_m e ad n sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio, è duale quando $m-n=3$, mentre invece la sua reciproca $\Phi'_{m,n}$ è duale quando $m-n=1$. Per conseguenza se una Cfz. $\Phi_{m,n}$ è duale, la sua reciproca (secondo Maxwell-Cremona) è una Cfz. $\Phi'_{m,n}$ di specie differente (n.° 1).

Per esempio sono duali le seguenti Cfz.[i] (a sinistra)

$$\begin{array}{ll}
\Phi_{4,1}=10_3 \;=\varphi_{3,2} & \Phi'_{4,1}=(2,\ 4)_5^{10} \;=\varphi_{4,1}\\
\Phi_{5,2}=35_4 \;=\varphi_{4,3} & \Phi'_{5,2}=(3,\ 5)_{21}^{35}=\varphi_{5,2}\\
\Phi_{6,3}=126_5=\varphi_{5,4} & \Phi'_{6,3}=(4,\ 6)_{84}^{126}=\varphi_{6,3}\\
\Phi_{7,4}=462_6=\varphi_{6,5} & \Phi'_{7,4}=(5,\ 7)_{330}^{462}=\varphi_{7,4}\\
\dots\dots & \dots\dots
\end{array}$$

le quali, come indicano i simboli della prima verticale (a sinistra), rispettivamente corrispondono

a un quadrangolo articol.° Q_4 e ad 1 sistema di forze capace di tenerlo in equilibrio,
» pentagono Q_5 e a 2 sistemi capaci ecc.
» esagono Q_6 » 3 » »
» ettagono Q_7 » 4 » »
. . . .

e, come indicano i simboli della terza verticale, esse sono (n.° 86) anche le reciproche (secondo Maxwell-Cremona) delle Cfz.[i] che rispettiv. corrispondono

a un triangolo Q_3 e a 2 sistemi capaci ecc.
» quadrangolo Q_4 » 3 » »

a un pentagono Q_5 e a 4 sistemi capaci ecc.
» esagono Q_6 » 5 » »
. . . .

Le Cfz.^{i} a destra sono le reciproche (secondo Maxwell-Cremona) di quelle segnate in corrispondenza nella prima verticale a sinistra.

§ 5.

Simbolica e applicazione ad alcuni esempi.

90. Tenute presenti le ricerche di Veronese (l. c.) si riconosce che la Cfz. piana $\Phi_{m,n}$ si può ottenere come sezione della figura determinata da

$$N=p+q-1=m+n$$

punti arbitrarî di uno spazio a $q=m-1$ dimensioni.

Quest'osservazione permette di rappresentare tutti gli elementi della Cfz. mediante combinazioni di N soli indici $1, 2, \dots N$: il simbolo di un punto G contiene $q-1=m-2$ indici differenti; il simbolo di una retta r ne contiene $q(=N-p+1=m-1)$; e questa rappresentazione pone in rilievo certe corrispondenze esistenti fra gli elementi della Cfz. Per esempio:

a. Se la Cfz. $\Phi_{m,n}$ è duale ($p=q$; $m-n=3$) fra i punti e le rette della Cfz. ha luogo una corrispondenza univoca; è chiaro infatti che in questo caso un punto G e una retta r i cui simboli siano complementari [come per es. il punto $G\equiv 123\dots(q-1)$ e la retta $r\equiv q(q+1)\dots N$] si corrispondono univocamente in quanto l'uno determina l'altra e viceversa.

b. Se la Cfz. $\Phi_{m,n}$ e la sua reciproca secondo Maxwell-Cremona $\Phi'_{m,n}$ sono della stessa specie ($m-n=2$, $p=q+1$) i simboli delle r sono due a due complementari [come per es. $r\equiv 12\dots q$, $r'\equiv(q+1)\dots 2q$] e quindi le rette r si corrispondono o sono conjugate due a due.

c. Se $p=q-1$ epperò $m-n=4$ i punti G della Cfz. $\Phi_{m,n}$ si corrispondono o sono conjugati due a due; come per es. $G\equiv 12\dots(q-1)$, $G'\equiv q(q+1)\dots 2(q-1)$. Ecc. ecc.

91. Con la notazione in discorso i simboli di tutte le r passanti per uno stesso punto $123\dots(q-1)$ contengono il simbolo di questo punto; e i simboli di tutti i punti G situati in una stessa rètta $12\dots(q-1)q$ sono contenuti nel simbolo di questa retta. Ma non è altrettanto semplice la rappresentazione delle

altre figure (punteggiate, fasci, poligoni, polilateri, configurazioni F_r, ecc.) appartenenti alla $\Phi_{m,n}$; consistendo essa nell'indicare separatamente mediante i loro simboli tutt'i punti o tutte le rette della figura che si vuol considerare. Si può tuttavia con opportune convenzioni adottare una simbolica che, rendendo quella rappresentazione più semplice e compatta, permetta di meglio afferrare sia il nesso delle varie parti di una stessa figura sia i rapporti scambievoli delle varie figure contenute in una medesima configurazione.

Per maggior chiarezza spiegheremo la cosa su qualche caso particolare.

92. *Es. 1.°* Prendasi come primo esempio la Cfz. $\Phi_{5,2} \equiv 35_4$ corrispondente al pentagono articolato e a 2 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio (n.° 89). Poichè qui $N = 7$ e $q - 1 = 3$ pongasi simbolicamente

$$\Phi_{5,2} = \varphi_{4,3} = 35_4 \equiv (\underline{123}\,\overline{4567});$$

le due lineette orizzontali, mentre mettono in evidenza un punto G ($\equiv 123$) e la retta corrispondente r ($\equiv 4567$), sono in pari tempo destinate a significare che (nel caso attuale) il simbolo di quello contiene *tre* indici, il simbolo di questa ne contiene *quattro*. Converremo di usare sempre la lineetta *inferiore* a dinotare il *punto*, la *superiore* a indicare la *retta*.

Rappresenteremo:

col simbolo $(\overline{12\underline{34}}\underline{5})$ un cinquilatero completo K_5 della Cfz.; i lati avranno per simboli le combinazioni *quaternarie* (lineetta superiore), i vertici le combinazioni *ternarie* (lineetta inferiore) dei cinque indici racchiusi in parentesi: cosicchè

$$K_5 \equiv (\overline{12\underline{34}}\underline{5}) \equiv \left\{ \begin{array}{llllllllllr} 1234 & 1235 & 1245 & 1345 & 2345 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & r \text{ (lati)} \\ 123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 145 & 234 & 235 & 245 & 345 & G \text{ (vertici)} \end{array} \right\};$$

col simbolo $6 \cdot (\overline{123}\,\underline{45})$ una Cfz. $10_3 \equiv F_5$ contenuta nella $\Phi_{5,2}$; i simboli delle rette fondamentali si formeranno aggiungendo l'indice esterno 6 alle combinazioni *ternarie* (lineetta superiore), e i simboli dei punti fondamentali aggiungendo lo stesso indice 6 alle combinazioni *binarie* (lineetta inferiore) dei cinque indici racchiusi in parentesi; cosicchè

$$F_5 = 10_3 \equiv 6 \cdot (\overline{123}\,\underline{45}) \equiv \left\{ \begin{array}{lllllllllll} 1236 & 1246 & 1256 & 1346 & 1356 & 1456 & 2346 & 2356 & 2456 & 3456 & r \\ 126 & 136 & 146 & 156 & 236 & 246 & 256 & 346 & 356 & 456 & G \end{array} \right\};$$

col simbolo $67 \cdot (\overline{12}\,34\,\underline{5})$ un pentagono completo H_5 della Cfz.; i simboli dei lati si formeranno aggiungendo gl'indici esterni 67 alle combinazioni *binarie* degl'indici interni (lineetta superiore), e quelli dei vertici aggiungendo gl'indici 6 7 ai *singoli* indici interni (lineetta inferiore); cosicchè

$$H_5 \equiv 67\cdot(\overline{12}34\underline{5}) \equiv \left\{ \begin{array}{lllllllllll} 4567 & 3567 & 3467 & 2567 & 2467 & 2367 & 1567 & 1467 & 1367 & 1267 & r \\ 567 & 467 & 367 & 267 & 167 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & G \end{array} \right\}.$$

Per significare che le cinque rette di K_5 si devono prendere in un *ordine determinato* useremo il simbolo $\overline{12345}$ o meglio $1234\dot{5}$, senza parentesi; con la convenzione che

$$1234\dot{5}$$

rappresenti *ordinatamente* le cinque rette

$$1234 \quad 1235 \quad 1245 \quad 1345 \quad 2345,$$

che si ottengono col *sopprimere un dopo l'altro* nel simbolo $1234\dot{5}$ l'ultimo, il penultimo,... il primo indice; le quali rette si segano *ordinatamente* nei punti

$$123 \quad 125 \quad 145 \quad 345 \quad 234.$$

Così i dodici cinquilateri (o pentagoni) semplici contenuti nel cinquilatero completo

$$K_5 \equiv (\overline{1234}\underline{5})$$

saranno espressi dai simboli:

$$1234\dot{5} \quad 1235\dot{4} \quad 1243\dot{5} \quad 1245\dot{3} \quad 1253\dot{4} \quad 1254\dot{3}$$

$$1352\dot{4} \quad 1342\dot{5} \quad 1452\dot{3} \quad 1432\dot{5} \quad 1542\dot{3} \quad 1532\dot{4}.$$

Analogamente il simbolo $67\cdot 1234\underset{\cdot}{5}$ rappresenterà un pentagono semplice contenuto in H_5; per ottenerne *ordinatamente* i vertici

$$567 \quad 467 \quad 367 \quad 267 \quad 167$$

basterà *aggiungere successivamente* ai due indici 6 7 l'ultimo, il penultimo,... il secondo, il primo degl'indici $1234\underset{\cdot}{5}$; i lati *successivi* sono evidentemente

$$4567 \quad 3467 \quad 2367 \quad 1267 \quad 1567.$$

Epperò i dodici pentagoni semplici contenuti nel pentagono completo

$$H_5 \equiv 67\cdot(\overline{12}34\underline{5})$$

saranno espressi da:

$$67\cdot 1234\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot 1235\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot 1243\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot 1245\underset{\cdot}{3} \quad 67\cdot 1253\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot 1254\underset{\cdot}{3}$$

$$67\cdot 1352\underset{\cdot}{4} \quad 67\cdot 1342\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot 1452\underset{\cdot}{3} \quad 67\cdot 1432\underset{\cdot}{5} \quad 67\cdot 1542\underset{\cdot}{3} \quad 67\cdot 1532\underset{\cdot}{4}.$$

Rappresenteremo analogamente: col simbolo $123\cdot(456\overline{7})$ le quattro rette concorrenti nel punto 123, cioè il fascio

$$g_4 \equiv 123\cdot(456\overline{7}) \equiv \left\{1234 \quad 1235 \quad 1236 \quad 1237\right\};$$

col simbolo $12\cdot(\overline{45}6\underline{7})$ un quadrangolo completo della Cfz. 35_4, cioè

$$H_4 \equiv 12\cdot(\overline{45}6\underline{7}) \equiv \left\{\begin{array}{lllllll} 1245 & 1246 & 1247 & 1256 & 1257 & 1267 & \text{lati} \\ 124 & 125 & 126 & 127 & \ldots\ldots & & \text{vertici} \end{array}\right\};$$

col simbolo $1\cdot(\overline{456}\,\underline{\,7\,})$ un quadrilatero completo, cioè

$$K_4 \equiv 1\cdot(\overline{45}\,\overline{6}\underline{\,7\,}) \equiv \left\{\begin{array}{lllllll} 1456 & 1457 & 1467 & 1567 & \ldots\ldots & & \text{lati} \\ 145 & 146 & 147 & 156 & 157 & 167 & \text{vertici} \end{array}\right\};$$

col simbolo $456\underset{\cdot}{7}$ i quattro punti G posti nella retta 4567 cioè

$$r_4 \equiv 456\underset{\cdot}{7} \equiv \left\{456 \quad 457 \quad 467 \quad 567\right\}.$$

I tre quadrangoli semplici contenuti nell'anzidetto quadrangolo completo saranno similmente rappresentati da

$$12\cdot 456\underset{\cdot}{7} \qquad 12\cdot 465\underset{\cdot}{7} \qquad 12\cdot 457\underset{\cdot}{6}$$

e i tre quadrilateri semplici contenuti nell'anzidetto quadrilatero completo da

$$1\cdot 456\dot{7} \qquad 1\cdot 465\dot{7} \qquad 1\cdot 457\dot{6}$$

ritenuto che

$$12\cdot 456\underset{\cdot}{7} \equiv \left\{\,127 \quad 126 \quad 125 \quad 124 \quad \text{(vertici successivi)}\right\}$$

e

$$1\cdot 456\dot{7} \equiv \left\{1456 \quad 1457 \quad 1467 \quad 1567 \quad \text{(lati successivi)} \quad \right\}.$$

Questi cenni sulla simbolica da noi adottata possono bastare a darne un'idea e a mostrare che, con le debite modificazioni risguardanti il numero degl'indici costituenti i simboli dei punti fondamentali G e delle rette fondamentali r, essa vale in generale anche per le altre configurazioni $\Phi_{m,n}$.

93. Ciò premesso passiamo a indicare i due gruppi caratteristici (n.° 87) nei quali si può scindere la Cfz. duale $35_4 = \Phi_{5,2} = \varphi_{4,3}$.

Gruppo I.

$$K_5 \equiv (\overline{12\underline{34}}\underline{5})$$

$$F_5 \equiv 6 \cdot (\overline{123}\underline{45}) = 10_3$$

$$F'_5 \equiv 7 \cdot (\overline{123}\underline{45}) = 10_3$$

$$H_5 \equiv 67 \cdot (\overline{12}34\underline{5}).$$

Le Cfz.i F_5, F'_5 sono circoscritte al cinquilatero completo K_5; omologhe sono le rette delle due Cfz.i passanti per uno stesso vertice di K_5 (per es. le 1236, 1237 passanti per 123). Esse sono anche inscritte nel pentagono completo H_5: due punti omologhi (n.° 82), per es. 456, 457, si trovano sopra uno stesso lato 4567. In altri termini le rette omologhe di F_5, F'_5 s'incontrano due a due nei *dieci* vertici di K_5, e i punti omologhi si trovano due a due sui *dieci* lati di H_5.

Le figure H_5 e K_5 sono complementari epperò correlative; infatti i 5 vertici e i 10 lati del pentagono H_5 corrispondono (n.° 90, *a*) uno ad uno ai 5 lati e ai 10 vertici del cinquilatero K_5.

In K_5 essendo compresi *dodici* cinquilateri semplici, a due a due associati o ciclicamente diagonali fra loro, si ricavano in corrispondenza dal Gruppo I *dodici* subgruppi (nei quali è tenuto conto anche dell'ordine in cui si succedono le rette e i punti delle varie figure) che si separano in sei paja di subgruppi associati.

La Cfz. 35_4 contiene 21 differenti gruppi del tipo I, epperò anche 252 subgruppi dello stesso tipo (due a due associati fra loro). Ogni subgruppo rappresenta uno de'modi di riguardare la Cfz. data come Cfz. $\Phi_{5,2}$ corrispondente a un pentagono articolato e a 2 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio (n.° 87).

GRUPPO II (*).

$$\begin{array}{ll}
G_4 \equiv 123\cdot(456\overline{7}) & r \equiv 456\underline{7} \\
H'_4 \equiv 23\cdot(\overline{45}6\underline{7}) & K'_4 \equiv 1\cdot(\overline{45\underline{67}}) \\
H''_4 \equiv 13\cdot(\overline{45}6\underline{7}) & K''_4 \equiv 2\cdot(\overline{45\underline{67}}) \\
H'''_4 \equiv 12\cdot(\overline{45}6\underline{7}) & K'''_4 \equiv 3\cdot(\overline{45\underline{67}}).
\end{array}$$

I vertici di H', H'', H''' sono distribuiti tre a tre sui raggi del fascio G_4 (per es. 127, 137, 237 sul raggio 1237); i lati di K', K'', K''' s'incontrano tre a tre nei punti della punteggiata r (per es. 3456, 2456, 1456 nel punto 456).

Il quadrangolo completo $H^{(i)}$ e il quadrilatero completo $K^{(i)}$ sono complementari, in quanto i 4 vertici e i 6 lati di quello corrispondono ai 4 lati e ai 6 vertici di questo; e in generale ogni figura a sinistra è complementare (epperò correlativa per dualità) a quella a destra che le sta di fronte.

I lati dei tre quadrangoli H si segano due a due nei vertici dei tre quadrilateri K (per es. 1245, 1345 si segano in 145) e i vertici dei K sono allineati due a due sui lati degli H (per es. 145 e 245 sono allineati su 1245); cosicchè ogni K è inscritto in due quadrangoli H, ogni H è circoscritto a due quadrilateri K e precisamente il quadrilatero completo $K^{(i)}$ è inscritto nei due quadrangoli che non gli sono complementari e reciprocamente il quadrangolo completo $H^{(i)}$ è circoscritto ai due quadrilateri che non gli sono complementari.

In corrispondenza ai tre quadrangoli semplici compresi in $H_4^{(i)}$, dal gruppo II si ricavano tre subgruppi, nei quali si tien conto anche dell'ordine di successione dei lati e dei vertici; uno di questi subgruppi è per esempio il seguente:

$$\begin{array}{ll}
G \equiv 123\cdot457\underline{6} & r \equiv 457\underline{6} \\
Q'_4 \equiv 12\cdot457\underline{6} & q'_4 \equiv 3\cdot457\overline{6} \\
Q''_4 \equiv 13\cdot457\underline{6} & q''_4 \equiv 2\cdot457\overline{6} \\
Q'''_4 \equiv 23\cdot457\underline{6} & q'''_4 \equiv 1\cdot457\overline{6}.
\end{array}$$

(*) Le principali proprietà di questo gruppo II si trovano indicate anche nella Memoria VERONESE; v. pag. 175, *Math. Annalen*, l. c.

La Cfz. 35_4 contiene 35 gruppi del tipo II epperò anche 105 subgruppi dello stesso tipo; ogni subgruppo rappresenta uno dei modi di riguardare la Cfz. 35_4 come reciproca (secondo MAXWELL-CREMONA) della Cfz. $\Phi_{4,3}$ che corrisponde a un quadrangolo articolato e a tre sistemi di forze capaci di tenerlo in equilibrio.

94. *Es. 2.º Configurazione corrispondente al quadrangolo articolato ed a 3 sistemi di 4 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* $(N=7)$ (*).

$$\text{Cfz. } \Phi_{4,3} = \varphi_{5,2} = (3,\ 5)^{35}_{21} \equiv (\overline{123}45\underline{67}).$$

GRUPPO I.

$$K_4 \equiv (\overline{12\underline{3}4}) = (3,\ 2)^4_6 \qquad r \equiv 567$$

$$\left.\begin{aligned} H_4^{(1)} &\equiv 5(\overline{12}3\underline{4}) = \\ H_4^{(2)} &\equiv 6(\qquad) = \\ H_4^{(3)} &\equiv 7(\qquad) = \end{aligned}\right\} (2,\ 3)^6_4 \qquad \left.\begin{aligned} g_4^{(1)} &\equiv 67(123\overline{4}) = \\ g_4^{(2)} &\equiv 57(\qquad) = \\ g_4^{(3)} &\equiv 56(\qquad) = \end{aligned}\right\} (1,\ 4)^4_1.$$

I tre quadrangoli $H_4^{(1)}$ $H_4^{(2)}$ $H_4^{(3)}$ sono circoscritti al quadrilatero K_4; i centri dei tre fasci $g_4^{(1)}$ $g_4^{(2)}$ $g_4^{(3)}$ sono allineati sulla retta 567. Nel fascio $g_4^{(\alpha)}$ sono inscritti i due quadrangoli $H_4^{(\beta)}$, $H_4^{(\gamma)}$ (α, β, γ rappresentano gl'indici 1, 2, 3). Alla retta 567 corrisponde il quadrilatero complementare K_4.

GRUPPO II.

$$g_5 \equiv 67\cdot(1234\overline{5}) = (1,\ 5)^5_1$$

$$\left.\begin{aligned} H'_5 &\equiv 6\cdot(\overline{12}34\underline{5}) = \\ H''_5 &\equiv 7\cdot(\overline{12}34\underline{5}) = \end{aligned}\right\} (2,\ 4)^{10}_5$$

$$F_5 \equiv (\overline{123}\underline{45}) = 10_3.$$

(*) Anche in questo e nei seguenti esempi ci limitiamo a indicare i due gruppi caratteristici della configurazione (n.º 87).

La F_5 è inscritta in H'_5 e H''_5 e questi due pentagoni completi sono inscritti nel fascio g_5. In altri termini i vertici omologhi (per es. 61, 71) dei due pentagoni sono sui raggi del fascio g_5 (per es. 671); i loro lati omologhi (per es. 612, 712) si segano nei punti (per es. 12) della Cfz. $F_5 \equiv 10_3$.

Vi sono 35 gruppi del tipo I e 21 gruppi del tipo II; quelli corrispondono univocamente alle rette, questi ai punti della Cfz. $\Phi_{4,3}$.

95. *Es. 3.º Configurazione corrispondente all'esagono articolato ed a 3 sistemi di 6 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* (La Cfz. è duale; $N = 9$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{6,3} = \varphi_{5,4} = 126_5 \equiv (\overline{12345}\,\underline{6789}).$$

GRUPPO I.

$$\begin{array}{ll}
K_6 \equiv \quad (\overline{12\underline{345}}\,\underline{6}) = (5,\ 2)^6_{15} & H_6 \equiv 789 \cdot (\overline{12}\,345\underline{6}) = (2,\ 5)^{15}_6 \\
\left.\begin{array}{l} F'^{(1)}_6 \equiv 7 \cdot (\overline{123\underline{4}}\,\underline{56}) = \\ F'^{(2)}_6 \equiv 8 \cdot (\qquad\qquad) = \\ F'^{(3)}_6 \equiv 9 \cdot (\qquad\qquad) = \end{array}\right\} (4,\ 3)^{15}_{20} & \left.\begin{array}{l} f^{(1)}_6 \equiv 89 \cdot (\overline{123}\,4\underline{56}) = \\ f^{(2)}_6 \equiv 79 \cdot (\qquad\qquad) = \\ f^{(3)}_6 \equiv 78 \cdot (\qquad\qquad) = \end{array}\right\} (3,\ 4)^{20}_{15}.
\end{array}$$

Ogni figura (a sinistra) è complementare, epperò correlativa, a quella segnata di fronte (a destra). Le tre Cfz.ⁱ $F'^{(i)}_6$ sono circoscritte al silatero completo K_6 (per es. le rette 12347, 12348, 12349 passano pel vertice 1234 di K_6); le tre $f^{(i)}_6$ sono inscritte nell'esagono completo H_6 (per es. i punti 1289, 1279, 1278 sono sul lato 12789 di H_6). La Cfz. $F'^{(i)}_6$ ($i = 1, 2, 3$) è inscritta nelle due Cfz.ⁱ f_6 che non le sono complementari (per es. il punto 4567 di $F'^{(1)}_6$ giace nella retta 45679 di $f^{(2)}_6$ e nella 45678 di $f^{(3)}_6$), e reciprocamente la $f^{(i)}_6$ è circoscritta alle due F_6 che non le sono complementari (per es. la retta 12389 di $f^{(1)}_6$ passa pei punti 1238 e 1239 di $F'^{(2)}_6$ e $F'^{(3)}_6$). Dal gruppo I si ricavano 60 subgruppi, corrispondenti uno a uno ai 60 esagoni semplici contenuti in K_6.

Vi sono 84 gruppi differenti, del tipo I e 5040 subgruppi dello stesso tipo; ciascuno di quest'ultimi corrisponde a un esagono articolato e a 3 sistemi di 6 forze capaci di tenerlo in equilibrio.

Gruppo II.

$$G \equiv 1234\cdot(5678\overline{9}) \qquad\qquad r \equiv 5678\underline{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_5^{(1)} \equiv 234\cdot(\overline{56}78\underline{9}) = \\ H_5^{(2)} \equiv 134\cdot(\qquad) = \\ H_5^{(3)} \equiv 124\cdot(\qquad) = \\ H_5^{(4)} \equiv 123\cdot(\qquad) = \end{array}\right\} = (2,\ 4)_5^{10} \qquad \left.\begin{array}{l} K_5^{(1)} \equiv 1\cdot(\overline{56\underline{78}9}) = \\ K_5^{(2)} \equiv 2\cdot(\qquad) = \\ K_5^{(3)} \equiv 3\cdot(\qquad) = \\ K_5^{(4)} \equiv 4\cdot(\qquad) = \end{array}\right\} = (4,\ 2)_{10}^5$$

$$\left.\begin{array}{l} F_5^{(12)} \equiv 12\cdot(\overline{567}\underline{89}) = \\ F_5^{(13)} \equiv 13\cdot(\qquad) = \\ F_5^{(23)} \equiv 23\cdot(\qquad) = \end{array}\right\} = 10_3 \qquad \left.\begin{array}{l} F_5^{(34)} \equiv 34\cdot(\overline{567\underline{89}}) = \\ F_5^{(24)} \equiv 24\cdot(\qquad) = \\ F_5^{(14} \equiv 14\cdot(\qquad) = \end{array}\right\} = 10_3 .$$

Le figure a sinistra sono complementari e correlative alle corrispondenti di destra. I vertici dei quattro pentagoni completi H giaciono quattro a quattro sui raggi del fascio G (per es. gli omologhi 2349, 1349, 1249, 1239 sul raggio 12349 di G); i lati dei cinquilateri completi K s'incontrano quattro a quattro nei punti della punteggiata r (per es. gli omologhi 15678, 25678, 35678, 45678 nel punto 5678 di r). Rappresentando con α, β, γ, δ i quattro indici 1, 2, 3, 4, i lati omologhi di $H_5^{(\alpha)}$ e $H_5^{(\beta)}$ si segano due a due nei punti della Cfz. $F_5^{(\gamma\delta)}$, e i vertici omologhi di $K_5^{(\alpha)}$ e $K_5^{(\beta)}$ sono due a due allineati sulle rette della Cfz. $F_5^{(\alpha\beta)}$ (per es. i lati 23456 di $H_5^{(1)}$ e 13456 di $H_5^{(2)}$ si segano nel punto 3456 della $F_5^{(34)}$; i vertici 1789 di $K_5^{(1)}$ e 2789 di $K_5^{(2)}$ sono sulla retta 12789 di $F_5^{(12)}$); cosicchè la $F_5^{(\alpha\beta)} \equiv 10_3$ è circoscritta ai due cinquilateri completi $K^{(\alpha)}$, $K^{(\beta)}$ ed è in pari tempo inscritta nei due pentagoni completi $H^{(\gamma)}$, $H^{(\delta)}$.

Il gruppo II somministra 12 subgruppi, che corrispondono univocamente ai 12 pentagoni semplici contenuti in K_5, e sono *associati* due a due; chiamando associati due subgruppi corrispondenti a due pentagoni semplici ciclicamente diagonali fra loro.

Vi sono 126 gruppi del tipo II e 756 paja di subgruppi associati, dello stesso tipo II.

96. *Es. 4.° Configurazione corrispondente al pentagono articolato ed a 4 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* ($N=9$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{5,4}=\varphi_{6,3}=(4,\ 6)^{126}_{84}\equiv(\overline{1234}56\underline{789}).$$

Gruppo I.

$$\begin{array}{llll}
K_5\equiv & (\overline{123}\underline{345}) & & r\equiv 6789 \\
F_5^{(1)}\equiv & 6\cdot(\overline{123}\underline{45})=10_3 & g_5^{(1)} & \equiv 789\cdot(1234\overline{5}) \\
F_5^{(2)}\equiv & 7\cdot(\qquad) & g_5^{(2)} & \equiv 689\cdot(\qquad) \\
F_5^{(3)}\equiv & 8\cdot(\qquad) & g_5^{(3)} & \equiv 679\cdot(\qquad) \\
F_5^{(4)}\equiv & 9\cdot(\qquad) & g_5^{(4)} & \equiv 678\cdot(\qquad) \\
H_5^{(1)}\equiv & 67\cdot(\overline{12}34\underline{5}) & H_5^{(4)}\equiv & 89\cdot(\overline{12}34\underline{5}) \\
H_5^{(2)}\equiv & 68\cdot(\qquad) & H_5^{(5)}\equiv & 79\cdot(\qquad) \\
H_5^{(3)}\equiv & 69\cdot(\qquad) & H_5^{(6)}\equiv & 78\cdot(\qquad).
\end{array}$$

Le quattro Cfz.ⁱ F_5 sono circoscritte al cinquilatero completo K_5; i centri dei quattro fasci g_5 sono situati sulla $r\equiv 6789$. La $F_5^{(i)}$ è inscritta in tre dei sei pentagoni completi H_5, il fascio $g_5^{(i)}$ è circoscritto agli altri tre pentagoni H_5 ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$).

Vi sono 126 gruppi del tipo I, corrispondenti uno ad uno alle rette della Cfz.

Gruppo II.

$$\begin{array}{llll}
g_6\equiv 789\cdot(12345\overline{6}) & F_6\equiv & (\overline{1234}\underline{456})=(4,\ 3)^{15}_{20} & \\
H_6^{(1)}\equiv\ 78\cdot(\overline{12}345\underline{6}) & f_6^{(1)}\equiv 9\cdot(\overline{1234}\underline{56})= & & \\
H_6^{(2)}\equiv\ 79\cdot(\qquad) & f_6^{(2)}\equiv 8\cdot(\qquad)= & & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}(3,\ 4)^{20}_{15}. \\
H_6^{(3)}\equiv\ 89\cdot(\qquad) & f_6^{(3)}\equiv 7\cdot(\qquad)= & &
\end{array}$$

Il fascio g_6 è circoscritto ai tre esagoni H_6; la Cfz. F_6 è inscritta nelle tre Cfz.ⁱ f_6. I lati omologhi di $H_6^{(\alpha)}$ e $H_6^{(\beta)}$ s'incontrano nei punti della $f_6^{(\gamma)}$; i punti omologhi di $f_6^{(\alpha)}$ e $f_6^{(\beta)}$ sono allineati sui lati di $H_6^{(\gamma)}$.

Vi sono 84 gruppi del tipo II, corrispondenti uno ad uno ai punti della Cfz.

97. *Es. 5.º Configurazione corrispondente al pentagono articolato ed a 3 sistemi di 5 forze capaci di tenerlo in equilibrio.* ($N=8$).

$$\text{Cfz. } \Phi_{5,3}=\varphi_{5,3}=(4,\ 5)_{56}^{70}\equiv(\overset{r}{\overline{1\,2\,3\,4}}\,\overset{r'}{\overline{5\,\underline{6\,7\,8}}}).$$

La Cfz. è della stessa specie della sua reciproca (secondo Maxwell-Cremona). Le rette fondamentali sono due a due conjugate. I due gruppi caratteristici nei quali la Cfz. si può scindere sono identici ossia si fondono nel seguente

Gruppo unico.

$$\begin{array}{llll}
K_5\equiv & (\overline{1\,2\,\underline{3\,4}\,\underline{5}}) & g_5\equiv & 6\,7\,8\cdot(1\,2\,3\,4\,\overline{5}) \\
F_5^{(1)}\equiv & 6\cdot(\overline{1\,2\,3}\,\underline{4\,5})=10_3 & H_5^{1)}\equiv & 7\,8\cdot(\overline{1\,2}\,3\,4\,\underline{5}) \\
F_5^{(2)}\equiv & 7\cdot(\qquad\quad) & H_5^{(2)}\equiv & 6\,8\cdot(\qquad\quad) \\
F_5^{(3)}\equiv & 8\cdot(\qquad\quad) & H_5^{3)}\equiv & 6\,7\cdot(\qquad\quad).
\end{array}$$

Il cinquilatero completo K_5 è inscritto nelle tre Cfz.ⁱ F_5; il fascio g_5 è circoscritto ai tre pentagoni completi H_5. I punti omologhi di $F_5^{(\alpha)}$ ed $F_5^{(\beta)}$ sono allineati sui lati di $H_5^{(\gamma)}$; i lati omologhi di $H_5^{(\alpha)}$ e $H_5^{(\beta)}$ s'incontrano nei punti fondamentali della $F_5^{(\gamma)}$. Alle rette delle varie figure della prima colonna sono conjugate le rette delle figure corrispondenti nella seconda colonna.

Vi sono 56 gruppi analoghi a questo; ogni punto G ne individua uno.

APPENDICE.

§ 6.

Sulle configurazioni duali d'indice 3, cioè del tipo μ_3.

98. Siano $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_k$ k poligoni semplici di n vertici, *ciclicamente inscritti* fra loro, tali cioè che P_1 sia inscritto in P_2, P_2 in $P_3, \ldots$ P_k in P_1. Questi poligoni hanno complessivamente kn vertici ed altrettanti lati. Un lato di P_i $(i=1,\ 2,\ldots\ k)$ contiene 3 punti, cioè due vertici di P_i e uno di P_{i-1} (se $i=1$ intendasi $i-1=0=k$); in un vertice di P_i concorrono 3 rette, cioè due lati di P_i e un lato di P_{i+1} (se $i=k$, intendasi $i+1=k+1=1$). Dunque un gruppo $(P_1\ P_2 \ldots P_k)$ di k n-goni semplici ciclicamente inscritti fra loro costituisce una Cfz. μ_3 ove $\mu = nk$. Questa definizione delle Cfz.i duali d'indice 3 include anche i due casi indicati da Reye (*): cioè quello di due n-goni simultaneamente inscritti l'uno nell'altro (Cfz. $2n_3$), e quello di un n-gono semplice circoscritto a sè medesimo (Cfz. n_3).

Dati in un piano $k-1$ poligoni $P_1\ P_2 \ldots P_{k-1}$ in modo che ciascuno sia inscritto nel susseguente, per completare, quando sia possibile, la Cfz. nk_3 basta costruire un n-gono semplice P_k i cui vertici cadano sui lati di P_1 e i cui lati passino pei vertici di P_{k-1}. Il qual problema, fissato che sia l'ordine nel quale questa doppia condizione dev'essere soddisfatta, è in generale di secondo grado e si risolve geometricamente col metodo di falsa posizione.

Dai §§ 1 e 3 si rileva che ogni configurazione F_m corrispondente a più di cinque forze equilibrate contiene uno o più gruppi di Cfz.i μ_3.

(*) L. c. n.° 2.

§ 7.

Osservazione sulla Cfz. d'equilibrio di 6 forze nel piano; sua analogia con la Cfz. delle rette di Steiner nell'esagrammo di Pascal.

99. Con la simbolica adottata da Cremona (*) e da Veronese (**) nello studio dell'esagrammo di Pascal, i principali gruppi della configurazione di 6 forze, discussi nel § 3 Es. 4°, si potrebbero esprimere mediante certe combinazioni dei 15 trilateri Δ_{ij} (n.° 29) (***).

Senza fermarci su questo concetto, il cui sviluppo richiederebbe una non breve disgressione, osserviamo come, prescindendo dal significato meccanico, le proprietà geometriche della Cfz. F_6 competano a tutte le configurazioni della stessa specie; in particolare anche, per esempio, alla Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ costituita dalle rette e dai punti di Steiner nell'esagrammo di Pascal.

Da quest'osservazione risulta per es. che con le rette di Steiner si possono formare 60 esagoni semplici, 6 Cfz.^{i} $(3, 3)_{10}^{10}$ e 6 cinquilateri completi, 144 pentagoni semplici, 15 Cfz.^{i} $(2, 3)_4^6$ e 30 quadrilateri completi, 135 quadrangoli semplici, 60 triangoli λ, 20 terne di raggi concorrenti, per modo che i vertici di tutte queste figure siano punti di Steiner; e inoltre 15 trilateri Δ, i cui vertici sono estranei alla Cfz. $(4, 3)_{20}^{15}$ ossia non coincidono con punti di Steiner. E i 60 esagoni si separano in *dieci* gruppi di *sei* o in *quindici* gruppi di *quattro* per modo, che tutti gli esagoni di un gruppo siano dotati di certe proprietà comuni; e i pentagoni si combinano in 36 paja di pentagoni ciclicamente inscritti e in 36 corrispondenti paja di pentagoni ciclicamente diagonali: ogni poligono della prima serie essendo circoscritto al poligono corrispondente dell'altra; ecc. ecc.

(*) *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di* Pascal. Memoria della R. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, tom. I (1876-77).

(**) *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour* $n = 3, 4, 5, 6$, *en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique.* Annali di Matematica, t. XI.

(***) Una simbolica analoga estesa ad esprimere opportunamente i varî gruppi contenuti nelle Cfz.^{i} d'equilibrio di 7, 8, 9,... forze, permetterebbe di ravvicinare la teorica di queste configurazioni a quella delle sostituzioni di 7, 8, 9,... lettere.

Ne è difficile stabilire una corrispondenza univoca fra le 15 rette di Steiner e le 15 rette fondamentali dell'esagrammo, di maniera che ogni gruppo di quelle individui un gruppo di queste. Per es.: Ai tre esagoni fondamentali le cui rette di Pascal concorrono in un punto G di Steiner corrispondono tre esagoni di rette Steiner consociati e appartenenti alla tripla T individuata dal punto G (n.° 31), ecc. Se poi si considerano le intersezioni P' delle rette di Steiner, che non cadono in punti di Steiner, e le intersezioni P delle rette fondamentali, che non cadono nei sei punti fondamentali, si ottiene una serie di 45 punti P' e una serie di 45 punti P, che si corrispondono univocamente. Ogni gruppo di punti P determina un gruppo di punti P'; da certe proprietà del primo gruppo, si possono ricavare proprietà dell'altro. Per es.

I punti P sono distribuiti tre a tre su 60 rette di Pascal; a ognuna di queste corrisponde un trilatero Δ_{ij}; un punto di Steiner individua tre rette di Pascal: i corrispondenti trilateri hanno i vertici sulle tre rette di Pascal determinate dal punto conjugato (*).

Ecc. ecc.

I punti P' determinano tre a tre 60 triangoli $\mathbf{P}$, a ognun dei quali corrisponde un trilatero Δ_{ij}; un punto di Steiner individua tre triangoli $\mathbf{P}$: i trilateri corrispondenti hanno per vertici i vertici dei tre triangoli $\mathbf{P}$ individuati dal punto conjugato.

§ 8.

Proprietà dei poliedri completi.

100. La configurazione di m forze equilibrate nel piano essendo in sostanza la projezione di un m-edro completo, gli spigoli e i vertici di questo si possono indicare con gli stessi simboli che dinotano le rette e i punti fondamentali della Cfz. F_m; epperò si può rappresentare un m-edro completo Π_m con la stessa segnatura $(1, 2, 3, \ldots m)$ che simbolicamente esprime la F_m. Se dunque i simboli dei varî gruppi di tale Cfz. s'interpretano convenientemente, si ottengono corrispondentemente dei teoremi relativi all'm-edro completo.

(*) Cfr. Veronese, *Interprétations*, ecc., l. c., n.° 24.

Si ha per esempio per $m=5$:

I dieci spigoli del pentaedro completo sono lati di sei paja di pentagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti fra loro.

Per $m=6$:

Gli spigoli dell'esaedro completo sono distribuiti tre a tre su 15 iperboloidi Δ_{ij} (n.° 29), dei quali essi sono generatrici. Ogni spigolo è *generatrice* comune di tre iperboloidi.

Gli spigoli dell'esaedro completo si aggruppano (in sessanta maniere diverse) in un esagono gobbo (semplice) e in due trispigoli (conjugati) che rispettivamente ne projettano i vertici di posto pari e di posto dispari; i rimanenti tre spigoli sono generatrici di un iperboloide che corrisponde univocamente all'esagono gobbo.

Questi 60 esagoni gobbi sono inscritti 6 a 6 in uno stesso pajo di trispigoli conjugati e 4 a 4 corrispondono a uno stesso iperboloide; e quindi si distribuiscono in *dieci* gruppi di *sei* o in *quindici* gruppi di *quattro* esagoni (n.° 33, tab. I e II) secondo che come nucleo o base del gruppo si prende il sistema di due trispigoli conjugati ovvero l'iperboloide.

Con gli spigoli dell'esaedro completo si formano 36 paja di pentagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti e 36 corrispondenti paja di pentagoni piani (semplici) ciclicamente diagonali. Un pajo qualunque di quei pentagoni è circoscritto al pajo corrispondente di questi. Due paja corrispondenti di pentagoni contengono tutt'e quindici gli spigoli dell'esaedro.

Ecc. ecc.

Per $m=7$ si ha:

Gli spigoli r dell'ettaedro completo si aggruppano (in 120 maniere diverse) in una terna di ettagoni gobbi (semplici) ciclicamente inscritti, che, assorbendo 21 vertici dell'ettaedro, determinano i 14 rimanenti. Questi punti sono vertici di tre 14-goni gobbi (semplici) aventi per lati quattordici spigoli r e corrispondenti uno ad uno agli ettagoni anzidetti. Ogni 14-gono è doppiamente inscritto nell'ettagono corrispondente.

Ecc. ecc.

§ 9.

Equilibrio dei poligoni articolati sollecitati da forze applicate *sui* lati.

101. Se un poligono articolato è in equilibrio sotto l'azione di m forze poste nel suo piano e applicate ad altrettanti punti dati (ad arbitrio) sui suoi m lati; le linee delle reazioni nei suoi vertici sono lati di un poligono funicolare connettente le forze date.

Infatti se l_{i-1}, l_i, l_{i+1} sono tre lati successivi del poligono articolato, si può sciogliere il vincolo che collega i primi due aggiungendo nel vertice $(l_{i-1}\, l_i)$ due certe forze uguali opposte agenti lungo una retta determinata $a_{i-1.i}$; e si può sciogliere il vincolo che collega gli ultimi due lati aggiungendo nel vertice $(l_i\, l_{i+1})$ due certe forze uguali opposte agenti lungo una retta determinata $a_{i.i+1}$. E poichè la forza esterna P_i, applicata in un punto di l_i, e le reazioni negli estremi di questo lato sono in equilibrio, le rette $a_{i-1.i}$, $a_{i.i+1}$ devono evidentemente concorrere sulla P_i.

Dunque le rette a_{12}, a_{23}, a_{34},... a_{m1}, cioè le linee delle reazioni nei vertici successivi $(l_1\, l_2)$, $(l_2\, l_3)$, $(l_3\, l_4)$,... $(l_m\, l_1)$ del poligono articolato, formano un poligono semplice Q_m circoscritto al poligono articolato e inscritto nel poligono delle forze esterne. Inoltre, le reazioni nei vertici essendo uguali e contrarie alle azioni esercitate sui vertici stessi dalle forze date, ne viene che queste si possono scomporre in $2m$ forze aventi per linee d'azione i lati di Q_m e a due a due uguali opposte; onde Q_m è un poligono funicolare delle forze date.

Questa proprietà si presta alla soluzione di diversi problemi. Per esempio: « Date le linee delle reazioni negli m vertici di un poligono articolato e assegnati su $m-1$ lati i punti d'applicazione delle forze che devono tenere il poligono in equilibrio, si possono determinare, proporzionalmente, tutte le forze esterne e tutte le reazioni nei vertici, nonchè il punto d'applicazione della forza agente sull'm^o lato. »

« Date le reazioni degli m vertici si possono determinare le intensità, direzioni e punti d'applicazione (sugli m lati) delle forze esterne che devono tenere in equilibrio il poligono articolato. »

« Date le linee d'azione di $m-1$ forze esterne e le intensità di quelle applicate sopra *due* lati consecutivi, si possono determinare completamente tutte le forze esterne e le reazioni di tutti i vertici. »

102. Riassumendo in un solo enunciato il teorema testè dimostrato e quello già noto, richiamato al n.° 12, si ha la seguente proposizione generale:

Un sistema piano di forze equilibrate è capace di tenere in equilibrio tutt'i poligoni articolati che ne sono poligoni funicolari oppure tutt'i poligoni articolati che sono inscrittibili in un qualsivoglia poligono funicolare del sistema, secondo che le forze s'intendono applicate rispettivamente ai vertici oppure a punti comunque assegnati *sui* lati dei poligoni articolati.

Ed è evidente il corollario:

Se un poligono articolato è tenuto in equilibrio da m forze poste nel suo piano e applicate a punti dati dei suoi lati; le linee d'azione di queste forze e delle rispettive risultanti cicliche, e quelle delle reazioni nei vertici, sono le rette fondamentali di una configurazione F_{m+1} (§ 2).

Milano, 10 gennaio 1884.

INDICE.

PARTE I.

PARTE II.

APPENDICE.

Sur le principe de la moindre action.

(*Par* G. Sabinine, *professeur à l'Université d'Odessa.*)

L'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a, le premier, formulé le principe de la moindre action dans toute sa généralité; sa formulation de ce principe n'a plus besoin d'un supplément de clarté et de précision, depuis que le Géomètre François Bertrand a inséré la note qui est placée au bas de la page 277 du premier volume de la Mécanique analytique (troisième édition 1855 a.) Au bas de la page 279 du même volume il y a une autre note, dans laquelle Bertrand remarque qu'il n'est pas absolument exact de dire que, en général, pour toutes les variations possibles doit avoir lieu l'équation que Lagrange obtient, en remplaçant la variation de la demi-somme des forces vives par la variation de la fonction des forces et en égalant à zéro la variation d'une intégrale qui soit désignée par V et qui, sous le signe $\int$, a la fonction contenante la somme des quantités de mouvement des divers corps multipliées par les élements des trajectoires respectives. Il est impossible de ne pas admettre que cette remarque de Bertrand est vraie. O. Rodrigues dans son article (*) déduit les équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action suivant la méthode du facteur variable que Lagrange a donnée et qu'on emploie ordinairement dans la solution des questions du maxima ou de minima relatifs. Rodrigues fait reposer sa déduction des équations du mouvement sur l'hypothèse que les variations du temps relatives à ses limites sont des quantités *arbitraires et indépendantes entre elles,* sans prouver que cette hypothèse a lieu nécessairement; mais, en toute rigueur, il faudrait le démontrer, car les variations du temps, relatives à ses limites sont assujetties

---

(*) *De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement rapportées aux variables indépendantes,* par O. Rodrigues. Correspondances sur l'Ecole Polytechnique, t. 3, 1813 a.

à cette condition: les positions initiales et finales du système sont censées données, tout en laissant subsister l'équation des forces vives.

Dans l'article présent je propose la déduction des équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action suivant la méthode du facteur variable que j'ai mentionnée; mais les procédés que j'emploierai dans ma déduction des équations du mouvement ne dépendent pas d'une hypothèse quelconque par rapport aux variations du temps relatives à ses limites. De plus ces procédés servent aussi à déduire les équations du mouvement, comme celles qui découlent de la condition que la première variation de l'intégrale V soit intégrable et qu'en même temps ait lieu l'équation qui résulte de la différentiation de l'équation des forces vives par rapport à la caractéristique Δ, admettant que Δ est le signe des variations en général. La déduction dont il vient d'être parlé, fait l'objet du premier paragraphe.

Dans le second paragraphe je démontrerai que la seconde variation de l'intégrale qui doit avoir un minimum, est toujours positive, au moins, tant que l'intervalle de temps auquel se rapporte l'intégrale reste inférieur à une certaine limite, et l'on peut affirmer, dès lors, que le minimum a lieu effectivement, en général. Mon analyse, au fond, est la même que j'ai employée dans mon article sur la discussion de la seconde variation des intégrales définies multiples (*); mais seulement la démonstration, qui a occupé la page 119 de cet article, est remplacée, dans l'article présent, par l'autre démonstration qui est plus claire. Il est aisé de voir par mon analyse que dans la réduction, qu'il faut faire subir à la seconde variation d'une intégrale définie à une variable indépendante, par une transformation, se réduit identiquement à zéro une expression analogue à celle qui est désignée par ρ (for. 66) dans mon article que je viens d'indiquer. C'est là ce qui distingue mon travail des autres, dans lesquels, comme je le sais, se traitait la théorie de la discussion de la seconde variation d'une intégrale définie à une variable indépendante.

Dans le troisième paragraphe, en faisant l'application de la théorie exposée dans les paragraphes précédents au mouvement elliptique des corps celestes, je démontrerai le théorème de Jacobi (**) pour le cas plus simple où l'intégrale

(*) *Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples;* par M. G. Sabinine. Bulletin des sciences Mathématiques et Astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery, 2e série, t. 2, p. 100-129. 1878 a.

(**) Ce théorème a été publié, pour la première fois, dans le Journal de Crelle (vol. 17, p. 74). Jacobi l'a donné sans démonstration.

qui doit avoir un minimum, est comparée aux intégrales analogues relatives à tout autre mouvement qui n'a lieu que dans le plan même d'orbite d'une planète.

L'analyse que je développe dans cet article, est également applicable au cas d'un cours libre et au cas d'un système quelconque. Aussi, uniquement pour plus de brièveté, nous bornerons-nous au cas d'un corps libre, en supposant, que sa masse est égale à l'unité.

§ 1.

Comme la quantité de mouvement d'un corps libre dont la masse est égale à l'unité, est la vitesse et que l'élément de la trajectoire est le produit de la vitesse par l'élément du temps, si l'on désigne par $2T$ la force vive d'un corps libre et par t le temps, l'intégrale que nous avons à considerer, aura pour valeur

$$V = \int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt \tag{1}$$

t_1 et t_0 étant les limites du temps, c'est à dire, les valeurs de t entre lesquelles l'intégrale V est prise et qui répondent aux deux positions données du corps.

Si l'on rapporte la position du corps à trois axes de coordonnées rectangulaires, que l'on désigne par x, y, z, les coordonnées du corps au bout du temps t et que l'on pose

$$p = \frac{dx}{dt}, \qquad q = \frac{dy}{dt}, \qquad r = \frac{dz}{dt}, \tag{2}$$

on aura

$$T = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2). \tag{3}$$

Si l'on désigne par Π la fonction des forces qui, étant donnée, ne contient pas t explicitement, l'équation des forces vives sera

$$\Pi - T = h \tag{4}$$

h étant une constante arbitraire.

L'équation (4), étant différentiée par rapport à la caractéristique δ, donne

$$\delta\Pi = \delta T \tag{5}$$

en admettant que δ est le signe des variations tronquées et en supposant que la constante h, étant donnée, ne varie pas dans la différentiation avec la caractéristique δ.

Les deux positions du corps, étant données, on a

$$\left.\begin{array}{lll} \Big/^{t_2}\delta x=-\Big/^{t_1}p\,\delta t, & \Big/^{t_1}\delta y=-\Big/^{t_1}q\,\delta t, & \Big/^{t_1}\delta z=-\Big/^{t_1}r\,\delta t \\ \Big/^{t_0}\delta x=-\Big/^{t_0}p\,\delta t, & \Big/^{t_0}\delta y=-\Big/^{t_0}q\,\delta t, & \Big/^{t_0}\delta z=-\Big/^{t_0}r\,\delta t \end{array}\right\} \qquad (6)$$

$\Big/$ étant le signe de substitution.

Pour déduire les équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action, il faut rechercher le minimum relatif de l'intégrale V (1) avec la condition que, à les équations (6) près, les équations (4) et (5) aient lieu.

Suivant la méthode du facteur variable et indéterminé que Lagrange a donné et qu'on emploie ordinairement dans la solution des questions de maxima ou de minima relatifs, la recherche indiquée du minimum se ramène à la recherche du minimum absolu de cette autre intégrale

$$W=2\int_{t_0}^{t_1} v\,dt,$$

dans laquelle

$$v=T+\lambda\,[\Pi-T-h]$$

λ, étant le facteur variable qu'il faut déterminer ainsi que les fonctions x, y, z au moyen de l'équation (4) et d'autres équations qui dérivent de l'équation $\Delta W=0$.

La variation ΔW, comme on le sait, prend la forme

$$\Delta W=\Big/_{t_0}^{t_1} 2[T+\lambda(\Pi-T-h)]\,\delta t+2\int_{t_0}^{t_1}[\delta T+\lambda\delta(\Pi-T)]\,dt \qquad (7)$$

et ayant égard à l'équation (4) et en faisant pour abréger

$$\left.\begin{array}{lll} L=\lambda\dfrac{d\Pi}{dx}, & M=\lambda\dfrac{d\Pi}{dy}, & N=\lambda\dfrac{d\Pi}{dz}, \\ P=(1-\lambda)p, & Q=(1-\lambda)q, & R=(1-\lambda)r \end{array}\right\} \qquad (8)$$

la formule (7) se reduit à celle-ci:

$$\Delta W=\Big|_{t_0}^{t_1} 2T\delta t+2\int_{t_0}^{t_1}\left[L\delta x+M\delta y+N\delta z+P\frac{d\delta x}{dt}+Q\frac{d\delta y}{dt}+R\frac{d\delta z}{dt}\right]dt.$$

Si l'on intégre par parties, ayant égard aux équations (6) et que l'on pose

$$\delta_1 v = \left(L - \frac{dP}{dt}\right)\delta x + \left(M - \frac{dQ}{dt}\right)dy + \left(N - \frac{dR}{dt}\right)\delta z \cdot \tag{9}$$

la variation ΔW dévient

$$\Delta W = -\int_{t_0}^{t_1} 2(1-2\lambda)T\delta t + 2\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta_1 v. \tag{10}$$

D'après les formules (8), (9) et (10) l'équation $\Delta W = 0$ entraine les suivantes

$$\int_{t_0}^{t_1} (1-2\lambda)T\delta t = 0 \tag{11}$$

et

$$\lambda\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d[1-\lambda)p]}{dt}, \qquad \lambda\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d[(1-\lambda)q]}{dt}, \qquad \lambda\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d[(1-\lambda)r]}{dt}. \tag{12}$$

Les équations (12) et (4) serviront à déterminer les fonctions x, y, z et λ.

Si l'on multiplie les équations (12) respectivement par p, q, r et qu'on les ajoute, on trouve, toutes réductions faites et en observant que $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dT}{dt}$

$$\frac{d[(1-2\lambda)T]}{dt} = 0.$$

En vertu de l'intégration de cette équation, on obtiendra

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{C}{2T} \tag{13}$$

C étant une constante arbitraire.

En remplaçant, dans cette dernière équation, la quantité T par $\Pi - h$ en vertu de la formule (4), on aura

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{C}{2(\Pi - h)}. \tag{14}$$

Les deux formules (13) et (14) bien montrent que, si la constante C n'est pas nulle, la fonction T est celle de x, y, z qui ne contient pas t explicitement. C'est ce qui resulte aussi de la formule (3) et des équations

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d\Pi}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{15}$$

aux quelles se réduisent les équations (12), si $C = 0$, car alors $\lambda = \frac{1}{2}$ en vertu de chacune des deux égalités (13) et (14). On doit donc conclure que T est la fonction de x, y, z qui ne contient pas t explicitement et par suite que

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dT}{dz}\frac{dz}{dt}.$$

D'un autre coté, si, d'après la formule (3), l'on différentie T par rapport à t, on recevra

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}.$$

Nous aurons donc l'égalité

$$\frac{dT}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dT}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dT}{dt}\frac{dz}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}$$

qui est l'identité et par suite qui conduit à la conclusion que

$$\frac{dT}{dx}=\frac{d^2x}{dt^2}\qquad\frac{dT}{dy}=\frac{d^2y}{dt^2}\qquad\frac{dT}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}.\tag{16}$$

La différentiation de l'équation (13) par rapport à chacune de x, y, z donne

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{C\frac{dT}{dx}}{2T^2},\qquad\frac{d\lambda}{dy}=\frac{C\frac{dT}{dy}}{2T^2},\qquad\frac{d\lambda}{dz}=\frac{C\frac{dT}{dz}}{2T^2}.$$

En remplaçant dans ces dernières équations, les dérivées $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dT}{dy}$ et $\frac{dT}{dz}$ respectivement par celles $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ en vertu des égalités (16) nous obtiendrons les équations

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{C\frac{d^2x}{dt^2}}{2T^2}.\qquad\frac{d\lambda}{dy}=\frac{C\frac{d^2y}{dt^2}}{2T^2},\qquad\frac{d\lambda}{dz}=\frac{C\frac{d^2z}{dt^2}}{2T^2}.\tag{17}$$

La différentiation de l'équation (14) par rapport à chacune de x, y, z donne

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{C\frac{d\Pi}{dx}}{2(\Pi-h)^2}\qquad\frac{d\lambda}{dy}=\frac{C\frac{d\Pi}{dy}}{2(\Pi-h)^2}\qquad\frac{d\lambda}{dz}=\frac{C\frac{d\Pi}{dz}}{2(\Pi-h)^2}.\tag{18}$$

Les égalités (13) ou (14), (17) et (18) conduisent à la conclusion que $\lambda=\frac{1}{2}$. En effet, pour le démontrer, il n'y a qu'à considerer les deux cas:

1) Supposons la constante C égale à zéro. Alors de chacune des deux égalités (13) et (14) il suit immédiatement que $\lambda = \frac{1}{2}$;

2) Supposons la constante C différente de 0. Alors, si l'on compare les deux formules (17) et (18), on trouve, en observant que $T = \Pi - h$ et en faisant abstraction de la solution $\frac{1}{T} = 0$

$$C\left(\frac{d\Pi}{dx} - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 \qquad C\left(\frac{d\Pi}{dy} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0 \qquad C\left(\frac{d\Pi}{dz} - \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0. \tag{19}$$

Comme les équations (19) sont obtenues en vertu de supposition que C n'est pas nulle, ces équations (19) se reduisent à les (15).

En retranchant membre à membre la seconde des équations (15) multipliée par $\frac{dx}{dt}$ de la première multipliée par $\frac{dy}{dt}$, nous obtiendrons:

$$\frac{\frac{d\Pi}{dx}\frac{dy}{dt} - \frac{d\Pi}{dy}\frac{dx}{dt}}{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}} = 1. \tag{20}$$

En retranchant membre à membre la seconde des équations (12) multipliée par p de la primière multipliée par q, on trouve, toutes reductions faites et en observant que $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{\frac{d\Pi}{dx}\frac{dy}{dt} - \frac{d\Pi}{dy}\frac{dx}{dt}}{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{1-\lambda}{\lambda}. \tag{21}$$

Si l'on compare les deux formules (20) et (21), on aura

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = 1$$

ou

$$(1 - 2\lambda) = 0 \tag{22}$$

d'où l'on tire que $\lambda = \frac{1}{2}$.

Si l'on substitue cette valeur de λ dans les équations (12), ces dernières se reduisent à les (15) qui ne sont autre chose que les équations du mouvement, A cause de l'équation (22) et d'une des deux formules (13) et (14), la constante C est égale à zéro, en vertu de quoi l'égalité (11) qui se réduit à celle $C(\delta t_1 - \delta t_0) = 0$, a lieu quelle que soit l'hypothèse par rapport aux variations δt_1 et δt_0.

Il est évident que les procédes que nous avons suivis dans la démonstration que $\lambda = \frac{1}{2}$, servent à déduire les équations du mouvement comme celles qui découlent de la condition que la première variation de l'intégrale V (1) soit intégrable et en même temps que l'équation (5) ait lieu.

§ 2.

D'après la formule [(10) § 1], la variation $\Delta^2 W$ n'est autre chose que l'intégrale de la différentielle de $\delta_1 v$, due aux accroissements δx, δy, δz et aux accroissements δp, δq, δr. En effet: 1) la différentielle de ΔW due au accroissement δt dévient nulle en vertu des équations [(12), (22) § 1]; 2) la différentielle de $\int_{t_0}^{t_1} (1 - 2\lambda) T$ due aux accroissements δp, δq, δr se réduit à zéro en vertu de l'équation [(22) § 1]; quant au facteur λ, il ne faut pas le différentier avec la caractéristique δ; c'est ce qui resulte en général de la théorie de la discussion de la seconde variation des intégrales définies. Nous pouvons donc réprésenter cette variation $\Delta^2 W$ par

$$\Delta^2 W = 2K_1 + 2K_2 + 2K_3 \tag{23}$$

en posant pour abréger

$$K_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z - \frac{d\left(\frac{dP}{dp}\frac{d\delta x}{dt}\right)}{dt}\right]\delta x \tag{24}$$

$$K_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z - \frac{d\left(\frac{dQ}{dq}\frac{d\delta y}{dt}\right)}{dt}\right]\delta y \tag{25}$$

$$K_3 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \frac{dN}{dz}\delta z - \frac{d\left(\frac{dR}{dr}\frac{d\delta z}{dt}\right)}{dt}\right]\delta z. \tag{26}$$

Pour obtenir une expression de $\Delta^2 W$ qui puisse servir à la distinction du minimum de l'intégrale W, nous transformerons chacune des trois intégrales K_1

(24), K_2 (25) et K_3 (26), en substituant aux variations tronquées δx, δy, δz des fonctions linéaires de nouvelles variables, dont les coefficients se déterminent de la manière suivante.

Comme le nombre des équations [(15) § 1] est égal à 3 et que ces équations sont du seconde ordre, le nombre des constantes arbitraires qui n'entrent dans les fonctions x, y, z que par suite de l'intégration des équations [(15) § 1], est, en général, égal à 6. Désignant par c_m une de ces constantes, formons les expressions

$$X_n = \Sigma_m \kappa_{n,m} \frac{dx}{dc_m}, \qquad Y_n = \Sigma_m \kappa_{n,m} \frac{dy}{dc_m}, \qquad Z_n = \Sigma_m \kappa_{n,m} \frac{dz}{dc_m} \tag{27}$$

dans lesquelles $\kappa_{n,m}$ sont des constantes arbitraires qui n'entrent ni dans les fonctions x, y, z, ni dans les équations [(15) et (4) § 1].

La somme Σ s'étendant aux constantes c_m, n désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 3, et m désignant, en général, tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6.

Nous représenterons encore ces mêmes valeurs par

$$X_\nu = \Sigma_\mu \kappa_{\nu,\mu} \frac{dx}{dc_\mu}, \qquad Y_\nu = \Sigma_\mu \kappa_{\nu,\mu} \frac{dy}{dc_\mu}, \qquad Z_\nu = \Sigma_\mu \kappa_{\nu,\mu} \frac{dz}{dc_\mu} \tag{28}$$

en changeant les indices n et m respectivement en ν et μ.

Les valeurs générales des x, y, z, considerées comme fonctions des c_m, étant indépendantes, et les constantes $\kappa_{n,m}$ parfaitement arbitraires, on peut toujours attribuer à ces dernières des valeurs, pour lesquelles le déterminant D des 3^2 quantités (27) ne sera pas égal à zéro.

En prenant les dérivées des équations [(15) § 1] et [(4) § 1] par rapport aux constantes c_m, multipliant ensuite ces dérivées par les constantes $\kappa_{n,m}$ et faisant la somme des produits, nous obtiendrons des équations différentielles linéaires par rapport aux expression (27) de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx} X_n + \frac{dL}{dy} Y_n + \frac{dL}{dz} Z_n - \frac{d\left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt}\right)}{dt} = 0 \\
&\frac{dM}{dx} X_n + \frac{dM}{dy} Y_n + \frac{dM}{dz} Z_n - \frac{d\left(\frac{dQ}{dq}\frac{dY_n}{dt}\right)}{dt} = 0 \\
&\frac{dN}{dx} X_n + \frac{dN}{dy} Y_n + \frac{dN}{dz} Z_n + \frac{d\left(\frac{dR}{dr}\frac{dZ_n}{dt}\right)}{dt} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\frac{d\Pi}{dx}X_n+\frac{d\Pi}{dy}Y_n+\frac{d\Pi}{dz}Z_n-\left(p\frac{dX_n}{dt}+q\frac{dY_n}{dt}+r\frac{dZ_n}{dt}\right)=0 \tag{30}$$

ou de la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx}X_\nu+\frac{dL}{dy}Y_\nu+\frac{dL}{dz}Z_\nu-\frac{d\left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt}\right)}{dt}=0\\
&\frac{dM}{dx}X_\nu+\frac{dM}{dy}Y_\nu+\frac{dM}{dz}Z_\nu-\frac{d\left(\frac{dQ}{dq}\frac{dY_\nu}{dt}\right)}{dt}=0\\
&\frac{dN}{dx}X_\nu+\frac{dN}{dy}Y_\nu+\frac{dN}{dz}Z_\nu-\frac{d\left(\frac{dR}{dr}\frac{dZ_\nu}{dt}\right)}{dt}=0
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\frac{d\Pi}{dx}X_\nu+\frac{d\Pi}{dy}Y_\nu+\frac{d\Pi}{dz}Z_\nu-\left(p\frac{dX_\nu}{dt}+q\frac{dY_\nu}{dt}+r\frac{dZ_\nu}{dt}\right)=0 \tag{32}$$

d'où l'on doit conclure que les valeurs X, Y, Z sont les solutions des équations (29) et (30) ou (31) et (32) analogues à celles, dont les intégrales sont connues par le théorème de Jacobi (Journal de Crelle, t. 17).

Le déterminant D des 3^2 expressions (27) ou (28), n'étant pas égal à zéro, on peut exprimer les 3 variations tronquées δx, δy, δz en fonctions d'autant de variables indépendantes ω_n, en prenant les expressions (27) pour coefficients de ces variables, on aura

$$\delta x=\Sigma_n X_n\omega_n,\qquad \delta y=\Sigma_n Y_n\omega_n,\qquad \delta z=\Sigma_n Z_n\omega_n \tag{33}$$

ou

$$\delta x=\Sigma_\nu X_\nu\omega_\nu,\qquad \delta y=\Sigma_\nu Y_\nu\omega_\nu,\qquad \delta z=\Sigma_\nu Z_\nu\omega_\nu \tag{34}$$

où les variables ω_n ou ω_ν doivent être considerées comme fonctions arbitraires de t.

La transformation indiquée d'une quelconque des trois intégrales K_1 (24), K_2 (25) et K_3 (26) est analogue à celle des deux autres, par conséquant nous bornons nous à exposer la transformation de la première intégrale K_1 (24).

Si, sous le signe $\int$ de l'intégrale K_1 (24), l'on substitue à δx qui est mis en parenthèse, son expréssion (34), que l'on y remplace δx qui est hors de parenthèse, par son expréssion (33) et que l'on pose

$$\xi=\Sigma_n X_n\frac{d\omega_n}{dt}=\Sigma_\nu X_\nu\frac{d\omega_\nu}{dt} \tag{35}$$

on trouve, en intégrant par parties et ayant égard aux équations (31)

$$\left.\begin{aligned} K_1 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dP}{dp}\xi\delta x\right) + \int_{t_0}^{t_1}\frac{dP}{dp}\xi^2\,dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt\left[\Sigma_n\Sigma_\nu\left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt}X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n\right]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que l'expréssion

$$\Sigma_n\Sigma_\nu\left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt}X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n \tag{37}$$

par substitution aux variables ω_n et ω_ν des fonctions de nouvelles variables, se reduit identiquement à zéro (*). En effet, en remettant dans l'expression (37) pour X_n, X_ν leurs valeurs (27) (28), l'expression (37) devient

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_n\Sigma_\nu\left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt}X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n = \\ = \Sigma_m\Sigma_\mu\left(\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} - \frac{dP}{dc_\mu}\frac{dx}{dc_m}\right)\frac{d\omega_\mu}{dt}\omega_m \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

si l'on fait, pour abréger

$$\omega_m = \Sigma_n K_{n,m}\,\omega_n \qquad \omega_\mu = \Sigma_\nu K_{\nu,\mu}\,\omega_\nu$$

m ainsi que μ désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6.

En prenant les 6^2 constantes arbitraires $K_{m,e}$ ou $K_{\mu,\varepsilon}$ qui n'entrent ni dans les fonctions x, y, z, ni dans les équations [(15) et (4) § 1] et en attribuant à ces constantes des valeurs pour lesquelles le determinant des 6^2 quantités $K_{m,e}$ ou $K_{\mu,\varepsilon}$ ne soit pas égal à zéro, nous posons

$$\omega_m = \Sigma_e K_{m,e}\,l_e, \qquad \omega_\mu = \Sigma_\varepsilon K_{\mu,\varepsilon}\,l_\varepsilon \tag{39}$$

l_e ou l_ε étant les fonction arbitraires de t, et e ainsi que ε désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6.

De plus, en prenant les 6^2 constantes arbitraires $K_{g,e}$ ou $K_{\gamma,\varepsilon}$ qui n'entrent ni dans les fonctions x, y, z, ni dans équation [(15) et (4) § 1] et en attri-

(*) Par la démonstration analogue à celle que je propose dans l'article présent doit être remplacée la démonstration qui est éxposée à la page 119 de mon article signalé plus haut. Bulletin des sciences Mathématiques et Astronomiques, rédigé par Darboux, Hoüel et Tannery, 2e série, t. 2, p. 100-123. 1878 a.

buant à ces constantes des valeurs pour lesquelles le déterminant des 6^2 quantités $K_{g,e}$ ou $K_{\gamma,\varepsilon}$ ne soit pas égal à zéro, nous posons

$$l_e = \Sigma_g K_{g,e} \tau_g, \qquad l_\varepsilon = \Sigma_\gamma K_{\gamma,\varepsilon} \tau_\gamma \tag{40}$$

τ_g ou τ_γ étant les fonctions arbitraires de t et g ainsi que γ désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6.

Cela posé, nous substituons d'abord, dans l'égalité (38), aux ω_m et ω_μ leurs expressions (39) et nous y remplaçons ensuite l_e et l_ε par leurs expressions (40), alors l'égalité (38) se rendra

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_n \Sigma_\nu \left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt} X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n = \\
&= \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \left[\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} (K_{g,e}\tau_g)\frac{d(K_{\gamma,\varepsilon}\tau_\gamma)}{dt}\right] - \\
&- \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \left[\frac{dP}{dc_\mu}\frac{dx}{dc_m} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} (K_{g,e}\tau_g)\frac{d(K_{\gamma,\varepsilon}\tau_\gamma)}{dt}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

En changeant, dans le second terme du second membre de cette égalité (41) les indices m, e, g, respectivement en μ, ε, γ, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_n \Sigma_\nu \left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt} X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n = \\
&= \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \left[\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} (K_{g,e}\tau_g)\frac{d(K_{\gamma,\varepsilon}\tau_\gamma)}{dt}\right] - \\
&- \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \left[\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} (K_{\gamma,\varepsilon}\tau_\gamma)\frac{d(K_{g,e}\tau_g)}{dt}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Nous formons maintenant les 6^2 équations

$$K_{g,e}\tau_g = \Sigma_a \Sigma_b K_{g,a} K_{e,b} \Omega_a K_b \tag{43}$$

dans lesquelles les inconnues sont les fonctions arbitraires Ω_a de t, multipliées par des constantes arbitraires K_b; les coefficients de ces inconnues sont les produits des constantes arbitraires $K_{g,a}$ et $K_{e,b}$ qui n'entrent ainsi que K_b ni dans les fonctions x, y, z, ni dans les équations [(15) et (4) § 1]. Les constantes $K_{g,a}$ et $K_{e,b}$, étant parfaitement arbitraires, on peut toujours leur attribuer des valeurs pour lesquelles le déterminant des 6^2 quantités $K_{g,a}$ ne soit pas égal à zéro; il en est de même du déterminant des 6^2 quantités $K_{e,b}$; a ainsi que b désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6.

Nous représenterons encore les mêmes équations (43) par

$$K_{\gamma,\varepsilon}\,\tau_\gamma = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta\, K_{\gamma,\alpha}\, K_{\varepsilon,\beta}\, \Omega_\alpha\, K_\beta \tag{44}$$

en changeant les indices g, e, a et b respectivement en γ, ε, α et β.

Si l'on porte, dans l'égalité (42) les valeurs de $K_{g,e}$, τ_g et $K_{\gamma,\varepsilon}$, τ_γ, comprises dans les équations (43) et (44), l'expression (37) se réduira à celle-ci

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_n \Sigma_\nu \left(\frac{dP}{dp}\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dP}{dp}\frac{dX_\nu}{dt} X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n = \\
&= \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_a \Sigma_\alpha \Sigma_b \Sigma_\beta \left[\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} K_{e,b} K_{\varepsilon,\beta} K_{g,a} K_{\gamma,\alpha}\, \Omega_a \frac{d\Omega_\alpha}{dt} K_b K_\beta\right] - \\
&- \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_e \Sigma_\varepsilon \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_a \Sigma_\alpha \Sigma_b \Sigma_\beta \left[\frac{dP}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,e} K_{\mu,\varepsilon} K_{e,b} K_{\varepsilon,\beta} K_{g,a} K_{\gamma,\alpha}\, \Omega_\alpha \frac{d\Omega_a}{dt} K_b K_\beta\right].
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

En changeant, dans le second terme du second membre de l'égalité (45), les indices g et a respectivement en γ et α, il est évident que le second membre de cette égalité (45) est égal à zéro, ce qu'il faillait démontrer.

Comme l'expression (37) par substitution aux variables ω_n et ω_ν des fonctions de nouvelles variables se réduit identiquement à zéro, la formule (36) déviendra

$$K_1 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dP}{dp}\xi\,\delta x\right) + \int_{t_0}^{t_1}\frac{dP}{dp}\xi^2\,dt. \tag{46}$$

En appliquant à chacune des deux intégrales K_2 (25) et K_3 (26) les procédés que nous avons suivies dans la transformation de l'intégrale K_1 (24), et en posant

$$\eta = \Sigma_n Y_n \frac{d\omega_n}{dt} = \Sigma_\nu Y_\nu \frac{d\omega_\nu}{dt} \tag{47}$$

$$\zeta = \Sigma_n Z_n \frac{d\omega_n}{dt} = \Sigma_\nu Z_\nu \frac{d\omega_\nu}{dt} \tag{48}$$

on trouve

$$K_2 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dQ}{dq}\eta\,\delta y\right) + \int_{t_0}^{t_1}\frac{dQ}{dq}\eta^2\,dt \tag{49}$$

$$K_3 = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dR}{dr}\zeta\,\delta z\right) + \int_{t_0}^{t_1}\frac{dR}{dr}\zeta^2\,dt. \tag{50}$$

A cause des formules (23), (46), (49) et (50) la variation de $\Delta^2 W$ se représentera par

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2 W = -\int_{t_0}^{t_1} 2\left(\frac{dP}{dp}\xi\delta x + \frac{dQ}{dq}\eta\delta y + \frac{dR}{dr}\zeta\delta z\right) + \\ +2\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{dP}{dp}\xi^2 + \frac{dQ}{dq}\eta^2 + \frac{dR}{dr}\zeta^2\right)dt.\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Si, dans l'équation [(5) § 1], l'on substitue aux variations δx, δy, δz leurs expréssions (33) ou (34), on obtiendra, ayant égard aux équations (30) ou (32)

$$\Sigma_n(pX_n + qY_n + rZ_n)\frac{d\omega_n}{dt} = 0$$

ou

$$\Sigma_\nu(pX_\nu + qY_\nu + rZ_\nu)\frac{d\omega_\nu}{dt} = 0. \quad (52)$$

En vertu des formules (35), (47) et (48) ces équations (52) peuvent être mises sous la forme

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0. \quad (53)$$

D'après les formules (35), (47) et (48), on a

$$\xi = \frac{d\delta x}{dt} - \Sigma_n\omega_n\frac{dX_n}{dt}, \qquad \eta = \frac{d\delta y}{dt} - \Sigma_n\omega_n\frac{dY_n}{dt}, \qquad \zeta = \frac{d\delta z}{dt} - \Sigma_n\omega_n\frac{dZ_n}{dt}.$$

Les quantités ω_n, étant déterminées au moyen des équations (33), les quantités ξ, η, ζ peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{d\delta x}{dt} - \Sigma_n\left[\frac{dX_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dX_n}\delta x + \frac{dX_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dY_n}\delta y + \frac{dX_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dZ_n}\delta z\right]\\ \eta &= \frac{d\delta y}{dt} - \Sigma_n\left[\frac{dY_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dX_n}\delta x + \frac{dY_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dY_n}\delta y + \frac{dY_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dZ_n}\delta z\right]\\ \zeta &= \frac{d\delta z}{dt} - \Sigma_n\left[\frac{dZ_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dX_n}\delta x + \frac{dZ_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dY_n}\delta y + \frac{dZ_n}{dt}\frac{1}{D}\frac{dD}{dZ_n}\delta z\right].\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

À cause des formules (51) [(8) § 1] [(6) § 1] (53) et [(22) § 1] les variations $\Delta^2 W$ déviendra

$$\Delta^2 W = \int_{t_0}^{t_1}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,dt. \quad (55)$$

Si enfin nous éliminons, sous le signe $\int$, de $\Delta^2 W$ (55), une des trois quantités ξ, η, ζ, par exemple η, au moyen de l'équation (53), la variation $\Delta^2 W$

se représentera par

$$\Delta^2 W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{q^2+p^2}{q^2} \right) \xi^2 + \left(\frac{q^2+r^2}{q^2} \right) \zeta^2 + 2 \frac{p\,r}{q^2} \xi \zeta \right] dt \tag{56}$$

et la discussion de $\Delta^2 W$ (56) se ramène a celle de l'expression différentielle homogène entière et du second dégré par rapport à deux variables ξ et ζ arbitraires et indépendantes entre elles.

Il est évident que sont remplies les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression qui se trouve sous le signe $\int$ de $\Delta^2 W$ (56) soit positive; par conséquent la variation $\Delta^2 W$ (56) sera positive, si l'expression dont il vient de s'agir conserve la valeur finie pour toutes les valeurs de t qui sont comprises entre t_0 et t_1; ce qui aura lieu, si, pour les mêmes valeurs de t, les quantités ξ et ζ demeurent finies. Or δx, δy, δz, étant arbitraires, les formules (54) montrent que les quantités ξ et ζ seront finies pour toutes les valeurs de t, comprises entre t_0 et t_1, si, pour les mêmes valeurs de t, le déterminant D n'est pas nul et tous ses éléments ne deviennent pas infinies. Comme il peut arriver que l'on aura $D=0$ pour certaines valeurs de t et qu'il pourra se faire aussi que, pour certaines valeurs de t, quelqu'un des éléments du déterminant D cesse d'être fini; — il est nécessaire de trouver les valeurs de t, pour lesquelles ces circonstances se présenteront. Les valeurs indiquées de t serviront à déterminer les limites de l'intégrale V (1), entre lesquelles cette intégrale doit être prise pour qu'elle ait un minimum. Supposons que pour $t=t_0$ inférieure limite de l'intégrale V (1), le déterminant D n'est pas nul et tous ses élements ne déviennent pas infinis; supposons de même que le temps t, croissant à partir de t_0, a la plus petite valeur $t_0+\tau$, pour laquelle le déterminant D est égal à zéro ou quelqu'un de ses éléments devient infini. C'est alors seulement, pour les valeurs de t, comprises entre t_0 et $t_0+\tau$ que les quantités ξ et ζ seront finies et, en conséquence, que l'intégrale V (1) aura un minimum effectivement, si elle est prise entre t_0 et t_1, en supposant que $t_1 < t_0 + \tau$.

Il est à remarquer que, si tous les éléments du déterminant D ne deviennent pas infinis pour toute valeur de t et que ce déterminant D s'annule pour certaines valeurs de t pourvu que tous ses éléments ne sont pas à la fois nulles; alors, au moyen des constantes arbitraires $K_{n,m}$ qui entrent dans le déterminant D, on peut faire en sorte que le déterminant D soit égal à zéro pour t_0, telle valeur de t qui peut être choisie à volonté; alors donc la discussion de la variation $\Delta^2 W$ se ramène à la détermination de $t_0 + \tau$ qui, en supposant que t croit à partir de t_0, est la plus petite valeur de t, pour laquelle le déterminant D devient nul. Comme la valeur t_0 est arbitraire, dans le cas indiqué la discussion de la variation $\Delta^2 W$ se ramène à la détermination de τ.

Il ne rest qu'à démontrer deux égalités qu'on déduit ordinairement, en opérant la réduction de la variation $\Delta^2 W$ au moyen des procédés qui découlent du théorème de JACOBI [Journal de CRELLE, t. 17]. La première de ces égalités est

$$\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt} X_n + \frac{dY_n}{dt} Y_\nu - \frac{dY_\nu}{dt} Y_n + \frac{dZ_n}{dt} Z_\nu - \frac{dZ_\nu}{dt} Z_n = H_{n,\nu} \tag{57}$$

$H_{n,\nu}$ étant une constante quelconque et la seconde

$$\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt} X_n + \frac{dY_n}{dt} Y_\nu - \frac{dY_\nu}{dt} Y_n + \frac{dZ_n}{dt} Z_\nu - \frac{dZ_\nu}{dt} Z_n = 0. \tag{58}$$

D'après les formules [(8) § 1] les équations (29) et (31) représenteront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\Pi}{dx^2} X_n + \frac{d^2\Pi}{dx\,dy} Y_n + \frac{d^2\Pi}{dx\,dz} Z_n &= \frac{d^2 X_n}{dt^2} \\
\frac{d^2\Pi}{dy^2} Y_n + \frac{d^2\Pi}{dy\,dx} X_n + \frac{d^2\Pi}{dy\,dz} Z_n &= \frac{d^2 Y_n}{dt^2} \\
\frac{d^2\Pi}{dz^2} Z_n + \frac{d^2\Pi}{dz\,dx} X_n + \frac{d^2\Pi}{dz\,dy} Y_n &= \frac{d^2 Z_n}{dt^2}
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\Pi}{dx^2} X_\nu + \frac{d^2\Pi}{dx\,dy} Y_\nu + \frac{d^2\Pi}{dx\,dz} Z_\nu &= \frac{d^2 X_\nu}{dt^2} \\
\frac{d^2\Pi}{dy^2} Y_\nu + \frac{d^2\Pi}{dy\,dx} X_\nu + \frac{d^2\Pi}{dy\,dz} Z_\nu &= \frac{d^2 Y_\nu}{dt^2} \\
\frac{d^2\Pi}{dz} Z_\nu + \frac{d^2\Pi}{dz\,dx} X_\nu + \frac{d^2\Pi}{dz\,dy} Y_\nu &= \frac{d^2 Z_\nu}{dt^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Multiplions d'abord les équations (59) respectivement par X_ν, Y_ν, Z_ν et les équations (60) par X_n, Y_n, Z_n; faisons ensuite la somme des premiers produits et la somme des seconds produits, soustrayons enfin la seconde de ces sommes de la première; tout cela fait, nous aurons:

$$\frac{d\left(\frac{dX_n}{dt} X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt} X_n\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{dY_n}{dt} Y_\nu - \frac{dY_\nu}{dt} Y_n\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{dZ_n}{dt} Z_\nu - \frac{dZ_\nu}{dt} Z_n\right)}{dt} = 0.$$

En intégrant cette dernière égalité, on trouvera l'égalité (57). Nous démontrerons maintenant l'égalité (58).

En remettant pour X_n et X_ν leurs valeurs (27) et (28) dans l'expression $\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n$, on a

$$\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n = \Sigma_m \Sigma_\mu \frac{dp}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,n} K_{\mu,\nu} - \Sigma_m \Sigma_\mu \frac{dp}{dc_\mu}\frac{dx}{dc_m} K_{m,n} K_{\mu,\nu}. \tag{61}$$

Nous formons les 6×3 équations

$$K_{m,n} = \Sigma_g \Sigma_b K_{m,g} K_{n,b} K_g K_b \tag{62}$$

dans lesquelles les inconnues sont les produits des constantes K_g et K_b et coefficients de ces inconnues sont les produits des constantes $K_{m,g}$ et $K_{n,b}$ qui n'entrent ainsi que K_g et K_b ni dans les fonctions x, y, z, ni dans les équations [(15) et (4) § 1]. Les constantes $K_{m,g}$ et $K_{n,b}$, étant parfaitement arbitraires, on peut toujours leur attribuer des valeurs, pour lesquelles le déterminant des 6^2 quantités $K_{m,g}$ ne soit pas égal à zéro et il en est de même du déterminant des 3^2 quantités $K_{n,b}$; g désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 6 et b, désignant tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 3. Nous répresenterons les mêmes équations (62) par

$$K_{\mu,\nu} = \Sigma_\gamma \Sigma_\beta K_{\mu,\gamma} K_{\nu,\beta} K_\gamma K_\beta \tag{63}$$

en changeant respectivement m, n, g et b en μ, ν, γ et β.

Si l'on porte, dans l'égalité (61) les valeurs des $K_{m,n}$ et $K_{\mu,\nu}$, comprises dans les équations (62) et (63), cette égalité (61) deviendra

$$\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n = \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_b \Sigma_\beta \left(\frac{dp}{dc_m}\frac{dx}{dc_\mu} K_{m,g} K_{n,b} K_{\mu,\gamma} K_{\nu,\beta} K_g K_b K_\gamma K_\beta\right) -$$
$$- \Sigma_m \Sigma_\mu \Sigma_g \Sigma_\gamma \Sigma_b \Sigma_\beta \left(\frac{dp}{dc_\mu}\frac{dx}{dc_m} K_{m,g} K_{n,b} K_{\mu,\gamma} K_{\nu,\beta} K_g K_b K_\gamma K_\beta\right).$$

En changeant, dans le second terme du second membre de la dernière égalité, les indices m et g respectivement en μ et γ il est évident que le second membre de cette égalité se réduit identiquement à zéro; d'où il suit qu'on a l'égalité

$$\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n = 0. \tag{64}$$

De la même manière nous démontrerons les égalités

$$\frac{dY_n}{dt}Y_\nu - \frac{dY_\nu}{dt}Y_n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dZ_n}{dt}Z_\nu - \frac{dZ_\nu}{dt}Z_n = 0.$$

On recevra donc l'égalité (58). Il resulte de là que $H_{n,\nu} = 0$.

Il est à remarquer que l'égalité (64) sert à verifier l'exactitude de la démonstration que l'expression (37) se reduit identiquement à zéro par la substitution aux ω_n et ω_ν des fonctions des nouvelles variables.

En effet, si l'on fait pour abréger $\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n = H'_{n,\nu}$, l'expression (37) sera égale à

$$\Sigma_n \Sigma_\nu \frac{dP}{dp}\left(\frac{dX_n}{dt}X_\nu - \frac{dX_\nu}{dt}X_n\right)\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n = \Sigma_n \Sigma_\nu \frac{dP}{dp}H'_{n,\nu}\frac{d\omega_\nu}{dt}\omega_n.$$

Or notre démonstration de ce que $H'_{n,\nu} = 0$, montre que l'expression (37) devient identiquement nulle par la transformation indiquée de $H'_{n,\nu}$.

§ 3.

Si l'on désigne par x et y deux coordonnées d'une planète, situées dans le plan même de l'orbite, on pourra poser

$$2T = p^2 + q^2 \qquad r = 0. \tag{1}$$

Les formules [(33), (35), (47), (48), (52) § 2) et le déterminant D deviendront

$$\delta x = X_1\omega_1 + X_2\omega_2, \qquad \delta y = Y_1\omega_1 + Y_2\omega_2, \qquad \delta z = 0 \tag{2}$$

$$D = X_1Y_2 - X_2Y_1 \tag{3}$$

$$\xi = X_1\frac{d\omega_1}{dt} + X_2\frac{d\omega_2}{dt}, \qquad \eta = Y_1\frac{d\omega_1}{dt} + Y_2\frac{d\omega_2}{dt}, \qquad \zeta = 0$$

$$(pX_1 + qY_1)\frac{d\omega_1}{dt} + (pX_2 + qY_2)\frac{d\omega_2}{dt} = 0.$$

La première de ces trois dernières équations peut être remplacée par

$$\xi = \frac{qD\frac{d\omega_1}{dt}}{(pX_2 + qY_2)} \quad \text{ou par} \quad \xi = -\frac{qD\frac{d\omega_2}{dt}}{pX_1 + qY_1}. \tag{4}$$

Au moyen de la formule [(56) § 2] et des formules (2) et (4), la variation $\Delta^2 W$ se représentera par

$$\Delta^2 W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(p^2+q^2)D^2}{(pX_2+qY_2)^2} \left\{ \frac{d\left(\frac{Y_2\,\delta x - X_2\,\delta y}{D}\right)}{dt} \right\}^2 dt \tag{5}$$

et

$$\Delta^2 W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(p^2+q^2)D^2}{(pX_1+qY_1)^2} \left\{ \frac{d\left(\frac{Y_1\,\delta x - X_1\,\delta y}{D}\right)}{dt} \right\}^2 dt. \tag{6}$$

Nous exposerons maintenant les préliminaires, qui sont necessaires pour répresenter en coordonnées polaires le déterminant D, les quantités pX_1+qY_1, pX_2+qY_2 et l'égalité [(58) § 2]. Soient r le rayon vecteur de la planète, e l'excentricité de l'orbite elliptique, a le demi grand axe, c le double de l'aire décrite dans le plan de l'orbite dans l'unité de temps, n le moyen mouvement, f l'attraction exércée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, M la masse du soleil et M' la masse de la planète, on aura

$$\Pi = \frac{f(M+M')}{r} = \frac{n^2a^3}{r} \tag{7}$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c \quad (8) \qquad\qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = p^2+q^2 = \frac{n^2a^2(2a-r)}{r} \quad (9)$$

$$a = \frac{c}{nb} = \frac{\sqrt{2h}}{n} = \frac{f(M+M')}{2h} \tag{10}$$

b étant égale à $a\sqrt{1-e^2}$ et h étant la constante qui est égale à $\Pi - T$ et qui conserve la même valeur.

Nous désignons par F le premier foyer de l'elipse, c'est à dire le foyer qui détermine le lieu du soleil, et par F_1 le deuxième foyer de l'elipse. Soient F l'origine des coordonnées, φ la longitude de la planète dans l'orbite, α la longitude de périhélie dans l'orbite, v l'anomalie vraie de la planète, E l'anomalie excentrique, τ l'époque du passage de la planète au périhélie et u l'angle que le rayon vecteur, mené par F_1 à la planète, fait avec la droit F_1F. On a, par la théorie du mouvement elliptique ou par les formules (8) et (9).

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} = c = na^2\sqrt{1-e^2} \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\operatorname{Cos} v} \tag{11}$$

$$2a - r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\operatorname{Cos} u} \quad (12) \qquad\qquad \frac{r}{2a-r} = \frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Sin} v} \quad (13)$$

$$r = a(1 - e\,\mathrm{Cos}\,E) \qquad (14) \qquad\qquad n(t-\tau) = E - e\,\mathrm{Sin}\,E \qquad (15)$$

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2} \qquad (16) \qquad\qquad \frac{\mathrm{Sin}\,E}{\mathrm{Sin}\,v} = \frac{r}{b} \qquad (17)$$

d'où l'on conclut

$$\frac{r}{2a-r} = \frac{du}{dv} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{c}{r(2a-r)} \qquad (18) \qquad\qquad \frac{\delta v}{\delta u} = \frac{dv}{du}. \qquad (19)$$

Les équations (11), (12), (13) et (14) conduisent à cette relation entre u et v

$$\frac{\mathrm{Sin}\,u}{\mathrm{Cos}\,u} = \frac{(1-e^2)\,\mathrm{Sin}\,v}{2e + (1+e^2)\,\mathrm{Cos}\,v}. \qquad (20)$$

En [illegible]conde des deux équations (11) par l'équation (12), on trouve, ayant égard à l'équation (13)

$$\frac{1 - e\,\mathrm{Cos}\,u}{1 + e\,\mathrm{Cos}\,v} = \frac{\mathrm{Sin}\,u}{\mathrm{Sin}\,v}. \qquad (21)$$

Si l'on compare d'abord entre elles la seconde des deux équations (11) et l'équation (14) et que l'on compare ensuite entre elles les deux équations (12) et (14), on aura deux équations

$$\frac{1-e^2}{1+e\,\mathrm{Cos}\,v} = 1 - e\,\mathrm{Cos}\,E \quad \text{et} \quad \frac{1-e^2}{1-e\,\mathrm{Cos}\,u} = 1 + e\,\mathrm{Cos}\,E$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Cos}\,E = \frac{e + \mathrm{Cos}\,v}{1 + e\,\mathrm{Cos}\,v} \quad \text{et} \quad \mathrm{Cos}\,E = \frac{\mathrm{Cos}\,u - e}{1 - e\,\mathrm{Cos}\,u}.$$

En comparant ces deux dernières équations entre elles et en prenant en considération l'équation (21) on recevra

$$\frac{\mathrm{Cos}\,u - e}{\mathrm{Cos}\,v + e} = \frac{\mathrm{Sin}\,u}{\mathrm{Sin}\,v}. \qquad (22)$$

Les équations (21) et (22) se reduisent aux suivants:

$$\mathrm{Sin}\,u + e\,\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,v = \mathrm{Sin}\,v - e\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,v \qquad (23)$$

et

$$e\,\mathrm{Sin}\,u + \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,v = \mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,v - e\,\mathrm{Sin}\,v. \qquad (24)$$

Si l'on porte dans l'equation (24) la valeur de $e\,\mathrm{Sin}\,v$, tirée de l'équation (23) multipliée par e, on trouvera l'équation

$$\operatorname{Sin} u[2e+(1+e^2)\operatorname{Cos} v]=\operatorname{Cos} u(1-e^2)\operatorname{Sin} v$$

qui n'est autre chose que l'équation (20).

Les valeurs générales des x et y sont les fonctions qui renferment v et quatre constantes α, e, τ et a. Or la formule (10) montre qu'on ne doit pas varier a par ce que h et $f(M+M')$ conservent la même valeur. D'après cela et en vertu des formules [(27) § 2] on trouve, en observant, que

$$x=r\operatorname{Cos}\varphi \qquad y=r\operatorname{Sin}\varphi \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1&=K_{1,1}\frac{dx}{d\alpha}+K_{1,2}\frac{dx}{d\tau}+K_{1,3}\frac{dx}{de}, & X_2&=K_{2,1}\frac{dx}{d\alpha}+K_{2,2}\frac{dx}{d\tau}+K_{2,3}\frac{dx}{de}\\ Y_1&=K_{1,1}\frac{dy}{d\alpha}+K_{1,2}\frac{dy}{d\tau}+K_{1,3}\frac{dy}{de}, & Y_2&=K_{2,1}\frac{dy}{d\alpha}+K_{2,2}\frac{dy}{d\tau}+K_{2,3}\frac{dy}{de}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Pour exprimer en coordonnées polaires X_1, X_2, Y_1, Y_2 et en même temps le déterminant D, les quantités pX_1+qY_1, pX_2+qY_2, et l'égalité [(58) § 2], il ne reste qu'à déduire $\frac{dv}{de}$.

La différentiation de l'équation (16) par rapport à e, donne

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{de}\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{v}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\frac{E}{2}}\frac{dE}{de}+\frac{1}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Si l'on multiplie cette équation par $4\operatorname{Sin}\frac{v}{2}\operatorname{Cos}\frac{v}{2}\operatorname{Sin}\frac{E}{2}\operatorname{Cos}\frac{E}{2}$, on trouve, toute réductions faites et ayant égard à l'équation (16)

$$\frac{dv}{de}\operatorname{Sin}E=\frac{dE}{de}\operatorname{Sin}v+\frac{\operatorname{Sin}E\operatorname{Sin}v}{1-e^2}$$

qui, en vertu de l'equation (17) se réduit à celle

$$\frac{dv}{de}=\frac{b}{r}\frac{dE}{de}+\frac{\operatorname{Sin}v}{1-e^2}. \tag{27}$$

La différentiation de l'équation (15) par rapport à e, donne

$$\frac{dE}{de}=\frac{\operatorname{Sin}E}{1-e\operatorname{Cos}E}$$

cette dernière équation, en vertu des équations (14) et (17) déviendra

$$\frac{dE}{de} = \frac{a}{b}\operatorname{Sin} v. \tag{28}$$

En portant cette valeur de $\frac{dE}{de}$ (28) dans l'équation (27), on obtiendra

$$\frac{dv}{de} = \frac{\operatorname{Sin} v}{1-e^2}\left[\frac{a(1-e^2)}{r}+1\right] = \frac{\operatorname{Sin} v}{1-e^2}[2+e\operatorname{Cos} v] = \frac{d\varphi}{de}, \tag{29}$$

puisque $\varphi = v + \alpha$.

D'après cette valeur $\frac{dv}{de}$, on recevra

$$\frac{dr}{de} = -a\operatorname{Cos} v. \tag{30}$$

La première des deux formules (11) donne

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau} = -\frac{c}{r^2} \text{ et comme } \varphi = v+\alpha,\ \frac{d\varphi}{d\alpha} = 1. \tag{31}$$

Les formules (25), (29), (30) et (31) donnent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\alpha} = -r\operatorname{Sin}\varphi, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{ce\operatorname{Sin}\alpha}{a(1-e^2)} + \frac{c}{a(1-e^2)}\operatorname{Sin}\varphi, \quad \frac{dx}{de} = -a\operatorname{Cos}\alpha - \frac{a\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin} v}{1+e\operatorname{Cos} v}\\
&\frac{dy}{d\alpha} = r\operatorname{Cos}\varphi, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{ce\operatorname{Cos}\alpha}{a(1-e^2)} - \frac{c}{a(1-e^2)}\operatorname{Cos}\varphi, \quad \frac{dy}{de} = -a\operatorname{Sin}\alpha + \frac{a\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin} v}{1+e\operatorname{Cos} v}\\
&\frac{dx}{dt} = p = -\frac{ce\operatorname{Sin}\alpha}{a(1-e^2)} - \frac{c}{a(1-e^2)}\operatorname{Sin}\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = q = \frac{ce\operatorname{Cos}\alpha}{a(1-e^2)} + \frac{c}{a(1-e^2)}\operatorname{Cos}\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Si l'on différentie la seconde des deux formules (11) par rapport aux t et τ, on recevra

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ce\operatorname{Sin} v}{a(1-e^2)}, \qquad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{ce\operatorname{Sin} v}{a(1-e^2)}, \qquad \frac{d^2r}{dt\,d\tau} = -\frac{ec^2\operatorname{Cos} v}{a(1-e^2)r^2}. \tag{33}$$

L'anomalie vraie v, ainsi que les constantes e et a, étant indépendantes de α, on a

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0 \qquad \frac{d^2r}{dt\,d\alpha} = 0. \tag{34}$$

La différentiation de l'égalité (30) par rapport à t, donne

$$\frac{d^2r}{dt\,de} = \frac{ac\operatorname{Sin} v}{r^2}. \tag{35}$$

Comme $r^2\frac{d\varphi}{dt}=c$, il est évident que

$$\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\alpha}=0 \qquad \frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\tau}=0 \qquad \frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{de}=-\frac{ec}{1-e^2}. \tag{36}$$

Si l'on pose

$$A=\kappa_{1,1}\kappa_{2,2}-\kappa_{2,1}\kappa_{1,2} \quad B=\kappa_{1,2}\kappa_{2,3}-\kappa_{2,2}\kappa_{1,3} \quad C=\kappa_{1,1}\kappa_{2,3}-\kappa_{2,1}\kappa_{1,3} \tag{37}$$

le déterminant D (3), en vertu des formules (26), (32) et (37) sera égal à

$$\left.\begin{aligned} D=\frac{cr}{a(1-e^2)^2}\Big\{&Ae(1-e^2)\mathrm{Sin}\,v-B[2e+(1+e^2)\mathrm{Cos}\,v]+ \\ &+(1-e^2)C\frac{\sqrt{1-e^2}}{n}\mathrm{Cos}\,v\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

A cause des formules (26) et (32) on aura aussi

$$\left.\begin{aligned} pX_1+qY_1&=\frac{c}{r(1-e^2)}[\kappa_{1,1}r(1-e^2)-\kappa_{1,2}n\sqrt{1-e^2}(2a-r)-2\kappa_{1,3}r\,\mathrm{Sin}\,v] \\ pX_2+qY_2&=\frac{c}{r(1-e^2)}[\kappa_{2,1}r(1-e^2)-\kappa_{2,2}n\sqrt{1-e^2}(2a-r)-2\kappa_{2,3}r\,\mathrm{Sin}\,v]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

D'après les formules (25), (26) et (37) et en vertu de ce que $Z_n=0$ et $Z_\nu=0$, l'égalité [(58) § 2) déviendra, en égalant $n=1$ et $\nu=2$

$$\begin{aligned} 0=A&\left[\frac{dr}{d\alpha}\frac{d^2r}{dt\,d\tau}-\frac{dr}{d\tau}\frac{d^2r}{dt\,d\alpha}+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\tau}-\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\alpha}\right]+ \\ +B&\left[\frac{dr}{d\tau}\frac{d^2r}{dt\,de}-\frac{dr}{de}\frac{d^2r}{dt\,d\tau}+\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\left(r^3\frac{d\varphi}{dt}\right)}{de}-\frac{d\varphi}{de}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\tau}\right]+ \\ +C&\left[\frac{dr}{d\alpha}\frac{d^2r}{dt\,de}-\frac{dr}{de}\frac{d^8r}{dt\,d\alpha}+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{de}-\frac{d\varphi}{de}\frac{d\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\alpha}\right]. \end{aligned}$$

A cause des formules (29), (30), (31), (33), (34), (35) et (36) cette dernière égalité se réduit à celle-ci

$$C\frac{ec}{\sqrt{1-e^2}}=0$$

d'où il suit que $C=0$; et alors le déterminant D (38) sera égal à

$$D=\frac{cr}{a(1-e^2)^2}\Big\{Ae(1-e^2)\operatorname{Sin}v-B[2e+(1+e^2)\operatorname{Cos}v]\Big\}. \tag{40}$$

Pour plus de simplicité du calcul, il convient de choisir l'angle u pour la variable indépendante.

D'après cela et en vertu de ce que $C=0$, nous posons

$$\left.\begin{array}{c} K_{1,1}=0, \qquad K_{1,2}=-1, \qquad K_{1,3}=0, \qquad K_{2,1}=\dfrac{\operatorname{Cos}u_0}{e}, \\ K_{2,2}=\dfrac{(1+e^2)(\operatorname{Cos}u_0-1)}{en\sqrt{1-e^2}} \qquad K_{2,3}=-\operatorname{Sin}u_0 \end{array}\right\} \tag{41}$$

u_0 étant constante arbitraire qui exprime l'angle que le rayon vecteur, méné par F_1 à la position initiale de la planète, fait avec la droite F_1F.

Ayant égard aux formules (13), (20), (40) et (41), on aura

$$D=\frac{e(2a-r)}{a(1-e^2)}\operatorname{Sin}(u-u_0). \tag{42}$$

La formule (12) donne

$$r=\frac{a}{1-e\operatorname{Cos}u}[1+e^2-2e\operatorname{Cos}u]=\frac{2a-r}{1-e^2}[1+e^2-2e\operatorname{Cos}u]. \tag{43}$$

Si l'on porte, dans les expression pX_1+qY_1 et pX_2+qY_2 (39) les valeurs fournies par les formules (41) et (43), on trouve, toutes réductions faites et en observant que, à cause de la formule (13), $r\operatorname{Sin}v=(2a-r)\operatorname{Sin}u$,

$$pX_1+qY_1=p^2+q^2=\frac{n^2a^2(2a-r)}{r} \tag{44}$$

et

$$pX_2+qY_2=\frac{2c(2a-r)}{r(1-e^2)}\left[\frac{1+e^2}{2e}-\operatorname{Cos}(u-u_0)\right]. \tag{45}$$

Les formules (44) et (45) montrent que chacune des deux quantités pX_1+qY_1 et pX_2+qY_2 ne devient pas nulle pour toute valeur réelle de u; il résulte de là qu'on peut faire usage d'une seule des deux formules (5) et (6), à volonté.

D'après tout ce qui précède, nous trasformerons l'intégrale Δ^2W (6), en y substituant à t la variable u.

Pour le faire, il ne reste qu'à exprimer $Y_1\delta x-X_1\delta y$ en coordonnées polaires.

À cause des formules (25), (26), (32) et (41), on a

$$\left.\begin{aligned} Y_1\delta x - X_1\delta y = r\,\delta r\frac{d\varphi}{dt} - r\frac{dr}{dt}\delta\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}\left(\delta r - \frac{dr}{dv}\delta\varphi\right) = \\ = \frac{nab}{r}\left(\delta r - \frac{dr}{dv}\delta\varphi\right). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Or, d'après la formule (19), on a

$$\delta v = \frac{dv}{du}\delta u$$

par conséquent, si l'on pose

$$\theta = \frac{b}{r(2a-r)}\left[\delta r - \frac{dr}{du}\left(\frac{r}{2a-r}\delta\alpha + \delta u\right)\right] \tag{47}$$

on recevra

$$Y_1\delta x - X_1\delta y = na\theta(2a-r). \tag{48}$$

Si, dans l'intégrale $\Delta^2 W$ (6), l'on sobstitue à t la variable u, et qu'on porte, sous le signe $\int$, les valeurs fournies par les formules (9), (42), (44) et (48), on trouve toutes réductions faites et observant que, d'après les formules (18)

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{r(2a-r)}$$

$$\Delta^2 W = c\int_{u_0}^{u_1} \mathrm{Sin}^2(u-u_0)\left\{\frac{d\left[\frac{\theta}{\mathrm{Sin}(u-u_0)}\right]}{du}\right\}^2 du \tag{49}$$

u_1 étant la valeur de u qui répond à position finale de la planète.

La formule (49) conduit à la conclusion qui peut se traduire en le théorème que nous nous sommes proposé de démontrer dans ce paragraghe, savoir:

« *Si la position initiale de la planète est en un point M, la position finale de la planète se détermine par l'intersection d'ellipse par la droite ménée par M au deuxième foyer F_1 pour que l'intégrale V ait un minimum effectivement dans l'intervalle du temps, lorsque la planète se meut, en passant de la position initiale à la finale.* »

Sulla teoria dei moti relativi.

(*Memoria del prof.* Ernesto Padova, *a Padova.*)

In una Memoria presentata all'Accademia di Francia il 25 febbraio 1856 e pubblicata nel vol. VIII della 2ª Serie (1863) del Journal de Mathématiques di Liouville, il Bour ha ridotto la soluzione del problema del moto di un punto o di un sistema di punti relativamente ad un sistema rigido in movimento, alla determinazione di una soluzione completa di una equazione a derivate parziali del 1° ordine, come aveva già fatto Jacobi pel moto assoluto; tale riduzione egli ottiene facendo uso di un artifizio, introducendo, cioè, nel calcolo delle espressioni formate colle derivate prime delle coordinate relative. Con metodo più diretto e più semplice il prof. C. Neumann in una Memoria intitolata: *Ueber Hamilton's partielle Differentialgleichung, mit besonderer Rücksicht auf die Probleme der relativen Bewegung,* pubblicata nel 1862 in un giornale russo e ristampata nel 1866 nel vol. XI dello Zeitschrift für Mathematik und Physik di Schlömilch, ha eseguita l'anzidetta riduzione tanto nel caso del moto assoluto, quando fra le coordinate dei punti del sistema hanno luogo relazioni indipendenti o no dal tempo, quanto in quello del moto relativo di uno o più punti rispetto ad un sistema rigido in movimento. Ora a me è sembrato utile riprendere sin da principio lo studio del problema nella ipotesi che il sistema mobile, rispetto al quale si studia il moto di un dato sistema, sia qualsivoglia e determinare in questo caso l'equazione a derivate parziali del 1° ordine, la quale mediante una sua soluzione completa fornisce gli integrali del moto; questo è il principale scopo del presente lavoro. Ho poi mostrato come dalle formole che così si ottengono, si possano con molta facilità dedurre quelle del Bour ed indicate alcune applicazioni delle formule generali, ho poi fatto vedere come il metodo qui usato conduca alle equazioni a derivate parziali corrispondenti a certi problemi di moto assoluto, nei quali le forze ammettono una funzione potenziale dipendente dal tempo, come sarebbero quelli del moto di un punto attratto da due centri mobili sopra una retta con velocità uguali ed opposte, oppure da un ellissoide che si deforma con data legge.

1. Siano dati due sistemi di punti S_1, S_2, con $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_m$ indichiamo le coordinate del primo, con $q_1, q_2, \ldots q_n$ quelle del secondo rispetto ad elementi fissi nello spazio. La posizione del secondo rispetto al primo sarà determinata quando si conoscano le distanze dei punti di S_2 da quelli di S_1, e se ammettiamo che S_1 consti di almeno tre punti, il numero delle quantità indipendenti fra loro dalle quali dipenderanno tutte queste distanze sarà n, al pari di quello delle q. Queste quantità, dalle quali dipende la posizione di S_2 rispetto ad S_1, le diremo le coordinate relative di S_2 rispetto ad S_1 e le indicheremo con $r_1, r_2, \ldots r_n$. Le r potranno esprimersi in funzione delle q e delle χ ed avremo

$$r_h = r_h(q\chi), \tag{1}$$

dalle quali potremo inversamente dedurre le q in funzione delle r e delle χ. Il problema del moto relativo di S_2 rispetto ad S_1 consiste nel determinare le r in funzione del tempo, quando si conoscano le forze che agiscono sopra S_2 e le χ in funzione del tempo.

Deriviamo le (1) rapporto al tempo t e per brevità facciamo uso della notazione di Lagrange per indicare le derivate prese rispetto a quella variabile, avremo

$$r'_s = \sum_1^m{}_k \frac{\partial r_s}{\partial \chi_h} \chi'_h + \sum_1^n{}_h \frac{\partial r_s}{\partial q_h} q'_h. \tag{2}$$

Quando vi è la quiete relativa fra i due sistemi, le r'_s sono tutte nulle e se con Q'_h indichiamo i valori delle q'_h, che si ricavano dalla (2) col porre uguali a zero tutti i primi membri, potremo scrivere

$$r'_s = \sum_1^n{}_h \frac{\partial r_s}{\partial q_h}(q'_h - Q'_h). \tag{3}$$

Ciò posto ammetteremo che le forze agenti sul sistema S_2 ammettano la funzione delle forze V dipendente dalle sole variabili q_h, le equazioni del moto assoluto di questo sistema, quando con T s'indichi la sua forza viva, saranno

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i}. \tag{4}$$

Moltiplichiamole per $\frac{\partial q_i}{\partial r_s}$ e sommiamole dando ad i tutti i valori da 1 ad n, avremo

$$\sum_i \frac{\partial (T+V)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_s} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial r_s} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i}. \tag{5}$$

Ma se V si esprime in funzione delle quantità r e t col sostituire alle q le loro espressioni tratte dalla (1) sarà

$$\frac{\partial V}{\partial r_s} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_s}$$

mentre essendo T funzione delle q e delle q' avremo

$$\frac{\partial T}{\partial r_s} = \sum_i \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_s} + \frac{\partial T}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i}{\partial r_s} \right].$$

Dalle (5) otteniamo dunque

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial r_s} = \sum \left(\frac{\partial q'_i}{\partial r_s} \frac{\partial T}{\partial q'_i} + \frac{\partial q_i}{\partial r_s} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \frac{\partial q_i}{\partial r_s} \right).$$

È però facile vedere dalle (1) che si ha

$$\frac{\partial q_i}{\partial r_s} = \frac{\partial q'_i}{\partial r'_s}$$

per cui le equazioni del moto relativo, quando si supponga di avere eliminato le q, q' da V e da T mediante le (1) (2) (ove per le χ si sottintende di aver posto le loro espressioni in funzione del tempo) saranno

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial r_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r'_s}, \tag{6}$$

le quali hanno la stessa forma delle (4) che spettano al moto assoluto.

La funzione T è omogenea e di secondo grado rispetto alle q', ossia ha la forma

$$2T = \sum_h \sum_k a_{hk} q'_h q'_k,$$

ove le a_{hk} dipendono dalle q; vediamo di esprimerla per mezzo delle coordinate relative. Risolviamo per ciò le (3) rispetto alle variabili $q'_s - Q'_s$, con R indichiamo il determinante formato coi coefficienti e con R_{hk} l'elemento reciproco a $\frac{\partial r_h}{\partial q_k}$ in questo determinante, avremo

$$q'_s - Q'_s = \frac{1}{R} \sum_h R_{sh} r'_h;$$

e se con T_2 indichiamo la forza viva relativa del secondo sistema rispetto al primo, vale a dire la forza viva che possederebbe S_2 quando i suoi punti non fossero animati che dalle velocità, le quali composte con quelle che conserverebbero la quiete relativa dei due sistemi, darebbero le velocità assolute, avremo

$$\begin{aligned} 2T_2 &= \sum_h \sum_k a_{hk}(q'_h - Q'_h)(q'_k - Q'_k) \\ &= \sum\sum a_{hk} q'_h q'_k - 2\sum\sum a_{hk} q'_h Q'_k + \sum\sum a_{hk} Q'_h Q'_k \\ &= \frac{1}{R^2}\sum_h \sum_k a_{hk} \sum_u \sum_v R_{uh} R_{vk} r'_u r'_v \end{aligned}$$

per cui col porre

$$b_{uv} = \frac{1}{R^2}\sum_h \sum_k a_{hk} R_{uh} R_{vk},$$

si avrà

$$2T_2 = \sum_u \sum_v b_{uv} r'_u r'_v. \tag{7}$$

Se per brevità poniamo

$$T_1 = \sum_h \sum_k a_{hk} Q'_h \sum_u \frac{R_{uk}}{R} r'_u$$

$$2G = \sum_h \sum_k a_{hk} Q'_h Q'_k$$

per modo che sia

$$T_1 + 2G = \sum_h \sum_k a_{hk} Q'_h q'_k$$

avremo

$$T = T_2 + T_1 + G.$$

Le (6) assumono allora la forma

$$\frac{\partial(V + T_2 + T_1 + G)}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial(T_2 + T_1)}{\partial r'_i} \tag{8}$$

poichè la G, dopo l'ammessa eliminazione delle q, non contiene che le r e t.

Poniamo adesso

$$p_i = \frac{\partial(T_2 + T_1)}{\partial r'_i} \tag{9}$$

ed osserviamo che T_2 e T_1 sono funzioni omogenee delle r' rispettivamente del 2° e del 1° grado, per cui è

$$2T_2 = \sum_i \frac{\partial T_2}{\partial r'_i} r'_i, \qquad T_1 = \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial r'_i} r'_i; \tag{10}$$

dalla prima di queste abbiamo

$$dT_2 = \sum_i \left\{ r'_i d\left(p_i - \frac{\partial T}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial r_i} dr_i \right\};$$

mentre se in T_2 sostituiamo in luogo delle r'_i le loro espressioni tolte dalle (9) abbiamo

$$dT_2 = \sum_i \left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial r_i}\right) dr_i + \left(\frac{\partial T_2}{\partial p_i}\right) dp_i \right]$$

e questa equazione confrontata colla precedente fornisce subito le altre

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial r_i}\right) = -\frac{\partial T_2}{\partial r_i} - \sum_s r'_s \frac{\partial^2 T_1}{\partial r'_s \partial r_i}$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial p_i}\right) = r'_i,$$

ove si sono poste fra parentesi le derivate di T_2, considerata come funzione delle r e delle p. Ma dalla seconda delle (10) si ha

$$\sum_s \frac{\partial^2 T_1}{\partial r'_s \partial r_i} r'_s = \frac{\partial T_1}{\partial r_i}$$

per cui sarà

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial r_i}\right) = -\frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial r_i}$$

e le (8) prenderanno la forma

$$\frac{\partial (V + G - \mathrm{T}_2)}{\partial r_h} = \frac{dp_h}{dt} \tag{11}$$

mentre le (9) risolute rapporto alle r' danno

$$r'_i = \left(\frac{\partial T_2}{\partial p_i}\right) \tag{11'}$$

e potremo anche sopprimere le parentesi alle derivate di T_2, perchè non son più necessarie. Gli integrali del sistema (8) sono dunque dati dalle equazioni

$$\frac{dS}{dr_i} = p_i, \qquad \frac{dS}{d\alpha_i} = \beta_i$$

ove le α_i, β_i sono costanti arbitrarie, se S è una soluzione completa della equazione a derivate parziali

$$\frac{dS}{dt} + V + G - \mathrm{T}_2 = 0 \tag{12}$$

nella quale alle p_h che appariscono in T_2 si debbono sostituire le derivate parziali della funzione incognita S prese rispetto alle r_h.

2. Vediamo ora come da queste equazioni si possano dedurre quelle del Bour. Immaginiamo per ciò che il sistema S_1 sia rigido ed il sistema S_2 formato da n punti liberi, le cui masse sieno m_1, m_2,... m_n. Se le coordinate del punto di massa m_h rispetto ad un sistema di assi fissi nello spazio sono ξ_h, η_h, ζ_h e se per fissare la posizione di questo punto relativamente ad S_1 si determinano le sue coordinate (che indicheremo con x_h, y_h, z_h) rispetto ad un sistema di assi fissi in S_1, fra le coordinate ξ_h, η_h, ζ_h ed x_h, y_h, z_h avremo le relazioni

$$\xi_h = \alpha + \alpha_1 x_h + \alpha_2 y_h + \alpha_3 z_h,$$
$$\eta_h = \beta + \beta_1 x_h + \beta_2 y_h + \beta_3 z_h,$$
$$\zeta_h = \gamma + \gamma_1 x_h + \gamma_2 y_h + \gamma_3 z_h,$$

che tengono luogo delle (1) e nelle quali è notissimo il significato dei coefficienti. Le quantità indicate con Q'_h nel § 1, ora potranno indicarsi con X'_h, Y'_h, Z'_h e saranno date dalle equazioni

$$X'_h = \alpha_2 u_h + \alpha_2 v_h + \alpha_3 w_h, \qquad Y'_h = \beta_1 u_h + \beta_2 v_h + \beta_3 w_h,$$
$$Z'_h = \gamma_1 u_h + \gamma_2 v_h + \gamma_3 w_h$$

ove

$$u_h = a' + q z_h - r y_h, \qquad v_h = b' + r x_h - p z_h, \qquad w_h = c' + p y_h - q x_h,$$

posto per brevità

$$a' = \alpha' \alpha_1 + \beta' \beta_1 + \gamma' \gamma_1, \qquad b' = \alpha' \alpha_2 + \beta' \beta_2 + \gamma' \gamma_2, \qquad c' = \alpha' \alpha_3 + \beta' \beta_3 + \gamma' \gamma_3$$

ed indicate con p, q, r le componenti attorno agli assi delle x, y, z della velocità angolare del sistema S_1 attorno all'origine degli assi mobili. Avremo dunque

$$2T_2 = \sum_h m_h (x'^2_h + y'^2_h + z'^2_h)$$
$$T_1 = \sum_h m_h (x'_h u_h + y'_h v_h + z'_h w_h)$$
$$2G = \sum_h m_h (u^2_h + v^2_h + w^2_h),$$

per cui sarà

$$\frac{d(T_1 + T_2 + G)}{d x_h} = m_h [r(y'_h + v_h) - q(z'_h + w_h)]$$
$$\frac{d(T_1 + T_2 + G)}{d y_h} = m_h [p(z'_h + w_h) - r(x'_h + u_h)]$$
$$\frac{d(T_1 + T_2 + G)}{d z_h} = m_h [q(x'_h + u_h) - p(y'_h + v_h)]$$

$$\frac{d(T_1+T_2)}{dx'_h}=m_h\,[x'_h+u_h]$$

$$\frac{d(T_1+T_2)}{dy'_h}=m_h\,[y'_h+v_h]$$

$$\frac{d(T_1+T_2)}{dz'_h}=m_h\,[z'_h+w_h]$$

e le (8) si trasformeranno nelle altre

$$\frac{1}{m_h}\frac{\partial V}{\partial x_h}+[b'+y'_h+rx_h-pz_h]r-[c'+z'_h+py_h-qx_h]q=$$
$$=a''+\frac{d}{dt}[x'_h+qz_h-y_hr],$$

$$\frac{1}{m_h}\frac{\partial V}{\partial y_h}+[c'+z'_h+py_h-qx_h]p-[a'+x'_h+qz_h-ry_h]r=$$
$$=b''+\frac{d}{dt}[y'_h+rx_h-pz_h],$$

$$\frac{1}{m_h}\frac{\partial V}{\partial z_h}+[a'+x'_h+qz_h-ry_h]q-[b'+y'_h+rx_h-pz_h]p=$$
$$=c''+\frac{d}{dt}[z'_h+py_h-qx_h];$$

ma dalle equazioni che definiscono a', b', c' si ha derivandole

$$a''=\alpha_1\alpha''+\beta_1\beta''+\gamma_1\gamma''+rb'-qc'$$
$$b''=\alpha_2\alpha''+\beta_2\beta''+\gamma_2\gamma''+pc'-ra'$$
$$c''=\alpha_3\alpha''+\beta_3\beta''+\gamma_3\gamma''+qa'-pb';$$

talchè ponendo

$$\lambda_h=m_h(x'_h+qz_h-ry_h),\quad \mu_h=m_h(y'_h+rx_h-pz_h),\quad \nu_h=m_h(z'_h+py_h-qx_h)$$
$$u=\alpha_1\alpha''+\beta_1\beta''+\gamma_1\gamma'',\qquad v=\alpha_2\alpha''+\beta_2\beta''+\gamma_2\gamma'',\qquad w=\alpha_3\alpha''+\beta_3\beta''+\gamma_3\gamma''$$

abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}-m_iu+r\mu_i-q\nu_i=\frac{d\lambda_i}{dt}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i}-m_iv+p\nu_i-r\lambda_i=\frac{d\mu_i}{dt}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_i}-m_iw+q\lambda_i-p\mu_i=\frac{d\nu_i}{dt}$$

le quali sono appunto le formule trovate dal Bour.

3. Se nella espressione della forza viva di un dato sistema, manca una delle variabili, la quale non entri nella espressione della funzione potenziale, sostituiamo a questa variabile (che possiamo per esempio supporre essere q_1) l'altra r_2 legata ad essa dalla relazione

$$r_1 = q_1 - a(t - t_0)$$

ove a e t_0 sono due costanti. Riferiamo il sistema alle coordinate $r_1, q_2, \dots q_n$, la quantità che nel § 1 è stata indicata con Q'_1, ora sarà uguale ad a ed avremo

$$2T_2 = a_{11}(q'_1 - a)^2 + 2\sum_2^n a_{1s}(q'_1 - a)q'_s + \sum_2^n \sum a_{hk} q'_h q'_k =$$

$$= a_{11} r'^2_1 + 2\sum_2^n a_{1s} r'_1 q'_s + \sum_2^n \sum a_{hk} q'_h q'_k$$

$$T_1 = a(a_{11} r'_1 + \sum_2^s a_{1s} q'_s)$$

$$2G = a^2 a_{11},$$

quindi le (9) danno

$$a_{1h}(r'_1 + a) + \sum_2^n {}_s a_{hs} q'_s = p_h$$

e conseguentemente T_2 espressa in funzione delle p sarà data dalla equazione

$$2T_2 A + \begin{vmatrix} 0 & p_1 - a a_{11} & p_2 - a a_{12} & \dots & p_n - a a_{1n} \\ p_1 - a a_{11} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ p_2 - a a_{12} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n - a a_{1n} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

ove A è il determinante formato colle a_{hk}. Il determinante del primo membro della precedente equazione non è altro che

$$2A(ap_1 - G) + \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

talchè la (12) in questo caso speciale diviene

$$2A\left(\frac{\partial S}{\partial t}+V+ap_1\right)+\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2\dots & p_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & a_{1n} & a_{2n}\dots & a_{nn}\end{vmatrix}=0 \qquad (13)$$

nella quale manca la variabile r_1, per cui un integrale del problema è $p_1=\text{cost.}$ Se la funzione V dipende soltanto dalle coordinate, un altro integrale si avrà prendendo $\frac{\partial S}{\partial t}=\text{cost.}$ e potremo conchiudere che laddove la funzione delle forze e l'espressione della forza viva non contengano la variabile q_1, la funzione principale del problema di moto assoluto fornisce quella del moto relativo rispetto ad un sistema nel quale la q_1 varia proporzionalmente al tempo colla velocità uniforme a, col sostituire alla costante delle forze vive h, $h+aa_1$ se a_1 è la costante canonica cui si uguaglia la derivata di S rispetto a q_1.

Questo teorema dà il modo di costruire immediatamente la funzione principale della parte periodica del moto, sia nel caso di un corpo rigido non sottoposto a forze acceleratrici, girevole attorno ad un punto fisso, sia nel caso di un corpo di rivoluzione pesante, girevole attorno ad un punto del suo asse di simmetria. Nel primo caso se si chiama q_1 l'angolo che la linea dei nodi del piano principale dell'ellissoide d'inerzia, che contiene l'asse minimo e l'asse medio, sul piano invariabile, fa con una retta situata in questo piano, la funzione principale del moto periodico si otterrà da quella del moto assoluto sostituendo ad h, $h+n'a_1$ ove (*)

$$n'=\pm n\left\{\frac{C}{A-C}\frac{d\log H ia}{da}-\frac{A}{A-C}\frac{d\log \Theta ia}{da}\right\}$$

A, C essendo i momenti d'inerzia massimo e minimo,

$$n=\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$$

B il momento d'inerzia medio, l la coppia di quantità di moto. La costante a è definita dalla equazione

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)}=-\operatorname{sn}^2(iK'-ia)=-\frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 ia}$$

(*) Vedasi C. G. Jacobi: *Sur la rotation d'un corps* nel 2° volume delle Math. Werke e nel 2° volume delle Gesamm. Werke.

ed il modulo delle funzioni ellittiche è

$$k=\sqrt{\frac{A-B}{B-C}\cdot\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}}.$$

Occorre però avvertire che quando si deriverà la funzione principale rispetto alle costanti canoniche per ottenere gli integrali del moto, si dovrà considerare n' come indipendente da queste.

Nel secondo problema, invece di h si dovrà sostituire nella funzione principale del moto assoluto $h+n'a_1+n''a_2$, ove a_1, a_2 sono le costanti cui debbono uguagliarsi le derivate di S rispetto a ψ e a φ, angoli che la intersezione del piano equatoriale dell'ellissoide d'inerzia corrispondente al punto fisso e del piano orizzontale che passa per esso, fa con due rette situate l'una nel piano orizzontale, l'altra nel piano dell'equatore. La funzione principale che allora si otterrà, corrisponderà al moto periodico, se per le costanti n', n'' si prenderanno i valori già determinati da Lottner (*).

4. Quando si esprime T_2-G in funzione delle p non si ha alcun termine indipendente da queste variabili. Infatti dalle (7) e (9) si ottiene

$$2T_2=\left(p_1-\frac{\partial T_1}{\partial r'_1}\right)r'_1+\left(p_2-\frac{\partial T_1}{\partial r'_2}\right)r'_2+\cdots+\left(p_n-\frac{\partial T_1}{\partial r'_n}\right)r'_n$$

$$\begin{array}{llll}
p_1-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_1}= & b_{11}r'_1+ & b_{12}r'_2+\cdots+ & b_{1n}r'_n \\
p_2-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_2}= & b_{21}r'_1+ & b_{22}r'_2+\cdots+ & b_{2n}r'_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_n-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_n}= & b_{n1}r'_1+ & b_{n2}r'_2+\cdots+ & b_{nn}r'_n
\end{array}$$

quindi eliminando le r' si ha

$$\begin{vmatrix}
2T_2 & p_1-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_1} & p_2-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_2} & \cdots & p_n-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_n} \\
p_1-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_1} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_n-\dfrac{\partial T_1}{\partial r'_n} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}=0.$$

(*) C. Lottner: *Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten.* Journal für die Math., Bd. 50.

Indicheremo con B il determinante formato colle b_{hk}, con P_1, P_2 i termini del 1° e 2° ordine rispettivamente riguardo alle p del determinante, e con P_0 l'insieme dei termini che nello sviluppo non contengono le p. L'ultima equazione dà allora

$$2T_2B+P_2+P_1+P_0=0 \tag{14}$$

e

$$P_0=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial T_1}{\partial r'_1} & \frac{\partial T_1}{\partial r'_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial r'_n} \\ \frac{\partial T_1}{\partial r'_1} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_1}{\partial r'_n} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dalla prima colonna di questo determinante sottragghiamo tutte le altre ordinatamente moltiplicate per

$$\sum_k \frac{\partial r'_1}{\partial q'_k} Q'_k, \qquad \sum_k \frac{\partial r'_2}{\partial q'_k} Q'_k, \dots$$

ed avremo

$$P_0=\begin{vmatrix} -\sum_h\sum_k \frac{\partial T_1}{\partial r'_h}\frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k & \frac{\partial T_1}{\partial r'_1} & \frac{\partial T_1}{\partial r'_2} \dots & \frac{\partial T_1}{\partial r'_n} \\ \frac{\partial T_1}{\partial r'_1}-\sum\sum b_{1h}\frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k & b_{11} & b_{12}\dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_1}{\partial r'_n}-\sum\sum b_{nh}\frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k & b_{n1} & b_{n2}\dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo gli elementi della prima colonna; abbiamo

$$\sum\sum\frac{\partial T_1}{\partial r'_1}\frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k=\sum\frac{\partial T_1}{\partial q'_k} Q'_k=\sum\frac{\partial(T_1+2G)}{\partial q'_k} Q'_k=2G$$

$$\sum_h\sum_k b_{sh}\frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k=\sum_k\sum_h\sum_u\sum_v\frac{1}{R^2} Q'_k a_{uv} R_{su} R_{hu}\frac{\partial r_h}{\partial q_k}$$

ma

$$\text{per } u \gtrless k, \qquad \sum_h R_{hu}\frac{\partial r_h}{\partial q_k}=0$$

$$\text{e per } u=k, \qquad \sum_h R_{hu}\frac{\partial r_h}{\partial q_k}=R,$$

talchè si avrà

$$\sum_h \sum_k b_{sh} \frac{\partial r'_h}{\partial q'_k} Q'_k = \sum_k \sum_v Q'_k a_{kv} \frac{R_{sk}}{R} = \frac{\partial T_1}{\partial r'_s},$$

per cui il primo elemento del determinante P_0 sarà $-2G$ e tutti gli altri elementi della prima colonna saranno zero e la (14) diviene per conseguenza

$$2(T_2 - G)B + P_1 + P_2 = 0,$$

la quale dimostra l'enunciato teorema.

5. Applichiamo questa teoria allo studio del moto relativo di due sistemi rigidi. Sia $\Omega\xi\eta\zeta$ un sistema di assi fissi nello spazio e siano $0_1x_1y_1z_1$; $0_2x_2y_2z_2$ due sistemi di assi rispettivamente fissi nei due corpi S_1, S_2. Per semplicità delle formule successive ammetteremo che questi ultimi assi siano gli assi principali d'inerzia dei due corpi rispetto ai punti 0_1, 0_2. Le equazioni che legano tra loro le coordinate di uno stesso punto rispetto ai tre sistemi di assi siano

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1, \qquad \eta = \beta + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1$$
$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1$$
$$\xi = l + l_1 x_2 + l_2 y_2 + l_3 z_2, \qquad \eta = m + m_1 x_2 + m_2 y_2 + m_3 z_2$$
$$\zeta = n + n_1 x_2 + n_2 y_2 + n_3 z_2$$
$$x_1 = a + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2, \qquad y_1 = b + b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_3 z_2$$
$$z_1 = c + c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2.$$

Con p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2 indichiamo le componenti della velocità di rotazione di S_1 e di S_2 valutate attorno agli assi x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 rispettivamente e con P, Q, R le componenti della velocità di rotazione relativa di S_2 rispetto ad S_1 situata attorno agli assi x_2, y_2, z_2; ossia, se poniamo

$$p'_1 = p_1 a_1 + q_1 b_1 + r_1 c_1, \qquad q'_1 = p_1 a_2 + q_1 b_2 + r_1 c_2, \qquad r'_1 = p_1 a_3 + q_1 b_3 + r_1 c_3$$

sarà

$$P = p_2 - p'_1, \qquad Q = q_2 - q'_1, \qquad R = r_2 - r'_1.$$

Poniamo adesso

$$u_1 = \alpha'\alpha_1 + \beta'\beta_1 + \gamma'\gamma_1, \qquad v_1 = \alpha'\alpha_2 + \beta'\beta_2 + \gamma'\gamma_2, \qquad w_1 = \alpha'\alpha_3 + \beta'\beta_3 + \gamma'\gamma_3,$$
$$u_2 = l'l_1 + m'm_1 + n'n_1, \qquad v_2 = l'l_2 + m'm_2 + n'n_2, \qquad w_2 = l'l_3 + m'm_3 + n'n_3,$$
$$u_3 = a'a_1 + b'b_1 + c'c_1, \qquad v_3 = a'a_2 + b'b_2 + c'c_2, \qquad w_3 = a'a_3 + b'b_3 + c'c_3,$$
$$u'_1 = u_1 a_1 + v_1 b_1 + w_1 c_1, \qquad v'_1 = u_1 a_2 + v_1 b_2 + w_1 c_2, \qquad w'_1 = u_1 a_3 + v_1 b_3 + w_1 c_3$$

avremo

$$2\,T_2 = \int_{S_2} dm\,\{[u_3 + Qz_2 - Ry_2]^2 + [v_3 + Rx_2 - Pz_2]^2 + [w_3 + Py_2 - Qx_2]^2\}$$

$$T_1 = \int_{S_2} dm\,\{[u'_1 + q'_1(z_2 - Z_2) - r'_1(y_2 - Y_2)]\,(u_3 + Qz_2 - Ry_2) +$$

$$+ [v'_1 + r'_1(x_2 - X_2) - p'_1(z_2 - Z_2)]\,(v_3 + Rx_2 - Pz_2) +$$

$$+ [w'_1 + p'_1(y_2 - Y_2) - q'_1(x_2 - X_2)]\,(w_3 + Py_2 - Qx_2)\}$$

$$2\,G = \int_{S_2} dm\,\{[u'_1 + q'_1(z_2 - Z_2) - r'_1(y_2 - Y_2)]^2 +$$

$$+ [v'_1 + r'_1(x_2 - X_2) - p'_1(z_2 - Z_2)]^2 +$$

$$+ [w'_1 + p'_1(y_2 - Y_2) - q'_1(x_2 - X_1)]^2\}$$

ove X_2, Y_2, Z_2 sono le coordinate di 0_1 rispetto agli assi $0_2x_2y_2z_2$. Se per semplicità supponiamo che 0_2 sia il baricentro di S_2 le formole ora trovate daranno

$$2\,T_2 = M_2(u_3^2 + v_3^2 + w_3^2) + A_2P^2 + B_2Q^2 + C_2R^2$$

$$T_1 = M_2\,\{(u'_1 + r'_1Y_2 - q'_1Z_2)\,u_3 + (v'_1 + p'_1Z_2 - r'_1X_2)\,v_3 +$$

$$+ (w'_1 + q'_1X_2 - p'_1Y_2)\,w_3\} + p'_1PA_2 + q'_1QB_2 + r'_1RC_2$$

$$2\,G = M_2\,\{(u'_1 + r'_1Y_2 - q'_1Z_2)^2 + (v'_1 + p'_1Z_2 - r'_1X_2)^2 +$$

$$+ (w'_1 + q'_1X_2 - p'_1Y_2)^2\} + p'^2_1A_2 + q'^2_1B_2 + r'^2_1C_2$$

ed in queste equazioni M_2 rappresenta la massa del sistema S_2; A_2, B_2, C_2 sono i momenti d'inerzia del sistema S_2 rispetto agli assi x_2, y_2, z_2.

Abbiamo inoltre

$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

$$r'_1Y_2 - q'_1Z_2 = a_1(cq_1 - br_1) + b_1(ar_1 - cp_1) + c_1(bp_1 - aq_1)$$

$$p'_1Z_2 - r'_1X_2 = a_2(cq_1 - br_1) + b_2(ar_1 - cp_1) + c_2(bp_1 - aq_1)$$

$$q'_1X_2 - p'_1Y_2 = a_3(cq_1 - br_1) + b_3(ar_1 - cp_1) + c_3(bp_1 - aq_1)$$

$$-X_2 = aa_1 + bb_1 + cc_1, \qquad -Y_2 = aa_2 + bb_2 + cc_2, \qquad -Z_2 = aa_3 + bb_3 + cc_3$$

per cui

$$(u'_1 + r'_1 Y_2 - q'_1 Z_2) u_3 + (v'_1 + p'_1 Z_2 - r'_1 X_2) v_3 + (w'_1 + q'_1 X_2 - p'_1 Y_2) w_3 =$$
$$= a'(u_1 + c q_1 - b r_1) + b'(v_1 + a r_1 - c p_1) + c'(w_1 + p_1 b - a q_1);$$
$$(u'_1 + r'_1 Y_2 - q'_1 Z_2)^2 + (v'_1 + p'_1 Z_2 - r'_1 X_2)^2 + (w'_1 + q'_1 X_2 - p'_1 Y_2)^2 =$$
$$= (u_1 + c q_1 - b r_1)^2 + (v_1 + a r_1 - c p_1)^2 + (w_1 + p_1 b - a q_1)^2.$$

Conseguentemente avremo

$$2 T_2 = M_2(a'^2 + b'^2 + c'^2) + A_2 P^2 + B_2 Q^2 + C_2 R^2$$
$$T_1 = M_2 \{ a'(u_1 + c q_1 - b r_1) + b'(v_1 + a r_1 - c p_1) + c'(w_1 + b p_1 - a q_1) \} +$$
$$+ A_2 P p'_1 + B_2 Q q'_1 + C_2 R r'_1$$
$$2 G = M_2 \{ [u_1 + c q_1 - b r_1]^2 + [v_1 + a r_1 - c p_1]^2 + [w_1 + b p_1 - a q_1]^2 \} +$$
$$+ A_2 p'^2_1 + B_2 q'^2_1 + C_2 r'^2_1.$$

Se i due corpi girano attorno ad uno stesso punto fisso, queste equazioni divengono naturalmente più semplici. Abbiamo infatti allora

$$2 T_2 = A_2 P^2 + B_2 Q^2 + C_2 R^2$$
$$T_1 = A_2 P p'_1 + B_2 Q q'_1 + C_2 R r'_1$$
$$2 G = A_2 p'^2_1 + B_2 q'^2_1 + C_2 r'^2_1.$$

Dalle quali si vede che, se per fissare la posizione di S_2 rispetto ad S_1 si prendono i tre angoli di Eulero, la (12) prende in questo caso la forma

$$V + \frac{\partial S}{\partial t} + p'_1 \left[\frac{\Psi + \Phi \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} \operatorname{sen}\varphi - \Theta \cos\varphi \right] +$$
$$+ q'_1 \left[\frac{\Psi + \Phi \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} \cos\varphi + \Theta \operatorname{sen}\varphi \right] + r'_1 \Phi =$$
$$= \frac{1}{2 A_2} \left[\frac{\Psi + \Phi \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} \operatorname{sen}\varphi - \Theta \cos\varphi \right]^2 +$$
$$+ \frac{1}{2 B_2} \left[\frac{\Psi + \Phi \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} \cos\varphi + \Theta \operatorname{sen}\varphi \right]^2 + \frac{\Phi^2}{2 C_2}$$

ove per brevità si sono indicate con Θ, Φ, Ψ le derivate di S rispetto a ϑ, φ, ψ ed inoltre si deve supporre di aver espresso p'_1, q'_1, r'_1 per mezzo delle variabili ϑ, φ, ψ e delle quantità p_1, q_1, r_1 che sono funzioni note del tempo.

Gli integrali primi del moto saranno

$$\Theta = \frac{\partial(T_2+T_1)}{\partial \vartheta'} = A_2(p'_1+P)\frac{\partial P}{\partial \vartheta'} + B_2(q'_1+Q)\frac{\partial Q}{\partial \vartheta'} + C_2(r'_1+R)\frac{\partial R}{\partial \vartheta'}$$

$$\Phi = \frac{\partial(T_2+T_1)}{\partial \varphi'} = A_2(p'_1+P)\frac{\partial P}{\partial \varphi'} + B_2(q'_1+Q)\frac{\partial Q}{\partial \varphi'} + C_2(r'_1+R)\frac{\partial R}{\partial \varphi'}$$

$$\Psi = \frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial \psi'} = A_2(p'_1+P)\frac{\partial P}{\partial \psi'} + B_2(q'_1+Q)\frac{\partial Q}{\partial \psi'} + C_2(r'_1+R)\frac{\partial R}{\partial \psi'}$$

e poichè

$$p_2 = P + p'_1, \qquad q_2 = Q + q'_1, \qquad r_2 = R + r'_1$$

$$P = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta\, \psi' - \cos\varphi\, \vartheta'$$

$$Q = \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta\, \psi' + \operatorname{sen}\varphi\, \vartheta'$$

$$R = \varphi' - \cos\vartheta\, \psi'$$

così sarà

$$\Theta = -A_2(P+p'_1)\cos\varphi + B_2(Q+q'_1)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\Phi = C_2(R+r'_1)$$

$$\Psi = A_2(P+p'_1)\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta + B_2(Q+q'_1)\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - C_1(R+r'_1)\cos\vartheta$$

e conseguentemente

$$A_2 P = \frac{\Psi+\Phi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\operatorname{sen}\varphi - \Theta\cos\varphi - A_2 p'_1$$

$$B_2 Q = \frac{\Psi+\Phi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\cos\varphi + \Theta\operatorname{sen}\varphi - B_2 q'_1$$

$$C_2 R = \Phi - C_2 r'_1 .$$

Dalle quali abbiamo

$$\left[\frac{\Psi+\Phi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\operatorname{sen}\varphi - \Theta\cos\varphi\right]p'_1 + \left[\frac{\Psi+\Phi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\cos\varphi + \Theta\operatorname{sen}\varphi\right]q'_1 +$$

$$+ r'_1\Phi = A_2 p'_1 p_2 + B_2 q'_1 q_2 + C_2 r'_1 r_2 = G_2\omega_1\cos(G_2\omega_1)$$

ove G_2 rappresenta la coppia di quantità di moto nel tempo t del secondo corpo, ω_1 la velocità angolare del primo e $(G_2\omega_1)$ l'angolo che l'asse della coppia G_2 fa coll'asse della rotazione ω_1. Questa espressione è costante se i due corpi non sono soggetti a forze acceleratrici ed i loro piani invariabili coincidono. In questo caso, ed ogni qualvolta la V dipenda dalle sole coordinate relative ϑ, φ, ψ e p_1, q_1, r_1 siano costanti un integrale del moto sarà $\frac{\partial S}{\partial t} = \text{cost.}$ Se in V non apparisce ψ un altro integrale sarà $\Psi = \text{cost.}$

6. Come seconda applicazione determiniamo la forma che prende l'equazione (12) quando il sistema S_1 è formato da assi che ruotano indipendentemente gli uni dagli altri attorno alla origine tenuta fissa. Siano ξ_i, η_i, ζ_i le coordinate dei punti materiali mobili del sistema S_2, che hanno le masse m_1, $m_2, \ldots m_n$ rispetto agli assi S_1, e siano x_i, y_i, z_i le coordinate di questi stessi punti rispetto ad un sistema fisso ortogonale, la cui origine coincida colla origine degli assi S_1. Fra le coordinate ξ_i, η_i, ζ_i ed x_i, y_i, z_i hanno luogo le relazioni

$$x_i = a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\zeta_i, \qquad y_i = b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\zeta_i$$
$$z_i = c_1\xi_i + c_2\eta_i + c_3\zeta_i.$$

Indicando con X'_i, Y_i, Z'_i le quantità omologhe a quelle indicate con Q'_i nel § 1, avremo

$$X'_i = a'_1\xi_i + a'_2\eta_i + a'_3\zeta_i, \qquad Y'_i = b'_1\xi_i + b'_2\eta_i + b'_3\zeta_i$$
$$Z'_i = c'_1\xi_i + c'_2\eta_i + c'_3\zeta_i$$

per cui col porre

$$\omega_1 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3, \qquad \omega_2 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3, \qquad \omega_3 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

si avrà

$$2T_2 = \sum m_i \{\xi'^2_i + \eta'^2_i + \zeta'^2_i + 2\xi'_i\eta'_i\omega_3 + 2\xi'_i\zeta'_i\omega_2 + 2\eta'_i\zeta'_i\omega_1\}$$
$$T_1 + 2G = \sum m_i(X'_i x'_i + Y'_i y'_i + Z'_i z'_i)$$
$$2G = \sum m_i(X'^2_i + Y'^2_i + Z'^2_i)$$

e conseguentemente

$$\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\xi'_h} = p_{3h-2} = X'_{1h} + m_h(\xi'_h + \eta'_h\omega_3 + \zeta'_h\omega_2)$$

$$\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\eta'_h} = p_{3h-1} = Y'_{1h} + m_h(\eta'_h + \zeta'_h\omega_1 + \xi'_h\omega_3)$$

$$\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\zeta'_h} = p_{3h} \quad = Z'_{1h} + m_h(\zeta'_h + \xi'_h\omega_2 + \eta'_h\omega_1)$$

ove per brevità si è posto

$$m_h(X'_h a_1 + Y'_h b_1 + Z'_h c_1) = X'_{1h}$$
$$m_h(X'_h a_2 + Y'_h b_2 + Z'_h c_2) = Y'_{1h}$$
$$m_h(X'_h a_3 + Y'_h b_3 + Z'_h c_3) = Z'_{1h}.$$

La (12) diviene allora

$$\frac{\partial S}{\partial t}+V+\sum_h \frac{1}{2\,m_h\Delta}\begin{vmatrix} 0 & p_{3h-2} & p_{3h-1} & p_{3h} \\ p_{3h-2} & 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ p_{3h-1} & \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ p_{3h} & \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_h \frac{1}{m_h\Delta}\begin{vmatrix} 0 & p_{3h-2} & p_{3h-1} & p_{3h} \\ X'_{1h} & 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ Y'_{1h} & \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ Z'_{1h} & \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ove è

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

7. Prendiamo ora a considerare il moto di un punto attratto da due centri che scorrono sopra una retta con velocità uguali ed opposte. Le considerazioni esposte nella 29$^{\text{ma}}$ delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi mostrano che basta considerare il moto del punto in un piano che passi per la retta sulla quale si muovono i centri di azione. Facciamo uso in questo piano di un sistema di coordinate ellittiche, i cui fuochi coincidano coi centri di azione. Se λ_1, λ_2 sono le due radici della equazione

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{a+\lambda}=1$$

ove a è una funzione nota del tempo, avremo

$$x^2=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a},\qquad y^2=\frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a}.$$

Per cui seguendo il metodo esposto nel § 1 avremo

$$2\,T_2=\frac{\lambda'^2_1}{4\,m_1^2}+\frac{\lambda'^2_2}{4\,m_2^2}$$

$$T_1=\frac{a'}{4\,a}\left(\frac{\lambda_2+a}{\lambda_1+a}\,\lambda'_1+\frac{\lambda_1+a}{\lambda_2+a}\,\lambda'_2\right)$$

$$2\,G=\frac{a'^2}{4\,a^2}\left[-\frac{\lambda_1\lambda_2}{a}+a(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)\left(\frac{1}{a+\lambda_1}+\frac{1}{a+\lambda_2}-\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

ove per brevità si è posto

$$m_1^2 = \frac{\lambda_1(a+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad m_2^2 = \frac{\lambda_2(a+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Conseguentemente avremo

$$p_1 = \frac{\lambda'_1}{4m_1^2} + \frac{a'}{a}\frac{\lambda_2+a}{\lambda_1+a}$$

$$p_2 = \frac{\lambda'_2}{4m_2^2} + \frac{a'}{a}\frac{\lambda_1+a}{\lambda_2+a}$$

e

$$T_2 - G = 4(m_1p_1^2 + m_2p_2^2) - \frac{a'}{a}\left(p_1\lambda_1\frac{\lambda_2+a}{\lambda_1-\lambda_2} + p_2\lambda_2\frac{\lambda_1+a}{\lambda_2-\lambda_1}\right).$$

Laonde, se per fissare le idee supponiamo che l'azione emanante dai centri mobili segua la legge newtoniana, potremo ridurre la integrazione di questo problema di moto assoluto alla determinazione di una soluzione completa della equazione

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\lambda_1-\lambda_1) + (\mu_1+\mu_2)\sqrt{a+\lambda_1} - (\mu_1-\mu_2)\sqrt{a+\lambda_2} +$$

$$+ \frac{a'}{a}[p_1\lambda_1(\lambda_2+a) - p_2\lambda_2(\lambda_1+a)] = 2p_1^2\lambda_1(a+\lambda_1) + 2p_2^2\lambda_2(a+\lambda_2)$$

ove μ_1, μ_2 sono due costanti.

Analogamente potrebbe trattarsi il problema del moto di un punto soggetto a forze che hanno una funzione potenziale, la quale dipenda dalle coordinate curvilinee q_1, q_2, q_3 mentre i parametri delle equazioni delle superficie coordinate sono funzioni del tempo. Così ad esempio potrebbe studiarsi il moto di un punto attratto da un ellissoide omogeneo, la cui massa resta costante, mentre l'ellissoide si dilata e si contrae mantenendosi omofocale a sè stesso, come accade nel caso di una molecola ellissoidica fluida, quando non si tenga conto che del suo moto intestino, come è stato dimostrato dal Beltrami nel § 7 della sua *Cinematica dei fluidi*.

Padova, giugno 1884.

Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen.

(*Von* A. Krazer, *in Würzburg*.)

1.

Ein System von n linearen Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \cdots + a_{1n}\,y_n\,, \\ x_2 = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \cdots + a_{2n}\,y_n\,, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + \cdots + a_{nn}\,y_n\,, \end{array}\right\} \qquad (A)$$

wird eine lineare Substitution n^{ter} Ordnung genannt, wenn vermittelst desselben die in irgend welchen Ausdrücken vorkommenden Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die n angegebenen linearen Functionen der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ersetzt werden sollen. Eine solche Substitution (A) ist bestimmt, sobald die Werthe der Coefficienten a gegeben sind, und es möge daher gestattet sein, dieselbe durch das Symbol:

$$A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{array}\right|$$

zu fixiren.

Im Folgenden sollen nur solche Substitutionen betrachtet werden, bei denen die Coefficienten a ganze Zahlen sind, und für die zudem die Determinante

$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ den Werth Eins besitzt. Mit Rücksicht darauf sollen auch von jetzt an mit dem Worte « Substitutionen » ausschliesslich solche bezeichnet werden, deren Coefficienten a den beiden genannten Bedingungen genügen. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so erhält man aus dem Gleichungensysteme (A) durch Auflösung das System:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \dots + \alpha_{n1} x_n, \\ y_2 = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{n2} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \alpha_{1n} x_1 + \alpha_{2n} x_2 + \dots + \alpha_{nn} x_n, \end{array}\right\} \qquad (A^{-1})$$

bei welchem allgemein $\alpha_{\mu\nu}$ die zu $a_{\mu\nu}$ gehörige Unterdeterminante ist, und es wird daher durch das Gleichungensystem (A^{-1}) ebenfalls eine Substitution in eben definirtem Sinne bestimmt, welche die zu A inverse genannt und symbolisch mit A^{-1} bezeichnet werden soll.

Bezeichnet B eine von A verschiedene Substitution, definirt durch das Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + \dots + b_{1n} z_n, \\ y_2 = b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + \dots + b_{2n} z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1} z_1 + b_{n2} z_2 + \dots + b_{nn} z_n, \end{array}\right\} \qquad (B)$$

und ersetzt man dann in dem Gleichungensysteme (A) die Grössen y durch die auf den rechten Seiten der Gleichungen (B) stehenden linearen Functionen der Grössen z, so erhält man ein neues Gleichungensystem:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + \dots + p_{1n} z_n, \\ x_2 = p_{21} z_1 + p_{22} z_2 + \dots + p_{2n} z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = p_{n1} z_1 + p_{n2} z_2 + \dots + p_{nn} z_n, \end{array}\right\} \qquad (P)$$

für welches:

$$p_{\mu\nu} = a_{\mu 1} b_{1\nu} + a_{\mu 2} b_{2\nu} + \dots + a_{\mu n} b_{n\nu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Sigma \pm p_{11} p_{22} \dots p_{nn} = (\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}) \times (\Sigma \pm b_{11} b_{22} \dots b_{nn})$$

ist, und welches daher ebenfalls eine Substitution bestimmt. Man kann also aus zwei gegebenen Substitutionen:

$$A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{array}\right| \qquad B = \left|\begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nn} \end{array}\right|$$

immer eine neue Substitution:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

bilden, wenn man die Coefficienten p der letzteren mit Hülfe der Gleichungen:

$$p_{\mu\nu} = a_{\mu 1} b_{1\nu} + a_{\mu 2} b_{2\nu} + \cdots + a_{\mu n} b_{n\nu} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

aus den Coefficienten a, b zusammensetzt. Diese Substitution P soll die aus der Substitution A und der Substitution B zusammengesetzte Substitution genannt und als solche mit

$$P = AB$$

bezeichnet werden. Dieselbe ist im Allgemeinen von der aus der Substitution B und der Substitution A zusammengesetzten Substitution $Q = BA$ verschieden, denn die Coefficienten der letzteren werden, wenn man sie mit q bezeichnet, durch die Gleichungen:

$$q_{\mu\nu} = b_{\mu 1} a_{1\nu} + b_{\mu 2} a_{2\nu} + \cdots + b_{\mu n} a_{n\nu} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

geliefert.

Unter allen Substitutionen gibt es eine, I, welche durch Zusammensetzung mit einer beliebigen Substitution A, sei es in der Form AI oder in der Form IA, immer wieder die Substitution A erzeugt. Diese Substitution besitzt die Coefficienten:

$$i_{11} = i_{22} = \cdots = i_{nn} = 1, \qquad i_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu \gtrless \nu)$$

und wird die identische Substitution genannt; kommt sie in Verbindung mit anderen Substitutionen vor, so kann sie als wirkungslos stets unterdrückt werden. Sie tritt immer auf, wenn man eine beliebige Substitution A mit ihrer inversen A^{-1} zusammensetzt; man hat nämlich:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Unter wiederholter Anwendung desselben Verfahrens, durch welches soeben aus zwei gegebenen Substitutionen A, B eine neue Substitution AB gebildet wurde, kann man nun auch beliebig viele Substitutionen A, B, $C, \ldots$, K in der gegebenen Reihenfolge zu einer neuen Substitution zusammensetzen, indem man zunächst aus A und B die Substitution AB, dann aus AB und C eine neue mit ABC zu bezeichnende Substitution zusammensetzt und so fortfährt, bis man zur Substitution $ABC \dots K$ gelangt ist. Man erkennt leicht, dass das Endresultat dasselbe bleibt, wenn man zunächst die gegebenen Substitutionen ohne Aenderung ihrer Reihenfolge in Gruppen zusammenfasst, hierauf die Substitutionen einer jeden Gruppe in angegebener Weise zu einer einzigen Substitution vereinigt und endlich die auf diese Weise an Stelle der Gruppen getretenen neuen Substitutionen in derselben Weise zusammensetzt.

Die bisherigen Betrachtungen über die Zusammensetzung von Substitutionen bleiben ungeändert, wenn die Substitutionen A, B, C,... theilweise oder alle einander gleich sind. Die aus gleichen Substitutionen A zusammengesetzten Substitutionen AA, AAA,... sollen abgekürzt mit A^2, A^3,... beziehlich bezeichnet werden, auch soll unter A^1 die Substitution A selbst, unter A^0 die identische Substitution I verstanden werden. Entsprechend sollen die Substitutionen $A^{-1}A^{-1}$, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}$,... mit A^{-2}, A^{-3},... beziehlich bezeichnet werden. Von den beiden Substitutionen A^{μ} und $A^{-\mu}$ ist dann jede die inverse der anderen, d. h. es ist $A^{\mu}A^{-\mu} = A^{-\mu}A^{\mu} = I$.

Die Möglichkeit, durch Zusammensetzung gegebener Substitutionen neue zu erhalten, gibt nun zunächst zu der Frage Anlass, ob eine endliche Anzahl von Substitutionen S_1, S_2,..., S_ν gefunden werden kann, aus denen jede beliebige Substitution S sich zusammensetzen lässt in der Form:

$$S = S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} \dots S_\nu^{\alpha_\nu} S_1^{\beta_1} \dots S_2^{\beta_2} S_\nu^{\beta_\nu} \dots S_1^{\rho_1} S_2^{\rho_2} \dots S_\nu^{\rho_\nu},$$

wobei die α, β,..., ρ positive ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen. Ist diese Frage zu bejahen, so schliesst sich daran naturgemäss die weitere an, welches die geringste Anzahl ν von Substitutionen ist, die als ergeugende die Rolle der Substitutionen S_1, S_2,..., S_ν übernehmen können.

Die erste Frage hat Herr Kronecker in seiner Arbeit « Ueber bilineare Formen » (Monatsber. d. kgl. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1866, pag. 597) beantwortet, indem er dort n, nur die Zahlen 0, $+1$, -1 als Elemente enthaltende und von ihm als elementare bezeichnete Substitutionen aufgestellt hat, aus denen jede beliebige Substitution in oben angegebener Weise zusammengesetzt werden kann. Die betreffende Untersuchung soll unter Anwendung der im Vorigen eingeführten Bezeichnung im folgenden Artikel zunächst kurz reproducirt werden.

2.

Herr Kronecker beginnt in seiner Untersuchung damit, dass er zwei Processe angibt, durch welche man aus einer gegebenen Substitution:

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} \dots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

eine neue herleiten kann.

Der erste dieser Processe besteht darin, dass man die Glieder irgend einer, etwa der σ^{ten} Verticalreihe der Substitution S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder irgend einer anderen, etwa der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \dots, n$, $s_{\mu\sigma}$ durch $s_{\mu\sigma} - s_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \quad & (\rho) & (\sigma) & \quad \end{array} \\ A_{\rho\sigma}^{-1} = & \begin{vmatrix} 1 \dots & 0 \dots & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \dots & 1 \dots & -1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \dots & 0 \dots & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \dots & 0 \dots & 0 \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

bei der $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, $a_{\rho\sigma} = -1$ ist, während alle übrigen Coefficienten a den Werth Null besitzen, zu der Substitution $SA_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Der zweite Process dagegen besteht darin, dass man die Glieder irgend einer, etwa der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern irgend einer anderen, etwa der σ^{ten} Verticalreihe beziehlich vertauscht, nachdem man zuvor diese letzteren sämmtlich mit -1 multiplicirt hat, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \dots, n$, $s_{\mu\rho}$ durch $-s_{\mu\sigma}$, $s_{\mu\sigma}$ dagegen durch $s_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$B_{\rho\sigma}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (\rho) & (\sigma) & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & -1\ldots & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array}$$

bei der $b_{11} = \cdots = b_{\rho-1\,\rho-1} = b_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = b_{\sigma-1\,\sigma-1} = b_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = b_{nn} = 1$, $b_{\rho\sigma} = 1$, $b_{\sigma\rho} = -1$ ist, während alle übrigen Coefficienten b den Werth Null besitzen, zu der Substitution $SB_{\rho\sigma}^{1}$ zusammensetzt.

Ieder der beiden genannten Processe umfasst, entsprechend den $n(n-1)$ verschiedenen Zahlenpaaren, die an Stelle von ρ, σ treten können, $n(n-1)$ verschiedene specielle Processe. Mit Hülfe dieser $2n(n-1)$ Processe kann man nun, wie Herr Kronecker gezeigt hat, aus jeder gegebenen Substitution S eine endliche Reihe von Substitutionen ableiten, die dadurch charakterisirt ist, dass allgemein die μ^{te} Substitution in der Reihe aus der $\mu - 1^{\text{ten}}$ durch einen der genannten Processe hervorgeht, und dass die letzte Substitution in der Reihe die identische I ist. Dieses Resultat lässt sich aber mit Rücksicht auf das vorher Bemerkte auch so aussprechen, dass man aus einer Substitution S durch Zusammensetzung derselben mit einer endlichen Anzahl m von Substitutionen $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \ldots, S_{m-1}^{-1}, S_m^{-1}$, von denen eine jede unter den $2n(n-1)$ Substitutionen $A_{\rho\sigma}^{-1}$, $B_{\rho\sigma}^{-1}$ enthalten ist, die identische Substitution I erzeugen kann in der Form:

$$S S_1^{-1} S_2^{-1} \ldots S_{m-1}^{-1} S_m^{-1} = I.$$

Beachtet man nun, dass aus dieser Gleichung unmittelbar die Gleichung:

$$S S_1^{-1} S_2^{-1} \ldots S_{m-1}^{-1} S_m^{-1} S_m S_{m-1} \ldots S_2 S_1 = I S_m S_{m-1} \ldots S_2 S_1$$

hervorgeht, und dass diese letztere unter Anwendung der Relationen $S_m^{-1} S_m = I$, $S_{m-1}^{-1} S_{m-1} = I, \ldots, S_2^{-1} S_2 = I$, $S_1^{-1} S_1 = I$ mit jedesmaliger Unterdrückung des aufgetretenen I in die Gleichung:

$$S = S_m S_{m-1} \ldots S_2 S_1$$

übergeführt werden kann, so erhält man zunächst das Resultat, dass man jede beliebige Substitution S aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen zusammensetzen kann, die in den Formen:

$$A_{\rho\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (\rho) & (\sigma) & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 1\ldots & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & 1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array} \qquad B_{\rho\sigma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & (\rho) & (\sigma) & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 1\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & -1\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 1\ldots & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\ldots & 0\ldots & 0\ldots & 1 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (\rho) \\ \\ (\sigma) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$(\rho,\ \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ n;\ \rho \gtrless \sigma)$$

— wobei in der ersten Form $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$, $a_{\rho\sigma} = 1$, in der zweiten Form

$$a_{11} = \cdots = a_{\rho-1\,\rho-1} = a_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = a_{\sigma-1\,\sigma-1} = a_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = a_{nn} = 1, \quad a_{\rho\sigma} = -1,$$

$a_{\sigma\rho} = 1$ ist, während die übrigen, nicht genannten Elemente der beiden Formen den Werth Null besitzen — enthalten sind.

Die auf diese Weise gewonnenen $2n(n-1)$ erzeugenden Substitutionen können ohne Mühe auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Es lassen sich nämlich auf mehrere Weisen n unter ihnen auswählen, aus denen die übrigen zusammengesetzt werden können. Wie eine einfache Ueberlegung zeigt, bestehen zwischen den $2n(n-1)$ Substitutionen $A_{\rho\sigma}$, $B_{\rho\sigma}$ die Relationen:

$$A_{\rho\sigma} = B_{1\rho} B_{2\sigma} A_{12} B_{\sigma 2} B_{\rho 1}, \tag{1}$$

$$B_{\rho\sigma} = B^3_{\sigma\rho}, \tag{2}$$

$$B_{\rho\sigma} = B^3_{\rho\,\rho+1} B^3_{\rho+1\,\rho+2} \ldots B^3_{\sigma-2\,\sigma-1} B_{\sigma-1\,\sigma} B_{\sigma-2\,\sigma-1} \ldots B_{\rho+1\,\rho+2} B_{\rho\,\rho+1}, \qquad (\rho < \sigma) \tag{3}$$

die übrigens auch leicht durch direkte Zusammensetzung der auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Substitutionen verificirt werden können. Mit Hülfe der Relation (1) kann man die sämmtlichen $n(n-1)$ Substitutionen A aus einer einzigen unter ihnen, A_{12}, — wofür unter entsprechender Abänderung der Relation auch jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen B zusammensetzen. Mit Hülfe der Relation (2) kann man dann jede der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B, bei denen der erste Index grösser ist als der zweite, durch je eine der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B ausdrücken, bei denen der erste Index kleiner ist als der zweite, und endlich lassen sich diese letzten $\frac{1}{2}n(n-1)$ Substitutionen B mit Hülfe der Relation (3) aus den $n-1$ Substitutionen B_{12}, B_{23}, $B_{34}, \ldots,$ $B_{n-1\,n}$ zusammensetzen.

Man ist auf diese Weise zu dem von Herrn KRONECKER in etwas anderer Form ausgesprochenen Resultate gelangt, dass sich jede beliebige Substitution S aus den n Substitutionen:

$$A_{12},\quad B_{12},\quad B_{23},\quad B_{34},\ldots,\quad B_{n-1\,n}$$

als erzeugenden zusammensetzen lässt; auch erkennt man aus dem Gange der vorigen Entwicklung unmittelbar, dass sich die $n-1$ Substitutionen B_{12}, B_{23}, $B_{34},\ldots,$ $B_{n-1\,n}$ auf mehrere Weisen durch $n-1$ andere der Substitutionen B ersetzen lassen.

3.

Die weitere Frage ist jetzt die, ob nicht ein System von weniger als n Substitutionen gefunden werden kann, aus denen als erzeugenden sich jede beliebige Substitution S zusammensetzen lässt. Diese Frage muss bejaht werden; ich will nämlich jetzt unter Benutzung des am Schlusse des vorigen Artikels angeführten KRONECKER'schen Endresultates zeigen, dass alle Substitutionen S aus drei bestimmten Substitutionen als erzeugenden zusammengesetzt werden können. Diese drei im Folgenden aufgestellten Substitutionen lassen sich natürlich, wie aus dem Gange der Untersuchung erhellen wird, auf mehrere Weisen durch drei andere ersetzen.

Um das erwähnte System von drei erzeugenden Substitutionen zu erhalten, bilde ich zunächst aus den $n-1$ Substitutionen B_{12}, $B_{23},\ldots,$ $B_{n-1\,n}$ durch Zusammensetzung die Substitution:

$$C = B_{12}\,B_{23}\ldots B_{n-1\,n};$$

es ist dann:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wo ε die Grösse $(-1)^{n-1}$ vertritt.

Setzt man diese Substitution C, bei der $c_{21}=c_{32}=\cdots=c_{n\,n-1}=1$, $c_{1n}=\varepsilon=(-1)^{n-1}$ ist, während alle übrigen Coefficienten c den Werth Null besitzen, mit irgend einer Substitution S zusammen zur Substitution SC, so ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ die ν^{te} Verticalreihe dieser neuen Substitution mit der $\nu+1^{ten}$ Verticalreihe von S identisch, während die Glieder der n^{ten} Verticalreihe von SC sich von den entsprechenden Gliedern der ersten Verticalreihe von S nur durch den Factor ε unterscheiden; entsprechend wird daher die aus S und $C^{\rho-1}$, wobei ρ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet, zusammengesetzte Substitution $SC^{\rho-1}$ zur Substitution S in der Beziehung stehen, dass ihre $1^{te}, 2^{te}, 3^{te}, \ldots, n-\rho+1^{te}$ Verticalreihe beziehlich identisch ist mit der $\rho^{ten}, \rho+1^{ten}, \rho+2^{ten}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von S, während die Glieder der $n-\rho+2^{ten}, n-\rho+3^{ten}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von $SC^{\rho-1}$ sich von den entsprechenden Gliedern der $1^{ten}, 2^{ten}, \ldots, \rho-1^{ten}$ Verticalreihe von S beziehlich nur durch den Factor ε unterscheiden. Endlich wird dann die aus $SC^{\rho-1}$ und B_{12} zusammengesetzte Substitution $SC^{\rho-1}B_{12}$ zur Substitution S in der Beziehung stehen, dass ihre 1^{te} Verticalreihe mit der $\rho+1^{ten}$ Verticalreihe von S identisch ist, die Glieder ihrer zweiten Verticalreihe sich von den entsprechenden Gliedern der ρ^{ten} Verticalreihe von S durch den Factor -1 unterscheiden, während, ebenso wie bei der Substitution $SC^{\rho-1}$, ihre $3^{te}, \ldots, n-\rho+1^{te}$ Verticalreihe mit der $\rho+2^{ten}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe von S beziehlich identisch ist, die Glieder der $n-\rho+2^{ten}, n-\rho+3^{ten}, \ldots, n^{ten}$ Verticalreihe dagegen sich von den entsprechenden Gliedern der $1^{ten}, 2^{ten}, \ldots, \rho-1^{ten}$ Verticalreihe von S beziehlich nur durch den Factor ε unterscheiden. Die so entstandene Substitution $SC^{\rho-1}B_{12}$ kann aber, wie man leicht erkennt, auch dadurch erhalten werden, dass man zunächst aus der Substitution S und der Substitution $B_{\rho\,\rho+1}$ die Substitution $SB_{\rho\,\rho+1}$ und hierauf aus dieser und der Substitution $C^{\rho-1}$ die Substitution $SB_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1}$ zusammensetzt, d. h. es besteht die Gleichung:

$$SB_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1} = SC^{\rho-1}B_{12}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich nun successive die Gleichungen:

$$B_{\rho\,\rho+1}C^{\rho-1} = C^{\rho-1}B_{12}, \qquad B_{\rho\,\rho+1}C^{2n} = C^{\rho-1}B_{12}C^{2n-\rho+1},$$

und man erhält schliesslich, indem man berücksichtigt, dass $C^{2n} = I$ ist, die Relation:

$$B_{\rho\,\rho+1} = C^{\rho-1}B_{12}C^{2n-\rho+1}, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man nun in dem Systeme der n Substitutionen:

$$A_{12}, \quad B_{12}, \quad B_{23}, \quad B_{34}, \ldots, \quad B_{n-1\,n},$$

aus denen als erzeugenden, wie im vorigen Artikel auseinandergesetzt wurde, jede beliebige Substitution S sich zusammensetzen lässt, die $n-2$ letzten Substitutionen $B_{23}, B_{34}, \ldots, B_{n-1\,n}$ aus den beiden Substitutionen B_{12} und C zusammensetzen, und man erhält so schliesslich, wenn man noch beachtet, dass für $n=2$ die Substitution C mit der Substitution B_{12} identisch wird, das Endresultat:

Jede ganzzahlige lineare Substitution n^{ter} Ordnung von der Determinante Eins lässt sich im Falle $n>2$ immer aus den drei fundamentalen Substitutionen:

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad B_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

wo $\varepsilon=(-1)^{n-1}$ ist, als erzeugenden zusammensetzen; im Falle $n=2$ aus den zwei Substitutionen $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4.

Unter den ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins nehmen diejenigen eine ausgezeichnete Stellung ein, welche bei der linearen Transformation der allgemeinen Thetafunctionen von p Variablen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der dadurch darstellbaren sogenannten Abel'schen Functionen auftreten. Alle diese Substitutionen sind in der Form:

$$S=\left|\begin{array}{cc|cc} \alpha_{11} \ldots & \alpha_{1p} & \beta_{11} \ldots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} \ldots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} \ldots & \beta_{pp} \\ \hline \gamma_{11} \ldots & \gamma_{1p} & \delta_{11} \ldots & \delta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} \ldots & \gamma_{pp} & \delta_{p1} \ldots & \delta_{pp} \end{array}\right|$$

enthalten, bei der die $4p^2$ Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als ganze Zahlen den

$p(2p-1)$ Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\gamma_{\nu\varepsilon'}-\alpha_{\nu\varepsilon'}\gamma_{\nu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p}(\beta_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon'}-\beta_{\nu\varepsilon'}\delta_{\nu\varepsilon})=0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon'}-\beta_{\nu\varepsilon'}\gamma_{\nu\varepsilon})=\begin{matrix}0, \text{ wenn } \varepsilon' \gtrless \varepsilon,\\ 1, \text{ wenn } \varepsilon'=\varepsilon,\end{matrix} \qquad (\varepsilon, \varepsilon'=1, 2, \ldots, p)$$

oder den damit äquivalenten:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}-\alpha_{\nu'\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu'\varepsilon}-\gamma_{\nu'\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon})=0,$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu'\varepsilon}-\beta_{\nu\varepsilon}\gamma_{\nu'\varepsilon})=\begin{matrix}0, \text{ wenn } \nu' \gtrless \nu,\\ 1, \text{ wenn } \nu'=\nu,\end{matrix} \qquad (\nu, \nu'=1, 2, \ldots, p)$$

unterworfen sind, und bei der zugleich in Folge dieser Beziehungen die Determinante der Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Eins besitzt. Umgekehrt entspricht aber auch jeder ganzzahligen linearen Substitution, deren Coefficienten den angegebenen Bedingungen genügen, eine lineare Transformation der Thetafunctionen. Eine solche Substitution S soll nun in der Folge zur Unterscheidung von den bisher betrachteten allgemeineren Substitutionen eine kanonische genannt und der Raumersparniss wegen auch durch das einfachere Symbol:

$$S=\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|$$

bezeichnet werden.

Setzt man aus irgend zwei kanonischen Substitutionen S_1, S_2 in der in Art. 1 angegebenen Weise die Substitution $S_1 S_2$ zusammen, so zeigt sich, dass dieselbe ebenfalls eine kanonische ist; daraus folgt dann unmittelbar, dass immer auch die Substitution $S_1 S_2 \ldots S_m$ eine kanonische ist, wenn die einzelnen Substitutionen S_1, $S_2, \ldots, S_m$ kanonische sind. Mit Rücksicht darauf kann man ebenso, wie es früher bei den allgemeineren Substitutionen geschehen ist, hier für die kanonischen Substitutionen die Frage aufwerfen, ob eine endliche Anzahl ν kanonischer Substitutionen gefunden werden kann, aus denen als erzeugenden jede beliebige kanonische Substitution S sich zusammensetzen lässt in der Form:

$$S=S_1^{\varkappa_1}S_2^{\varkappa_2}\ldots S_\nu^{\varkappa_\nu}S_1^{\beta_1}S_2^{\beta_2}\ldots S_\nu^{\beta_\nu}\ldots S_1^{\rho_1}S_2^{\rho_2}\ldots S_\nu^{\rho_\nu},$$

wobei die α, $\beta, \ldots, \rho$ positive ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen, und auch hier schliesst sich, wenn diese Frage zu bejahen ist, daran die weitere an, welches die geringste Anzahl ν von kanonischen Substitutionen ist, die als erzeugende die Rolle der Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ übernehmen können.

Die erste Frage ist schon von Herrn KRONECKER entschieden worden, indem er in seiner in Art. 1 erwähnten Abhandlung gezeigt hat, dass sich alle kanonischen Substitutionen aus $p+2$ bestimmten in oben angegebener Weise zusammensetzen lassen. Die betreffende Untersuchung soll im folgenden Artikel kurz reproducirt werden.

5.

Es gibt, wie Herr KRONECKER gezeigt hat, vier Processe, durch welche man aus einer kanonischen Substitution:

$$S = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \ldots & \beta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \ldots & \beta_{pp} \\ \hline \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1p} & \delta_{11} & \ldots & \delta_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \ldots & \gamma_{pp} & \delta_{p1} & \ldots & \delta_{pp} \end{array}\right|$$

eine andere herleiten kann. Bezeichnet man mit ρ, σ irgend zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, p$, so kann man diese Processe in folgender Weise charakterisiren.

Der erste Process besteht darin, dass man die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe der Substitution S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\beta_{\mu\rho}$ durch $\beta_{\mu\rho} - \alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\delta_{\mu\rho} - \gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$A_\rho^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution SA_ρ^{-1} zusammensetzt.

Der zweite Process besteht darin, dass man die Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe beziehlich vertauscht, nachdem man zuvor diese letzteren sämmtlich mit -1 multiplicirt hat, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_{\mu\rho}$ durch $-\beta_{\mu\rho}$, $\gamma_{\mu\rho}$ durch $-\delta_{\mu\rho}$, dagegen $\beta_{\mu\rho}$ durch $\alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$B_\rho^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = 1$, $\gamma_{\rho\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Coefficienten α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution SB_ρ^{-1} zusammensetzt.

Der dritte Process besteht darin, dass man die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe von S durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der σ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, und gleichzeitig die Glieder der $p+\sigma^{\text{ten}}$ Verticalreihe durch neue ersetzt, welche aus den ursprünglichen durch Subtraction der entsprechenden Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe hervorgehen, sodass allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\beta_{\mu\rho}$ durch $\beta_{\mu\rho} - \alpha_{\mu\sigma}$, $\delta_{\mu\rho}$ durch $\delta_{\mu\rho} - \gamma_{\mu\sigma}$, und gleichzeitig $\beta_{\mu\sigma}$ durch $\beta_{\mu\sigma} - \alpha_{\mu\rho}$, $\delta_{\mu\sigma}$ durch $\delta_{\mu\sigma} - \gamma_{\mu\rho}$ ersetzt wird. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$C_{\rho\sigma}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\sigma} = \beta_{\sigma\rho} = -1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$ ist, während alle übrigen Grössen α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution $SC_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Der vierte Process endlich besteht darin, dass man die Glieder der ρ^{ten} Verticalreihe der Substitution S mit den Gliedern der σ^{ten}, und gleichzeitig die Glieder der $p+\rho^{\text{ten}}$ Verticalreihe mit den Gliedern der $p+\sigma^{\text{ten}}$ beziehlich vertauscht, sodass also allgemein, d. h. für $\mu = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_{\mu\rho}$ mit $\alpha_{\mu\sigma}$, $\gamma_{\mu\rho}$ mit $\gamma_{\mu\sigma}$ und gleichzeitig $\beta_{\mu\rho}$ mit $\beta_{\mu\sigma}$, $\delta_{\mu\rho}$ mit $\delta_{\mu\sigma}$ den Platz wechselt. Die auf diese Weise aus S hervorgehende neue Substitution entsteht aber auch, wenn man die Substitution S und die Substitution

$$D_{\rho\sigma}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

bei der $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{\sigma-1\,\sigma-1} = \alpha_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\alpha_{\rho\sigma} = \alpha_{\sigma\rho} = 1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{\sigma-1\,\sigma-1} = \delta_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$, $\delta_{\rho\sigma} = \delta_{\sigma\rho} = 1$ ist, während alle übrigen Grössen α, β, γ, δ den Werth Null besitzen, zur Substitution $SD_{\rho\sigma}^{-1}$ zusammensetzt.

Jeder der beiden ersten Processe umfasst p, den Werthen $\rho = 1, 2, \ldots, p$ entsprechende specielle Processe; jeder der beiden letzten Processe dagegen umfasst, da für ρ, σ jede aus den Zahlen $1, 2, \ldots, p$ als Elementen gebildete Combination zur 2^{ten} Classe ohne Wiederholung treten kann, $\frac{1}{2}p(p-1)$ verschiedene specielle Processe. Mit Hülfe dieser sämmtlichen $p(p+1)$ Processe kann man nun, wie Herr Kronecker gezeigt hat, aus jeder gegebenen kanonischen Substitution S eine endliche Reihe kanonischer Substitutionen ableiten, die dadurch charakterisirt ist, dass allgemein die μ^{te} Substitution in der Reihe aus der $\mu - 1^{\text{ten}}$ durch einen der genannten Processe hervorgeht, und dass die letzte Substitution in der Reihe die ebenfalls zu den kanonischen Substitutionen gehörige identische Substitution I ist. Daraus folgt aber durch Schlüsse, welche den in Art. 2 an entsprechender Stelle gemachten analog sind, dass man jede kanonische Substitution zusammensetzen kann aus einer endlichen Anzahl in den Formen:

$$A_\rho = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|, \quad B_\rho = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|, \quad C_{\rho\sigma} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|, \quad D_{\rho\sigma} = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}\right|,$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots, p); \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, p; \quad \rho < \sigma)$$

enthaltener Substitutionen, welche Formen dadurch charakterisirt sind, dass:

1) bei A_ρ: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = 1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$,

2) bei B_ρ: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\rho} = -1$, $\gamma_{\rho\rho} = 1$,
$\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1$;

3) bei $C_{\rho\sigma}$: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{pp} = 1$, $\beta_{\rho\sigma} = \beta_{\sigma\rho} = 1$, $\delta_{11} = \cdots = \delta_{pp} = 1$:

4) bei $D_{\rho\sigma}$: $\alpha_{11} = \cdots = \alpha_{\rho-1\,\rho-1} = \alpha_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \alpha_{\sigma-1\,\sigma-1} = \alpha_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \alpha_{pp} = 1,$

$$\delta_{11} = \cdots = \delta_{\rho-1\,\rho-1} = \delta_{\rho+1\,\rho+1} = \cdots = \delta_{\sigma-1\,\sigma-1} = \delta_{\sigma+1\,\sigma+1} = \cdots = \delta_{pp} = 1,$$

$$\alpha_{\rho\sigma} = \alpha_{\sigma\rho} = 1, \quad \delta_{\rho\sigma} = \delta_{\sigma\rho} = 1$$

ist, während bei jeder der Formen alle übrigen, nicht genannten Elemente α, β, γ, δ den Werth Null besitzen.

Die auf diese Weise gewonnenen $p(p+1)$ erzeugenden Substitutionen können ohne Mühe auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Es lassen sich nämlich auf mehrere Weisen $p+2$ unter ihnen auswählen, aus denen die übrigen zusammengesetzt werden können. Wie eine einfache Ueberlegung zeigt, bestehen zwischen den $p(p+1)$ Substitutionen A_ρ, B_ρ, $C_{\rho\sigma}$, $D_{\rho\sigma}$ die Relationen:

$$A_\rho = D_{1\rho} A_1 D_{1\rho}, \tag{1}$$

$$B_\rho = D_{1\rho} B_1 D_{1\rho}, \tag{2}$$

$$C_{\rho\sigma} = D_{1\rho} D_{2\sigma} C_{12} D_{2\sigma} D_{1\rho}, \tag{3}$$

$$D_{\rho\sigma} = D_{\rho\,\rho+1} D_{\rho+1\,\rho+2} \ldots D_{\sigma-2\,\sigma-1} D_{\sigma-1\,\sigma} D_{\sigma-2\,\sigma-1} \ldots D_{\rho+1\,\rho+2} D_{\rho\,\rho+1}, \quad (\rho < \sigma) \tag{4}$$

die übrigens auch leicht durch direkte Zusammensetzung der auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Substitutionen verificirt werden können. Mit Hülfe der Relation (1) kann man die sämmtlichen p Substitutionen A, mit Hülfe der Relation (2) die p Substitutionen B aus je einer von ihnen, A_1 beziehlich B_1, — wofür jedesmal unter entsprechender Abänderung der Relationen auch jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen D zusammensetzen. Mit Hülfe der Relation (3) kann man ferner die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Substitutionen C aus einer einzigen unter ihnen, C_{12}, — wofür auch wieder unter entsprechender Abänderung der Relation jede andere genommen werden kann — und den Substitutionen D zusammensetzen. Endlich lassen sich die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Substitutionen D mit Hülfe der Relation (4) aus den $p-1$ Substitutionen D_{12}, $D_{23}, \ldots,$ $D_{p-1\,p}$ zusammensetzen.

Man ist auf diese Weise zu dem von Herrn Kronecker in etwas anderer Form ausgesprochenen Resultate gelangt, dass sich jede beliebige kanonische Substitution S aus den $p+2$ kanonischen Substitutionen:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_{12}, \quad D_{12}, \quad D_{23}, \ldots, \quad D_{p-1\,p}$$

als erzeugenden zusammensetzen lässt; auch erkennt man aus dem Gange der vorigen Entwicklung unmittelbar, dass sich die $p-1$ Substitutionen D_{12}, $D_{23}, \ldots,$ $D_{p-1\,p}$ auf mehrere Weisen durch $p-1$ andere Substitutionen D ersetzen lassen.

6.

Unter Benutzung des soeben angeführten Kronecker'schen Endresultates will ich jetzt in Beantwortung der zweiten früher gestellten Frage zeigen, dass sich alle kanonischen Substitutionen S aus nur fünf unter ihnen als erzeugenden zusammensetzen lassen, welche fünf natürlich auf mehrere Weisen gewählt werden können.

Zu dem Ende bilde ich aus den $p-1$ Substitutionen $D_{12}, D_{23}, \ldots, D_{p-1p}$ durch Zusammensetzung die Substitution:

$$E = D_{12} D_{23} \ldots D_{p-1p};$$

es ist dann die Substitution

$$E = \left| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array} \right|,$$

die am Ende dieses Artikels sich ausgeführt findet, dadurch charakterisirt, dass bei ihr $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \cdots = \alpha_{pp-1} = \alpha_{1p} = 1$, $\delta_{21} = \delta_{32} = \cdots = \delta_{pp-1} = \delta_{1p} = 1$ ist, während alle übrigen Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Werth Null besitzen. Durch dieselben Schlüsse, welche in Art. 3 an entsprechender Stelle angewandt wurden, zeigt man nun leicht, dass für jede beliebige Substitution S stets die Gleichung:

$$S D_{\rho\,\rho+1} E^{\rho-1} = S E^{\rho-1} D_{12}$$

besteht, wo ρ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ bezeichnet. Aus dieser Gleichung ergeben sich aber successive die weiteren:

$$D_{\rho\,\rho+1} E^{\rho-1} = E^{\rho-1} D_{12}, \qquad D_{\rho\,\rho+1} E^{p} = E^{\rho-1} D_{12} E^{p-\rho+1},$$

und man erhält schliesslich, wenn man berücksichtigt, dass $E^p = I$ ist, die Relation:

$$D_{\rho\,\rho+1} = E^{\rho-1} D_{12} E^{p-\rho+1}, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun in dem Systeme der $p+2$ Substitutionen:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_{12}, \quad D_{12}, \quad D_{23}, \ldots, \quad D_{p-1p},$$

aus denen als erzeugenden, wie im vorigen Artikel auseinandergesetzt wurde, jede beliebige kanonische Substitution sich zusammensetzen lässt, die $p-2$

letzten Substitutionen $D_{23},\ldots, D_{p-1\,p}$ aus den beiden Substitutionen D_{12} und E zusammensetzen, und man erhält so schliesslich, wenn man noch beachtet, dass für $p=2$ die Substitution E mit der Substitution D_{12} identisch wird, für $p=1$ dagegen die Substitutionen C_{12}, D_{12}, E in Wegfall kommen, das Endresultat:

Jede kanonische Substitution der $2p^{ten}$ Ordnung lässt sich für $p>2$ aus den fünf fundamentalen kanonischen Substitutionen:

$$A_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\hline
0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 1
\end{array}\right| \qquad
B_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0\ldots & 0 & -1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\hline
1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 1
\end{array}\right|$$

$$C_{12} = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 1 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1
\end{array}\right| \qquad
D_{12} = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1
\end{array}\right|$$

$$E = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0
\end{array}\right|$$

als erzeugenden zusammensetzen, während im Falle $p=2$ die vier Substitutionen:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

im Falle $p=1$ endlich die zwei Substitutionen:

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right|$$

zur Erzeugung jeder beliebigen kanonischen Substitution genügen.

Dasselbe Resultat lässt sich in anderer Fassung auch so aussprechen:

Die sämmtlichen linearen Transformationen der allgemeinen Thetafunctionen mit p Variablen lassen sich für $p>2$ aus fünf, für $p=2$ aus vier, für $p=1$ endlich aus zwei bestimmten unter ihnen, die in jedem Falle auf mehrere Weise ausgewählt werden können, zusammensetzen.

Würzburg, d. 1. April 1884.

Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3° ordine.

(*Memoria del prof.* E. Bertini, *a Pavia.*)

Il presente lavoro è diviso nei paragrafi seguenti (*):

§ 1. Relazioni fra le coppie di triedri conjugati. — § 2. Enneaedri di 1ª e 2ª specie. — § 3. Relazioni fra le terne T. — § 4. Ordinamento e costruzione delle terne T. — § 5. Teoremi sugli enneaedri. — § 6. Triedri di 1ª, 2ª e 3ª specie. Altre proprietà degli enneaedri. — § 7. Poliedri. Pentaedro principale. — § 8. Ettaedro principale. — § 9. Poliedri che contengono almeno un triedro di 1ª specie. — § 10. Tetraedri. — § 11. Pentaedri. — § 12. Esaedri. — § 13. Ettaedri. Ottaedri. — § 14. Specchio riassuntivo dei poliedri.

Per brevità si chiama terna T il sistema di tre coppie di triedri conjugati, nelle quali giacciono tutte le 27 rette della superficie. Di queste terne T e delle coppie di triedri conjugati, i §§ 1, 3, 4 contengono alcune nuove proposizioni, le quali in seguito sono di ajuto in parecchi punti. Nel § 4 è esposta inoltre la costruzione delle 40 terne T. Benchè tale costruzione non abbia interesse per la parte rimanente del lavoro, tuttavia è parso opportuno di non ommetterla per mostrare come le proprietà premesse e la arbitrarietà inerente alla notazione fossero sufficienti per quella costruzione. I §§ 2, 5 sono consacrati a dimostrare varie proprietà degli enneaedri. Alcune di queste proprietà e in particolare la distinzione degli enneaedri in due specie, come si avverte a suo luogo, sono dovute a Cremona. Le dimostrazioni date in quei due para-

(*) La maggior parte dei nuovi risultati contenuti nei §§ 1, 2,... 9, furono comunicati, senza dimostrazione, al R. Istituto Lombardo, nelle sedute del 15 maggio e 31 luglio 1884.

grafi non sono fondate sopra alcuna notazione delle 27 rette o dei 45 piani tritangenti (nemmeno su quella del n.° 11).

Nel § 6 si pone il concetto generale di triedro e si distinguono tre sorta di triedri: alle quali cose si collegano alcune nuove proprietà degli enneaedri.

I paragrafi seguenti 7, 8,... 14 sono rivolti alla risoluzione di un problema, che sino ad oggi non fu oggetto di indagine. Quali e quanti sono i poliedri (di cui gli spigoli sono esterni alla superficie) che si possono formare coi 45 piani tritangenti? Si arriva alla risoluzione di questo problema col determinare dapprima i poliedri principali, ossia quelli non contenuti in altri poliedri. Di poliedri principali esistono quattro specie; cioè, oltre le due specie di enneaedri, una specie di ettaedri (§ 8) e una di pentaedri (§ 7): quella non considerata, credo, finora; questa incontrata da Cremona per altro scopo (cfr. note al n.° 23). Nel § 8 che si riferisce agli ettaedri principali, e in quello soltanto, si ricorre, cercando però di mantenere la generalità della ricerca, alla notazione di Schlaefli, per evitare una discussione che si presenta molto complicata. In appresso, noti i poliedri principali, si ricercano i poliedri in essi contenuti e così si trovano tutti i possibili tetraedri, pentaedri...; i quali sono poi raccolti in uno specchio con alcuni numeri relativi (§ 14). In questa seconda parte della ricerca s'incontra la difficoltà di riconoscere se poliedri contenuti in differenti poliedri principali e aventi certi caratteri comuni, sieno o no diversi. La risoluzione di tale difficoltà porta a concludere che un poliedro di una data specie è definito da quattro numeri: il numero dei piani che lo formano ed i tre numeri che indicano quanti triedri delle tre specie si possono formare coi piani stessi.

§ 1. Relazioni fra le coppie di triedri conjugati.

1. Indichi

$$C \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

una coppia qualsiasi di triedri conjugati, essendo $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21},\ldots$ le nove rette di essa e

$$\begin{matrix} a_i \equiv a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3} \\ b_i \equiv a_{1i}\, a_{2i}\, a_{3i} \end{matrix} \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

i sei piani della medesima (*). Cerchiamo le coppie che hanno colla C elementi (piani o rette) comuni.

Si sa e si dimostra facilmente che una terna gobba (**) di rette individua una coppia di triedri conjugati, di cui le sei rette rimanenti sono le bisecanti della terna.

È noto altresì (***) che due piani, aventi una retta comune, appartengono a quattro coppie di triedri conjugati. Ora coi sei piani della coppia C si possono formare nove delle dette paja di piani. Si hanno adunque 27 coppie di triedri conjugati che hanno colla C due piani comuni.

Si consideri adesso una coppia gobba di rette di C. È chiaro che essa compare in sei delle precedenti 27 coppie di triedri conjugati (per es., a_{21}, a_{12} entrano nelle tre coppie contenenti i piani a_1, b_1 e nelle tre contenenti i piani a_2, b_2). Ma una coppia gobba di rette fa parte di dieci terne gobbe di rette. Escludendo le sette terne gobbe, che individuano C e le sei coppie di triedri conjugati testè nominate, rimangono tre terne che dànno tre coppie di triedri conjugati aventi a comune con C la considerata coppia gobba di rette (e, come è facile vedere, null'altro). Cosicchè, in totale, si hanno $18 \cdot 3 = 54$ coppie di triedri conjugati che hanno comune con C una coppia gobba di rette (soltanto).

I piani che non contengono alcuna delle nove rette della coppia C sono manifestamente

$$45 - 3 \cdot 9 - 6 = 12.$$

Uno α_1 di questi dodici piani e un piano a_1 di C dànno origine ad una coppia C' di triedri conjugati. Il terzo piano che con α_1, a_1 forma un triedro di C' deve essere degli stessi dodici piani; giacchè, altrimenti, conterrebbe almeno una retta di C, la quale, insieme ad una retta di a_1, darebbe un nuovo piano (oltre a_1) comune a C, C', onde α_1 dovrèbbe contenere una retta di C. Quei dodici piani determinano adunque sei coppie di triedri conjugati che hanno con C a comune il solo piano a_1. E si hanno quindi 36 coppie di triedri conjugati aventi con C un solo piano comune.

2. E qui si noti che, una retta appartenendo a 16 coppie gobbe e una coppia gobba a 10 terne gobbe, una retta entra in 80 terne gobbe e però in

(*) Qui e dappertutto in seguito, piani e rette sono (se nulla si avverta in contrario) piani tritangenti e rette di una superficie generale del 3° ordine.

(**) L'insieme di più rette dicesi *gobbo* se due qualunque di esse non s'incontrano.

(***) R. STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig, 1867, pag. 64.

40 coppie di triedri conjugati (*). *Le* 39 *coppie di triedri conjugati, che hanno con C una retta comune, si distribuiscono in tre gruppi di* 12, 12, 15, *aventi rispettivamente a comune con C una coppia gobba di rette, un piano, due piani.* Il che è evidente per le cose dette nel n.° 1 e avvertendo che una retta di C appartiene a quattro coppie gobbe, a due piani, e a cinque coppie di piani (aventi una retta comune) contenuti in C.

Quindi *non possono due coppie di triedri conjugati avere una sola retta comune.*

Ne discende facilmente la proprietà nota che, *esistono due coppie di triedri conjugati (e due soltanto) che, con una data coppia C, contengono tutte le* 27 *rette* (**). In vero, escludendo le nove rette di C e i piani che passano per esse, rimangono 12 piani e 18 rette. Ciascuna di queste rette esiste in due dei 12 piani, giacchè incontra i tre piani di un triedro di C sopra tre rette di C, formanti una terna gobba, colle quali dà tre piani esclusi. Sia α_1 uno qualunque dei 12 piani e β_1, β_2 quelli di essi che passano per due rette di α_1 (oltre α_1). I piani β_1, β_2 individuano una coppia C', di cui un triedro sarà formato dagli stessi piani β_1, β_2 e da un terzo piano che diremo β_3 e l'altro triedro conterrà α_1. Nella coppia C' entrano, delle 18 rette suddette, tre di β_1, tre di β_2 e la retta $\alpha_1\beta_3$. Segue, per l'ultima proprietà avvertita, che le coppie C, C' non hanno alcuna retta o piano comune: cioè C' contiene sei dei 12 piani e nove delle 18 rette. Prendasi ora un altro dei 12 piani, all'infuori dei sei di C', e si avrà una nuova coppia che conterrà i sei piani e le nove rette rimanenti, poichè per una retta di C' passano due soli dei 12 piani e sono quelli della stessa coppia C'. Adunque, ecc.

3. Riunendo l'ultima proprietà a quelle del n.° 1, si ha il seguente teorema:

Rispetto ad una coppia di triedri conjugati, le altre 119 *coppie si distribuiscono in quattro gruppi:*

1.° *Di* 2 *coppie, che nulla hanno a comune colla data (e fra loro);*

2.° *Di* 27 *coppie, ciascuna delle quali ha colla data due piani comuni (e cinque rette);*

3.° *Di* 36 *coppie, ciascuna delle quali ha colla data un piano comune (e tre rette);*

(*) Ciò segue subito anche dall'osservare che 27 . 40 = 120 . 9. Veggasi inoltre Sturm, l. c.

(**) Jacob Steiner's, *Gesammelte Werke*, Berlin, 1882, tom. II, pag. 655. — Sturm, l. c., pag. 63. — Cremona-Curtze, *Oberflächen*, § 261.

4.° *Di* 54 *coppie, cadauna avente comune colla data una coppia gobba di rette (e nessun piano).*

Il sistema di tre coppie di triedri conjugati che contengono insieme le 27 rette della superficie, si chiamerà d'ora innanzi una terna T.

§ 2. **Enneaedri di 1ª e 2ª specie.**

4. Sia

$$T' \equiv \left| \begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ a_2 & b_2 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ a_3 & b_3 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \end{array} \right|$$

una terna di coppie di triedri conjugati, ove $a_1 a_2 a_3$ indica un triedro, $b_1 b_2 b_3$ il triedro ad esso conjugato, ecc. Ciascuno dei 27 piani esclusi dalla terna T' contiene una retta di ogni coppia di T', perchè due rette di una stessa coppia, che s'incontrano, dànno un piano della coppia. Presi ad arbitrio due piani (ad es.) a_1, a_4 di due coppie di T', i tre piani che le rette dell'uno formano colle rette dell'altro, sono dei suddetti 27 piani e però contengono tre nuove rette appartenenti alla terza coppia di T'. Cioè il triedro, a cui i piani a_1, a_4 dànno origine, è completato da un piano della terza coppia di T', per es. (potendosi, nell'indicazione di T', scambiare due colonne di una matrice) da uno dei piani a_7, a_8, a_9. E, ciò essendo, il triedro individuato dai piani a_1, a_5 deve essere completato da uno degli stessi tre piani a_7, a_8, a_9; perchè, esistendo, ad es., i triedri $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_5 b_7$, si avrebbero due coppie di triedri conjugati con quattro (sole) rette comuni, cioè le tre rette di a_1 e la retta $a_7 b_7$, il che non può essere (n.° 3). La stessa considerazione prova che i triedri originati dalle coppie di piani a_1, a_6; a_2, a_4; a_2, a_5; a_2, a_6; a_3, a_4; a_3, a_5; a_3, a_6 sono completati da uno degli stessi tre piani a_7, a_8, a_9. Se ne ricava immediatamente che il sistema dei nove piani

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_9 \qquad (E_1)$$

gode della proprietà che, *assunti ad arbitrio due dei nove piani, il terzo piano che con essi completa il triedro è degli stessi nove piani.* Per conseguenza, *quei nove piani si possono distribuire in* 12 *triedri, ogni piano appartenendo a* 4 *triedri:* e inoltre, *i* 12 *triedri si spartiscono in* 4 *terne, ogni terna contenendo tutti i nove piani* (E_1) (*).

(*) CREMONA, *Sulle 27 rette di una superficie di 3° ordine,* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 3°, pag. 216.

Per giungere facilmente ad una opportuna notazione di quei 12 triedri, si può avvertire altresì questa proprietà. *Se un piano a_i è comune a due triedri (dei 12 suddetti), i quattro piani residui di questi triedri non possono appartenere a due nuovi triedri che abbiano pure un piano comune a_j.* Perocchè, se ciò avvenisse, aggiungendo ai triedri qui considerati il triedro dato dai piani a_i, a_j, tre dei triedri, a cui appartiene a_i sarebbero formati degli stessi sette piani di tre dei triedri a cui appartiene a_j; e quindi i due piani rimanenti dovrebbero formare un triedro tanto con a_i che con a_j, ciò che non può essere.

Potendosi nell'indicazione di T' scambiare due piani di una colonna, si può fissare che i triedri, a cui appartiene a_1, sieno (oltre $a_1 a_2 a_3$) $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_5 a_9$, $a_1 a_6 a_8$. Allora il triedro, di cui fanno parte a_2, a_4, non può essere completato che da a_8 o da a_9 e può ritenersi sia il triedro $a_2 a_4 a_9$ (scambiando, quando non fosse, a_8 con a_9, a_6 con a_5). Ciò fatto, la notazione di tutti gli altri triedri è determinata. In vero il triedro dato da a_2, a_5 non può essere completato da a_9 manifestamente, e nemmeno da a_7, giacchè, in questo caso, i due triedri $a_2 a_5 a_7$, $a_2 a_4 a_9$ avrebbero un piano comune e i quattro piani residui darebbero i due nuovi triedri $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_5 a_9$ pure con un piano comune. Si ha quindi il triedro $a_2 a_5 a_8$: e allora si ottiene necessariamente il triedro $a_2 a_6 a_8$, ecc. In tal modo i 12 triedri risultano dati e distribuiti nelle quattro terne, per le orizzontali, le verticali, i termini positivi e i negativi del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} . \quad (*)$$

5. Si osservi ora, continuando a considerare i nove piani (E_1), che essi appartengono a quattro terne T (fra le quali T'). Infatti segue immediatamente dalla proprietà del n.° 3, che tre triedri che non hanno rette comuni (cioè contengono tutte le 27 rette) sono di una terna T e rispettivamente delle sue tre coppie, giacchè, per quella proprietà, due triedri, non appartenenti alla stessa terna T, hanno rette comuni. Può aggiungersi che le quattro terne T, a cui appartiene il sistema (E_1), contengono tutti i 45 piani tritangenti; cioè *i 36 nuovi piani, oltre i piani del sistema, che entrano in esse, sono tutti*

(*) Le proprietà precedenti sono identiche a quelle dei flessi di una curva di 3° ordine, se si sostituisca rispettivamente a piano e triedro, flesso e retta dei flessi: cioè i nove piani (E_1) sono dati da una equazione hessiana.

distinti. Giacchè due coppie qualunque appartenenti rispettivamente a due di quelle quattro terne, per es. le coppie date dai triedri $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_4 a_7$, hanno a comune un piano a_1 e uno solo, le rette di a_2, a_3 essendo distinte da quelle di a_4, a_7 (*).

Se si considera invece il sistema dei nove piani che si ottengono da (E_1) col sostituire ad un triedro il suo conjugato, ad es., il sistema

$$b_1\, b_2\, b_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9, \qquad (E_2)$$

(formato dalla 2ª, 3ª, 5ª colonna di T'), si hanno ancora nove piani contenenti tutte le 27 rette della superficie, ma qui non esistono altri triedri, all'infuori dei tre, $b_1 b_2 b_3$, $a_4 a_5 a_6$, $a_7 a_8 a_9$. Infatti uno dei piani a_4, a_5, a_6 e uno dei piani a_7, a_8, a_9 dànno un triedro, che è completato da uno dei piani a_1, a_2, a_3 (n.° 4). Cioè il sistema (E_2) appartiene alla sola terna T'.

Adunque, se dicasi *enneaedro* il sistema di nove piani tritangenti nei quali giacciono tutte le 27 rette della superficie, si hanno due specie di enneaedri: *quelli di 1ª specie,* che si spezzano in 4 modi in tre triedri, ossia appartengono a quattro terne T e *quelli di 2ª specie* che si spezzano in un modo solo in tre triedri, cioè appartengono ad una sola terna T.

(*) Se si indica con $a_l^{(i)} a_m^{(i)} a_n^{(i)}$ il triedro conjugato ad $a_l\, a_m\, a_n$, ponendo ordinatamente $i=1$, $i=2$, $i=3$, $i=4$ per i triedri conjugati ai triedri dati dalle orizzontali, dalle verticali, dai termini positivi e dai negativi del determinante del n.° 4 e inoltre si rappresentano colle stesse lettere i primi membri delle equazioni dei piani dei triedri, moltiplicate per opportune costanti, l'equazione della superficie di 3° ordine si può scrivere nelle forme seguenti:

$$a_1\, a_2\, a_3 = a_1^{(1)}\, a_2^{(2)}\, a_3^{(3)},$$

$$a_4\, a_5\, a_6 = a_4^{(1)}\, a_5^{(1)}\, a_6^{(1)},$$

$$a_7\, a_8\, a_9 = a_7^{(1)}\, a_8^{(1)}\, a_9^{(1)},$$

$$a_1\, a_4\, a_7 = a_1^{(2)}\, a_4^{(2)}\, a_7^{(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1\, a_6\, a_8 = a_1^{(4)}\, a_6^{(4)}\, a_8^{(4)},$$

$$a_2\, a_4\, a_9 = a_2^{(4)}\, a_4^{(4)}\, a_9^{(4)};$$

donde l'equazione data dal Cremona (l. c., nei Rendiconti del R. Ist. Lomb., pag. 216)

$$(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_9)^5 = \Pi,$$

essendo Π il prodotto dei 45 piani tritangenti, ecc.

Una terna T contiene quattro enneaedri di 1ª specie e quattro di 2ª. Per es., la terna T', oltre (E_1), contiene gli enneaedri di 1ª specie

$$a_1\, a_2\, a_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9,$$

$$b_1\, b_2\, b_3\, a_4\, a_5\, a_6\, b_7\, b_8\, b_9,$$

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, a_7\, a_8\, a_9;$$

poichè il triedro dato da a_1, b_4 (ad es.) deve essere completato da uno dei piani b_7, b_8, b_9, non potendo esserlo da uno dei piani a_7, a_8, a_9 (cfr. n.° 4), ecc. E la stessa terna T' contiene, oltre (E_2), gli enneaedri di 2ª specie

$$a_1\, a_2\, a_3\, b_4\, b_5\, b_6\, a_7\, a_8\, a_9,$$

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, b_7\, b_8\, b_9,$$

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9,$$

che provengono dai precedenti sostituendo ad uno o a tre triedri i loro conjugati.

Per conseguenza nascono, dalle 40 terne T, $\frac{40 \cdot 4}{4} = 40$ enneaedri di 1ª specie e $40 \cdot 4 = 160$ enneaedri di 2ª specie (*).

6. *Questi enneaedri sono i soli che si possono formare coi* 45 *piani tritangenti.* In vero sia

$$x_1\, x_2 \ldots x_9$$

un enneaedro, cioè il sistema di nove piani che contengono le 27 rette e che non hanno quindi rette (della superficie) a comune. Un piano qualunque, x_1 (ad es.), deve appartenere almeno ad un triedro formato di piani dell'enneaedro. Poichè, se ciò non fosse, combinando x_1 cogli altri otto piani dell'enneaedro, si avrebbero otto triedri e quindi otto coppie con un piano comune x_1, e con questo solo, per la considerazione che, quando due coppie di triedri hanno due piani comuni, ogni altro piano di una coppia ha una retta comune con ogni altro piano dell'altra coppia. Il che non può essere, rispetto ad una coppia esistendo (n.° 1) sei sole altre coppie che hanno colla medesima un (solo) dato piano comune. Ora, se i piani x_1, x_2, x_3 (ad es.) formano un triedro, i piani che non contengono rette di essi sono 12 e si distribuiscono in due coppie

(*) Cremona, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 215.

appartenenti alla terna T individuata del triedro $x_1 x_2 x_3$ (n.° 2). Cioè gli altri sei piani $x_4 x_5 \ldots x_9$ sono di quella terna: c. d. d. (*).

7. Dall'ultima considerazione del n.° 6 segue che due enneaedri (di 1ª o 2ª specie) aventi un triedro comune appartengono alla medesima terna T, quella individuata dal triedro: e viceversa, per le cose del n.° 5, che un triedro è comune a due enneaedri (della stessa specie) e a due soli appartenenti ad una medesima terna.

Dal n.° 5 si ha inoltre manifestamente che *i quattro enneaedri di una stessa specie, nascenti da una terna T, sono tali che due qualunque hanno un triedro comune e i due rimanenti hanno comune il triedro conjugato:* ossia, *i quattro enneaedri si possono decomporre ciascuno in tre triedri, per modo che i triedri dell'uno appartengano rispettivamente agli altri tre.* Questa proprietà vale non soltanto per gli enneaedri di 1ª specie, come fu osservato dal Cremona (**), ma anche per quelli di 2ª specie. La differenza sta in ciò, che ogni enneaedro di 1ª specie appartiene a quattro di quelle quaderne, mentre ognuno di 2ª ad una sola. Onde si hanno 40 *delle dette quaderne (tante, quante le terne T) sì degli enneaedri di 1ª specie, come degli enneaedri di 2ª.*

§ 3. **Relazioni fra le terne T.**

8. Da una terna T' (di cui si conserva la notazione data nel n.° 4) nascono quattro enneaedri di 1ª specie, ognuno dei quali esiste in tre nuove terne; cosicchè, rispetto ad una terna T', esistono 12 altre terne T, che hanno con

(*) Introducendo la notazione di Schlaefli, gli enneaedri sono dei due tipi:

$$\begin{matrix} a_i & b_k & c_{ik} \\ a_k & b_l & c_{kl} \\ a_l & b_i & c_{li} \\ a_m & b_n & c_{mn} \\ a_n & b_p & c_{np} \\ a_p & b_m & c_{pm} \\ c_{im} & c_{kn} & c_{lp} \\ c_{in} & c_{kp} & c_{lm} \\ c_{ip} & c_{km} & c_{ln} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_i & b_k & c_{ik} \\ a_k & b_l & c_{kl} \\ a_l & b_m & c_{lm} \\ a_m & b_n & c_{mn} \\ a_n & b_p & c_{np} \\ a_p & b_i & c_{pi} \\ c_{il} & c_{mp} & c_{kn} \\ c_{ln} & c_{pk} & c_{im} \\ c_{ni} & c_{km} & c_{lp} \end{matrix}\;;$$

essendo $i\,k\,l\,m\,n\,p$ una permutazione qualunque dei numeri $1\,2 \ldots 6$. Se ne hanno 80 del 1° tipo (fra i quali i 40 enneaedri di 1ª specie) e 120 del 2° tipo.

(**) Cremona, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 219.

quella un enneaedro di 1ª specie a comune. Cerchiamo in quale relazione stanno alla terna T' le rimanenti 27 terne; di cui una qualsiasi si dirà T'_1. Si consideri una coppia di T', per es., la

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}\right| \qquad (C')$$

Un suo piano a_1 qualsivoglia, appartenendo a due enneaedri di 1ª specie nascenti da T' (cioè ad $a_1 a_2 \dots a_9$, $a_1 a_2 a_3 b_4 \dots b_9$), entra in 6 delle 12 terne T escluse, cioè in sei coppie appartenenti a tali terne: e queste sei coppie non hanno con (C') altro piano comune, oltre a_1 (cfr. n.° 5). Adunque le 36 coppie (n.° 3) che hanno con (C') un (solo) piano comune sono delle 12 terne T escluse. Ossia una coppia di T' e una di T'_1 avranno a comune due piani o nessuno. Per fissare le idee, sia

$$\left|\begin{matrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{matrix}\right| \qquad (C'')$$

una coppia di T'_1. Se essa ha con (C') due piani comuni $a_1 \equiv c_1$, $b_1 \equiv d_1$, nessun piano deve avere a comune colle altre due coppie di T', per es., colla

$$\left|\begin{matrix} a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \\ a_7 & b_7 \end{matrix}\right|; \qquad (C''')$$

giacchè, se fosse $a_5 \equiv c_2$, $b_5 \equiv d_2$, le due coppie (C') (C'''), della stessa terna T', avrebbero a comune le rette $c_1 d_2 \equiv a_1 b_5$, $c_2 d_1 \equiv b_1 a_5$. Ma (C'') deve certamente avere due piani comuni con una delle tre coppie di T', perchè, se i piani c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 non entrassero in T', avrebbero ciascuno una retta comune con ogni coppia di T' (cfr. n.° 4), cioè almeno tre rette di (C'') apparterrebbero ad una tal coppia, il che non può essere (cfr. n.° 3).

Sicchè ogni coppia di T' è *associata* ad una coppia di T'_1; due coppie associate hanno due piani comuni; due coppie non associate non hanno alcun piano comune.

Può quindi T'_1 indicarsi, ad es., così:

$$T'_1 \equiv \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_4 & b_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 \end{matrix}\left|\begin{matrix} a_7 & b_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \\ \alpha_9 & \beta_9 \end{matrix}\right|:$$

essendo $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \beta_2, \beta_3 \ldots$ piani distinti dai piani $a_2, a_3 \ldots b_2, b_3 \ldots$ Nelle due terne T', T'_1, il triedro dato dai piani a_1, a_4 deve essere completato (cfr. n.° 4) da uno dei piani delle terze coppie delle due terne e per conseguenza da uno dei piani comuni a queste terze coppie, per es. da a_7 (in accordo colla notazione del n.° 4). Si ha quindi il triedro $a_1 a_4 a_7$ e parimenti i triedri $a_1 b_4 b_7$, $b_1 a_4 b_7$, $b_1 b_4 a_7$.

Adunque:

Rispetto ad una terna T, le altre 39 *si dividono in due gruppi di* 12 *e* 27. *Ciascuna terna del 1° gruppo ha comune colla terna considerata un enneaedro di 1ª specie: e ciascuna del 2° gruppo ha colla stessa comuni sei piani che si possono distribuire in quattro triedri.*

Per due terne che hanno comune un enneaedro di 1ª specie, ogni coppia dell'una ha un piano comune (e uno solo) con ogni coppia dell'altra. Per due terne aventi a comune sei piani, ogni coppia dell'una è associata ad una coppia dell'altra, due coppie associate avendo due piani comuni. Inoltre, in questo secondo caso, *le tre rette d'intersezione delle tre paja di piani (due piani di un pajo essendo comuni a due coppie associate) esistono in uno stesso piano:* cioè, mantenendo le indicazioni superiori, le tre rette $a_1 b_1$, $a_4 b_4$, $a_7 b_7$ a due a due s'incontrano. Perocchè, ad es., i due triedri $a_1 a_4 a_7$, $a_1 b_4 b_7$ appartengono a due coppie che hanno comuni cinque rette, le tre di a_1 e le $a_4 b_4$, $a_7 b_7$. Queste ultime (cfr. n.° 3) debbono adunque giacere in un piano.

9. Continuando a considerare il 2° caso surricordato, non possono tre paja di piani a_1, b_1; a_4, b_4; a_7, b_7 essere comuni a tre o più terne T (ogni pajo appartenendo a due coppie associate), perchè, ognuno de' quattro triedri che si possono formare con quei sei piani entrerebbe allora in più di due enneaedri (della stessa specie), il che non è possibile (n.° 7).

Ciò premesso, se a_1, b_1 sono due piani qualunque che hanno a comune una retta (della superficie), le quattro terne T', T'_1, T'_2, T'_3, date dalle quattro coppie di triedri a cui appartengono a_1, b_1, saranno, prese a due a due, nel 2° caso menzionato, cioè avranno sei piani comuni: ad es.:

T', T'_1, i piani a_1, b_1; a_4, b_4; a_7, b_7,

T'_2, T'_3, » a_1, b_1; a'_4, b'_4; a'_7, b'_7,

. . . .

Due qualunque di questi sei sistemi di sei piani non hanno a comune che a_1, b_1. Poichè, se fosse $a_4 \equiv a'_4$ (ad es.), dall'esistenza del triedro $a_1 a_4 a_7$ e del triedro $a_1 a'_4 a'_7$ (o $a_1 a'_4 b'_7$) seguirebbe che deve essere $a_7 \equiv a'_7$ (o $a_7 \equiv b'_7$), ecc.; cioè si avrebbero più di due terne T colle stesse tre paja comuni.

§ 4. Ordinamento e costruzione delle terne T.

10. Sia

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9 \qquad (E_1)$$

un enneaedro di 1ª specie e sieno T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV} le quattro terne T a cui appartiene. Rispetto ad una di esse T^{I}, consideriamo i due gruppi contenenti rispettivamente 12 e 27 terne T, di cui si disse nel n.° 8: al primo dei quali appartengono T^{II}, T^{III}, T^{IV}. Prendiamo per T^{I} l'indicazione del n.° 4 e per una terna del gruppo delle 27 l'indicazione del n.° 8. Poichè $a_1 a_4 a_7$ è un triedro, l'enneaedro

$$a_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, a_4\, \alpha_5\, \alpha_6\, a_7\, \alpha_8\, \alpha_9$$

è di 1ª specie. Tale enneaedro, avendo con (E_1) un triedro comune, apparterrà (n.° 7) ad una delle terne T^{II}, T^{III}, T^{IV}. Adunque, mentre ognuna delle 12 terne ha con T^{I} un enneaedro comune, cadauna delle altre 27 ha un enneaedro comune con qualcuna delle T^{II}, T^{III}, T^{IV}.

Segue che le 40 terne T possono essere ordinate, partendo da un enneaedro di 1ª specie, nel modo seguente. *L'enneaedro è comune a quattro terne: ognuna di queste contiene tre nuovi enneaedri di 1ª specie e ciascuno di tali enneaedri appartiene a tre nuove terne. Si ottengono così le* 40 $(=4+4\cdot 3\cdot 3)$ *terne* T.

In relazione a tale ordinamento, essendo T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV} le quattro terne in cui entra l'enneaedro (E_1), indicheremo con T^k_{ij} $(k=\text{I, II, III, IV})$ una terna che ha comune con T^k uno stesso enneaedro [differente da (E_1)], convenendo che per le terne che hanno con T^k lo stesso enneaedro comune si tenga fisso l'indice i e si varii l'indice j (onde $i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3$).

11. Coll'ajuto delle proprietà precedenti, si ottiene il seguente specchio delle 40 terne T (*):

(*) Per passare alla notazione Jordan-Cremona, basta porre (ad es.) le seguenti eguaglianze:

$1=c_1$	$10=c_9$	$19=d_7$	$28=d_8$	$37=e_6$
$2=e_2$	$11=a_8$	$20=b_3$	$29=b_8$	$38=d_4$
$3=b_6$	$12=c_6$	$21=b_5$	$30=c_8$	$39=b_7$
$4=b_9$	$13=a_2$	$22=a_9$	$31=e_4$	$40=a_7$
$5=e_1$	$14=c_4$	$23=e_8$	$32=a_6$	$41=b_1$
$6=c_2$	$15=a_5$	$24=c_5$	$33=e_3$	$42=b_4$
$7=d_2$	$16=c_7$	$25=d_3$	$34=d_9$	$43=e_9$
$8=a_3$	$17=c_3$	$26=b_2$	$35=a_4$	$44=e_7$
$9=d_1$	$18=e_5$	$27=d_5$	$36=d_6$	$45=a_1$

[Cfr. Cremona, l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 209].

$$T^{\mathrm{I}} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ a_2 & b_2 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ a_3 & b_3 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 & a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 & a_5 & c_5 & a_6 & c_6 \\ a_7 & c_7 & a_8 & c_8 & a_9 & c_9 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & d_1 & a_2 & d_2 & a_3 & d_3 \\ a_5 & d_5 & a_6 & d_6 & a_4 & d_4 \\ a_9 & d_9 & a_7 & d_7 & a_8 & d_8 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & e_1 & a_2 & e_2 & a_3 & e_3 \\ a_6 & e_6 & a_4 & e_4 & a_5 & e_5 \\ a_8 & e_8 & a_9 & e_9 & a_7 & e_7 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{11} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 & a_3 & c_3 \\ b_4 & d_1 & b_5 & d_2 & b_6 & d_3 \\ b_7 & e_1 & b_8 & e_2 & b_9 & e_3 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{11} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ c_2 & d_5 & c_6 & d_3 & c_5 & d_2 \\ c_3 & e_8 & c_8 & e_2 & c_9 & e_3 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{11} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_2 & a_5 & b_4 & a_9 & b_7 \\ d_2 & c_7 & d_4 & c_2 & d_6 & c_3 \\ d_3 & e_6 & d_7 & e_3 & d_8 & e_2 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{11} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_3 & a_6 & b_4 & a_8 & b_7 \\ e_2 & c_4 & e_5 & c_3 & e_4 & c_2 \\ e_3 & d_9 & e_9 & d_2 & e_7 & d_3 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{12} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & c_4 & a_2 & c_5 & a_3 & c_6 \\ b_5 & d_5 & b_6 & d_6 & b_4 & d_4 \\ b_9 & e_6 & b_7 & e_4 & b_8 & e_5 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{12} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_2 & a_4 & b_5 & a_7 & b_9 \\ c_5 & d_9 & c_2 & d_4 & c_3 & d_6 \\ c_6 & e_1 & c_9 & e_4 & c_8 & e_5 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{12} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_3 & a_5 & b_5 & a_9 & b_9 \\ d_4 & c_1 & d_2 & c_5 & d_3 & c_6 \\ d_6 & e_8 & d_8 & e_5 & d_7 & e_4 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{12} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_6 & b_5 & a_8 & b_9 \\ e_4 & c_7 & e_2 & c_6 & e_3 & c_5 \\ e_5 & d_1 & e_7 & d_6 & e_9 & d_4 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{13} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & c_7 & a_2 & c_8 & a_3 & c_9 \\ b_6 & d_9 & b_4 & d_7 & b_5 & d_8 \\ b_8 & e_8 & b_9 & e_9 & b_7 & e_7 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{13} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_3 & a_4 & b_6 & a_7 & b_8 \\ c_8 & d_1 & c_3 & d_8 & c_2 & d_7 \\ c_9 & e_6 & c_5 & e_9 & c_6 & e_7 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{13} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_5 & b_6 & a_9 & b_8 \\ d_7 & c_4 & d_3 & c_8 & d_2 & c_9 \\ d_8 & e_1 & d_6 & e_7 & d_4 & e_9 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{13} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_2 & a_6 & b_6 & a_8 & b_8 \\ e_7 & c_1 & e_3 & c_9 & e_2 & c_8 \\ e_9 & d_5 & e_4 & d_7 & e_5 & d_8 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{21} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_4 & c_1 & a_5 & c_8 & a_6 & c_6 \\ b_1 & d_8 & b_3 & d_5 & b_2 & d_2 \\ b_7 & e_4 & b_9 & e_3 & b_8 & e_8 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{21} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_3 & a_5 & b_4 & a_8 & b_9 \\ c_7 & d_2 & c_1 & d_9 & c_3 & d_8 \\ c_9 & e_4 & c_6 & e_7 & c_4 & e_8 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{21} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_1 & a_6 & b_4 & a_7 & b_9 \\ d_8 & c_5 & d_1 & c_9 & d_3 & c_7 \\ d_9 & e_2 & d_4 & e_8 & d_5 & e_7 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{21} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_2 & a_4 & b_4 & a_9 & b_9 \\ e_7 & c_2 & e_1 & c_7 & e_3 & c_9 \\ e_8 & d_6 & e_5 & d_8 & e_6 & d_9 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{22} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_4 & c_4 & a_5 & c_2 & a_6 & c_9 \\ b_2 & d_3 & b_1 & d_9 & b_3 & d_6 \\ b_9 & e_9 & b_8 & e_5 & b_7 & e_1 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{22} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_1 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ c_1 & d_6 & c_4 & d_1 & c_6 & d_3 \\ c_3 & e_9 & c_9 & e_3 & c_7 & e_1 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{22} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_2 & a_6 & b_5 & a_7 & b_8 \\ d_1 & c_8 & d_5 & c_3 & d_4 & c_1 \\ d_3 & e_4 & d_8 & e_1 & d_9 & e_3 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{22} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_3 & a_4 & b_5 & a_9 & b_8 \\ e_1 & c_5 & e_6 & c_1 & e_5 & c_3 \\ e_3 & d_7 & e_7 & d_3 & e_8 & d_1 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{23} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_4 & c_7 & a_5 & c_5 & a_6 & c_3 \\ b_3 & d_4 & b_2 & d_1 & b_1 & d_7 \\ b_8 & e_2 & b_7 & e_7 & b_9 & e_6 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{23} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_2 & a_5 & b_6 & a_8 & b_7 \\ e_4 & d_7 & c_3 & d_5 & c_1 & d_4 \\ c_6 & e_2 & c_7 & e_5 & c_9 & e_6 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{23} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_3 & a_6 & b_6 & a_7 & b_7 \\ d_5 & c_2 & d_3 & c_6 & d_1 & c_4 \\ d_4 & e_9 & d_9 & e_6 & d_8 & e_5 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{23} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & b_1 & a_4 & b_6 & a_9 & b_7 \\ e_5 & c_8 & e_3 & c_4 & e_1 & c_6 \\ e_6 & d_2 & e_8 & d_4 & e_7 & d_5 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{31} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_7 & c_1 & a_8 & c_5 & a_9 & c_9 \\ b_1 & d_7 & b_2 & d_3 & b_3 & d_5 \\ b_4 & e_5 & b_6 & e_8 & b_5 & e_2 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{31} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_3 & a_6 & b_5 & a_9 & b_7 \\ c_7 & d_3 & c_2 & d_7 & c_1 & d_9 \\ c_8 & e_5 & c_4 & e_8 & c_5 & e_9 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{31} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_1 & a_4 & b_5 & a_8 & b_7 \\ d_7 & c_6 & d_2 & c_7 & d_1 & c_8 \\ d_9 & e_3 & d_5 & e_9 & d_6 & e_8 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{31} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_2 & a_5 & b_5 & a_7 & b_7 \\ e_8 & c_3 & e_2 & c_8 & e_1 & c_7 \\ e_9 & d_4 & e_6 & d_9 & e_4 & d_7 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{32} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_7 & c_4 & a_8 & c_8 & a_9 & c_3 \\ b_2 & d_2 & b_3 & d_4 & b_1 & d_9 \\ b_5 & e_7 & b_4 & e_1 & b_6 & e_4 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{32} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_1 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \\ c_1 & d_4 & c_5 & d_2 & c_4 & d_1 \\ c_2 & e_7 & c_7 & e_1 & c_8 & e_2 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{32} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_2 & a_4 & b_6 & a_8 & b_9 \\ d_1 & c_9 & d_6 & c_1 & d_5 & c_2 \\ d_2 & e_5 & d_9 & e_2 & d_7 & e_1 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{32} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_3 & a_5 & b_6 & a_7 & b_9 \\ e_1 & c_6 & e_4 & c_2 & e_6 & c_1 \\ e_2 & d_8 & e_8 & d_1 & e_9 & d_2 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{I}}_{33} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_7 & c_7 & a_8 & c_2 & a_9 & c_6 \\ b_3 & d_6 & b_1 & d_8 & b_2 & d_1 \\ b_6 & e_3 & b_5 & e_6 & b_4 & e_9 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{II}}_{33} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_2 & a_6 & b_4 & a_9 & b_8 \\ c_4 & d_8 & c_1 & d_6 & c_2 & d_5 \\ c_5 & e_3 & c_8 & e_6 & c_7 & e_4 \end{array}\right|$$

$$T^{\mathrm{III}}_{33} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_3 & a_4 & b_4 & a_8 & b_8 \\ d_5 & c_3 & d_1 & c_4 & d_2 & c_5 \\ d_6 & e_7 & d_7 & e_4 & d_9 & e_6 \end{array}\right| \qquad T^{\mathrm{IV}}_{33} \equiv \left|\begin{array}{cc|cc|cc} a_3 & b_1 & a_5 & b_4 & a_7 & b_8 \\ e_4 & c_9 & e_1 & c_5 & e_2 & c_4 \\ e_6 & d_3 & e_9 & d_5 & e_8 & d_6 \end{array}\right|$$

Le terne T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV}, nelle quali entra l'enneaedro

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\,,$$

si scrivono immediatamente tenendo presente il determinante del n.° 4 e aggiungendo i nuovi simboli $b_1, \ldots\, b_9$, $c_1, \ldots\, c_9$, $d_1, \ldots\, d_9$, $e_1, \ldots\, e_9$, che, coi precedenti $a_1, \ldots\, a_9$, rappresentano tutti i 45 piani tritangenti (cfr. n.° 5). È evidente che la successione di questi trentasei nuovi simboli non è interamente fissata, potendosi scambiare, in modo affatto arbitrario, quelli che figurano in una stessa colonna delle T^k ($k = \text{I, II, III, IV}$).

Si consideri l'enneaedro (di 1ª specie) $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$. Per l'arbitrarietà ora avvertita, si può ritenere che sieno triedri $a_1 b_4 b_7$, $a_1 b_5 b_9$, $a_1 b_6 b_8$ e allora che sia un triedro anche $a_2 b_4 b_7$, poichè, se si avesse invece $a_2 b_4 b_8$, si scambierebbe b_8 con b_9, b_6 con b_5. Quindi, per il ragionamento fatto nel n.° 4, i 12 triedri dell'enneaedro suddetto sono dati dalle orizzontali, dalle verticali, dai termini positivi e dai negativi del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_4 & b_7 \\ a_2 & b_5 & b_8 \\ a_3 & b_6 & b_9 \end{vmatrix}.$$

Ciò permette di scrivere la 1ª, 3ª, 5ª colonna delle T^{I}_{11}, T^{I}_{12}, T^{I}_{13} aventi quell'enneaedro comune con T^{I}. Per ottenere le altre colonne delle nominate tre terne, osservisi che esse (all'infuori dell'enneaedro considerato) nulla hanno a comune fra loro (n.° 5), mentre ciascuna avrà con ciascuna delle T^{II}, T^{III}, T^{IV} sei piani comuni (n.° 8), giacchè (ad es.) T^{I}_{11} e T^{II} contengono amendue a_1 e non b_4, b_7. Approfittando quindi della sunnotata arbitrarietà, si possono scrivere le colonne mancanti: cioè (ad es.) T^{I}_{11} deve contenere nella seconda colonna (pel confronto con T^{II}) uno dei simboli c_1, c_4, c_7: si è posto c_1, e allora T^{I}_{12} deve contenere, pure nella seconda colonna, una delle c_4, c_7: posto c_4, nella seconda colonna di T^{I}_{13} deve trovarsi c_7, ecc.

Proponiamoci ora di scrivere T^{II}_{11}, T^{II}_{12}, T^{II}_{13}, aventi a comune con T^{II} l'enneaedro $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$. I tre simboli a_1, a_4, a_7 si troveranno distribuiti nelle tre coppie di ciascuna di quelle terne: e, siccome dal confronto di T^{I}_{11}, T^{I}_{12}, T^{I}_{13} con T^{II} segue (n.° 8) rispettivamente che $a_1 c_2 c_3$, $a_1 c_5 c_6$, $a_1 c_8 c_9$ sono tre triedri, si hanno subito le prime colonne di quelle tre terne. Inoltre, dovendo ognuna delle stesse terne avere con T^{I} sei piani comuni (giacchè le terne colle quali T^{I} ha enneaedri comuni sono le T^{II}, T^{III}, T^{IV}, T^{I}_{ij}) ed essendo ancora arbitraria la successione dei simboli b_1, b_2, b_3, finora non adoperati, possiamo fissare che b_1 sia in T^{II}_{11}, b_2 in T^{II}_{12}, b_3 in T^{II}_{13}.

Ciò fatto, osservisi che T^{II}_{11} deve avere (n.° 8) un enneaedro a comune con T^{I}_{11} (a_1, c_2, c_3 essendo distribuiti nelle tre coppie di quella terna) e questo enneaedro deve essere $a_1 b_4 b_7 c_2 d_2 e_2 c_3 d_3 e_3$. Adunque la quarta e sesta colonna di T^{II}_{11} conterranno i simboli b_4, b_7, d_2, d_3, e_2, e_3. Ora T^{II}_{11} deve avere sei piani comuni non solo con T_1, ma altresì con T^{III}, T^{IV} (n.° 8): cioè la quarta colonna di quella terna deve essere formata di tre simboli presi rispettivamente dalle tre colonne quarta, sesta e quarta di T^{I}, T^{III}, T^{IV}: e però la detta quarta colonna deve essere necessariamente $b_4 d_3 e_2$. Analogamente si trova la sesta colonna di T^{II}_{11}, cioè $b_7 d_2 e_3$. Nella terza e quinta colonna di T^{II}_{11} debbono esserci c_5, c_6, c_8, c_9 (essendo $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$ l'enneaedro comune a T^{II}_{11}, T^{II}): ma T^{II}_{11} deve avere tanto con T^{I}_{12} che con T^{I}_{13} sei piani comuni, e ciò dà immediatamente le nominate colonne. Similmente si ottengono le ultime quattro colonne di T^{II}_{12}, T^{II}_{13}.

Per completare la seconda colonna di T^{II}_{11}, si noti che, dovendo avere questa terna sei piani comuni con T^{III}, T^{IV}, T^{I}_{12}, T^{I}_{13}, in detta colonna debbono entrare tre simboli tali che uno (e uno solo) appartenga ad ognuna delle quattro colonne

$$\begin{array}{cccc} d_1 & e_1 & c_4 & c_7 \\ d_5 & e_6 & d_5 & d_9 \\ d_9 & e_8 & e_6 & e_8. \end{array}$$

Ciò darebbe due soluzioni: l'una $b_1 d_5 e_8$, l'altra $b_1 d_9 e_6$. Quest'ultima è da escludere, perchè conduce ad un assurdo. In vero, ammettendola, si ottiene l'enneaedro $b_1 d_9 e_6 b_4 d_3 e_2 b_7 d_2 e_3$, che ha coll'altro $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$ (nascente da T^{I}) il triedro comune $a_4 b_1 b_7$. Questi due enneaedri debbono adunque appartenere ad una stessa terna τ (n.° 7); della quale un triedro di una coppia è appunto $a_4 b_1 b_7$ e, per le due coppie rimanenti, due triedri contengono a_5, a_6, b_2, b_3, b_8, b_9 e i due conjugati contengono c_6, c_8, d_2, d_9, e_3, e_6. Il paragone di τ con T^{III} e T^{I}_{13} mostra che b_8, a_5 devono trovarsi con d_9 in una stessa coppia di τ e appartenere ad un triedro. Il quale non può essere altro che $a_5 b_8 b_2$ (considerando la terna T^{I} e osservando che, per questa terna e per la T^{II}_{13}, $b_3 a_4 b_8$ è un triedro). Infine, confrontando τ con T^{II}, T^{IV}, si trova che a_5 deve essere nella stessa coppia con c_8, e_3, cioè che il triedro conjugato ad $a_5 b_8 b_2$ è $d_9 e_3 c_8$. Adunque due coppie di τ sono

$$\left|\begin{array}{cc} a_5 & c_8 \\ b_2 & d_9 \\ b_8 & e_3 \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{cc} a_6 & c_6 \\ b_3 & d_2 \\ b_9 & e_6 \end{array}\right|.$$

Il che è assurdo, come risulta facilmente dal confronto di τ con T^{I}_{11} (n.° 8). La seconda colonna di T^{II}_{11} è adunque $b_1 d_5 e_8$.

Delle due soluzioni $b_2 d_9 e_1$, $b_2 d_1 e_8$, che pure si presentano per la seconda colonna di T^{II}_{12}, si elimina ora facilmente la seconda $b_2 d_1 e_8$, per l'osservazione che T^{II}_{11}, T^{II}_{12} non possono avere (n.° 5) altri piani comuni, all'infuori di quelli dell'enneaedro $a_1 a_4 a_7 c_2 c_5 c_8 c_3 c_6 c_9$. E parimenti si trova la seconda colonna $b_3 d_1 e_6$ di T^{II}_{13}.

Dopo ciò, la determinazione delle altre terne si fà senza difficoltà. Per es., considerando T^{III}_{11} (che ha comune con T^{III}, T^{III}_{12}, T^{III}_{13} lo stesso enneaedro $a_1 a_5 a_9 d_2 d_6 d_7 d_3 d_4 d_8$), se ne ottengono la prima e le ultime quattro colonne, come per T^{II}_{11}. Per trovare la seconda colonna si paragoni T^{II}_{11} con T^{I}, T^{II}, T^{IV}, T^{I}_{12}, T^{I}_{13}, T^{II}_{12}, T^{II}_{13}, [con ciascuna delle quali, oltre a_1, deve avere comune (n.° 8) altri cinque piani]: e ne segue che dei tre simboli di quella colonna uno (e uno solo) deve figurare in ciascuna delle colonne:

$$\begin{matrix} b_1 & c_1 & e_1 & c_4 & c_7 & b_2 & b_3 \\ b_2 & c_4 & e_6 & d_5 & d_9 & d_9 & d_1 \\ b_3 & c_7 & e_8 & e_6 & e_8 & e_1 & e_6; \end{matrix}$$

ciò che dà l'unica soluzione $b_2 c_7 e_6$. Similmente si ottengono T^{III}_{12}, T^{III}_{13}, T^{IV}_{11}, T^{IV}_{12}, T^{IV}_{13}.

Vogliasi ancora determinare T^{I}_{21} che, insieme a T^{I}_{22}, T^{I}_{23}, ha comune con T^{I} l'enneaedro $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$. Pel confronto di T^{I} con T^{k}_{1j} ($k = \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$; $j = 1, 2, 3$), si hanno i triedri $a_4 b_1 b_7$, $a_4 b_2 b_9$, $a_4 b_3 b_8$, $a_5 b_2 b_7$, $a_5 b_3 b_9, \ldots$: onde si ottengono la prima, terza e quinta colonna di T^{I}_{21} (e di T^{I}_{22}, T^{I}_{23}). Poi, paragonando T^{I}_{21} con T^{II}, T^{III}, T^{IV}, nelle quali c'è a_4 e con T^{I}_{11}, T^{I}_{12}, T^{I}_{13}, nelle quali trovasi b_7, si hanno le sei colonne

$$\begin{matrix} c_1 & d_3 & e_2 & c_9 & c_5 & c_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 & d_8 & d_6 & d_1 \\ c_8 & d_8 & e_9 & e_7 & e_4 & e_1; \end{matrix}$$

dalle quali nasce l'unica soluzione $c_1 d_8 e_4$ per la seconda colonna di T^{I}_{21}. In modo analogo si trovano le altre due colonne.

Manifestamente il procedimento ora seguito vale per le terne rimanenti.

§ 5. Teoremi sugli enneaedri.

12. Sia T^{I} una terna qualsivoglia, e sieno

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9 \qquad (E_1)$$

$$a_1\, a_2\, a_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9 \qquad (E'_1)$$

due enneaedri di 1ª specie nascenti da essa; onde i piani a_1, a_2, a_3 comuni ai due enneaedri formano una colonna (triedro di una coppia) di T^{I}. Un'altra terna T^{II}, a cui appartenga (E_1), e un'altra T^{I}_{11}, a cui appartenga (E'_1), non possono avere un enneaedro a comune. Perocchè i tre piani a_1, a_2, a_3 si distribuiscono nelle tre coppie tanto di T^{II} quanto di T^{I}_{11} (n.° 8) e gli altri piani delle colonne (triedri) nelle quali entrano a_1, a_2, a_3 sono differenti, sono cioè per T^{II} i piani a_4, a_5,... a_9 e per T^{I}_{11}, b_4, b_5,... b_9. Adunque, le nuove 12 terne, nelle quali entrano i quattro enneaedri di 1ª specie di T^{I}, contengono nuovi 36 enneaedri di 1ª specie, differenti da quelli (cfr. n.° 5) e fra loro. In altre parole, gli enneaedri di 1ª specie possono essere ordinati, a partire da una terna, nello stesso modo come le terne, a partire da un enneaedro (n.° 10). Cioè, *la terna contiene quattro enneaedri: ognuno di questi appartiene a tre nuove terne e ciascuna di tali terne contiene tre nuovi enneaedri: e così si hanno i* 40 $(= 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3)$ *enneaedri di 1ª specie.* Ad es., adottando le indicazioni dei n.ⁱ 10, 11, tutti gli enneaedri di 1ª specie sono dati da uno qualunque di questi quattro gruppi di terne ($k = \text{I, II, III, IV}$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)

$$(T^k,\ T^{\text{I}}_{ij}), \qquad (T^k,\ T^{\text{II}}_{ij}), \qquad (T^k,\ T^{\text{III}}_{ij}), \qquad (T^k,\ T^{\text{IV}}_{ij}).$$

13. Due enneaedri di 1ª specie, appartenenti ad una medesima terna, nascono l'uno dall'altro sostituendo a due triedri i loro conjugati (n.° 5). Per conseguenza, in virtù della proprietà precedente (n.° 12), da un enneaedro di 1ª specie provengono tutti gli altri, sostituendo successivamente a due triedri i loro conjugati. Con la stessa sostituzione si ottiene poi da un enneaedro di 2ª specie un altro pure di 2ª specie; mentre da un enneaedro di 1ª (o 2ª) specie nasce un enneaedro di 2ª (o 1ª) specie, sostituendo ad uno o a tutti tre i triedri i loro conjugati (n.° 5).

Si conclude facilmente che, *da un enneaedro qualsivoglia (di 1ª o 2ª specie) nascono gli altri* 199, *facendo successivamente l'operazione di sostituire ad un triedro il suo conjugato; due enneaedri essendo della stessa specie o di specie diversa, secondochè il numero delle dette sostituzioni è pari o dispari.*

14. *Rispetto ad un enneaedro di 1ª specie, gli altri* 39 *si dividono in due classi; l'una di* 12, *l'altra di* 27 *enneaedri. L'enneaedro considerato ha un triedro comune con ciascuno del 1º gruppo e un piano comune con ciascuno del 2º.*

Infatti se

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9 \qquad (E_1)$$

è un enneaedro qualsiasi di 1ª specie e si adottano le denominazioni del n.º 10, ciascuno dei dodici enneaedri esistenti [oltre (E_1)] in T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV}, contiene manifestamente (n.º 5) un triedro di (E_1). Questi 12 enneaedri si dividono in 4 gruppi, composto ciascuno di tre enneaedri (nascenti da una delle quattro terne suddette) e corrispondenti ad una decomposizione di (E_1) in tre triedri, i tre enneaedri del gruppo contenendo rispettivamente questi tre triedri. Inoltre un piano di (E_1) entra in quattro suoi triedri e però fa parte di quattro enneaedri appartenenti a gruppi differenti.

Gli altri 27 enneaedri nascono da uno qualunque dei quattro gruppi di nove terne T^{I}_{ij}, T^{II}_{ij}, T^{III}_{ij}, T^{IV}_{ij} (n.º 12). Che ciascuno di questi enneaedri abbia con (E_1) uno e un solo piano comune, segue dall'osservazione generale che, *quando due terne hanno un enneaedro comune, ogni altro enneaedro dell'una ha un piano e uno solo comune con ogni altro enneaedro dell'altra.* In vero se

$$a_1\, a_2\, a_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9 \qquad (E'_1)$$

è l'enneaedro comune a due terne T^{I}, T^{I}_{11} ed (E_1) è un altro enneaedro di T^{I}, i soli tre piani a_1, a_2, a_3 di (E_1), comuni ad (E'_1), giacciono in T^{I}_{11}, giacchè le due terne hanno comuni (n.º 5) i soli piani di (E'_1). E quei tre piani a_1, a_2, a_3 sono distribuiti nelle tre coppie e situati in tre colonne (triedri delle coppie) della terna T^{I}_{11}, le quali sono completate dai piani b_4, b_5,... b_9 (n.º 8). Talchè un enneaedro di 1ª specie diverso da (E'_1) e appartenente alla detta terna T^{I}_{11}, contenendo una sola di quelle tre colonne (n.º 5), ha comune con (E_1) un piano ed uno solo.

E manifestamente, poichè ogni piano di (E_1) entra in tre delle nove terne T^{k}_{ij} (k essendo I o II o III o IV), i 27 enneaedri della 2ª classe si distribuiscono in nove gruppi, ciascun gruppo essendo costituito da tre enneaedri aventi con (E_1) uno stesso piano comune. Questi nove gruppi si possono poi riunire a tre a tre in 12 terne, i tre gruppi di una terna corrispondendo ai tre piani di un triedro di (E_1).

Un piano a_1 di (E_1) appartiene a quattro enneaedri della 1ª classe esistenti in T^{I}, T^{II}, T^{III}, T^{IV} (nelle quali terne hanno comune con (E_1) la colonna in cui entra a_1) e che diremo E_1^{I}, E_1^{II}, E_1^{III}, E_1^{IV}; e a tre della 2ª classe che nascono, ad es., dalle terne T_{11}^{I}, T_{12}^{I}, T_{13}^{I} aventi a comune con T^{I} l'enneaedro E_1^{I} e che diremo E_{11}, E_{12}, E_{13}. Questi tre enneaedri debbono trovarsi anche nelle terne T_{ij}^{II} (n.° 12) e precisamente in quelle tre T_{11}^{II}, T_{12}^{II}, T_{13}^{II} che contengono a_1, cioè hanno a comune con T^{II} l'enneaedro E_1^{II} e parimenti nelle T_{11}^{III}, T_{12}^{III}, T_{13}^{III} e nelle T_{11}^{IV}, T_{12}^{IV}, T_{13}^{IV} che hanno rispettivamente con T^{III}, T^{IV} comuni gli enneaedri E_1^{III}, E_1^{IV}. Per l'osservazione generale fatta superiormente, due dei quattro enneaedri E_1^{I}, E_1^{II}, E_1^{III}, E_1^{IV} e similmente due dei quattro enneaedri (E_1), E_{11}, E_{12}, E_{13} hanno un solo piano comune: invece ogni enneaedro della prima quaderna ha comune con ognuno della seconda un triedro, giacchè i due enneaedri appartengono ad una medesima terna [cioè (E_1), E_1^k alla T^k; E_{1i}, E_1^k alla T_{1i}^k]. Adunque, *uno stesso piano è comune ad otto enneaedri di 1ª specie* (*), *distribuiti in due quaderne: due enneaedri di una stessa quaderna non hanno altro piano comune; ma ciascun enneaedro di una quaderna ha comuni con ciascun enneaedro dell'altra due nuovi piani, che con quello formano un triedro.* Il numero di queste coppie di quaderne conjugate è eguale al numero dei piani, cioè 45.

Per le notazioni del n.° 11, gli otto enneaedri che hanno a comune a_1 sono

$$(E_1) \equiv a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9$$
$$E_{11} \equiv a_1\, b_4\, b_7\, c_2\, d_2\, e_2\, c_3\, d_3\, e_3$$
$$E_{12} \equiv a_1\, b_5\, b_9\, c_5\, d_6\, e_4\, c_6\, d_4\, e_5$$
$$E_{13} \equiv a_1\, b_6\, b_8\, c_8\, d_7\, e_9\, c_9\, d_8\, e_7$$
$$E_1^{\mathrm{I}} \equiv a_1\, a_2\, a_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9$$
$$E_1^{\mathrm{II}} \equiv a_1\, a_4\, a_7\, c_2\, c_5\, c_8\, c_3\, c_6\, c_9$$
$$E_1^{\mathrm{III}} \equiv a_1\, a_5\, a_9\, d_2\, d_6\, d_7\, d_3\, d_4\, d_8$$
$$E_1^{\mathrm{IV}} \equiv a_1\, a_6\, a_8\, e_2\, e_4\, e_9\, e_3\, e_5\, e_7.$$

Le proprietà contenute in questo numero sono dovute a Cremona (**).

15. Sia

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9 \qquad (E_2)$$

(*) Ciò segue anche dalla relazione $8 . 45 = 9 . 40$: ovvero dall'osservare che un piano appartiene a 16 triedri e però a 16 terne T, e inoltre che ognuna di queste terne contiene due degli enneaedri considerati ed ogni enneaedro appartiene a 4 delle 16 terne.

(**) l. c. (nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo), pag. 219.

un enneaedro di 2ª specie, T^{I} la terna a cui appartiene ed

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9$$

l'enneaedro di 1ª specie che si ottiene, sostituendo ai tre triedri di (E_2) i loro conjugati e che quindi esiste nella stessa terna T^{I}. Introducendo nuovamente le denominazioni del n.° 10, si riconosce facilmente, con considerazioni analoghe alle precedenti, che gli altri tre enneaedri di 2ª specie nascenti da T^{I} hanno con (E_2) un triedro comune, mentre i quattro enneaedri di 2ª specie esistenti rispettivamente in T^{II}, T^{III}, T^{IV} non hanno con (E_2) alcun piano comune; che quest'ultima proprietà ha luogo altresì per un enneaedro di 2ª specie di ciascuna delle terne T^{I}_{ij}; che gli altri tre enneaedri di 2ª specie provenienti da ognuna di tali terne hanno con (E_2) quattro piani comuni; e infine che da ciascuna delle terne T^{II}_{ij}, T^{III}_{ij}, T^{IV}_{ij} derivano tre enneaedri di 2ª specie aventi con (E_2) un piano comune e uno con un triedro comune. Cosicchè, *rispetto ad un enneaedro di 2ª specie, gli altri* 159 *si distribuiscono in quattro gruppi di* 21, 81, 30 *e* 27 *con nessuno, uno, tre (costituenti un triedro) e quattro piani rispettivamente comuni coll'enneaedro considerato* (*).

E parimenti si dimostra che, *rispetto ad un enneaedro di 1ª specie, i* 160 *enneaedri di 2ª specie si dividono in tre gruppi di* 40, 108 *e* 12 *aventi ordinatamente nessuno, due e sei piani (formanti due triedri) comuni coll'enneaedro stesso:* e che, *rispetto ad un enneaedro di 2ª specie, i* 40 *enneaedri di 1ª specie si spartiscono in tre gruppi di* 10, 27 *e* 3 *aventi ordinatamente nessuno, due e sei piani (costituenti due triedri) comuni coll'enneaedro di 2ª specie.*

Delle due ultime proprietà una è manifesta conseguenza dell'altra. Giacchè se y è il numero degli enneaedri di 1ª specie che hanno a comune con uno di 2ª un dato numero di piani (0 o 2 o 6) ed x il numero degli enneaedri di 2ª specie che hanno a comune con uno di 1ª lo *stesso* numero di piani, deve esistere la relazione

$$40 \cdot x = 160 \cdot y,$$

cioè

$$x = 4y.$$

(*) Nell'ultimo caso, i quattro triedri che si possono formare coi quattro piani sono di 1ª specie (n.° 16): il che risulta dall'osservare che (n.° 18) i quattro piani comuni a due enneaedri appartengono due ad un triedro e due ad un altro triedro dei tre ne' quali si spezza ciascuno dei due enneaedri. Ad es. due tali enneaedri sono (n.° 11)

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9, \qquad a_1\, b_4\, b_7\, a_2\, b_5\, b_8\, c_3\, d_3\, e_3.$$

§ 6. Triedri di 1ª, 2ª e 3ª specie. Altre proprietà degli enneaedri.

16. I triedri considerati precedentemente sono sistemi di tre piani tritangenti che contengono nove rette della superficie esistenti in altri tre piani tritangenti. Ma è utile considerare tali sistemi di tre piani tritangenti, pei quali non abbia luogo l'ultima condizione. Si dica ancora *triedro* il sistema di tre piani tritangenti nei quali giacciono nove rette (distinte) della superficie e si chiami piano *conjugato* al triedro un piano che contenga una retta di ciascuno dei tre piani del triedro. Si hanno allora tre specie di triedri:

1.° *Triedri di 1ª specie,* quelli che non ammettono piani conjugati;

2.° *Triedri di 2ª specie,* quelli che ammettono un solo piano conjugato;

3.° *Triedri di 3ª specie,* o *Triedri di* Steiner, o, come si è fatto fin qui, semplicemente *Triedri* (in senso stretto), quelli che hanno due e però (*) tre piani conjugati (costituenti un altro triedro della stessa specie).

I triedri di 3ª specie, come si sa, sono 240, distribuiti in 120 coppie di triedri conjugati.

Per ottenere il numero dei triedri di 1ª e 2ª specie, si ricordi che coi 45 piani tritangenti si possono formare 720 coppie (una coppia di piani contenendo sei rette della superficie). Sieno a_1, a_2 i piani di una tal coppia e a_3 il piano che con essi forma un triedro di 3ª specie. Escludendo i 6 piani di questo triedro e del triedro ad esso conjugato, e i 27 che passano ulteriormente per le sue nove rette, rimangono 12 piani, ognuno de' quali costituisce, con a_1, a_2, un triedro di 1ª specie. Invece si ha un triedro di 2ª specie, aggiungendo ad a_1, a_2, uno dei nove piani che passano per le tre rette di a_3 (all'infuori di a_3 e dei piani del triedro conjugato ad $a_1 a_2 a_3$). Adunque il numero dei triedri di 1ª specie è 2880 $\left(=\frac{720 \cdot 12}{3}\right)$ e quello dei triedri di 2ª specie è 2160 $\left(=\frac{720 \cdot 9}{3}\right)$.

17. Il sistema delle tre paja di piani (**)

$$a_1,\ b_1; \qquad a_4,\ b_4; \qquad a_7,\ b_7; \tag{Σ}$$

comuni a due terne T, fornisce quattro triedri di 2ª specie

$$b_1 b_4 b_7, \qquad b_1 a_4 a_7, \qquad a_1 b_4 a_7, \qquad a_1 a_4 b_7, \tag{S}$$

(*) Cfr., ad es., Cremona-Curtze, l. c., n.° 260.

(**) Si dice *pajo* o *coppia,* secondochè i due piani tritangenti hanno o no comune una retta della superficie.

e quattro di 3^a specie

$$a_1 a_4 a_7, \qquad a_1 b_4 b_7, \qquad b_1 a_4 b_7, \qquad b_1 b_4 a_7; \qquad (S')$$

i quali otto triedri hanno uno stesso piano conjugato, quello delle rette $a_1 b_1$, $a_4 b_4$, $a_7 b_7$ (n.° 8).

Ora un pajo di piani a_1, b_1 appartiene a sei sistemi (Σ), nę' quali i piani rimanenti sono tutti differenti (n.° 9). Questi 24 piani sono per conseguenza i piani che non contengono rette del pajo $a_1 b_1$, giacchè il numero di tali piani è appunto $45-2-4 \cdot 4-3=24$. Dato un pajo di piani a_1, b_1 e uno qualunque a_4 dei detti 24 piani, si ottiene il sistema (Σ), a cui i tre piani appartengono, costruendo tre dei quattro triedri (S'). Adunque, *se i piani a_1, b_1 si segano in una retta della superficie e se a_4 è un altro piano qualsivoglia che non contenga rette di a_1, a_2, l'esistenza di uno qualunque dei quattro triedri di 3^a specie (S') è conseguenza di quella degli altri tre.*

Questa proprietà può mettersi sotto un altro aspetto. Sia dato un triedro di 2^a specie $b_1 b_4 b_7$ e si costruiscano tre dei triedri (S'); si ottengono tre nuovi piani a_1, a_4, a_7 che, con quelli del triedro dato, formano tre paja di piani. Assunto un pajo $a_1 b_1$ e uno a_4 dei quattro piani b_4, b_7, a_4, a_7, si ottiene un sistema (Σ), che, in virtù de' tre triedri costruiti, deve contenere i piani rimanenti b_4, b_7, a_7. Per conseguenza (ponendo $b_1=a$, $b_4=b$, $b_7=c$, $a_1=a'$, $a_4=b'$, $b_7=c'$) si ha il teorema:

Se abc è un triedro di 2^a specie, e se dei quattro triedri abc', $ab'c$, $a'bc$, $a'b'c'$ tre sono di 3^a specie, anche il quarto è di 3^a specie.

In particolare, se abc è di 2^a specie e sono di 2^a specie abc', $ab'c$, $a'bc$, è pure di 3^a specie $a'b'c'$. In questo senso si può dire che ad un triedro di 2^a specie abc *corrisponde* uno di terza $a'b'c'$. In un sistema (Σ) esistono quattro coppie di tali triedri corrispondenti; cioè i triedri (S) sono ordinatamente corrispondenti ai triedri (S').

Un triedro di 3^a specie corrisponde a nove triedri di 2^a, determinati dai nove piani che passano per le tre rette di uno dei tre piani del triedro di 3^a specie (all'infuori del piano stesso e di quelli del triedro conjugato). La qual cosa risulta altresì dalla relazione $9 \cdot 240=2160$ (n.° 16).

Due piani di una coppia di una terna T, i quali non si segano in una retta della superficie, cioè giacciono in una stessa colonna di T, formano con un piano qualsiasi delle altre due coppie, un triedro di 1^a specie, giacchè questo piano non ha alcuna retta comune col terzo piano della suddetta colonna. Un triedro di 2^a specie, il quale appartenga ad una terna T, deve adunque avere i suoi tre piani distribuiti nelle tre coppie di T. E poichè, come vedemmo testè, un triedro di 2ª specie, appartiene ad un solo sistema (Σ), si può concludere (n.° 9) che *un triedro di 2ª specie appartiene a due sole terne T e però a due soli enneaedri, che sono di 2ª specie* (*).

18. Degli 84 triedri contenuti in un enneaedro di 1ª specie, 12 sono di 3ª specie. *I rimanenti* 72 *triedri sono tutti di 1ª specie.* Giacchè, considerando i tre piani di un triedro di 3ª specie dell'enneaedro, uno qualsivoglia degli altri sei piani dell'enneaedro stesso, non contenendo alcuna retta di quei tre piani, forma necessariamente con due di essi un triedro di 1ª specie.

Degli 84 triedri contenuti in un enneaedro di 2 specie, 3 sono di 3ª specie. *I rimanenti* 81 *sono* 54 *di 1ª specie* e 27 di *2ª*. Cioè i triedri che contengono due piani di un triedro di 3ª specie sono di 1ª specie e si dimostra come dianzi: mentre i triedri che contengono tre piani appartenenti rispettivamente ai tre triedri di 3ª specie sono di 2ª specie. In vero, se $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$ è l'enneaedro considerato e

$$T \equiv \left| \begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & b_1 & a_4 & b_4 & a_7 & b_7 \\ a_2 & b_2 & a_5 & b_5 & a_8 & b_8 \\ a_3 & b_3 & a_6 & b_6 & a_9 & b_9 \end{array} \right|$$

la terna a cui esso appartiene, cioè $b_1 b_2 b_3$, $b_4 b_5 b_6$, $b_7 b_8 b_9$ i triedri di 3ª specie e $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$, $a_7 a_8 a_9$ i loro conjugati; due piani b_1, b_4 formano un triedro di 3ª specie con uno a_7 dei piani a_7, a_8, a_9.. Ciascuno dei piani b_7, b_8, b_9 contiene una retta di a_7 e quindi i tre triedri $b_1 b_4 b_7$, $b_1 b_4 b_8$, $b_1 b_4 b_9$ sono di 2ª specie ed hanno rispettivamente per piani conjugati i tre piani del triedro conjugato a $b_1 b_4 a_7$.

I 27 triedri di 2ª specie del suddetto enneaedro hanno adunque per piani conjugati i piani dei nove triedri conjugati a nove dei 12 triedri di 3ª specie dell'enneaedro di 1ª specie $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 a_7 a_8 a_9$ (o di $b_1 b_2 b_3 a_4 a_5 a_6 b_7 b_8 b_9$, o anche di $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9$); escludendo cioè i triedri $b_1 b_2 b_3$, $b_4 b_5 b_6$, $a_7 a_8 a_9$, i cui conjugati sono $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$, $b_7 b_8 b_9$. Ne risulta, ricordando una proprietà del n.° 5, che, *i* 45 *piani tritangenti sono dati dai piani di un enneaedro qualsivoglia (di 1ª o 2ª specie) e dai piani conjugati ai triedri (di 2ª e 3ª specie) contenuti in esso.*

(*) Il che concorda colla relazione (n.i 16, 18)

$$2160 = \frac{160 \,.\, 27}{2}.$$

19. Vedemmo che un triedro di 3ª specie appartiene a quattro enneaedri, due di 1ª e due di 2ª specie (n.° 5) e che un triedro di 2ª specie appartiene a due enneaedri di 2ª specie (n.° 17).

Un triedro di 1ª specie appartiene a quattro enneaedri, uno di 1ª specie e tre di 2ª. Sia infatti $a_1 a_4 a_8$ un triedro di 1ª specie: e sia a_3 il piano che forma con a_4, a_8 un triedro di 3ª specie e a_2 quello che forma pure un triedro di 3ª specie con a_1, a_3. Dicasi T^{I} la terna T individuata dal triedro $a_1 a_2 a_3$. Poichè i due triedri di 3ª specie $a_3 a_4 a_8$, $a_1 a_2 a_3$ hanno comune a_3, e a_1 non ha retta (della superficie) comune nè con a_4 nè con a_8, lo stesso deve avvenire di a_2, perchè le due coppie a cui dànno origine quei due triedri hanno comuni le sole tre rette di a_3 (cfr. n.° 3). Cioè i piani a_4, a_8 appartengono alle due coppie di T^{I}, diverse da quella in cui entra $a_1 a_2 a_3$ e appartengono a coppie differenti per essere $a_3 a_4 a_8$ un triedro di 3ª specie (cfr. n.° 4). Dopo ciò, la costruzione di T^{I} non presenta alcuna difficoltà (n.° 4): e sia (ad es.)

$$T^{\mathrm{I}} \equiv \left| \begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & . & a_4 & . & a_7 & . \\ a_2 & . & a_5 & . & a_8 & . \\ a_3 & . & a_6 & . & a_9 & . \end{array} \right| .$$

Questa *terna T^{I} è l'unica terna T a cui appartiene un triedro di 1ª specie $a_1 a_4 a_8$, se i tre piani del triedro debbono appartenere uno ad uno alle tre coppie della terna,* giacchè il piano a_3 che forma con a_4, a_8 un triedro di 1ª specie deve appartenere alla colonna in cui trovasi a_1 [altrimenti $a_1 a_4 a_8$ sarebbe di 2ª specie (cfr. n.° 18)]. Ma il triedro $a_1 a_4 a_8$ appartiene ad altre tre terne T^{II}, T^{III}, T^{IV}, che si ottengono ponendo due piani del triedro dato in una stessa coppia (e in una stessa colonna) e tenendo di nuovo presente il n.° 4: le quali tre terne hanno comuni con T^{I} lo stesso enneaedro di 1ª specie

$$a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \, a_5 \, a_6 \, a_7 \, a_8 \, a_9 .$$

Prendendo per indicazione delle medesime quella data dallo specchio del n.° 11, abbiamo adunque, come asserimmo, oltre il suddetto enneaedro di 1ª specie, i tre enneaedri di 2ª specie

$$a_1 \, a_4 \, a_7 \, a_2 \, a_5 \, a_8 \, c_3 \, c_6 \, c_9 ,$$
$$a_1 \, a_5 \, a_9 \, a_3 \, a_4 \, a_8 \, d_2 \, d_6 \, d_7 ,$$
$$a_1 \, a_6 \, a_8 \, a_2 \, a_4 \, a_9 \, e_3 \, e_5 \, e_7 ,$$

col triedro comune $a_1 a_4 a_8$.

Una conferma della precedente proprietà si ha nelle relazioni (cfr. n.ⁱ 16, 18)

$$2880 = 72 \cdot 40 = \frac{54 \cdot 160}{3} .$$

20. Sia $a_1 a_4 a_8$ un triedro di 1ª specie e

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9$$

l'enneaedro di 1ª specie individuato da esso (n.° 19). I triedri di 3ª specie dati dalle coppie di piani $a_1 a_4$, $a_1 a_8$, $a_4 a_8$ debbono essere completate da piani dell'enneaedro (n.° 4), e sieno, ad es.,

$$a_1\, a_4\, a_7, \qquad a_1\, a_8\, a_6, \qquad a_4\, a_8\, a_3. \tag{M}$$

Il triedro $a_3 a_6 a_7$ deve essere di 1ª specie, perchè, se fosse di 3ª specie, i quattro piani a_4, a_8, a_6, a_7 (ad es.) apparterrebbero ai due triedri di 3ª specie $a_1 a_4 a_7$, $a_1 a_6 a_8$ con un piano comune a_1 e anche ai due triedri di 3ª specie $a_3 a_4 a_8$, $a_3 a_6 a_7$, pure con un piano comune a_3, ciò che non può essere (n.° 4). Ripetasi ora per il triedro di 1ª specie $a_3 a_6 a_7$ ciò che si fece per $a_1 a_4 a_8$: cioè si considerino i triedri di 3ª specie dati dalle coppie di piani $a_3 a_6$, $a_3 a_7$, $a_6 a_7$. Questi triedri, per l'esistenza dei due ultimi triedri (M), non possono essere completati dai piani a_1, a_4, a_8 e però debbono esserlo dai piani a_2, a_5, a_9. Sieno tali triedri di 3ª specie

$$a_3\, a_6\, a_9, \qquad a_3\, a_7\, a_5, \qquad a_6\, a_7\, a_2. \tag{N}$$

Questi e i triedri (M) forniscono tre dei quattro triedri che hanno a comune rispettivamente a_3, a_6, a_7: onde nasce (n.° 4) l'esistenza di questi altri triedri di 3ª specie

$$a_3\, a_1\, a_2, \qquad a_6\, a_5\, a_4, \qquad a_7\, a_8\, a_9 \tag{P}$$

e allora (n.° 4) anche dei seguenti

$$a_2\, a_5\, a_8, \qquad a_2\, a_9\, a_4, \qquad a_5\, a_9\, a_1. \tag{Q}$$

Gli ultimi mostrano che, facendo per il triedro di 1ª specie $a_2 a_5 a_9$ la costruzione fatta per $a_1 a_4 a_8$, $a_3 a_6 a_7$, si ritorna al triedro $a_1 a_4 a_8$. Abbiamo adunque questa proprietà (ponendo $a_1 = a$, $a_4 = b$, $a_8 = c$, $a_3 = a'$, $a_6 = b'$, $a_7 = c'$, $a_2 = a''$, $a_5 = b''$, $a_9 = c''$ (*):

(*) Onde il determinante (n.° 4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

che dà i 12 triedri (M), (N), (P), (Q), diventa

$$\begin{vmatrix} a & a'' & a' \\ b & b'' & b' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}.$$

Se abc *è un triedro di* 1^a *specie e sono* abc', $ab'c$, $a'bc$, $a'b'c''$, $a'b''c'$, $a''b'c'$ *di* 3^a *specie, i due triedri* $a'b'c'$, $a''b''c''$ *sono di* 1^a *specie e* $a''b''c$, $a''bc''$ $ab''c''$ *di* 3^a. *Inoltre sono di* 3^a *specie i triedri* $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ (*).

Tali tre triedri di 1^a specie abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, uno qualunque dei quali dà origine al successivo colla costruzione dei triedri di 3^a specie dati dai suoi tre piani presi a due a due, si dirà che formano un *ciclo*.

I nove piani di un ciclo costituiscono un enneaedro di 1^a *specie*. Coi 2880 triedri di 1^a specie si formano 960 cicli. Ogni enneaedro di 1^a specie contiene 24 cicli.

Si ha qui un nuovo concetto degli enneaedri di 1^a specie che, insieme alla proprietà del n.° 13, potrebbe essere il punto di partenza di una trattazione degli enneaedri indipendente dalla considerazione delle terne T.

§ 7. Poliedri. Pentaedro principale.

21. Nelle cose che seguono si chiama *poliedro* il sistema di più piani tritangenti, due qualunque dei quali si segano in una retta esterna alla superficie; *ordine* di un poliedro il numero dei piani che lo formano (onde in un poliedro di ordine n giacciono $3n$ rette della superficie); e *poliedro principale* un poliedro che non è contenuto in poliedri d'ordine superiore all'ordine di esso.

Quali poliedri principali esistono, oltre gli enneaedri di 1^a e 2^a specie? Si osservi anzitutto che *ogni poliedro contenente un triedro di* 3^a *specie è necessariamente contenuto in un enneaedro*. Ciò segue immediatamente dall'ultima considerazione del n.° 6. Inoltre *se un poliedro (di ordine* $n > 3$*) contiene un triedro di* 3^a *specie, contiene necessariamente anche triedri di* 1^a *specie;* giacchè, se $abcd\ldots$ è un poliedro ed abc è di 3^a specie, abd, bcd, acd,... debbono essere di 1^a specie, d non contenendo alcuna delle nove rette di abc.

Adunque, per la risoluzione del suddetto problema, basterà considerare:

A) I poliedri che contengono almeno un triedro di 2^a specie;
B) I poliedri che contengono almeno un triedro di 1^a specie.

22. Prendiamo dapprima ad esaminare il caso *A*). Cioè abbiasi un poliedro contenente almeno un triedro di 2^a specie abc. Sia $a'b'c'$ il triedro di

(*) Questa proprietà vale e si dimostra identicamente per i nove flessi di una curva di 3° ordine. Basta sostituire a piano, flesso; a triedro di 3^a specie, terna di flessi in linea retta; e a triedro di 1^a specie, terna di flessi non giacenti in linea retta (cfr. Nota al n.° 4).

3ª specie corrispondente ad abc (cioè, secondo il n.° 17, sieno abc', $ab'c$, $a'bc$ triedri di 3ª specie) ed α il piano conjugato ad abc, il qual piano è pure uno dei tre piani conjugati al triedro $a'b'c'$. Gli altri due piani conjugati a questo triedro dicansi d, e.

Ora cerchiamo i piani che non contengono rette di abc. Oltre a, b, c, sono da escludere il piano α e i sei piani (all'infuori di α) dei triedri conjugati ad abc', $ab'c$, $a'bc$. Poi per ciascuna delle due rette di a (e similmente di b e c), non esistenti su α, passano due nuovi piani, mentre per la retta $a\alpha$ passano tre nuovi piani. Sicchè restano

$$45-3-1-6-2\cdot2\cdot3-3\cdot3=14$$

piani che non contengono rette di a, b, c. Ed è facile indicare questi 14 piani: sono i due piani d, e e i dodici piani che passano per le sei rette di d, e (oltre d, e, a', b', c' e i piani conjugati ai triedri abc', $ab'c$, $a'bc$) e che indicheremo con f, f', g, g', h, h', m, m', n, n', p, p'.

Si facciano tre casi, cioè:

1.° Si aggiungano ad abc amendue i piani d, e;
2.° Si aggiunga ad abc un solo dei piani d, e;
3.° Non si aggiunga ad abc alcuno dei piani d, e.

23. Nel 1° caso si ha un pentaedro $abcde$, *che è un poliedro principale,* i dodici piani f, f'... avendo rette comuni con d, e. *I dieci triedri contenuti in questo pentaedro sono tutti di 2ª specie.* Infatti abd (e parimenti abe, acd, ace, bcd, bce) è di 2ª specie, perchè abc' è di 3ª specie e d, essendo conjugato ad $a'b'c'$, passa per una retta di c': e il triedro ade (e nello stesso modo bde, cde) è pure di 2ª specie, perchè il triedro αde, conjugato ad $a'b'c'$, è di 3ª specie ed a contiene una retta di α, piano conjugato ai triedri abc', $ab'c$.

Viceversa: *un poliedro principale* $abcd\ldots$, *di cui ogni triedro è di 2ª specie, deve essere un pentaedro.* Poichè, considerando un suo triedro (di 2ª specie) abc e ponendo le stesse denominazioni di dianzi, il piano conjugato al triedro di 2ª specie abd sarà pure conjugato al triedro di 3ª specie abc' e quindi d passerà per una retta di c'; e analogamente d passerà per una retta b' e per una di a': cioè il piano d sarà uno dei piani conjugati al triedro $a'b'c'$ (all'infuori di α): e però, ecc.

Il numero di questi pentaedri principali è $\frac{2160}{10}=216$, ognuno essendo individuato da un triedro di 2ª specie e in ognuno essendo dieci tali triedri.

Dato un pentaedro principale, si hanno 15 rette, quelle giacenti nei cinque piani di esso e 15 piani, cioè questi cinque piani e i dieci conjugati ai dieci triedri del pentaedro. Ognuno dei 15 piani contiene tre delle 15 rette; onde per ciascuna delle 15 rette passano tre dei 15 piani: il che risulta anche dall'osservare che un piano del pentaedro appartiene a sei dei dieci triedri in esso contenuti. Adunque, per una nota proprietà (*), le 12 rette rimanenti costituiscono una bissestupla.

Reciprocamente: *le* 15 *rette che si ottengono, togliendo dalle* 27 *rette le* 12 *di una bissestupla, esistono in sei pentaedri principali,* cioè possono essere in sei modi considerate come intersezione della superficie e di cinque piani (**). *I* 15 *piani contenenti le* 15 *rette sono i* 5 *piani di un pentaedro e i* 10 *piani conjugati ai dieci triedri di esso.*

Sicchè *i* 216 *pentaedri principali si distribuiscono in* 36 *gruppi corrispondenti alle* 36 *bissestuple.*

24. Discende dalle cose precedenti che un tetraedro, i cui quattro triedri sono di 2ª specie, è contenuto in un pentaedro principale. Adunque *il numero di quei tetraedri è* $216 \cdot 5 = 1080$.

§ 8. **Ettaedro principale.**

25. Si esamini ora il 2° caso (n.° 22): cioè (n.° 23) *si consideri un poliedro il quale contenga un tetraedro appartenente ad un pentaedro principale, tale cioè che i suoi quattro triedri sieno di 2ª specie.* Per agevolare la discussione adoperiamo la notazione di Schlaefli. Il triedro formato dai piani

$$a \equiv c_{14}\, c_{26}\, c_{35}\,,$$
$$b \equiv c_{15}\, c_{24}\, c_{36}\,,$$
$$c \equiv c_{16}\, c_{23}\, c_{45}\,,$$

è di 2ª specie e può concepirsi che sia uno *qualsivoglia* di 2ª specie, intendendo che i numeri 1, 2,... 6 rappresentino sei simboli i_1, i_2,... i_6 e questi una permutazione qualunque dei numeri precedenti (con che si hanno i 60 triedri di 2ª specie contenuti nel sistema che nasce dall'escludere le 12 rette di una bissestupla) e inoltre che sia arbitraria la bissestupla di riferimento.

(*) Cfr. Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (Memorie della R. Accad. dei Lincei, Serie III, vol. 1°), n.i 41 e seg.i.
(**) Cremona, l. c., n.° 11.

Si ottengono immediatamente i piani

$$\alpha \equiv c_{35} c_{24} c_{16},$$
$$a' \equiv c_{46} c_{35} c_{12},$$
$$b' \equiv c_{56} c_{13} c_{24},$$
$$c' \equiv c_{25} c_{34} c_{16},$$

e i quattordici piani che non contengono rette di abc,

$$d \equiv c_{46} c_{13} c_{25} \quad \left| \begin{array}{ll} f \equiv a_4 b_6 c_{46}, & f' \equiv a_6 b_4 c_{46}, \\ g \equiv a_1 b_3 c_{13}, & g' \equiv a_3 b_1 c_{13}, \\ h \equiv a_2 b_5 c_{25}, & h' \equiv a_5 b_2 c_{25}, \end{array} \right.$$

$$e \equiv c_{12} c_{56} c_{34} \quad \left| \begin{array}{ll} m \equiv a_1 b_2 c_{12}, & m' \equiv a_2 b_1 c_{12}, \\ n \equiv a_5 b_6 c_{56}, & n' \equiv a_6 b_5 c_{56}, \\ p \equiv a_3 b_4 c_{34}, & p' \equiv a_4 b_3 c_{34}. \end{array} \right.$$

Si considerino adunque i poliedri a cui appartiene il tetraedro $abcd$ (ad es.). In tali poliedri non entra e (caso già considerato nel n.º 23), nè entrano f, f', g, g', h, h', i quali piani hanno ciascuno comune una retta con d: e possono evidentemente figurarvi tre soli dei sei piani m, m', n, n', p, p'. Onde si hanno *otto poliedri principali, che sono ettaedri.* Questi otto ettaedri sono (*)

$$\begin{array}{ll} c \cdot abd \cdot n\,m\,p, & c \cdot abd \cdot n'm'p', \\ b \cdot acd \cdot p\,m'n, & b \cdot acd \cdot p'mn', \\ a \cdot cbd \cdot n'pm, & a \cdot cbd \cdot np'm', \\ d \cdot abc \cdot mnp', & d \cdot abc \cdot m'n'p, \end{array}$$

e non sono essenzialmente diversi, giacchè dai quattro di sinistra si passa ai quattro di destra collo scambio delle a_i, b_i; e si passa dal primo al secondo, terzo e quarto di sinistra, scambiando rispettivamente

$$\begin{array}{lll} 1,\ 2; & 3,\ 5; & 4,\ 6: \\ 1,\ 3; & 2,\ 4; & 5,\ 6: \\ 1,\ 5; & 2,\ 6; & 3,\ 4. \end{array}$$

(*) La divisione di ciascun ettaedro in un piano e due terne è in relazione colla seguente proprietà (n.º 26), essendo corrispondenti nelle due terne due piani che vi occupano lo stesso posto.

26. Preso, ad es., l'ettaedro

$$c \cdot abd \cdot nmp,$$

si trova che, dei 35 triedri che esso contiene, 17 sono di 2ª specie e 18 di 1ª. I 17 triedri di 2ª specie sono: i quattro triedri del tetraedro $cabd$, i quattro triedri del tetraedro $cnmp$, i triedri can, cbm, cdp, i triedri amp, bnp, dnm, mad, nbd, pab.

Si ha adunque (posto $z=c$, $x_1=a$, $y_1=n$, $x_2=b$, $y_2=m$, $x_3=d$, $y_3=p$) la seguente proprietà: — *I sette piani di un ettaedro principale si distribuiscono (in un modo solo) in due terne $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ e in un piano z. Le due terne sono due triedri di 2ª specie. Il piano z dà origine a triedri di 2ª specie con due piani qualunque di ciascuna terna e con ciascun piano x_i dell'una accompagnato ad un piano y_i,* corrispondente, *dell'altra. Altri triedri di 2ª specie sono dati da un piano di una terna coi due non corrispondenti dell'altra ($x_1y_2y_3$, $x_2y_1y_3$,... $x_2x_3y_1$,...). Si hanno così* 17 $(=2+2\cdot 3+3+2\cdot 3)$ *triedri di 2ª specie. I rimanenti* 18 $(=3\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2)$ *triedri (zx_1y_2, zx_1y_3,...: $x_1y_1y_2$, $x_1y_1y_3$,... $y_1x_1x_3$,...) sono di 1ª specie.*

Un ettaedro principale può scindersi in due modi e in due soltanto ($zx_1x_2x_3\cdot y_1y_2y_3$; $zy_1y_2y_3\cdot x_1x_2x_3$) in un triedro di 2ª specie e in un tetraedro di cui i quattro triedri sono pure di 2ª specie. Laonde (n.° 25) *un ettaedro principale corrisponde a* 2 *pentaedri principali ed ogni pentaedro principale a* 40 *ettaedri principali:* un ettaedro nascendo da un corrispondente pentaedro col sopprimerne una faccia e sostituirla con tre altre, che partano rispettivamente dalle tre rette della faccia medesima.

Ogni poliedro principale che contiene un tetraedro, di cui i quattro triedri sono di 2ª specie, è necessariamente un ettaedro. Questa proprietà segue immediatamente dal n.° 25.

Un ettaedro principale può scomporsi in tre modi e in tre soltanto ($x_1x_2y_1y_2\cdot zx_3y_3$: $x_1x_3y_1y_3\cdot zx_2y_2$; $x_2x_3y_2y_3\cdot zx_1y_1$) in un triedro di 2ª specie e in un tetraedro di cui i quattro triedri sono di 1ª specie (*).

Siccome in ogni ettaedro principale esistono due tetraedri, i cui quattro triedri sono di 2ª specie e ogni tale tetraedro dà origine (n.° 25) a otto ettaedri principali, il numero totale di questi è (n.° 24) $\frac{8\cdot 1080}{2}=4320$.

27. Prendasi di nuovo l'ettaedro del n.° 26

$$c\cdot abd\cdot nmp:$$

(*) Non viceversa ogni ettaedro che contiene un cosifatto tetraedro è principale (cfr. n.° 32).

essendo

$$c \equiv c_{16}\, c_{23}\, c_{45},$$
$$a \equiv c_{14}\, c_{26}\, c_{35},$$
$$b \equiv c_{15}\, c_{24}\, c_{36},$$
$$d \equiv c_{46}\, c_{13}\, c_{25},$$
$$n \equiv a_5\ b_6\ c_{56},$$
$$m \equiv a_1\ b_2\ c_{12},$$
$$p \equiv a_3\ b_4\ c_{34}.$$

Levando dalle 27 rette le 21 in esso contenute, le sei rette residue a_2, a_4, a_6; b_1, b_3, b_5 giacciono sopra un iperboloide, ossia formano *due terne complementari [ergänzende Tripel* (*)*]*.

Reciprocamente, si abbiano le due terne complementari a_2, a_4, a_6; b_1, b_3, b_5 (che si possono ritenere affatto arbitrarie, ripetendo una considerazione fatta nel n.º 25). Le 21 rette rimanenti si distribuiscono (in un modo solo) in una bissestupla

$$\left.\begin{matrix} a_1 & a_3 & a_5 & c_{46} & c_{62} & c_{24} \\ c_{35} & c_{51} & c_{13} & b_2 & b_4 & b_6 \end{matrix}\right\} \qquad (B)$$

e in una coppia di triedri conjugati (di 3ª specie)

$$\begin{vmatrix} c_{16} & c_{23} & c_{45} \\ c_{34} & c_{56} & c_{12} \\ c_{25} & c_{14} & c_{36} \end{vmatrix}. \qquad (C)$$

Inoltre, esclusi i piani che contengono alcuna (una o due) delle sei rette a_2, a_4, a_6, b_1, b_3, b_5, rimangono 24 piani che si distribuiscono pure in due gruppi; di 6, che sono quelli della coppia (C), e di 18, che passano a due a due per le rette di questa coppia e a tre a tre per le rette della bissestupla (B). Un piano $c_{16}\, c_{23}\, c_{45}$ della coppia (C) è piano z (n.º 26) di due ettaedri principali, che sono completati dai 12 piani del secondo gruppo, che passano per le rette di (C) esterne al piano considerato; cioè dell'ettaedro suindicato $c \cdot a\, b\, d \cdot n\, m\, p$

(*) Sturm, *Ueber die 27 Geraden der cubischen Fläche* (Math. Ann., tom. XXIII), pag. 290.

e dell'ettaedro $\gamma \cdot \alpha\beta\delta \cdot \nu\mu\pi$, essendo

$$\gamma \equiv c_{16}\, c_{23}\, c_{45},$$
$$\alpha \equiv c_{12}\, c_{35}\, c_{46},$$
$$\beta \equiv c_{56}\, c_{13}\, c_{42},$$
$$\delta \equiv c_{34}\, c_{26}\, c_{15},$$
$$\nu \equiv a_3\, b_6\, c_{36},$$
$$\mu \equiv a_1\, b_4\, c_{14},$$
$$\pi \equiv a_5\, b_2\, c_{52}.$$

Adunque, *escluse le sei rette di due terne complementari, nel sistema rimanente di* 21 *rette (e* 24 *piani) esistono* 12 *ettaedri principali, cioè quelle* 21 *rette si possono pensare, in* 12 *modi diversi, come l'intersezione completa della superficie di 3º ordine e di* 7 *piani. I* 12 *ettaedri si dividono in sei paja: due ettaedri di un pajo hanno lo stesso piano z: e i sei piani z sono quelli di una coppia di triedri conjugati* (*). Inoltre è evidente che *ciascuno dei* 12 *ettaedri dà i* 24 *piani del sistema nei proprii* 7 *piani e nei* 17 *conjugati ai* 17 *triedri di 2ª specie in esso contenuti:* la qual proprietà ha luogo altresì per gli enneaedri e per il pentaedro principale (n.i 18, 23).

Quindi *i* 4320 *ettaedri principali si distribuiscono in* 360 *gruppi corrispondenti alle* 360 *coppie di terne complementari.*

28. Discutiamo infine il 3° caso (n.° 22), nel quale non si aggiunge ad abc alcuno dei piani d, e. Conservate le notazioni precedenti (n.° 25), supponiamo dapprima che si prendano tre dei piani m, m', n, n', p, p'. Otto casi sono possibili, cioè si hanno otto poliedri principali

$$abcmnph, \qquad abcm'n'p'h',$$
$$abcm'npg, \qquad abcmn'p'g',$$
$$abcmn'pf, \qquad abcm'np'f',$$
$$abcmnp'hf'g', \qquad abcm'n'ph'fg.$$

Dei quali i primi sei sono degli ettaedri principali già considerati (n.° 26), perchè contengono rispettivamente i tetraedri $cnmp$, $cn'm'p'$, $bnm'p$, $bn'mp'$,

(*) Altre proprietà del sistema di 21 rette, qui considerato, per ciò che riguarda la configurazione delle rette e particolarmente gli *esagoni* e *doppî-esagoni (Sechsseit, Doppelsechsseit)* che si possono formare colle rette stesse, trovansi nel § 3 del citato lavoro di STURM (Math. Ann., tom. XXIII).

$an'mp$, $anm'p'$, in ognuno dei quali entrano quattro triedri di 2ª specie, come risulta dall'osservare gli otto ettaedri del n.° 25: e gli ultimi due poliedri sono enneaedri [di 2ª specie, perchè contengono triedri abc,... di 2ª specie (cfr. n.° 18)].

Le stesse considerazioni valgono, prendendo tre dei sei piani f, f', g, g', h, h'.

Quindi rimangono a studiare i casi in cui si escludano due dei piani f, f', g, g', h, h', aventi una retta comune (cioè f, f', o g, g', o h, h') e insieme due dei piani m, m', n, n', p, p' che abbiano pure una retta comune (cioè m, m', o n, n', o p, p').

Ma, per escludere i piani f, f', occorre aggiungere una delle due coppie np, $n'p'$ e per conseguenza escludere i piani m, m'. Parimenti, escludendo g, g', deve escludersi n, n' ed escludendo h, h', deve escludersi p, p'. Però i tre casi che così si presentano non sono sostanzialmente differenti, dal primo caso nascendo il secondo e dal secondo il terzo col fare ordinatamente gli scambî

$$3,\ 4;\qquad 1,\ 6;\qquad 2,\ 5:$$
$$1,\ 2;\qquad 3,\ 5;\qquad 4,\ 6.$$

Onde basta considerare il primo caso, nel quale si hanno i due poliedri principali

$$abcghnp,\qquad abcg'h'n'p'.$$

Ora, come si verifica facilmente, i quattro triedri di ciascuno dei tetraedri $abhp$, $acgn$, $abh'p'$, $acg'n'$ sono di 2ª specie e per conseguenza (n.° 25) i due suddetti poliedri sono degli ettaedri principali studiati precedentemente (n.° 26).

Si conclude che *nel 3° caso (n.° 22) non si ha alcun nuovo poliedro principale.*

§ 9. Poliedri che contengono almeno un triedro di 1ª specie.

29. E, come adesso mostreremo, non si ha alcun nuovo poliedro principale neppure nel caso *B*) del n.° 21: ossia *i poliedri principali che contengono almeno un triedro di 1ª specie sono di quelli già considerati (cioè enneaedri o pentaedri principali o ettaedri principali).*

Sia abc un triedro di 1ª specie e $a'b'c'$, $a''b''c''$ gli altri due triedri di 1ª specie che con esso formano un ciclo (n.° 20). Per costruire poliedri contenenti abc, dobbiamo escludere, oltre a, b, c, i nove piani dei triedri conjugati ai triedri (di 3ª specie) abc', $ab'c$, $a'bc$ e i rimanenti piani che passano per le rette di a, b, c (due piani per ciascuna retta): cosicchè restano

$$45-3-9-3\cdot 6=15$$

piani. Questi piani sono a', b', c', a'', b'', c'' e i nove piani dei triedri conjugati ai triedri (di 3ª specie) $a'b'c''$, $b'c'a''$, $c'a'b''$, giacchè tali piani contengono le rette di a', b', c'', b'... e però non quelle di a, b, c. Indichiamo i detti nove piani con α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', e precisamente

con $\alpha\beta\gamma$ il triedro conjugato ad $a'b'c''$,
» $\alpha'\beta'\gamma'$ » » $b'c'a''$,
» $\alpha''\beta''\gamma''$ » » $c'a'b''$.

Anzitutto si avverta che esistono i quattro enneaedri

$$abca'b'c'a''b''c'', \qquad (E_1)$$
$$abc'\alpha\beta\gamma a''b''c, \qquad (E_2)$$
$$bca'\alpha'\beta'\gamma'b''c''a, \qquad (E'_2)$$
$$cab'\alpha''\beta''\gamma''c''a''b; \qquad (E''_2)$$

il primo dei quali è di 1ª specie (n.° 20) e gli altri tre sono di 2ª specie (n.° 13).

Poi si osservi che le tre rette di a' appartengono ordinatamente ad α, β, γ e parimenti ad α'', β'', γ''. Onde questi tre piani avranno con quei tre rispettivamente una retta comune. Potendosi scambiare i simboli α, β, γ e così α', β', γ', come pure α'', β'', γ'', si può fissare che le tre rette di a' sieno

$$\alpha\alpha'', \qquad \beta\beta'', \qquad \gamma\gamma'':$$

e similmente che le tre rette di c' sieno

$$\alpha'\alpha'', \qquad \beta'\beta'', \qquad \gamma'\gamma''.$$

Le tre rette di b' debbono essere ordinatamente di intersezione dei piani α, β, γ coi piani α', β', γ'. Ma non può α incontrare α' in una retta della superficie, poichè, per la notazione ora posta, α, α' hanno ciascuno con α'' una tale retta comune, e queste due rette, appartenendo ad a', c', sono distinte. Si può stabilire che α incontri β' in una retta della superficie; perchè, se incontrasse invece γ', basterebbe, come è permesso, fare gli scambi β, γ; β', γ'; β'', γ''. Ma allora il piano β, che non può avere retta della superficie a comune con β', per la ragione di dianzi, nemmeno può averla con α', giacchè, se ciò accadesse, i residui piani γ, γ' dovrebbero incontrarsi in una retta della superficie, ciò che, per la stessa ragione, non può essere. Dunque le tre rette di b' sono

$$\alpha\beta', \quad \beta\gamma', \quad \gamma\alpha'.$$

Raccogliendo, si hanno quindi le seguenti rette della superficie (essendo $a\,\alpha\,\alpha''$ retta comune ai piani a, α, α''; ecc.):

$$\left.\begin{array}{ccc} a'\alpha\,\alpha'', & a'\beta\,\beta'', & a'\gamma\,\gamma'', \\ c'\alpha'\,\alpha'', & c'\beta'\,\beta'', & c'\gamma'\,\gamma'', \\ b'\alpha\,\beta', & b'\beta\,\gamma', & b'\gamma\,\alpha', \\ c''\alpha, & c''\beta, & c''\gamma, \\ a''\alpha', & a''\beta', & a''\gamma', \\ b''\alpha'', & b''\beta'', & b''\gamma''. \end{array}\right\} \qquad (H)$$

Distinguiamo i poliedri contenenti $a\,b\,c$, cioè che si ottengono coll'aggiungere ad $a\,b\,c$ piani scelti fra i quindici a', b', c', a'', b'', c'', α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', in tre classi:

1.ª Classe. — Aggiungasi ad $a\,b\,c$ almeno due dei piani a', b', c', a'', b'', c''. Si hanno i seguenti quattro casi (poichè $a\,b\,c\,a'\,c'\ldots$ si tratterebbe come $a\,b\,c\,a'\,b'\ldots$; ecc.):

$$a\,b\,c\,a'\,b'\ldots,$$
$$a\,b\,c\,a'\,a''\ldots,$$
$$a\,b\,c\,a''\,b''\ldots,$$
$$a\,b\,c\,a'\,b''\ldots.$$

Nel primo e secondo, esistendo le rette (H), non si può aggiungere alcuno dei piani α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' e però si hanno poliedri contenuti nell'enneaedro (E_1). Nel terzo caso sono disponibili a', b', c', c'', α, β, γ: ma devonsi escludere a', b' che dànno nuovamente il secondo caso ($a\,b\,c\,a'\,a''\ldots$; $a\,b\,c\,b'\,b''\ldots$). Dei piani rimanenti se si aggiunge c', non si aggiungerà c'' per non ricadere nello stesso secondo caso, ma si potranno aggiungere α, β, γ e si otterrà un poliedro contenuto nell'enneaedro (E_2). Che se escludasi c', potrà aggiungersi c'' e allora non α, β, γ; ovvero potranno aggiungersi α, β, γ e allora non c'': cioè si otterrà un poliedro contenuto in (E_1) o (E_2). Finalmente nel quarto caso ponno aggiungersi b', c', a'', c'', α', β', γ': ma devono escludersi b', c', a'', c'', perchè si ritorna al primo, secondo e terzo caso già esaminati; e, aggiungendo α', β', γ', si ottiene un poliedro contenuto in (E'_2).

2.ª Classe. — Aggiungasi ad abc uno solo dei piani a', b', c', a'', b'', c''. Si hanno due casi essenzialmente distinti:

$$abca'\ldots,$$
$$abca''\ldots;$$

ove s'intende che i piani da aggiungere sono dei nove α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''. Ma, per le (H), nel primo caso ponno aggiungersi soltanto α', β', γ' e nel secondo soltanto α, β, γ, α'', β'', γ'': e si ottengono poliedri già discussi (n.º 22), perchè contenenti triedri di 2ª specie. Cioè sono di 2ª specie (nel primo caso),

$$\begin{array}{lll} aa'\alpha', & aa'\beta', & aa'\gamma', \\ ab\,\alpha', & ab\,\beta', & ab\,\gamma', \\ ac\,\alpha', & ac\,\beta', & ac\,\gamma', \end{array}$$

e (nel secondo caso),

$$\begin{array}{lll} aa''\alpha\,, & aa''\beta\,, & aa''\gamma\,, \\ aa''\alpha'', & aa''\beta'', & aa''\gamma'', \\ ac\,\alpha\,, & ac\,\beta\,, & ac\,\gamma\,, \\ bc\,\alpha\,, & bc\,\beta\,, & bc\,\gamma\,, \\ ab\,\alpha'', & ab\,\beta'', & ab\,\gamma'', \\ bc\,\alpha'', & bc\,\beta'', & bc\,\gamma''. \end{array}$$

I precedenti triedri provengono infatti dagli enneaedri di 2ª specie (E_2), (E'_2), (E''_2) prendendo in ogni enneaedro tre piani appartenenti rispettivamente ai tre triedri di 3ª specie di esso (n.º 18).

3ª Classe. — Aggiungasi ad abc nessuno dei piani a', b', c', a'', b'', c'' e però soltanto dei piani α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''. Per l'esistenza dei triedri di 2ª specie ora indicati, anche qui si hanno poliedri già studiati.

30. Si ha adunque il teorema:

I poliedri principali sono l'enneaedro di 1ª specie, l'enneaedro di 2ª specie, l'ettaedro e il pentaedro (principali) considerati nei §§ 7, 8. Cioè: *qualunque poliedro che si può formare coi* 45 *piani tritangenti è uno dei quattro precedenti o è contenuto in essi.*

§ 10. **Tetraedri.**

31. Ci proponiamo ora, coll'ajuto del precedente teorema, di procedere alla determinazione di tutti i possibili poliedri. A tal fine introdurremo la notazione $(t_1, t_2, t_3)^n$ per indicare un poliedro di ordine n, i cui triedri sono t_1 di 1ª specie, t_2 di 2ª e t_3 di 3ª (cfr. n.° 40): onde sarà

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

E, cominciando dai tetraedri, consideriamo dapprima quelli nascenti da un enneaedro di 1ª specie

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9, \qquad (E_1)$$

di cui i triedri di 3ª specie sieno dati dal determinante (n.° 4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \text{(*)}. \qquad (D)$$

Si hanno due specie essenzialmente distinte, $(4, 0, 0)^4$, $(3, 0, 1)^4$. Poichè se si prenda un triedro di 1ª specie $a_1 a_4 a_8$ e si considerino i due altri triedri di 1ª specie $a_3 a_6 a_7$, $a_2 a_5 a_9$ che con quello formano un ciclo, è evidente (n.° 20) che i tre tetraedri $a_1 a_4 a_8 a_2$, $a_1 a_4 a_8 a_5$, $a_1 a_4 a_8 a_9$ contengono ciascuno quattro triedri di 1ª specie e sono i soli esistenti nell'enneaedro e aventi a comune il triedro $a_1 a_4 a_8$, i quali godono di tale proprietà. Dall'enneaedro nascono quindi (n.° 18) $54 = \frac{72 \cdot 3}{4}$ tetraedri $(4, 0, 0)^4$ e però, non potendo due enneaedri di 1ª specie avere a comune un tetraedro (cfr. n.° 14), il numero totale di quei tetraedri è $2160 = 54 \cdot 40$. Che se un tetraedro $a_1 a_2 a_3 a_i$, proveniente dall'enneaedro, contiene un triedro di 3ª specie $a_1 a_2 a_3$, gli altri tre triedri sono di 1ª specie (n.° 18), cioè si ha un tetraedro $(3, 0, 1)^4$. Di questi, in ogni enne-

(*) A questo determinante, per la determinazione dei sunnominati triedri, si possono sostituire altri cinque, per es.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 & a_4 \\ a_9 & a_7 & a_8 \end{vmatrix};$$

ecc.

aedro, esistono $72 = 12 \cdot 6$ e però il loro numero totale è $2880 = 72 \cdot 40$: il che segue altresì dal notare che un triedro di 3^a specie è comune a due enneaedri di 1^a specie (n.° 7) e quindi entra in 12 tetraedri $(3, 0, 1)^4$.

Sia ora

$$b_1 b_2 b_3 \cdot b_4 b_5 b_6 \cdot b_7 b_8 b_9 \tag{E_2}$$

un enneaedro di 2^a specie, le tre terne in cui è diviso essendo i suoi tre triedri di 3^a specie. Si hanno tre specie di tetraedri dei tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4,$$
$$b_1 b_2 b_4 b_5,$$
$$b_1 b_2 b_4 b_7.$$

Il primo e il secondo (n.° 18) sono rispettivamente tetraedri $(3, 0, 1)^4$, $(4, 0, 0)^4$. Il terzo è un tetraedro $(2, 2, 0)$. Il numero di questi ultimi contenuti nell'enneaedro è manifestamente $81 = 3 \cdot 9 \cdot 3$ e per conseguenza il loro numero totale è $12960 = 81 \cdot 160$; poichè due enneaedri di 2^a specie possono avere soltanto a comune un tetraedro $(4, 0, 0)^4$ (cfr. Nota al n.° 15).

Infine dall'ettaedro principale (n.° 26)

$$z \cdot x_1 x_2 x_3 \cdot y_1 y_2 y_3, \tag{P}$$

si hanno tetraedri di questi tipi

$$z x_1 x_2 x_3, \qquad x_1 x_2 x_3 y_1,$$
$$z x_1 x_2 y_1, \qquad x_1 x_2 y_1 y_3,$$
$$z x_1 x_2 y_3, \qquad x_1 x_2 y_1 y_2;$$

dei quali il primo a sinistra è un tetraedro $(0, 4, 0)^4$, di quelli (i soli) pure contenuti in un pentaedro principale e dei quali già trovammo il numero totale (n.° 24); l'ultimo a destra è un tetraedro $(4, 0, 0)^4$ e i rimanenti sono tetraedri $(2, 2, 0)^4$.

Che i tetraedri $(4, 0, 0)^4$ contenuti nell'enneaedro di 1^a specie siano di quelli esistenti in un enneaedro di 2^a specie e in un ettaedro principale e che la stessa cosa si verifichi per i tetraedri $(3, 0, 1)^4$ che si trovano nelle due specie di enneaedri e per i tetraedri $(2, 2, 0)^4$ che stanno nell'enneaedro di 2^a specie e nell'ettaedro principale, risulta dal teorema seguente.

32. *Un tetraedro di cui i quattro triedri sono di 1^a specie, ovvero tre di 1^a specie e uno di 3^a, giace in un enneaedro di 1^a specie e in uno di 2^a specie. Un tetraedro di cui due triedri sono di 1^a specie e due di 2^a, giace in un en-*

neaedro di 2ª specie. Giacchè, se abc è un triedro di 1ª specie e si riprendono le considerazioni e le notazioni del § 9, si possono aggiungere ad abc, quindici soli piani a', b', c', a'', b'', c'', α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''; onde si ottengono 15 tetraedri a cui appartiene abc. Dei quali, i tetraedri

$$abca'', \qquad abcb'', \qquad abcc'',$$

contenenti ciascuno quattro triedri di 1ª specie (n.° 18), esistono nell'enneaedro di 1ª specie (E_1) e rispettivamente negli enneaedri di 2ª specie (E_2), (E'_2), (E''_2): i tetraedri

$$abcc', \qquad abca', \qquad abcb',$$

aventi ognuno tre triedri di 1ª specie e uno di 3ª, stanno pure in (E_1) e ordinatamente in (E_2), (E'_2), (E''_2): e infine i tetraedri

$$\begin{array}{ccc} abc\alpha\,, & abc\beta\,, & abc\gamma\,, \\ abc\alpha'\,, & abc\beta'\,, & abc\gamma'\,, \\ abc\alpha''\,, & abc\beta''\,, & abc\gamma''\,, \end{array}$$

cadauno con due triedri di 1ª specie e due di 2ª, giacciono rispettivamente nei detti enneaedri (E_2), (E'_2), (E''_2): c. d. d.

§ 11. **Pentaedri.**

33. Per ottenere i poliedri di ordine $n > 4$ contenuti in un enneaedro di 1ª specie, è utile osservare che *esisterà in essi almeno un triedro di 3ª specie.* Poichè, considerando uno dei cicli di triedri di 3ª specie $a_1a_4a_8$, $a_3a_6a_7$, $a_2a_5a_9$ contenuti nell'enneaedro (n.° 20), se non si aggiunge ad $a_1a_4a_8$ alcuno dei piani a_3, a_6, a_7, dovranno aggiungersi almeno due dei piani a_2, a_5, a_9, e però ecc.

Quindi, mantenendo per un enneaedro di 1ª specie le notazioni (E_1), (D) del § 10, si hanno i due tipi di pentaedri

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_7$$

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$$

(secondochè il quinto piano a_7 dà col quarto a_4 un triedro di 3ª specie completato dai piani a_1, a_2, a_3, oppur no), che sono rispettivamente $(8,\ 0,\ 2)^5$, $(9,\ 0,\ 1)^5$. Il numero dei primi è $2160 = (6 \cdot 9) \cdot 40$ e quello dei secondi è $2880 = (6 \cdot 12) \cdot 40$.

Da un enneaedro di 2ª specie (E_2) (§ 10), si ottengono questi tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5,$$
$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_7,$$
$$b_1 b_2 b_4 b_5 b_7;$$

il primo dei quali è $(9, 0, 1)^5$ ed è di quelli trovati dianzi, giacchè nasce anche dall'enneaedro di 1ª specie, che (n.° 13) proviene da (E_2) col sostituire a $b_7 b_8 b_9$ il triedro conjugato. Il secondo e il terzo sono $(6, 3, 1)^5$, $(6, 4, 0)^5$. Si hanno $4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$ poliedri $(6, 3, 1)^5$ e $12960 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$ poliedri $(6, 4, 0)^5$.

Da un ettaedro (P) derivano i tipi

$$z \; x_1 x_2 x_3 y_1,$$
$$z \; x_1 x_2 y_1 y_2,$$
$$z \; x_1 x_2 y_1 y_3,$$
$$x_1 x_2 x_3 y_1 y_2.$$

Il secondo e il quarto sono pentaedri $(6, 4, 0)^5$. Il primo è un pentaedro $(4, 6, 0)^5$ e il terzo $(5, 5, 0)^5$.

In un pentaedro $(4, 6, 0)^5$ c'è (n.° 26) un tetraedro (e uno solo) $z x_1 x_2 x_3$, di cui ogni triedro è di 2ª specie. E da un cosifatto tetraedro nascono sei pentaedri di quella specie [cfr. n.° 25 (*)]. Adunque (n.° 24) il numero dei pentaedri $(4, 6, 0)^5$ è $6480 = 1080 \cdot 6$. Donde risulta che *da un tetraedro* $(2, 2, 0)^4$ *si ricavano due (e due soli) pentaedri* $(4, 6, 0)^5$, giacchè in un tal pentaedro, esistono quattro di quei tetraedri ($z x_1 x_2 y_1$, $z x_1 x_3 y_1$, $z x_2 x_3 y_1$, $x_1 x_2 x_3 y_1$) e si ha appunto (n.° 31) $\frac{12960 \cdot 2}{4} = 6480$. Determineremo fra poco (n.° 35) il numero dei pentaedri $(5, 5, 0)^5$. Intanto qui osserviamo che *i cinque tetraedri contenuti in un tale pentaedro sono tutti* $(2, 2, 0)^4$.

I pentaedri $(6, 4, 0)^5$ provenienti dall'ettaedro principale sono di quelli che provengono dall'enneaedro di 2ª specie, in virtù del teorema seguente.

(*) Prese le indicazioni di questo numero, i sei pentaedri sono

$$a\,b\,c\,d\,n, \quad a\,b\,c\,d\,m, \quad a\,b\,c\,d\,p,$$
$$a\,b\,c\,d\,n', \quad a\,b\,c\,d\,m', \quad a\,b\,c\,d\,p'.$$

34. *Un pentaedro, i cui* 10 *triedri sono* 6 *di* 1^a *specie e* 4 *di* 2^a *specie, esiste in un enneaedro di* 2^a *specie.*

In vero i pentaedri, colla detta proprietà, contengono per il numero precedente, un tetraedro i cui quattro triedri sono di 1^a specie (cioè $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$ il tetraedro $b_1 b_2 b_4 b_5$ e $z x_1 x_2 y_1 y_2$, $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$, il tetraedro $x_1 x_2 y_1 y_2$). Ora, ripigliando le notazioni del § 9, i soli tetraedri a cui dà origine un triedro di 1^a specie abc, aventi gli altri tre triedri pure di 1^a specie, sono (n.° 32)

$$abca'', \qquad abcb'', \qquad abcc''.$$

Ma, esistendo l'enneaedro (E_1), non si hanno (cfr. n.° 33) pentaedri della specie voluta coll'aggiungere a', b', c': mentre aggiungendo gli altri piani α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', si ottengono, tenendo presenti le rette (H), i soli pentaedri

$$\begin{array}{lll} abca''\alpha\ , & abcb''\alpha, & abcc''\alpha', \\ abca''\beta\ , & abcb''\beta, & abcc''\beta', \\ abca''\gamma\ , & abcb''\gamma, & abcc''\gamma', \\ abca''\alpha'', & abcb''\alpha', & abcc''\alpha'', \\ abca''\beta'', & abcb''\beta', & abcc''\beta'', \\ abca''\gamma'', & abcb''\gamma', & abcc''\gamma'': \end{array}$$

i quali sono contenuti negli enneaedri di 2^a specie (E_2), (E'_2), (E''_2): c. d. d.

35. E, continuando nelle stesse notazioni, si osservi che un tetraedro $(2, 2, 0)^4$, ad es. il tetraedro (n.° 32) $abc\alpha$, appartiene a nove (soli) pentaedri

$$abc\alpha\beta, \quad abc\alpha\gamma, \quad abc\alpha c', \quad abc\alpha a'', \quad abc\alpha b'',$$

$$abc\alpha\alpha', \quad abc\alpha\gamma', \quad abc\alpha\beta'', \quad abc\alpha\gamma'':$$

come è chiaro, osservando le rette (H). Di questi i primi cinque sono contenuti nell'enneaedro (E_2); mentre i quattro rimanenti non sono contenuti in alcun enneaedro. In vero il tetraedro $abc\alpha$ appartiene al solo enneaedro di 2^a specie (E_2) (Nota al n.° 15) e il triedro abc al solo enneaedro di 1^a specie (E_1) (n.° 19): nei quali due enneaedri non esistono i detti quattro pentaedri. Se ne trae (n.i 33, 34) che questi quattro pentaedri sono quelli contenuti soltanto nell'ettaedro principale, cioè $(4, 6, 0)^5$, $(5, 5, 0)^5$ e precisamente due dei primi (n.° 33) e quindi due dei secondi. Adunque, *ogni tetraedro* $(2, 2, 0)^4$ *è co-*

mune a due pentaedri $(5, 5, 0)^5$ e però, in un tal pentaedro esistendo (n.° 33) cinque tetraedri $(2, 2, 0)^4$, il numero dei pentaedri $(5, 5, 0)^5$ è (n.° 31) $5184 = \frac{12960 \cdot 2}{5}$.

§ 12. **Esaedri.**

36. Dall'enneaedro di 1ª specie (E_1) (§ 10) si hanno i due tipi di poliedri (cfr. n.° 33):

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_7:$$

il primo dei quali è $(18, 0, 2)^6$ e l'altro $(17, 0, 3)^6$. Ogni triedro di 3ª specie di (E_1) entra in 2 di quelli e 18 di questi; e però in (E_1) esistono $12 = \frac{12 \cdot 2}{2}$ dei primi e $72 = \frac{12 \cdot 18}{3}$ dei secondi. Per conseguenza il numero degli esaedri $(18, 0, 2)^6$ è $480 = 12 \cdot 40$ e quello degli esaedri $(17, 0, 3)^6$ è $2880 = 72 \cdot 40$.

Dall'enneaedro di 2ª specie (E_2) (§ 10) nascono i tre tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7,$$

$$b_1 b_2 b_4 b_5 b_7 b_8,$$

che sono ordinatamente $(18, 0, 2)^6$, $(13, 6, 1)^6$, $(12, 8, 0)^6$. Che i pentaedri $(18, 0, 2)^6$ che qui si ottengono, sieno di quelli che esistono in un enneaedro di 1ª specie, segue subito dall'osservare che l'esaedro $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ esiste nell'enneaedro di 1ª specie dedotto da (E_2) col sostituire al triedro (di 3ª specie) $b_7 b_8 b_9$ il suo conjugato (n.° 13). Il numero degli esaedri $(12, 8, 0)^6$ è $4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$: e quello degli esaedri $(13, 6, 1)^6$ è $8640 = (2 \cdot 3 \cdot 9) \cdot 160$.

Dall'ettaedro principale (P) (§ 10) si hanno i tipi

$$z \; x_1 x_2 x_3 y_1 y_2,$$

$$x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3:$$

il primo è $(10, 10, 0)^6$ e il secondo $(12, 8, 0)^6$. Il poliedro $(10, 10, 0)^6$, contiene un (solo) tetraedro $z x_1 x_2 x_3$, di cui i quattro triedri sono di 2ª specie (n.° 26): ma da un tetraedro di tal sorta provengono 12 di quei poliedri, come si ricava dalle cose del n.° 25 (*): quindi il numero degli esaedri $(10, 10, 0)^6$ è (n.° 24) $12960 = 1080 \cdot 12$. Questo essendo pure (n.° 33) il numero dei pentaedri $(6, 4, 0)^5$ ed esistendo in un esaedro $(10, 10, 0)^6$ due di tali pentaedri $(z x_1 x_2 y_1 y_2,\ x_1 x_2 x_3 y_1 y_2)$, si ha che *un pentaedro* $(6, 4, 0)^5$ *appartiene a due esaedri* $(10, 10, 0)^6$.

Il pentaedro $(12, 8, 0)^6$ che proviene da un ettaedro principale è di quelli che si trovano in un enneaedro di 2ª specie, per la seguente proprietà.

37. *Un esaedro di cui i* 20 *triedri sono* 12 *di 1ª specie e* 8 *di 2ª esiste in un enneaedro di 2ª specie.*

In vero ciascun esaedro avente la detta proprietà contiene sei pentaedri $(6, 4, 0)^5$: cioè (n.° 36) $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7 b_8$ i pentaedri $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$, $b_1 b_2 b_4 b_5 b_8, \ldots$ e $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3$ i pentaedri $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$, $x_1 x_2 x_3 y_1 y_3, \ldots$

Ora da un pentaedro $(6, 4, 0)^5$, ad es. dal pentaedro $a b c a'' \alpha$ (n.° 34), ritornando nuovamente alle indicazioni del § 9 e ricordando le rette (H), nascono sei (soli) esaedri

$$\begin{array}{ll} a b c a'' \alpha b'', & a b c a'' \alpha c', \\ a b c a'' \alpha \beta\ , & a b c a'' \alpha \gamma\ , \\ a b c a'' \alpha \beta'', & a b c a'' \alpha \gamma''. \end{array}$$

Di questi i primi quattro sono contenuti nell'enneaedro di 2ª specie (E_2) (§ 9) e sono i due primi $(13, 6, 1)^6$ e i due secondi ciascuno con 12 triedri di 1ª specie e 8 di 2ª. I due rimanenti $a b c a'' \alpha \beta''$, $a b c a'' \alpha \gamma''$ debbono essere $(10, 10, 0)^6$; il che risulta, o dall'osservare che non sono contenuti in alcun enneaedro (cfr. n.° 35), o da una proprietà dell'esaedro $(10, 10, 0)^6$ avvertita alla fine del n.° 36. Adunque dei sei esaedri suddetti soltanto $a b c a'' \alpha \beta$, $a b c a'' \alpha \gamma$ contengono 12 triedri di 1ª specie e 8 di 2ª ed esistono in (E_2) (§ 9): c. d. d.

(*) Dal tetraedro $c a b d$ nascono i 12 esaedri

$$\begin{array}{llllll} cabdmn, & cabdmp, & cabdnp, & cabdm'n, & cabdmp', & cabdnp', \\ cabdm'n', & cabdm'p', & cabdn'p', & cabdmn', & cabdm'p, & cabdn'p. \end{array}$$

E qui si avverta che un esaedro $c a b d m n$ entra in 2 ettaedri

$$c\,.\,abd\,.\,nmp, \qquad d\,.\,abc\,.\,nmp'$$

e in ciascuno figura collo *stesso* tipo. Invece il pentaedro $c a b m n$, che fà parte dell'esaedro $c a b d m n$, entra negli stessi due ettaedri, ma vi figura con tipo *diverso*. Ciò spiega l'apparente contraddizione dell'essere, nello specchio del § 14, $j = 1$ per il pentaedro $(6, 4, 0)^5$ nel tipo $z x_1 x_2 y_1 y_2$ e $j = 2$ per l'esaedro $z x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$.

§ 13. Ettaedri. Ottaedri.

38. È facile vedere che un enneaedro di 1ª specie (E_1) (§ 10) dà origine al solo tipo di ettaedri

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$$

(contenente due triedri di 3ª specie $a_1 a_2 a_3$, $a_4 a_5 a_6$ che non hanno alcun piano comune), e che in un enneaedro di 2ª specie (E_2) (§ 10) esistono i due tipi

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_7 b_8.$$

Questi tre ettaedri sono ordinatamente $(30, 0, 5)^7$, $(24, 9, 2)^7$, $(22, 12, 1)^7$: ed è

$1440 = (3 \cdot 12) \cdot 40$ il numero degli ettaedri $(30, 0, 5)^7$,

$1440 = 9 \cdot 160$ » » $(24, 9, 2)^7$,

$4320 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 160$ » » $(22, 12, 1)^7$.

39. Infine dagli stessi due enneaedri menzionati nel numero precedente provengono ottaedri dei due tipi

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8,$$

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8;$$

che sono $(48, 0, 8)^8$, $(36, 18, 2)^8$. Il numero dei primi è $360 = 9 \cdot 40$ e quello dei secondi $1440 = 9 \cdot 160$.

§ 14. Specchio riassuntivo dei poliedri.

40. Dai §§ 10, 11, 12, 13 (in particolare dai teoremi dei n.i 32, 34, 37) discende la notevole proprietà: — *Un poliedro è pienamente definito dai numeri n, t_1, t_2, t_3* (n.° 31) (*) —. Cioè: *la specie di un poliedro è data dalla conoscenza dell'ordine, del numero dei triedri di 1ª specie, del numero di quelli di 2ª e del numero di quelli di 3ª*. In altre parole: *i poliedri, pei quali quei quattro numeri sono gli stessi, godono delle medesime proprietà.*

41. Chiudiamo questo lavoro col riassumere nello specchio seguente i risultati precedentemente ottenuti sui poliedri. Tutti i possibili poliedri si distri-

(*) Tre qualunque dei quali, per la relazione $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, determinano il quarto.

buiscono in 27 specie [prescindendo dai sistemi di due piani (coppie o diedri), che formano una specie sola] e sono 3 di triedri, 4 di tetraedri, 7 di pentaedri, 5 di esaedri, 4 di ettaedri, 2 di ottaedri e 2 di enneaedri.

Nello specchio si trova anche l'indicazione dei tipi. Ma tale indicazione non ha valore in senso assoluto, i varî tipi di una stessa specie essendo poliedri identici (n.° 40). I tipi di un poliedro sono gli aspetti o i modi, ne' quali esso entra nei differenti poliedri principali e in uno stesso poliedro principale. E, per l'indicazione dei tipi, s'intendono rappresentati l'enneaedro di 1ª specie dalle notazioni (E_1), (D), quello di 2ª specie da (E_2), l'ettaedro principale da (P) (§ 10) e il pentaedro principale dalla notazione

$$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5.$$

Ad es., il pentaedro $(6, 4, 0)^5$ entra sotto l'aspetto o tipo $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$ nell'enneaedro di 2ª specie e nei due aspetti o tipi diversi $z x_1 x_2 y_1 y_2$, $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$ nell'ettaedro principale.

Di fronte ad ogni tipo sono posti due numeri; uno i dà il numero dei poliedri in quel tipo che esistono nel poliedro principale a cui il tipo stesso si riferisce, l'altro j il numero di tali poliedri principali ai quali appartiene un poliedro in quel tipo.

Così, tenendo l'esempio precedente, cioè considerando pentaedri $(6, 4, 0)^5$, si ha che ne esistono 81 del tipo $b_1 b_2 b_4 b_5 b_7$ nell'enneaedro di 2ª specie e 1 di quel tipo entra in un solo tale enneaedro: che ne esistono 3 del tipo $z x_1 x_2 y_1 y_2$ in un ettaedro principale e nuovamente 1 dello stesso tipo entra in un solo tale ettaedro: e infine che ne esistono 6 del tipo $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2$ in un ettaedro principale e 1 fa parte di due tali ettaedri.

Il numero i si trova facilmente. Il numero j si calcola, osservando che, se N è il numero dei poliedri di una specie, il numero $j \frac{N}{i}$ deve essere eguale a 40 (numero degli enneaedri di 1ª specie) se il tipo di quei poliedri, che si considera, appartiene all'enneaedro di 1ª specie; ovvero a 160, o a 4320, o a 216, se il detto tipo appartiene invece all'enneaedro di 2ª specie o all'ettaedro principale o al pentaedro principale.

La somma dei numeri i e la somma dei numeri j di tutti i tipi di un poliedro di una data specie che entrano in un poliedro principale, sono rispettivamente il numero totale dei poliedri di quella specie che entrano nel poliedro principale considerato e il numero totale di tali poliedri principali ai quali appartiene un poliedro della stessa specie.

Ad es., $(640)^5$ entra $9 (= 3 + 6)$ volte in un ettaedro principale e appartiene a $3 (= 1 + 2)$ ettaedri principali.

Poliedri	Specie	Numero	Tipo (rispetto ai poliedri principali)	i	j
Triedri	$(1, 0, 0)^3$	2880	$a_1\, a_2\, a_4$	72	1
			$b_1\, b_2\, b_4$	54	3
			$x_1\, x_2\, y_1$	12	18
			$z\;\, x_1\, y_2$	6	9
	$(0, 1, 0)^3$	2160	$b_1\, b_4\, b_7$	27	2
			$x_1\, x_2\, x_3$	2	4
			$z\;\, x_1\, x_2$	6	12
			$z\;\, x_1\, y_1$	3	6
			$x_1\, y_2\, y_3$	6	12
			$c_1\, c_2\, c_3$	10	1
	$(0, 0, 1)^3$	240	$a_1\, a_2\, a_3$	12	2
			$b_1\, b_2\, b_3$	3	2
Tetraedri	$(4, 0, 0)^4$	2160	$a_1\, a_2\, a_4\, a_5$	54	1
			$b_1\, b_2\, b_4\, b_5$	27	2
			$x_1\, x_2\, y_1\, y_2$	3	6
	$(3, 0, 1)^4$	2880	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4$	72	1
			$b_1\, b_2\, b_3\, b_4$	18	1
	$(2, 2, 0)^4$	12960	$b_1\, b_2\, b_4\, b_7$	81	1
			$z\;\, x_1\, x_2\, y_1$	12	4
			$z\;\, x_1\, x_2\, y_3$	6	2
			$x_1\, x_2\, x_3\, y_1$	6	2
			$x_1\, x_2\, y_1\, y_3$	6	2
	$(0, 4, 0)^4$	1080	$z\;\, x_1\, x_2\, x_3$	2	8
			$c_1\, c_2\, c_3\, c_4$	5	1

Poliedri	Specie	Numero	Tipo (rispetto ai poliedri principali)	i	j
Pentaedri	$(9, 0, 1)^5$	2880	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$	72	1
			$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5$	18	1
	$(8, 0, 2)^5$	2160	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_7$	54	1
	$(6, 3, 1)^5$	4320	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_7$	27	1
	$(6, 4, 0)^5$	12960	$b_1\, b_2\, b_4\, b_5\, b_7$	81	1
			$z\;\, x_1\, x_2\, y_1\, y_2$	3	1
			$x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2$	6	2
	$(5, 5, 0)^5$	5184	$z\;\, x_1\, x_2\, y_1\, y_3$	6	5
	$(4, 6, 0)^5$	6480	$z\;\, x_1\, x_2\, x_3\, y_1$	6	4
	$(0, 10, 0)^5$	216	$c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5$	—	—
Esaedri	$(18, 0, 2)^6$	480	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$	12	1
			$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6$	3	1
	$(17, 0, 3)^6$	2880	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_7$	72	1
	$(13, 6, 1)^6$	8640	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_7$	54	1
	$(12, 8, 0)^6$	4320	$b_1\, b_2\, b_4\, b_5\, b_7\, b_8$	27	1
			$x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2\, y_3$	1	1
	$(10, 10, 0)^6$	12960	$z\;\, x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2$	6	2
Ettaedri	$(30, 0, 5)^7$	1440	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7$	36	1
	$(24, 9, 2)^7$	1440	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7$	9	1
	$(22, 12, 1)^7$	4320	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_7\, b_8$	27	1
	$(18, 17, 0)^7$	4320	$z\;\, x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2\, y_3$	—	—
Ottaedri	$(48, 0, 8)^8$	360	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8$	9	1
	$(36, 18, 2)^8$	1440	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8$	9	1
Enneaedri	$(72, 0, 12)^9$	40	$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9$	—	—
	$(54, 27, 3)^9$	160	$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9$	—	—

Pavia, 1884.

FINE DEL TOMO XII.° (SERIE II.ª)

DICHIARAZIONE.

In questi giorni i librai Fratelli Bocca hanno pubblicato un volume intitolato: *Calcolo differenziale e Principii di Calcolo integrale.* In capo al frontispizio è stato messo il mio nome, e nella Prefazione si afferma che, oltre al corso dato da me nell'Università di Torino, quel volume contiene importanti aggiunte e qualche modificazione e varie annotazioni, che si premettono. Perchè non mi si attribuisca ciò che non è mio, debbo dichiarare che non ho avuta alcuna parte nella compilazione dell'accennato volume, e che tutto è dovuto a quel giovine egregio che è il dottor Giuseppe Peano, sottoscritto alla Prefazione e alle Annotazioni.

Angelo Genocchi.