ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — **Eugenio Beltrami** *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa.*

Serie II - Tomo XXV
(dal febbraio al luglio dell'anno 1897).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXV.° (SERIE II.ª)

Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.

(Di CORRADO SEGRE, *a Torino.)*

Nello studio delle singolarità delle curve piane algebriche un punto di vista molto importante è, come si sa, quello — dovuto principalmente al sig. NOETHER (*) ed al quale si giunge eseguendo una successione di trasformazioni (ordinariamente quadratiche) col punto singolare come punto fondamentale, — secondo cui la singolarità viene a riguardarsi come composta di un numero finito di punti multipli infinitamente vicini fra loro. L'analogo concetto nelle ricerche sulle singolarità delle superficie algebriche non è stato ancora introdotto, almeno con una certa ampiezza: sebbene possa riuscire anche qui sommamente fecondo, ed in certi casi appaja assolutamente essenziale. Ad esso io mi propongo in questo lavoro di portare qualche contributo; facendone alcune applicazioni: tra cui rileverò quelle contenute nell'ultima parte, dirette a dimostrare l'utilità della scomposizione delle singolarità superficiali nella trattazione dell'importante problema di ridurre per trasformazioni birazionali una data superficie algebrica ad una superficie dello spazio ordinario con sole singolarità ordinarie o ad una superficie iperspaziale priva di punti multipli.

Torino, ottobre 1896.

(*) V. la 2.ª Nota « *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweir Variabeln* » (Göttinger Nachrichten 1871, pag. 267); e poi il lavoro più completo « *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* » (Mathem. Annalen, tom. 9, 1875). — Per altre citazioni intorno alle singolarità delle curve piane algebriche veggasi l'ottima opera dei sig.[i] BRILL e NOETHER « *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* » (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, III Bd., 1892-93).

Scomposizione di un punto multiplo qualunque.

1. Indichiamo con F una superficie algebrica qualunque, e con O un suo punto di multiplicità s. Applichiamo una trasformazione quadratica spaziale, la quale abbia come elementi fondamentali del 1.° spazio il punto O ed una conica q, riducibile o no, non passante per O; diciamo A' e q' il punto e la conica fondamentali del 2.° spazio, ω il piano di q, ω' il piano di q'. Si sa che in questa trasformazione ai punti (del 1.° spazio) infinitamente vicini ad O nelle varie direzioni uscenti da questo corrispondono i punti (del 2.° spazio) situati su ω': corrispondenza collineare fra quelle direzioni e questi punti. Ne segue che sulla superficie F' (d'ordine $2n-s$ in generale, se n è l'ordine di F) trasformata di F il punto O non avrà per imagine un sol punto, ma bensì tutta una linea c' giacente su ω' e collineare al cono tangente in O ad F; si può cioè dire che un punto qualunque O' della linea c' è l'imagine su F' di un punto di F infinitamente vicino ad O sulla corrispondente generatrice t di quel cono; ossia che se un punto su F si avvicina indefinitamente ad O in modo che la retta che lo congiunge ad O tenda al limite t, il punto che gli corrisponde su F' avrà per limite O'.

Volendo considerare in modo speciale una tangente t di F in O converrà supporre (come si può) che la conica fondamentale q del 1.° spazio non la incontri; cosicchè il punto O' non starà su q'. Allora la multiplicità s' del punto O' per la superficie F' si potrà riguardare come un carattere spettante a quella tangente t di F in O: potremo dire per brevità, seguendo l'uso, che s' è *la multiplicità di quel punto di F che è infinitamente vicino (successivo) ad O nella direzione t.* Da quanto diremo poi (n.° 4) quest'espressione apparirà giustificata (*). — Poichè la multiplicità di O' per F' non può superare quella che ha O' per l'intersezione di F' con ω', cioè quella di O' per la linea c' (che con la conica q' costituisce quell'intersezione), avremo che *il carattere s' di t non può superare la multiplicità di t pel cono tangente in O ad F.* Sarà dunque anche $s' \leq s$; ed il caso $s' = s$ non potrà presentarsi se non quando quel cono tangente, d'ordine s, si spezzi in s piani (distinti o no) passanti per t.

Mutando la tangente t in O ad F potrà mutare s'. Per ognuna delle singole componenti irriducibili del cono tangente in O (ossia delle curve componenti la c' di F') avremo un valore di s' corrispondente ad una sua generatrice *t generica* (questo valore sarà la multiplicità della componente di c' per F'); e poi potremo avere altri valori di s' (superiori) corrispondenti a posizioni *eccezionali* di t. Complessivamente avremo un numero finito di valori per s', che (quando occorra) distingueremo con s'_1, s'_2, $s'_3, \ldots$: gli uni spettanti ad infinite tangenti t, gli altri solo a tangenti staccate. — Diremo *per convenzione* che *i punti di F infinitamente vicini (successivi) ad O formano una o più linee irriducibili infinitesime, infinitamente vicine ad O, degli stessi ordini* (**) *e con le stesse multiplicità* che hanno per F' le singole componenti irriducibili di c'. Su una tal linea infinitamente vicina ad O possono poi esservi dei punti eccezionali (infinitamente vicini ad O) aventi per F multiplicità maggiore che quella della linea.

2. Fissiamo di nuovo una posizione di t, a cui corrisponda il punto O' su F'; e facciamo per questo punto una scomposizione analoga a quella che abbiam fatto pel punto O di F. Assumiamo dunque una seconda trasformazione quadratica che abbia (nel 1.° spazio) come punto fondamentale O' ed una conica fondamentale che non incontri una tangente t' di F' in O' scelta ad arbitrio. Il punto s'-plo O' di F' avrà per imagini sulla superficie F'', trasformata di F', gl'infiniti punti di una linea piana c''. Consideriamo fra

(*) Intanto un modo ben noto per darne una prima spiegazione è il seguente. S'imagini che la superficie F' venga spostata infinitamente poco in modo che il suo punto s'-plo O' esca dal piano fondamentale ω'; la superficie corrispondente nel 1.° spazio sarà infinitamente prossima ad F ed avrà, corrispondentemente alla nuova posizione di O', un punto s'-plo infinitamente vicino ad O nella direzione t.

(**) L'*ordine* di una tal linea infinitesima è dunque quello del cono (di tangenti ad F) che la projetta da O. — In base a quella convenzione potremo parlare in seguito di *rette infinitesime*, ecc.

questi punti quello O'' che corrisponde alla direzione t'; sia s'' la sua multiplicità per F'': sarà $s'' \leqq s'$. Variando t' e quindi O'' potrà mutare questo carattere s''; potremo cioè avere dei valori generici di s'' e dei valori eccezionali. Diremo, per un'ulteriore convenzione, che essi sono le multiplicità di linee infinitesime e di punti di F, infinitamente vicini (successivi) a quel punto s'-plo di F che è successivo ad O sulla tangente t. — Facciamo ora variare t: e per ogni sua posizione avremo un gruppo di valori per s''. Vi saranno gruppi di valori che spettano ad infinite posizioni di t, e gruppi che spettano invece a posizioni eccezionali di t. Complessivamente avremo un numero finito di valori per s''. Se il carattere s' spettante ad una t si è indicato con s'_i, distingueremo i valori di s'' spettanti a quella t con s''_{i1}, s''_{i2}, $s''_{i3},\ldots$; e varrà sempre la relazione $s''_{ik} \leqq s'_i$.

Si faccia una nuova trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale il punto O'' che è s''-plo per F'', e sulla superficie F''' in cui questa si trasforma si considerino le multiplicità s''' delle linee, e dei punti eccezionali, che vengono a corrispondere ad O'' di F''. E così si continuino le trasformazioni quadratiche, fermandosi solo ad un punto O', od O'', od O''',..., generico od eccezionale, quando la sua multiplicità s', od s'', od s''',..., sia $= 1$. Diremo che *il punto singolare O di F consta di un punto s-plo, a cui sono successivi (nelle varie direzioni uscenti da O) punti con le multiplicità* s'_1, $s'_2,\ldots$, *i quali costituiscono una o più linee infinitesime; ognun di questi punti, e sia di multiplicità* s'_i, *avendo per successivi punti di multiplicità* s''_{i1}, $s''_{i2},\ldots$, *costituenti una o più linee infinitesime; ciascun di questi ultimi punti, ad esempio corrispondente ad* s''_{ik}, *avendo per successivi punti di multiplicità* s'''_{ik1}, $s'''_{ik2},\ldots$; *e così via* (*).

3. *Questa scomposizione avrà termine*, cioè in ogni serie di caratteri (s, s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl},\ldots$) si arriverà sempre ad un carattere che è $= 1$ ed a cui per conseguenza bisognerà fermarsi: tolto, s'intende, il caso che il punto O stia su una *linea multipla* o su una *parte multipla* di F (e quindi abbia, si può dire,

(*) Non occorre dire che con ciò non si hanno ancora *tutti* i caratteri che sono da studiare nei punti singolari delle superficie algebriche! Così le singolarità del cono tangente in O ad F (cioè della curva piana c' di F') potranno spesso fornire dei nuovi caratteri; ecc. Anche pei punti singolari delle curve piane si sa che oltre ai caratteri s, s'_i, $s''_{ik},\ldots$, vi son da considerare le *diramazioni*; pei punti singolari delle superficie vi son cose analoghe. — Ciò apparirà anche dal seguito.

infiniti punti multipli *successivi*). Se si tien conto che $s \geqq s'_i \geqq s''_{ik} \geqq s'''_{ikl}, \ldots$, si vede che affinchè questa serie si proseguisse indefinitamente dovrebbe accadere che da un certo carattere in poi tutti quanti fossero uguali fra loro. Ora, se si suppone ad esempio che i primi h caratteri della serie siano uguali ad s, si può dimostrare che h è inferiore ad un determinato limite finito.

Ciò appare intuitivo, quando si considerino quei caratteri come multiplicità di punti successivi della superficie F e si profitti di quanto vedremo in seguito sui rami di curva passanti per tali punti. Invero se vi fossero infiniti caratteri uguali ad s si avrebbero su F infiniti punti s-pli infinitamente vicini ad O e succedentisi sopra un ramo di curva algebrica (ordinaria, s'intende: non infinitesima); il che non è possibile se non quando O (con quei punti) stia su una linea s-pla di F. Ma una dimostrazione più completa e rigorosa di quel fatto si può trovare in una Memoria del sig. KOBB, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*). In base ad essa noi possiamo ritenere come assodata la proposizione enunciata.

Incontri della superficie con un ramo di curva algebrica.

4. I caratteri che abbiam definiti per il punto singolare O della superficie algebrica F servono ad esprimere il numero delle intersezioni coincidenti in O di quella superficie con una curva algebrica che sia obbligata a passare per O, a *toccare* F in O, ad *osculare* F in O, ecc. Con ciò, oltre all'utilità immediata dei risultati che si ottengono per tali questioni di contatti, si raggiunge pure il vantaggio di una nuova interpretazione dei suddetti caratteri, indipendente dalle trasformazioni quadratiche con cui da prima li abbiamo definiti, e tale da giustificare meglio le locuzioni relative a punti multipli infinitamente vicini, o successivi, di F.

(*) *Journal de mathématiques*, (4), tom. 8, 1892. Ivi si rappresenta il *campo* della superficie F che circonda il punto singolare O sui campi di un numero finito di superficie algebriche che circondano certi punti semplici (in numero finito) di queste. A tal fine si applicano ad F successive trasformazioni quadratiche speciali per abbassare la multiplicità del punto O. E si dimostra che un abbassamento, dopo un conveniente numero di trasformazioni, dovrà sempre verificarsi, mediante un calcolo simile a quello che per la corrispondente questione sulle curve piane usava il sig. WEIERSTRASS nelle sue lezioni.

Il numero delle intersezioni (o la multiplicità d'intersezione) in O della superficie F con una curva algebrica passante comunque per O è, come si sa, la somma delle multiplicità d'intersezione in O di F coi diversi *rami* (sottint. *completi*), o *cicli*, di quella curva passanti per O (aventi l'origine in O (*). Ne segue che per la questione di cui ora si tratta basterà studiare gl'incontri in O di F con *un ramo* di curva uscente da O.

Abbiasi dunque su una curva algebrica un ramo uscente da O: e sia un ramo di 1.° ordine, o *lineare*. Lo indicheremo per brevità con lo stesso simbolo γ che ci servirà ad indicare la curva. In generale il numero delle sue intersezioni con F (s'intende, in O) è uguale alla multiplicità s di O per F. Eccezione si ha solo quando la tangente al ramo (in O) sia pur tangente in O ad F. Per indagare di quanto s'aumenta allora la multiplicità dell'intersezione si ritorni alla trasformazione quadratica del n.° 1. Consideriamo la curva γ' che mediante essa corrisponde a γ; al ramo lineare suddetto di γ corrisponderà un ramo lineare di γ' che taglia (non *tocca*) il piano ω' nel punto di questo che corrisponde alla direzione della tangente in O al ramo γ. Alle intersezioni della curva γ con F fuori di O corrispondono le intersezioni della curva γ' con F' fuori del piano ω'. Se il ramo γ viene ad avere per tangente la retta t tangente in O ad F, il corrispondente

---

(*) Ricordo (WEIERSTRASS, HALPHEN, ecc.) che un *ramo* completo, o ciclo, di una curva algebrica è l'insieme dei punti (complessi) di questa costituenti un tale intorno di uno O di essi (origine) che mediante una trasformazione birazionale si possano far corrispondere ad un conveniente intorno di un punto *semplice* di un'altra curva algebrica. L'*ordine* di un ramo è il numero delle sue intersezioni con un piano che passi abbastanza vicino all'origine del ramo, pur facendo un angolo finito con la tangente (se poi quest'angolo è inferiore ad un certo limite quel numero subisce un incremento uguale al *rango* del ramo; ed un ulteriore aumento uguale alla *classe* del ramo subisce se il piano è abbastanza prossimo al piano osculatore). La multiplicità d'intersezione in O del ramo con una superficie passante per O è il numero delle intersezioni del ramo con la superficie stessa dopo uno spostamento infinitesimo (generico) di questa in seguito a cui essa non passi più per O. — Si sa che per rappresentare analiticamente il ramo si posson esprimere le coordinate dei suoi punti come serie di potenze intere positive di un parametro t per modo che l'origine O del ramo corrisponda a $t=0$ ed ogni punto del ramo corrisponda ad un sol valore di t, di modulo abbastanza piccolo. Allora l'ordine del ramo sarà dato dal minimo esponente non nullo di t che compaja nelle dette serie; e più in generale la multiplicità d'intersezione in O del ramo con una superficie $F(x\,y\,z)=0$ sarà il minimo esponente di t che comparirà in F quando in luogo delle coordinate si pongano quelle loro espressioni in serie di t.

ramo γ' verrà a passare pel punto O' s'-plo per F' (n.° 1): e quindi in O' verranno a cadere s' intersezioni della curva γ' e di F' che prima cadevano fuori di ω'; donde segue che in O verranno a cadere s' fra le intersezioni della curva γ con F che prima cadevano fuori di O. Giungiamo così alla seguente proposizione: *se ad una tangente t di F in O spetta, nel senso del n.° 1, il carattere s', ogni ramo lineare di curva algebrica passante per O e tangente ivi a t incontra la superficie F in O $s+s'$ volte, in generale.*

5. Questa multiplicità d'intersezione $s+s'$ è quella che deriva dalle *due condizioni* pel ramo γ di passare per O e di esser *tangente* ad F e più precisamente alla t. Con una *terza condizione*, di *osculazione*, si otterrà una maggior multiplicità d'intersezione. Per questo fine si ricordi che l'eccesso su s della multiplicità d'intersezione in O del ramo γ con F è uguale alla multiplicità d'intersezione in O' del ramo γ' con F'; e d'altra parte per avere quest'ultima multiplicità si applichi la proposizione ottenuta dianzi cambiando F, γ, O in F', γ', O'. Perchè la multiplicità d'intersezione di F col ramo γ tangente a t sia diversa e quindi maggiore di $s+s'$ occorrerà e basterà che il ramo γ' tocchi in O' la superficie F': se il contatto avviene secondo una tangente t', *esterna ad* ω', cui corrisponda, nel senso del n.° 2, un carattere s'', la multiplicità d'intersezione di F' col ramo γ' sarà in generale $s'+s''$, e per conseguenza la multiplicità d'intersezione di F col ramo γ sarà, in generale, $s+s'+s''$. — Alla tangente t' di F' in O corrisponde per la trasformazione quadratica nel 1.° spazio una conica (*cerchio* rispetto a q come assoluto) osculatrice a F in O: a questa si potrebbe riferire il carattere s'' di t'; e si avrebbe allora che un ramo lineare γ tangente in O a t viene ad incontrare F in O più che $s+s'$ volte quando diventi osculatore ad una tal conica, nel qual caso la multiplicità d'intersezione diventa in generale $s+s'+s''$, se s'' è il carattere spettante a quella conica.

Applicando di nuovo questo risultato con la sostituzione di F' ed O' ad F ed O, e così continuando indefinitamente, si ottiene la proposizione seguente:

Un ramo lineare che sia obbligato a toccare la superficie F nel punto s-plo O avrà ivi con essa in generale un incontro $(s+s'_i)$-punto, essendo s'_i il carattere di quella tangente di F in O che il ramo verrà a toccare. — Perchè la multiplicità dell'intersezione venga a superare $s+s'_i$ senza che muti quella tangente basterà una condizione: e la multiplicità diverrà in *generale* $s+s'_i+s''_{ik}$ *(per un certo k). Tutti i rami lineari osculatori, cioè a contatto tripunto, con uno siffatto daranno quella stessa multiplicità d'intersezione con F, in generale. — Se poi si vuole che uno di questi rami abbia una maggior multiplicità d'intersezione, s'imporrà con ciò una nuova condizione, e si troverà in generale la multiplicità* $s+s'_i+s'_{ik}+s'''_{ikl}$ *(per un certo l); e la stessa si avrà per tutti i rami lineari che hanno con quello un contatto quadripunto. — E così via; finchè si arrivi ai caratteri che sono* $=1$: *allora occorre sempre una nuova condizione per aumentare solo di* 1 *la multiplicità d'intersezione del ramo con F.*

Appare ora evidente che, riguardo alla multiplicità dell'intersezione coi rami lineari passanti per O, la superficie F si comporta esattamente come se avesse per successivi al punto s-plo O, sulle varie tangenti, dei punti con le multiplicità rispettive s'_i, e poi come successivi a questi dei punti con le multiplicità s''_{ik}, ecc., ecc.: appunto come già avevamo convenuto di dire alla fine del n.° 2. E si vede pure come si possano assegnare dei rami di curva — lineari nei casi finora considerati — sui quali si può dire che stanno e son successivi il punto s-plo O, un punto s'_i-plo, un punto s''_{ik}-plo,..., di F.

6. A quanto abbiam detto nel precedente num.° occorre in certi casi una modificazione, proveniente da ciò che i rami γ ivi considerati, per le condizioni a cui vengono assoggettati in relazione alla superficie F, cessano necessariamente di essere lineari.

Per bene intender ciò convien da prima osservare in qual modo si trasformi per successive trasformazioni quadratiche un ramo qualunque di curva algebrica. Sia γ questo ramo, O la sua origine, ν il suo ordine. Nella 1.ª trasformazione quadratica a γ corrisponderà un ramo γ' uscente dal punto O' che corrisponde sul piano ω' alla direzione della tangente t di γ in O. Si vede subito che ω' avrà in O' con γ' un incontro multiplo secondo ν (cioè che ν saranno le intersezioni di γ' con un piano abbastanza prossimo ad ω'). Ne segue che il ramo γ' sarà d'ordine $\nu' \leq \nu$. Per una convenzione, che si giustifica in modo già visto, diremo che sul ramo γ, infinitamente vicino (successivo) al punto O multiplo secondo ν, vi è un punto multiplo secondo ν'. Sarà $\nu' < \nu$ solo quando il piano ω' sia tangente a γ', cioè ne contenga la tangente t'. Considerando le intersezioni di γ coi piani passanti per O e vicinissimi a t, alle quali corrispondono nel 2.° spazio le intersezioni di γ' coi piani passanti pel punto fondamentale A' esterno ad ω' e vicinissimi ad O', si vede che il numero ν' si può anche interpretare come il *rango* del ramo γ (cioè che la tangente t ha con γ un incontro multiplo secondo $\nu+\nu'$); tranne il caso che t' passi pel detto punto fondamentale A', il che esige che sia $\nu'=\nu$ e che il rango di γ superi l'ordine. — In ogni caso, se trasformando γ' con una nuova trasformazione quadratica avente un punto fondamentale in O' si ottiene un ramo γ'' d'ordine ν''; e trasformando ancora questo in modo analogo otteniamo un ramo d'ordine ν'''; e così via: noi diremo che sul ramo primitivo γ, successivi al punto ν-plo O, vi sono punti di multiplicità ν', ν'', ν''',... Si sa (e risulta subito colla projezione da una proposizione nota sui rami di curve piane) che queste multiplicità da un punto in poi sono tutte $=1$.

Ciò premesso, ritorniamo alle considerazioni del n.° 5, e supponiamo che quella tangente t' nel punto s'_i-plo O' della superficie F' che noi vogliamo considerare, ed alla quale si riferisce il carattere s''_{ik}, non sia più esterna al piano ω', come ivi si era supposto, ma invece vi giaccia. Allora volendo che il ramo lineare γ', che pel semplice passare per O vi avrebbe incontro s'_i-punto con F', venga ad avere per tangente la t' e così un incontro con F' multiplo secondo $s'_i+s''_{ik}$, bisognerà che il ramo γ cessi di esser lineare, diventi invece di 2.° ordine (almeno). Non è più possibile dunque, coll'aggiunta di due nuove condizioni, di contatto con t e di una certa osculazione, corrispondenti ai caratteri s'_i e s''_{ik}, ottenere una serie di rami lineari passanti per O ed aventi ivi l'intersezione con F multipla secondo $s+s'_i+s''_{ik}$. Per avere qualcosa di analogo bisogna ricorrere a rami di 2.° ordine (almeno). Mentre un ramo di 2.° ordine uscente da O v'incontra F in generale con multiplicità $2s$, i rami di 2.° ordine che han per tangente t dànno la multiplicità d'intersezione $2s+s'_i$, e quelli che hanno quella certa osculazione che stiamo considerando dànno la multiplicità d'intersezione $2s+s'_i+s''_{ik}$. Si può dire (badando ai corrispondenti rami γ') che tutti questi rami di 2.° ordine hanno comuni oltre al punto O altri due punti successivi. E considerando F diciamo che i caratteri s'_i, s''_{ik} sono le multiplicità per F di due punti successivi ad O tali che per O e per essi non passano rami lineari di curve algebriche (ad esempio non passa un cerchio), mentre passano infiniti rami di 2.° ordine.

Se sulla F' sono successivi su rami lineari γ' il punto O' s'_i-plo, un punto multiplo secondo s''_{ik} nella tangente t' giacente in ω', e poi ancora altri punti di multiplicità s'''_{ikl},..., potremo dire in generale che su F sono successivi su rami di 2.° ordine il punto O e poi punti di multiplicità

s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$ — Però se più di due, successivi, dei punti nominati di F', ad esempio ν successivi di essi, giacciono in ω', sicchè i rami lineari γ' che li contengono hanno in O' incontro ν-punto con questo piano, i corrispondenti rami γ del 1.° spazio verranno ad essere non più del 2.° ordine, ma d'ordine ν. Su F il punto s-plo O ed i punti di multiplicità s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$ (questi in numero di ν almeno) si potranno considerare come successivi su rami di ordine ν (almeno), e non su rami d'ordine minore.

Supponiamo ora invece che su F' il punto O' s'_i-plo e poi dei punti successivi multipli secondo s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$, non stiano su rami lineari, ma invece su rami γ' del 2.° ordine; e sia anzitutto la tangente t' di questi rami esterna al piano ω'. Allora i rami γ corrispondenti del 1.° spazio saranno in generale di 2.° ordine e di 2.° rango; si potrà dire che su F si hanno, come successivi al punto O, dei punti multipli secondo s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$, su rami che non possono essere nè lineari, nè del 2.° ordine e 1.° rango, ma sono in generale di ordine e rango 2, cioè hanno due punti doppi successivi in O e nel punto s'_i-plo. — Se invece la tangente t' dei suddetti rami del 2.° ordine γ' giace in ω', i rami γ saranno in generale del 3.° ordine e di 2.° rango: sicchè il punto O ed i punti multipli successivi secondo s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$, non si potranno più considerare come situati nè su rami lineari, nè su rami del 2.° ordine; ma invece su rami del 3.° ordine (almeno) che oltre ad avere in O il punto triplo hanno nel successivo un punto doppio.

Questi esempi bastano per far vedere come qualunque serie di caratteri s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$, relativa al punto s-plo O di F, ottenuta mediante le successive trasformazioni quadratiche dei n.i 1 e 2, si possa veramente considerare come serie di multiplicità di punti successivi di F situati su convenienti rami di curve algebriche: con l'avvertenza che questi rami possono per il solo fatto del passare per quei punti venire di conseguenza ad avere in essi certe multiplicità ν, ν', ν'', $\nu''', \ldots$ (almeno). — Quanto alla multiplicità d'intersezione in O di F con tali rami, essa si esprime come se quei punti fossero punti multipli distinti, cioè con la formola:

$$\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \nu''' s'''_{ikl} + \cdots$$

Ciò si dimostra subito ammettendo vera la proposizione quando vi è un punto di meno. Se il ramo γ $(\nu, \nu', \nu'', \ldots)$ uscente da O non è tangente ad F la multiplicità della sua intersezione con F è solo νs. Ma se esso si muove in modo che i suoi punti successivi ad O vengano nei punti successivi considerati di F, vale a dire che il corrispondente ramo γ' $(\nu', \nu'', \ldots)$ venga a passare per O' e pei punti successivi considerati di F', $\nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \cdots$ intersezioni di γ' e di F' verranno a cadere in O', e quindi in O cadranno $\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \cdots$ intersezioni di γ e di F.

Scomposizione di alcuni punti singolari.

7. Volendo trattare alcuni esempi di scomposizione di punti singolari, conviene da prima ricordare, per quel che riguarda il carattere s' di una tangente t ad F nel punto s-plo O, cioè la multiplicità s' del punto di F che è successivo ad O su t, che (n.° 1) s' non può superare la multiplicità di t pel cono tangente in O ad F; mentre d'altra parte è evidente dalle cose precedenti che s' non può superare l'eccesso su s della multiplicità d'intersezione di F con t. Dunque: *possono contenere punti multipli di F infinitamente vicini al punto s-plo O solo quelle generatrici del cono d'ordine s tangente ad F in O che sono multiple per questo cono e che in O hanno con F un incontro più che $(s+1)$punto.*

Viceversa se la t è almeno doppia per quel cono tangente, e delle sue intersezioni con F almeno $s+2$ cadono in O, il punto O' di F' a cui essa dà origine (secondo il n.° 1) sarà almeno doppio per la linea c' cioè per la sezione di F' col piano ω' e conterà almeno 2 volte fra le intersezioni di F' con la retta $A'O'$ (esterna ad ω'): e però O' sarà almeno doppio per F'. *Sulla superficie F con punto s-plo O vi è un punto doppio infinitamente vicino a questo su ogni retta che sia doppia pel cono tangente in O ad F ed abbia con questa in O un incontro $(s+2)$punto.* — Se l'equazione della superficie, in coordinate non omogenee, riferita ad O come origine, è:

$$\varphi_s + \varphi_{s+1} + \varphi_{s+2} + \cdots = 0,$$

dove le φ sono forme degli ordini indicati dai loro indici, le rette che contengono i punti doppi di F infinitamente vicini (successivi) ad O saranno quegli elementi doppi di $\varphi_s = 0$ che verificano l'equazione $\varphi_{s+1} = 0$ (*).

(*) Cfr. il n.° 10 ed una nota che vi è annessa.

Nel seguito, per assegnare le singolarità delle sezioni piane di F passanti per la tangente t in O, ci serviremo spesso del fatto che quelle curve han per corrispondenti nella trasformazione quadratica spaziale le sezioni piane di F' passanti per la retta $A'O'$. Così, per mostrar subito un'applicazione di ciò, poniamo che il punto singolare O di F consti di un punto s-plo a cui sia infinitamente vicino un punto doppio nella direzione t,

8. Applicando ciò ai *punti doppi*, abbiamo: perchè ad un punto doppio O di F sia infinitamente vicino nella direzione t un altro punto doppio di F occorre e basta che il cono quadrico tangente in O si spezzi in due piani (distinti o no) passanti per t, e che inoltre questa retta abbia incontro quadripunto con F. Dunque l'insieme di due punti doppi successivi ($s = 2$; $s' = 2$), senz'altra particolarità, è dato dal *punto biplanare il cui asse sia tangente quadripunta.*

Perchè poi infinitamente vicini al punto doppio O di F, in due direzioni distinte t_1, t_2, vi siano altri punti doppi sarà necessario e sufficiente che il cono quadrico tangente in O si riduca al piano di $t_1 t_2$ contato due volte, e che inoltre queste due rette siano tangenti quadripunte. Ora in un punto uniplanare esistono in generale 3 tangenti quadripunte. Dunque: *Un punto uniplanare si può considerare come un punto doppio a cui sono infinitamente vicini in direzioni diverse 3 altri punti doppi* ($s = 2$; $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 2$). *Quando ad un punto doppio siano infinitamente vicini in direzioni distinte altri due punti doppi, ve ne sarà ancora in generale un terzo, e si avrà il punto uniplanare* (*). —

Quest' ultima proposizione è il più semplice esempio di un fatto notevole, cioè che dall'essere su una superficie F infinitamente vicini ad un punto s-plo O alcuni punti multipli può venir di conseguenza l'esistenza su F di altri punti multipli infinitamente vicini ad O. Così dall'esistere sul cono φ_{s+1} (n.° 7) alcune rette doppie del cono φ_s può seguire l'esistenza di altre. Un esempio nuovo è quello di un punto quadruplo di F a cui siano

senz'altra particolarità; cosicchè il punto O' sarà per F' un punto doppio ordinario. Allora fra le sezioni piane di F' passanti per $A'O'$, le quali avranno in generale in O' un nodo, si considerino quelle che passano rispettivamente per le due rette tangenti in O' alla linea c', ed anche quelle che hanno in O' una cuspide e che son date dai due piani tangenti ad F' in O' passanti per A'. Mediante la trasformazione quadratica si ottiene quanto segue. *Le sezioni di F con piani generici condotti per la tangente singolare t passano per O con s rami lineari, due dei quali son tangenti a t; però per ognuno dei due piani tangenti lungo t al cono tangente ad F in O sono tangenti a t un ramo lineare ed un ramo di 2.° ordine (ordinario); e per ciascuno di altri due piani in luogo di due rami lineari tangenti a t si ha un ramo di 2.° ordine e 2.ª classe* (la *classe* intesa nel senso della teoria dei rami di *curve piane*, cioè il *rango* se la curva si considera *nello spazio*).

(*) Applicando, ad esempio, al punto doppio uniplanare l'osservazione contenuta nella nota precedente, abbiamo che, mentre le sezioni piane generiche della superficie condotte per una delle tre tangenti quadripunte hanno in O un tacnodo, vi sono in generale due piani (diversi dal piano tangente) i quali dànno sezioni aventi in O un regresso di 2.ª specie.

infinitamente vicini su altrettante direzioni indipendenti fra loro 5 punti doppi: allora il cono tangente ad F dovrà ridursi al cono quadrico contenente quelle 5 direzioni, contato due volte; e questo conterrà altre 5 tangenti sipunte, sulle quali dunque staranno 5 nuovi punti doppi di F infinitamente vicini al punto quadruplo.

9. Per rappresentare e studiare analiticamente specie particolari di punti singolari convien ricorrere ad una speciale trasformazione quadratica; nella quale, indicando con $(x\,y\,z)$, $(x'\,y'\,z')$ due punti corrispondenti, si ha:

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z' \text{ (*)}. \tag{1}$$

Nel 1.° spazio il punto fondamentale O è nell'origine, il piano ω e la conica fondamentale q giacente in esso sono il piano all'infinito e la retta all'infinito di $z = 0$ contata due volte. Nel 2.° spazio il punto fondamentale A' è il punto all'infinito dell'asse delle z', il piano ω' e la conica fondamentale q' sono il piano $z' = 0$ e la sua retta all'infinito contata due volte. Così ai punti infinitamente vicini ad O nelle varie direzioni corrispondono nel 2.° spazio i punti del piano $z' = 0$; in particolare alle direzioni uscenti da O nel piano $z = 0$ corrispondono i punti all'infinito di $z' = 0$, mentre alla direzione dell'asse Oz corrisponde l'origine O'.

Eseguendo la trasformazione (1) sulla superficie F con punto s-plo in O

$$F \equiv \varphi_s(x\,y\,z) + \varphi_{s+1}(x\,y\,z) + \varphi_{s+2}(x\,y\,z) + \cdots = 0, \tag{2}$$

viene, tolto il fattore z'^s:

$$F' \equiv \varphi_s(x'y'1) + z'\varphi_{s+1}(x'y'1) + z'^2\varphi_{s+2}(x'y'1) + \cdots = 0. \tag{3}$$

I punti di F infinitamente vicini ad O fuori del piano $z = 0$ corrispondono ai punti al finito di F' situati sul piano $z' = 0$, e quindi sulla curva $\varphi_s(x'y'1) = 0$. Se l'asse delle z è tangente in O ad F, il punto di F successivo ad O su di esso corrisponderà al punto O' di F'; sarà allora $\varphi_s(0\,0\,1) = 0$. Il carattere s', cioè la multiplicità per F di quel punto successivo ad O, o la multiplicità di O' per F', si riconoscerà subito sull'equazione (3) di F': si vede così che: *affinchè la superficie F data dall'equazione* (2) *abbia, infinitamente vicino al punto s-plo O, un punto multiplo*

(*) È analoga alla trasformazione quadratica speciale del piano che serve utilmente nell'analisi delle singolarità delle curve piane. — Anche il sig. Kobb nella Memoria citata al n.° 3 ricorre a trasformazioni del tipo della (1).

secondo s' nella direzione dell'asse delle z, occorre e basta che nelle forme φ_s, $\varphi_{s+1}, \ldots, \varphi_{s+s'-1}$ tutti i termini contengano $x\,y$ (complessivamente) almeno ai gradi rispettivi s', $s'-1, \ldots, 1$ (*).

10. Ad esempio, perchè su F, nella direzione dell'asse delle z, infinitamente prossimo al punto s-plo O, vi sia un punto doppio, devono essere φ_s solo di grado $s-2$ (al più) e φ_{s+1} solo di grado s (al più) rispetto alla z. Questo risultato equivale a quello del n.° 7 (**).

Applicandolo ripetutamente, cioè esprimendo per mezzo di esso che sulla superficie F' data da (3) vi è infinitamente vicino al punto doppio O', in una

(*) La superficie F con un'equazione siffatta è pure considerata dal sig. NOETHER in una Nota citata in principio [Götting. Nachrichten 1871, pag. 272, caso b); ove, alla fine della pagina, in luogo di $\nu-1$ si deve leggere $\nu-i$]. Ivi si trova pure applicata una trasformazione quadratica spaziale a quella superficie (e ad altre); ciò allo scopo di determinare l'influenza del punto singolare O sul *genere superficiale.*

(**) Partiamo dall'ipotesi che F abbia un punto s-plo in O ed un punto doppio in un punto dell'asse delle z, cioè in $(0\,0\,\varepsilon)$. Sarà, ordinando le forme φ della (2) secondo le potenze discendenti di z:

$$F \equiv (a z^s + a_1 x z^{s-1} + a_2 y z^{s-1} + \ldots) + (b z^{s+1} + b_1 x z^s + b_2 y z^s + \ldots)$$
$$+ (c z^{s+2} + c_1 x z^{s+1} + c_2 y z^{s+1} + \ldots) + \ldots = 0;$$

e le condizioni relative al punto doppio $(0\,0\,\varepsilon)$, ossia che in questo punto si annullino F e le sue tre prime derivate, daranno:

$$\begin{aligned} a\,\varepsilon^s + b\,\varepsilon^{s+1} + c\,\varepsilon^{s+2} + \ldots &= 0 \\ a_1\varepsilon^{s-1} + b_1\varepsilon^s + c_1\varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0 \\ a_2\varepsilon^{s-1} + b_2\varepsilon^s + c_2\varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0 \\ s\,a\,\varepsilon^{s-1} + (s+1)\,b\,\varepsilon^s + (s+2)\,c\,\varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0\,, \end{aligned}$$

ossia (combinando la 1.ª con la 4.ª, e dividendo per potenze di ε):

$$\begin{aligned} b + 2c\,\varepsilon + \ldots &= 0 \\ a_1 + b_1\,\varepsilon + \ldots &= 0 \\ a_2 + b_2\,\varepsilon + \ldots &= 0 \\ s\,a + (s+1)\,b\,\varepsilon + \ldots &= 0\,. \end{aligned}$$

Facciamo ora avvicinare indefinitamente il punto doppio al punto s-plo O, cioè facciamo tendere ε a zero: al limite avremo le condizioni:

$$a = a_1 = a_2 = b = 0\,,$$

cioè ritroviamo ancora il risultato di sopra.

direzione assegnata, un nuovo punto doppio, e così continuando, si ottengono le equazioni di F in casi di singolarità O sempre più complicate. Così: mantenendo le condizioni precedenti, in seguito a cui O' è punto doppio per F', imponiamo ad F' di avere infinitamente vicino ad O sull'asse delle y' un nuovo punto doppio. Ciò equivarrà a dire che nell'equazione di F' l'insieme dei termini di 2.° grado (cioè l'analogo della forma φ_s relativa ad F) non contiene y', mentre l'insieme dei termini di 3.° grado (analogo di φ_{s+1}) manca del termine in y'^3. Dalle condizioni precedenti per l'equazione (2) e da queste nuove per la (3) segue subito che F sarà del tipo seguente:

$$\left.\begin{aligned} F \equiv [\alpha_0 x^2 z^{s-2} + x z^{s-3} \alpha_2 + z^{s-4} \alpha_4 + z^{s-5} \alpha_5 + \cdots] \\ + [\beta_0 x z^s + z^{s-1} \beta_2 + z^{s-2} \beta_3 + \cdots] + \varphi_{s+2} + \varphi_{s+3} + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

dove le α e le β sono forme binarie in $x\, y$ degli ordini indicati dai loro indici. Osservando che l'asse delle y' su cui abbiam posto il secondo punto doppio di F' sta nell'attuale piano ω' (cioè $z' = 0$), si vede che il caso in cui ora ci troviamo rientra fra quelli considerati al n.° 6: *la superficie* (4) *ha in O un punto singolare composto di un punto s-plo a cui sono infinitamente vicini due punti doppi, per modo che questi tre punti son successivi su rami di 2.° ordine di curve algebriche e non su rami lineari.* Si vede subito o geometricamente oppure con l'equazione (4) che quella singolarità si può anche caratterizzare dicendo che O è un punto s-plo tale che il cono tangente in esso (φ_s) ha una generatrice tacnodale ($O\,z$) lungo cui è toccato dal cono φ_{s+1}. Considerando una tal generatrice come equivalente a due generatrici doppie infinitamente vicine per le quali passi φ_{s+1}, si rende evidente come la singolarità di F in O si possa riguardare come proveniente da un punto s-plo a cui sono infinitamente vicini due punti doppi in direzioni diverse le quali però si avvicinino indefinitamente: con che diventa pure intuitivo il fatto che non esistono rami lineari passanti per quei tre punti.

11. Come altro esempio consideriamo il caso che al punto s-plo O di F siano infinitamente vicini in diverse direzioni *infiniti* punti doppi. Chiamando $\tau_h = 0$ il cono costituito da quelle direzioni, risulta da quanto s'è visto che φ_s conterrà il fattore τ^2_h e φ_{s+1} conterrà il fattore τ_h: onde l'equazione della superficie F sarà del tipo:

$$F \equiv \tau^2_h(x\,y\,z) \cdot \psi_{s-2h}(x\,y\,z) + \tau_h(x\,y\,z) \cdot \psi_{s-h+1}(x\,y\,z) + \varphi_{s+2}(x\,y\,z) + \cdots = 0. \quad (5)$$

Con la trasformazione quadratica speciale del n.° 9 la superficie trasformata F' sarà:

$$F' \equiv \tau^2_h(x'y'1) \cdot \psi_{s-2h}(x'y'1) + z'\tau_h(x'y'1) \cdot \psi_{s-h+1}(x'y'1) + z'^2 \varphi_{s+2}(x'y'1) + \cdots = 0,$$

ed avrà, in corrispondenza ai punti doppi di F' successivi ad O, la linea doppia:

$$z' = 0, \qquad \tau_h(x'\,y'\,1) = 0.$$

I punti notevoli per F' su questa linea sono i punti *cuspidali* (cfr. n.° 13); i quali, come subito si vede, son determinati sulla linea dall'equazione:

$$\psi^2_{s-h+1}(x'\,y'\,1) - 4\,\psi_{s-2h}(x'\,y'\,1) \cdot \varphi_{s+2}(x'\,y'\,1) = 0,$$

e però sono in numero di $2h(s-h+1)$. Ognuno di essi ha (come vedremo, n.° cit.°) infinitamente vicino, fuori della linea doppia, *un* punto doppio di F'. Dunque risalendo alla F concludiamo: *se la superficie F ha un punto singolare composto di un punto s-plo a cui è infinitamente vicina una linea doppia infinitesima d'ordine h [sicchè l'equazione di F sia del tipo* (5)], *essa avrà poi ulteriormente, infinitamente vicini a questa, altri $2h(s-h+1)$ punti doppi.*

Le direzioni di questi punti doppi di F sarebbero date da:

$$\tau_h = 0, \qquad \psi^2_{s-h+1} - 4\,\psi_{s-2h} \cdot \varphi_{s+2} = 0.$$

Scomparirebbero quando tra le forme che entrano nell'equazione (5) avesse luogo un'identità del tipo:

$$\psi^2_{s-h+1} - 4\,\psi_{s-2h} \cdot \varphi_{s+2} = \tau_h \cdot \psi_{2s-3h+2}.$$

Allora sulla superficie F' la linea doppia considerata diverrebbe una linea cuspidale; i suoi punti generici non avrebbero per successivi nuovi punti doppi di F': ciò accadrebbe solo per certi punti singolari di cui ci occuperemo fra poco (*punti chiusi*, n.° 17).

Applicazioni a varie specie di punti doppi.

12. Esaminiamo ora in particolare alcuni casi speciali di punti doppi.

Per quanto riguarda la composizione dei *punti biplanari* non aggiungeremo nulla a quanto già s'è accennato al n.° 8. Osserveremo solo che quando, per effetto di una 1.ª trasformazione quadratica, si passa dal punto biplanare O di F ad un punto doppio O' di F', questo dovrà essere necessariamente nell'incrocio delle due rette distinte che costituiscono in questo caso la linea c'; e se pure su F' vi è un punto doppio successivo ad O', la sua direzione sarà certo esterna al piano ω'. Facendo una 2.ª trasformazione quadratica per O' di F', e così via, vediamo che *un punto biplanare può risultare composto di un numero qualunque k di punti doppi, i quali però si potranno sempre congiungere con un ramo lineare di curva algebrica* (nè potranno essere uniplanari, tacnodi, ecc.) (*). —

Prendiamo in esame i *punti uniplanari*, pei quali s'è già vista al n.° 8 la composizione che hanno in generale. Partiamo dall'equazione di una superficie F avente in O un punto uniplanare, col piano tangente $x=0$ e coll'asse delle z per una delle 3 tangenti quadripunte che vi sono in generale; sicchè su quest'asse stia un punto doppio di F successivo ad O. Sarà:

$$\left.\begin{aligned} F \equiv a\,x^2 &+ [(a_1 x + a_2 y)\,z^2 + (a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2)\,z + \alpha_3] \\ &+ [b\,z^4 + (b_1 x + b_2 y)\,z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4] \\ &+ [c\,z^5 + \gamma_1 z^4 + \gamma_2 z^3 + \cdots] + \varphi_6(x\,y\,z) + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove le α, β, γ sono forme binarie in $x\,y$ degli ordini indicati dai loro indici. Con la trasformazione quadratica speciale (n.° 9) otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} F' \equiv a\,x'^2 &+ z'\,[a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 x' y' + a_5 y'^2 + \alpha'_3] \\ &+ z'^2\,[b + b_1 x' + b_2 y' + \beta'_2 + \beta'_3 + \beta'_4] \\ &+ z'^3\,[c + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \cdots] + z'^4\,\varphi_6(x'\,y'\,1) + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove α'_3 sta per $\alpha_3(x'\,y')$, ecc. Una prima particolarità si può introdurre rendendo biplanare il punto doppio O' di F'. Si vede subito sull'equazione (2) (tenendo conto che essenzialmente è $a \neq 0$) che la condizione perchè ciò accada è

$$a_2 = 0: \quad (3)$$

e questa equivale a dire, come si vede sulla (1), che nell'asse delle z coincidono due delle 3 tangenti quadripunte di F in O. La coppia di piani tan-

(*) Cfr. Rohn «*Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte*», Math. Ann., tom. 22, 1883. In questo lavoro vengono anche considerati i punti biplanari ed uniplanari superiori come equivalenti a più punti doppi infinitamente vicini; non però con l'applicazione di trasformazioni quadratiche, ma invece mediante la considerazione delle singolarità che quei punti producono nel cono circoscritto alla superficie da un punto generico (v. nel seguito del presente scritto il n.° 23), ecc.

genti ad F' nel punto biplanare O' è data da:

$$a\,x'^2 + a_1\,x'\,z' + b\,z'^2 = 0, \tag{4}$$

ed ha per asse l'asse delle y', il quale giace su F': ne segue che F' ha su questa retta un secondo punto doppio infinitamente vicino ad O'. Abbiamo così che: *quando per un punto uniplanare O di F due delle 3 tangenti quadripunte coincidono (e solo allora), due dei 3 punti doppi che in generale son successivi ad O in direzioni diverse (n.° 8) vengono ad essere successivi l'uno all'altro in una stessa direzione, essendo congiunti ad O mediante rami di 2.° ordine; la composizione di O diventa:*

$$(s = 2\,; \qquad s'_1 = s'_2 = 2\,; \qquad s''_1 = 2).$$

Come si vede, questo caso si ottiene per $s = 2$ dal caso che nel n.° 10 era rappresentato dall'equazione (4).

13. Se su una superficie F vi è una linea doppia (nodale), e s'indica con O un *punto cuspidale* (*pinch-point*; *point-pince*) di F appartenente a quella linea, cioè un punto di questa pel quale i due piani tangenti ad F coincidano, si vede subito che il punto O come punto uniplanare presenterà la particolarità del caso precedente. Invero nel piano tangente ad F in O la curva sezione di F avrà in O un punto triplo con due tangenti coincidenti nella tangente alla linea doppia, e quindi rimarrà oltre a quella solo una tangente quadripunta (*). La stessa cosa si vedrebbe pure con la trasformazione quadratica, perchè questa porta ad un punto O' di F' che è in generale biplanare, perchè sta su una linea doppia di F'. Dunque: *un ordinario punto cuspidale di una superficie, su una linea doppia di questa, ha infinitamente vicino, oltre ai punti di questa linea, un punto doppio della superficie (in direzione diversa da quella della linea doppia).*

14. Ritornando al caso del n.° 12, se supponiamo che non solo due ma tutte 3 le tangenti quadripunte di F in O coincidano nell'asse delle z, il che equivale a porre, oltre la condizione (3), la:

$$a_5 = 0, \tag{5}$$

avremo che il punto O' di F' si comporrà di tre punti doppi successivi si-

(*) Cfr., ad esempio, Zeuthen « *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques* », Math. Ann. X, 1876, pag. 468 e seg.[1]

tuati sull'asse delle y'. *Quando per un punto uniplanare le tre tangenti quadripunte coincidono in una, al punto stesso sono infinitamente vicini altri 3 punti doppi della superficie (successivi) situati con quello su rami del 3.º ordine (e di 2.ª classe); la composizione del punto uniplanare diventa:*

$$(s=2;\quad s'=2;\quad s''=2;\quad s'''=2).$$

15. Otteniamo un altro caso più particolare di quello del n.º 12 imponendo ad O' di essere uniplanare per F'. Ritornando alla equazione (4) della coppia di piani tangenti ad F' nel punto biplanare O', avremo che essi coincidono nel piano:

$$z'-\lambda x'=0, \tag{6}$$

se si ha:

$$a=b\lambda^2,\qquad a_1=-2b\lambda. \tag{7}$$

In tali ipotesi e conservando sempre, s'intende, la condizione (3), si trova che l'intersezione di F' col piano (6) si spezza nell'asse delle y' ed una linea con punto doppio in O' e con le tangenti soddisfacenti all'equazione:

$$(a_3+b_1\lambda+c\lambda^2)x'^2+(a_4+b_2\lambda)x'y'+a_5y'^2=0. \tag{8}$$

Di qui si vede che il punto uniplanare O' di F' avrà in generale 3 tangenti quadripunte distinte, e quindi su F' vi saranno 3 punti doppi infinitamente vicini ad O' in 3 direzioni diverse, una delle quali è l'asse delle y'. Dunque la composizione del punto uniplanare O di F nel caso particolare attuale è espressa da:

$$(s=2;\qquad s'_1=s'_2=2;\qquad s''_{11}=s''_{12}=s''_{13}=2):$$

e precisamente: su una tangente quadripunta si ha un punto doppio successivo ad O $(s'_2=2)$; sull'altra (che conta doppiamente) se ne ha un altro $(s'_1=2)$, il quale a sua volta ne ha altri 3 per successivi su 3 sistemi diversi di rami osculatori fra loro, tangenti a quella retta: 2 di quei sistemi essendo lineari ed uno di rami del 2.º ordine. L'equazione di F in questo caso, tenendo conto delle condizioni (3) e (7) che lo caratterizzano, prende la forma:

$$\left.\begin{aligned}F\equiv b(z^2-\lambda x)^2+[\alpha_2 z+\alpha_3]+[\beta_1 z^3+\beta_2 z^2+\cdots]\\ +\varphi_5(xyz)+\varphi_6(xyz)+\cdots=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Se però si annullasse la costante a_5, cioè (n.º 14) se coincidessero tutte 3 le tangenti quadripunte in O, si vedrebbe — ricorrendo all'equazione di F' ed applicando al punto O' di questa quanto ora s'è fatto per la F e pel suo punto O — che F' ha (nella direzione dell'asse delle y' in cui coincidono due delle 3 tangenti quadripunte ad F' in O') infinitamente vicino ad O' un ulteriore punto uniplanare (a tangenti quadripunte distinte). Per conseguenza la composizione del punto singolare O di F sarebbe data allora da questi altri caratteri:

$$(s=2; \qquad s'=2; \qquad s''_1=s''_2=2; \qquad s'''_{11}=s'''_{12}=s'''_{13}=2).$$

Ecc., ecc.

Seguito. Tacnodi e punti doppi superiori.

16. Nei casi precedenti avevamo sempre un numero finito di punti doppi infinitamente vicini al punto doppio O. Esaminiamo ora alcuni casi in cui se ne abbiano *infiniti.*

Se essi sono *in direzioni diverse*, le sezioni piane generiche di F passanti per O avranno in questo punto un tacnodo (od una singolarità superiore): il punto O sarà per F un *punto di contatto di due falde*, o più brevemente un *tacnodo*. Sulla superficie F' saranno imagini di O gl'infiniti punti di una *retta doppia.* Siamo insomma in quel caso particolare del n.° 11 che corrisponde ad $s=2$, $h=1$; e possiamo quindi applicare quanto ivi s'è detto. L'equazione di F sarà del tipo:

$$F \equiv x^2 + x\psi_2 + \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots = 0, \tag{1}$$

essendo $x=0$ il piano tangente, ψ_2 una forma quadratica, ecc. *Il tacnodo si compone di un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, la quale poi ha ancora per successivi 4 nuovi punti doppi.* Le direzioni di questi ultimi son date dalle 4 *tangenti singolari*:

$$x=0, \qquad \psi_2^2 - 4\varphi_4 = 0, \tag{2}$$

(le quali non van confuse con le 4 *tangenti quipunte*:

$$x=0, \qquad \varphi_4 = 0).$$

La composizione del tacnodo è dunque espressa in generale da:

$$(s=2; \qquad \textit{retta } s'=2; \qquad s''_1=s''_2=s''_3=s''_4=2) \; (*).$$

(*) Qui e nel seguito, quando si scrive simbolicamente la composizione di un punto multiplo, si indicano quali caratteri s rappresentino multiplicità di *linee infinitesime*, e per gli altri caratteri si sottintende che si riferiscono a *punti.*

Le sezioni piane di F per O ed in particolare per una tangente singolare corrispondono a sezioni piane di F' (per A'), in particolare per un punto cuspidale (n.° 11). Tenendo conto che questo ha infinitamente vicino, fuori della retta doppia, un altro punto doppio di F' (n.° 13) si conchiude quanto segue. Le sezioni piane generiche della superficie F pel punto O hanno ivi un tacnodo; quelle condotte per una tangente singolare hanno un regresso di 2.ª specie; infine per ogni tangente singolare passa un piano che dà una sezione dotata di osenodo (contatto tripunto di due rami lineari): è il piano osculatore comune ai rami lineari che contengono O, un punto della retta doppia e poi uno dei 4 punti doppi successivi a questa (*).

17. Un caso particolare di tacnodo, che va subito segnalato, è il così detto *punto chiuso (close-point; point-clos) su una linea cuspidale* (**). È questo un punto della linea cuspidale tale che la sezione della superficie col piano tangente in esso vi ha un punto quadruplo, o, ciò che è lo stesso, tale che le sezioni piane generiche per esso vi hanno un tacnodo anzi che una cuspide. Rientra dunque veramente nella classe dei tacnodi di superficie. Però quando si cercano le tangenti singolari in esso (nel senso sopra definito) si trova che 3 di esse vengono a coincidere nella tangente alla linea cuspidale, sicchè rimane una sola distinta da quella. Dunque: *un punto chiuso di una superficie, su una linea cuspidale di questa, ha infinitamente vicini, oltre ai punti di questa, una retta doppia infinitesima, e poi, come successivo a questa, ancora un punto doppio.*

18. Una singolarità superiore al tacnodo si ha in un *punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un regresso di 2.ª specie.* È chiaro che si otterrà dal tacnodo rendendo indeterminate le tangenti singolari (le quali fornivano appunto le sezioni piane con regressi di 2.ª specie, ed eran date dalle equazioni (2)). Dunque:

$$\psi_2^2 - 4\,\varphi_4 \equiv x\,\psi_3\,;$$

e sostituendo nella (1), diventa (con lievi cambiamenti di notazione):

$$F \equiv (x + \psi_2)^2 + x\,\psi_3 + \varphi_5 + \varphi_6 + \cdots = 0. \qquad (3)$$

(*) Cfr. pei punti doppi di superficie del tipo (1) il lavoro del sig. Zeuthen, Math. Ann. IX, 1876, pag. 321.

(**) Cfr., ad esempio, Zeuthen, Math. Ann. X, pag. 479 e seg.

Per veder bene la composizione di questa singolarità applichiamo ad F la trasformazione quadratica speciale. Verrà:

$$F' \equiv (x' + z' \psi'_2)^2 + x' z'^2 \psi'_3 + z'^3 \varphi'_5 + z'^4 \varphi'_6 + \cdots = 0,$$

scrivendo per brevità ψ'_2 in luogo di $\psi_2(x' y' 1)$, ecc. La superficie F' ha l'asse delle y' per retta cuspidale. Segandola col piano:

$$z' = \lambda x'$$

si ha come sezione quella retta, contata due volte, e poi la linea:

$$(1 + \lambda \psi'_2)^2 + \lambda^2 x' \psi'_3 + \lambda^3 x' \varphi'_5 + \lambda^4 x'^2 \varphi'_6 + \cdots = 0, \tag{4}$$

la quale tocca la retta stessa nei due punti:

$$x' = z' = 0, \qquad 1 + \lambda \psi'_2 = 0. \tag{5}$$

Ne segue che quel piano è il piano tangente ad F' in ciascuno di questi due punti; e che un punto generico della retta cuspidale è un punto uniplanare a cui non sono infinitamente vicini altri punti doppi di F' che quelli della retta cuspidale (fatto che vale per tutte le ordinarie linee cuspidali). Volendo avere i punti eccezionali, vale a dire i *punti chiusi* di quella retta (n.° 17), basterà scrivere che uno dei punti (5) è doppio per la linea (4); il che nel caso attuale si riduce a derivare la (4) rispetto ad x'. Si ha così, tenendo conto delle (5):

$$\psi'_3 + \lambda \varphi'_5 = 0; \tag{6}$$

ed eliminando λ:

$$x' = z' = 0, \qquad \varphi'_5 = \psi'_2 \psi'_3; \tag{7}$$

sicchè sono 5 questi punti chiusi. Applicando ora quanto sappiamo sulla composizione dei punti chiusi, e poi ritornando alla superficie F, concludiamo: *Un punto di una superficie, il quale sulle sezioni piane generiche passanti per esso sia un regresso di 2.ª specie, vale a dire un punto rappresentato dall'equazione* (3), *si compone in generale di un punto doppio, a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, sulla quale stanno* 5 *punti, ognun dei quali ha a sua volta per successiva una retta doppia infinitesima a cui è successivo un ulteriore punto doppio: ossia*

$$(s = 2;\ \textit{retta}\ s' = 2;\ \textit{rette}\ s''_1 = \cdots = s''_5 = 2;\ s'''_1 = \cdots = s'''_5 = 2).$$

Le 5 *tangenti singolari*, cioè quelle che segnano le direzioni dei 5 punti doppi nominati, son date, in forza delle (7), da:

$$x = 0, \qquad \varphi_5 = \psi_2 \psi_3, \tag{8}$$

e son caratterizzate da ciò, che le sezioni piane passanti per esse hanno in generale un oscnodo. Vi è poi per ogni tangente singolare un piano che dà una sezione dotata di un regresso di 3.ª specie.

19. *Un punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un oscnodo* si otterrà dal caso precedente rendendo indeterminate le tangenti singolari (8), ossia ponendo:

$$\varphi_5 \equiv \psi_2 \psi_3 + x \psi_4 ;$$

con ciò l'equazione (3) diventa:

$$F \equiv (x + \psi_2)(x + \psi_2 + \psi_3) + x \psi_4 + \varphi_6 + \cdots = 0. \tag{9}$$

La superficie trasformata sarà:

$$F' \equiv (x' + z' \psi'_2)(x' + z' \psi'_2 + z'^2 \psi'_3) + x' z'^3 \psi'_4 + z'^4 \varphi'_6 + \cdots = 0, \tag{10}$$

ed avrà l'asse delle y' per *retta tacnodale*, cioè luogo di tacnodi. Però su questa retta vi saranno dei punti eccezionali, i quali sulle sezioni piane generiche di F' passanti per essi non sono solo tacnodi ma bensì regressi di 2.ª specie: punti di cui abbiamo trattato nel precedente n.° 18. Si posson cercare o coll'applicare l'equazione (3) ivi trovata dopo d'aver trasportata l'origine O' sull'asse delle y'; od anche solo cercando fra le sezioni $y' =$ cost. di F' quelle che hanno nel punto d'incontro con quell'asse un regresso di 2.ª specie. Il calcolo, in ambi i modi, si fa senza difficoltà e conduce ai 6 punti seguenti:

$$x' = z' = 0, \qquad \varphi'_6 = \psi'_2 \psi'_4 + \frac{1}{4} \psi'^2_3 .$$

Si verifica inoltre che in ciascuno di questi punti 4 delle 5 tangenti singolari nel senso del n.° 18 vengono a coincidere nell'asse delle y', sicchè ne rimane solo una diversa da quest'asse (*). Invece per un punto generico di quest'asse, che quindi è per F' un tacnodo nel senso del n.° 16, si verifica che le 4 tangenti singolari ivi considerate coincidono tutte nell'asse. Applicando dunque le cose viste nei n.ⁱ 16 e 18 sulla composizione di quei punti singolari e poi risalendo alla superficie F concludiamo: *Un punto singolare*

(*) Questo fatto è l'analogo di quello già osservato per le tangenti singolari in un punto uniplanare di una linea doppia (punto *cuspidale*, n.° 13), ed in un tacnodo di una linea cuspidale (punto *chiuso*, n.° 17).

di una superficie, tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un oscnodo, vale a dire che corrisponda all'equazione (9) *della superficie, è composto come segue: un punto doppio; poi per successiva a questo una retta doppia infinitesima; un punto generico di questa ha per successiva una retta doppia infinitesima, senz'altro; ma vi sono sulla prima retta* 6 *punti particolari, ognun dei quali ha per successiva una retta doppia infinitesima su cui sta un punto che ha per successiva una retta doppia infinitesima a cui è successivo un ulteriore punto doppio; ossia:*

$$(s=2;\qquad \textit{retta } s'=2;\qquad \text{infinite } \textit{rette } s''=2;$$
$$\textit{rette } s'''_1=\cdots=s'''_6=2;\qquad s^{\mathrm{IV}}_1=\cdots=s^{\mathrm{IV}}_6=2).$$

Per la superficie rappresentata dall' equazione (9) le 6 *tangenti singolari* in O, cioè tangenti che dànno le direzioni dei 6 punti particolari suddetti, sarebbero rappresentate da:

$$x=0\,,\qquad \varphi_6=\psi_2\,\psi_4+\frac{1}{4}\psi_3^2\,; \tag{11}$$

le sezioni piane passanti per esse hanno regressi di 3.ª specie, ecc.

20. Rendendo indeterminate quelle rette (11) si ottiene un *punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi hanno un regresso di 3.ª specie:* la corrispondente equazione della superficie è (modificando ψ_3 e φ_7):

$$F\equiv(x+\psi_2+\psi_3)(x+\psi_2+\psi_3+\psi_4)+x\psi_5+\varphi_7+\cdots=0. \tag{12}$$

Non stiamo più ad esaminarne espressamente la composizione perchè dalle cose esposte precedentemente la si può prevedere. Si osservino in fatti e si confrontino fra loro le composizioni che abbiamo trovato ai n.ⁱ 8, 16, 18, 19 pei punti doppi uniplanari nei casi in cui per le sezioni piane generiche passanti per essi siano rispettivamente: regresso di 1.ª specie, tacnodo, regresso di 2.ª specie, oscnodo; e si prevederà subito quale è la legge generale per la *composizione di un punto singolare di una superficie tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un punto doppio abbassante la classe della curva piana di i unità.* I quattro casi citati corrispondevano ad $i=3$, 4, 5, 6. E come in questi abbiamo sempre trovato appunto *i tangenti singolari*, tali cioè che per le sezioni piane passanti per una di esse il punto doppio abbassa di $i+1$ unità la classe; così questo fatto vale in generale. Ciò si può dimostrare assai brevemente (quantunque in modo meno perfetto di quello seguìto nei quattro casi particolari suddetti) considerando il cono circoscritto alla superficie da un punto qualunque P: dall'ipotesi fatta sulla singolarità del punto O nelle sezioni piane di F che lo contengono, segue che quel cono avrà la retta PO per generatrice i-pla; e però vi saranno i piani (tangenti al cono lungo PO) uscenti da P e tali che nella sezione da essi fatta su F il punto O abbassa di $i+1$ unità la classe. Questi piani daranno le i tangenti singolari di F in O.

21. Fin qui, dal n.° 16 in poi, la singolarità della superficie F in O si componeva (in primo luogo) di infiniti punti doppi infinitamente vicini ad O *in direzioni diverse.* Possiamo facilmente ottenere che gl'infiniti punti doppi siano tutti infinitamente vicini ad O *in una stessa direzione* t, facendo, per così dire, *accumulare nella direzione t la singolarità* di uno qualunque dei punti esaminati nei numeri precedenti. Basta perciò, ritornando all'equazione (1) del n.° 12 relativa ad una superficie F con punto uniplanare O, ed all'equazione (2) della sua trasformata F', imporre a questa seconda equazione di assumere una delle forme che abbiamo visto caratterizzare il tacnodo, o gli altri punti singolari superiori. Allora gl'infiniti punti doppi di F' infinitamente vicini ad O' nelle varie direzioni daranno infiniti punti doppi per F infinitamente vicini ad O nella direzione che corrisponde ad O' (al citato n.° 12, la direzione dell'asse delle z), su diversi sistemi di rami.

Limitiamoci al 1.° caso, quello che O' sia un tacnodo per F'. Già nel n.° 15 avevamo scritto che O' è uniplanare col piano tangente

$$z' = \lambda x':$$

trovavamo le condizioni:

$$a = b\lambda^2, \quad a_1 = -2b\lambda, \quad a_2 = 0.$$

Dobbiamo solo aggiungere che l'equazione (8) del detto n.° 15, la quale dava le tangenti singolari nel detto punto uniplanare, diventa un'identità; cioè:

$$a_3 + b_1\lambda + c\lambda^2 = 0, \quad a_4 + b_2\lambda = 0, \quad a_5 = 0.$$

Da tutte queste condizioni ricavando i valori delle a e sostituendoli nella (1) del n.° 12 [od anche nella (9) del n.° 15] si ha (con un mutamento di b_1):

$$\left.\begin{aligned} F \equiv b(z^2-\lambda x)^2 + z(z^2-\lambda x)(cz^2+b_1x+b_2y) + \alpha_3 \\ + (\beta_2 z^2+\beta_3 z+\beta_4) + (\gamma_1 z^4+\gamma_2 z^3+\cdots+\gamma_5) + \varphi_6(xyz) + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

dove convien ricordare che le α, β, γ son forme binarie in xy; ecc. Se poi si forma per questo caso l'equazione di F', si verifica che delle 4 tangenti singolari (n.° 16) nel suo tacnodo O' una sola, in generale, cade nell'asse delle y' (e quest'asse contiene tre punti doppi successivi di F', cioè dopo O' ed un punto della retta doppia infinitesima ancora un terzo punto doppio di F'). Possiamo dunque dire: *La superficie* (13) *ha in* O *un punto uniplanare, che sulle sezioni piane generiche passanti per esso costituisce una cuspide ordinaria e non un tacnodo; ma che ciò nondimeno si può considerare come un punto doppio a cui è infinitamente vicino un tacnodo della superficie. Più precisamente la composizione di quel punto singolare è questa: un punto doppio; poi, per successivo, un altro punto doppio; poi una retta doppia infinitesima; ed infine 4 punti doppi:*

$$(s = 2;\ s' = 2;\ \textit{retta}\ s'' = 2;\ s'''_1 = \cdots = s'''_4 = 2).$$

Va aggiunto che mentre si posson congiungere con rami lineari i due primi punti doppi (s, s') con uno qualunque dei tre s'''_2, s'''_3, s'''_4 (ad esempio), passando per un certo punto della retta doppia s'', occorrono invece rami del 3.° ordine (e 2.ª classe) per congiungere i punti s, s', s'''_1, passando per un certo punto della retta doppia s''. — La retta congiungente i primi due punti doppi s, s' è (l'asse delle z, cioè) l'unica tangente quadripunta del nostro punto uniplanare. I piani passanti per essa dànno sezioni di F aventi in O un oscnodo; tranne il piano tangente che dà in O un ramo di 3.° ordine; e altri tre piani i quali dànno un regresso di 3.ª specie.

Sull'abbassamento della classe prodotto dai punti singolari. Singolarità delle prime polari.

22. Il metodo delle successive trasformazioni quadratiche, con le quali si analizza un punto singolare di una superficie algebrica F, può anche servire a determinare l'influenza che sulla classe di F ha quel punto singolare. A tal fine si può ricorrere, ad esempio, alla considerazione del cono Γ circoscritto ad F da un punto *generico* P dello spazio: la classe di F coincide con la classe di Γ, sicchè la determinazione di cui si tratta si può ridurre alla ricerca dell'influenza che sulla classe di Γ hanno le generatrici di questo cono che vanno ai punti singolari di F. Per altro, prima di dare un cenno di questa seconda questione, è bene rilevare in che differiscano le due *influenze* nominate, e quando è che coincidono.

Supponiamo che la superficie F, d'ordine n, sia priva di linee multiple, ma abbia nei punti $O, \ldots$ singolarità qualunque. Il cono circoscritto Γ sarà d'ordine $n(n-1)$, avrà generatrici singolari nelle rette che vanno dal vertice P a quei punti, e inoltre avrà delle generatrici doppie ordinarie (nodali) e delle generatrici stazionarie ordinarie (cuspidali) rispettivamente nelle bitangenti e nelle tangenti principali di F uscenti da P. — Ricordiamo come si ottengano quelle bitangenti (*) e tangenti principali. Siano $(y_1 \ldots y_4)$ le coordinate omogenee di P, $(x_1 \ldots x_4)$ quelle di un punto di contatto di F con una bitangente passante per P. Sarà anzitutto

$$F = 0, \qquad \Delta F = 0, \tag{1}$$

ove per brevità rappresentiamo con F il risultato della sostituzione delle coordinate x nel 1.° membro dell'equazione di F, e con ΔF la forma polare 1.ª di F rispetto alle y. Di più l'equazione $F(\lambda x + \mu y) = 0$, la quale, in forza delle (1), tolta la radice doppia $\mu = 0$, si riduce a

$$\frac{1}{2} \lambda^{n-2} \Delta^2 F + \frac{1}{6} \lambda^{n-3} \mu \Delta^3 F + \frac{1}{24} \lambda^{n-4} \mu^2 \Delta^4 F + \cdots = 0, \tag{2}$$

dovrà avere ancora una radice doppia; ossia dovrà annullarsi il discriminante della forma (2) in λ, μ

$$\mathbf{D}(\Delta^2 F, \Delta^3 F, \Delta^4 F, \ldots) = 0. \tag{3}$$

I punti di contatto di F con le bitangenti (propriamente dette) passanti per P risultano così, come le intersezioni, fuori dei punti singolari $O, \ldots$, delle tre superficie rappresentate dalle equazioni (1) e (3) in cui si considerino le x come variabili. Riguardo alla (3) conviene osservare che dall'espressione nota del discriminante di una forma binaria segue subito che la (3) è una superficie d'ordine $(n-2)(n-3)$. Inoltre se la F ha nel punto $(0\,0\,0\,1)$ la multiplicità s, sicchè nella forma F l'insieme dei termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ sia dato dalla forma ternaria φ_s d'ordine s (cono tangente ad F in quel punto), nelle forme polari $\Delta^2 F$, $\Delta^3 F, \ldots$, $\Delta^s F$ i termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ saranno evidentemente $\Delta^2 \varphi_s$, $\Delta^3 \varphi_s, \ldots$, $\Delta^s \varphi_s$ (le quali si riducono a polari ternarie, rispetto ad $y_1 y_2 y_3$), mentre le $\Delta^{s+1} F$, $\Delta^{s+2} F, \ldots$ conterranno termini privi di $x_1 x_2 x_3$. Tenendo conto di ciò si può dimostrare

(*) Cfr. i n.[i] 16 e 20 della « *Analytische Geometrie des Raumes,* II. *Theil* » di Salmon (Fiedler).

che nella (3) i termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ saranno dati, a meno di un fattore indipendente da queste variabili, dal discriminante dell'equazione

$$\frac{1}{2}\lambda^{s-2}\Delta^2\varphi_s + \frac{1}{6}\lambda^{s-3}\mu\Delta^3\varphi_s + \frac{1}{24}\lambda^{s-4}\mu^2\Delta^4\varphi_s + \cdots = 0, \qquad (2')$$

ossia da

$$\mathbf{D}(\Delta^2\varphi_s,\ \Delta^3\varphi_s,\ \Delta^4\varphi_s, \ldots) \qquad (3')$$

e saranno quindi d'ordine $(s-2)(s-3)$. Questa è dunque in generale la multiplicità per la superficie (3) di un punto che sia s-plo per la F; e la (3') ne darà il cono tangente in questo punto. — Quanto alle tangenti principali (propriamente dette) di F passanti per P, i loro punti di contatto sono le intersezioni, fuori dei punti singolari $O, \ldots$, delle superficie (1) e

$$\Delta^2 F = 0. \qquad (4)$$

Se nella superficie F mancassero i punti singolari $O, \ldots$, risulterebbe così che il cono Γ d'ordine $n(n-1)$ ha $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ generatrici doppie ordinarie e $n(n-1)(n-2)$ generatrici stazionarie ordinarie; e quindi, applicando la nota formola, che la sua classe è $n(n-1)^2$: tale risulterebbe la classe della *superficie generale d'ordine n.* La presenza del punto singolare O ha questo effetto: che la generatrice PO del cono Γ produce per sè stessa un certo abbassamento I nella classe di Γ; mentre d'altra parte fra le $n(n-1)(n-2)(n-3)$ intersezioni delle superficie (1) e (3) un certo numero $2D$ vengono assorbite da O, onde il suddetto numero di generatrici doppie ordinarie di Γ subisce una diminuzione di D unità; e fra le $n(n-1)(n-2)$ intersezioni delle superficie (1) e (4) un certo numero R vengono assorbite da O, onde il numero delle generatrici stazionarie ordinarie di Γ si riduce di R unità. Dunque il punto singolare O abbassa la classe $n(n-1)^2$ della superficie F di

$$I - 2D - 3R$$

unità.

Se O è un punto s-plo ordinario per F, la retta PO è multipla secondo $s(s-1)$ pel cono Γ, sicchè l'abbassamento che essa produce nella classe di Γ è $I = s(s-1)(s^2-s-1)$. Le superficie (1) e (3) hanno in O le multiplicità s, $s-1$, $(s-2)(s-3)$, onde $2D = s(s-1)(s-2)(s-3)$; e similmente si ha $R = s(s-1)(s-2)$. Segue $I - 2D - 3R = s(s-1)^2$: abbassamento della classe prodotto dal punto s-plo ordinario.

Se il punto s-plo viene ad avere una singolarità qualunque per F, possono accrescersi tanto I quanto D ed R: per conseguenza il calcolo dell'influenza di O sulla classe di F, fatto secondo questo procedimento, non viene a ridursi soltanto a quello dell'influenza I della generatrice $P\,O$ sulla classe del cono circoscritto Γ, ma esige anche i calcoli dei numeri D ed R. Vi sono però dei casi in cui, pur essendo la singolarità di F in O d'indole elevata, i numeri $2\,D$ ed R conservano i valori scritti dianzi pel caso del punto s-plo ordinario; sicchè tutta l'influenza di quella singolarità superiore sulla classe di F si riduce appunto all'influenza che essa ha sul numero I. È facile determinare quei casi: basta ricordare le definizioni che abbiam dato di quei numeri $2\,D$ ed R, ed applicare la nota proposizione che un punto O comune a tre superficie conta nel numero complessivo delle loro intersezioni più di quanto è indicato dal prodotto delle multiplicità che le superficie hanno in O solo quando queste abbiano in O una tangente (almeno) comune (*). Quindi affinchè il numero $2\,D$ delle intersezioni in O delle superficie (1) e (3) superi il prodotto $s\,(s-1)\,(s-2)\,(s-3)$ dovranno queste superficie aver comune una tangente in O. Ora i coni tangenti in O alle (1) son rappresentati da

$$\varphi_s = 0, \qquad \Delta\,\varphi_s = 0\,; \tag{1'}$$

ed il cono tangente alla superficie (3) è rappresentato, come abbiam detto, dal discriminante (3') dell'equazione (2'), cioè dell'equazione $\varphi_s(\lambda\,x+\mu\,y)=0$ nella quale le x verifichino le (1') e sia soppressa la soluzione doppia $\mu=0$. L'esistenza di una generatrice t comune a quei tre coni, ossia di una soluzione $(x_1\,x_2\,x_3)$ comune per le tre forme ternarie (1') e (3'), significa dunque che nella stella O il piano delle due rette $t\,(x_1\,x_2\,x_3)$, $O\,P\,(y_1\,y_2\,y_3)$ incontra il cono φ_s doppiamente nella generatrice t e poi ancora doppiamente in una generatrice ulteriore, che può coincidere con t. Poichè P indicava un punto *generico* dello spazio, avremo che per ogni punto dello spazio passa un piano segante il cono φ_s nel modo detto, cioè secondo due coppie di generatrici coincidenti: ciò esige evidentemente che *il cono φ_s tangente ad F in O abbia una generatrice quadrupla (almeno), oppure abbia una parte non piana la quale conti doppiamente (almeno).* Questa sarà dunque la condizione neces-

(*) Cfr. per una dimostrazione algebrica rigorosa di questa proposizione: Berzolari « *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche* », Annali di Mat., tom. 24, 1896.

saria e sufficiente perchè sia $2D > s(s-1)(s-2)(s-3)$. — Similmente suppongasi che le superficie (1) e (4) abbiano comune una tangente t in O; saran verificate dalle coordinate $(x_1 x_2 x_3)$ di t le equazioni (1') e (4') $\Delta^2 \varphi_s = 0$, vale a dire nella t cadranno tre delle s rette in cui il piano di P e t incontra il cono φ_s. E per essere P generico, esisteranno così infiniti piani ognun dei quali incontra φ_s secondo tre generatrici coincidenti; donde segue che *il cono φ_s tangente ad F in O avrà una generatrice tripla (almeno).* Tale sarà la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $R > s(s-1)(s-2)$.

Come si vede, nel caso del *punto doppio* per F son sempre nulli D ed R; nel caso del *punto triplo* riman sempre nullo D, mentre $R = 6$ in generale e solo si accresce se il cono cubico tangente ad F si spezza in tre piani di un fascio; ecc., ecc.

23. Veniamo ora, secondo dicevamo al principio del n.° preced.[e], alla questione relativa all'abbassamento I che sulla classe del cono Γ circoscritto da P ad F produce la generatrice che va ad un punto singolare O di F.

Se la singolarità del cono Γ lungo quella generatrice PO risulta equivalente a generatrici successive multiple secondo σ, σ'_i, $\sigma''_{ik}, \ldots$, e se le falde (complete) del cono che hanno quella generatrice per origine sono degli ordini ν_1, $\nu_2, \ldots$, il detto abbassamento nella classe di Γ sarà, per una nota formola del sig. Noether relativa alle curve piane (*):

$$I = \sum \sigma(\sigma - 1) + \sum (\nu - 1).$$

Per determinare i caratteri σ e ν secondo la teoria del Noether occorre fare una successione di trasformazioni quadratiche ternarie del cono Γ che riducano la generatrice PO a generatrici multiple ordinarie, ecc. Ora queste trasformazioni ternarie possiamo ottenere che siano contenute nelle successive trasformazioni quadratiche quaternarie che abbiamo applicato ad F. A tal fine assumiamo anzitutto come conica fondamentale q della 1.ª trasformazione una retta doppia passante per P, e diciamo P' il punto che corrisponderà a P sulla (retta doppia) q': la trasformazione quadratica spaziale determinerà una trasformazione quadratica ternaria fra le due stelle di raggi coi centri P, P', nella quale la retta PO è una retta fondamentale, cui corrisponde il piano ω'. Il cono Γ circoscritto da P ad F si trasformerà nel cono Γ' circoscritto da P'

(*) V. il lavoro del tom. 9.° dei Math. Ann. citato al principio del presente scritto.

ad F' (da cui si tolga però, ove ne facesse parte, il piano ω') e la generatrice PO di Γ nelle generatrici di Γ' giacenti su ω'. Poniamo che una di queste passi pel punto singolare O' di F'; e facciamo la 2.ª trasformazione quadratica spaziale del n.° 2 col punto fondamentale in O' e con una conica fondamentale ridotta ad una retta doppia passante per P'. Avremo di nuovo che il cono Γ', dalla trasformazione quadratica ternaria che vien subordinata fra la stella di raggi P' e la corrispondente stella P'' e che ha la retta $P'\,O'$ per retta fondamentale, verrà mutato nel cono Γ'' circoscritto da P'' ad F''. E così via: le successive trasformazioni quadratiche spaziali che già ci davano la composizione della singolarità di F in O ci daranno anche la composizione (nel senso ternario) della singolarità del cono circoscritto Γ nella generatrice PO. — Si osservi che la multiplicità (immediata) σ di PO per Γ è uguale all'abbassamento che il punto singolare O produce sulla classe di una sezione piana generica di F passante per esso: nell'ipotesi, che conserveremo nel seguito del presente paragrafo, che questo punto non stia su una linea multipla di F. Poi la multiplicità σ' della generatrice $P'\,O'$ per Γ', se O' non è su una linea multipla di F', sarà pur data dall'abbassamento che il punto singolare O' produce sulla classe di una sezione piana generica di F' passante per O'; tranne se la retta $P'\,O'$ riesce tangente ad F', vale a dire (poichè P' è un punto generico di q') se il piano ω' è tangente in O' ad F', nel qual caso σ' si accresce. E così via.

24. Per la questione generale mi limiterò a questo cenno: la trattazione completa rimane esclusa dal presente scritto. Ma quel che abbiamo detto è già sufficiente per la determinazione del numero I in parecchi casi particolari.

Così se O è *punto biplanare* per F equivalente a k punti doppi successivi (n.° 12), dopo k trasformazioni quadratiche dello spazio saremo ridotti ad una superficie $F^{(k)}$, alla quale è circoscritto il cono $\Gamma^{(k)}$ dal punto $P^{(k)}$ dell'ultimo piano fondamentale $\omega^{(k)}$. Questo piano sega $F^{(k)}$, fuori della conica fondamentale, in una conica di cui tutti i punti son semplici per la superficie, ma che può spezzarsi in due rette distinte. Il cono $\Gamma^{(k)}$ avrà in quel piano, provenienti dalla generatrice PO di Γ, due generatrici semplici, le quali però potranno coincidere. Segue che pel cono Γ la generatrice doppia PO equivale a k generatrici doppie successive, e sta su due falde di 1.° ordine (caso generale), o su una falda di 2.° ordine (il caso particolare ora nominato). Nel 1.° caso l'abbassamento che O produce nella classe di F risulta di $2k$ unità; nel 2.° caso invece di $2k+1$ (*).

Poniamo invece che O sia per F un punto *uniplanare*, od un *tacnodo*, o in generale un *punto singolare tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un punto doppio abbassante la classe della curva piana di i unità.* Abbiamo già osservato in generale al n.° 20 (dopo che si erano espressamente esaminati i casi di $i=3, 4, 5, 6$) che il cono circoscritto da un punto generico P ha la retta PO per generatrice i-pla ed i piani che projettano le i tangenti singolari per piani tangenti lungo quella generatrice. Ne segue che l'abbassamento della classe è in generale $i(i-1)$: quindi pel punto uniplanare più generale 6, pel tacnodo 12, pel punto di regresso di 2.ª specie 20, ecc. Ma se fra quelle i tangenti singolari di F ve ne sono ν coincidenti, in generale la composizione della generatrice i-pla PO di Γ si complica perciò che una falda uscente da essa viene ad essere di ordine ν, onde l'abbassamento della classe diventa $i(i-1)+(\nu-1)$. Ecc., ecc.

Pel punto uniplanare abbiamo dunque in generale l'abbassamento di classe 6, 7, 8 secondo che in esso vi sono 3 tangenti singolari (quadripunte) distinte, o 2 coincidenti, o tutte 3 coincidenti. — Nel caso particolare del n.° 15, equazione (9), il cono Γ' circoscritto da P' ad F' si vede che avrà la generatrice doppia $P'O'$ dotata di due piani tangenti distinti fra loro e da ω': onde per la generatrice PO del cono Γ i caratteri di composizione $\sigma=3$, $\sigma'=2$. L'abbassamento di classe sarà 8. — Nell'altro caso particolare del n.° 21, equazione (13), il cono Γ' si vede che avrà $P'O'$ per generatrice tripla con tre piani tangenti distinti fra loro e da ω': onde per la generatrice PO di Γ la composizione $\sigma=3$, $\sigma'=3$. L'abbassamento di classe sarà 12.

Applichiamo ancora lo stesso procedimento al caso che F abbia *un punto s-plo O a cui siano infinitamente vicini infiniti punti doppi, sulle generatrici di un cono d'ordine h.* Abbiamo esaminato questa singolarità al n.° 11, rilevando che la superficie F' ha sul piano fondamentale ω' una linea doppia τ_h e su questa $2h(s-h+1)$ punti cuspidali. L'abbassamento che il punto O produce nella classe di una sezione piana di F passante per esso

(*) Cfr. Rohn, Memoria citata al n.° 12. — Il sig. Rohn ha pure considerato l'influenza di un punto singolare qualunque sulla classe di una superficie nella Nota « *Ueber die Entstehung eines beliebigen $\varkappa$-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen $\varkappa$-fachen Punct* » (Sächsische Berichte 1884).

è in generale $\sigma = s(s-1)+2h$: e tale sarà dunque la multiplicità della generatrice PO pel cono Γ, nel caso attuale. Per vedere come questa generatrice si trasformi, in seguito alla 1.ª trasformazione quadratica, basta cercare le generatrici d'intersezione di ω' col cono Γ' circoscritto ad F' da P'. Una retta m uscente da P' e giacente in ω' contiene h punti di τ_h, punti doppi di ogni sezione piana di F' condotta per m; in certo senso si potrebbe dire che questa retta assorbe in generale $2h$ fra le tangenti (proprie od improprie) condotte da P a quella sezione piana. Se si trova che, per una posizione di m e del piano per essa, la retta assorbe più che $2h$ fra le dette tangenti, l'eccesso darà il numero delle intersezioni coincidenti con m di quel piano col cono Γ' circoscritto da P' ad F'. Applicando questo concetto si vede subito che Γ' ha per generatrici semplici: le $2h(s-h+1)$ rette che vanno ai punti cuspidali di F' situati su τ_h; le tangenti condotte da P' alla residua curva, d'ordine $s-2h$, che con la τ_h contata due volte costituisce la trasformata su F' del punto s-plo O di F, e queste sono in generale $(s-2h)(s-2h-1)$; infine le $h(s-2h)$ rette che vanno da P' ai punti comuni a queste due curve. Questi ultimi punti sono punti di contatto di F' col piano ω': onde quelle ultime rette sono generatrici di contatto del cono Γ' con ω'. Sono poi generatrici doppie di Γ' le $h(h-1)$ tangenti tirate da P' a τ_h (perchè sulle sezioni piane di F' che le contengono esse sono tangenti tacnodali e quindi doppie); lungo una qualunque di esse sono tangenti a Γ' i due piani tangenti ad F' nel punto di contatto di quella con la τ_h. Si verifica che il numero complessivo di generatrici di Γ' su ω' così trovate, contando due volte le $h(s-2h)$ e le $h(h-1)$, risulta uguale a $s(s-1)+2h$, cioè a σ, come deve essere. — Concludiamo che la singolarità della generatrice PO pel cono circoscritto da P ad F si compone della multiplicità σ, con $h(h-1)$ elementi doppi infinitamente vicini (in giaciture diverse), e con $h(s-2h)$ falde di 2.° ordine. Per conseguenza si avrà in questo caso:

$$I = \sigma(\sigma-1) + 2h(h-1) + h(s-2h),$$

ossia:

$$I = (s^2 - s + 2h)(s^2 - s + 2h - 1) + h(s-2).$$

25. Affine alla questione di cui ci siamo occupati è l'altra della *singolarità che in un punto singolare di una superficie hanno le polari rispetto a questa dei vari punti dello spazio.* Anche in essa serve utilmente il me-

todo delle successive trasformazioni quadratiche. Nel cenno che ne farò mi limiterò alle *prime* polari.

Se il punto O è s-plo per la superficie F, la polare Δ rispetto ad F di un punto *generico* P dello spazio avrà in O la multiplicità $s-1$. Facciamo ora la 1.ª trasformazione quadratica assumendo, come al n.° 23, la conica fondamentale q ridotta ad una retta doppia passante pel punto P. Detto P' il punto omologo di P sull'altra conica fondamentale (retta doppia) q', le rette uscenti da P e le omologhe uscenti da P' sono punteggiate projettivamente: onde segue che la superficie Δ' trasformata di Δ sarà la polare di P' rispetto ad F'. Ne segue che se F' ha nel piano ω' un punto O' multiplo secondo s', Δ' avrà il punto stesso per multiplo secondo $s'-1$ *almeno*. In tale ipotesi si faccia la 2.ª trasformazione quadratica con O' per punto fondamentale e con una conica fondamentale ridotta ad una retta doppia passante per P': si muterà Δ' in una superficie Δ'' polare di un punto P'' rispetto ad F''. Se F'' ha un punto O'' multiplo secondo s'', Δ'' avrà il punto stesso per multiplo secondo $s''-1$ *almeno*. E così via. Si conclude che: la polare di un punto generico rispetto alla superficie F con punto singolare O passa per questo e pei punti successivi di F multipli per questa superficie con multiplicità che non possono esser minori che di 1 unità delle multiplicità che i punti stessi hanno per F.

Vediamo in qual caso la polare Δ del punto generico P rispetto ad F avrà multiplicità s' (e non solo $s'-1$) in un punto s'-plo di F, immediatamente successivo al punto s-plo O. Ciò equivale a domandare quando è che la polare Δ' di P' rispetto ad F' ha in O' la multiplicità stessa s' di F', comunque si prenda P' sulla retta doppia q'. Ora, poichè anche la polare di O' (che è fuori di q') rispetto ad F' ha in O' multiplicità s', nel caso supposto accadrà che le prime polari di tutti i punti del piano ω' avranno O' multiplo secondo σ'; e quindi, per un noto teorema (polari miste), che la polare d'ordine σ' di O' (cono tangente in O' ad F) avrà tutti quei punti per multipli secondo σ', cioè si ridurrà al piano ω' contato σ' volte. Dunque: *quando la superficie fondamentale F ha per successivo al punto s-plo O un punto multiplo secondo s', la polare di un punto generico dello spazio oltre ad avere in O la multiplicità $s-1$ potrà avere nel punto successivo la multiplicità s'*: ciò accadrà quando quel punto successivo ad O in seguito alla 1.ª trasformazione quadratica diventi un punto s'-plo col cono tangente ridotto al piano ω' contato s'·volte. Ricorrendo alle formole del n.° 9 per la trasformazione quadratica speciale ed alla corrispondente equazione (3) di F' si vede subito che *se il punto considerato di F successivo ad O è nella direzione dell'asse delle z, affinchè le polari di tutti i punti dello spazio abbiano in quel punto la stessa multiplicità s' che vi ha F (anzi che avere solo la multiplicità $s'-1$), occorre e basta che nella*

$$F \equiv \varphi_s + \varphi_{s+1} + \varphi_{s+2} + \cdots,$$

le forme $\varphi_s, \varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \ldots, \varphi_{s+s'-1}$ *abbiano in tutti i loro termini le $x\,y$ a gradi superiori di un'unità almeno a quelli richiesti per essere il detto punto s'-plo per F* (v. la fine del n.° 9), *vale a dire contengano in tutti i termini $x\,y$ (complessivamente) almeno ai gradi risp.* $s'+1$, s', $s'-1, \ldots, 2$.

Vi sarebbe ora da proseguire la ricerca, per vedere, ad esempio, come si comportino le polari dei punti generici dello spazio nei punti multipli di F successivi a quello s'-plo in cui le polari stesse hanno pure la multiplicità s'. Per brevità ce ne asterremo.

Sarebbe pure da esaminare la composizione della singolarità in O delle polari di punti *speciali* (non generici). Un punto particolare può avere una polare la cui multiplicità in O superi $s-1$ (di quanto si vuole); e così per la multiplicità in un punto di F successivo ad O; ecc. Limitiamoci a rilevare che *la polare di O*, cioè (se n è l'ordine di F):

$$(n-s)\,\varphi_s + (n-s-1)\,\varphi_{s+1} + (n-s-2)\,\varphi_{s+2} + \cdots = 0,$$

ha la stessa multiplicità che F non solo in O, ma anche in ogni punto che sia immediatamente successivo ad O. Ciò risulta subito dal criterio stabilito alla fine del n.° 9 per l'esistenza su F di un punto s'-plo successivo ad O nella direzione dell'asse delle z: se quelle condizioni son soddisfatte per F, saranno pure evidentemente soddisfatte dall'equazione ora scritta. Per altro va notato che la cosa non regge più pei punti multipli di F che sono infinitamente vicini ad O ma non *immediatamente* successivi. Così se al punto s'-plo di F già nominato è successivo un punto s''-plo di F, allora si verifica con lo stesso metodo che la polare di O vi avrà in generale la multiplicità $s''-1$, e solo in casi eccezionali la multiplicità s'': questa eccezione si presenterà certo se i tre punti successivi nominati di F, s-plo (O), s'-plo, s''-plo si possono congiungere solo con rami di 2.° ordine e non con rami lineari.

Sulla trasformazione birazionale delle singolarità.

26. Il concetto della composizione delle singolarità (*puntuali*) di una superficie algebrica mediante successioni di punti multipli infinitamente vicini si applica naturalmente, e sembra anzi essenziale, nella trattazione di un problema che è d'importanza capitale per la *geometria sopra una superficie algebrica* (*).

Chiamiamo per brevità *singolarità ordinarie* per una superficie algebrica, dal punto di vista delle *trasformazioni birazionali della superficie* (**) (non trasformazioni birazionali *dello spazio*, vale a dire Cremoniane), le seguenti: una linea doppia nodale, con un certo numero di punti cuspidali per la superficie aventi la composizione assegnata nel n.° 13 (e non più complicata), ed un certo numero di punti tripli a tangenti distinte i quali sono pur tripli (triplanari) per la superficie, senz'avere per successivi altri punti multipli di questa che i punti della linea doppia. Allora il problema a cui alludevo consiste nel *trasformare birazionalmente una superficie algebrica qualunque (priva di parti multiple) in una che non abbia altre singolarità (cioè punti multipli) che singolarità ordinarie* (***).

La proposizione secondo cui questo problema è possibile sembra sia stata esplicitamente enunciata, per la prima volta, nel 1888, dal sig. Noether nella Nota « *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* » (****), e dal sig. Del Pezzo nella Nota « *Estensione di un teorema di* Noether » (*****). Il sig. Noether dice così: « Sia $F(x)=0$ la superficie data e $F_1(y)=0$ la sua « trasformata mediante le formole:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1(x) : \psi_2(x) : \psi_3(x) : \psi_4(x).$$

(*) Cfr. i fondamentali lavori dei sig.[i] Castelnuovo ed Enriques pubblicati nel corrente anno fra le Memorie della Società Italiana delle scienze (dei XL), serie III, tom. 10.

(**) Per alcune considerazioni ben note, di cui ci varremo qua e là nel seguito, intorno a siffatte trasformazioni, si può consultare, ad esempio, il lavoro del sig. Noether « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* », Math. Annalen, tom. 2, 1870.

(***) Un altro problema, nel quale pure i concetti svolti in questo lavoro posson trovare utile applicazione, è quello della riduzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali *dello spazio* (Cremoniane). Ma di esso non parlerò affatto.

(****) Sitzungsberichte d. k. Preuss. Akademie d. W. zu Berlin, 2 Februar 1888.

(*****) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. II, 8 luglio 1888.

« Le 5 equazioni:

$$F(x) = 0, \qquad F(x') = 0$$

$$\psi_1(x) : \psi_2(x) : \psi_3(x) : \psi_4(x) = \psi_1(x') : \psi_2(x') : \psi_3(x') : \psi_4(x'),$$

« fra i 3 rapporti delle coordinate del punto x ed i 3 rapporti delle coordi- « nate del punto x' ammettono ∞^1 soluzioni: le quali dànno la curva doppia « di F_1. E le 9 equazioni:

$$F(x) = 0, \qquad F(x') = 0, \qquad F(x'') = 0$$

$$\psi_1(x) : \ldots : \psi_4(x) = \psi_1(x') : \ldots : \psi_4(x') = \psi_1(x'') : \ldots : \psi_4(x''),$$

« fra i 9 rapporti di coordinate dei punti x, x', x'' dànno in generale un « numero finito di soluzioni, a cui corrispondono i punti tripli della curva « doppia nominata, e della stessa F_1. » È chiaro che queste considerazioni servono solo a dimostrare questo: che la superficie F_1 avrà in generale quella linea doppia e quei punti tripli; ma non già che si potranno scegliere le forme ψ in modo che F_1 risulti priva di altre singolarttà.

27. Il sig. Del Pezzo tratta il problema sotto un'altra forma, che si potrebbe chiamare la forma *iperspaziale: trasformare birazionalmente una superficie algebrica F in una superficie F' di un conveniente iperspazio S_r, la quale sia priva di punti multipli.* Dopo ciò egli projetta la superficie F' ottenuta da un S_{r-4} generico sopra uno spazio ordinario: ottiene così una superficie F_1 che sarà riferita birazionalmente ad F e non avrà altri punti multipli che gli ∞^1 punti doppi ed il numero finito di punti tripli, provenienti rispettivamente dalle coppie e dalle terne di punti di F' che stanno in spazi S_{r-3} con l' S_{r-4} suddetto; si vede facilmente che se questo è in posizione generica rispetto ad F', la linea doppia ed i punti tripli di F_1 soddisfano alle condizioni che abbiamo imposte alle singolarità ordinarie (n.° 26).

Per trasformare F (che può supporsi esistente in uno spazio ordinario) nella detta superficie iperspaziale il Del Pezzo ricorre alle superficie di un ordine m così elevato che: 1.° si possano assoggettare queste superficie ad avere in tutti i punti e linee singolari di F *le stesse singolarità* che ha F; 2.° queste singolarità non siano *vincolate* fra loro, rispetto alle superficie d'ordine m, nè sian vincolate coi passaggi per altri h punti qualunque di F (con che s'intende che per una superficie d'ordine m le condizioni di avere quelle varie singolarità e di passare per quegli h punti siano tutte indipendenti fra loro). Allora, chiamando ψ (ψ_1, $\psi_2, \ldots$) le superficie d'ordine m che hanno le stesse singolarità di F, e trasformando F mediante esse, cioè ponendo:

$$x'_1 : x'_2 : \ldots = \psi_1(x) : \psi_2(x) : \ldots$$

e

$$F(x) = 0,$$

si avrà — in uno spazio superiore — una superficie F', luogo del punto x' (*), della quale il chiar.° geometra citato asserisce che « non avrà punti singo- « lari nè in numero finito nè in numero infinito, perchè non vi sono sopra F « gruppi di punti tali che ogni ψ passante per uno di essi debba passare per « gli altri, e perchè F non ha punti nè curve singolari fuori della base « delle ψ ».

28. Questo procedimento sembra esigere qualche ulteriore spiegazione; e lo stesso Del Pezzo si è occupato di ciò in una successiva Nota « *Sui sistemi di curve e di superficie* » (**). Alla questione che da prima può farsi, cioè che cosa s'intenda dicendo che una superficie ψ ha in un punto singolare O di F *la stessa singolarità* che ha F, egli risponde che con ciò intende che « un piano qualunque passante per O taglia le due superficie se- « condo due curve che hanno in O la medesima singolarità ». Ed all'altra questione se esistano superficie d'ordine m (abbastanza elevato) le quali abbiano in tutti i punti e linee singolari di F le stesse singolarità che ha F, risponde con la proposizione seguente: « Sia $F^n = 0$ una superficie (d'or- « dine n), che abbia nei punti $O, \ldots$ singolarità date. Denotino $\Phi^{m-n} = 0$ e « $\Phi^m = 0$ due superficie arbitrarie (di ordini $m - n$ e m), delle quali la prima « non passa pei punti $O, \ldots$, per la seconda ogni punto O è $(n + 1)$plo. Le « superficie del sistema:

$$F^m \equiv F^n \Phi^{m-n} + \Phi^m = 0,$$

« hanno in generale nei punti $O, \ldots$ le medesime singolarità delle F^n. »

29. Ora se si sta alla citata nozione di singolarità della superficie, caratterizzandole con le singolarità delle sezioni piane, non sembra esatto che

(*) Come bene osserva il sig. Del Pezzo, si può fare in modo che la corrispondenza birazionale tra le due superficie F, F' consista semplicemente nell'essere la F projezione di F': basta perciò che nel sistema lineare ψ sia contenuto il sistema ∞^3 dei piani dello spazio (con l'aggiunta di una conveniente superficie d'ordine $m - 1$).

(**) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. III, 28 luglio 1889.

la superficie F' ottenuta dalla F nel modo detto al n.° 27 riuscirà priva di punti multipli.

Invero si osservi anzitutto che, nella fatta ipotesi, col dire che ψ ed F hanno in O la stessa singolarità non si viene ad esigere che abbiano anche *la stessa composizione*, vale a dire che ψ abbia le stesse multiplicità di F oltre che in O anche nei punti multipli di F che sono infinitamente vicini ad O su vari rami di curve. Poniamo in fatti che la composizione della singolarità che F ha in O sia tale da esservi più punti successivi di multiplicità s, s', s'', s''',..., non situati in un piano: allora la presenza di quelli che succedono ai primi tre non influirà più in generale sulla singolarità di O in nessuna sezione piana di F; per conseguenza dalle condizioni imposte a ψ questa non sarà costretta ad avere i punti multipli secondo s''',... Così un punto biplanare composto di $k (> 3)$ punti doppi successivi dà per sezioni piane risp.e nodi, tacnodi, oscnodi, punti tripli, indipendentemente dal numero k: sicchè F e ψ possono avere in O punti biplanari con sezioni piane dotate delle stesse singolarità, quantunque corrispondano a valori diversi di k.

Ciò posto è facile scorgere che se le superficie ψ mediante cui si trasforma F hanno in O la stessa singolarità di F solo nel senso suddetto che riguarda le sezioni piane, e non nel senso di avere tutti gli stessi punti multipli infinitamente vicini ad O che ha F, la trasformata F' avrà in generale ancora dei punti singolari, corrispondenti ad O, o più precisamente corrispondenti a quei punti infinitamente vicini ad O che son multipli per F senz'esser multipli (con la stessa multiplicità) per le ψ. Così se la singolarità di O per F si compone di punti multipli secondo s, s', s'', s''',..., che si succedono su un ramo lineare, e le ψ hanno solo i punti multipli secondo s, s', s'', la superficie F' risulterà con un punto multiplo secondo s''': come si può vedere facendo le tre trasformazioni quadratiche che sciolgono i punti s, s', s'' e lasciano ad F un punto multiplo secondo s''' pel quale *non* passano le trasformate delle ψ (cfr. n.° 31).

Converrà dunque modificare il procedimento riportato ai n.i 27, 28 in questo: che le superficie ψ abbiano comuni con F tutti i punti multipli infinitamente vicini che entrano a comporre le singolarità di F nel senso da noi sviluppato.

30. Quanto all'esistenza di superficie ψ, di un ordine m abbastanza alto, le quali abbiano le stesse singolarità di F nel senso detto ora (senza contenere F come parte), la si può vedere, ad esempio, così. Per un punto

singolare qualunque O di F si considerino tutte le serie di caratteri del tipo $(s, s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots)$, e s'indichi con σ la massima fra le somme $s + s'_i + s''_{ik} + s'''_{ikl} + \cdots$ dei caratteri di queste serie. Si rappresenti con $\Phi^m = 0$ una superficie (d'ordine $m \geqq$ a quello n di F) la quale in ogni punto singolare O di F abbia una multiplicità almeno uguale al corrispondente valore di σ (*); e con $\Phi^{m-n} = 0$ una superficie *qualunque* d'ordine $m - n$ (non passante in generale per O). Le superficie ψ rappresentate da

$$\psi \equiv F^n \Phi^{m-n} + \Phi^m = 0,$$

avranno in generale (cioè finchè i coefficienti di Φ^{m-n} sono indeterminati) gli stessi punti singolari di F con l'identica composizione.

In fatti siano $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots,$ una o più multiplicità *successive* di F corrispondenti al punto O ed a punti infinitamente vicini su una determinata classe di rami di curve algebriche γ. L'espressione assunta per ψ mostra (**) che la multiplicità dell'intersezione in O di un ramo γ con ψ è il minore dei due numeri che dànno la multiplicità d'intersezione in O di γ (con $F^n \Phi^{m-n}$, ossia — poichè Φ^{m-n} non passa per O) con F e di γ con Φ^m; oppure, nel caso che questi due numeri siano uguali, è *in generale* uguale ad essi. Ora se quella classe di rami γ ha nei punti successivi considerati le multiplicità $\nu, \nu', \nu'', \ldots,$ il numero delle intersezioni in O di γ con F è (n.° 6) $\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \cdots$; mentre le intersezioni in O di γ con Φ^m sono almeno $\nu \sigma$, numero che, in causa delle relazioni: $\nu \geqq \nu' \geqq \nu'' \geqq \ldots,$ $\sigma \geqq s + s'_i + s''_{ik} + \cdots,$ non è certo minore del precedente. Dunque il numero delle intersezioni in O di γ con ψ è in generale (cioè finchè i coefficienti di Φ^{m-n} non soddisfano certe determinate equazioni) esattamente uguale al numero delle intersezioni in O di γ con F. — Si applichi questa osservazione generale prendendo anzitutto il solo punto O, s plo per F; poi anche un punto successivo, s'_i-plo per F; poi ancora un terzo punto successivo, s''_{ik}-plo per F;

(*) Per costruire delle superficie così fatte si può ad esempio comporle di parti determinate nel seguente modo: per ogni linea che abbia da avere una certa multiplicità σ si prendano σ suoi coni projettanti, e per ogni punto che in tal modo non risulti ancora con la multiplicità voluta si prenda un cono uscente da esso avente per ordine quanto occorre per raggiungere quella multiplicità; l'insieme di tutti questi coni (e di una superficie arbitraria) sarà una superficie Φ^m.

(**) Ricorrendo, ad esempio, alla espressione della multiplicità d'intersezione di una superficie con un ramo di curva algebrica (v. nota al n.° 4) quando questo è rappresentato con serie di potenze di un parametro.

e così via: e si vedrà che anche la superficie ψ ha il punto O' per s-plo, il successivo secondo punto per s'_i-plo, il terzo per s''_{ik}-plo, ecc. Mutando la classe di rami γ, ossia la serie di punti successivi (e tenendo conto del fatto che tutto ciò vale anche se alcuni di questi punti non stessero su F sicchè le s corrispondenti fossero nulle), si conchiuderà che il punto singolare O ha per la superficie ψ l'identica composizione con punti multipli infinitamente vicini che ha per la F.

Dal ragionamento precedente risulta pure che la proposizione riportata alla fine del n.° 28 esige la modificazione che nell'attuale num.° abbiamo fatto alla multiplicità in $O, \ldots$ delle superficie Φ^m; e ciò anche se si conserva la nozione di singolarità riportata al principio del detto n.° 28. Invero se, ad esempio, F^n ha in O punti multipli successivi, con le multiplicità $s, s', s'', \ldots$ su un ramo lineare γ (di curva piana, se si vuol conservare la detta nozione), ove $s + s' + s'' + \cdots > n + 1$, la superficie F^m definita al n.° 28 avrà in O solo $n + 1$ intersezioni con γ e quindi la sua singolarità in O non si comporrà di quei punti multipli secondo $s, s', s'', \ldots$, sarà *diversa da quella di* F^n.

31. Fissato così che le superficie ψ con cui al n.° 27 si trasformava la superficie data F in una superficie iperspaziale F' siano tutte quelle di un ordine m abbastanza elevato le quali hanno le stesse singolarità di F, con la stessa composizione, nel senso spiegato; resterebbe da far vedere che F' risulterà priva di punti multipli. Che non avrà punti multipli provenienti da gruppi di punti semplici di F seguirà dalla cagione citata alla fine del n.° 27, cioè che (supposto m abbastanza elevato) non vi sono su F gruppi di punti tali che tutte le ψ passanti per un punto debbano di conseguenza passare per gli altri. Per vedere poi che nemmeno da un punto multiplo O di F non può venire come corrispondente un punto multiplo di F', si osservi che, per essere O punto base del sistema delle ψ, i punti di F' che gli corrispondono si ottengono come *limiti* dei punti che corrispondono a punti ordinari i quali si avvicinino indefinitamente ad O sui rami di curva giacenti su F e passanti per O; cosicchè un tal punto di F' riuscirebbe multiplo per questa superficie solo quando su F esistesse un ramo γ passante per O, tale che le ψ passanti per un punto P di γ il quale tenda verso O tendessero ad aver comuni altri punti di F (che posson coincidere con O), ossia che delle $n' - 1$ intersezioni variabili diverse da P di F con due di quelle ψ (n' ordine di F') solo un numero minore che $n' - 1$ rimanessero variabili nel detto passaggio al li-

mite. Ora sul ramo γ, oltre al punto O ed infinitamente vicini a questo, possono esservi altri punti multipli di F: e questi staranno pure, con le stesse multiplicità, su tutte le ψ. Oltre a questi punti poi può essere che tutte le ψ abbiano necessariamente comuni ulteriori punti semplici di F sul ramo γ: però il numero di questi rimarrà fisso col crescere dell'ordine m delle ψ, giacchè la multiplicità d'intersezione in O di γ con le ψ non può superare il prodotto dell'ordine del ramo γ per la multiplicità in O delle superficie Φ^m del n.° prec. (*) Imaginiamo eseguite tante trasformazioni quadratiche successive, analoghe a quelle dei n.i 1, 2, quanto è il numero complessivo di quei punti successivi di γ, in modo che prima si vengano a sciogliere i punti multipli nominati, i quali son comuni ad F ed alle ψ, e poi ancora si tolga il contatto fisso (se vi è) di tutte le ψ con γ, proveniente dai punti semplici successivi che pure abbiam nominato. Avremo, corrispondentemente ad F, O, γ, ψ, una superficie determinata $\overline{F}$, un suo punto *semplice* $\overline{O}$, origine di un ramo $\overline{\gamma}$ di curva algebrica giacente su $\overline{F}$, e poi un sistema lineare di superficie $\overline{\psi}$ che non ha $\overline{O}$ per punto base. L'ipotesi fatta poc'anzi si trasformerebbe in questa: che quando due $\overline{\psi}$ variabili passano per un punto $\overline{P}$ di $\overline{\gamma}$ che tende verso $\overline{O}$, alcune delle $n'-1$ intersezioni variabili, diverse da $\overline{P}$, che esse hanno con $\overline{F}$ tendano pure verso limiti determinati, indipendenti dalle due $\overline{\psi}$; o più brevemente: che pel sistema delle $\overline{\psi}$ il punto $\overline{O}$ è tale che tutte le $\overline{\psi}$ passanti per esso vengano di conseguenza a passare per altri punti di $\overline{F}$ (che possono anche essere infinitamente vicini ad $\overline{O}$, oppure a punti base del sistema). Ora se si fa crescere l'ordine m delle ψ, cresceranno di conseguenza l'ordine e la dimensione del sistema delle $\overline{\psi}$, mentre rimane fissa $\overline{F}$ col suo punto semplice $\overline{O}$. Quanto ai punti e linee basi delle $\overline{\psi}$ rimarranno fissi quelli che son dati dai punti e linee singolari di $\overline{F}$, mentre cresceranno di multiplicità senza cambiar di posizione quelli che sono negli elementi fondamentali della trasformazione birazionale di spazio prodotto della successione di trasformazioni quadratiche eseguita. Esaminando anche più minutamente questi elementi base del sistema $\overline{\psi}$ in relazione col punto $\overline{O}$ di $\overline{F}$

(*) Ciò risulta subito considerando le ψ che si possono esprimere come nel n.° precedente e segandole col ramo γ giacente in F. Si vede che per quelle ψ la multiplicità d'intersezione in O con un tal ramo è esattamente uguale, in generale, a quel prodotto.

e tenendo conto che essi determinano il sistema, *pare che si possa conchiudere* che non può accadere per tutti i valori di m che le $\overline{\psi}$ passanti per $\overline{O}$ vengano di conseguenza a passare per altri punti di $\overline{F}$. Qui non mi tratterrò a cercare una rigorosa dimostrazione di ciò. Ammesso che sia vero, vi sarà un valore di m dal quale in poi i sistemi ψ corrispondenti danno origine a superficie F' che non hanno un punto multiplo proveniente dal ramo γ nel modo sopra esposto.

Muti ora γ su F attorno ad O, e poi muti anche su F il punto singolare O. Si avranno per m dei limiti inferiori di carattere generico e dei limiti inferiori di carattere eccezionale: gli uni e gli altri in numero finito, per la natura algebrica della questione. Onde basterà poi prendere l'ordine m delle ψ maggiore di tutti quei limiti perchè la superficie F' trasformata di F mediante le ψ risulti completamente priva di punti multipli.

Seguito. Cenno di altri metodi per la riduzione delle singolarità.

32. Riandando il ragionamento precedente, appare subito che in esso non è un fatto essenziale l'avere la superficie ψ con cui si trasforma *F le stesse singolarità* di questa superficie; ma piuttosto il fatto che le ψ *passino per tutti i punti multipli, distinti od infinitamente vicini,* coi quali son composti i punti singolari di F, nel senso spiegato in questo lavoro.

Non sarà forse superflua, a questo proposito, una breve digressione intorno al problema della *trasformazione birazionale delle singolarità delle curve algebriche,* e più precisamente di *determinare una curva (iperspaziale) priva di punti singolari, della quale una data curva algebrica con singolarità qualunque sia projezione.* La risoluzione di questo problema si può dire contenuta implicitamente — e ciò sembra sia sfuggito a vari geometri — nei teoremi dei sig.[i] Brill e Noether (*) sulle serie lineari di gruppi di punti, speciali e non speciali, di una curva algebrica, e più esplicitamente in una nota memoria del sig. Veronese (**). Siano in fatti p il genere ed n l'ordine della curva data, con singolarità qualunque. Allora se è $n > 2p$ si avrà che quella curva è projezione di una curva normale dello stesso ordine

(*) Math. Annalen, tom. 7 (1873).
(**) Math. Annalen, tom. 19 (1881).

(di S_{n-p}), la quale è certamente priva di punti multipli (*). Se poi non fosse soddisfatta la condizione $n > 2p$, basterebbe anzitutto riguardare la data curva come projezione di una conveniente curva d'ordine superiore n' tale che $n' > 2p$, il che si fa ovviamente; e poi applicare a questa nuova curva l'osservazione precedente (**).

Se la curva data f è piana (o ridotta a tale con projezione), per dedurne le curve normali di cui essa è projezione si conduce per un suo gruppo di n punti allineati una *curva aggiunta* di un certo ordine m la quale darà su f un certo gruppo residuo: tutte le curve aggiunte ad f, di ordine m, passanti o no per questo gruppo residuo o per una parte di esso, serviranno a trasformare f in una curva normale, di cui f è projezione. Dunque *la trasformazione birazionale (od anzi per projezione) di una curva piana algebrica f in una curva priva di punti singolari si può fare per mezzo del sistema delle curve aggiunte ad f di un ordine abbastanza elevato.*

Appare così che per una data curva piana f, al fine di trasformarla in una curva (iperspaziale) priva di punti multipli posson servire le curve che nei punti singolari di f hanno certe singolarità minori, le *singolarità aggiunte* (cioè delle curve aggiunte ad f), e che inoltre hanno un ordine abbastanza elevato (***). — Sono esempi di curve aggiunte ad f le prime polari dei punti del piano; e si può pensare (quando le singolarità di f siano un po' complicate) di ricorrere ad esse per costruire altre curve aggiunte atte a dare la voluta trasformazione di f. Ciò però esige qualche riguardo: non serve, ad esempio, il sistema lineare

$$\Theta \equiv \sum_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

dove le λ_i sono tre forme di uno stesso ordine l, a coefficienti pienamente

(*) V. a pag. 213 della citata Memoria del sig. Veronese ed anche il n.° 13 della mia Memoria nei Math. Ann., tom. 30 (1887).

(**) Se la data curva è *speciale* non occorre altro che applicare il noto teorema secondo cui la curva stessa è projezione della curva canonica (d'ordine $2p-2$), la quale è certo priva di punti multipli (in quell'ipotesi).

(***) È chiaro che quest'ultima condizione (alla quale conducono le considerazioni precedenti) è essenziale. Ad esempio se la curva f è d'ordine $n > 5$ ed ha come unico punto singolare un *tacnodo* O, le ∞^3 coniche aggiunte, cioè tangenti ad f in O, trasformano f in una curva sghemba d'ordine $2n-4$, la quale avrà un punto $(n-4)$-plo, corrispondente agli $n-4$ punti di f diversi da O ma situati sulla tangente in O.

indeterminati. (*) Invero (prescindendo dal caso $l=0$, nel quale la trasformata di f mediante quel sistema viene ad essere la *curva duale* di f, e quindi ad avere punti multipli corrispondenti alle tangenti multiple di f), se si suppone $l>0$, e si indica con s la multiplicità per f di un suo punto O e con σ la multiplicità di una tangente t in O ad f (la quale, per fissar le idee, non tocchi f altrove), la curva trasformata di f mediante il sistema Θ avrà, corrispondentemente ad O e t, un punto singolare la cui multiplicità sarà uguale ad s e σ, se questi due numeri sono uguali fra loro; se no, al minore fra s e σ. (**) Così se f ha un *tacnodo* la sua trasformata mediante le Θ avrà sempre (qualunque sia l) un punto doppio. —

La breve digressione così fatta intorno al problema della riduzione delle singolarità delle *curve* conduce a pensare che per la riduzione birazionale delle singolarità delle *superficie* dello spazio ordinario, e precisamente dal punto di vista da noi considerato (iperspaziale), potrebbero servire delle su-

(*) Rilevo ciò, perchè appunto a questo sistema ricorre il sig. Del Pezzo nella Nota « *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* » (Rendic.[i] Accad., Napoli, gennajo 1893), asserendo che la curva iperspaziale trasformata di f mediante esso sarà priva di punti singolari: il che, come ora si vedrà, non è esatto. E poichè la detta Nota è posteriore a quella sulla riduzione delle singolarità delle superficie citata ai n.[i] 26 e seguenti, nella quale per la trasformazione delle superficie si ricorreva ad un sistema lineare essenzialmente diverso, il lettore potrebbe pensare ad usare anche per le superficie un sistema lineare analogo a quello Θ sopra scritto: cosa che non darebbe punto la soluzione del problema.

(**) In fatti, per l'ipotesi che t sia tangente σ-pla di f col punto di contatto O, la polare di un punto generico di t avrà con f in O una multiplicità d'intersezione superiore di σ unità alla multiplicità d'intersezione in O di f con la polare di un punto generico del piano. Diciamo f_1, f_2 le polari di due punti di t, f_3 la polare di un punto del piano esterno a t. Esprimendo le $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ per mezzo di f_1, f_2, f_3, l'equazione di Θ prende la forma

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = 0,$$

dove le μ sono di nuovo forme d'ordine l, a coefficienti pienamente indeterminati. Se r è la dimensione di questo sistema Θ, è chiaro che, obbligando la forma μ_3 al passaggio per O e quindi ad un incontro s-punto in O con f, si viene a staccare in Θ un sistema lineare ∞^{r-1} di curve la cui moltiplicità d'intersezione con f in O è (quella di $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$, o quella della attuale $\mu_3 f_3$, e però) superiore di σ o di s unità alla multiplicità d'intersezione in O di f con le Θ generiche: e precisamente del meno elevato fra i due numeri σ, s. Ora all'esistenza nel sistema ∞^r delle Θ di un tal sistema ∞^{r-1} corrisponderà sulla curva trasformata di f mediante le Θ l'esistenza di un punto multiplo secondo il detto numero, meno elevato fra σ ed s.

perficie simili alle superficie *aggiunte*, cioè tali che se la data superficie F ha una singolarità composta di punti multipli (infinitamente vicini) secondo s, s', s'',..., queste nuove superficie abbiano nei punti stessi le multiplicità $s-1$, $s'-1$, $s''-1$,... (*) Esempi di superficie siffatte si avrebbero nelle prime polari rispetto ad F dei vari punti dello spazio (v. n.° 25): ma, come s'è detto per le curve piane, ci vuol riguardo nel servirsene. —

33. Si può risolvere lo stesso problema relativo alle singolarità delle superficie per una via essenzialmente diversa: cioè, invece di determinare una trasformazione birazionale che muti la superficie data, ad esempio, in una superficie (iperspaziale) priva di punti multipli, procedere per gradi successivi costruendo una serie di trasformazioni che semplifichino man mano le singolarità fino a farle scomparire totalmente.

A tal fine premettiamo che alle singolarità delle superficie iperspaziali si possono attribuire *caratteri* di composizione simili a quelli introdotti in questo lavoro pel caso delle superficie dello spazio ordinario: chiamando cioè *caratteri* s, s'_i, s''_{ik},.. di un punto singolare O di una superficie appartenente allo spazio S_r (e precisamente multiplicità di O e di punti e linee infinitesime successivi ad O) i caratteri che la projezione di quella superficie su uno spazio ordinario da un S_{r-4} *generico* ha nel punto projezione di O. — Dopo ciò si posson paragonare le singolarità di tutte le superficie algebriche e parlare di maggiore o minore *complicazione* delle singolarità: per esempio, dicendo che una singolarità — punto o linea — è meno complicata di un'altra se il numero complessivo dei suoi caratteri s, s', s'',... è minore di quello relativo all'altra; oppure assumendo come *indice* della complicazione di una singolarità — e così noi faremo — il massimo numero h tale che fra i caratteri s, s'_i, s''_{ik},... vi sia una $s^{(h)}$ (diversa da 1); ecc.

Ciò posto, supponiamo che si riesca a trasformare ogni superficie algebrica F di S_3 in una superficie F' le cui singolarità provengano tutte da quelle di F, ma abbiano complicazione minore. Mediante projezione da uno spazio generico la F' darà una superficie di S_3 la quale oltre a quelle singolarità di minor complicazione che quelle di F avrà solo una linea doppia ordinaria con dei punti tripli (n.° 27). Si applichi a questa nuova superficie di S_3 la trasformazione che ne abbassa le singolarità; e così via. Si arriverà

(*) Tali superficie sarebbero dunque veramente aggiunte lungo le linee singolari, ma *iperaggiunte* nei punti multipli staccati.

infine ad una superficie iperspaziale completamente priva di punti multipli, o ad una superficie di S_3 con sole singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli). Il problema della riduzione delle singolarità sarà risolto. — Se poi il sistema di superficie con cui si trasforma F in F' comprende anche il sistema dei piani di S_3 a cui si aggiunga una superficie fissa, la detta trasformazione si potrà riguardare come una projezione (cfr. una nota al citato n.° 27), sicchè tutta la serie di trasformazioni non sarà altro che una serie di projezioni.

Come si possa trasformare la superficie F dello spazio ordinario nella F' suddetta si prevede facilmente. Al principio del n.° 32 abbiam rilevato che per far sparire tutti quanti i punti multipli di F convien far passare le superficie ψ con cui si trasforma F per tutti i punti multipli, distinti od infinitamente vicini, coi quali son composti i punti singolari di F. È naturale pensare che se le ψ passan solo per una parte (i primi) dei punti multipli secondo s, s'_i, $s''_{ik}, \ldots$ che compongono un punto singolare di F, solo quei punti multipli scompariranno dalla trasformata, mentre quelli successivi si conserveranno. In particolare il passaggio puro e semplice delle ψ pei punti singolari di F (senza considerazione di punti infinitamente vicini) sembra condurre per la superficie trasformata a singolarità coi caratteri s'_i, $s'_{ik}, \ldots$, scomparendo il 1.° carattere s. Precisando meglio le cose, e salvo qualche riserva, si può ottenere che appunto così accada, e che quindi la trasformazione abbassi effettivamente la complicazione delle singolarità esistenti (senza introdurre alcuna nuova singolarità). (*)

(*) Va forse citato, a questo proposito, un passo di un lavoro del sig. NOETHER che abbiamo ripetutamente ricordato (Götting. Nachrichten 1871, pag. 267) in cui si tratta di sciogliere le singolarità superiori di una superficie F mediante trasformazioni dello spazio ordinario (principalmente, come già s'è detto, per servirsene poi nella determinazione del genere superficiale): « Applicando, — dice — una trasformazione dello spazio, nella quale « un punto fondamentale sia posto nel punto singolare O della superficie F, a questo punto « corrisponderà sulla superficie trasformata F' una curva C'; e questa sarà in generale « multipla e singolare per F', ma in modo che l'ordine di questa singolarità sarà più « basso che quello di O in F. Indi si può ripetère lo stesso procedimento, assumendo C' « come curva fondamentale di una seconda trasformazione, con che si è condotti a curve « di singolarità ancor più bassa... » Nel seguito però si rileva che sulla curva C' vi saranno punti eccezionali, cioè di singolarità diversa da quella dei punti generici di C' e che può essere anche superiore alla singolarità di O per F. Tali punti provengono da quelle tangenti in O ad F che son tangenti alla Jacobiana della trasformazione. — Se in luogo delle trasformazioni birazionali dello spazio si adoperano, come noi ora facciamo, trasformazioni birazionali della sola superficie, si può ottenere che tali punti eccezionali non si presentino.

34. Per questo scopo pare che si possan prendere, ad esempio, come superficie ψ mediante cui si trasforma F le seguenti. Diciamo $l\,(\geqq 0)$ l'ordine della linea L che è l'insieme di tutte quante le linee multiple di F (ognuna, s'intende, contata semplicemente). Diciamo poi O_1, O_2,... O_h quei punti multipli di F (in numero $h \geqq 0$), ognun dei quali o non sta su alcuna linea di multiplicità pari alla sua, oppure è essenzialmente multiplo per la linea complessiva L: e poniamo che abbiano per L risp.^e le multiplicità k_1, k_2,..., k_h (ammettendo per questi numeri anche i valori 0 ed 1); e che in uno qualunque O di quegli h punti, pel quale L passi effettivamente con la multiplicità k, vi siano τ_a, τ_b,... tangenti ad L coincidenti risp. nelle tangenti distinte a, b,... (onde $\tau_a + \tau_b + \cdots = k$). Assumiamo come superficie ψ tutte quelle superficie d'ordine $m = l + h + 1$ le quali passano (semplicemente) per L ed hanno in ogni punto O la multiplicità $k+1$ e le tangenti a, b,... di L per generatrici τ_a-pla, τ_b-pla,... del proprio cono tangente. Esse formano un sistema lineare ∞^r ove $r > 3$, del quale fanno parte le superficie particolari dello stesso ordine $m = l + h + 1$ composte con un piano arbitrario dello spazio, con h piani passanti risp. pei punti O_1, O_2,... O_h, e con un cono projettante la linea L da un punto arbitrario dello spazio.

Ricorrendo a queste particolari superficie si vede subito che il sistema ψ non ha, all'infuori dei punti O e della linea L, altri punti base, nè gruppi di punti *associati* (in numero finito od infinito, distinti od infinitamente prossimi) per modo che tutte le $\infty^{r-1}\,\psi$ che passano per un punto A passino anche di conseguenza per un altro punto B (distinto, od infinitamente vicino ad A in una determinata direzione). Invero quelle particolari superficie composte di piani e coni non hanno evidentemente altri punti comuni che quelli di L ed i punti O. E mediante il piano completamente arbitrario che fa parte di esse si ottien subito che una di esse passi per A e non per B. — Ora, poichè sulla superficie F' trasformata di F mediante le ψ non potrebbero venir punti multipli se non dai punti multipli di F e dai gruppi di punti associati (nel senso detto) rispetto alle ψ che eventualmente giacessero su F, si conchiude che F' non avrà altri punti multipli che quelli provenienti dalla linea multipla L e dei punti multipli O di F.

35. Vediamo dunque quali punti si ottengano su F' come trasformati dei punti multipli di F: e da prima consideriamo uno qualunque, O, dei punti O_1, O_2,... O_h.

La corrispondenza tra F ed F' può riguardarsi come contenuta nella corrispondenza tra lo spazio ordinario Σ in cui sta F, e la varietà M_3 di S_r rappresentata su Σ dal sistema lineare ∞^r delle superficie ψ. In questa corrispondenza più ampia, i punti di Σ infinitamente vicini ad O sulle varie rette della stella che ha questo punto per centro corrispondono ai punti di M_3 costituenti una certa superficie Ω, e precisamente in modo che i coni d'ordine $k+1$ tangenti in O alle ψ rappresentano le sezioni iperpiane di Ω (sicchè quando $k=0$ Ω è un piano). Fra quei coni si considerino quelli tangenti alle ψ composte di piani e coni che abbiamo messe in evidenza precedentemente: essi si comporranno di un piano arbitrario per O e (se O sta sulla linea L) dei piani projettanti da una retta arbitraria per O le tangenti a, b,... che la linea L ammette in O, contati rispett.^{e} τ_a, τ_b,... volte (ove $\tau_a+\tau_b+\cdots=k$). Servendosi di ciò si riconosce subito che il sistema lineare composto di tutti i coni tangenti in O alle ψ, all'infuori delle generatrici base a, b,..., multiple secondo τ_a, τ_b,..., non ammette altre generatrici base, nè ammette alcun gruppo di rette *associate*, cioè tali che il passaggio di un cono per l'una tragga di conseguenza il passaggio per le altre. Inoltre si vede che in nessuna generatrice base il sistema lineare di coni ammette alcun piano tangente fisso; nè ammette, in una stessa od in diverse generatrici base dei gruppi di piani tangenti associati, nel senso che tutti i coni che toccano ivi un piano siano pur tangenti agli altri; e nemmeno può accadere che due coni del sistema i quali in una generatrice base abbiano comune un dato piano tangente vengano perciò solo ad avere ivi più di una nuova generatrice in comune, cioè ad oscularsi (ciò si vede, ad esempio, segando il sistema lineare col piano tangente dato). Da tutto ciò segue che la superficie Ω non ha punti multipli; ed è biunivocamente riferita alla stella di rette O, fatta sola eccezione per le rette a, b,... alle quali corrispondono su Ω tutti i punti di certe linee α, β,... degli ordini τ_a, τ_b,... (razionali, prive di punti multipli).

Considerando ora nella stella O il cono delle tangenti in O ad F, avremo che a questo cono, ossia ai punti di F infinitamente vicini ad O sulle dette tangenti, corrisponderà su M_3 e quindi anche su Ω e su F' una linea C composta delle linee α, β,... contate tante volte rispettiv.^{e} quanta è la multiplicità di a, b,... nel cono tangente ad F in O, e composta inoltre di una linea residua Γ proveniente dalle altre generatrici di quel cono.

36. Per determinare i *caratteri* che avranno per la superficie iperspaziale F' quei punti singolari costituenti la linea C (insieme di Γ e di α, β,...),

imaginiamo (n.° 33) projettata F' (e quella sua linea) su uno spazio ordinario $\overline{\Sigma}$ da un S_{r-4} generico: si otterrà una superficie $\overline{F}$ in corrispondenza birazionale con F per modo che al punto singolare O di questa corrisponde su $\overline{F}$ la linea $\overline{C}$, insieme di $\overline{\Gamma}$ e di $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}, \ldots$; e si tratterà di trovare i caratteri di queste linee singolari per la $\overline{F}$.

Fra i due spazi ordinari Σ e $\overline{\Sigma}$ si può considerare la corrispondenza proveniente dal projettare la varietà M_3, rappresentata su Σ dal sistema delle ψ, su $\overline{\Sigma}$ dall'S_{r-4} suddetto: è una corrispondenza $(\mu, 1)$ se μ è l'ordine della M_3 (il *grado* del sistema lineare delle ψ). In essa al punto O di Σ corrisponde una superficie $\overline{\Omega}$, projezione della Ω; e poichè quest'ultima superficie non ha punti multipli, la $\overline{\Omega}$ non avrà altre multiplicità che una ordinaria linea doppia con punti tripli. Su essa giacerà la linea $\overline{C}$ suddetta.

Ad una linea algebrica $\overline{\gamma}$ di $\overline{\Sigma}$ corrisponde in Σ una linea γ la quale passerà per O tante volte in generale quante sono le intersezioni di $\overline{\gamma}$ con $\overline{\Omega}$: e precisamente a questi punti di $\overline{\Omega}$ corrispondono nella stella O le tangenti a γ. Ne segue che un ramo di γ passante per O è certo lineare se il punto $\overline{O}$ in cui il ramo corrispondente di $\overline{\gamma}$ taglia $\overline{\Omega}$ conta come una sola intersezione. Dato su $\overline{\Omega}$ il punto $\overline{O}$ di $\overline{\gamma}$, è data una tangente in O a γ; e se $\overline{O}$ viene a cadere sulla linea $\overline{C}$ (cioè su $\overline{\Gamma}$ o su $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}, \ldots$), γ verrà a toccare in O una determinata tangente di F (che sarà precisamente a se $\overline{O}$ è su $\overline{\alpha}$, ecc.). Se $\overline{O}$ è uno dei punti comuni a $\overline{C}$ ed alla linea doppia di $\overline{\Omega}$, esso proverrà (come projezione) da *due* punti di Ω, dei quali uno solo è su C (per avere lo S_{r-4} di projezione una posizione generica); laonde la linea γ viene costretta in tal caso a toccare in O *due* rette, di cui però ancora una sola è tangente in O ad F. Se poi $\overline{O}$ è un punto comune a $\overline{\Gamma}$ ed $\overline{\alpha}$, si può supporre che sia projezione di un punto comune a Γ ed α, e non simultaneamente di un altro punto di Ω; allora il passaggio di $\overline{\gamma}$ per $\overline{O}$ avrà per conseguenza che non solo la linea γ sarà obbligata a toccare in O la retta a, ma inoltre il ramo di γ che ha questa tangente dovrà *osculare* un determinato piano tangente in a al cono tangente di F (i piani tangenti in a a questo cono corrispondendo in certo senso ai punti in cui α è incontrata da Γ).

Ciò premesso, siano s, s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$ i caratteri della singolarità che F ha in O: e supponiamo che per definirli mediante le multiplicità d'intersezione di F con rami di curve algebriche uscenti da O bastino i rami *lineari*, non occorrano quelli *superlineari* (n.° 6). In tale ipotesi determineremo facilmente i caratteri che avranno i punti $\overline{O}$ della linea $\overline{C}$ su $\overline{F}$. Alle intersezioni di $\overline{F}$ con una linea algebrica qualunque $\overline{\gamma}$ di $\overline{\Sigma}$ corrispondono in generale biunivocamente le intersezioni, fuori dei punti fondamentali della trasformazione, di F con la linea γ che in Σ corrisponde a $\overline{\gamma}$. Ora se $\overline{\gamma}$ si fa variare in modo che venga ad incontrare $\overline{C}$ (cioè $\overline{\Gamma}$ od $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}, \ldots$) in un determinato punto $\overline{O}$, la linea γ la quale già passava per O con tanti rami quanti erano gl'incontri di $\overline{\gamma}$ con $\overline{\Omega}$ verrà ad avere *uno* di questi rami tangente ad una determinata tangente di F in O (in particolare tangente ad a se $\overline{O}$ è su $\overline{\alpha}$, ecc.); e viceversa. Ma con ciò gl'incontri di quel ramo di γ con F in O saranno aumentati di s'_i (l'indice i corrispondendo a quella tangente di F in O). Ne segue che fra gl'incontri di $\overline{\gamma}$ con $\overline{F}$ s'_i saranno venuti in $\overline{O}$: cioè $\overline{O}$ è s'_i-plo per $\overline{F}$. — Se poi si vuole che il ramo lineare di $\overline{\gamma}$ in $\overline{O}$ incontri *più* di s'_i volte la $\overline{F}$, dovrà il ramo corrispondente di γ, che ha in O la detta tangente, avere ivi una multiplicità d'intersezione con F *superiore* ad $s+s'_i$. Ma allora sappiamo che questa multiplicità in generale varrà $s+s'_i+s''_{ik} (k=1, 2, \ldots)$. Dunque se il ramo lineare di $\overline{\gamma}$ ha da incontrare in $\overline{O}$ più che s'_i volte la superficie $\overline{F}$, la incontrerà ivi in generale $s'_i+s''_{ik}$ volte $(k=1, 2, \ldots)$. — Così continuando nel confronto fra le intersezioni di $\overline{\gamma}$ ed $\overline{F}$ in $\overline{O}$ e quelle di γ ed F in O si vede che *i caratteri del punto singolare $\overline{O}$ di $\overline{F}$ saranno in generale s'_i, s''_{ik}, $s'''_{ikl}, \ldots$* —

In conclusione, sotto la riserva che abbiam posta per la singolarità di F in O, abbiamo che le singolarità di $\overline{F}$, e quindi anche quelle di F', a cui dà origine la detta singolarità di F in O, *sono meno complicate di questa.* Non sembra difficile completare in ogni punto il ragionamento precedente, e specialmente coll'estenderlo anche al caso che fra i punti multipli di F successivi ad O ve ne siano di quelli che non si possano congiungere (con O) mediante rami lineari: si tratterà di considerare pei rami superlineari di curve γ e $\overline{\gamma}$ con le origini O, $\overline{O}$, i caratteri di cui s'è detto al n.° 6 (ed anche i contatti di $\overline{\gamma}$ con la superficie $\overline{\Omega}$). Qui però non ci fermeremo su ciò.

37. Così pure, — dopo d'aver detto nei n.[i] 35 e 36 dei punti singolari di F' a cui dànno origine i punti particolari O_1, $O_2, \ldots O_h$ di F — ci li-

miteremo a fare un brevissimo cenno di quelli a cui dànno origine i punti generici della linea multipla L di F.

Sulla varietà M_3 che è rappresentata nello spazio Σ dal sistema lineare ∞^r delle superficie ψ, ad un punto generico di L, che è linea base semplice di questo sistema, corrispondono (*) gl'infiniti punti di una retta; la quale, movendosi quel punto su L, descrive su M_3 una superficie rigata Λ. Come un punto generico di M_3, nella corrispondenza lineare che intercede fra le superficie del sistema $\infty^r\,\psi$ e gl'iperpiani di S_r, rappresenta il sistema di ∞^{r-1} superficie ψ passanti per un punto generico di Σ; così un punto di Λ rappresenta un sistema ∞^{r-1} di superficie ψ che in un punto di L hanno comune il piano tangente. Per tal modo la superficie Λ è biunivocamente riferita alla serie ∞^2 degli elementi — punto e piano — composti dei punti di L e dei piani tangenti in essi ad L. — Fra questi elementi ve ne sono ∞^1 che appartengono alla superficie data F, composti cioè dei punti di L coi piani tangenti in essi ad F. In corrispondenza vi sarà sulla rigata Λ una linea L' che starà sulla superficie F' trasformata di F, e sarà appunto la linea di F' corrispondente alla linea multipla L di F.

Si vede subito quale sarà la multiplicità di F' in un punto generico di L'. Ciò equivale a domandare la multiplicità d'intersezione in quel punto di due sezioni iperpiane di F'; ossia per le due superficie ψ corrispondenti, le quali avranno comune un elemento (punto-piano) di L con la superficie F, quante fra le loro intersezioni con F vengono assorbite da quell'elemento. Ora due ψ si tagliano oltre che in L secondo una linea γ sì che ogni elemento $P\pi$ (punto e piano tangente in esso) comune a γ ed L, e variabile al variare delle due ψ, corrisponde ad un punto P' di Λ situato sui due iperpiani omologhi delle due ψ. Se il punto P' muovendosi su una generatrice rettilinea di Λ viene a cadere in un punto di F', ciò significherà che, P restando fisso, il piano π diventa uno dei piani tangenti in P ad F; ossia che γ, la quale già incontrava F in P, diventa tangente ivi a questa superficie (e precisamente secondo quel piano tangente π). La multiplicità di P' per F' sarà data dall'incremento che avrà subìto per questo fatto la multiplicità d'intersezione in P di F con γ: vale a dire, se la composizione del punto singolare P di F è espressa dai caratteri s, s'_i, $s''_{ik}, \ldots$, la multiplicità di P' per F' è s'_i, l'indice i corrispondendo a quel piano tangente π di F

(*) Cfr. il lavoro del sig. Noether (Math. Ann., tom. 2) citato in nota, al principio del n.° 26.

in P che dà origine a P' e precisamente ad una direzione *generica* nel fascio $P\pi$. (*)

(*) Nel finire la revisione delle bozze, sento il dovere di ringraziare il D.r Beppo Levi, mio discepolo, per l'ajuto intelligente che m'ha prestato in questa revisione. — In pari tempo avvertirò che questo giovane nella sua dissertazione di laurea dedicata alle singolarità superiori delle curve algebriche sghembe (iperspaziali) ha studiato più profondamente quei caratteri relativi ai rami delle dette curve dei quali ho fatto cenno qui al n.° 6; e che egli pure mi ha comunicato, per la proposizione contenuta al n.° 3 di questo lavoro, una dimostrazione geometrica, la quale si basa sul fatto che per gli h punti s-pli successivi di F ivi nominati si può sempre far passare una superficie che abbia in O un punto semplice, ed applica alla curva intersezione di questa superficie colla F una disuguaglianza che lega l'ordine alle multiplicità della curva.

INDICE.

Ueber quadratische Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik.

(*Von* Paul Staeckel, *in Koenigsberg.*)

1.

In seiner interessanten Abhandlung: *Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica* hat Herr di Pirro die Aufgabe behandelt und für den Fall $n = 3$ vollständig gelöst, alle dynamischen Probleme zu bestimmen, bei denen *erstens* der Ausdruck der lebendigen Kraft die orthogonale Form:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_{k0}(q_1, \ldots, q_n)\, q'^2_k$$

hat und bei denen *zweitens* ausser dem Integrale der lebendigen Kraft:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_{k0}(q_1, \ldots, q_n)\, q'^2_k = U(q_1, \ldots, q_n) + h \tag{1}$$

noch ein quadratisches Integral der orthogonalen Form:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_{k1}(q_1, \ldots, q_n)\, q'^2_k = U_1(q_1, \ldots, q_n) + \alpha_1 \tag{2}$$

existirt.

Herr di Pirro findet, dass diese Forderung im Allgemeinen auf die Klasse von dynamischen Problemen führt, die ich in den Abhandlungen:

1.° Ueber die Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln (*Habilitationsschrift*, Halle a. S. 1891),

2.° Sur une classe de problèmes de Dynamique (*Comptes rendus*, 6 März 1893), 3.° Sur des problèmes de Dynamique qui se réduisent à des quadratures (*Comptes rendus*, 5 Juni 1893),

4.° Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit (*Mathematische Annalen*, Band 42, S. 537-563, 1893) untersucht habe. Bei diesen Problemen giebt es ausser dem Integrale der lebendigen Kraft noch $n-1$ weitere quadratische Integrale der Form (2). Aber mit ihnen ist, wie Herr di Pirro entdeckt hat, noch nicht die Gesamtheit der Probleme erschöpft, die der vorher aufgestellten Forderung genügen, es kommen vielmehr noch gewisse *Ausnahmefälle* hinzu, in denen jedoch weniger als $n-1$ weitere quadratische Integrale der Form (2) existiren. Es gelingt Herrn di Pirro nicht, für beliebiges n alle diese Ausnahmefälle zu ermitteln, aber er findet doch eine Reihe von Problemen, bei denen beziehungs-weise $n-2$, $n-3, \ldots, 2$, 1 solche Integrale vorhanden sind.

Der Zweck dieser Abhandlung ist nun nachzuweisen, das diese von Herrn di Pirro entdeckten Probleme als besondere Fälle in einer sehr allgemeinen Art von Problemen enthalten sind, die ich in meiner Note: *Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton*, Comptes rendus, 7 October 1895 angegeben habe, und daran anknüpfend zu zeigen, wie man auf Grund des dort entwickelten Principes in reicher Fülle weitere Klassen dynamischer Probleme aufstellen kann, denen ebenfalls die verlangte Eigenschaft zukommt; ja es ist wahrscheinlich, dass auf diesem Wege alle jene Ausnahmefälle erhalten werden.

2.

Die Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ordne man in m Systeme von beziehungsweise $h_1, h_2, \ldots, h_m$ Veränderlichen, sodass:

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_m = n$$

ist, und bezeichne diese Systeme wie folgt:

$$\begin{array}{llll} q_{11}, & q_{12}, & \ldots, & q_{1h_1}, \\ q_{21}, & q_{22}, & \ldots, & q_{2h_2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{m1}, & q_{m2}, & \ldots, & q_{mh_m}. \end{array}$$

Es seien ferner:

$$\begin{array}{llll} \varphi_{11}, & \varphi_{12}, \ldots, & \varphi_{1m}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}, \ldots, & \varphi_{2m}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m1}, & \varphi_{m2}, \ldots, & \varphi_{mm} \end{array}$$

willkürliche Functionen derjenigen Variabeln, die denselben ersten Index, wie sie selbst haben. Die Determinante dieses Systemes heisse Φ. Bedeutet dann $\Phi_{k\lambda}$ die Adjungirte von $\varphi_{k\lambda}$, so ist:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{k\lambda} \Phi_{k\lambda}.$$

Endlich mögen noch:

$$\varphi_{10}, \varphi_{20}, \ldots, \varphi_{m0}$$

ebenfalls willkürliche Functionen derjenigen Variabeln sein, die denselben ersten Index wie sie selbst haben, und es möge:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{k0} \Phi_{k\lambda} = \Psi_{\lambda},$$

gesetzt werden.

Nach diesen Vorbereitungen bilde man für $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$ die *Hamiltonschen Gleichungen*:

$$\frac{1}{2} \sum_{\rho_\mu=1}^{h_\mu} \sum_{\sigma_\mu=1}^{h_\mu} A_\mu^{(\rho_\mu, \sigma_\mu)} \cdot \frac{\partial W}{\partial q_{\mu\rho_\mu}} \cdot \frac{\partial W}{\partial q_{\mu\sigma_\mu}} = \varphi_{\mu 0} + \alpha_1 \varphi_{\mu 1} + \cdots + \alpha_m \varphi_{\mu m}. \quad (G_\mu)$$

Hierin bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ willkürliche Konstanten, während die Grössen:

$$A_\mu^{(\rho_\mu, \sigma_\mu)} = A_\mu^{(\sigma_\mu, \rho_\mu)}$$

nur von den Variabeln:

$$q_{\mu 1}, q_{\mu 2}, \ldots, q_{\mu h_\mu}$$

abhängen. Ist dann:

$$V_\mu (q_{\mu 1}, \ldots, q_{\mu h_\mu}; \alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_{\mu 1}, \ldots, \beta_{\mu, h_\mu - 1})$$

eine *vollständige Lösung* der Gleichung (G_μ), so beweist man leicht, dass der Ausdruck:

$$W = V_1 + V_2 + \cdots + V_m$$

eine vollständige Lösung der Hamiltonschen Gleichung:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\Phi_{\mu 1}}{\Phi}\sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu}\sum_{\sigma_\mu=1}^{h_\mu} A_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}\cdot\frac{\partial W}{\partial q_{\mu\rho_\mu}}\cdot\frac{\partial W}{\partial q_{\mu\sigma_\mu}}=\frac{\Psi_1}{\Phi}+\alpha_1 \qquad (G^*)$$

darstellt.

Das dynamische Problem, das der Gleichung (G*) entspricht, ist characterisirt durch die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$T\equiv\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\Phi}{\Phi_{\mu 1}}\sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu}\sum_{\sigma_\mu=1}^{h_\mu} B_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}\, q'_{\mu\rho_\mu} q'_{\mu\sigma_\mu}=\frac{\Psi_1}{\Phi}+\alpha_1, \qquad (Q_1)$$

wo das System der h_μ^2 Grössen:

$$B_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}=B_\mu^{(\sigma_\mu,\rho_\mu)}$$

dem Systeme der h_μ^2 Grössen:

$$A_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}=A_\mu^{(\sigma_\mu,\rho_\mu)}$$

reciprok ist.

Beachtet man jetzt die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_{\mu\rho_\mu}}=\frac{\partial T}{\partial q'_{\mu\rho_\mu}}=\frac{\Phi}{\Phi_{\mu 1}}\sum_{\sigma_\mu=1}^{m} B_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}\, q'_{\mu\sigma_\mu}$$

und berechnet aus den Gleichungen (G_μ) die Konstanten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$, so erhält man die $m-1$ weiteren *quadratischen Integrale*:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\Phi\,\Phi_{\mu\nu}}{\Phi_{\mu 1}^2}\sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu}\sum_{\sigma_\mu=1}^{h_\mu} B_\mu^{(\rho_\mu,\sigma_\mu)}\, q'_{\mu\rho_\mu} q'_{\mu\sigma_\mu}=\frac{\Psi_\nu}{\Phi}+\alpha_\nu \quad (\nu=2,3,\ldots,m). \qquad (Q_\nu)$$

Hiermit ist erst die wahre Verallgemeinerung des berühmten Theorems von Liouville gefunden, nach der ich seit zehn Fahren gesucht habe. Gleichzeitig ergiebt sich hierdurch eine bemerkenswerte *Klassification der dynamischen Probleme*, die von n Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_n$ abhängen, nämlich in folgender Weise.

Lässt sich die zugehörige Hamiltonsche Gleichung auf die Form (G*) bringen, so will ich sagen, diese Gleichung entstehe durch *Composition* aus den m Gleichungen (G_μ). Zu jedem dynamischen Probleme gehört daher ein *Typus der Composition*, nämlich das System der Zahlen:

$$h_1, h_2, \ldots, h_m,$$

deren Summe gleich n ist. Die von mir ursprünglich betrachteten Probleme haben den Typus:

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = 1, \ldots, \qquad h_n = 1,$$

während das allgemeinste Problem in n Veränderlichen den Typus:

$$h_1 = n.$$

hat. Dazwischen schieben sich die Typen, bei denen $m = n - 1$, $n - 2, \ldots, 2$ ist, und deren Anzahl mit wachsendem n ausserordentlich rasch wächst.

3.

Setzt man im Besonderen:

$$\begin{array}{ll}
h_1 \quad = r, & q_1 \quad = q_{11}, \; q_2 = q_{12}, \ldots, \; q_r = q_{1r}, \\
h_2 \quad = 1, & q_{r+1} = q_{21}, \\
h_3 \quad = 1, & q_{r+2} = q_{31}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
h_{n-r+1} = 1; & q_n \quad = q_{n-r+1,1}
\end{array}$$

und:

$$\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{1}{\psi_\rho(q_1, q_2, \ldots, q_r)} \left(\frac{\partial W}{\partial q_\rho}\right)^2 = \varphi_{10} + \alpha_1 \varphi_{11} + \cdots + \alpha_{n-r+1} \varphi_{1,n-r+1}, \qquad (\mathrm{G}_1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial q_{r+\lambda-1}}\right)^2 = \varphi_{\lambda 0} + \alpha_1 \varphi_{\lambda 1} + \cdots + \alpha_{n-r+1} \varphi_{\lambda, n-r+1}, \qquad (\mathrm{G}_\lambda)$$

wo $\lambda = 2, 3, \ldots, n - r + 1$ sein soll, so wird:

$$T \equiv \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\Phi_{11}} \sum_{\varrho=1}^{r} \psi_\rho q'^2_\varrho + \frac{1}{2} \sum_\lambda \frac{\Phi}{\Phi_{\lambda 1}} q'^2_{r+\lambda-1} = \frac{\Psi_1}{\Phi} + \alpha_1 \qquad (\mathrm{Q}'_1)$$

und:

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi\,\Phi_{1\nu}}{\Phi_{11}^2} \sum_{\varrho=1}^{r} \psi_\rho q'^2_\varrho + \frac{1}{2} \sum_\lambda \frac{\Phi\,\Phi_{\lambda\nu}}{\Phi_{\lambda 1}^2} q'^2_{r+\lambda-1} = \frac{\Psi_\nu}{\Phi} + \alpha_\nu \qquad (\mathrm{Q}'_\nu)$$

für $\nu = 2, 3, \ldots, n - r + 1$, es sind also ausser dem Integrale der lebendigen Kraft noch $n - r$ weitere orthogonale quadratische Integrale vorhanden.

Die dynamischen Probleme, zu denen man so gelangt, sind — bis auf die Bezeichnung — mit den Problemen von Herrn di Pirro *identisch,* und man erkennt, dass die Integration der Differentialgleichungen dieser Probleme nur die Ausführung von $n - r$ Quadraturen und die Ermittelung einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen Gleichung (G_1) zwischen W, q_1, $q_2, \ldots, q_r$ verlangt.

Man wird jedoch zu Problemen mit m orthogonalen quadratischen Integralen auch dadurch gelangen, dass man $h_1, h_2, \ldots, h_m$ beliebig wählt und dafür sorgt, dass die Gleichungen (G_μ), aus denen (G^*) componirt wird, orthogonal ausfallen. Hieraus ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem.

Lässt sich bei einem dynamischen Probleme die Gleichung der lebendigen Kraft auf die Form bringen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\Phi}{\Phi_{\mu 1}} \sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu} \psi_\mu^{(\rho_\mu)}(q_{\mu 1}, \ldots, q_{\mu h_\mu}) q'^2_{\mu\rho_\mu} = \frac{\Psi_1}{\Phi} + \alpha_1,$$

so existiren noch $m-1$ weitere orthogonale quadratische Integrale:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\Phi\,\Phi_{\mu\nu}}{\Phi_{\mu 1}^2} \sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu} \psi_\mu^{(\rho_\mu)}(q_{\mu 1}, \ldots, q_{\mu h_\mu}) q'^2_{\mu\rho_\mu} = \frac{\Psi_\nu}{\Phi} + \alpha_\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, m),$$

und die Integration der Differentialgleichungen des Problems lässt sich zurückführen auf die Ermittelung einer vollständigen Lösung der m Hamiltonschen Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \sum_{\varrho_\mu=1}^{h_\mu} \frac{1}{\psi_\mu^{(\varrho_\mu)}} \left(\frac{\partial W}{\partial q_{\mu\rho_\mu}}\right)^2 = \varphi_{\mu 0} + \alpha_1 \varphi_{\mu 1} + \cdots + \alpha_m \varphi_{\mu m} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \quad (G_\mu)$$

Wahrscheinlich sind mit den Problemen, die durch dieses Theorem gegeben werden, *alle* Probleme erschöpft, bei denen die Gleichung der lebendigen Kraft orthogonal ist und gleichzeitig mindestens noch ein orthogonales quadratisches Integral existirt; hierauf hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

Koenigsberg, den 29 October 1896.

Una questione geometrica.

(Di Geminiano Pirondini, *a Parma.)*

A complemento di quanto ho esposto nella Memoria « *Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione* » (*), si noti quanto segue:

Se le figure simmetriche sono due linee L, L_1 e la superficie di rivoluzione fondamentale è Σ, si è condotti pure a considerare la linea Λ, luogo dei piedi delle normali a Σ condotte dai punti della linea L. Considerando allora i quattro elementi Σ, L, Λ, L_1, si dà origine a quattro questioni distinte, che sono le seguenti:

1. Date Σ, L determinare Λ, L_1.
2. Date Σ, Λ determinare L, L_1.
3. Date L, Λ determinare Σ, L_1.
4. Date L, L_1 determinare Σ, Λ.

Tutte queste questioni sono state risolte, in questo medesimo ordine, nella Memoria citata.

Se le figure simmetriche sono due superficie S, S_1, allora manca sopra Σ la linea Λ, giacchè i piedi delle normali condotte sopra Σ dei punti di S occupano tutta la superficie Σ o una sua porzione. Si hanno dunque soltanto i tre elementi Σ, S, S_1 e conseguentemente due sole questioni distinte.

1. Date Σ, S determinare S_1.
2. Date S, S_1 determinare Σ.

La prima è stata trattata nella Memoria citata, poichè la questione 1.ª quivi risolta comprende anche il caso che le due figure simmetriche siano superficie. La seconda questione invece viene trattata ora per la prima volta; si vedrà però che essa presenta alcune difficoltà, che non possono essere superate completamente che in qualche caso particolare.

(*) Annali di Matematica, 1891.

Se per l'asse della superficie di rotazione fondamentale Σ (asse delle z) si conduce un piano P arbitrario, le due superficie simmetriche S, S_1 rimangono segate in due linee L, L_1 corrispondenti. Chiamando quindi v l'angolo che il piano variabile P forma col piano coordinato $y=0$, le coordinate dei punti corrispondenti delle due superficie S, S_1 si possono rappresentare colle equazioni:

$$x = F(u, v)\cos v, \qquad y = F(u, v)\operatorname{sen} v, \qquad z = f(u, v)$$
$$x_1 = \Phi(t, v)\cos v, \qquad y_1 = \Phi(t, v)\operatorname{sen} v, \qquad z_1 = \varphi(t, v),$$

nelle quali F, f, Φ, φ sono simboli di quattro funzioni convenientemente scelte, u e t due parametri indipendenti da v, l'ultimo dei quali è da considerarsi funzione del primo.

Ne segue che le coordinate dei punti della superficie luogo dei punti medi dei segmenti che congiungono le infinite coppie di punti corrispondenti delle superficie S, S_1 sono rappresentate dalle equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} \xi = \frac{1}{2}\Big\{F(u, v) + \Phi(t, v)\Big\}\cos v \\ \eta = \frac{1}{2}\Big\{F(u, v) + \Phi(t, v)\Big\}\operatorname{sen} v, \qquad \zeta = \frac{1}{2}\Big\{f(u, v) + \varphi(t, v)\Big\}. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Bisogna anzitutto esprimere che questa superficie (1) è di rotazione attorno all'asse delle z, il che si fa ponendo la condizione che le due quantità:

$$F(u, v) + \Phi(t, v), \qquad f(u, v) + \varphi(t, v),$$

siano funzioni del solo parametro u; siccome t si suppone funzione di u soltanto, la condizione in discorso è esprimibile colle equazioni seguenti:

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(t, v)}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial \varphi(t, v)}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Inoltre le congiungenti coppie di punti corrispondenti delle superficie S, S_1 debbono essere normali alla superficie di rotazione Σ. Ma siccome, in causa del significato attribuito al parametro v, tali congiungenti incontrano necessariamente l'asse di Σ, è sufficiente porre la condizione che queste congiungenti sono normali dei meridiani di Σ.

E poichè i coseni direttivi delle congiungenti sono proporzionali alle quantità:

$$(F - \Phi)\cos v, \qquad (F - \Phi)\operatorname{sen} v, \qquad f - \varphi,$$

e i coseni direttivi delle tangenti ai meridiani di Σ sono proporzionali alle quantità:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du}\right)\cos v,\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du}\right)\operatorname{sen} v,\qquad \frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du},$$

la condizione da soddisfare è espressa dall'equazione:

$$(F-\Phi)\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du}\right)+(f-\varphi)\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{dt}{du}\right)=0. \tag{3}$$

Per risolvere dunque il nostro problema, bisogna che il parametro t sia tale funzione di u e le F, f, Φ, φ tali funzioni di u e v, che riescano soddisfatte le condizioni (2), (3).

In tal caso la superficie (1) riesce di rivoluzione attorno all'asse delle z, ed è appunto la superficie fondamentale Σ.

Applicazione I. Se le superficie simmetriche S, S_1 sono due superficie di rotazione cogli assi coincidenti coll'asse di Σ (asse delle z) si può mettere:

$$\begin{aligned} x &= u\cos v, & y &= u\operatorname{sen} v, & z &= U, \\ x_1 &= t\cos v\,, & y_1 &= t\operatorname{sen} v, & z_1 &= T \end{aligned} \tag{4}$$

essendo U una funzione di u e T di t. Si trova allora che le condizioni (2) sono identicamente soddisfatte e che la (3) diviene:

$$(u-t)\left(1+\frac{dt}{du}\right)+(U-T)\left(U'+T'\frac{dt}{du}\right)\cdot \tag{5}$$

Si vede quindi che le superficie S, S_1 non possono essere prese ad arbitrio.

Qualora la superficie S sia il piano coordinato $z=0$ e la S_1 una superficie di rotazione coll'asse coincidente coll'asse delle z, basta fare $U=0$ nella (5) e si ha così l'equazione differenziale:

$$(u-t)\left(1+\frac{dt}{du}\right)-TT'\frac{dt}{du}=0, \tag{6}$$

dalla cui integrazione dipende la soluzione del problema.

a) Si supponga, come caso speciale, che le altezze dei punti corrispondenti delle due superficie sul piano $z=0$ differiscano di una costante. Avendosi allora:

$$T=U+h,\qquad (h \text{ costante}),$$

l'equazione (5) diviene:

$$\left(1+\frac{dt}{du}\right)(u-t-hU')=0,$$

e si scinde nelle due seguenti:

$$1+\frac{dt}{du}=0, \qquad u-t-h\,U'=0.$$

La prima è priva d'importanza e la seconda dà:

$$t=u-h\,U'.$$

Si vede quindi che nel caso speciale considerato la superficie di rotazione (4) ha per simmetrica l'altra:

$$x_1=(u-h\,U')\cos v, \qquad y_1=(u-h\,U')\,\mathrm{sen}\,v, \qquad z_1=U+h;$$

e la superficie fondamentale Σ è quella definita dalle equazioni:

$$\xi=\left(u-\frac{h}{2}U'\right)\cos v, \qquad \eta=\left(u-\frac{h}{2}U'\right)\mathrm{sen}\,v, \qquad \zeta=U+\frac{h}{2}.$$

Applicando questo risultato, si trova che se la superficie obbiettiva S è un paraboloide, la superficie simmetrica S_1 e la superficie fondamentale Σ sono altri paraboloidi.

b) Si supponga di avere nella (6):

$$TT'+t=0, \quad \text{ossia} \quad T=\sqrt{m^2-t^2},$$

con m costante arbitraria. La (6) diviene allora:

$$u-t+u\frac{dt}{du}=0, \quad \text{e si può scrivere:} \quad \left(\frac{t}{u}\right)'du+\frac{du}{u}=0.$$

Siccome integrando si ricava:

$$t=u\cdot\log\frac{c}{u},$$

si conclude che nel caso particolare considerato il piano:

$$x=u\cos v, \qquad y=u\,\mathrm{sen}\,v, \qquad z=0,$$

ha per simmetrica la sfera:

$$x_1=u\cdot\log\frac{c}{u}\cdot\cos v, \qquad y_1=u\log\frac{c}{u}\cdot\mathrm{sen}\,v, \qquad z_1=\sqrt{m^2-\left(u\log\frac{c}{u}\right)^2};$$

e la superficie fondamentale Σ è quella definita dalle equazioni:

$$\xi=\frac{u}{2}\left(1+\log\frac{c}{u}\right)\cdot\cos v,$$

$$\eta=\frac{u}{2}\left(1+\log\frac{c}{u}\right)\cdot\mathrm{sen}\,v, \qquad \zeta=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\left(u\log\frac{c}{u}\right)^2}.$$

Applicazione II. La superficie S sia di rivoluzione attorno all' asse delle z, e la S_1 sia un cilindro colle generatrici parallele all' asse delle z. Essendo in questo caso:

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = U; \quad x_1 = V \cos v, \quad y_1 = V \operatorname{sen} v, \quad z_1 = t,$$

con U funzione arbitraria di u e V di v, la prima condizione (2) dà $V' = 0$, d'onde $V - h$; questa dimostra che il cilindro S_1 è di rivoluzione attorno all'asse delle z. La seconda (2) è identicamente soddisfatta e la (3) si trasforma nell' equazione:

$$u - h + (U - t)\left(U' + \frac{dt}{du}\right) = 0, \tag{7}$$

alla cui integrazione è ridotta la soluzione del problema.

Supponendo ad es. che sia $t = k\, U$ con k costante, la (7) diviene:

$$(k^2 - 1)\, U\, U' = u - h,$$

da cui integrando:

$$U = \sqrt{\frac{(u - h)^2}{k^2 - 1} + c},$$

con c costante arbitraria.

La superficie di rotazione S simmetrica del cilindro circolare S_1 è dunque la quadrica a centro:

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = \sqrt{\frac{(u - h)^2}{k^2 - 1} + c},$$

e la superficie di rotazione fondamentale Σ è l'altra quadrica a centro:

$$\xi = \frac{1}{2}(u + h) \cos v, \qquad \eta = \frac{1}{2}(u + h) \operatorname{sen} v, \qquad \zeta = \frac{1 + k}{2} \cdot \sqrt{\frac{(u - h)^2}{k^2 - 1} + c}.$$

Applicazione III. Le due superficie simmetriche S, S_1 siano due cilindri colle generatrici parallele all' asse del rotoide fondamentale Σ (asse delle z). Si ha allora:

$$x = V \cos v, \quad y = V \operatorname{sen} v, \quad z = u; \quad x_1 = V_1 \cos v, \quad y_1 = V_1 \operatorname{sen} v, \quad z_1 = U,$$

essendo V e V_1 funzioni arbitrarie di v e U di u.

La prima condizione (2) dà:

$$V' + V'_1 = 0, \quad \text{d'onde:} \quad V_1 = h - V,$$

con h costante. La seconda (2) è soddisfatta identicamente, e la (3) dà:

$$(u - U)(1 + U') = 0,$$

d'onde:

$$U = u, \quad \text{ovvero:} \quad U = k - u.$$

Il secondo valore di U porta alla condizione $\zeta =$ costante, che è priva d'importanza, riducendosi la Σ in tal caso a un cerchio. Tenendo quindi conto soltanto del primo valore di U, per definire Σ si hanno le equazioni:

$$\xi = \frac{1}{2} h \cdot \cos v, \qquad \eta = \frac{1}{2} h \cdot \operatorname{sen} v, \qquad \zeta = u,$$

le quali dimostrano che la superficie fondamentale Σ è un cilindro di rotazione attorno all'asse delle z.

Parma, novembre 1896.

Sulla riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio.

(*Di* M. Pannelli, *a Pavia.*)

Memoria Prima.

L'oggetto della presente Memoria, e delle altre che a questa faranno seguito, è la riduzione delle singolarità di una superficie algebrica per mezzo di trasformazioni birazionali dello spazio. Nel primo paragrafo viene studiata una speciale trasformazione cubica birazionale; nel secondo, un caso particolare di questa, e nel terzo, la trasformazione prodotto delle due precedenti. Le proprietà di questa ultima trasformazione potrebbero essere omesse; ma la loro conoscenza facilita alcune dimostrazioni, e di più le formole della trasformazione medesima sono utili per le ulteriori ricerche. Il paragrafo quarto è consacrato ad applicare la trasformazione stabilita nel secondo, ad una data superficie F dell'ordine n, dotata di un punto i-^{plo}, in cui il cono tangente è semplice e possiede una generatrice j-^{pla} di natura qualsiasi, superficie alla quale è dapprima rivolto lo studio attuale. Infine nel paragrafo quinto viene applicata la trasformazione del primo, alla superficie F', trasformata di F.

§ 1.

1. Suppongasi di avere due spazi Σ e Σ' e in essi prendansi due stelle di centri O ed O', fra i raggi delle quali abbia luogo una trasformazione quadratica Ω. Siano a, b, c i raggi fondamentali della prima stella; a', b', c', quelli della seconda, in modo che ai raggi a, b, c, od a', b', c' corrispondono rispettivamente i piani $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ o bc, ca, ab. Inoltre prendansi nei

due spazi anzidetti due fasci di piani di assi s ed s', e fra questi stabiliscasi una proiettività Π in guisa che ai piani $O\,s$, α, β del primo fascio corrispondano nel secondo i piani $O'\,s'$, α', β', essendo α e β due piani qualsivogliano dell'un fascio e α', β' due piani qualsivogliano dell'altro. In tal maniera resta stabilita fra i punti dei due spazi Σ e Σ' una corrispondenza birazionale. Infatti, un punto qualunque P di Σ determina un raggio $r \equiv P\,O$ nella stella (O) e un piano $\sigma \equiv P\,s$ nel fascio (s). A quel raggio corrisponde in Ω un raggio r' della stella (O'), e a questo piano corrisponde in Π un piano σ' del fascio (s'). Il raggio r' incontra il piano σ' in un punto P', che si considererà come il punto di Σ' corrispondente al punto P dato in Σ. Viceversa ad un punto P' di Σ' corrisponde nello stesso modo, un punto P in Σ. La trasformazione birazionale così individuata è precisamente quella che costituisce l'oggetto di questo primo paragrafo.

2. Innanzi tutto è facile trovare le formole di siffatta trasformazione. I piani $b\,c$, $c\,a$, $a\,b$ ed α prendansi come facce

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 0,$$

del tetraedro fondamentale di Σ, e parimenti i piani $b'\,c'$, $c'\,a'$, $a'\,b'$ ed α' come facce

$$x_1' = 0 \qquad x_2' = 0 \qquad x_3' = 0 \qquad x_4' = 0,$$

del tetraedro fondamentale di Σ'. Per l'ipotesi che fra i raggi delle due stelle di centri

$$O\,(x_1 = x_2 = x_3 = 0) \quad \text{ed} \quad O'\,(x_1' = x_2' = x_3' = 0),$$

ha luogo una trasformazione quadratica, si ha intanto

$$\left.\begin{aligned} \rho\,x_1 &= x_2'\,x_3' \\ \rho\,x_2 &= x_3'\,x_1' \\ \rho\,x_3 &= x_1'\,x_2', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

essendo ρ un fattore di proporzionalità. Inoltre siano

$$p = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 = 0, \qquad p' = a_1'\,x_1' + a'_2\,x'_2 + a_3'\,x_3' = 0,$$

le equazioni dei due piani $O\,s$ ed $O'\,s'$; e quindi

$$p = 0,\ x_4 = 0 \quad \text{e} \quad p' = 0,\ x_4' = 0,$$

quelle delle due rette s ed s'. Allora i due fasci di piani aventi per assi queste due rette hanno per equazioni

$$p + \lambda\,x_4 \equiv 0 \qquad p' + \lambda\,x_4' = 0, \tag{2}$$

dove λ è un parametro variabile. E scritte così le loro equazioni, i fasci medesimi risultano proiettivi e in essi i piani $O\,s$ ed $O'\,s'$ sono corrispondenti.

Ciò stabilito, prendasi un punto P' nello spazio Σ', ossia attribuiscasi alle variabili x_1', x_2', x_3', x_4' un sistema di valori particolari. Sostituiti questi valori nella seconda delle equazioni (2), resta determinato un valore del parametro λ, quel valore che dà il piano del fascio (s') che passa per il punto P'. Ponendo questo valore di λ nella prima delle (2), si ottiene:

$$p\,x_4' - p'\,x_4 = 0,$$

e questa è l'equazione del piano del fascio (s) corrispondente nella proiettività Π al piano anzidetto del fascio (s'). Ora, le prime tre coordinate del punto P di Σ corrispondente al punto P' preso in Σ' sono date dalle formole (1) e sostituiti i valori di tali coordinate alle variabili x_1, x_2, x_3, nella equazione precedente, si ottiene

$$(a_1\,x_2'\,x_3' + a_2\,x_3'\,x_1' + a_3\,x_1'\,x_2')\,x_4' - p'\,.\,\rho\,x_4 = 0,$$

donde

$$\rho\,x_4 = \frac{q'\,x_4'}{p'}\,,$$

se per brevità si pone

$$q' = a_1\,x_2'\,x_3' + a_2\,x_3'\,x_1' + a_3\,x_1'\,x_2'.$$

Quindi le coordinate del punto P sono:

$$\left.\begin{aligned} \rho\,x_1 &= p'\,x_2'\,x_3' \\ \rho\,x_2 &= p'\,x_3'\,x_1' \\ \rho\,x_3 &= p'\,x_1'\,x_2' \\ \rho\,x_4 &= q'\,x_4'. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Analogamente le formule che dànno le coordinate del punto P' di Σ' corrispondente ad un punto P di Σ sono:

$$\left.\begin{aligned} \rho'\,x_1' &= p\,x_2\,x_3 \\ \rho'\,x_2' &= p\,x_3\,x_1 \\ \rho'\,x_3' &= p\,x_1\,x_2 \\ \rho'\,x_4' &= q\,x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

dove ρ' è un fattore di proporzionalità ed inoltre si è posto

$$q = a_1'\,x_2\,x_3 + a_2'\,x_3\,x_1 + a_3'\,x_1\,x_2.$$

3. In virtù delle formule (3) si ha che ad un piano V di Σ, condotto per il punto O, e che quindi ha per equazione

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

corrisponde in Σ' il luogo di cui l'equazione è

$$p' (v_1 x_2' x_3' + v_2 x_3' x_1' + v_3 x_1' x_2') = 0,$$

e che perciò si scinde nel piano fisso $O' s'$ e in un cono quadrico Γ'. Questo cono circoscritto al triedro $O'. a' b' c'$ è appunto il cono della stella (O') corrispondente nella trasformazione Ω al piano dato V. Prescindendo dal piano fisso $O' s'$, si ha dunque:

I. « Ad un piano V di Σ condotto per il punto O, corrisponde in Σ' « un cono quadrico Γ' circoscritto al triedro $O'. a' b' c'$. »

In particolare al piano $O s$, di cui l'equazione è $p = 0$, corrisponde il cono C', che ha per equazione $q' = 0$. Questo cono viene tagliato dal piano $O' s'$ in due rette, che si indicheranno con d', e'.

Dal teorema precedente segue subito l'altro.

II. « Ad una retta di Σ condotta per il punto O, corrisponde in Σ' « una retta passante per il punto O'. »

Sia

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

l'equazione di un piano U di Σ. Per le formule (3), a questo piano corrisponde in Σ' una superficie φ' che ha per equazione

$$(u_1 x_2' x_3' + u_2 x_3' x_1' + u_3 x_1' x_2') p' + u_4 q' x_4' = 0,$$

quindi la superficie φ' è intanto del 3.° ordine. Inoltre essa possiede in O' un punto doppio conico e il cono ivi tangente ha per equazione $q' = 0$, epperò è il cono fisso C'. Infine contiene le rette a', b', c', d', e' s', come è facile verificare. Dunque:

III. « Ad un piano qualunque U di Σ corrisponde in Σ' una super- « ficie φ' del 3.° ordine, la quale possiede in O' un punto doppio conico, in « cui il cono tangente è il cono fisso C' e inoltre passa semplicemente per « le rette a', b', c', d', e', s'. »

Quindi *gli elementi fondamentali* dello spazio Σ' sono il punto O' e le sei rette a', b', c', d', e', s' di cui le prime cinque concorrono in O' e l'ultima giace nel piano determinato dalla quarta e dalla quinta.

Una retta qualunque R di Σ può sempre essere considerata come l'intersezione di un piano V che la proietta da O con un piano U passante per essa. Al primo di questi due piani corrisponde in Σ' (*I*) un cono Γ'; al secondo, (*III*), una superficie φ'. Quel cono, di 2.° ordine, e questa superficie, del 3.°, hanno in comune le tre rette semplici a', b', c'; quindi s'intersecano, fuori di queste, secondo una cubica gobba S'. — La completa intersezione delle due superficie deve possedere in O' un punto quadruplo, essendo O' un punto doppio per ciascuna delle superficie stesse; ma soltanto le rette a', b', c', passanti per O' fanno parte, come linee semplici, di questa intersezione, dunque la cubica S' passa per O'. I due coni Γ' e C' hanno in comune le tre rette a', b', c'; quindi s'intersecano ulteriormente secondo una retta passante per O', la quale è la tangente in questo punto alla curva S'. Dunque la tangente alla curva S' nel punto O' è una generatrice del cono fisso C'. — Il cono Γ' incontra la retta s', che appartiene alla superficie φ', in due punti, per i quali passa evidentemente la cubica S'. — Il cono Γ' non contiene le due rette d', e'; quindi la curva S' non si appoggia (in punti variabili) a nessuna di queste due rette. — Infine il piano tangente al cono Γ' lungo la retta a' $(x_2'=0,\ x_3'=0)$ ha per equazione

$$v_3\, x_2' + v_2\, x_3' = 0,$$

e il piano tangente in un punto $(\alpha_1',\ o,\ o,\ \alpha_4')$ della medesima retta a' alla superficie φ' ha per equazione

$$(u_3\, a_1'\, \alpha_1' + u_4\, a_3\, \alpha'_4)\, x_2' + (u_2\, a'_1\, \alpha_1' + u_4\, a_2\, \alpha'_4)\, x_3' = 0.$$

Ora questo piano coincide con il precedente, se si ha:

$$k\, v_3 = u_3\, a_1'\, \alpha_1' + u_4\, a_3\, \alpha_4'$$

$$k\, v_2 = u_2\, a_1'\, \alpha_1' + u_4\, a_2\, \alpha_4',$$

essendo k un fattore di proporzionalità. Eliminando questo fattore, si ottiene

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_4'} = \frac{u_4\,(a_2\, v_3 - a_3\, v_2)}{a_1'\,(v_2\, u_3 - v_3\, u_2)}.$$

Dunque sopra la retta a' esiste un punto (quello che ha per coordinate i valori di α_1' e α_4' ora determinati) in cui il piano tangente al cono Γ' coincide col piano tangente alla superficie φ'. In questo punto le due superficie si toccano, quindi la loro completa intersezione deve ivi possedere un punto doppio, epperò la cubica S' passa per il punto medesimo. Riepilogando si ha dunque:

IV. « Ad una retta qualunque R di Σ corrisponde in Σ' una cubica « gobba S', la quale passa per il punto O' e tocca ivi il cono fisso C'. Inoltre « essa si appoggia in due punti (variabili) alla retta s', in un punto (variabile)

« a ciascuna delle tre rette a', b', c' e in nessun punto (variabile) a ciascuna « delle due rette d', e'. »

La perfetta analogia delle costruzioni con le quali si trova il punto P (o P') di Σ (o Σ') corrispondente ad un punto P' (o P) dato in Σ' (o Σ) (n.° 1) mostra che le proprietà mediante le quali si passa dal primo spazio al secondo servono ancora a passare da questo a quello. In particolare al piano $O' s'$ di Σ' corrisponde in Σ un cono quadrico C, circoscritto al triedro $O . a\, b\, c$ e avente per equazione $q = 0$. Questo cono viene tagliato dal piano $O s$ in due rette d ed e, le quali (II) corrispondono rispettivamente alle rette d' ed e'. Il punto O e le rette a, b, c, d, e, s sono gli elementi fondamentali di Σ. Inoltre teoremi affatto analoghi ai precedenti dànno le superficie φ e le curve S di Σ corrispondenti ai piani U' e alle rette R' di Σ'.

4. Ad una retta di Σ condotta per O corrisponde in Σ' (3. II) una retta passante per O'. I due fasci proiettivi di piani (s) ed (s') determinano sopra queste due rette due punteggiate proiettive, due punti corrispondenti delle quali sono (1) punti corrispondenti della trasformazione birazionale fra i due spazi Σ e Σ'. Quindi, poichè al piano $O s$ del fascio (s) corrisponde nella proiettività Π il piano $O' s'$ del fascio (s'), si ha:

I. « Ad un punto di Σ infinitamente vicino ad O corrisponde, in « generale, in Σ' un punto infinitamente vicino ad O'. »

Sia P un punto qualunque del piano $O s$. Poichè nella trasformazione Ω, al piano $O s$ corrisponde il cono C'; al raggio $P O$ corrisponde nella trasformazione stessa una generatrice g' di questo cono. Inoltre il punto P determina nel fascio (s) il piano $O s$, cui per la proiettività Π, corrisponde nel fascio (s') il piano $O' s'$, il quale incontra quella generatrice g' nel punto O'. Dunque ad un punto P del piano $O s$ corrisponde in Σ' il punto O', o meglio, il punto ω' infinitamente vicino ad O' sulla generatrice g'. Questa generatrice non cambia quando il punto P si muove descrivendo la retta $P O$ del piano $O s$; dunque ad ogni punto di questa retta corrisponde l'anzidetto punto ω'; opperò:

II. « Ad un punto P del piano $O s$ di Σ corrisponde, in generale, in « Σ' un punto ω' infinitamente vicino ad O' sopra una determinata genera- « trice del cono C'. Questo punto ω' non varia se il punto P si muove de- « scrivendo la retta $O P$ del piano $O s$. »

In virtù di questo teorema applicato allo spazio Σ', si ha l'altro:

III. « Ad un punto ω di Σ infinitamente vicino ad O e apparte- « nente al cono C corrisponde in Σ' una retta passante per il punto O' e

« situata sul piano $O' s'$; e quindi al punto O corrisponde, in questa maniera, « il piano $O' s'$. »

Sia P un punto della retta d (od e). Il raggio $P O$ coincide con d (od e), cui corrisponde nella trasformazione Ω la retta d' (od e') (3). Il piano $P s$ coincide con $O s$ cui corrisponde nella proiettività Π il piano $O' s'$. Ma questo piano contiene la retta d' (od e'); dunque ogni punto di questa corrisponde al punto dato; epperò:

IV. « Ad ogni punto della retta d od e di Σ corrisponde in Σ' la « retta d od e'. »

Sia P un punto della retta s. Alla retta $P O$ corrisponde in Ω una generatrice g' nel cono C'. Il piano che il punto P somministra nel fascio (s) è nel caso attuale indeterminato, cioè ogni piano di questo fascio può essere considerato come piano $P s$, al quale quindi corrisponde nella proiettività Π ogni piano del fascio (s'). Ogni punto dell'anzidetta generatrice g' corrisponde dunque al punto dato P, epperò:

V. « Ad un punto P della retta s di Σ corrisponde in Σ' una generatrice del cono C', e quindi alla retta s corrisponde il cono C'. »

Infine sia P un punto della retta a, o b, o c, e per esempio della prima. Il raggio $P O$ coincide con a, cui corrisponde in Ω il piano $b' c'$. Al piano $P s$ del fascio (s) corrisponde in Π un piano del fascio (s') il quale taglia il piano $b' c'$ secondo una retta appoggiata all'asse s' nel punto in cui l'asse medesimo incontra il piano $b' c'$. Questa retta corrisponde al punto dato P. Dunque:

VI. « Ad un punto P della retta a, o b, o c, di Σ corrisponde in « Σ' una retta del piano $b' c'$, o $c' a'$, o $a' b'$, appoggiata alla retta s'; e quindi « alle rette a, b, c, corrispondono rispettivamente i piani $b' c'$, $c' a'$, $a' b'$. »

5. Un piano di Σ condotto per la retta s ha per equazione

$$p + \lambda x_4 = 0.$$

Quindi gli corrisponde in Σ' il luogo di cui l'equazione è

$$q' (p' + \lambda x_4') = 0,$$

e che perciò si scinde nel cono C' e in un piano che è appunto il piano del fascio (s') corrispondente nella proiettività Π al piano dato nel fascio (s). Prescindendo dal cono fisso C'. che (4, V) è l'ente geometrico di Σ' corrispondente alla retta s, si ha dunque:

I. « Ad un piano di Σ condotto per la retta s corrisponde in Σ' un « piano passante per la retta s'. »

Una retta di Σ appoggiata alla retta s determina due piani: uno passante per s e l'altro per O. Al primo corrisponde in Σ' (I) un piano passante per s'; al secondo, $(3, I)$, un cono quadrico circoscritto al triedro $O'.a'b'c'$. Quindi alla retta data corrisponde la conica secondo cui quel piano taglia questo cono; epperò:

II. « Ad una retta di Σ appoggiata alla retta s corrisponde in Σ' « una conica appoggiata in due punti alla retta s' e in un punto a ciascuna « delle rette a' b' c'. »

Inoltre:

III. « Fra i punti di due piani corrispondenti di Σ e di Σ' passanti « per le rette s ed s', ha luogo una trasformazione quadratica, per la quale « sono fondamentali sopra ciascun piano i punti in cui questo incontra le rette « fondamentali della trasformazione Ω appartenente allo spazio in cui giace « il piano che si considera. »

Come il teorema I si dimostra l'altro:

IV. « Ad un piano di Σ condotto per una delle rette a, b, c cor- « corrisponde in Σ' un piano passante per la retta omologa. »

Una retta di Σ appoggiata ad a si può sempre riguardare come l'intersezione del piano che la proietta da a con un piano condotto ad arbitrio per essa. Al primo piano corrisponde in Σ' (IV) un piano passante per a'; al secondo (3, III), una superficie del 3.° ordine φ', la quale contiene la retta a', epperò viene incontrata dall'anzidetto piano, oltre a', secondo una conica. Questa passa per O', perchè la completa intersezione delle due superficie deve possedere in O' un punto doppio. Inoltre tocca in O' il cono C', essendo questo il cono tangente in O' alla superficie φ'. Infine si appoggia alla retta s' nel punto in cui questa incontra il piano in cui la conica è contenuta. Dunque:

V. « Ad una retta di Σ appoggiata ad una delle rette fondamentali « a, b, c corrisponde in Σ' una conica la quale passa per il punto O' e tocca « ivi il cono C', si appoggia in un altro punto, oltre O, alla retta a' o b' o c' « e infine si appoggia in un punto alla retta s'. »

Da questo teorema segue:

VI. « Fra i punti di due piani corrispondenti di Σ e di Σ' passanti « per due rette omologhe a e a', o b e b', o c e c', ha luogo una trasforma- « zione quadratica, per la quale sono fondamentali sopra ciascun piano il punto « in cui questo incontra la retta s o s', il punto O od O', e il punto a questo « infinitamente vicino sulla generatrice che il cono C, o C', ha in comune « col piano che si considera, oltre la retta fondamentale per cui questo passa. »

Ad un piano di Σ condotto per la retta d corrisponde in Σ' un cono quadrico circoscritto al quadrispigolo $O'.a'b'c'd'$, mentre ad un piano qualunque U corrisponde una superficie del 3.° ordine φ', la quale contiene le quattro rette a', b', c', d'. Quindi questa superficie viene ulteriormente incontrata da quel cono secondo una conica, la quale si appoggia in un punto a ciascuna delle rette a', b', c', d (nel punto in cui il cono e la superficie si toccano), e in un punto alla retta s' (nel punto in cui questa incontra il cono fuori della retta d). Questa conica è la curva di Σ' corrispondente all'intersezione dei due piani considerati in Σ, la quale è una retta appoggiata alla retta d. Dunque:

VII. « Ad una retta di Σ appoggiata in un punto alla retta d, od e, « corrisponde in Σ' una conica, la quale si appoggia in un punto a ciascuna « delle rette a', b', c', d' (od e'), s'. »

Il piano Os viene incontrato dai piani bc, ca, ab in tre rette l, m, n concorrenti in O. Si consideri un piano di Σ che passi per una di queste tre rette, per esempio, per la prima. La sua equazione è

$$p + \lambda x_1 = 0,$$

essendo λ un parametro variabile; quindi a quel piano corrisponde in Σ' il cono quadrico Γ' che ha per equazione

$$q' + \lambda x'_2 x'_3 = 0,$$

e che perciò viene toccato lungo la retta a' ($x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$) dallo stesso piano tangente lungo la retta medesima al cono C' ($q' = 0$). Questo cono Γ viene tagliato da una superficie φ', fuori delle rette a', b', c', secondo una cubica gobba, la quale, per la proprietà ora osservata dei coni Γ' e C', tocca in O' la retta a'. Inoltre la stessa cubica oscula in O' il piano di Σ' corrispondente al piano al di Σ. Dunque:

VIII. « Ad una retta di Σ appoggiata ad una delle tre rette l, m, n « corrisponde in Σ' una cubica gobba, la quale passa per il punto O' e tocca « ivi la retta a', o b', o c', ed oscula il piano di Σ' corrispondente al piano « al, o bl, o cl di Σ, si appoggia in due punti alla retta s', e in un punto « a ciascuna delle due rette b' e c', o c' e a', o a' e b'. »

§ 2.

6. Il caso particolare della trasformazione precedente che viene studiato in questo paragrafo, nasce supponendo che l'asse del fascio di piani (s) dello spazio Σ si appoggi ad una, per esempio ad a, delle tre rette fondamentali della stella (O). Perchè ciò avvenga basta supporre che il piano Os passi per la retta a, il che ha luogo se nella sua equazione si pone $a_1 = 0$, in modo che l'equazione stessa diventa

$$p = a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Il punto d'appoggio A delle due rette s ed a è allora il vertice $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ del tetraedro fondamentale di Σ. Inoltre, essendo $a_1 = 0$, si ha

$$q' = a_2 x'_3 x'_1 + a_3 x'_1 x'_2 = r' x'_1,$$

ponendo:

$$r' = a_2 x'_3 + a_3 x'_1.$$

Quindi le formule (3) e (4) diventano per il caso attuale:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= p' x'_2 x'_3 \\ \rho x_2 &= p' x'_3 x'_1 \\ \rho x_3 &= p' x'_1 x'_2 \\ \rho x_4 &= r' x'_1 x'_4 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho' x'_1 &= p x_2 x_3 \\ \rho' x'_2 &= p x_3 x_1 \\ \rho' x'_3 &= p x_1 x_2 \\ \rho' x'_4 &= q x_4, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dove p' e q hanno i significati già loro attribuiti. Si noti infine che nello stesso caso il cono C di Σ, corrispondente al piano $O' s'$ di Σ', viene tagliato dal piano Os in due rette, una delle quali è la medesima retta a e l'altra è una retta distinta da questa, che si chiamerà d; e che al piano Os ($p = 0$) di Σ corrisponde un luogo che si scinde nei due piani $r' = 0$ e $x'_1 = 0$, il primo dei quali incontra il piano $O' s'$ in una retta d', che è la corrispondente di d.

7. Ad un piano U' di Σ' avente per equazione

$$u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + u'_3 x'_3 + u'_4 x'_4 = 0,$$

corrisponde in Σ una superficie φ di cui l'equazione è:

$$(a_2 x_2 + a_3 x_3)(u'_1 x_2 x_3 + u'_2 x_3 x_1 + u'_3 x_1 x_2) + u'_4 (a'_1 x_2 x_3 + a'_2 x_3 x_1 + a'_3 x_1 x_2) x_4 = 0.$$

Quindi, come nel caso generale, la superficie φ è del 3.° ordine e possiede in O un punto doppio conico in cui il cono tangente è il cono fisso C. Ma ora essa possiede un altro punto doppio conico nel punto A, in cui il cono tangente ha per equazione

$$(a_2 x_2 + a_3 x_3)(u'_2 x_3 + u'_3 x_2) + u'_4 (a'_2 x_3 + a'_3 x_2) x_4 = 0,$$

e quindi è variabile col variare della superficie φ. Il piano tangente a questo cono e al precedente lungo la retta a ha per equazione

$$t = a'_3 x_2 + a'_2 x_3 = 0;$$

esso tocca la superficie φ in ogni punto della medesima retta a ed inoltre non cambia col cambiare di φ. Questa superficie infine contiene manifestamente le rette b, c, d ed s. Dunque:

I. « Ad un piano qualunque U' di Σ' corrisponde in Σ una superficie del 3.° ordine φ, la quale possiede due punti doppi conici: uno in O e l'altro in A. In quello il cono tangente è il cono fisso C; in questo, il cono tangente è variabile. Inoltre essa tocca lungo la retta a il piano fisso t e passa semplicemente per le rette b, c, d ed s. »

Quindi gli elementi fondamentali dello spazio Σ sono i due punti O ed A, le rette $a \equiv OA$, b, c, d, concorrenti in O, la retta e del piano t infinitamente vicina ad a, e la retta s uscente da A è appoggiata in un punto D alla retta d.

Come nel caso generale si ha qui:

II. « Ad un piano qualunque V' di Σ' condotto per il punto O' corrisponde in Σ un cono quadrico Γ circoscritto al triedro $O . a b c$. »

Dai due teoremi precedenti è facile dedurre l'altro:

III. « Ad una retta qualunque R' di Σ' corrisponde in Σ una cubica gobba S, la quale passa per i due punti A ed O e tocca in quest'ultimo il cono fisso C. Inoltre essa si appoggia in un punto variabile, fuori di O, a ciascuna delle rette b e c, in un punto variabile, fuori di A, alla retta s e in nessun punto variabile alla retta d. »

Ed inoltre:

IV. « Ad una retta di Σ' condotta per O' corrisponde in Σ una « retta passante per O. »

8. Ad un piano U di Σ avente per equazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

corrisponde in Σ' una superficie φ' di cui l'equazione è

$$(u_1 x'_2 x'_3 + u_2 x'_3 x'_1 + u_3 x'_1 x'_2) p' + u_4 r' x'_1 x'_4 = 0.$$

Quindi la superficie φ', ancora del 3.° ordine, possiede in O' non più un punto doppio conico, come nel caso generale, ma un punto doppio biplanare, in cui i piani tangenti sono i piani fissi r' $(r' = 0)$ e $b' c'$ $(x'_1 = 0)$. Inoltre essa contiene le rette secondo cui il piano $O' s'$ $(p' = 0)$ taglia i tre piani r', α' $(x'_4 = 0)$ e $b' c'$, le prime due delle quali sono le rette d' ed s' e l'ultima è una retta che si dirà e'; infine contiene pure le rette a', b', c'. Dunque:

I. « Ad un piano qualunque U di Σ corrisponde in Σ' una superficie « del 3.° ordine φ', la quale possiede in O' un punto doppio biplanare, in cui « i piani tangenti sono i piani fissi r' e $b' c'$ e inoltre passa semplicemente « per le rette a', b', c', d', e', s'. »

Quindi gli elementi fondamentali di Σ' sono il punto O' e le rette a', b', c', d', e', s', di cui le prime cinque concorrono in O', mentre l'ultima si appoggia a d' e ad e' nei punti che si indicheranno con D' e E'.

In particolare anche qui si ha:

II. « Ad un piano V di Σ condotto per O corrisponde in Σ' un cono « quadrico Γ' circoscritto al triedro $O' . a' b' c'$. »

Inoltre sia

$$w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 = 0,$$

l'equazione di un piano W di Σ condotto per il punto A. A questo piano corrisponde in Σ' il luogo che ha per equazione

$$[(w_2 x'_3 + w_3 x'_2) p' + w_4 r' x'_4] x'_1 = 0,$$

e che perciò si scinde nel piano $b' c'$ e in una quadrica Φ', la quale tocca nel punto O' il piano r' e inoltre passa per le rette a', d', s'. Dunque:

III. « Ad un piano W di Σ condotto per il punto A corrisponde « in Σ' una quadrica Φ', la quale passa per il punto O' e tocca ivi il piano « r' ed inoltre contiene le rette a', d', s'. »

Una retta qualunque R di Σ può sempre essere considerata come l'intersezione di un piano V condotto per O con un piano W condotto per A. A quel piano corrisponde in Σ' un cono Γ' (II); a questo, una quadrica Φ' (III), la quale ha in comune con l'anzidetto cono la retta a'. Quindi si riconosce immediatamente.

IV. « Ad una retta qualunque R di Σ corrisponde in Σ' una cubica « gobba S, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il piano r'. Inoltre si « appoggia in due punti variabili alla retta s', in un punto variabile, oltre O', « a ciascuna delle rette a', b', c' e in nessun punto variabile a ciascuna delle « rette d' ed e'. »

9. Il teorema I del n.° 4 rimane inalterato per l'attuale caso particolare. Lo stesso accade del teorema II, quando esso si applichi allo spazio Σ', mentre se si applica allo spazio Σ, poichè ora al piano Os di Σ corrisponde in Σ' (6) al piano r', si cambia nel seguente:

I. « Ad un punto P del piano Os di Σ corrisponde, in generale, « un punto w' del piano r' infinitamente vicino ad O'. Questo punto w' non « varia, se il punto P si muove descrivendo il raggio PO del piano Os. »

Quindi al teorema III del n.° 4, quando si parta dallo spazio Σ', si sostituisce l'altro:

II. « Ad un punto w' di Σ' infinitamente vicino ad O' e apparte- « nente al piano r' corrisponde in Σ una retta passante per il punto O e si- « tuata sul piano Os; e quindi al punto O' corrisponde, in questa maniera, « il piano Os. »

Come il teorema IV dello stesso n.° 4, si dimostra:

III. « Ad ogni punto della retta d, od a, di Σ corrisponde in Σ' la « retta d' o e'. »

Il teorema V del già citato n.° 4 resta immutato, se si riferisce allo spazio Σ'; se invece si riferisce allo spazio Σ, diventa:

IV. « Ad ogni punto P della retta s di Σ corrisponde in Σ' una « retta passante per il punto O' e situata sul piano r'; e quindi alla retta s « corrisponde il piano r'. »

Il teorema VI, applicato alla spazio Σ, vale soltanto per le due rette b e c.

Infine dalla dimostrazione del teorema III del n.° precedente risulta altresì:

V. « Al punto fondamentale A di Σ corrisponde in Σ' il piano $b'c'$. »

10. I teoremi I e IV del n.° 5 valgono anche nel caso particolare ora in esame. Ciò osservato, si consideri una retta R di Σ condotta per il

punto A. Essa determina due piani, uno passante per la retta s e l'altro per la retta a, ai quali, per l'osservazione fatta, corrispondono in Σ' rispettivamente un piano passante per s' e l'altro per a'. Questi ultimi due piani si tagliano secondo una retta R', appoggiata alle due rette s' ed a'. Dunque:

I. « Ad una retta di Σ condotta per il punto A corrisponde in Σ' « una retta appoggiata alle due rette s' ed a', e viceversa. »

Per il teorema V del n.° precedente si ha che ad ogni punto di Σ infinitamente vicino ad A corrisponde in Σ' un punto del piano $b'c'$. Ora per il teorema testè dimostrato si può dire più precisamente. Ad ogni punto P di Σ infinitamente vicino ad A corrisponde in Σ' il punto P' in cui il piano $b'c'$ viene incontrato dalla retta R' di Σ' corrispondente alla retta R di Σ passante per A e individuata dal punto dato P. Viceversa ad ogni punto P' di Σ' preso sopra il piano $b'c'$, corrisponde in Σ il punto P infinitamente vicino ad A sulla retta R passante per A e corrispondente alla retta Σ condotta per il punto P' ed appoggiata alle due rette s ed a'.

Se al punto P infinitamente vicino ad A si sostituisce la retta R che lo congiunge ad A, la corrispondenza precedente può intendersi stabilita fra i punti del piano $b'c'$ e le rette della stella (A). Le formule mediante le quali in questa corrispondenza si passa da un punto P' del piano $b'c'$ alla retta corrispondente R della stella (A), sono in virtù delle (5), le seguenti:

$$\rho\, x_2 = (a'_2\, x'_2 + a'_3\, x'_3)\, x'_3$$

$$\rho\, x_3 = (a'_2\, x'_2 + a'_3\, x'_3)\, x'_2$$

$$\rho\, x_4 = (a_3\, x'_2 + a_2\, x'_3)\, x'_4\,,$$

nelle quali x_2, x_3, x_4 si riguardino come le coordinate di una retta della stella (A). Risolvendo queste equazioni rispetto x'_2, x'_3, x'_4 si ottengono le formule

$$\rho'\, x'_2 = (a_2\, x_2 + a_3\, x_3)\, x_3$$

$$\rho'\, x'_3 = (a_2\, x_2 + a_3\, x_3)\, x_2$$

$$\rho'\, x'_4 = (a'_3\, x_2 + a'_2\, x_3)\, x_4\,,$$

che servono al passaggio inverso.

Quindi ad un piano W della stella (A) corrisponde sul piano $b'c'$ una conica che tocca nel punto O' la retta a_1 di equazione

$$a_3\, x'_2 + a_2\, x'_3 = 0\,,$$

e che passa per il punto E', intersezione delle rette, le cui equazioni sono:

$$a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 = 0, \qquad x'_4 = 0.$$

Quella conica è l'intersezione del piano $b'c'$ con la quadrica Φ' di Σ' corrispondente (8, III) al piano W condotto per A. La retta a_1 è l'intersezione dei due piani r' e $b'c'$ e il punto E' è il punto d'incontro della retta s' col piano $b'c'$.

Così ad una retta del piano $b'c'$ corrisponde nella stella (A) un cono quadrico, che tocca lungo la retta a il piano fisso t di equazione

$$a'_3 x_2 + a'_2 x_3 = 0,$$

e che passa per la retta s. Questo cono è quello che nel punto A tocca la superficie φ di Σ corrispondente (7, I) ad un piano di Σ' condotto per la retta data sul piano $b'c'$.

Riepilogando si ha dunque:

II. « Fra le rette della stella (A) e i punti del piano $b'c'$ ha luogo « una trasformazione quadratica. I punti fondamentali del piano sono E', O' « e il punto a questo infinitamente vicino sulla retta a_1; le rette fondamen- « tali della stella sono s, a e la retta a questa infinitamente vicino sul « piano t. »

Inoltre come i teoremi II, V e VII del n.° 5 si dimostrano i seguenti:

III. « Ad una retta di Σ appoggiata alla retta s corrisponde in Σ' « una conica appoggiata in due punti alla retta s' e in un punto a ciascuna « delle rette a', b', c'. »

IV. « Ad una retta di Σ appoggiata alla retta a corrisponde in Σ' « una conica, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il piano $b'c'$, si ap- « poggia in un punto variabile, oltre O', alla retta a' e in un punto varia- « bile alla retta s'. »

V. « Ad una retta di Σ appoggiata alla retta b, o c, corrisponde in « Σ' una conica, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il piano r', si « appoggia in un punto variabile, oltre O', alla retta b' o c', o in un punto « variabile alla retta s'. »

VI. « Ad una retta di Σ appoggiata alla retta d corrisponde in Σ' « una conica appoggiata in un punto a ciascuna delle rette a' b' c' d' s'. »

11. In modo analogo si hanno gli altri teoremi;

I. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta s' corrisponde in Σ una « conica, la quale passa per il punto A, si appoggia alla retta s in un

« altro punto variabile, oltre A, e in un punto a ciascuna delle due rette « b e c. »

II. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta a' corrisponde in Σ « una conica, la quale passa per i punti A ed O, e tocca in quest'ultimo il « cono C. »

III. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta b' o c', corrisponde « in Σ una conica, la quale passa per il punto O e tocca ivi il cono C, si ap- « poggia in un punto variabile, oltre O, alla retta b, o c, e in fine si ap- « poggia in un punto variabile alla retta s. »

IV. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta d' corrisponde in Σ « una conica, la quale passa per il punto A e si appoggia a ciascuna delle « rette b, c, d. »

V. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta e' corrisponde in Σ « una conica, la quale si appoggia a ciascuna delle rette a, b, c, s e nel suo « punto d'appoggio con a tocca il piano fisso t. »

VI. « Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta a_1, intersezione dei « due piani r' e $b'c'$, corrisponde in Σ una cubica gobba la quale passa per « i punti A ed O, tocca in A la retta s e in O il cono C e si appoggia in « un punto variabile a ciascuna delle rette b e c. »

Quest'ultima proprietà si rende subito manifesta osservando prima che ad ogni piano di Σ' passante per la retta a_1 corrisponde in Σ un cono quadrico circoscritto al triedro $O.abc$ e tangente lungo la retta a al piano Os; e poi considerando una retta appoggiata ad a_1 come l'intersezione del piano che la proietta dalla stessa a_1 con un piano qualunque condotto per essa.

12. In virtù del teorema III del n.° 10 e del teorema I del n.° precedente, si ha:

I. « Fra i punti di due piani corrispondenti σ e σ' di Σ e Σ' pas- « santi per le rette s ed s', ha luogo una trasformazione quadratica, per la « quale sono fondamentali sul piano σ il punto A e i punti in cui esso in- « contra le rette b e c, e sul piano σ' i punti in cui questo incontra le tre « rette a', b', c'. »

Da questo teorema segue immediatamente:

II. « Ad una retta di Σ' condotta per il punto D' corrisponde in Σ « una conica passante per i punti A e D e appoggiata alle rette b e c. »

III. « Ad una retta di Σ' condotta per il punto E' corrisponde in Σ « una conica che passa per il punto A e tocca ivi il piano t, si appoggia

« in un altro punto, oltre A, alla retta s e in un punto a ciascuna delle due « rette b e c. »

Il teorema IV del n.° 10 e quello II del n.° 11 somministrano l'altro:

IV. « Fra i punti di due piani corrispondenti α ed α' di Σ e di Σ' « passanti rispettivamente per le rette a ed a', ha luogo una trasformazione « quadratica, per la quale sono fondamentali sul piano α i punti A, O e il « punto a questo infinitamente vicino sulla generatrice che il cono C ha in « comune col piano α, oltre la retta a; e sul piano α', il punto in cui questo « incontra la retta s', il punto O' e il punto a questo infinitamente vicino « sulla retta secondo la quale il piano α taglia il piano $b'c'$. »

Analogamente il teorema V del n.° 10 e quello III del n.° 11 dànno:

V. « Fra i punti di due piani corrispondenti β e β', o γ e γ', di Σ « e di Σ' passanti rispettivamente per le rette b e b', o c e c', ha luogo una « trasformazione quadratica, per la quale sono fondamentali sul piano β, o γ, « il punto in cui questo incontra la retta s, il punto O e il punto a questo « infinitamente vicino sulla generatrice che il cono C ha in comune col piano « β, o γ, oltre la retta b o c; e sul piano β' o γ', il punto in cui questo in- « contra la retta s', il punto O' e il punto a questo infinitamente vicino sulla « retta d'intersezione del piano β', o γ', col piano r'. »

In particolare, ai piani bd, cd e t di Σ corrispondono in Σ' rispettivamente i piani $b'd'$, $c'd'$ e $a'e'$; ed è facile vedere che ad una retta di uno qualunque di quei piani corrisponde una retta situata sul piano corrispondente. Quindi:

VI. « Fra i punti dei due piani corrispondenti bd e $b'd'$, o cd e « $c'd'$ o t e $a'e'$ di Σ e di Σ' ha luogo una corrispondenza omografica. »

Dato in Σ' un piano U', resta sopra questo determinata la retta T, che si appoggia alle due rette fondamentali a' ed s', alla quale corrisponde in Σ (10, I) una retta T passante per il punto A. Ogni retta R' del piano U' appoggiata alla retta d' incontra in un punto la retta T ; quindi la conica di Σ corrispondente (11, IV) a quella retta R' si appoggia in un punto variabile alla retta T. Inoltre la conica medesima passa per il punto A e tocca ivi il cono tangente alla superficie φ corrispondente al piano U'. Infine essa si appoggia alle rette b, c, d. Dunque:

VII. « Alle rette di Σ' appoggiate in un medesimo punto alla retta d' « e situate in uno stesso piano, corrispondono in Σ le coniche appoggiate alle « rette b, c, d, passanti per il punto A e ivi tangenti ad un cono determi- « nato col piano dato e situate sui piani di un fascio avente per asse una retta « passante per A e parimenti determinata. »

Dato in Σ' un piano U', resta sopra questo determinata la conica δ' che si appoggia alle cinque rette a', b', c', d', s', alla quale corrisponde in Σ una retta δ, perchè quella conica viene incontrata in un sol punto variabile dalla superficie del 3.° ordine φ' di Σ' corrispondente ad un piano qualunque di Σ. Ogni retta R' del piano U' appoggiata alla retta e', incontra in due punti la conica δ', quindi la conica di Σ corrispondente (11, V) a quella retta R' si appoggia in due punti variabili alla retta δ. Ricordando le altre proprietà della conica stessa, si ha dunque:

VIII. « Alle rette di Σ' appoggiate in un medesimo punto alla retta e' « e situate in uno stesso piano, corrispondono in Σ le coniche appoggiate « alle rette a, b, c, s, tangenti nei loro punti d'appoggio con a al piano « fisso t e situate sui piani di un fascio avente per asse una retta determi- « nata dal piano dato. »

§ 3.

13. Supposto che fra gli spazi Σ e Σ' abbia luogo la trasformazione studiata nel paragrafo precedente, stabiliscasi fra questo ultimo e un terzo spazio Σ'' la trasformazione del paragrafo primo.

Come asse del fascio fondamentale di piani dello spazio Σ', prendasi ancora la retta s' di cui le equazioni sono

$$p' = a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 = 0, \qquad x'_4 = 0,$$

e come asse del fascio fondamentale di piani di Σ'', la retta s'' che ha per equazioni

$$p'' = a''_1 x''_1 + a''_2 x''_2 + a''_3 x''_3 = 0, \qquad x''_4 = 0.$$

Poichè questi due fasci di piani debbono essere proiettivi fra loro, e al piano $O' s' (p' = 0)$ del primo deve corrispondere il piano $O'' s'' (p'' = 0)$ del secondo, le loro equazioni possono essere scritte così:

$$p' + \lambda x'_4 = 0, \qquad p'' + \lambda x''_4 = 0, \tag{7}$$

dove λ rappresenti un parametro variabile.

Come centro della stella fondamentale di Σ' si scelga ancora il punto O', di coordinate $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$; e come rette fondamentali di questa stella, la retta a_1, intersezione dei due piani

$$x'_1 = 0, \qquad r' = a_3 x'_2 + a_2 x'_3 = 0,$$

e altre due rette b_1 e c_1 condotte ad arbitrio per O'. Le coordinate della retta a_1 sono: $0, a_2, -a_3$; quelle delle rette b_1 e c_1 dicansi rispettivamente b'_1, b'_2, b'_3 e c'_1, c'_2, c'_3. Poichè le tre rette a_1, b_1, c_1 non possono giacere sullo stesso piano, il determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & a_2, & -a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

è necessariamente diverso da zero, e quindi è tale anche il suo reciproco

$$H' = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}$$

i cui elementi sono i complementi algebrici di quelli del determinante precedente.

Come centro della stella fondamentale di Σ'' assumasi il punto O'' di coordinate $x''_1 = x''_2 = x''_3 = 0$, e come rette fondamentali della stella medesima, le rette a'_1, b'_1, c'_1, intersezioni dei piani $x''_2 = 0$ e $x''_3 = 0$, $x''_3 = 0$ e $x''_1 = 0$, $x''_1 = 0$ e $x''_2 = 0$ rispettivamente.

Per determinare la corrispondenza quadratica che deve aver luogo fra i raggi delle due stelle (O') ed (O''), basta dare una coppia di raggi corrispondenti m' ed m''. Se (m'_1, m'_2, m'_3) e (m''_1, m''_2, m''_3) sono le coordinate di questi due raggi, poichè tre qualsivogliano delle quattro rette m', a_1, b_1, c_1 o m'', a'_1, b'_1, c'_1 non possono essere situate sullo stesso piano, i determinanti

$$A' = \begin{vmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}, \quad B' = \begin{vmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ 0 & a_2 & -a_3 \end{vmatrix},$$

$$C' = \begin{vmatrix} m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ 0 & a_2 & -a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix},$$

come le coordinate m''_1, m''_2, m''_3, debbono essere diversi da zero.

Determinata così la trasformazione quadratica, è facile trovarne le formule.

I piani $b_1 a_1$ e $b_1 c_1$ della stella (O') hanno per equazioni

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ 0 & a_2 & -a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$x'_1 \gamma'_1 + x'_2 \gamma'_2 + x'_3 \gamma'_3 = 0, \qquad x'_1 \alpha'_1 + x'_2 \alpha'_2 + x'_3 \alpha'_3 = 0,$$

e quindi l'equazione di un piano qualunque del fascio che ha per asse la retta b_1, è

$$(x'_1 \gamma'_1 + x'_2 \gamma'_2 + x'_3 \gamma'_3) + \mu (x'_1 \alpha'_1 + x'_2 \alpha'_2 + x'_3 \alpha'_3) = 0,$$

dove μ rappresenti un parametro variabile. I valori che prende questo parametro, quando il piano del fascio passa per la retta data m' o per un'altra retta n' sono:

$$\mu = \mu_1 = -\frac{m'_1 \gamma'_1 + m'_2 \gamma'_2 + m'_3 \gamma'_3}{m'_1 \alpha'_1 + m'_2 \alpha'_2 + m'_3 \alpha'_3} = -\frac{C'}{A'}$$

$$\mu = \mu_2 = -\frac{x'_1 \gamma'_1 + x'_2 \gamma'_2 + x'_3 \gamma'_3}{x'_1 \alpha'_1 + x'_2 \alpha'_2 + x'_3 \gamma'_3},$$

quando con x'_1, x'_2, x'_3 si intendono le coordinate della retta n'. Così i quattro piani $b_1 a_1$, $b_1 c_1$, $b_1 m'$, $b_1 n'$ corrispondono ai valori 0, ∞, μ_1 e μ_2 del parametro μ, epperò il loro rapporto anarmonico è dato dalla formula

$$b_1 (a_1 c_1 m' n') = \mu_1 : \mu_2 = \frac{C'}{A'} \cdot \frac{x'_1 \alpha'_1 + x'_2 \alpha'_2 + x'_3 \alpha'_3}{x'_1 \gamma'_1 + x'_2 \gamma'_2 + x'_3 \gamma'_3}.$$

I piani $b'_1 c'_1$ e $b'_1 a'_1$ della stella (O'') hanno per equazioni

$$x''_1 = 0, \qquad x''_3 = 0,$$

e quindi l'equazione di un piano qualunque del fascio che ha per asse la retta b'_1, è

$$x''_1 + \mu x''_3 = 0.$$

I valori del parametro μ, quando il piano del fascio passa per la retta data m'', o per la retta n'' corrispondente ad n', sono

$$\mu = \mu' = -\frac{m''_1}{m''_3}, \qquad \mu = \mu'' = -\frac{x''_1}{x''_3},$$

quando con x'_1, x''_2, x''_3 si intendano le coordinate della retta n''. Così i quattro piani $b'_1 c'_1$, $b'_1 a'_1$, $b'_1 m''$, $b'_1 n''$ corrispondono ai valori 0, ∞, μ', μ'' del parametro μ, epperò il loro rapporto anarmonico è dato dalla formola

$$b'_1 (c'_1 a'_1 m'' n'') = \mu' : \mu'' = \frac{m''_1 x''_3}{m''_3 x''_1} \cdot$$

Ora in virtù della trasformazione quadratica fra le due stelle (O'), (O''), quest'ultimo rapporto anarmonico deve essere eguale al precedente, epperò si ha:

$$\frac{C'}{A'} \cdot \frac{\alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3}{\gamma'_1 x'_1 + \gamma'_2 x'_2 + \gamma'_3 x'_3} = \frac{m''_1 x''_3}{m''_3 x''_1} \cdot$$

Analogamente, esprimendo l'eguaglianza degli altri due rapporti anarmonici $c_1 (a_1 b_1 m' n')$ e $c'_1 (b'_1 a'_1 m'' n'')$, si trova:

$$\frac{B'}{A'} \cdot \frac{\alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3}{\beta'_1 x'_1 + \beta'_2 x'_2 + \beta'_3 x'_3} = \frac{m''_1 x''_2}{m''_2 x''_1} \cdot$$

Risolvendo rispetto alle x''_1, x''_2, x''_3 il sistema formato da questa equazione e dalla precedente, e per brevità ponendo

$$m''_1 A' = A, \qquad m''_2 B' = B, \qquad m''_3 C' = C,$$

ed inoltre

$$\alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3 = P', \qquad \beta'_1 x'_1 + \beta'_2 x'_2 + \beta'_3 x'_3 = Q',$$
$$\gamma'_1 x'_1 + \gamma'_2 x'_2 + \gamma'_3 x'_3 = R',$$

si trova:

$$\left.\begin{aligned} \rho'' x''_1 &= A\, Q'\, R' \\ \rho'' x''_2 &= B\, R'\, P' \\ \rho'' x''_3 &= C\, P'\, Q', \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

e queste formule danno le coordinate del raggio n'' della stella (O'') corrispondente al raggio n' dato nella stella (O').

Si risolva il medesimo sistema di equazioni rispetto alle x'_1, x'_2, x'_3. Si ha intanto

$$\alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3 = A\, x''_2\, x''_3$$
$$\beta'_1 x'_1 + \beta'_2 x'_2 + \beta'_3 x'_3 = B\, x''_3\, x''_1$$
$$\gamma'_1 x'_1 + \gamma'_2 x'_2 + \gamma'_3 x'_3 = C\, x''_1\, x''_2,$$

donde, ricordando le note relazioni che passano fra i minori del determinante reciproco H' e gli elementi del primitivo ed inoltre ponendo

$$B\,b'_1\,x''_3 + C\,c'_1\,x''_2 = P'', \qquad A\,a_2\,x''_2\,x''_3 + B\,b'_2\,x''_3\,x''_1 + C\,c'_2\,x''_1\,x''_2 = Q'',$$
$$-A\,a_3\,x''_2\,x''_3 + B\,b'_3\,x''_3\,x''_1 + C\,c'_3\,x''_1\,x''_2 = R'',$$

si trova:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x''_1\,P'' \\ x'_2 &= Q'' \\ x'_3 &= R'', \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e queste formule danno le coordinate del raggio n' della stella (O') corrispondente al raggio n'' dato nella stella (O'').

Ottenute le formule (8) e (9), come nel n.° 1 si trovarono le (3) e (4), così qui si ricavano le seguenti

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= A\,Q'\,R'\,p' \\ x''_2 &= B\,R'\,P'\,p' \\ x''_3 &= C\,P'\,Q'\,p' \\ x''_4 &= (a''_1\,A\,Q'\,R' + a''_2 B\,R'\,P' + a''_3\,C\,P'\,Q')\,x'_4, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

e le loro inverse

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x''_1\,P''\,p'' \\ x'_2 &= Q''\,p'' \\ x'_3 &= R''\,p'' \\ x'_4 &= (a'_1\,x''_1\,P'' + a'_2\,Q'' + a'_3\,R'')\,x''_4 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Quelle formule servono a passare da un punto P' di Σ' al punto corrispondente P'' di Σ'' nella trasformazione cubica stabilita fra i due spazi Σ' e Σ''; queste servono al passaggio inverso.

14. In virtù delle due trasformazioni cubiche che hanno luogo l'una fra gli spazi Σ e Σ' e l'altra fra Σ' e Σ'', fra il primo spazio e quest'ultimo nasce una terza trasformazione birazionale, di cui è facile trovare le formule.

Sia P un punto dello spazio Σ. Ad esso corrisponde in Σ' un punto P', di cui le coordinate sono date dalle formule (6). Posti i valori di queste coordinate nelle (10), si ottengono le formule seguenti

$$\left.\begin{aligned} \rho''\,x''_1 &= A\,Q\,R\,p \\ \rho''\,x''_2 &= B\,R\,P\,p \\ \rho''\,x''_3 &= C\,P\,Q\,p \\ \rho''\,x''_4 &= (a''_1\,A\,Q\,R + a''_2\,B\,R\,P + a''_3\,C\,P\,Q)\,x_4, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

nella quale è

$$P = \alpha'_1 x_2 x_3 + \alpha'_2 x_3 x_1 + \alpha'_3 x_1 x_2 = \alpha'_1 x_2 x_3 + \pi x_1$$
$$Q = \beta'_1 x_2 x_3 + \beta'_2 x_3 x_1 + \beta'_3 x_1 x_2 = \beta'_1 x_2 x_3 + c' p x_1$$
$$R = \gamma'_1 x_2 x_3 + \gamma'_2 x_3 x_1 + \gamma'_3 x_1 x_2 = \gamma'_1 x_2 x_3 - b'_1 p x_1 ,$$

ed inoltre

$$\pi = \alpha'_3 x_2 + \alpha'_2 x_3 .$$

E queste formule servono a calcolare le coordinate del punto P'' di Σ'' corrispondente al punto P dato in Σ.

Sia P'' un punto dello spazio Σ''. Ad esso corrisponde in Σ' un punto P', di cui le coordinate sono date dalle formule (11). Posti i valori di queste coordinate nelle (5), si ottengono le formule seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= Q'' R'' p'' \\ \rho x_2 &= R'' P'' p'' x''_1 \\ \rho x_3 &= P'' Q'' p'' x''_1 \\ \rho x_4 &= P'' r'' x''^2_1 x''_4 , \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

dove è

$$r'' = B \gamma'_1 x''_3 - C \beta'_1 x''_2 .$$

E queste formule servono a calcolare le coordinate del punto P di Σ corrispondente al punto P'' dato in Σ''.

15. Ad un piano U di Σ che ha per equazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 ,$$

corrisponde in Σ'' una superficie φ'' di cui l'equazione è

$$(u_1 Q'' R'' + u_2 R'' P'' x''_1 + u_3 P'' Q'' x''_1) p'' + u_4 P'' r'' x''^2_1 x''_4 = 0.$$

Quindi la superficie φ'' è del 5.° ordine e possiede in O'' un punto quadruplo nel quale il cono tangente si scinde nei piani

$$P'' = 0, \qquad r'' = 0, \qquad x''_1 = 0 ,$$

quest'ultimo contato due volte. Inoltre essa contiene la retta s'', le tre rette h'', g'', l'' nelle quali il piano $O'' s'' (p'' = 0)$ taglia i tre piani precedenti e lungo quest'ultima retta tocca lo stesso piano $O'' s''$. Infine possiede come doppie le tre rette a'_1, b'_1, c'_1 e come semplici le rette a'', b'', c'' corrispondenti alle rette a', b', c' di Σ'. Le quali proprietà si dimostrano anche osservando, che φ'' è la superficie di Σ'', che nella trasformazione fra Σ' e Σ'', corrisponde alla superficie φ' di Σ' corrispondente al piano dato U nella trasformazione fra Σ e Σ'. Dunque:

I. « Ad un piano U di Σ corrisponde in Σ'' una superficie del « 5.º ordine φ'', la quale possiede in O'' un determinato punto quadruplo, « contiene come semplici le rette s'', a'', b'', c'', h'', g'', l'', lungo l'ultima « delle quali tocca il piano $O''s''$ e come doppie le rette a'_1, b'_1, c'_1. »

Quindi gli elementi fondamentali dello spazio Σ'' sono il punto O'', le rette a'', b'', c'', a'_1, b'_1, c'_1, h'', g'', l'', uscenti dal punto O'', la retta a quest'ultima infinitamente vicina sul piano $O''s''$ e la retta s'', alla quale si appoggiano ancora $h''\, g''\, l''$.

Ad un piano V'' di Σ'' condotto per il punto O'' e avente per equazione

$$v''_1 x''_1 + v''_2 x''_2 + v''_3 x''_3 = 0,$$

corrisponde in Σ il luogo di cui l'equazione è

$$(v''_1 A\, Q\, R + v''_2 B\, R\, P + v''_3 C\, P\, Q)\, p = 0,$$

e che perciò si scinde nel piano fisso $O s$ e in un cono quadrico Γ_0. Questo è il cono che nella trasformazione quadratica fra le due stelle (O) ed (O'), corrisponde al cono Γ_1 di quest' ultima, corrispondente al piano dato V'', nell'altra trasformazione quadratica fra le due stelle (O') ed (O''). Quindi esso possiede come doppie le tre rette a, b, c e come semplici le tre rette a_0, b_0, c_0 corrispondenti in Σ alle tre rette a_1, b_1, c_1 di Σ', la prima delle quali, a_0, è infinitamente vicina ad a, sopra il piano $O s$, la retta a_1 essendo l'intersezione del piano $b\,c$ col piano r'. Del resto queste proprietà del cono Γ_0 possono essere dedotte facilmente anche dalla sua equazione, dalla quale in particolare si deduce che dei due piani ad esso tangenti lungo la retta a, uno ha per equazione $p = 0$ (epperò è il piano $O s$) e l'altro:

$$v''_1 A\, b'_1\, c'_1\, p + (v''_2 B\, b'_1 - v''_3 C\, c'_1)\, \pi = 0. \tag{14'}$$

Dunque:

II. « Ad un piano V'' di Σ'' condotto per il punto O'' corrisponde « in Σ un cono del 4.º ordine Γ_0, il quale possiede come semplici le rette « b_0 e c_0 e come doppie le rette a, b, c, lungo la prima delle quali ha come « uno dei piani tangenti il piano fisso $O s$. »

In particolare, al piano $O''s''$, di cui l'equazione è $p'' = 0$, corrisponde il cono C_0, che ha per equazione

$$Q_0 = a''_1 A\, Q\, R + a''_2 B\, R\, P + a''_3 C\, P\, Q = 0,$$

e che lungo la generatrice doppia a è toccato dal piano $O\,s$ e dal piano che ha per equazione

$$a''_1\,A\,b'_1\,c'_1\,p + (a''_2\,B\,b'_1 - a''_3\,C\,c'_1)\,\pi = 0.$$

Il cono C_0 viene tagliato dal piano $O\,s$, oltre la retta a contata tre volte, in un'altra retta g.

Ad un piano U'' di Σ'' avente per equazione

$$u''_1\,x''_1 + u''_2\,x''_2 + u''_3\,x''_3 + u''_4\,x''_4 = 0\,,$$

corrisponde in Σ una superficie φ_0, di cui l'equazione è

$$(u''_1\,A\,Q\,R + u''_2\,B\,R\,P + u''_3\,C\,P\,Q)\,p + u''_4\,Q_0\,x_4 = 0.$$

Quindi la superficie φ_0 è del 5.° ordine e possiede in O un punto quadruplo, nel quale il cono tangente è il cono fisso C_0. Ordinando l'equazione precedente rispetto alla variabile x_1, si trova che la più alta potenza di questa che figuri nell'equazione stessa, è il quadrato. Quindi si conclude intanto che la superficie φ_0 è dotata in A di un punto triplo. Inoltre, se si pone eguale a zero, il coefficiente di x_1^2, si ottiene un'equazione che si scinde in due: una è $p = 0$, e l'altra è la seguente:

$$[u''_1\,A\,b'_1\,c'_1\,p + (u''_2\,B\,b'_1 - u''_3\,C\,c'_1)\,\pi]\,p$$
$$+\,u''_4\,[a''_1\,A\,b'_1\,c'_1\,p + (a''_2\,B\,b'_1 - a''_3\,C\,c'_1)\,\pi]\,x_4 = 0.$$

Questa rappresenta un cono quadrico contenente le rette s ed a e toccato lungo quest'ultima dal medesimo piano k tangente lungo la stessa generatrice al cono C_0. Dunque il cono tangente nel punto A alla superficie φ_0 si scinde nel piano $O\,s$ e nell'anzidetto cono quadrico. Inoltre questa superficie possiede come semplici le rette s, g, b_0, c_0 e come doppie le rette a, b, c, lungo la prima delle quali è toccata dai medesimi due piani che toccano il cono C_0, il che può anche essere dimostrato formando l'equazione complessiva dei piani stessi. Ma la falda della superficie φ_0 tangente lungo la retta a al piano $O\,s$ ha con la falda del cono C_0 tangente lungo la medesima retta allo stesso piano un contatto d'ordine superiore.

Per vedere quale sia questo contatto, si operi una sezione f_0 nella superficie φ_0 col piano

$$\lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 + \lambda_3\,x_3 + x_4 = 0\,;$$

e per conoscere poi le proprietà di questa sezione facciasi una trasformazione di coordinate ponendo

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + x_4 &= y_4 , \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ x_4 &= y_4 - (\lambda_1 y_1 + l_1) , \end{aligned}$$

dove è

$$l_1 = \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 .$$

L' equazione della superficie φ_0 si cambia in un' altra, nella quale ponendo $y_4 = 0$, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &(L_a \lambda_1 y_1 u''_4 + L_a l_1 u''_4 - L_u p_1) p_1 y_1^2 \\ &+ (M_a \lambda_1 y_1 u''_4 + M_a l_1 u''_4 - M_u p_1) y_1 y_2 y_3 \\ &+ (N_a \lambda_1 y_1 u''_4 + N_a l_1 u''_4 - N_u p_1) y_2^2 y_3^2 = 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

dove è

$$\begin{aligned} L_u &= u''_1 A b'_1 c'_1 p_1 + u''_2 B b'_1 \pi_1 - u''_3 C c'_1 \pi_1 \\ M_u &= u''_1 A (\beta'_1 b'_1 - \gamma'_1 c'_1) p_1 + u''_2 B (\alpha'_1 b'_1 p_1 - \gamma'_1 \pi_1) - u''_3 C (\alpha'_1 c'_1 p_1 + \beta'_1 \pi_1) \\ N_u &= -(u''_1 A \beta'_1 \gamma'_1 + u''_2 B \gamma'_1 \alpha'_1 + u''_3 C \alpha'_1 \beta'_1) , \end{aligned}$$

e L_a, M_a, N_a rappresentano le medesime espressioni precedenti, nelle quali si pongano a''_1, a''_2, a''_3 in luogo di u''_1, u''_2, u''_3 rispettivamente, e infine p_1 e π_1 ciò che diventano p e π quando in queste funzioni si sostituiscono y_2 e y_3 ad x_2 e x_3. L' equazione (14) rappresenta la sezione fatta nella superficie φ_0 dal piano dato, riferita alle nuove coordinate y_1, y_2, y_3, y_4. La sua forma mostra che questa sezione possiede un punto doppio nel punto **A** in cui il suo piano incontra la retta a e che in questo punto le rette tangenti hanno per equazioni

$$L_a = 0, \qquad p_1 = 0,$$

il che è in accordo con le proprietà già trovate per la superficie φ_0.

Ora sul piano $y_4 = 0$ facciasi una trasformazione quadratica ponendo

$$y_1 = y'_2 y'_3, \qquad y_2 = y'_3 y'_1, \qquad y_3 = y'_1 y'_2 .$$

In virtù di questa trasformazione, la curva f_0 si cambia in un'altra f'_0, di cui l'equazione è

$$\begin{aligned}&(L'_a \lambda_1 y'_2 y'_3 u''_4 + L'_a l'_1 y'_1 u''_4 - L'_u p'_1 y'_1) p'_1 \\ &+ (M'_a \lambda_1 y'_2 y'_3 u''_4 + M'_a l'_1 y'_1 u''_4 - M'_u p'_1 y'_1) y'_1 \\ &+ (N_a \lambda_1 y'_2 y'_3 u''_4 + N_a l'_1 y'_1 u'_4 - N_u p'_1 y'_1) y'^2_1 = 0 ,\end{aligned}$$

dove L'_u, M'_u, L'_a, M'_a, p'_1 rappresentano i risultati delle sostituzioni di y_3 e y_2 ad x_2 e x_3 nelle funzioni L_u, M_u, L_a, M_a, p_1. Quindi le rette

$$L'_a = 0, \qquad p'_1 = 0,$$

corrispondono nella trasformazione quadratica alle tangenti in **A** alla curva f_0; epperò la curva f'_0 incontra la retta fondamentale $y'_1 = 0$, nei punti in cui questa è tagliata dalle due rette anzidette. La tangente ad f'_0 nel primo di questi due punti ha per equazione

$$(M''_a \lambda_1 \alpha \beta u''_4 - L''_u p'^2_1) y'_1 + \lambda_1 \alpha \beta u''_4 p''_1 . L'_a = 0 ,$$

dove α e β sono le coordinate del punto di contatto, M''_a, L''_u, p''_1 i valori che prendono le funzioni M'_a, L'_u, p'_1 quando queste coordinate si sostituiscono alla variabile y'_2 e y'_3. La conica che nella trasformazione quadratica corrisponde a questa tangente, oscula nel punto **A** il ramo della curva f_0 che ivi tocca la retta L_a. Ma quella tangente è variabile con la superficie φ_0, perchè nella sua equazione entrano le coordinate u''_1, u''_2. u''_3, u''_4 del piano U'' di Σ'', cui corrisponde φ_0; dunque anche questa conica osculatrice varia col variare della superficie φ_0. Quindi si conclude che le falde di due superficie qualsivogliano φ_0 tangenti lungo la retta a al medesimo piano k hanno in comune, oltre a, una sola retta a questa infinitamente vicina; epperò ciascuna di esse ha anche in comune, oltre a, una sola retta a questa infinitamente vicina con la falda del cono C_0 tangente lungo a al piano k.

Ciò premesso, si noti che il cono del 4.° ordine C_0 tangente alla superficie del 5.° ordine φ_0 nel punto quadruplo O, taglia questa in 20 rette uscenti da O. Il piano U'' di Σ'', cui corrisponde in Σ la superficie φ_0, incontra la retta fondamentale s'' in un punto, al quale corrisponde in Σ (4, V e 7, IV) una retta x che appartiene tanto a φ_0 quanto a C_0. Queste due superficie hanno inoltre in comune le rette g, b_0, c_0 e le rette a, b, c; quelle sono semplici per ciascuna di esse, e queste sono doppie, e i piani tangenti alla superficie φ_0 in un punto della retta b, o c, sono, in generale, distinti da quelli che lungo la medesima retta toccano il cono C_0. Quindi delle 20 rette anzidette $1+1+1+1+2^2+2^2=12$ coincidono rispettivamente con le rette x, g, b_0, c_0, b, c; epperò le rimanenti 8 vengono assorbite dalla retta a. Ma per la proprietà che questa è doppia per φ_0 e per C_0, e che le falde di queste due superficie tangenti lungo a al medesimo piano k hanno in comune, fuori di a, una sola retta infinitamente vicina ad a, nella stessa retta a vengono soltanto a cadere 5 delle 20 rette comuni a φ_0 e a C_0. Dunque se invece ve ne cadono 8, vuol dire che le falde di queste due superficie tangenti lungo a al piano $O\,s$ hanno in comune, oltre a, tre rette infinitamente vicine ad a.

Un piano condotto ad arbitrio per A taglia le superficie φ_0 e C_0 secondo due curve delle quali una possiede in A un punto triplo e l'altra un punto doppio, e queste curve hanno in A una sola tangente comune che è la retta secondo la quale il piano considerato incontra il piano $O\,s$. Quindi dei punti comuni alle curve medesime $2\,.\,3+1=7$ cadono, per queste proprietà, nel punto A. Ma esse si tagliano, fuori di A, in altri 12 punti soltanto, i quali cadono nei punti in cui il loro piano incontra le rette x, g, b_0, c_0, b, c comuni alle due superficie φ_0 e C_0. Dunque nel punto A deve ancora cadere l'ulteriore loro punto d'incontro, il che porta a concludere che i rami di dette curve tangenti in A al piano $O\,s$, hanno in comune, oltre A, due punti infinitamente vicini ad A. Così si vede che le falde delle due superficie φ_0 e C_0 tangenti in A al piano $O\,s$, si osculano.

Riepilogando si ha dunque:

III. « Ad un piano qualunque U'' di Σ'' corrisponde in Σ una su-« perficie del 5.° ordine φ_0, la quale possiede in O un punto quadruplo, in « cui il cono tangente è il cono fisso C_0, e in A un punto triplo, in cui il « cono tangente si scinde nel piano fisso $O\,s$ e in un cono quadrico conte-« nente le rette s ed a. Inoltre essa possiede come semplici le rette s, g, « b_0, c_0 e come doppie le rette a, b, c, lungo la prima delle quali è toccata « da due piani tangenti fissi, $O\,s$ e k, che sono quelli stessi che lungo a toc-« cano il cono C_0, e di cui uno, k, tocca ancora l'anzidetto cono quadrico. « Infine la falda della superficie φ_0 tangente lungo a, al piano $O\,s$ ha in co-« mune, oltre a, con la falda del cono C_0 tangente lungo la medesima retta « allo stesso piano, tre rette infinitamente vicine ad a, e le medesime falde « nel punto A si osculano soltanto. »

Una retta qualunque R'' di Σ'' può sempre essere considerata come l'intersezione del piano V'' che la proietta dal punto O'' con un altro piano U'' condotto ad arbitrio per essa. A quel piano corrisponde in Σ (II) un cono Γ_0; a questo (III), una superficie φ_0. Quindi alla retta data corrisponde la curva d'intersezione variabile S_0 di queste due superficie. Le proprietà di questa curva si trovano ripetendo ragionamenti del tutto analoghi a quelli seguiti per dimostrare il teorema IV del n.° 3; e così si ottiene:

IV. « Ad una retta R' di Σ'' corrisponde in Σ una curva del 5.° ordine S_0, la quale possiede in A un punto doppio, in cui una delle tangenti è la retta s, passa semplicemente per il punto O e tocca ivi il cono C_0, si appoggia in un altro punto, fuori di A, alla retta s, e, fuori di O, in un punto a ciascuna delle rette b_0 e c_0, e in due punti a ciascuna delle rette b e c. »

Si può pervenire al medesimo risultato determinando prima la cubica S_1 di Σ' corrispondente (3, IV) alla retta R'' di Σ'', e poi cercando, con l'aiuto di teoremi stabiliti nel § 2, la curva che in Σ corrisponde ad S_1.

16. Al piano $O\,s$ di Σ corrisponde in Σ'' il piano r'' di cui l'equazione è $r''=0$; e al piano $O''s''$ di Σ'' corrisponde in Σ il cono C_0. Quindi alla retta g'', intersezione dei due piani r'' ed $O''s''$, corrisponde la retta g, nella quale il piano $O\,s$, incontra, fuori di a, il cono C_0. Di qui segue:

I. « Ad un piano di Σ'' condotto per la retta g'', corrisponde in Σ un cono Γ_g che gode di tutte le proprietà possedute da un cono Γ_0 e che inoltre passa per la retta g. »

Ora cercando l'intersezione di questo cono con una superficie φ_0, si trova facilmente:

II. « Ad una retta di Σ'' appoggiata alla retta g'' corrisponde in Σ una curva del 4.° ordine, la quale possiede in A un punto doppio, in cui una delle tangenti è la retta s, si appoggia in un punto variabile a ciascuna delle rette g, b_0 e c_0 e in due punti parimenti variabili a ciascuna delle rette b e c. »

La retta h'' è l'intersezione dei due piani che hanno per equazioni

$$p''=a''_1\,x''_1+a''_2\,x''_2+a''_3\,x''_3=0, \qquad P''=B\,b'_1\,x''_3+C\,c'_1\,x''_2=0.$$

Quindi l'equazione di un piano qualunque condotto per la retta stessa è

$$\lambda\,a''_1\,x''_1+(\lambda\,a''_2+C\,c'_1)\,x''_2+(\lambda\,a''_3+B\,b'_1)\,x''_3=0.$$

A questo piano corrisponde in Σ (15, II) un cono Γ_h il quale possiede la retta a come generatrice doppia e dei due piani ad esso tangenti lungo questa uno è Os e l'altro, secondo la (14') ha per equazione

$$\lambda a''_1 A b'_1 c'_1 p + [(\lambda a''_2 + C c'_1) B b'_1 - (\lambda a''_3 + B b'_1) C c'_1] \pi = 0,$$

ossia

$$a''_1 A b'_1 c'_1 p + (a''_2 B b'_1 - a''_3 C c'_1) \pi = 0,$$

che è appunto l'equazione del piano k. Dunque:

III. « Ad un piano di Σ' condotto per la retta h'' corrisponde in Σ « un cono Γ_h, che gode di tutte le proprietà possedute da un cono Γ_0 e che « inoltre è toccato lungo la retta a non solo dal piano Os, ma anche dal « piano k. »

Cercando l'intersezione di questo cono con una superficie φ_0, si trova:

IV. « Ad una retta di Σ'' appoggiata alla retta h'' corrisponde in Σ « una curva del 4.° ordine, la quale passa per A e tocca ivi la retta s, si « appoggia a questa retta in un altro punto, oltre A, in un punto, fuori di A « e di O, alla retta a e in questo tocca il piano k, e, fuori di O, in un punto « a ciascuna delle rette b_0 e c_0 e in due punti a ciascuna delle rette b e c. »

La retta l' è l'intersezione dei due piani $O''s'$ e $b'_1 c'_1$ di cui le equazioni sono $p'' = 0$ e $x''_1 = 0$. Quindi un piano qualunque che passi per l'', ha come equazione

$$\lambda x''_1 + a''_2 x''_2 + a''_3 x''_3 = 0.$$

A questo piano corrisponde in Σ un cono Γ_l, il quale possiede la retta a come generatrice doppia, e dei due piani ad esso tangenti lungo questa uno è Os è l'altro secondo la (14') ha per equazione

$$\lambda A b'_1 c'_1 p + (a''_2 B b'_1 - a''_3 C c'_1) \pi = 0,$$

epperò è distinto dal piano k. Ora l'anzidetto cono Γ_l ha in comune col cono C_0, fuori di a, soltanto le due rette b_0 e c_0 e le due rette b e c; e poichè quelle sono semplici e queste doppie per ciascun cono e di più i piani tangenti lungo esse ai due coni sono fra loro distinti, così le rette medesime assorbono 10 delle rette comuni ai coni Γ_l e C_0. Quindi in a cadono le rimanenti 6 rette d'intersezione; e ciò, per la proprietà dianzi dimostrata, che i coni Γ_l e C_0 hanno in comune lungo a solo il piano tangente Os, porta necessariamente a concludere che le falde dei coni medesimi che toccano questo piano, si osculano lungo a. Dunque:

V. « Ad un punto di Σ'' condotto per la retta l', corrisponde in Σ « un cono Γ_l, che gode di tutte le proprietà possedute da un cono Γ_0 e che

« inoltre oscula con una falda lungo la retta a la falda del cono C_0 tangente « lungo la medesima retta al piano Os. »

Sia H' una quadrica di Σ' la quale contenga la retta s' ($p'=0$, $x'_4=0$), passi per il punto O' e tocchi ivi la retta a_1 ($r'=0$, $x'_1=0$). La sua equazione è della forma:

$$(m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m_3 x'_3) p' + (\lambda x'_1 + r') x'_4 = 0,$$

dove m_1, m_2, m_3 e λ sono costanti date. A questa quadrica corrisponde in Σ una superficie H, di cui l'equazione, in virtù delle formule (6), è:

$$(m_3 x_2 + m_2 x_3 + x_4) p x_1 + (m_1 p + \lambda x_4) x_2 x_3 = 0.$$

Quindi la superficie H è del 3.° ordine, contiene le rette s, a, b, c, possiede in A un punto doppio biplanare, in O un punto doppio conico e lungo la retta a viene toccata dal piano fisso Os.

Se

$$(n_1 x'_1 + n_2 x'_2 + n_3 x'_3) p' + (\mu x'_1 + r') x'_4 = 0,$$

è l'equazione di una seconda quadrica K' di Σ', la quale passi ancora per la retta s', per il punto O' e tocchi ivi la retta a_1, l'equazione della superficie K corrispondente in Σ è

$$(n_3 x_2 + n_2 x_3 + x_4) p x_1 + (n_1 p + \mu x_4) x_2 x_3 = 0.$$

Le due quadriche H' e K' si tagliano oltre la retta s', secondo una cubica gobba, la quale ha questa retta come corda ed inoltre passa per il punto O' e tocca ivi la retta a_1. A questa cubica di Σ' corrisponde in Σ la curva d'intersezione variabile delle due superficie H e K, la quale curva è del 4.° ordine, perchè queste due superficie hanno in comune le 4 rette s, a, b, c, e lungo la retta a sono toccate dallo stesso piano tangente Os. Ora si ha in generale, come è facile dimostrare, che se

$$H = A_1 p x_1 + A_3 = 0, \qquad K = B_1 p x_1 + B_3 = 0,$$

dove A_1, A_3, B_1, B_3 rappresentino funzioni omogenee delle coordinate x_2, x_3, x_4 dei gradi indicati dai loro indici, sono le equazioni di due superficie di 3.° ordine, la loro curva d'intersezione possiede in A un punto multiplo secondo 5 e le tangenti in questo punto sono la retta d'intersezione dei due piani $A_1=0$, $B_1=0$ e le 4 rette secondo cui il piano $p=0$ taglia il cono che ha per equazione:

$$A_1 B_3 - A_3 B_1 = 0.$$

Nel caso attuale è

$$A_1 = m_3 x_2 + m_2 x_3 + x_4, \qquad A_3 = (m_1 p + \lambda x_4) x_2 x_3,$$
$$B_1 = n_3 x_2 + n_2 x_3 + x_4, \qquad B_3 = (n_1 p + \mu x_4) x_2 x_3.$$

Quindi come equazione dell'anzidetto cono si trova

$$[(m_3 x_2 + m_2 x_3 + x_4)(n_1 p + \mu x_4) - (n_3 x_2 + n_2 x_3 + x_4)(m_1 p + \lambda x_4)] x_2 x_3 = 0,$$

epperò il cono stesso si scinde nei due piani $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e in un cono quadrico. Il piano $p = 0$ taglia ciascuno di quei due piani nella retta a, e questo cono nella retta s e in un'altra retta, che è l'intersezione dello stesso piano $p = 0$ con il piano che ha per equazione

$$(m_3 \mu - n_3 \lambda) x_2 + (m_2 \mu - n_2 \lambda) x_3 + (\mu - \lambda) x_4 = 0,$$

e che perciò è distinta tanto da s quanto da a. Nel caso in esame adunque le tangenti nel punto A alla intersezione delle due superficie date H e K sono: la retta a contata due volte, la retta s, una retta del piano Os distinta da a e da s e una retta situata fuori di questo piano. Ma la retta a contata due volte e la retta s fanno parte di quella intersezione; dunque la rimanente intersezione, che come si è già osservato è una curva del 4.° ordine, possiede in A un punto doppio e le sue tangenti in questo punto sono le due rimanenti delle cinque tangenti anzidette. Inoltre la medesima curva si appoggia in un punto, oltre A, alla retta s, e in due punti variabili a ciascuna delle rette b e c, il che si può vedere facilmente cercando il numero dei punti d'intersezione di essa curva con un piano condotto per la retta s, o b, o c, situati fuori della retta stessa.

Ad una retta di Σ'' appoggiata alla retta l'' corrisponde in Σ' (5, VIII) una cubica gobba S_1, la quale passa per il punto O', tocca ivi la retta a_1 ed oscula il piano di Σ' corrispondente al piano $a'_1 l''$ di Σ'', si appoggia in due punti alla retta s' e in un punto a ciascuna delle due rette b_1 e c_1. Questa cubica appartiene al sistema delle cubiche di Σ' le cui curve corrispondenti dello spazio Σ sono state ora studiate. Quindi tenendo presenti i risultati ottenuti, si conclude:

VI. « Ad una retta di Σ'' appoggiata alla retta l'' corrisponde in Σ « una curva del 4.° ordine, la quale possiede in A un punto doppio, in cui « una delle tangenti giace sul piano Os ed è distinta dalle rette a ed s e « l'altra è situata fuori di questo piano ed inoltre il ramo tangente al piano « medesimo oscula in A il cono di Σ corrispondente al piano $a'_1 l''$ di Σ'', e

« quindi la falda del cono C_0 tangente lungo a al piano $O\,s$. La medesima « curva si appoggia, in un punto, oltre A, alla retta s, in un punto variabile a ciascuna delle rette b_0 e c_0 e in due punti a ciascuna delle rette b e c. »

Il piano $a'_1\,l''$ di Σ'' ha per equazione

$$a''_2\,x''_2 + a''_3\,x''_3 = 0\,,$$

e quindi l'equazione del cono che gli corrisponde in Σ è

$$a''_2\,B\,R + a''_3\,C\,Q = 0\,.$$

Ora questo cono oscula lungo la retta a la falda del cono C_0 tangente lungo la medesima retta al piano $O\,s$.

I teoremi precedenti contengono le proprietà della trasformazione fra i due spazi Σ e Σ'' che saranno applicate in seguito.

§ 4.

17. Suppongasi di avere nello spazio Σ una superficie F dell'ordine n, la quale possegga soltanto un punto i-^{plo} A in cui il cono tangente Δ sia semplice e dotato di una generatrice s, j-^{pla} $(j \leqq i)$, di natura qualsiasi. Un piano condotto ad arbitrio per s taglia quindi la superficie F secondo una curva f, la quale possiede in A un punto i-^{plo} tale che j degli i rami passanti per A toccano ivi la medesima retta s, ma possono avere con essa e fra loro contatti di differenti ordini; mentre ogni altro piano che passi per A e non per s sega la superficie F secondo una curva, la quale ha in A un punto i-^{plo} ordinario.

Fra lo spazio Σ in cui è data la superficie F e un secondo spazio Σ' si stabilisca la trasformazione birazionale studiata nel paragrafo 2, assumendo il punto singolare A di F e la retta singolare s di Δ come punta fondamentale A e retta fondamentale s dello spazio Σ, scegliendo l'altro punto fondamentale O di questo stesso spazio fuori della superficie F e gli altri elementi fondamentali di Σ come tutti quelli di Σ' in modo affatto arbitrario. Nella trasformazione così individuata, alla superficie F di Σ corrisponde in Σ' una superficie F', di cui si vogliono ora conoscere le proprietà.

18. In virtù dell'ipotesi che la superficie F possiede in A $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ un punto i-^{plo}, la sua equazione è della forma

$$F = A_i\,x_1^{n-i} + A_{i+1}\,x_1^{n-i-1} + A_{i+2}\,x_1^{n-i-2} + \cdots + A_n = 0\,,$$

essendo A_i, A_{i+1}, $A_{i+2}, \ldots$, A_n funzioni razionali intere omogenee delle coordinate x_2, x_3, x_4 dei gradi indicati dai loro indici, e quindi in particolare

$$A_n = B_0 x_4^n + B_1 x_4^{n-1} + B_2 x_4^{n-2} + \cdots B_n ,$$

dove B_0, B_1, $B_2, \ldots$, B_n rappresentano funzioni analoghe alle precedenti, ma delle sole coordinate x_2 e x_3 e dei gradi 0, 1, 2,..., n rispettivamente. Inoltre poichè il punto $O\,(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ è stato scelto fuori della superficie F, l'equazione di questa non deve essere soddisfatta quando in essa si ponga $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; e perchè ciò abbia luogo è necessario che la costante B_0 sia diversa da zero. Ora nell'equazione precedente si ponga in luogo di x_1, x_2, x_3, x_4 i loro valori dati dalle formule (5); come equazione della superficie F' si ottiene:

$$\begin{aligned} F' = {} & A'_i p'^{n-i} x'^{n-i}_2 x'^{n-i}_3 + A'_{i+1} p'^{n-i-1} x'_1 x'^{n-i-1}_2 x'^{n-i-1}_3 + \\ & + A'_{i+2} p'^{n-i-2} x'^2_1 x'^{n-i-2}_2 x'^{n-i-2}_3 + \cdots + (B_0 r'^n x'^n_4 + B'_1 p' r'^{n-1} x'^{n-1}_4 + \\ & + B'_2 p'^2 r'^{n-2} x'^{n-2}_4 + \cdots + B'_n p'^n)\, x'^{n-i}_1 = 0 , \end{aligned}$$

nella quale A'_i, A'_{i+1}, $A'_{i+2}, \ldots$, indicano ciò che diventano le funzioni A_i, A_{i+1}, $A_{i+2}, \ldots$, quando in queste si pongano $p'\,x'_3$, $p'\,x'_2$, $r'\,x'_4$ in luogo di x_2, x_3, x_4 e B'_1, $B'_2, \ldots$, B'_n denotano i risultati delle sostituzioni di x'_3 e x'_2 ad x_2 e x_3. Questa equazione è del grado $3\,n - i$ nelle coordinate x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 e in essa il termine $B_0\, r'^n x'^{n-i}_1 x'^n_4$ non può *mai* mancare, perchè come si è osservato sopra, il coefficiente B_0 è necessariamente diverso da zero. Dunque:

I. « La superficie F' è dell'ordine $3\,n - i$ e possiede in O' un punto « $(2\,n - i)^{-plo}$, in cui il cono tangente si scinde nei due piani fissi r' $(r' = 0)$ « e $b'\,c'$ $(x'_1 = 0)$ contati n ed $n - i$ volte rispettivamente. »

L'ordine della superficie F' può anche ottenersi ricordando che ad una retta R' di Σ' corrisponde in Σ (7, III) una cubica gobba S, che passa per il punto A. Così può calcolarsi il grado di multiplicità del punto O' per F' tenendo presente (7, IV) che ad una retta di Σ' condotta per O' corrisponde in Σ una retta passante per O.

Ad una retta R' di Σ' appoggiata in un punto P' alla retta fondamentale a' corrisponde in Σ (11, II) una conica che passa per A. Questa incontra la superficie F d'ordine n e dotata in A d'un punto i^{-plo}, in $2\,n - i$ punti variabili. Quindi in altrettanti punti variabili la retta R' deve incontrare la superficie F'; epperò nel punto P' cadono

$$(3\,n - i) - (2\,n - i) = n$$

punti d'intersezione. Dunque:

II. « La superficie F' possiede la retta fondamentale a' come retta « n-^{pla}. »

Ad un punto P' della retta a' di Σ' corrisponde in Σ (9 e 4, VI) una retta del piano $b\,c$ appoggiata alla retta s nel punto M, diverso da A, in cui questa incontra il piano stesso $b\,c$. Quella retta taglia la superficie F in n punti H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$ in generale distinti fra loro, i quali determinano altrettanti piani α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ passanti per la retta a, cui corrispondono in Σ' (10 e 5, IV) n piani α'_1, α'_2, $\alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$ passanti per la retta a'. La conica di Σ corrispondente ad una retta R' di Σ' situata sopra una qualunque α'_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ di questi piani e condotta per il punto P' di a', passa per il punto H_k. Quindi essa incontra la superficie F in $2\,n - i - 1$ punti variabili; epperò la retta considerata R' tocca nel punto P' la superficie F'. Dunque i piani tangenti a questa superficie in P' sono i piani $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$; e siccome questi sono distinti fra loro al pari dei piani α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ cui corrispondono, così si ha:

III. « Gli n piani tangenti alla superficie F' in un punto generico P' « della retta n-^{pla} a' sono distinti fra loro e variabili col punto P'. »

La superficie F non possiede per ipotesi alcuna singolarità fuori del punto A; quindi essa viene tagliata dal piano $b\,c$ secondo una curva generale dell'ordine n, alla quale dunque si possono condurre $n\,(n - 1)$ tangenti dal punto M. A queste corrispondono altrettanti punti sopra la retta a', in ciascuno dei quali, in virtù di quanto precede, due degli n piani tangenti alla superficie F' coincidono; epperò:

IV. « Sulla retta a' esistono $n\,(n - 1)$ punti cuspidali. »

Ad un piano α' di Σ' condotto ad arbitrio per a' corrisponde in Σ' un piano passante per a. Fra i punti di questi due piani ha luogo (12, IV) una trasformazione quadratica e la curva f' secondo cui il piano α' taglia la superficie F' è la curva corrispondente in questa trasformazione alla curva d'intersezione f del piano α con la superficie F. Ora questa curva f è dell'ordine n e possiede in A, che è un punto fondamentale del piano α nell'anzidetta trasformazione, un punto i-^{plo} ordinario, perchè (12) il piano α passante per esso non contiene la retta s. Quindi la curva corrispondente f' è dell'ordine $2\,n - i$ e possiede in O' un punto multiplo secondo $n - i$, in cui le tangenti coincidono con la retta d'intersezione del piano α' con il piano $b' c'$ ed inoltre ciascuno dei suoi rami passanti per O' viene incontrato da questa retta, oltre O', in altri $n - i$ punti infinitamente vicini ad O'; infine essa possiede un punto n-^{plo} ordinario nel punto in cui il suo piano incontra la retta s'. Dunque:

V. « Un piano α', condotto ad arbitrio per la retta a' taglia ulte-« riormente la superficie F' in una curva dell'ordine $2n - i$, la quale pos-« siede un punto n-^{plo} ordinario nel punto in cui il suo piano incontra la retta s' « e un punto $(n - i)$-^{plo} in O'. Le tangenti alla curva in questo punto coin-« cidono tutte con la retta d'intersezione del piano α' col piano $b' c'$ e i suoi « rami passanti per esso hanno in comune con questa retta, oltre O', gli « stessi $n - i$ punti infinitamente vicini ad O'. »

Fra i piani passanti per la retta a' vi sono i piani $a' b'$, $a' c'$, $a' d'$, $a' e'$; si esamineranno in seguito (19, V; 24, III; 21, V) le sezioni da essi operate nella superficie F'.

Nella trasformazione quadratica fra i due piani α ed α', alla retta a' di α' corrisponde in α la retta secondo cui questo piano incontra il piano $b c$. Siccome quest'ultima retta incontra la curva f in n punti in generale distinti; così anche la retta a' deve incontrare la curva f' in n punti distinti e variabili col piano α'. Ora dal punto O si possono condurre $n(n-1)$ tangenti alla curva d'intersezione della superficie F col piano $b c$, ciascuna delle quali determina un piano passante per a, il quale taglia la superficie F in una curva f che tocca l'anzidetta tangente. Quindi, in virtù dell'osservazione testè fatta, si vede che per la retta a' passano $n(n-1)$ piani α' ciascuno dei quali taglia F' secondo una curva f', che incontra la retta a' in n punti di cui due coincidono. Chiamando col sig. Zeuthen (*) questi piani *piani stazionari* della retta a_1, si ha dunque:

VI. « Per la retta a' passano $n(n-1)$ piani stazionari. »

19. Ad una retta R' di Σ' appoggiata in un punto P' alla retta fondamentale b' corrisponde in Σ (11, III) una conica la quale non passa per il punto A, epperò incontra la superficie F in $2n$ punti variabili. Quindi ripetendo il ragionamento fatto per dimostrare il teorema II del n.° precedente, si ha:

I. « La superficie F' possiede le rette fondamentali b' e c' come rette « $(n - i)$-^{ple} »

(*) *Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface.* Mathematische Annalen, Band IV, pag. 1.

Ad un punto P' della retta b' corrisponde in Σ (9 e 4, VI) una retta passante per il punto A e situata sul piano $c\,a$. Questa retta incontra la superficie F in $n-i$ punti, fuori di A, i quali determinano $n-i$ piani passanti per la retta b, cui corrispondono in Σ' altrettanti piani passanti per b'. Si dimostra come nel caso della retta a', che questi $n-i$ piani toccano la superficie F' nel punto considerato P' sopra b'. Dunque:

II. « Gli $n-i$ piani tangenti alla superficie F' in un punto generico P' di ciascuna delle rette fondamentali b' e c' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P'. »

Il piano $c\,a$, il quale passa per il punto A, ma non per la retta s, taglia la superficie F secondo una curva che possiede in A un punto i-plo ordinario. Perciò dal punto A si possono condurre alla curva medesima $n(n-1)-i(i+1)$ tangenti. Quindi:

III. « Sopra ciascuna delle due rette b' e c' esistono $n(n-1)-i(i+1)$ punti cuspidali. »

Ad un piano β' di Σ' condotto per la retta b' corrisponde in Σ un piano β passante per la retta b. Fra i punti di questi due piani ha luogo (12, V) una trasformazione quadratica. Quindi come il teorema V del n.° precedente, si dimostra:

IV. « Un piano β', o γ', condotto ad arbitrio per la retta b', o c', taglia ulteriormente la superficie F' in una curva dell'ordine $2n$, la quale possiede un punto n-plo ordinario nel punto in cui il suo piano incontra la retta s' e un punto n-plo in O'. Le tangenti alla curva in questo punto coincidono tutte con la retta d'intersezione del piano β', o γ', col piano r', e i suoi rami passanti per esso hanno in comune con questa retta, oltre O', gli stessi n punti infinitamente vicini ad O'. »

Ad ogni punto P della retta c di Σ corrisponde in Σ' (9 e 4, VI) una retta del piano $a'\,b'$ appoggiato alla retta s'. La retta c incontra la superficie F in n punti distinti; quindi il piano $a'\,b'$, taglia la superficie F', oltre le rette a' e b' contate n ed $n-i$ volte rispettivamente (18, II e 19, I) in altre n rette appoggiate ad s'. Dunque:

V. « Ciascuno dei piani $a'\,b'$ e $a'\,c'$ taglia la superficie F', oltre le due rette fondamentali in esse contenute, in altre n rette distinte appoggiate alla retta s'. »

Fra i piani passanti per la retta b', o c', vi sono i piani $b'\,d'$ e $b'\,c'$, oppure $c'\,d'$ e $c'\,b' \equiv b'\,c'$: si esamineranno in seguito (20, V e 21, VI) le sezioni da essi operate nella superficie F'.

Nella trasformazione quadratica fra i due piani β e β' alla retta b' di β' corrisponde in β la retta secondo cui questo piano incontra il piano $c\,a$. Siccome quest'ultima retta incontra la curva f in n punti in generale distinti, così anche la retta b' incontra la curva f' in n punti distinti e variabili col piano β'. Ora il piano $c\,a$ taglia la superficie F secondo una curva dell'ordine n, la quale possiede in A un punto i-plo ordinario e alla quale quindi si possono condurre, dal punto O, $n(n-1)-i(i-1)$ tangenti. Dunque:

VI. « Per ciascuna delle rette $b'\,c'$ passano $n(n-1)-i(i-1)$ « piani stazionari. »

20. Ad una retta R' di Σ' appoggiata in un punto P' alla retta d' corrisponde in Σ (11, IV) una conica, la quale passa per il punto A, epperò incontra la superficie F in $2\,n-i$ punti variabili. Quindi:

I. « La superficie F' possiede la retta fondamentale d' come « retta n-pla. »

Ad ogni punto P' della retta d' di Σ' corrisponde in Σ (9, III) la retta d. Questa incontra la superficie F in n punti distinti per ciascuno dei quali passa una, ed una sola, delle coniche di Σ corrispondenti (12, VII) alle rette di Σ' passanti per il punto P' dato sopra d' e situate in uno stesso piano U'. Ciascuna delle coniche così determinate incontra la superficie F in $2\,n-i-1$ punti variabili; quindi la retta corrispondente ha in comune con la superficie F' $n+1$ punti riuniti in P'. Dunque dal punto P' escono n rette distinte situate sul piano dato U', le quali toccano in P' la superficie F'. Queste n rette determinano altrettanti piani passanti per d', i quali sono tangenti in P' ad F'; epperò:

II. « Gli n piani tangenti alla superficie F' in un punto generico P' « della retta d' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P'. »

Perchè due degli n piani tangenti alla superficie F' in un punto della retta d' coincidano, è necessario che coincidano due delle n coniche innanzi considerate, il che non può avvenire perchè gli n punti d'intersezione della retta d con la superficie F sono tutti distinti fra loro. Dunque:

III. « Sulla retta d' non esistono punti cuspidali. »

Si vedrà in seguito (23, II) quali sono i piani tangenti alla superficie F' nel punto D', in cui la retta d' si appoggia alla s'.

Ad un piano δ' di Σ' condotto per la retta d' corrisponde in Σ (7, II e 9, III) un cono quadrico circoscritto al quadrispigolo $O\,.\,a\,b\,c\,d$. Quindi la curva f' secondo cui quel piano incontra, oltre d', la superficie F' corrisponde alla curva d'intersezione f di questo cono con la superficie F. Ora questa curva f si appoggia alla retta d negli n punti in cui questa incontra la superficie F, i quali sono tutti distinti fra loro. Perciò sono tali anche gli n punti nei quali la curva medesima si appoggia alla generatrice $\varkappa$ del cono anzidetto infinitamente vicina a d. La curva f' incontra la retta $\varkappa'$ del piano δ', corrispondente a $\varkappa$, in n punti che sono i corrispondenti di quelli comuni alla retta $\varkappa$ ed alla curva f, epperò, come questi, sono tutti distinti fra loro. Quindi sono tali anche gli n punti nei quali la curva f' incontra la retta d'. Dunque un piano condotto ad arbitrio per la retta d' taglia la superficie F' secondo una curva f', la quale incontra la retta d', fuori di O' e D', in n punti distinti fra loro. Si vedrà in seguito (25, II) quale sia la singolarità che questa curva possiede nel punto O'. Intanto si noti ancora che non può mai accadere che due degli n punti di incontro di f' con d', fuori di O', coincidano fra loro; e quindi si ha:

IV. « Per la retta d' non passano piani stazionari. »

Il piano $d'b'$ di Σ' corrisponde al piano db di Σ, il quale taglia la superficie F secondo una curva generale f dell'ordine n. Siccome fra i punti dei due piani db e $d'b'$ ha luogo (12, VI) una corrispondenza omografica, così alla curva f del piano corrisponde sopra il secondo una curva f', affatto generale dell'ordine n, e questa insieme alle rette b' e d' contate (19, I e 20 I) $n-i$ ed n volte rispettivamente costituisce la completa intersezione del piano $b'd'$ con la superficie F' Dunque:

V. « Ciascuno dei due piani $d'b'$ e $d'c'$ taglia la superficie F', « oltre le due rette fondamentali in esso contenute, secondo una curva generale dell'ordine n. »

Si esamineranno in seguito (24, III, 22, VI) le sezioni fatte nella superficie F' dai piani $d'a'$ e $d's'$.

21. Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta fondamentale e' corrisponde in Σ (11, V) una conica la quale non passa per A e quindi incontra la superficie F in $2n$ punti variabili. Dunque:

I. « La superficie F' possiede la retta fondamentale e' come retta « $(n-i)^{-pla}$. »

Ad ogni punto P' della retta e' corrisponde in Σ (9, III) la retta a. Questa incontra la superficie F in $n-i$ punti, fuori di A, tutti distinti fra loro, per ciascuno dei quali passa una, ed una sola, delle coniche di Σ corrispondenti (12, VIII) alle rette di Σ' passanti per il punto P' dato sopra e' e situate in un medesimo piano. Quindi come i teoremi II e III del n.° che precede si hanno i seguenti:

II. « Gli $n-i$ piani tangenti alla superficie F' in un punto ge- « nerico P' della retta e' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P'. »

III. « Sulla retta e' non esistono punti cuspidali. »

Si vedrà in seguito (23, V) quali sono i piani tangenti alla superficie F' nel punto E', in cui la retta e' si appoggia alla s'.

Ad un piano ε' condotto per la retta e' corrisponde in Σ (7, 11 e 9, III) un cono quadrico circoscritto al triedro $O.abc$ e tangente lungo la generatrice a al piano t. Quindi la curva f' secondo cui quel piano incontra, oltre e', la superficie F', corrisponde alla curva d'intersezione f di questo cono con la superficie F. Ora questa curva f si appoggia alla retta a, oltre A, negli $n-i$ punti in cui la retta stessa incontra la superficie F, i quali sono tutti distinti fra loro. Quindi ripetendo il ragionamento fatto per dimostrare il teorema IV del n.° precedente, si trova che la curva f' incontra la retta e', fuori di O' ed E' in $n-i$ punti distinti fra loro. Si vedrà in seguito (25, III) quali siano le singolarità che questa curva possiede nei punti O' ed E'; intanto però si può concludere:

IV. « Per la retta e' non passano piani stazionari. »

Il piano $a'e'$ corrisponde al piano t, e fra i punti di questi due piani ha luogo una corrispondenza omografica (12, VI). Ora il piano t taglia la superficie F secondo una curva dell'ordine n, la quale possiede in A un punto i-^{plo} ordinario. La curva f' a questa corrispondente nel piano $a'e'$, nell'anzidetta omografia, è quindi una curva dell'ordine n, la quale possiede in E' un punto i-^{plo} ordinario. Questa curva insieme alle rette a' ed e' contate (18, I e 21, I) n ed $n-i$ volte rispettivamente, costituisce la completa intersezione del piano $a'e'$ con la superficie F'. Dunque:

V. « Il piano $a'e'$ taglia la superficie F', oltre le due rette fonda- « mentali in esso contenute, secondo una curva dell'ordine n, la quale pos- « siede in E' un punto i-^{plo} ordinario. »

Fra i piani passanti per la retta e' v'è ancora il piano $b'c'$. Ora si sa (10, 11) che fra i punti di questo piano di Σ' e le rette della stella (A) di Σ ha luogo una trasformazione quadratica, per la quale una delle rette fondamentali della stella è la retta s, cui corrisponde sul piano la retta a_1. In virtù di questa trasformazione, al cono Δ, d'ordine i tangente in A alla superficie data F e avente la retta s come generatrice j-^{pla}, di natura qualsiasi, corrisponde sul piano $b'c'$ una curva di Δ' dell'ordine $2i-j$, la quale possiede nel punto fondamentale E' un punto i-^{plo} ordinario e in O' un punto $(i-j)$-^{plo}, in cui tutte le tangenti coincidono con la retta a_1, e questa incontra la curva Δ' nel punto O', il quale conta per $2(i-j)$ punti d'intersezione, in altri j punti, i quali possono coincidere e formare anche un punto j-^{plo}. Nella stessa trasformazione, al cono Δ corrisponde sul piano $b'c'$, non solo la curva Δ', ma anche la retta a_1, contata j volte, perchè quel cono possiede la retta s come generatrice j-^{pla}. Questa retta a_1, contata j volte, e l'anzidetta curva Δ' fanno parte dell'intersezione del piano $b'c'$, con la superficie F', la quale intersezione viene completata dalle rette b', c', e', ciascuna contata $n-i$ volte (19, I e 21, I). Dunque:

VI. « Il piano $b'c'$ taglia la superficie F', oltre le tre rette fonda- « mentali b', c', e' in esso contenute, e la retta a_1 contata j volte, secondo « una curva Δ' dell'ordine $2i-j$, la quale possiede in E' un punto i-^{plo} « ordinario e in O' un punto $(i-j)$-^{plo}, in cui le tangenti coincidono tutte « con la retta a_1. Ciascun ramo di Δ' passante per O incontra ivi la retta a_1, « oltre O', che deve essere contato $i-j$ volte, in altri $i-j$ punti infinita- « mente vicini ad O'; e la curva Δ' incontra la stessa retta a_1, fuori di O', « in altri j punti, i quali possono anche formare un punto j-^{plo}. »

22. Ad una retta R' di Σ' appoggiata in un punto P' alla retta s' corrisponde in Σ (11, I) una conica, la quale passa per il punto A, e quindi incontra la superficie F in $2n-i$ punti variabili. Dunque:

I. « La superficie F' possiede la retta fondamentale s' come retta n-^{plo}. »

Ad un punto qualunque P' della retta s' corrisponde in Σ (9 e 4, V) una generatrice del cono C, la quale incontra la superficie F in n punti in generale distinti fra loro, i quali determinano n piani passanti per la retta s, cui corrispondono in Σ' (10 e 5, I) altrettanti piani passanti per s', i quali toccano F' nel punto P'. Dunque:

II. « Gli n piani tangenti alla superficie F' in un punto generico P' « della retta s' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P'. »

Fra le generatrici del cono C ve ne sono alcune (il numero delle quali è determinato in ogni caso) che riescono tangenti alla superficie F. A ciascuna di queste corrisponde sulla retta s' un punto P' in cui due degli n piani tangenti alla superficie F' coincidono. Dunque:

III. « Sulla retta s' esistono tanti punti cuspidali quante sono le « generatrici del cono C', distinte dalla retta OA, che toccano la super- « ficie F. »

Ad un piano σ' di Σ' condotto ad arbitrio per la retta s' corrisponde in Σ un piano passante per s. Fra i punti di questi due piani ha luogo (12, I) una trasformazione quadratica per la quale sono fondamentali sul piano σ il punto A e i punti B e C in cui questo piano incontra le rette b e c, e sul piano σ' i punti A', B', C' in cui questo incontra le rette a', b', c'. Inoltre in questa trasformazione alla retta s di σ corrisponde sul piano σ' la retta in cui questo taglia il piano $a'd'$ $(r'=0)$; e alla retta s' di σ', la conica secondo la quale σ' sega il cono C. Ora la curva d'intersezione f' del piano σ' con la superficie F' è la curva di σ' corrispondente nell'anzidetta trasformazione alla curva d'intersezione f del piano σ con la superficie F. Questa curva f è, per le ipotesi fatte (17) sulla superficie F, dell'ordine n e possiede in A un punto i-^{plo} tale che j degli i rami passanti per esso toccano ivi la medesima retta s, ma possono avere con essa contatto di differenti ordini. Perciò la curva f' è dell'ordine $2n-i$, possiede in A', B', C' punti multipli ordinari secondo i numeri n, $n-i$, $n-i$ rispettivamente (tutto ciò è in accordo col teorema I di questo n.°, col teorema II del n.° 18 e con quello I del n.° 19) e incontra la retta $B'C'$ in i punti, dei quali $i-j$ sono quelli in cui questa retta taglia, fuori di E', la curva Δ' (21, VI) e i rimanenti j coincidono nel punto A_1, intersezione della retta a_1 col piano σ'. Questi j punti coincidenti possono nascere dal fatto che A_1 sia un punto j-^{plo} della curva f'; e siccome questo è il caso più sfavorevole che possa presentarsi, così si supporrà d'ora in avanti che esso abbia luogo. Inoltre si osservi che i punti comuni alla curva f' e alla retta s' sono i corrispondenti di quelli nei quali la curva f incontra la conica d'intersezione del piano σ col cono C, epperò al pari di questi sono in generale tutti distinti fra loro. Dunque:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta s', taglia la su-
« perficie F' oltre la retta stessa s' secondo una curva dell'ordine $2n-i$,
« la quale possiede in A', B', C' punti multipli secondo i numeri n, $n-i$,
« $n-i$ rispettivamente, in A_1 un punto j-^{plo} di natura incognita, ed incontra
« la retta s in $2n-i$ punti in generale distinti fra loro. »

Se la curva f' tocca la retta s', la curva corrispondente f tocca il cono C, e viceversa. Dunque:

V. « Per la retta s' passano tanti piani stazionari quante sono le
« sezioni fatte nella superficie F con piani condotti per la retta s, le quali
« riescono tangenti al cono C'. »

Il piano $O's'$ contiene le tre rette fondamentali d, e', s. Siccome queste sono multiple per F' secondo i numeri n, $n-i$ ed n rispettivamente, così il piano $O's'$ non incontra la superficie F', oltre le rette medesime; epperò:

VI. « Il piano $O's'$ taglia la superficie F' soltanto nelle rette
« d', e', s' contate n, $n-i$, n volte rispettivamente. »

23. Ad una retta di Σ' condotta per il punto D' e non situata sul piano $O' s'$, corrisponde in Σ (12, II) una conica la quale passa per il punto A e quindi incontra la superficie F in $2n - i$ punti variabili. Dunque:

I. « La superficie F' possiede in D' un punto n-^{plo}. »

Fra le coniche di Σ corrispondenti alle rette di Σ' condotte per il punto D' e non situate sul piano $O' s'$, non ve n'ha alcuna che si appoggi alla retta d; quindi nessuna di queste rette tocca nel punto D' la superficie F'. Però ogni retta condotta per il punto D' e situata sul piano $O' s'$ è tangente in D' ad F'. Infatti, il piano $O' s'$ taglia la superficie F' secondo le rette s', d', e' soltanto (22, VI). Quindi ogni retta che passi per D' e giaccia sopra $O' s'$, incontra la superficie F', fuori di D', soltanto nel punto in cui essa taglia la retta e'. Ma perchè questa è $(n - i)$-^{pla} per F', quel punto conta per $n - i$ intersezioni della retta considerata con la superficie F'; le rimanenti $(3n - i) - (n - i) = 2n$ cadono dunque nel punto D'. Quindi:

II. « Gli n piani tangenti alla superficie F' nel punto D' coincidono « col piano $O' s'$, e ogni retta di questo piano condotta per D' ha in comune « con la superficie $2n$ punti riuniti in D'. »

Ad un piano di Σ' condotto per il punto D' corrisponde in Σ (7, I) una superficie del 3.° ordine φ, la quale (9 e 4, V) contiene la retta d e tocca lungo questa il cono C. Questa superficie incontra la superficie data F secondo una curva f, la quale si appoggia a d, negli n punti in cui questa sega F. Alla curva f corrisponde la curva d'intersezione f' del piano considerato con la superficie F', e agli n rami di quella appoggiati alla retta d, corrispondono gli n rami di questa passanti per il punto D', ciascuno dei quali ha in comune col piano tangente $O' s'$, oltre gli n punti riuniti in D', altri n punti infinitamente vicini a D', non essendovi alcuna ragione perchè un ramo abbia con l'anzidetto piano un contatto più intimo di un altro. Dunque:

III. « Un piano condotto ad arbitrio per il punto D' taglia la su- « perficie F' secondo una curva che possiede in D' un punto n-^{plo} in cui le « tangenti coincidono con la retta d'intersezione del piano dato col piano $O' s'$ « ed ogni ramo passante per esso ha in comune con la superficie F', oltre « gli n punti riuniti in D', altri n punti infinitamente vicini a D'. »

Ad una retta di Σ' condotta per il punto E' e non situata sul piano $O' s'$ corrisponde in Σ (12, III) una conica, la quale passa per il punto A e quindi incontra la superficie F in $2n - i$ punti variabili. Dunque:

IV. « La superficie F' possiede in E' un punto n-^{plo}. »

Il piano t non passa per la retta s; epperò (12) taglia la superficie F secondo una curva la quale possiede in A un punto i^{plo} con le tangenti tutte distinte fra loro e tali che ciascuna ha in comune con la superficie F, $i+1$ punti riuniti in A. Queste i tangenti determinano altrettanti piani passanti per la retta s, e fra le coniche di Σ corrispondenti alle rette di Σ' condotte per il punto E', le quali coniche sono tangenti in A al piano t, soltanto quelle situate in una qualsiasi degli i piani anzidetti, incontrano la superficie F in $2n-(i+1)$ punti variabili. Quindi fra le rette di Σ' condotte per il punto E', fuori del piano $O's'$, soltanto quelle contenute negli i piani di Σ' corrispondenti agli i piani di Σ ora considerati, toccano in E la superficie F'. Questi i piani di Σ' passanti per s' e tutti distinti fra loro al pari dei piani di Σ cui corrispondono, sono dunque tangenti in E' alla superficie F'. Ripetendo poi il ragionamento fatto sopra per dimostrare il precedente teorema II, si trova che anche il piano $O's$ tocca in E' la superficie F' e che ogni retta di questo piano condotta per il punto E', ha in comune con la superficie F', oltre gli n punti riuniti in E', altri punti infinitamente vicini ad E'. Quindi raccogliendo si ha:

V. « Degli n piani tangenti alla superficie F' nel punto E', i sono « distinti fra loro e i rimanenti $n-i$ coincidono col piano $O's'$. Inoltre ogni « retta di questo piano condotta per il punto E' ha in comune con la super- « ficie F', oltre gli n punti riuniti in E', altri $n-i$ punti infinitamente vi- « cini ad E'. »

Ad un piano di Σ' condotto ad arbitrio per il punto E' corrisponde in Σ una superficie del 3.° ordine φ, la quale possiede in A un punto doppio biplanare, invece di un punto doppio conico, perchè il piano di Σ' cui corrisponde taglia il piano $b'c'$ secondo una retta passante per E' (10, II). Questa superficie incontra la superficie data F secondo una curva f', la quale si appoggia alla a, fuori di A, negli $n-i$ punti distinti, in cui questa retta sega F. Quindi come il precedente teorema III, si trova:

VI. « Un piano condotto ad arbitrio per il punto E' taglia la su- « perficie F' secondo una curva che possiede in E' un punto n-^{plo}, in cui i « delle n tangenti sono fra loro distinte e le rimanenti $n-i$ coincidono con la « retta d'intersezione del piano dato col piano $O's'$ ed ogni piano passante per « esso e tangente a quest'ultima retta, ha in comune con la superficie F' oltre « gli n punti riuniti in E', altri $n-i$ punti infinitamente vicini ad E'. »

24. Si è fatta l'ipotesi (22, IV) che un piano arbitrario σ' condotto per la retta s' tagli la superficie F' secondo una curva f', la quale possegga

in A_1 un punto j^{-plo}. Al piano σ' di Σ' corrisponde in Σ un piano σ passante per la retta s e in virtù della trasformazione quadratica che ha luogo fra questi due piani, alle rette di σ' passanti per il punto A_1 corrispondono le coniche di σ circoscritte al triangolo fondamentale $A\,B\,C$ e tangenti in A alla retta s. Ciascuna retta di quel fascio, la quale non tocchi in A_1 la curva f' incontra la curva stessa, e quindi anche la superficie F' in $2n-i-j$ punti variabili; perciò la conica corrispondente deve incontrare in altrettanti punti variabili la superficie F, epperò dei $2n$ punti che essa ha in comune con questa superficie, $i+j$ debbono cadere in A. Ammesso (ciò che sembra evidente) che il numero dei punti d'intersezione riuniti in A, della superficie F con una curva passante per A, non dipenda dall'ordine di questa, ma soltanto dal suo modo di comportarsi rispetto ad F nelle immediate vicinanze di A, si può concludere:

I. « Se una curva passa semplicemente per il punto A e tocca ivi « la retta s, $i+j$ dei punti che essa ha in comune con la superficie F ca- « dono in A. »

Ad una retta di Σ' appoggiata alla retta a_1, corrisponde in Σ (11, VI) una cubica gobba, la quale passa per il punto A e tocca ivi la retta s. Quindi, in virtù del teorema precedente, essa incontra la superficie F in $3n-(i+j)$ punti variabili; epperò:

II. « La superficie F' possiede la retta a_1 come retta j^{-pla}. »

I piani tangenti alla superficie F' in un punto generico di questa retta a_1 sono incogniti; però si possono conoscere alcune delle proprietà delle sezioni operate in F' dai piani passanti per a_1.

Fra questi piani v' è intanto il piano $a'\,d'$ $(r'=0)$, il quale taglia la superficie F' nelle rette a' e d', ciascuna delle quali deve essere contata n volte (18, II e 20, I), e in tante rette passanti per il punto O', quanti sono i punti in cui la retta s incontra, fuori di A, la superficie F (9, IV). Ora nell'ipotesi fatta che ogni sezione f operata in F da un piano σ, passante per s, si trasformi in una curva f' del piano σ', corrispondente a σ, la quale possegga in A_1 un punto j^{-plo}, segue che la retta s ha in comune con la superficie F, fuori di A, $n-i-j$ punti. Infatti, la curva f dell'ordine $2n-i$ possiede nel punto A', intersezione del piano σ' con la retta a', un punto n^{-plo} (18, II) e in A_1 un punto j^{-plo} per ipotesi. Quindi la retta in cui il piano σ' viene segato dal piano $a'\,d'$, incontra la curva f', fuori di A' e di A_1, in $(2n-i)-(n+j)=n-i-j$ punti, poichè in virtù dell'arbitrarietà che vi è nella scelta degli elementi fondamentali di Σ', può sempre farsi in modo che l'anzidetta retta non riesca tangente in A_1 alla curva f'. Ma alla retta medesima corrisponde sul piano σ la retta s; dunque quest'ultima retta incontra la curva f, epperò anche la superficie F in $n-i-j$ punti. Quindi:

III. « Il piano $a'd'$ taglia la superficie F', oltre le rette a', d', a_1, in altre $n-i-j$ concorrenti nel punto O'. »

Ad un piano V' di Σ' condotto per la retta a_1 corrisponde in Σ un cono quadrico V circoscritto al triedro $O.abc$ e tangente lungo la retta a al piano Os. Questo cono taglia la superficie data F secondo una curva f dell'ordine $2n$, la quale possiede in A un punto j-^{plo}, in cui le tangenti sono le rette secondo le quali il piano Os, sega il cono tangente in A alla superficie F, epperò secondo le ipotesi fatte intorno a questo cono, $i-j$ sono distinte fra loro e dalla retta s, mentre le rimanenti j coincidono con questa retta. Inoltre la medesima curva f si appoggia alla retta a negli $n-i$ punti in cui questa incontra, fuori di A, la superficie F, e in ciascuno di essi tocca il piano Os. La curva f corrisponde in Σ alla curva f' di Σ', secondo la quale il piano dato V' taglia, fuori di a_1, la superficie F'.

Ciascuno dei j rami della curva f passanti per il punto A e ivi tangenti alla retta s, ha un piano osculatore σ passante per la stessa retta s. A questo piano corrisponde in Σ' un piano σ' passante per la retta s', il quale incontra la curva f' in un numero di punti variabili di un'unità almeno inferiore a quello secondo cui l'incontra un piano condotto ad arbitrio per s', perchè altrettanto accade del numero dei punti d'intersezione del piano σ con la curva f. Il piano σ' sega la retta a_1 in un punto A_1 ed è in questo che va a cadere quell'ulteriore punto fisso d'intersezione di σ' con f', poichè nella trasformazione quadratica che ha luogo fra i punti dei due piani σ e σ', al punto della retta s infinitamente vicino ad A, corrisponde il punto A_1. La curva f' passa dunque per questo punto; epperò si ha:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta a_1 taglia ulterior-
« mente la superficie F' secondo una curva f', la quale incontra a_1, fuori
« di O', in j punti, i quali sono distinti oppure tutti od in parte coincidenti,
« secondochè tali sono i piani osculatori in A alla curva f. »

Enunciando così come si è fatto questo teorema, si è ammesso che i piani osculatori in A alla curva f siano distinti dal piano Os. Se alcuni di essi, o anche tutti, coincidono con questo piano, alcuni dei punti j, o anche tutti, vanno a coincidere con O'. Questo caso, per ora, viene escluso.

25. Un piano V' condotto ad arbitrio per il punto O' taglia la superficie F' secondo una curva f', la quale possiede (22, I) un punto n-^{plo} ordinario nel punto S' in cui il piano V' incontra la retta s', e (18, I) un punto $(2n - i)$-^{plo} in O', in cui n delle tangenti coincidono nella retta d'intersezione di V' col piano r' e le rimanenti $n - i$ nella retta d' intersezione dello stesso V' col piano $b' c'$.

Al piano V' corrisponde in Σ (7, II) un cono quadrico Γ circoscritto al triedro $O . a b c$, il quale taglia la superficie data F secondo una curva f', che è precisamente la curva di Σ corrispondente all' anzidetta sezione piana f', di F'. La curva f è dell'ordine $2n$ e possiede in A un punto i-^{plo} ordinario, perchè il punto A è un punto semplice per il cono Γ, e un punto i-^{plo} per la superficie F, e inoltre il piano tangente in A a Γ non contenendo la retta s, sega il cono Δ tangente nello stesso punto A ad F, in i rette tutte distinte fra loro. La medesima curva f non passa per O, e non si appoggia nè alla retta d, nè alla retta s, mentre si appoggia in $n - i$ punti distinti, fuori di A e di O, alla retta a, in ciascuno dei quali tocca il piano tangente lungo a al cono Γ, e in n punti, fuori di O, pure distinti fra loro, a ciascuna delle rette b, c, ed m, dicendo m la retta secondo la quale il cono Γ viene tagliato, oltre a, dal piano $O s$. Agli n rami della curva f appoggiati alla retta m, corrispondono (9, I) gli n rami della curva f' tangente in O' al piano r'; e agli $n - i$ rami di quella appoggiati alla retta a, corrispondono gli $n - i$ rami di questa tangenti in O' al piano $b' c'$. Il piano r' incontra (24, III) la superficie F' soltanto in rette concorrenti nel punto O', epperò ogni retta del piano stesso condotta per O' non incontra la superficie F' fuori di O'. Della stessa proprietà gode dunque la tangente in O' alla curva f' e situata sul piano r'; epperò questa tangente incontra la curva f' oltre il punto O', che è $(2n - 1)$-^{plo} per f' in altri $(3n - i) - (2n - i) = n$ punti infinitamente vicini ad O'. E siccome non v'è alcuna ragione per cui uno degli n rami di f' tangenti in O' al piano r' si comporti in O' in un modo diverso di un altro ramo, così si può concludere che tutti questi n rami si toccano in O', o meglio in un punto a questo infinitamente vicino del piano r', ed hanno ivi un contatto n — punto. In modo affatto analogo, tenendo presente il teorema VI del n.° 21, si conclude che gli $n - i$ rami di f, passanti per O', e tangenti al piano $b' c'$, hanno nel punto infinitamente vicino ad O', un contatto $(n - i)$ — punto.

Ma per conoscere quale sia la singolarità posseduta nel punto O' dalla curva f' si faccia la proiezione stereografica del cono quadrico Γ, scegliendo come centro il punto A e come quadro un piano qualunque V_1. La generatrice $A\,O$ di Γ incontra il piano V_1 in un punto P_1, il quale è l'imagine di ogni punto della generatrice stessa. Inoltre il piano tangente lungo questa al cono Γ sega il quadro secondo una retta p_1, passante per P_1, ogni punto della quale è l'imagine di un punto di Γ infinitamente vicino al centro di proiezione A. Le rette del quadro V_1 passanti per il punto fondamentale P_1, rappresentano le generatrici di Γ; tutte le altre rappresentano le sezioni di Γ fatte con piani condotti per A. Le proiezioni f_1 della curva f, è una curva dell'ordine $2\,n - i$, la quale possiede in P_1 un punto $(n-i)$-*plo* e gli $n-i$ rami di essa passanti per questo punto toccano tutti la retta p_1, con la quale hanno in comune, oltre P_1, gli stessi $n-i$ punti infinitamente vicini a P_1, in modo che nel punto della retta p_1 infinitamente vicino a P_1 vengono ad avere un contatto $(n-i)$— punto (*). La medesima curva f_1 incontra, fuori di P_1, la retta p_1 in i punti distinti fra loro e non passa per il punto S_1, intersezione della retta s col quadro.

Per mezzo del cono Γ resta stabilita fra i punti dei due piani V' e V_1 una corrispondenza birazionale.

Ad un piano di Σ passante per il punto A corrisponde in Σ' (8, III) una quadrica Φ_1 tangente in O' al piano r' e contenenti le rette a', d', s'. Questa quadrica viene tagliata dal piano V' secondo una conica, la quale passa per il punto S' in cui il piano stesso incontra la retta s' e tocca nel punto O' la retta v' d'intersezione del piano V' col piano r'. La conica così ottenuta corrisponde sul piano V' a quella secondo cui il piano dato sega il cono Γ la quale ha per imagine sul piano V_1 una retta. Dunque:

1.° Alle rette del piano V_1 corrispondono sul piano V' le coniche passanti per il punto S', tangenti in O' alla retta v'.

Ad una retta del piano V' corrisponde sul cono Γ (7, III) una cubica gobba, la quale passa per i due punti A ed O e tocca in quest'ultima la retta v secondo la quale il cono Γ viene tagliato oltre le rette a, b, c, dal cono C_0; si appoggia poi in un punto, fuori di A, alla retta s. Questa cubica viene proiettata da A sopra il quadro V_1 secondo una conica, la quale passa per i due punti S_1 e P_1 e tocca in quest'ultimo la retta v_1 proiezione della generatrice v del cono Γ. Dunque:

2.° Alle rette del piano V' corrispondono sul piano V_1 le coniche passanti per il punto S_1 e tangenti in P_1 alla retta v_1.

(*) Questa proprietà della curva f_1 può essere dimostrata in modo più rigoroso, facendo uso delle formole della proiezione stereografica.

Così la corrispondenza birazionale fra i punti dei due piani V' e V_1 è una trasformazione quadratica, per la quale i punti fondamentali sul piano V' sono i punti S', O' e il punto a questo infinitamente vicino sulla retta v; e sul piano V_1, i punti S_1, P_1 e il punto a questo infinitamente vicino sulla retta v_1.

La curva f_1 corrisponde in questa trasformazione alla curva f'. Si ha perciò:

I. « Un piano condotto ad arbitrio per il punto O' taglia la superficie F' secondo una curva f' dell'ordine $3n-i$, la quale possiede in S' un punto n-plo ordinario ed in O' un punto $(2n-i)$-plo in cui n delle tangenti coincidono nella rette d'intersezione del piano considerato col piano r', e le rimanenti $n-i$ nella retta d'intersezione dello stesso piano col piano $b'c'$. Eseguendo una trasformazione quadratica per la quale siano fondamentali sopra il piano dato i punti S', O' e il punto a questo infinitamente vicino sulla prima delle due tangenti in O' alla curva f', questa si cambia in una curva f_1 dell'ordine $2n-i$ dotata di un punto $(n-i)$-plo, tale che gli $n-i$ rami che vi passano toccano ivi una medesima retta sulla quale hanno in comune gli stessi $n-i$ punti infinitamente vicini a quello. La curva f_1 si cambia con una seconda trasformazione quadratica, in un'altra curva f_2 fornita di sole singolarità ordinarie. »

Suppongasi in particolare che il piano V' passi per la retta d'. Il cono Γ che gli corrisponde in Σ contiene la retta d, e quindi la curva f secondo la quale esso incontra la superficie F gode di tutte le proprietà sopra notate per una curva generale f, e di più si appoggia in n punti distinti alla retta d. Parimenti la sua proiezione f_1 sul quadro V_1 possiede le medesime proprietà dianze trovate, e di più incontra in n punti distinti la retta d_1, proiezione di d.

La quadrica Φ' di Σ' corrispondente ad un piano di Σ condotto per il punto A, contiene la retta d', epperò viene tagliata dal piano passante per la medesima retta, secondo un'altra retta. Quindi nel caso attuale, la corrispondenza birazionale che ha luogo fra i punti dei due piani V' e V_1 è un'omografia. In questa omografia alla retta d_1 di V_1 corrisponde la retta d' di V'; e poichè la curva f_1 incontra quella retta in n punti distinti, come si è testè osservato, così anche la curva f' incontra questa in n punti distinti, il che costituisce una proprietà trovata per altra via lungo il corso della dimostrazione del teorema IV del n.° 20. Inoltre le curve f_1 ed f' essendo corrispondenti nell'anzidetta omografia, posseggono le medesime singolarità. Quindi osservando che ai rami di f' passanti per O' e ivi tangenti al piano $b'c'$, corrispondono ai rami di f_1 passanti per P_1 e ivi tangenti alla retta p_1, si conclude:

II. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta d' taglia ulteriormente la superficie F' secondo una curva f' dell'ordine $2n-i$, la quale « possiede in O' un punto $(n-i)$-^{plo} e i suoi $n-i$ rami passanti per questo « punto toccano tutti la retta secondo la quale il piano considerato incontra « il piano $b'c'$ e hanno in comune con questa gli stessi $n-i$ punti infinita- « mente vicini ad O'. »

Si supponga in secondo luogo che il piano V' passi per la retta e'. Il cono Γ che gli corrisponde in Σ tocca lungo a il piano t e quindi la curva f, come la sua proiezione f_1, su V_1, non presenta particolarità. Si noti però che nel caso attuale il punto fondamentale S' del piano V' coincide col punto E'. Inoltre ad una retta di Σ' appoggiata alla retta e' corrisponde in Σ (11, V) una conica appoggiata alle rette a, b, c ed s e tangente nel punto d'appoggio con a al piano t. Quindi la proiezione di questa conica fatta da A sul piano V_1 passa per i punti S_1 e P_1 e tocca in quest'ultimo la retta t_1, alla quale sono tangenti gli $n-i$ rami di f_1 passanti per P_1. La retta t_1 incontra la curva f_1, fuori di P_1 in i punti distinti; perciò la curva f' possiede in E' un punto i-^{plo} ordinario, il che è in accordo col teorema V del n.° 23. Dunque:

III. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta e' taglia la superficie F' secondo una curva f' dell'ordine $2n$, la quale possiede in E' « un punto i-^{plo} ordinario ed in O' un punto n-^{plo} in cui le tangenti coin- « cidono tutte nella retta d'intersezione del piano considerato col piano r'. « Eseguendo una trasformazione quadratica come già si è fatto nel precedente « teorema I, si perviene ai medesimi risultati là ottenuti. »

Infine il piano V' passa per la retta a_1. Il cono che gli corrisponde in Σ tocca lungo a il piano Os, e quindi, come si è già trovato innanzi (24), la curva f possiede in A ancora un punto i-^{plo}; ma j delle tangenti in questo punto coincidono con la retta s. Quindi la curva f_1 possiede oltre la solita singolarità in P_1, anche un punto j-^{plo} in S_1.

Il punto S_1 giace sulla retta p_1, e le coniche di V_1 corrispondenti alle rette di V' passano per S_1 e toccano in P_1 una retta v_1, distinta da p_1. Le coniche di V' corrispondenti alle rette di V_1 passano per S' e toccano in O' la retta a_1. Questa retta corrisponde in V' al punto fondamentale S_1 di V_1; e siccome la curva f_1 possiede in V_1 un punto j-^{plo}, così la curva f' incontra la retta a_1 in j punti fuori di O'. In tal modo si ritrova la proprietà contenuta nel teorema IV del n.° precedente. Inoltre si ha:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta a_1 taglia ulteriormente la superficie F' secondo una curva f' dell'ordine $3n - i - j$, la quale « possiede in S' un punto n^{-plo} ordinario e in O' un punto $(2n - i - j)^{-plo}$, « in cui le tangenti coincidono tutte con la retta a_1. Eseguendo una trasfor- « mazione quadratica, la quale abbia come fondamentali sul piano dato i « punti S', O' e il punto a questo infinitamente vicino sulla retta a_1, la « curva f' si cambia in un'altra f_1, che possiede in S_1 un punto j^{-plo} (di « natura incognita) e in P_1 un punto $(n - i)^{-plo}$ tale che tutti gli $n - i$ rami « passanti per esso toccano ivi la retta $S_1 P_1$ e hanno in comune con questa « gli stessi $n - i$ punti infinitamente vicini a P_1. »

Con la proprietà contenuta in questo teorema lo studio della superficie F' è compiuto, almeno per lo scopo che qui si ha in mira. E se la retta a_1 risulta per F' una retta j^{-pla} ordinaria, la singolarità posseduta nel punto A dalla superficie data F resta in tal modo risoluta. Altrimenti è necessario eseguire su questa superficie la trasformazione studiata nel paragrafo primo.

§ 5.

26. Fra lo spazio Σ' e un terzo spazio Σ'' si stabilisca la trasformazione del paragrafo primo, assumendo come elementi fondamentali di Σ' il punto O', la retta a_1, altre due rette b_1 e c_1 condotte ad arbitrio per O' e la retta s', e come elementi di Σ'' un punto qualunque O'', tre rette a''_1, b''_1, c''_1 passanti per O'' e non situate sopra uno stesso piano e una retta qualsiasi s''. Nella trasformazione cubica così individuata sono poi altri elementi fondamentali di Σ' (o Σ'') le due rette d_1 e e_1 (o d'' e e''), comuni al piano $O's'$ (o $O''s''$) e al cono C_1 (o C'') corrispondente al piano $O''s''$). In virtù della trasformazione stessa alla superficie F' di Σ' corrisponde in Σ'' una nuova superficie, che si indicherà con F''.

27. Ad una retta R'' di Σ'' corrisponde in Σ' (3, IV) una cubica gobba S_1, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il cono C_1, si appoggia in due punti alla retta s', e in un punto, oltre O', a ciascuna delle rette a_1, b_1, c_1 e in nessun punto alle rette d_1 ed e_1. Quindi ricordando che la superficie F' è dell'ordine $3n - i$ ed ha in O' un punto multiplo secondo $2n - i$ (18, I), che possiede s' come retta n^{-pla} (22, I) e a_1 come retta j^{-pla} (24, II),

ed osservando che non contiene le altre rette fondamentali di Σ', si trova che essa viene incontrata dalla curva S_1 in

$$3(3n-i)-[(2n-i)+2n+j]=5n-2i-j,$$

punti variabili; epperò:

I. « La superficie F'' è dell'ordine $5n-2i-j$. »

Poichè ad una retta di Σ'' condotta per il punto O'' corrisponde in Σ' (3, II) una retta passante per il punto O', si ha ancora:

II. « La superficie F'' possiede in O' un punto multiplo secondo « $4n-2i-j$. »

Si vedrà in seguito (36, III) quale sia il cono tangente ad F'' in questo punto O''.

28. Ad una retta di Σ'' appoggiata in un punto P' alla retta a'_1 corrisponde in Σ (5, V) una conica, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il cono C_1, si appoggia in un punto, oltre O', alla retta a_1 e in un punto alla retta s'. Quindi essa incontra la superficie F' in

$$2(3n-i)-[(2n-i)+n+j]=3n-i-j,$$

punti variabili. Dunque:

I. « La superficie F'' possiede la retta fondamentale a'_1 come retta « $(2n-i)^{-pla}$. »

Ad un punto P'' della retta a'_1 corrisponde in Σ' (4, VI) una retta del piano $b_1 c_1$ appoggiata in un punto M' alla retta s'. Poichè questa è n^{-pla} per la superficie F' (22, I), così quella incontra la superficie stessa in $2n-i$ punti variabili e in generale tutti distinti fra loro, i quali determinano $2n-i$ piani passanti per a_1, cui corrispondono in Σ'' altrettanti piani passanti per a'_1. Ripetendo i medesimi ragionamenti fatti per provare il teorema III del n.° 18, si dimostra che questi piani toccano in P'' la superficie F'', e quindi si ha:

II. « I $2n-i$ piani tangenti alla superficie F'' in un punto gene- « rico P'' della retta a'_1 sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P''. »

Il piano $b_1 c_1$ taglia la superficie F' secondo una curva, la quale possiede in M' un punto n^{-plo} ordinario ed in O' una determinata singolarità (25, I). A ciascuna tangente condotta a questa curva dal punto M' corrisponde un punto cuspidale della curva a'_1 (Cfr. n.° 18, IV). Quindi:

III. « Sulla retta a'_1 esiste un numero determinato di punti cu- « spidali. »

Ad un piano α'' di Σ'' condotto ad arbitrio per la retta a'_1 corrisponde in Σ' (5, VI) un piano α_1 passante per la retta a_1 e fra i punti di questi due piani ha luogo una determinata trasformazione quadratica, nella quale alla retta a'_1 di α'' corrisponde in α_1 la retta secondo cui questo piano incontra il piano $b_1 c_1$. Ora la curva d'intersezione f_1 di α_1 con la superficie F', incontra l'anzidetta retta in n punti, fuori di O', che sono i punti d'incontro di F' con la retta medesima, e sono in generale tutti distinti fra loro. Quindi sono tali anche i punti in cui la retta a'_1 viene segata, fuori di O', dalla curva secondo la quale il piano α'' taglia, oltre a'_1, la superficie F''. Dunque:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta a'_1 taglia ulterior- « mente la superficie F'' in una curva, la quale incontra fuori di O'', la « retta a'_1 in n punti distinti fra loro e variabili col piano considerato. »

Il piano $b_1 c_1$ incontra la superficie F'' secondo una curva, che possiede in O' un determinato punto multiplo. Ad ogni tangente condotta da O' a questa curva corrisponde un piano stazionario della superficie F'' passante per la retta a'_1. Quindi:

V. « Per la retta a'_1 passa un numero determinato di piani sta- « zionari. »

29. Ad una retta di Σ'' appoggiata in un punto P'' alla retta b'_1 corrisponde in Σ' (5, V) una conica, la quale passa per il punto O' e tocca ivi il cono C_1, si appoggia in un punto, oltre O', alla retta b_1 e in un punto alla retta s'. Quindi essa incontra la superficie F' in

$$2(3n-i)-[(2n-i)+n]=3n-i,$$

punti variabili; epperò:

I. « La superficie F'' possiede le rette fondamentali b'_1 e c'_1 come « rette multiple secondo $2n-i-j$. »

Ad un punto P'' di b'_1 corrisponde in Σ' (4, VI) una retta del piano $c_1 a_1$, appoggiata in un punto M' alla retta s'. Siccome le rette s' ed a_1 sono multiple per F' secondo i numeri n e j rispettivamente, così la retta che corrisponde al punto P'' incontra la superficie F' in $2n-i-j$ punti variabili e in generale distinti fra loro, i quali determinano altrettanti piani passanti per la retta b_1, i cui corrispondenti piani di Σ'' toccano nel punto P'' la superficie F''. Dunque:

II. « I $2-i-j$ piani tangenti alla superficie F'' in un punto ge- « nerico P'' della retta b'_1, o c'_1 sono tutti distinti fra loro e variabili col « punto P''. »

Il piano $c_1 a_1$ taglia la superficie F'' secondo una curva, alle tangenti della quale condotte dal punto M' corrispondono i punti cuspidali della retta b'_1; epperò:

III. « Sopra ciascuna delle due rette b'_1 e c'_1 esiste un numero de- « terminato di punti cuspidali. »

Tenendo presente il teorema VI del n.° 5, come il teorema IV del n.° precedente, si dimostra:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta b'_1, o c'_1, taglia ul- « teriormente la superficie F'' in una curva la quale incontra, fuori di O', la « retta b'_1, c'_1, in n punti distinti fra loro e variabili col piano considerato. »

I piani stazionari della superficie F'' passanti per la retta b'_1 corrispondono alle tangenti condotte dal punto O' alla curva d'intersezione del piano $c_1 a_1$ con la superficie F'; e quindi:

V. « Per ciascuna delle rette b'_1 c'_1 passa un numero determinato « di piani stazionari. »

30. Alle rette a', b', c' della stella (O') corrispondono nella stella (O'') tre rette a'', b'', c''. Poichè quelle sono multiple per la superficie F' secondo i numeri n (18, II), $n-i$ e $n-i$ (19, I) rispettivamente e non sono fondamentali per lo spazio Σ', così queste hanno eguali multiplicità per la superficie F''. Dunque:

I. « La superficie F'' possiede le rette a'', b'', c'' come rette mul- « tiple secondo i numeri n, $n-i$, $n-i$ rispettivamente. »

Ad una retta di Σ'' appoggiata alla retta d'_1 corrisponde in Σ' (5, VII) una conica, la quale si appoggia in un punto a ciascuna delle rette a_1, b, c_1, d_1, s_1. Quindi essa incontra la superficie F' in

$$2(3n-i)-(j+n)=5n-2i-j.$$

punti variabili; epperò:

II. « La superficie F'' non contiene le rette d'_1 ed e'_1. »

31. Ad una retta di Σ'' appoggiata in un punto P'' alla retta s'' corrisponde in Σ' (5, II) una conica appoggiata in due punti alla retta s' e in un punto a ciascuna delle rette a_1, b_1, c_1. Quindi essa incontra la superficie F' in

$$2(3n-i)-(2n+j)=4n-2i-j,$$

punti variabili; epperò:

I. « La superficie F'' possiede la retta fondamentale s'' come « retta n^{-pla}. »

Ad un punto P'' di s'' corrisponde in Σ' (4, V) una generatrice del cono C_1. Quindi come i teoremi II e III del n.° 22, così si hanno i seguenti:

II. « Gli n piani tangenti alla superficie F' in un punto generico P'' « della retta s'' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P''. »

III. « Sulla retta s'' esistono tanti punti cuspidali quante sono le « generatrici del cono C_1 tangenti alla superficie F'. »

Tenendo presente il teorema III del n.° 5, come i teoremi IV e V del n.° 22, si dimostrano gli altri:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta s'' taglia ulterior- « mente la superficie secondo una curva che incontra la retta medesima s'' « in punti tutti fra loro distinti e variabili col piano considerato. »

V. « Per la retta s'' passano tanti piani stazionari quante sono le « sezioni fatte nella superficie F' con piani condotti per la retta s', le quali « riescono tangenti al cono C_1. »

32. Altre proprietà della superficie F'' si dimostrano più facilmente ricorrendo alla trasformazione birazionale che in virtù delle trasformazioni stabilite fra gli spazi Σ e Σ', e Σ' e Σ'', nasce fra Σ e Σ''.

Si ricordi dapprima che ad una retta R'' di Σ'' corrisponde in Σ (15, IV) una curva del 5.° ordine s_0, la quale possiede in A un punto doppio in cui una delle tangenti è la retta s. Questa curva deve incontrare la superficie data F in $5n-2i-j$ punti variabili, perchè in tanti punti variabili la retta R'' incontra (27, I) la superficie F''. Quindi dicendo x il numero de'suoi punti d'intersezione con F, riuniti in A, si ha

$$5n-x=5n-2i-j,$$

donde

$$x=2i+j.$$

Ora ammesso che il numero dei punti d'intersezione riuniti in A della superficie F con una curva la quale possegga in A la medesima singolarità di cui è ivi dotata la curva S_0, non dipenda dall'ordine della curva, ma soltanto dal suo modo di comportarsi nelle immediate vicinanze del punto A, si può concludere:

I. « Se una curva qualunque possiede in A un punto doppio ed una « delle tangenti in questo punto è la retta s, il numero dei punti d'interse- « zione, riuniti in A, della curva data con la superficie F è $2i+j$. »

La superficie φ_0 di Σ corrispondente (15, III) ad un piano U'' di Σ'' taglia la superficie data F secondo una curva f_0 dell'ordine $5n$. La superficie φ_0

contiene la retta g, la quale incontra la superficie F in n punti H_1, H_2, $H_3, \ldots$, H_n, tutti distinti fra loro; quindi la curva f_0 si appoggia alla retta g in questi punti. La superficie φ_0 possiede come doppia la retta a e lungo questa è toccata dai medesimi piani tangenti fissi Os e k; inoltre, quella delle sue falde tangente lungo a al piano Os ha in comune, oltre a, con la falda del cono C_0 che lungo la medesima retta tocca lo stesso piano, tre rette infinitamente vicine ad a. Quindi la curva f_0 possiede un punto doppio in ciascuno degli $n-i$ punti K_1, K_2, $K_3, \ldots$, K_{n-i}, tutti distinti fra loro, nei quali la superficie F incontra, fuori di A, la retta a, e dei due rami passanti per esso uno tocca il piano k e l'altro ha in comune con la falda del cono C_0 tangenti lungo a al piano Os, tre punti infinitamente vicini al punto doppio che si considera, oltre i punti riuniti nel punto doppio stesso. La superficie φ_0 possiede come doppie le rette b e c, ciascuna delle quali incontra la superficie F in n punti distinti; e questi sono altrettanti punti doppi per la curva f_0. Infine la superficie φ_0 possiede in A un punto triplo, in cui il cono tangente si scinde in un cono quadrico e nel piano Os e la falda della superficie stessa tangente in A a questo piano oscula la falda del cono C_0 che lungo la retta a tocca il medesimo piano Os. La superficie data F possiede in A un punto $i^{\text{-plo}}$, in cui il cono tangente Δ ha come $j^{\text{-plo}}$ la retta s. Quindi la curva f_0 possiede in A un punto multiplo secondo $3i$, e delle i tangenti in questo punto ottenute tagliando il cono Δ col piano Os, j coincidono con la retta s e le rimanenti $i-j$ sono tutte distinte fra loro e i rami di f_0 tangenti a queste rette osculano in A il cono C_0. Riepilogando si ha dunque:

II. « La curva f_0 secondo la quale una superficie qualunque φ_0 taglia « la superficie data F è dell'ordine $5n$, si appoggia in n punti distinti H « alla retta g, possiede sopra la retta a, $n-i$ punti doppi K, tutti distinti « fra loro, e dei due rami passanti per ciascuno di questi punti uno tocca il « piano k e l'altro ha, fuori del punto medesimo, ma in un punto infinita- « mente vicino ad esso, un contatto tripunto con la falda del cono C_0 tan- « gente lungo a al piano Os, infine possiede in A un punto multiplo secondo « $3i$ e de' suoi rami passanti per A, $i-j$ toccano in A, secondo direzione « distinte fra loro, il piano Os ed inoltre osculano l'anzidetta falda del « cono C_0. »

Ad una retta R'' di Σ'' appoggiata in un punto P'' alla retta g'' corrisponde in Σ (16, II) una curva del 4.° ordine la quale si comporta in A, come una curva S_0; quindi in virtù del precedente teorema I, essa incontra la superficie F in $4n-2i-j$ punti variabili; epperò:

III. « La superficie F' possiede la retta fondamentale g'' come « retta n^{plo}. »

La retta considerata R'' si riguardi come intersezione di un piano qualunque U' condotto per essa con il piano V'' che la proietta da O''. Al primo piano corrisponde in Σ (15, III) una superficie φ_0; al secondo (16, I), un cono Γ_g contenente la retta g. La retta R'' incontra la superficie F'' (III) in $4n - 2i - j$ punti variabili, ossia la superficie F'' e i due piani U'' e V'' hanno in comune $4n - 2i - j$ punti variabili; quindi altrettanti punti comuni variabili debbono avere le due superficie F e φ_0 e il cono Γ_g, ossia la curva d'intersezione f_0 di quelle due superficie deve incontrare questo cono in $4n - 2i - j$ punti variabili. Ora (II) la curva f_0 si appoggia in n punti distinti H alla retta g; inoltre i coni Γ_g formano un fascio; quindi fra questi ve ne sono n, ciascuno dei quali tocca la curva f_0 in uno, ed uno solo, di quei punti H. Ognuno di questi n coni incontra dunque la curva f_0 in $4n - 2i - j - 1$ punti variabili; perciò il piano ad esso corrispondente in Σ'' taglia il piano considerato U'' secondo una retta R'' appoggiata in P'' alla g'', la quale incontra la superficie F'' in $4n - 2i - j - 1$ punti variabili. Quindi nel punto P'' cadono $n + 1$ punti d'intersezione della anzidetta retta R'' con la superficie F', epperò la retta medesima tocca in P'' questa superficie, e quindi il piano delle due rette R'' e g'' tocca anche esso in P'' la superficie F''. Dunque i piani di Σ'' corrispondenti agli n anzidetti coni Γ_g di Σ, toccano in P'' la superficie F''; e siccome quei coni sono in generale tutti distinti fra loro, così si ha:

IV. « Gli n piani tangenti alla superficie F'' in un punto generico P'' della retta g'' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P''. »

Gli n coni Γ_g ora considerati tagliano la superficie φ_0 corrispondente al piano U'' in n curve del 4.° ordine passanti rispettivamente per gli n punti H in cui la retta g incontra la superficie F. Le medesime curve corrispondono (16, II) alle n rette d'intersezione del piano U'' con i piani tangenti in P'' alla superficie F''. Se due di questi piani coincidono, coincidono pure due di quelle curve. Ma perchè gli n punti H sono tutti distinti fra loro, ciò non può accadere; dunque:

V. « Sulla retta g'' non esistono punti cuspidali. »

Con ragionamenti affatto analoghi a quelli seguiti per dimostrare il teorema IV del n.° 20, si trova:

VI. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta g'' taglia ulteriormente la superficie F'' in una curva, che incontra la retta g'', fuori di O'', « in n punti distinti e variabili col piano considerato. »

VII. « Per la retta g'' non passano piani stazionari. »

33. Ad una retta R'' di Σ'' appoggiata in un punto P'' alla retta h'' corrisponde in Σ'' (16, IV) una curva del 4.° ordine, la quale passa per il punto A e tocca ivi la retta s; quindi (24, I) essa incontra la superficie F in $4n-i-j$ punti variabili; epperò:

I. « La superficie F'' possiede la retta fondamentale h'' come « retta $(n-i)^{-plo}$. »

Si consideri ancora la retta R'' come intersezione di un piano U'' condotto ad arbitrio per essa il piano V'' che la proietta da O'. A quest'ultimo piano corrisponde in Σ (16, III) un cono Γ_h tangente lungo a ai due piani Os e k; si dimostra come nel caso precedente, tenendo conto del teorema I, che questo cono incontra la curva f_0, intersezione di φ_0 con F, in $4n-i-j$ punti variabili. Ora (30, II) la curva f_0 possiede sopra la retta a, $n-i$ punti doppi K, distinti fra loro, in ciascuno dei quali un ramo di f_0 tocca il piano k, cui è tangente anche ciascuno dei coni Γ_h. Poichè questi coni formano un fascio, fra essi ve ne sono $n-i$, in generale distinti fra loro, ciascuno dei quali oscula in uno, ed un solo, dei punti k il ramo della curva f_0 passante per il punto stesso e ivi tangente al piano k. Questo cono incontra quindi la curva f_0 in $4n-i-j-1$ punti variabili; epperò si dimostra come nel caso precedente, che il piano di Σ'' che ad esso corrisponde tocca nel punto P'' la superficie F''. Dunque:

II. « Gli $n-i$ piani tangenti alla superficie F' in un punto gene- « rico P'' della retta h'' sono tutti distinti fra loro e variabili col punto P''. »

Inoltre come i teoremi V, VI e VII del n.° precedente si dimostrano gli altri:

III. « Sulla retta h'' non esistono punti cuspidali. »

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta h'' taglia ulterior- « mente la superficie F' in una curva che incontra la retta h'', fuori di O'' « in $n-i$ punti distinti e variabili col piano considerato. »

V. « Per la retta h'' non passano piani stazionari. »

34. Ad una retta R'' di Σ'' appoggiata in un punto P'' alla retta l'' corrisponde in Σ (16, VI) una curva del 4.° ordine la quale possiede in A un punto doppio, in cui una delle tangenti giace sul piano Os ed è distinta dalle rette a ed s, mentre l'altra è situata fuori di questo piano; quindi essa incontra la superficie F in $4n-2i$ punti variabili, epperò:

I. « La superficie F'' possiede la retta fondamentale l'' come « retta $(n-j)^{-plo}$. »

La retta R'' si consideri sempre come intersezione di un piano U'' condotto ad arbitrio per essa con il piano V'' che la proietta da O''. A quest'ultimo piano corrisponde in Σ (16, V) un cono Γ_l, che oscula lungo la retta a con una falda la falda del cono C_0 tangente lungo la medesima retta al piano Os; si dimostra come nei casi precedenti, tenendo conto del teorema I, che questo cono incontra la curva f_0, intersezione di φ_0 con F, in $4n-2i$ punti variabili. Ora (30, II) la curva f_0 possiede sopra la retta a, $n-i$ punti doppi K, tutti distinti fra loro e quello dei due rami di f_0 passanti per ogni punto K che tocca in K il piano Os, ha di comune col cono C_0 tre punti, oltre K infinitamente vicini fra loro e a K; epperò il ramo stesso oscula il cono Γ_l. Fra i coni Γ_l v'è lo stesso cono C_0, il quale per la proprietà ora ricordata della curva f_0, incontra la curva stessa non in $4n-2i$ punti variabili, ma in

$$(4n-2i)-(n-i)=3n-i,$$

punti variabili soltanto. Al cono C_0 corrisponde in Σ'' il piano $O's''$, il quale dunque taglia il piano U'' in una retta, che deve incontrare la superficie F'' in $3n-i$ punti variabili. Quindi nel punto P'' in cui questa retta si appoggia alla l'' cadono

$$(5n-2i-j)-(3n-i)=2n-i-j,$$

punti d'intersezione. Ma per il teorema precedente, il punto P'' è $(n-j)^{-plo}$ per F''; dunque la retta anzidetta tocca in P'' la superficie F'', ed ha in comune con essa, fuori di P'', altri

$$(2n-i-j)-(n-j)=n-i,$$

punti infinitamente vicini a P''. Dunque fra i piani tangenti alla superficie F'' in un punto generico della retta l'' v'è sempre il piano $O''s''$, ed inoltre questo taglia la superficie stessa, fuori della retta l'' contata $n-j$ volte, in altre $n-i$ rette infinitamente vicine ad l''.

La curva f_0 possiede $i-j$ rami, che passano per il punto A e toccano ivi il piano Os e di più osculano il cono C_0 e quindi anche il cono Γ_l. Fra i coni Γ_l, formanti un fascio, ve ne sono $i-j$, in generale distinti fra loro, ciascuno dei quali ha in comune con uno degli anzidetti $i-j$ rami di f_0 passanti per A, tre punti, oltre A, infinitamente vicini ad A. Ognuno di questi coni incontra quindi la curva f_0 in $4n-2i-1$ punti variabili, epperò il piano ad esso corrispondente in Σ'' tocca in P'' la superficie F''.

Raccogliendo si ha dunque:

II. « Degli $n-j$ piani tangenti alla superficie F'' in un punto ge-« nerico P'' della retta l'', $i-j$ sono distinti e variabili col punto P'', e i « rimanenti $n-i$ coincidono col piano $O''s''$. Questo piano taglia la super-« ficie F'', oltre le rette s'', g'', h'' ed l'' contate n, n, $n-i$ e $n-j$ volte « rispettivamente, in altre $n-i$ rette infinitamente vicine ad l''. »

Come gli ultimi tre teoremi dei due numeri precedenti, si dimostrano gli altri:

III. « Sulla retta l'' non esistono punti cuspidali. »

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta l'' taglia ulterior-« mente la superficie F'' in una curva, che incontra la retta l', fuori di O'', « in $i-j$ punti distinti e variabili col piano considerato. »

V. « Per la retta l'' non passano piani stazionari. »

35. La retta g'' si appoggia alla retta s'' in un punto G''. Una retta R'' condotta ad arbitrio per G'' determina un piano σ'' passante per s'', cui corrisponde in Σ' un piano σ' passante per s', e fra i punti di questi due piani ha luogo una trasformazione quadratica, in virtù della quale alla retta R'' di σ'' corrisponde in σ' una conica, la quale passa per i punti A_1, B_1, C_1, e G_1, in cui questo piano incontra le rette a_1, b_1, c_1 e g_1, essendo g_1 la retta di Σ' corrispondente alle rette g'' di Σ'', ossia l'intersezione, oltre a_1, del piano r' col cono C_1. Delle quattro rette anzidette soltanto la prima, a_1, appartiene alla superficie F', ed è j ^{pla} per essa (24, II); quindi la conica, corrispondente alla retta R'', la qual conica incontra in due punti la retta s', n-^{pla} per F', interseca questa superficie in

$$2(3n-i)-(2n+j)=4n-2i-j,$$

punti variabili, epperò:

I. « La superficie F'' possiede in G'' un punto n ^{plo}. »

Il piano r' taglia la superficie F' (24, III) secondo rette soltanto, le quali passano tutte per il punto O'. Quindi la retta g_1 situata sopra questo piano e passante per O', non incontra la superficie F' fuori di questo punto. Perciò fra le coniche di Σ, corrispondenti alle rette di Σ'' condotte per il punto G'', appoggiate alla retta g_1, non ve n'ha alcuna, la quale incontri la superficie F' in un punto di questa retta. Quindi fra le rette di Σ'' condotte per il punto G' non ve n'ha alcuna che tocchi in G'' la superficie F'', ad eccezione di quelle situate sul piano $O''s''$, ognuna delle quali incontra la superficie stessa, fuori delle rette h'' ed l'' (33, I e 32, II) in $2n$ punti riuniti in G''. Dunque:

II. « Gli n piani tangenti alla superficie F'' nel punto G'' coinci- « dono col piano $O''s''$ ed ogni retta di questo piano condotta per G'' ha in « comune con la superficie, $2n$ punti riuniti in G''. »

La retta h' si appoggia alla retta s' in un punto H'. Come nel caso precedente si vede che alle rette di Σ'' condotte per il punto H' corrispondono in Σ' le coniche appoggiate in due punti alla retta s' e in un punto a ciascuna delle rette a_1, b_1, c_1, ed h_1, essendo h_1 la retta di Σ' corrispondente alla retta h'', epperò l'intersezione, oltre a_1, del piano $b'c'$ col cono C_1. Quindi come il precedente teorema I, si ha l'altro:

III. « La superficie F'' possiede in H' un punto n-^{plo}. »

La retta h_1 incontra la superficie F' (21, VI) in i punti distinti fra loro, i quali determinano altrettanti piani passanti per s', cui corrispondono i piani passanti per s'', i quali toccano la superficie F'' nel punto H'. Inoltre anche il piano $O''s'$ è tangente in H'' ad F', perchè ogni sua retta condotta per H'', incontra F'', fuori delle rette g'' ed l'' (30, III e 32, II), in $2n-i$ punti riuniti in H''. Dunque:

IV. « Degli n piani tangenti alla superficie F'' nel punto H'', i sono « distinti fra loro e i rimanenti $n-i$ coincidono col piano $O''s''$, ed ogni « retta di questo piano condotta per H'' ha in comune con la superficie, « $2n-i$ punti riuniti in H''. »

La retta L'' si appoggia alla retta s'' in un punto L''. Una retta R'' di Σ'' determina un piano σ'' passante per s'', cui corrisponde in Σ' un piano σ' passante per s'. Alla retta R'' corrisponde su questo piano una conica circoscritta al triangolo $A_1 B_1 C_1$ e tangente in A_1 alla retta di σ' corrispondente nella trasformazione quadratica fra σ' e σ'', alla retta d'intersezione di σ'' col piano $a'_1 l''$ e quindi tangente al piano di Σ', passante per a_1, corrispondente al piano $a'_1 l''$. In virtù dell'arbitrarietà degli elementi fondamentali di Σ' e di Σ'', quest'ultimo piano $a'_1 l''$ può essere qualunque, e quindi può sempre supporsi che il suo corrispondente sia tale che tocchi le falde della superficie F' passanti per la retta a_1 soltanto in alcuni punti di questa retta. Quindi dei punti d'incontro di F' con la conica sopra considerata, soltanto i, almeno in generale, ne cadono nel punto A_1; altri $2n$ ne cadono nei due punti d'appoggio della conica stessa con la retta s'. Dunque:

V. « La superficie F'' possiede in L'' un punto n-^{plo}. »

Il piano di Σ' corrispondente al piano $a'_1 l''$ di Σ'', per quanto si è ora osservato e per il teorema IV del n.° 24, taglia la superficie F', oltre la retta a_1, secondo una curva f', la quale incontra a_1, fuori di O', in j punti, i quali sono distinti, oppure tutti o solo in parte coincidenti. Ciascuno di questi j punti determina un piano σ' passante per la retta s', al quale corrisponde in Σ'' un piano passante per s'' e alle rette di questo piano condotte per il punto L'' corrispondono in quello le coniche circoscritte al triangolo $A_1 B_1 C_1$ e tangenti in A_1 alla superficie F'; perciò le rette anzidette toccano in L'' la superficie F''. Dunque ai j punti nei quali la curva f' incontra, fuori di O', la retta a_1, corrispondono altrettanti piani passanti per s'' e tangenti in L'' alla superficie F''; e questi piani sono come quei punti, o tutti distinti oppure tutti od in parte coincidenti. Ogni retta del piano $O's'$ condotta per il punto L'' incontra la superficie F'', fuori di L'', soltanto nei punti in cui essa interseca le rette g'' e h''; quindi (30, III e 31, I) nel punto L'' cadono $3n-i-j$ punti d'intersezione; epperò:

VI. « Degli n piani tangenti alla superficie F'' nel punto L'', j sono « distinti dal piano $O's''$, e possono fra loro essere o tutti distinti oppure « tutti od in parte coincidenti, e i rimanenti $n-j$ coincidono col piano $O's''$, « ed ogni retta di questo piano condotta per L'' ha in comune con la super- « ficie $3n-i-j$ punti riuniti in L''. »

36. Si passi in fine a studiare le sezioni piane della superficie F''.

Innanzi tutto ad un piano σ'' di Σ'' condotto per la retta s'' corrisponde in Σ', un piano σ' passante per s', e fra i punti di questi due piani ha luogo una trasformazione quadratica, per la quale sono fondamentali sul piano σ' i punti A_1, B_1, C_1 in cui esso incontra le rette a_1, b_1, c_1 e sul piano σ'' i punti A'_1, B'_1, C'_1, in cui esso incontra le rette a'_1, b'_1, c'_1 (5, III). La curva d'intersezione f'' di σ'' con F'' è la curva di questo piano σ'' corrispondente nell'anzidetta trasformazione alla curva di intersezione f' di σ' con F'. Ora (22, IV) quest'ultima curva è dell'ordine $2n-i$ e possiede in A_1 un punto multiplo secondo j; quindi la curva f'' è dell'ordine $4n-2i-j$ e possiede in A'_1, B'_1, C'_1 punti multipli ordinari secondo i numeri $2n-i$, $2n-i-j$ $2n-i-j$ rispettivamente. Inoltre quella curva possiede punti multipli ordinari secondo n, $n-i$, $n-i$ nei punti A', B', C' in cui il suo piano incontra le rette a', b', c'; quindi questa possiede punti multipli ordinari degli stessi gradi nei punti A'', B'', C'' in cui il suo piano incontra le rette a'', b'', c''. Queste proprietà sono d'accordo con quelle dimostrate nei teoremi: I, 31; I, 28; I, 29; I, 30. Infine, poichè la curva f' possiede in A_1 un punto j-plo di natura incognita, così la curva f'' incontra la retta fondamentale $B'_1 C'_1$, fuori dei punti B'_1, e C'_1, in altri j punti, i quali possono coincidere e dar luogo anche ad un punto j-plo di f''. Dunque:

I. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta s'' taglia ulterior- « mente la superficie F'' secondo una curva f'' dell'ordine $4n-2i-j$, la « quale possiede in A'', B'', C'', A'_1, B'_1, C'_1 punti multipli ordinari secondo « i numeri n, $n-i$, $n-i$, $2n-i$, $2n-i-j$, $2n-i-j$ rispettivamente, « ed incontra la retta $B'_1 C'_1$, fuori di B'_1 e C'_1, in j punti, i quali possono « coincidere e dar luogo anche ad un punto j-plo di f''. »

Ad un piano V'' di Σ'' condotto per il punto O'' corrisponde in Σ' (3, I) un cono quadrico Γ_1, circoscritto al triedro $O'.a_1 b_1 c_1$, il quale taglia la superficie F' secondo una curva f_1 dell'ordine $6n-2i-j$, che possiede in O' un punto multiplo secondo $4n-2i-j$ ed ha come tangenti nel punto stesso le rette d'intersezione del cono Γ_1 col cono tangente in O' alla superficie F'. Ora questo ultimo cono si scinde nei due piani $a'd'$ e $b'c'$ contati n ed $n-i$ volte rispettivamente (18, I); e il cono Γ_1 passa per la retta a_1 intersezione dei piani medesimi, e sega il primo di questi in una retta u_1 e il secondo in una retta v_1. Quindi la retta u_1 e v_1 debbono essere contate rispettivamente come n ed $n-i$ tangenti della curva f_1 nel punto O'; epperò la retta a_1 vale per $2n-i-j$ tangenti della medesima curva nello stesso punto. Dunque dei rami della curva f_1, passanti per il punto O', n toccano in questo punto la retta u_1, altri $n-i$ toccano la retta v_1 e i rimanenti $2n-i-j$ toccano la retta a_1.

Al cono Γ_1 di Σ' corrisponde in Σ (15, II) un cono del 4.° ordine Γ_0, il quale possiede come doppia la retta a e lungo questa viene toccata da un piano τ variabile con Γ_0, e dal piano fisso Os, il quale taglia il cono stesso in una sola retta u_0, oltre a. Il cono Γ_0 interseca la superficie data F secondo una curva f_0 dell'ordine $4n$, la quale è fornita di $n-i$ punti doppi distinti sulla retta a (nei punti in cui questa incontra, fuori di A; la superficie F), e dei due rami di f_0 passanti per ciascuno di questi punti uno tocca il piano τ e l'altro il piano Os; possiede in A un punto multiplo secondo $2i$ e delle tangenti alla curva in questo punto $i-j$ giacciono sul piano Os e sono distinte fra loro; infine si appoggia in n punti in generale distinti alla retta u_0. Per quest'ultima proprietà, la curva f_1 passa per il punto O' con n rami tangenti nel punto stesso alla retta u_1 e costituenti una singolarità identica a quella posseduta in O' dalla curva che si ottiene tagliando la superficie F' con un piano condotto ad arbitrio per la retta u_1. Inoltre per la proprietà che ha la curva f_0 di possedere $n-i$ rami tangenti in altrettanti punti distinti della retta a_1 al medesimo piano τ la curva f_1 passa per O' con altri $n-i$ rami tangenti nel punto stesso alla retta v_1 e costituenti una singolarità identica a quella ivi posseduta dalla curva che si ottiene tagliando la superficie F' con un piano condotto ad arbitrio per la retta v_1. Infine per l'altra proprietà della curva f_0 di avere $n-i$ rami tangenti in altrettanti punti distinti della retta a, al piano Os ed $i-j$ rami tangenti in direzioni distinte nel punto A allo stesso piano, la curva f_1 passa per O' con $2(n-i)+(i-j)=2n-i-j$ rami tangenti nel punto stesso alla retta a_1 e costituenti una singolarità identica a quella ivi posseduta dalla curva che si ottiene tagliando la superficie F' con un piano condotto ad abitrio per la retta a_1.

Alla curva f_1 corrisponde in Σ'' la curva f'' nella quale il piano dato V'' taglia la superficie F'' e alle rette u_1, v_1, a_1 corrispondono rispettivamente le rette d'intersezione u'_1, v'_1 e a^0_1 del piano V'' con i piani $a'_1 g''$ $(r''=0)$, $a'_1 h''$ $(P''=0)$ e $c'_1 b'_1 (x''_1=0)$.

Il cono Γ_1 si rappresenti sopra un piano V_1 proiettandolo da uno M dei due punti, in cui esso viene incontrato dalla retta s'. Così fra i punti dei due piani V_1 e V'' nasce una corrispondenza birazionale.

Ad una retta del piano V'' corrisponde in Σ' (3, IV) una cubica gobba, la quale passa per il punto O' e tocca ivi la generatrice g del cono C_1 corrispondente al punto d'incontro del piano V'' con la retta s''; inoltre passa per il centro S', e si appoggia in un altro punto alla retta s'. Quindi la sua proiezione sopra il piano V_1 è una conica, la quale passa per i punti S_1 ed O_1, in cui questo piano incontra la retta s' e MO', e tocca in O_1 la proiezione g_1 della generatrice g. Dunque:

1.° Alle rette del piano V'' corrispondono le coniche del piano V_1, passanti per i punti S_1 ed O_1 e tangenti in quest' ultimo alla retta g_1.

Una retta del piano V_1 determina un piano passante per il punto M, e a questo piano corrisponde in Σ'' una superficie del 3.° ordine φ'_1, la quale contiene la generatrice g' del cono C'_1 corrispondente al punto M. Siccome la retta g' appartiene anche al piano V'', così questo taglia ulteriormente quella superficie φ'_1 secondo una conica, la quale passa per il punto S'', in cui la retta s'' incontra il piano V'', e per il punto O'', in cui tocca la generatrice g'', ulteriore intersezione del cono C'_1 con lo stesso piano V''. Dunque:

2.° Alle rette del piano V_1 corrispondono le coniche del piano V'' passanti per i punti S'' ed O'' e tangenti in quest'ultimo alla retta g''.

Così si vede che la corrispondenza birazionale che ha luogo fra i punti dei due piani V_1 e V'' è una trasformazione quadratica.

La curva f_1, intersezione del cono Γ_1 con la superficie F' possiede in M un punto n-^{plo}, epperò viene proiettata da M sopra il piano V_1 in una curva f_2 dell'ordine $5n-2i-j$, la quale possiede in S_1 un punto n-^{plo} ed in O_1 un punto multiplo secondo $4n-2i-j$, in cui le tangenti sono le rette u_2, v_2, a_2, proiezione delle rette u_1, v_1, a_1, tangenti in O' alla curva f_1 e le singolarità della curva f_2 nei punti delle anzidette tangenti infinitamente vicini ad O_1, sono identiche rispettivamente a quelle che posseggono nel punto infinitamente vicino ad O' le sezioni operate nella superficie F' da un piano condotto ad arbitrio per la retta u_1, o v_1, od a_1. La curva f'' è la corrispondente di f_2 nell'anzidetta trasformazione quadratica, e per le proprietà della trasformazione stessa, alla singolarità che la curva f_2 possiede nel punto O_1 corrisponde una singolarità identica per la curva corrispondente f'', nel punto O'', si conclude:

II. « Un piano condotto ad arbitrio per il punto O'' taglia la su- « perficie F'' in una curva f'' la quale possiede in O'' un punto multiplo « secondo $4n-2i-j$, e de' rami di questa curva passanti per O'', n toc- « cano il piano $a'_1\,g''$, col quale hanno in comune, oltre O'', gli stessi n « punti infinitamente vicini ad O''; altri $n-i$ toccano il piano $a'_1\,h''$, col « quale hanno in comune, oltre O'', gli stessi $n-i$ punti infinitamente vicini « ad O''; infine i rimanenti $2n-i-j$ toccano il piano $b'_1\,c'_1$ formando nel « punto infinitamente vicino ad O'' una singolarità identica a quella incon- « trata nel teorema IV del n.° 25. »

Da questo teorema segue:

III. « Il cono tangente alla superficie F'' nel punto O'' si scinde « nei piani $a'_1\,g''$, $a'_1\,h''$, $b'_1\,c'_1$ contati n, $n-i$, $2n-i-j$ volte rispetti- « vamente. »

Ad un piano α'' di Σ'' condotto ad arbitrio per la retta a'_1 corrisponde in Σ' un piano α_1 passante per la retta a_1 e fra i punti di questi due piani ha luogo una determinata trasformazione quadratica. Il piano α_1 taglia la superficie F' secondo una curva f_1 dell'ordine $3n-i-j$, la quale (25, IV) possiede in O' un determinato punto multiplo dell'ordine $2n-i-j$, in cui le tangenti coincidono con la retta a_1, ha un punto n-^{plo} ordinario nel punto in cui il suo piano α_1 incontra la retta s', e (24, IV) interseca la tangente α_1, fuori di O', in j punti. Alla curva f_1 corrisponde nell'anzidetta trasformazione quadratica, la curva f'' intersezione, oltre la retta a'_1, del piano α'' con la superficie F''. Poichè la retta a_1 tangente in O' alla curva f_1 non è una retta fondamentale del piano α_1 per questa stessa trasformazione, la curva f'' possiede in O'' la medesima singolarità che la curva f_1 ha in O'. Inoltre alla retta a_1 di α_1 corrisponde in α'' la retta in cui questo piano taglia il piano $b'_1 c'_1$; quindi come la curva f_1 incontra quella retta in soli j punti fuori di O', così la curva f'' incontra questa in soli j punti fuori di O''. Dunque:

IV. « Un piano condotto ad arbitrio per la retta a'_1 taglia ulterior-« mente la superficie F'' in una curva f'' la quale possiede in O'' un punto « multiplo secondo $2n-i-j$, in cui le tangenti coincidono nella retta d'in-« tersezione del piano dato col piano $b'_1 c'_1$ e la singolarità ivi risultante è « identica a quella incontrata nel teorema IV del n.° 25. Inoltre la curva f'' « incontra la sua tangente in O'', oltre i punti riuniti in O'', in soli altri j « punti, i quali possono essere tutti distinti oppure tutti od in parte coin-« cidenti. »

In modo analogo può essere studiata la sezione fatta nella superficie F'' da un piano condotto ad arbitrio per la retta b'_1, o c'_1. È poi facile vedere quali siano le sezioni operate dai piani $a'_1 b'_1$, $a'_1 c'_1$, $a'_1 l''$, $b'_1 g''$, $b'_1 h''$, $c'_1 g''$, $b'_1 h''$, ecc. In particolare è importante conoscere quelle ottenute con i piani tangenti ad F'' nel punto O''.

Fra questi v'è il piano $a'_1 g''$, il quale corrisponde in Σ'' al piano $a' d'$ di Σ'. Questo taglia la superficie F' (24, III) oltre le rette a', d', a_1, in altre $n-i-j$ rette concorrenti in O'; quindi anche il piano $a'_1 g''$ deve intanto tagliare la superficie F'' in $n-i-j$ rette concorrenti in O''. Inoltre alla retta a' di Σ' corrisponde in Σ'' una retta a'', la quale (30, I) è n-^{plo} per F''; e questa retta a'', passante essa pure per O'', appartiene al piano $a'_1 g''$, perchè a' appartiene al piano $a' d'$. Questo piano dunque taglia la superficie F'' in altre n rette coincidenti in a''. Infine altre $2n-i$ ed n rette d'intersezione cadono rispettivamente nelle rette a'_1 e g'' (28, I e 32, III) passanti anche esse per O''. Dunque il piano $a'_1 g''$ taglia intanto la superficie F'' in

$$(n-i-j)+n+(2n-i)+n=5n-2i-j,$$

rette tutte concorrenti in O''; e siccome la superficie F'' è dell'ordine $5n-2i-j$, così si conclude:

V. « Il piano $a'_1 g''$ taglia la superficie F'' soltanto in rette, tutte « concorrenti nel punto O''. »

Al piano $a'_1 h''$ di Σ'' corrisponde in Σ' il piano $b' c'$, il quale taglia la superficie F' secondo le quattro rette b', c', e', a_1 di cui le prime tre sono $(n-i)$-^{plo} e l'ultima è j-^{plo}, e in una curva Δ' dell'ordine $2i-j$, avente in O' un punto $(i-j)$-^{plo} e in E' un punto i-^{plo} (21, VI). Fra i punti dei due piani $a'_1 h''$ e $b' c'$ ha luogo una trasformazione quadratica, per la quale i punti fondamentali sopra $b' c'$ sono il punto E', il punto O' e il punto a questo infinitamente vicino sulla retta h_1, ulteriore intersezione del piano $b' c'$ con il cono C_1 (5, VI). In virtù di questa trasformazione alla curva Δ' corrisponde sul piano $a'_1 h''$ una curva Δ'' dell'ordine

$$2(2i-j)-[(i-j)+i]=2i-j,$$

la quale possiede in O'' un punto $(i-j)^{-plo}$, in cui le tangenti coincidono tutte con la retta d'intersezione del piano $a'_1 h''$ col piano $b' c'$, producendo in O' per la curva Δ'' una singolarità identica a quella che nel punto O' possiede la curva Δ'. La curva Δ' incontra la tangente a_1, fuori di O', in j punti, i quali possono anche coincidere e dar luogo ad un punto j^{-plo} per Δ'; quindi anche la curva Δ'' incontra la tangente in O'', fuori di questo punto, in altri j punti, che, come quelli, potranno anche coincidere e dar luogo ad un punto j^{-plo} per Δ''. Infine poichè il piano $b' c'$ contiene le due rette b' e c', il piano $a'_1 h''$ contiene le rette corrispondenti b'' e c''; e queste sono $(n-j)^{-plo}$ per la superficie F'' (30, I). Il piano $a'_1 h''$ taglia dunque la superficie F'' nelle quattro rette, a'_1, h'', b'' c'', di cui la prima deve essere contata $2n-i$ volte (28, I), la seconda $n-i$ volte (33, I) e ciascuna delle due rimanenti ancora $n-i$ volte; e nella curva Δ'' dell'ordine $2i-j$. Siccome è

$$(2n-i)+(n-i)+(n-i)+(n-i)+(2i-j)=5n-2i-j,$$

e la superficie F'' è dell'ordine $5n-2i-j$, così si conclude:

VI. « Il piano $a'_1 h''$ taglia la superficie F'' nelle quattro rette a'_1, « h'', b'', c'', contate $2n-i$, $n-i$, $n-i$ volte rispettivamente, e in una « curva Δ'' dell'ordine $2i-j$, la quale possiede in O'' un punto $(i-j)^{-plo}$, « identico a quello che ha in O' la curva Δ' in cui le tangenti coincidono « tutte nella retta d'intersezione del piano $a'_1 h''$ col piano $b'' c''$, e la curva Δ'' « incontra la retta medesima, fuori di O'', in j punti, i quali possono anche « coincidere e dar luogo ad un punto j^{-plo} per Δ''. »

Il piano $b'_1 c'_1$ contiene le tre rette b'_1, c'_1, l'', le quali (29, I e 34 I) sono multiple per la superficie F'' secondo i numeri $2n-i-j$, $2n-i-j$, $n-i$ rispettivamente. Il piano stesso non tocca la superficie F'' lungo alcuna di quelle tre rette (29, II e 34, II); quindi la incontra ulteriormente secondo una curva Θ dell'ordine.

$$(5n-2i-j)-[(2n-i-j)+(2n-i-j)+(n-j)]=2j.$$

Ogni retta condotta ad arbitrio per il punto L'' sopra il piano $b'_1 c'_1$ determina un piano σ'', passante per la retta s'', il quale (36, I) taglia la superficie F'' secondo una curva f'', che incontra la retta considerata, fuori di L'', in j punti soltanto. La retta medesima incontra la superficie F'', e quindi anche la curva Θ, fuori di L'', nei medesimi j punti. Dunque la curva Θ possiede in L'' un punto j-^{plo}. Ogni retta condotta ad arbitrio per il punto O'' sopra il piano $b'_1\, c'_1$ determina un piano α'' passante per la retta a'_1, il quale taglia la superficie F'' secondo una curva, che (IV) incontra la retta considerata, fuori di O'', in j punti soltanto. Quindi come nel caso precedente si conclude che la curva Θ possiede in O'' un altro punto j-^{plo}. Il piano $a'_1\, g''$ incontra il piano $b'_1\, c'_1$ secondo una retta, la quale in virtù del precedente teorema V, non incontra la superficie F'', e quindi neanche la curva Θ, fuori del punto O''. La retta stessa tocca dunque la curva Θ in O'', ed è l'unica tangente che la curva medesima abbia in questo punto. Raccogliendo si ha quindi:

VII. « Il piano $b'_1\, c'_1$ taglia la superficie F'' secondo una curva Θ « dell'ordine $2j$, la quale possiede due punti j-^{plo} uno in L'' e l'altro in O'', « e le tangenti in quest'ultimo punto coincidono tutte nella retta d'interse- « zione dei piani $b'_1\, c'_1$ e $a'_1\, g''_1$. »

37. Ad un piano qualunque U'' di Σ'' corrisponde in Σ una superficie del 5.° ordine φ_0, la quale possiede in O un punto quadruplo (15, III), e quindi può essere rappresentata univocamente sopra un piano qualunque, mediante proiezione da O. Così fra i punti di questo piano, per il quale giova qui scegliere un piano σ condotto ad arbitrio per la retta s, e quelli di U'' nasce una corrispondenza birazionale, nella quale sono corrispondenti due punti, che corrispondono ad uno stesso punto della superficie φ_0.

Una retta qualunque del piano U'' determina in Σ'' un piano passante per il punto O'', cui corrisponde in Σ (15, II) un cono del 4.° ordine Γ_0, il quale possiede come semplici le rette b_0 e c_0 e come doppie le rette a, b, c, lungo la prima delle quali uno dei due piani tangenti è il piano fisso Os e l'altro è un piano variabile. Quindi dicendo B_0, C_0, B, C i punti in cui il piano σ incontra le rette b_0, c_0, b, c, si ha:

1.° Ad una retta del piano U'' corrisponde sul piano σ una curva del 4.° ordine, la quale possiede come semplici i punti B_0 e C_0 e come doppi i punti A, B, C, nel primo dei quali una delle due tangenti è la retta fissa s e l'altra è una retta variabile.

Una retta qualunque del piano σ determina in Σ un piano passante per il punto O, cui corrisponde in Σ'' un cono del 4.° ordine, il quale possiede come semplici le rette a'', b'', c'' e come doppie le rette a'_1, b'_1, c'_1. Quindi dicendo A'', B', C'. A'_1, B'_1, C'_1 in cui il piano U'' incontra le anzidette rette, si ha:

2.° Ad una retta del piano σ corrisponde sul piano U'' una curva del 4.° ordine, la quale possiede come semplici i punti A'', B'' C'' e come doppi i punti A'_1, B'_1, C'_1.

Dunque fra i punti dei due piani σ ed U'' ha luogo una trasformazione del 4.° ordine, la quale è il prodotto di due trasformazioni quadratiche, una delle quali può supporsi fra il piano σ e il piano σ' di Σ', corrispondente a σ nella trasformazione cubica fra i due spazi Σ e Σ', e l'altra fra il piano σ' e il piano U''. Sul piano σ' i punti fondamentali per la prima delle anzidette trasformazioni quadratiche sono i punti A', B', C' in cui σ' incontra le tre rette a', b', c'; quelli per la seconda, sono i punti A_1, B_1, C_1 in cui lo stesso piano σ' incontra le rette a_1, b_1, c_1.

La superficie φ_0 taglia la superficie data F secondo una curva f_0, di cui le proprietà sono date dal teorema II del n.° 32. Quindi è facile riconoscere che la proiezione f_1 di f_0 dal centro O sopra il piano σ, è una curva dell'ordine $5n$, la quale possiede un punto n^{-plo} ordinario in ciascuno dei due punti B_0, C_0, G ed X; G ed X essendo i punti in cui le rette g ed x incontrano il piano σ, ed x la retta d'intersezione fuor delle rette fondamentali del cono C_0 col cono tangente in O alla superficie φ_0; un punto $2n^{-plo}$ ordinario in ciascuno dei punti B e C; ed in A un punto multiplo secondo $2n+i$. Dei rami di f_1 passanti per A, $n-i$ toccano la retta k_1, intersezione del piano k col piano σ, altri $(n-i)+(i-j)+2j=n+j$ toccano la retta s ed infine altri $2i-j$ toccano altrettante rette in generale tutte distinte fra loro. Dei rami di f_1 tangenti in A alla retta s, $n-i$ sono le proiezioni degli $n-i$ rami della curva f_0 passanti per i punti K della retta a e tangenti nei punti stessi al piano Os; quindi siccome ciascuno di questi rami di f_0 ha in comune con la falda del cono C_0 tangente lungo a al piano Os, tre punti infinitamente vicini ad a, tutti quegli $n-i$ rami di f_1 hanno in comune, oltre A, altri tre punti A' A'' A''' infinitamente vicini ad A, sul ramo della curva d'intersezione γ_1 del cono C_0 col piano σ, che tocca in A la retta s. Altri $i-j$ dei rami di f_1 tangenti in A ad s, sono le proiezioni degli $i-j$ rami di f_0 tangenti in A al piano Os; quindi siccome ciascuno di questi rami di f_0 oscula in A l'anzidetta falda del cono C_0, tutti quelli $i-j$ rami di f_1 hanno in comune, oltre A, anche i due punti A' ed A''. Infine i rimanenti $2j$ rami di f_1 tangenti in A ad s, sono le proiezioni dei $2j$ rami di f_0

tangenti essi stessi in A ad s; e siccome nessuno di questi rami di f_0 oscula in A la falda del cono C_0 già considerata, così quei $2j$ rami di f_1 hanno in comune, oltre A, dei tre punti A', A'', A''' soltanto il primo A', il che apparirà meglio in seguito.

Alla curva f_1 corrisponde sul piano σ', in virtù della trasformazione quadratica stabilita fra questo piano e σ, una curva f'_1, la quale è anche la proiezione sopra σ' dal punto O' della curva d'intersezione f' della superficie F' con la superficie φ_1 di Σ' corrispondente al piano U'. La curva f'_1 è dell'ordine $4n-i$, possiede in A' un punto n^{-plo} ordinario e in B' e C' punti $(n-i)^{-pli}$ ordinari, il che è d'accordo con il teorema II del n.° 18 e con il teorema I del n.° 19. Inoltre possiede punti multipli ordinari secondo i numeri n, n ed $n-i$ nei punti X_1, G_1 ed H_1 nei quali le rette x_1, g_1 ed h_1 sono incontrate dal piano σ', essendo x_1 la retta corrispondente ad x, ed il punto multiplo ordinario in H_1 provenendo dal punto $(n-i)^{-plo}$ che la curva f_1 possiede nel punto di k_1 infinitamente vicino ad A. Infine la stessa curva f'_1 incontra la retta $B'C'$ in altri $2i-j$ punti, corrispondenti ai $2i-j$ rami di f_1 tangenti in A ad altrettante rette distinte. Quindi ha in comune con la retta $B'C'$, fuori dei punti B', C' ed H_1 altri

$$4n-i-[(n-i)+(n-i)+(n-i)+(2i-j)]=n+j$$

punti, i quali corrispondono ai rimanenti

$$(2n+i)-[(n-i)+(2i-j)]=n+j$$

rami della curva f_1 tangenti in A alla retta s. Quindi quegli $n+j$ punti cadono tutti nel punto A_1 in cui la retta a_1 incontra il piano σ'.

Alla curva f'_1 di σ' corrisponde sul piano U'', in virtù della trasformazione quadratica per la quale si passa da σ' ad U'', la curva f'' in cui quest'ultimo piano incontra la superficie F''. Intanto ai punti X_1, G_1, H_1 di σ' corrispondono i punti in cui il piano U'' incontra le rette s'', g'', h''; e poichè quei punti non sono fondamentali per il piano σ', le medesime singolarità in essi possedute dalla curva f'_1, sono possedute dalla curva f'' nei punti corrispondenti, ciò che è in accordo con i teoremi: I del n.° 31, III del n.° 32 ed I del n. 33. Inoltre alle tangenti della curva f'_1 nel punto A_1 corrispondono i punti d'incontro della curva f'' con la retta B'_1 e C'_1, fuori dei punti fondamentali B'_1 e C'_1. Ciascuno di questi è multiplo per f'' secondo $2n-i-j$ (29, I); quindi gli ulteriori punti d'incontro di f'' con l'anzidetta retta è

$$(5n-2i-j)-2(2n-i-j)=n+j.$$

Di questi, $2j$ sono i punti d'intersezione θ della curva Θ con la retta $B'_1 C'_1$, i quali punti, per le proprietà di questa curva (36, VII) sono tutti distinti dal punto L, in cui il piano U'', e quindi anche la retta $B'_1 C'_1$, incontra la retta l''. Nel punto L cadono dunque:

$$(n+j)-2j=n-j,$$

punti d'intersezione della curva f'' con la retta $B'_1 C'_1$, il che è in accordo col teorema I del n.° 34. Poichè i $2j$ punti θ sono tutti distinti dal punto L, $2j$ delle tangenti in A_1 alla curva f'_1 debbono essere distinte dalle $n-j$ rimanenti. Al cono C_0 di Σ corrisponde in Σ' il cono C_1; quindi alla curva γ_0, intersezione di C_0 col piano σ, corrisponde sopra σ' la curva γ_1 secondo cui questo piano taglia il cono C_1; epperò ai punti A', A'', A''' di C_0 infinitamente vicini ad A corrispondono rispettivamente il punto A_1 e i punti A'_1 e A''_1 infinitamente vicini ad A_1 sulla conica γ_1. La curva f_1 passa per il punto A'' con $(n-i)+(i-j)=n-j$ rami, dei quali $n-i$ soltanto passano ancora per il punto A'''; quindi la curva f'_1 passa con $n-j$ rami per A'_1 e con $n-i$ rami per A''_1, e per l'osservazione dianzi fatta sulle tangenti in A_1 alla curva f'_1, le tangenti coincidenti con la retta $A_1 A'_1$ sono soltanto le $n-j$ tangenti agli anzidetti $n-j$ rami di f'_1. Quindi con la trasformazione quadratica mediante la quale si passa dal piano σ' al piano U'', la singolarità che la curva f'_1 possiede in A'_1 si cambia in un punto $(n-j)^{-plo}$ per la curva f''. Questo punto cade in L, perchè al piano di Σ' tangente al cono C_1 lungo la retta a_1 corrisponde in Σ'' il piano $a'_1 l''$, ed $i-j$ delle tangenti ad f' nel punto stesso sono distinte fra loro, mentre le rimanenti coincidono nella retta d'intersezione del piano U'' con il piano $O'' s''$, essendo questo il piano di Σ'' corrispondente al cono C_1. Inoltre gli $n-i$ rami di f'' che toccano in L l'anzidetta retta hanno in comune con la retta medesima $n-i$ punti riuniti nel punto infinitamente vicino ad L. Così mentre si ha una riconferma del teorema II del n.° 34, si trova ancora:

I. « La sezione fatta nella superficie F'' mediante un piano condotto ad arbitrio per un punto generico L della retta l'', è una curva che « possiede in L un punto $(n-j)^{-plo}$ ed $i-j$ de' suoi rami passanti per L « hanno le tangenti tutte distinte fra loro, mentre i rimanenti $n-j$ rami « toccano tutti la retta d'intersezione del piano considerato col piano $O'' s''$, « dando luogo ad un punto $(n-i)^{-plo}$ per f'' infinitamente vicino ad L. »

Supponendo che il piano U'' passi successivamente per i punti G'', H'', L'', come il teorema che precede si dimostrano gli altri:

II. « La sezione fatta nella superficie F'' mediante un piano con-
« dotto ad arbitrio per il punto G'', è una curva che possiede in G'' un « punto n-^{plo} e i suoi rami passanti per G'' toccano tutti la retta d'interse- « zione del piano considerato col piano $O''s''$, dando luogo ad un punto n-^{plo} « infinitamente vicino a G''. »

III. « La sezione fatta nella superficie F'' mediante un piano con- « dotto ad arbitrio per il punto H'', è una curva che possiede in H'' un « punto n-^{plo} e de' suoi rami passanti per H'', i toccano altrettanti rette di- « stinte e i rimanenti $n-i$ toccano la retta d'intersezione del piano consi- « derato col piano $O''s''$, dando luogo ad un punto $(n-i)$-^{plo} infinitamente « vicino ad H''. »

IV. « La sezione fatta nella superficie F'' mediante un piano con- « dotto ad arbitrio per il punto L'', è una curva che possiede in L'' un « punto n-^{plo} e de' suoi rami passanti per L'', j toccano altrettante rette, che « possono essere tutte distinte, oppure tutte od in parte coincidenti e i rima- « nenti $n-j$ toccano la retta d'intersezione del piano considerato col piano « $O''s''$, dando luogo a due punti, uno $(n-j)$-^{plo} e l'altro $(n-i)$-^{plo}, con- « secutivi ad L'' su quest'ultima tangente. »

Con questi teoremi lo studio della superficie F'' è compiuto, e se la curva Θ (36, VII) è una curva semplice, nel qual caso essa possiede in L'' un punto j-^{plo} ordinario, la riduzione della singolarità posseduta nel punto A dalla superficie F, è effettuata. Ma la curva Θ può scindersi in parti, di cui ciascuna sia multipla per F'', oppure ridursi ad una conica j-^{pla} di natura ignota. Si studierà in un'altra Memoria la trasformazione che in questi casi conviene applicare ancora alla superficie F''.

Pavia, gennaio 1897.

Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.

(Di Vito Volterra, *a Torino.)*

In una serie di Note (*) che ho presentato quest'anno alle Accademie di Torino e dei Lincei, ho esposto un metodo con cui può risolversi il problema della inversione degli integrali definiti.

Mi permetto ora di portare un contributo alle dette ricerche con questa Memoria la quale consta di tre parti. Nella prima dò un brevissimo cenno di studi fatti in passato sulla questione ed esamino i principii sui quali è fondato il mio metodo. Nella seconda applico il metodo stesso al caso della inversione quando ambedue i limiti sono variabili. Nella terza infine considero alcune questioni particolari, mostrando i resultati che si ottengono allorchè si eseguiscono quelle quadrature mediante le quali il detto procedimento risolve i problemi di inversione.

Art. I.

1. Il seguire le vicende del problema della inversione degli integrali definiti potrebbe dar luogo ad una pagina istruttiva ed interessante di storia dell'analisi, giacchè una tale ricerca intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali, agli sviluppi in serie e ad una classe estesa di questioni fisico-matematiche si è imposta di frequente all'attenzione dei geometri. Senza accingerci, per la sua difficoltà, a tale impresa, accenneremo

(*) *Sulla inversione degli integrali definiti*, Note I, II, III, IV Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 12 Gennaio, 26 Gennaio, 8 Marzo, 26 Aprile 1896. *Sulla inversione degli integrali definiti*, Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1 Marzo 1896. *Sulla inversione degli integrali multipli*, 26 Aprile 1896.

solo ad alcuni dei principali lavori a nostra conoscenza sull'argomento, chiedendo fin da principio venia delle involontarie omissioni.

2. Il maraviglioso resultato stabilito da ABEL nel 1823 colle sue due formule reciproche:

$$\psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}, \qquad s = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} x^n \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}, \qquad (n<1),$$

è così noto che ci basta solo di ricordarlo.

Osserviamo soltanto che l'A. conclude il § 1 della detta Memoria colle seguenti parole:

« Je remarquerai enfin que de la même manière qu'en partant de l'équation:

$$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \tag{1}$$

j'ai trouvé s, de même en partant de l'équation:

$$\psi(a) = \int \varphi(x\,a)\, f(x)\, dx, \tag{2}$$

j'ai trouvé la fonction φ, ψ et f étant des fonctions données et l'intégrale étant prise entre des limites quelconques; mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici. »

Questo scriveva ABEL nel 1823: tre anni dopo ripubblicava nel *Giornale di Crelle* sotto il titolo: « Solution d'un problème de mécanique » la stessa formula di inversione della equazione (1), ma non dava alcun cenno di aver risoluto la questione generale di invertire la (2). Nè il problema stesso riappare in alcuna altra Memoria di ABEL. Ci mancano quindi i dati necessari per decidere la questione se ABEL fosse effettivamente giunto a sciogliere questo problema o invece non avesse creduto per un momento alla possibilità di risolverlo seguendo una certa via, senza che le sue ulteriori ricerche abbiano confermato questa credenza

Quest'ultima ipotesi è resa più probabile dal fatto che HOLMBOE, che doveva conoscere le idee definitive di ABEL su questo soggetto, ha creduto di sopprimere il paragrafo della Memoria che contiene il solo passo delle opere in cui ABEL afferma di aver risoluto questo problema.

Certo è che nessuno dei molti matematici che in appresso si occuparono della questione, giunse, che io sappia, ad ottenerne la soluzione.

Nell'Art. II mostreremo come essa possa ricavarsi col metodo ivi esposto che è fondato sopra principii che non hanno alcun rapporto col metodo che seguiva ABEL.

3. Non erano ancora trascorsi tre anni dalla morte di ABEL che, nel 1832, LIOUVILLE stabiliva alcune formule d'inversione che in ultima analisi possono ricavarsi da quella d'ABEL e le applicava a numerose ed importanti questioni di varia natura le quali rendono sommamente interessante la lettura della sua Memoria. Il LIOUVILLE era ignaro delle ricerche d'ABEL, giacchè applicando la sua formula alla estensione del problema della tautocrona dice, dopo enunciato il problema: « Les recherches des divers géomètres sur la tautochrone ne s'étendraient nullement à la question plus difficile qui vient d'être énoncée, » mentre il problema stesso era stato risolto da ABEL nove anni prima.

LIOUVILLE però, più che alla questione funzionale mirava alla creazione di un nuovo calcolo: quello delle derivate d'indice fratto. Ma se questo suo concepimento contribuisce a dare forma elegantissima ai resultati, esso per altro lo costringe rispetto alla questione funzionale nei limiti della formula d'ABEL.

LIOUVILLE era conscio di tutta la importanza delle questioni funzionali nell'analisi delle equazioni a derivate parziali e specialmente nella fisica matematica. Dopo avere esaminato una estesa classe di questioni fisico meccaniche, egli dice: « tous ces problèmes sur les forces attractives se rapportent à une branche nouvelle des théories mécaniques dans laquelle on a pour but d'obtenir les forces élémentaires connaissant la loi que suivent dans une série régulière de cas donnés les résultantes de ces forces élémentaires. L'objet qu'on se propose dans cette partie de la science est de remonter des effets aux causes. »

Ora LIOUVILLE riteneva necessario di dover ricorrere ad « un nuovo calcolo » per risolvere le questioni suddette; ma esse posson farsi rientrare in quello ordinario con altrettante facilità.

Nondimeno la eleganza delle formule di LIOUVILLE ha invogliato vari autori a valersi delle sue derivate d'ordine fratto, e i loro resultati sono facilmente traducibili nell'ordinario linguaggio colle notazioni ordinarie.

4. Tanto ABEL quanto LIOUVILLE per stabilire le loro formule adoperavano il metodo degli sviluppi in serie. Esso però non è necessario, e quel che è più importante di notare non è rigoroso. Nel 1848 SCHLÖMILCH nei suoi « analytische Studien » riconobbe che la dimostrazione di ABEL giace sopra

un fondamento inesatto e particolarizzando una formula generale relativa alla riduzione degli integrali multipli ottenne la formula di ABEL in maniera rigorosa.

Le dimostrazioni che più comunemente si danno di essa sono però di natura diversa della precedente. Esse si basano sopra una formola di DIRICHLET. Questi fino dal 1835 nella sua Memoria: « Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraries entre des limites données, » aveva stabilito quel principio sulla inversione dell'ordine d'integrazione degli integrali doppii che è di tanta utilità e così frequentemente adoperato.

Esso si esprime mediante la formula:

$$\int_a^b d\,x \int_a^x \varphi(x,\ y)\, d\,x = \int_a^b d\,y \int_y^b \varphi(x,\ y)\, d\,x\,,$$

la quale, come dice il suo scopritore « est très-facile de démontrer et qui devient tout à fait évidente, lorsqu'on l'envisage sous un point de vue géométrique, » ma che può ottenersi pur facilmente per via analitica, come ha mostrato WINCKLER nel 1869 (*).

Fu JOACHIMSTHAL nel 1860 che per primo riconobbe, nel risolvere un problema meccanico proposto da JULLIEN, come il suddetto principio di DIRICHLET possa impiegarsi utilmente per ottenere la formola d'inversione di ABEL.

Non starò ad esporre in qual modo il principio di DIRICHLET renda quasi intuitiva questa formula, giacchè tale procedimento è ormai famigliare a tutti i cultori dell'analisi. Accennerò soltanto che il BELTRAMI, il DINI, il BETTI si valsero di esso nelle loro belle ricerche sulla teoria del potenziale. LETNIKOFF nel suo studio sulle derivate con indice fratto ne fa pure uso e così molti altri che non starò a citare.

Tuttavia i metodi escogitati per dimostrare la formula d'ABEL non si limitano ai precedenti. Ricorderò fra le altre dimostrazioni una molto elegante del SOMOFF che la espose nel 1868 nella sua Nota: « Sur un problème de mécanique » nella quale egli estese anche il problema della tautocrona, proponendosi di trovare la curva descritta sopra una superficie qualunque da un punto sollecitato da una forza che ha un dato potenziale conoscendo il tempo

(*) La precedente formula di DIRICHLET può estendersi, sotto certe condizioni, al caso in cui x, y siano variabili complesse. [Cfr. il § 10 della prima nota precedentemente citata.]

in funzione del potenziale. L'Autore risolve questo problema più generale facendo sempre uso della stessa formula d'ABEL.

5. Le applicazioni di questa non sono ristrette alle sole ricerche fisico-meccaniche di cui abbiamo parlato, nè a quelle solo analitiche di LIOUVILLE. Una geniale idea emessa da SCHLÖMILCH fu la fonte da cui scaturirono le applicazioni di essa agli sviluppi in serie, alle quali sono legate le profonde ricerche di BELTRAMI e di DINI di cui fra poco daremo un cenno.

Nel § 7 della sua Memoria: « Ueber die Bessel'sche Funktion », SCHLÖMILCH si propone di sviluppare una funzione arbitraria di una variabile in una serie di funzioni di BESSEL. Egli parte dallo sviluppo di FOURIER:

$$F(\lambda x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos 2\lambda x + A_2 \cos 4 \lambda x + \cdots,$$

in cui:

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(u) \cos 2 n u \, d u; \tag{3}$$

quindi moltiplicando per:

$$\frac{2}{\pi} \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ed integrando fra 0 ed 1, giunge alla formula (*):

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\lambda x)}{\sqrt{1-x^2}} d x = \frac{1}{2} A_0 + A_1 J_0(\lambda) + A_2 J_0(2\lambda) + A_3 J_0(3\lambda) + \cdots,$$

che è valida per λ compresa fra 0 e $\frac{1}{2}\pi$.

Ponendo:

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\lambda x)\, d x}{\sqrt{1-x^2}},$$

SCHLÖMILCH ha in tal modo lo sviluppo richiesto di $f(\lambda)$ per funzioni di BESSEL, onde in virtù delle (3) si potranno determinare i coefficienti dello sviluppo,

(*) Si osservi che SCHLÖMILCH fa uso della notazione di HANSEN anzichè di quella di BESSEL, per cui si ha:

$$J_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos 2\lambda x}{\sqrt{1-x^2}} d x,$$

ossia $J_0(\lambda) = I_0(2\lambda)$.

purchè dalla equazione precedente possa ricavarsi F in funzione di f. È appunto questo problema d'inversione che Schlömilch risolve mediante la formula d'Abel. In seguito l'Autore ottiene lo sviluppo analogo di una funzione per funzioni cilindriche d'ordine uno.

6. Nel 1880 il Prof. Beltrami ha preso nuovamente in esame la formula d'Abel e la ha presentata sotto una forma atta a risolvere simultaneamente due questioni reciproche, l'una delle quali è quella precedentemente citata di Schlömilch, e l'altra una nuova questione.

Il Beltrami osserva che il carattere essenziale della scoperta d'Abel si può far consistere nella equivalenza delle due relazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \varphi(r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \psi(r) \\ &\int_0^{r} \varphi(r)\, dr = \frac{r}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Tenendo ora conto delle due formule:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi I_0(x) \\ &\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \pi I_1(x)\,, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dalle (4) si deduce:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0(x \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1(x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \frac{1-\cos x}{x}\,. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Come Schlömilch valendosi delle (5) e del teorema d'Abel ottiene lo sviluppo d'una funzione per funzioni cilindriche d'ordine zero ed uno, cogli argomenti x, $2x$, $3x, \ldots$, così il Beltrami valendosi delle (6) e del teorema d'Abel perviene allo sviluppo di una funzione per serie trigonometrica di seni e coseni cogli argomenti $v_1 x$, $v_2 x$, $v_3 x, \ldots$, in cui le v_i sono le radici positive di una delle equazioni trascendenti $I_0(x) = 0$, $I'_0(x) = 0$, $I''_0(x) = 0$.

Infatti, se la funzione $f(x)$ ammette nell'intervallo $(0, 1)$ lo sviluppo:

$$f(x) = A_1 I_0(a_1 x) + A_2 I_0(a_2 x) + \cdots, \tag{7}$$

in cui $a_1, a_2, \ldots,$ sono radici di una o dell'altra equazione $I_0(x) = 0$, $I'_0(x) = 0$, e se al detto sviluppo è applicabile l'integrazione per serie, in virtù di ben note proprietà delle funzioni di Bessel, si avrà:

$$A_n = \frac{2}{I_0(a_n)^2 + I_1(a_n)^2} \int_0^1 x f(x) I_0(a_n x)\, dx. \tag{8}$$

Ora sostituiscasi nella (7) $x \operatorname{sen} \theta$ al posto di x, si moltiplichi per $\operatorname{sen} \theta\, d\theta$ e s'integri fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. A cagione della prima delle (6) si otterrà:

$$x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \sum \frac{A_n}{a_n} \operatorname{sen} a_n x = F(x). \tag{9}$$

Ma il teorema di Abel ci dà:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F'(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta,$$

abbiamo dunque il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo (9) per mezzo di $F(x)$ valendosi della formula precedente insieme alla (8); si trova così:

$$A_n = \frac{2}{\pi\,[I_0(a_n)^2 + I_1(a_n)^2]} \int_0^1 x I_0(a_n x)\, dx \int_0^{\pi} F'(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta .$$

Analogamente se $f_1(x)$ ammette lo sviluppo integrabile termine a termine:

$$f_1(x) = B_1 I_1(b_1 x) + B_2 I_1(b_2 x) + B_3 I_1(b_3 x) + \cdots,$$

essendo le $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ le radici positive di una delle equazioni $I_1(x) = 0$, $I'_1(x) = 0$, ossia di una delle due equazioni $I'_0(x) = 0$, $I''_0(x) = 0$, operando su questa serie in modo analogo a quello tenuto colla (7) e giovandosi della seconda delle (6) avremo:

$$x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta = \sum \frac{B_n}{b_n} (1 - \cos b_n x) = F_1(x),$$

da cui si ricava pel teorema d'ABEL, mediante un calcolo facile:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F'_1(x \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

Ma i coefficienti B_n si ottengono da $f_1(x)$ colla formula:

$$B_n = \frac{2}{I_1(b_n)^2 + I_2(b_n)^2}\int_0^1 x f_1(x) I_1(b_n x) \, dx,$$

quindi essi si ricaveranno, in virtù della (10) dalla $F_1(x)$, e avremo:

$$B_n = \frac{2}{\pi\left[I_1(b_n)^2 + I_2(b_n)^2\right]}\int_0^1 x I_1(b_n x) \, dx \int_0^{\pi} F'_1(x \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

7. Lo stesso concetto che mosse il BELTRAMI nell'estendere le ricerche dello SCHLÖMILCH, guidò pure il DINI nell'ampliarle a casi più generali.

Nel Cap. VII della sua opera « sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile reale » che è stato stampato negli *Annali* delle Università toscane, il prof. DINI, dopo avere ottenuto sotto una forma generale lo sviluppo in serie di funzioni reali passa ad integrare termine a termine le dette serie, dopo averle moltiplicate per una funzione arbitraria. Ottiene in tal modo nuovi sviluppi. Se quello primitivo è

$$f(x) = \sum_0^{\infty} A_n H_n(x),$$

i cui coefficienti A_n possono determinarsi dipendentemente dalla $f(x)$, e se $\psi(x, \xi)$ è la funzione moltiplicatrice, si ottiene in tal modo lo sviluppo in serie della funzione:

$$\int_c^{\xi} f(x)\psi(x, \xi) \, d\xi = F(\xi), \tag{11}$$

il quale sarà della forma:

$$\sum_0^{\infty} A_n K_n(\xi), \tag{12}$$

avendo posto:

$$K_n(\xi) = \int_c^{\xi} H_n(x)\psi(x, \xi) \, dx.$$

Se si potrà ricavare la $f(x)$, quando sia scelta la $F(\xi)$, avremo il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie (12) mediante la funzione da svilupparsi $F(\xi)$.

La possibilità dunque della inversione di una equazione funzionale della forma (11) rende in generale possibile il passaggio da certi sviluppi i cui coefficienti sanno ricavarsi dalla funzione da svolgersi in serie, a nuovi sviluppi i cui coefficienti godono della stessa proprietà.

Ora ogni qualvolta si sappia trovare, come avviene nel caso di Abel, una coppia di funzioni $\psi(x, \xi)$, $\theta(y, x)$ tali che

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\,\theta(y, x)\,d x = 1,$$

sarà possibile di ottenere una delle dette inversioni mediante una espressione della forma:

$$f(x) = \int_c^x F(\xi)\,\theta(\xi, x)\,d\xi.$$

Il prof. Dini fa alcune importanti applicazioni, esaminando in particolare la coppia di funzioni:

$$\psi(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \frac{(m+n x^2)^p}{(m+n x^2)^q (\pm \xi^2 \mp x^2)^p}$$

$$\theta(y, x) = \frac{\operatorname{sen} p \pi}{2} x \frac{(m+n y^2)^{1-p}}{(m+n x^2)^{1-q} (\pm x^2 \mp y^2)^{1-p}},$$

la quale può farsi rientrare nel caso di Abel, ponendo:

$$m+n x^2 = \frac{1}{u}, \qquad m+n y^2 = \frac{1}{v}, \qquad m+n \xi^2 = \frac{1}{w},$$

in virtù della formula:

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\,\theta(y\,x)\,d x = \frac{\operatorname{sen} p \pi}{2 \pi} \int_v^w \frac{d u}{(w-u)^p (u-v)^{1-p}}.$$

8. Nessuno degli autori fin qui citato aveva mai oltrepassato il limite segnato dalla formula d'Abel, tantochè essa ha rappresentato l'unico esempio di inversioni di integrali definiti con limiti variabili fino al 1884 in cui il Sonine pubblicò negli *Acta Mathematica* la sua Memoria: « Sur la généralisation d'une formule d'Abel. » Il Sonine stesso in un precedente lavoro del 1879: « Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en série » si era limitato a ricavare la consueta formula d'Abel desumendola da alcune interessanti proprietà delle funzioni di Bessel.

Ma il teorema che il Sonine ha reso noto nel 1884 e che era stato da lui trovato due anni prima segna un vero e proprio passo nella questione dell'inversione.

Ecco in che cosa consiste il teorema di Sonine. Se p e q sono due numeri positivi la cui somma è eguale all'unità, prendiamo una serie qualunque di potenze:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \varphi(x), \tag{14}$$

e formiamo lo sviluppo:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots, \tag{15}$$

si avrà allora:

$$\sigma(x) = x^{\,p}\left(\frac{1}{\Gamma(1-p)} + \frac{c_1 x}{\Gamma(2-p)} + \frac{c_2 x^2}{\Gamma(3-p)} + \cdots\right)$$

$$\psi(x) = x^{-q}\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)} + \frac{d_1 x}{\Gamma(2-q)} + \frac{d_2 x^2}{\Gamma(3-q)} + \cdots\right)$$

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \int_a^x \psi(x-\lambda)\, d\lambda \int_a^\lambda f(\xi)\, \sigma(\lambda - \xi)\, d\xi\,;$$

vale a dire la equazione funzionale:

$$F(y) = \int_a^y \varphi(x)\, \psi(y-x)\, dx\,, \tag{16}$$

si inverte mediante la formula:

$$\varphi(y) = \int_a^y F'(x)\, \sigma(y-x)\, dx. \tag{17}$$

La formula di Sonine che diviene quella di Abel quando la serie $\varphi(x)$ si riduce al suo primo termine, offre quindi infiniti nuovi casi di inversione ottenuti per la prima volta dopo quello di Abel.

La proprietà caratteristica delle funzioni σ e ψ da cui dipende la possibilità della inversione consiste in ciò che:

$$1 = \int_x^y \psi(y-\xi)\, \sigma(\xi - x)\, d\xi.$$

Il teorema di Sonine dà quindi infinite soluzioni della equazione funzionale che si era proposta il Dini, ossia da infinite coppie di funzioni che soddisfano la (13) distinte dalla soluzione di ABEL, e perciò essa offre campo di applicazioni agli sviluppi in serie.

Il SONINE in una Nota del 1889 ne ha fatto anche una applicazione alla riduzione di un integrale multiplo.

Analizzando il processo ideato dal SONINE appare evidente che egli si è proposto di invertire la equazione funzionale (16) mediante una funzione avente la espressione prestabilita (17), e ciò per analogia colla formula di ABEL. Anche il DINI era stato condotto a proporsi il problema in maniera analoga. Ma il prestabilire la forma della soluzione ha di necessità ristretto il campo in cui ha potuto applicarsi la inversione stessa, giacchè come il SONINE osserva subito nella sua Memoria del 1884, egli deve di necessità limitarsi a funzioni ψ e σ che divengono infinite allorchè il loro argomento si annulla.

Nella mia Nota II dell'Accademia di Torino resulta il perchè in questo caso la forma della soluzione diviene tale, mentre è diversa quando le funzioni sono finite. Nell'Art. III vedremo poi come il teorema di SONINE si deduce dalle formule generali ivi stabilite con principii del tutto differenti. Per la validità del teorema stesso non si richiede poi la convergenza delle serie (14) e (15).

9. I problemi di inversione della equazione funzionale:

$$f(y) = \int \varphi(x) H(x, y) dx, \tag{18}$$

con $\varphi(x)$ funzione incognita, allorchè i limiti dell'integrale anzichè esser variabili sono costanti, hanno dato luogo a studii di una natura totalmente diversa da quelli fino ad ora esaminati, fra cui citeremo quelli del prof. PINCHERLE. Noi non staremo a parlarne giacchè le due questioni hanno seguito cammini differenti tanto che l'una non ha, che io sappia, contribuito fino ad ora all'avanzamento dell'altra.

Di ricerche che legano in certo modo fra loro le due specie di questioni è a mia conoscenza, oltre ad una mia breve Nota del 1884: « Sopra un problema di elettrostatica », una Nota del prof. LEVI CIVITA, dei cui resultati lo stesso autore si è valso in una questione di fisica matematica.

10. Nelle quattro Note che ho presentate all'Accademia di Torino, e nelle due che ho comunicate a quella dei Lincei citate precedentemente, ho cercato una esposizione sistematica della teoria dell'inversione degl'integrali definiti ottenendo le condizioni in cui il problema, allorchè i limiti sono *a*

ed x, è possibile e determinato e risolvendolo effettivamente in generale senza porre restrizioni alla forma delle funzioni date ed estendendolo poscia al caso di più funzioni incognite e di funzioni di più variabili.

Il metodo che ho seguito è fondato sopra tre principii fondamentali.

PRINCIPIO DI CONVERGENZA. *Se* $S_0(x, y)$, $a < x < y$, $a < y < b$ *è una funzione finita integrabile* (*) *e a partire da essa si calcolano successivamente le:*

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

S_i *sarà indipendente da* j *e la serie:*

$$s_0(x, y) = -\sum_0^\infty{}_i\, S_i(x, y),$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione integrabile.

PRINCIPIO DI RÉCIPROCITÀ. *Se si opera sulla* $s_0(x, y)$ *come si è operato sulla* $S_0(x, y)$, *cioè se si forma:*

$$s_i(x, y) = \int_x^y s_{i-j}(x, \xi)\, s_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

si ritrova la funzione primitiva, vale a dire si ha:

$$S_0(x, y) = -\sum_0^\infty s_i(x, y),$$

e le due funzioni $S_0(x, y)$ e $s_0(x, y)$ *sono legate dalla relazione:*

$$S_0(x, y) + s_0(x, y) = \int_x^y S_0(x, \xi)\, s_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y s_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi.$$

PRINCIPIO DELLA INVERSIONE. *L'equazione funzionale:*

$$f(y) = \varphi(y) - \int_a^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx,$$

si inverte in una maniera unica mediante la formula:

$$\varphi(y) = f(y) - \int_a^y f(x)\, s_0(x, y)\, dx.$$

(*) Nella condizione di integrabilità includiamo quella della possibilità della inversione dell'ordine d'integrazione rispetto alle variabili x, y.

Questi tre principii sono estensibili al caso di un sistema di funzioni, vale a dire *se* invece della sola funzione $S_0(x, y)$ *si hanno le* n^2 *funzioni* $S^{(0)}_{r,t}(x, y)$ *in cui gl'indici* r, t *prendono i valori* $1, 2, \ldots, n$, *e a partire da esse si calcolano successivamente le:*

$$S^{(i)}_{r,t}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h\, S^{(i-j)}_{r,h}(x, \xi)\, S^{(j-1)}_{h\,t}(\xi, y)\, d\xi ;$$

queste non dipendono dall'indice j, *e le serie:*

$$s^{(0)}_{r\,t}(x, y) = -\sum_0^\infty {}_i\, S^{(i)}_{r,t}(x, y),$$

sono uniformemente convergenti. Inoltre ripetendo sulle $s^{(0)}_{r,t}(x, y)$ *le operazioni eseguite sulle* $S^{(0)}_{r,t}(x, y)$ *si ritrovano le funzioni primitive* $S^{(0)}_{r,t}(x, y)$, *cioè:*

$$S^{(0)}_{r,t}(x, y) = -\sum_1^\infty {}_i\, s^{(i)}_{r,t}(x, y),$$

essendo:

$$s^{(i)}_{r,t}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h\, s^{(i-j)}_{r,h}(x, \xi)\, s^{(j-1)}_{h\,t}(\xi, y)\, d\xi ,$$

e si ha:

$$S^{(0)}_{r,t}(x, y) + s^{(0)}_{r,t}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h\, S^{(0)}_{r,h}(x, \xi)\, s^{(0)}_{h,t}(\xi, y)\, d\xi =$$

$$= \int_x^y \sum_1^n {}_h\, s^{(0)}_{r,h}(x, \xi)\, S^{(0)}_{h,t}(\xi, y)\, d\xi , \qquad \text{(principio di reciprocità).}$$

Finalmente vale il principio dell'inversione; ossia: *il sistema di equazioni funzionali*:

$$f_i(y) = \varphi_i(y) - \sum_1^n {}_h \int_a^y S^{(0)}_{i,h}(x, y)\, \varphi_h(x)\, dx , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

si inverte in una maniera unica mediante le formule:

$$\varphi_i(y) = f_i(y) - \sum_1^n {}_h \int_a^y s^{(0)}_{i,h}(x, y)\, f_h(x)\, dx , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Una ulteriore estensione può poi ottenersi considerando, invece che una funzione o un sistema di funzioni di una coppia di variabili, una funzione o un sistema di funzioni di m coppie di variabili:

Se

$$S_0(x_1, x_2, \ldots, x_n | y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad a_i < x_i < y_i, \qquad a_i < y_i < b_i,$$

è una funzione integrabile, le:

$$S_i(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1, \ldots, x_n | \xi_1, \ldots, \xi_n) S_{j-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n | y_1, \ldots, y_n),$$

saranno indipendenti dall'indice j; la serie:

$$s_0(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) = -\sum_0^\infty{}_i S_i(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n),$$

sarà uniformemente convergente, e, posto:

$$s_i(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, s_{i-j}(x_1, \ldots, x_n | \xi_1, \ldots, \xi_n)\, s_{j-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n | y_1, \ldots, y_n),$$

resulterà (principio di reciprocità):

$$S_0(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) = -\sum_0^\infty s_i(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n),$$

mentre:

$$S_0(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) + s_0(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, S_0(x_1, \ldots, x_n | \xi_1, \ldots, \xi_n)\, s_0(\xi_1, \ldots, \xi_n | y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, s_0(x_1, \ldots, x_n | \xi_1, \ldots, \xi_n)\, S_0(\xi_1, \ldots, \xi_n | y_1, \ldots, y_n),$$

e l'equazione (principio della inversione):

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(y_1, \ldots, y_n) -$$

$$- \int_{a_1}^{y_1} dx_1 \ldots \int_{a_n}^{y_n} dx_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, S_0(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n),$$

si invertirà in maniera unica mediante l'altra:

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_n) -$$
$$- \int_{a_1}^{y_1} d x_1 \dots \int_{a_n}^{y_n} d x_n f(x_1, \dots, x_n) s_0 (x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_n).$$

11. Con questi principii si riconduce la risoluzione dei vari problemi di inversione, qualunque sia il numero delle funzioni incognite e qualunque sia il numero delle variabili da cui esse dipendono ad operazioni successive di quadratura.

Nel caso il più semplice che possa presentarsi si ottiene il teorema:

« *Se si ha la equazione funzionale:*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) H(x, y) d x,$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + A$ *e* $H(x, y)$ *e* $\frac{\partial H}{\partial y} = H_2(x, y)$ *sono pure finite per* $y > x > \alpha$, $\alpha + A > y > \alpha$, *e quest'ultima è integrabile, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $h(y) = H(y, y)$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + A$, *la quale sarà data da:*

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y f'(x) \sum_0^\infty S_i(x, y) d x,$$

in cui:

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

$$S_0(x, y) = \frac{H_2(x, y)}{h(x)}. \text{ »}$$

Nel caso particolare in cui $H(x, y)$ assume la forma $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$ questo teorema si specializza e diviene

« *La formula di inversione della*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) F[\lambda(x) - \lambda(y)] d x, \qquad [F(0) = 1],$$

è

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f'(x)\, \Theta[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx\,, \tag{21}$$

in cui:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(z) = \sum_0^\infty (-1)^i s_i(z) \\ &s_0(z) = F(z) \\ &s_i(z) = \int_0^z s_{i-j}(z-u)\, s_{j-1}(u)\, du. \text{»} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Il caso in cui $H(x, y)$ diviene infinito per $x = y$, in modo che si possa porre $H(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x-y)^\lambda}$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, e che comprende in sè evidentemente il caso di Sonine e quindi quello d'Abel si può ricondurre, con uno speciale artificio all'analisi precedente, ed in tal modo si ottiene il teorema:

« *Se si ha l'equazione funzionale:*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{G(x, y)}{(y-x)^\lambda}\, dx\,, \qquad (\lambda < 1)\,,$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$ $(A > 0)$; e $G(x, y)$ e $\frac{\partial G}{\partial y} = G_2(x, y)$ sono pure finite e continue per tutti i valori di x, y, compresi entro i limiti α e $\alpha + A$, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $g(y) = G(y, y)$ per y compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da:

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \sum_0^\infty{}_i\, T_i(x, z)\, dx,$$

in cui:

$$\begin{aligned} &S_0(y, z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_y^z G_2(y, \xi) \left(\frac{\xi - y}{z - \xi}\right)^{1-\lambda} \frac{d\xi}{z - y} \\ &T_0(x, z) = \frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}} \\ &T_i(x, z) = \int_z^x S_0(\xi, z)\, T_{i-1}(x, \xi)\, d\xi. \text{»} \end{aligned}$$

Questa proposizione, allorchè $G(x, y)$ ha la forma $F(y-x)$, si specializza e si riduce all'altra:

« *La formula di inversione della relazione funzionale*:

$$f(y)-f(\alpha)=\int_\alpha^y \varphi(x)\frac{F(y-x)}{(y-x)^\lambda}dx, \qquad [0<\lambda<1,\ F(0)=1],$$

è

$$\varphi(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\int_\alpha^z f'(x)\,\Omega(z-x)\,dx, \tag{23}$$

in cui:

$$\left.\begin{aligned} s_0(v)&=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi v}\int_0^v F'(u)\left(\frac{u}{v-u}\right)^{1-\lambda}du\\ t_0(v)&=\frac{1}{v^{1-\lambda}}\\ t_i(v)&=\int_0^v s_0(v-u)\,t_{i-1}(u)\,du\\ \Omega(v)&=\sum_0^\infty{}_i(-1)^i t_i(v). \text{ »}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

In questo teorema non è necessario, come in quello di Sonine, partire dallo sviluppo in serie di potenze della funzione F.

Finalmente se $H(x, y)$ si annulla per $x=y$, il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no, e la discriminazione di essi può ricondursi ad operazioni algebriche. Il teorema fondamentale che si ha a questo proposito è il seguente.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y)=\int_0^y \varphi(x)\,H(x, y)\,dx, \qquad a>y>0, \tag{25}$$

in cui:

$$f(y)=y^{n+1}f_1(y)$$

$$H(x, y)=\sum_0^n{}_i\, a_i x^i y^{n-i}+\sum_0^{n+1}{}_i\, x^i y^{n+1-i}L_i(x, y),$$

essendo le a_i quantità costanti.

Se $f_1(y)$ e $L_i(x, y)$ e le loro derivate rapporto ad y sono finite e continue per x compreso fra 0 e y e y compreso fra 0 ed a, mentre in questo *intervallo* $h(y) = H(y, y)$ *non si annulla che per* $y = 0$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua che soddisfa la* (25) *quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado* n:

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0,$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive. Invece, se le radici della equazione precedente saranno finite e diverse fra loro, ma una o più di esse avranno la parte reale negativa, allora il problema di dedurre $\varphi(x)$ *dalla* (25) *sarà indeterminato.*

L'effettiva risoluzione della equazione funzionale (25), quando le condizioni stabilite dal precedente teorema affinchè il problema sia determinato, sono soddisfatte può eseguirsi riconducendo la questione ad un'altra analoga per la quale sia verificata la condizione $H(y, y) \gtrless 0$. [Vedi perciò la 3.ª e la 4.ª delle mie Note dell'Accademia di Torino.]

Art. II.

1. Il metodo precedentemente esposto può estendersi in modo da renderlo applicabile al caso della inversione, quando ambedue i limiti sono variabili. È ciò che mostreremo in questo articolo.

Cominciamo dal ricordare alcune formule ben semplici del calcolo delle differenze finite (*).

Se $\lambda(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono funzioni finite e continue nell'intervallo* $(0, a)$ *e* $|\lambda(0)| \overline{\gtrless} 1$ *e* $0 < \alpha < 1$, *la serie:*

$$\left.\begin{aligned} \theta(x) = \varphi(x) + \alpha\,\lambda(x)\,\varphi(\alpha x) + \alpha^2\,\lambda(\alpha x)\,\lambda(x)\,\varphi(\alpha^2 x) + \\ + \alpha^3\,\lambda(\alpha^2 x)\,\lambda(\alpha x)\,\lambda(x)\,\varphi(\alpha^3 x) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sarà convergente uniformemente nell'intervallo $(0, a)$ *e la somma* $\theta(x)$ *sarà una funzione finita e continua.*

Infatti sia M_n il limite superiore dei valori assoluti di $\lambda(x)$ nell'intervallo $(0, a\alpha^n)$, ed M il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$, il termine n^{esimo} della serie (1) sarà inferiore in valore assoluto a:

$$\alpha^n M_0 M_1 \ldots M_{n-1} M.$$

(*) Cfr. Boole, *A Treatise on the calculus of finite differences.* Ch. IX, Art. 6 e seguenti.

Ora la serie:

$$M + \alpha M_0 M + \alpha^2 M_0 M_1 M + \alpha^3 M_0 M_1 M_2 M + \cdots,$$

è convergente, giacchè il rapporto fra l' $(n+1)^{esimo}$ termine e il termine n^{esimo} è:

$$\alpha M_n,$$

il quale per $n = \infty$ avrà un limite inferiore all'unità.

La serie (1) converge dunque uniformemente, e siccome ogni termine è una funzione finita e continua di x, così $\theta(x)$ sarà una funzione pure finita e continua.

Questo teorema può estendersi al caso in cui α sia negativo ma sempre tale che $|\alpha| < 1$, in modo che si ha il teorema:

Se $\lambda(x)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni finite e continue nell'intervallo $(\alpha a, a)$ e $|\lambda(0)| \leq 1$, $0 > \alpha > -1$, la serie (1) sarà convergente uniformemente nell'intervallo $(\alpha a, a)$ e rappresenterà una funzione finita e continua.

Ci si può ora proporre il problema di trovare la funzione $\varphi(x)$ quando sia data la funzione $\theta(x)$.

Abbiamo:

$$\theta(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \alpha \lambda(\alpha x) \varphi(\alpha^2 x) + \alpha^2 \lambda(\alpha^2 x) \lambda(\alpha x) \varphi(\alpha^3 x) + \cdots,$$

quindi:

$$\theta(x) - \alpha \lambda(x) \theta(\alpha x) = \varphi(x), \tag{2}$$

e questa formula risolve la questione proposta.

Reciprocamente la (1) risolve il problema di determinare $\theta(x)$ quando si conosce $\varphi(x)$, onde possiamo considerare le due formole (1) e (2) come inverse o reciproche l'una dell'altra, per modo che *se $\lambda(x)$ è finita e continua e $|\lambda(0)| \leq 1$, $|\alpha| < 1$, scelta arbitrariamente la funzione finita e continua $\theta(x)$ la (2) ci darà $\varphi(x)$, mentre scelta arbitrariamente la funzione finita e continua $\varphi(x)$, la (1) ci darà $\theta(x)$. Se $\alpha > 0$ basterà considerare $\lambda(x)$, $\theta(x)$ e $\varphi(x)$ in un intervallo $(0, a)$, mentre se $\alpha < 0$ dovremo considerarle in un intervallo $(\alpha a, a)$.*

2. Ciò premesso, abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) - f(0) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) H(x, y)\, dx, \qquad (a > y > 0), \tag{3}$$

in cui $1 > \alpha > 0$ e $f(y)$, $f'(y)$, $H(x, y)$, $H_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue per x, y variabili respettivamente negl'intervalli $(\alpha y, y)$ $(0, a)$ e $\theta(x)$ è una *funzione incognita* nell'intervallo $(0, a)$.

Derivando la precedente equazione, avremo:

$$f'(y) = \theta(y) H(y, y) - \alpha \theta(\alpha y) H(\alpha y, y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) H_2(x, y) \, dx,$$

e se il limite inferiore dei valori assoluti di $H(y, y)$ è diverso da zero:

$$\frac{f'(y)}{H(y, y)} = \theta(y) - \alpha \theta(\alpha y) \frac{H(\alpha y, y)}{H(y, y)} + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) \frac{H_2(x, y)}{H(y, y)} \, dx.$$

Posto:

$$\frac{f'(y)}{H(y, y)} = \psi(y), \qquad \frac{H(\alpha y, y)}{H(y, y)} = \lambda(y), \qquad \frac{H_2(x, y)}{H(y, y)} = L(x, y), \tag{4}$$

avremo:

$$\psi(y) = \theta(y) - \alpha \lambda(y) \theta(\alpha y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) L(x, y) \, dx, \tag{5}$$

onde, ponendo $\varphi(y) = \theta(y) - \alpha \lambda(y) \theta(\alpha y)$, e quindi ricorrendo alla (1), si otterrà:

$$\psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \left\{ \varphi(x) + \alpha \lambda(x) \varphi(\alpha x) + \alpha^2 \lambda(x) \lambda(\alpha x) \varphi(\alpha^2 x) + \cdots \right\} L(x, y) \, dx,$$

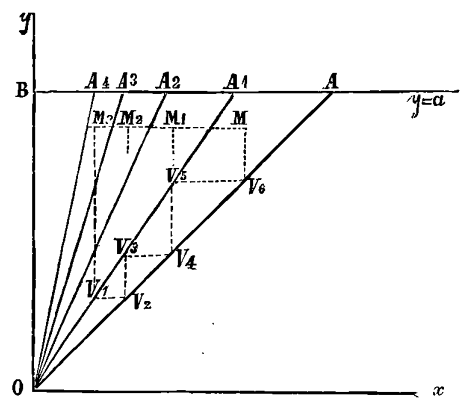
ovvero, a cagione della convergenza in egual grado della serie contenuta sotto il segno d'integrazione:

$$\psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x) L(x, y) \, dx + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\alpha x) \alpha \lambda(x) L(x, y) \, dx +$$
$$+ \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\alpha^2 x) \alpha^2 \lambda(x) \lambda(\alpha x) L(x, y) \, dx + \cdots$$

Se ora nel secondo integrale del secondo membro sostituiamo x ad αx, nel terzo sostituiamo x ad $\alpha^2 x$ e così di seguito, la precedente equazione si scriverà :

$$\left.\begin{aligned}\psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x)\, L(x, y)\, dx + \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \varphi(x)\, \lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha}, y\right) dx \\ + \int_{\alpha^3 y}^{\alpha y} \varphi(x)\, \lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right) dx + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

3. Si immagini il triangolo $O\,A\,B$ compreso fra l'asse y, la bisettrice dell'angolo degli assi x, y e la retta $y = a$, quindi si tirino le rette



(Nella figura si è supposto $n = 3$.)

$O\,A_1$, $O\,A_2$, $O\,A_3, \ldots$, tali che formino con y angoli le cui tangenti trigonometriche siano successivamente α, α^2, $\alpha^3, \ldots$ Verrà così diviso il triangolo $O\,A\,B$ in un numero infinito di triangoli $O\,A\,A_1$, $O\,A_1\,A_2$, $O\,A_2\,A_3, \ldots$ Ammetteremo che i punti di ciascun lato $O\,A_n$ appartengano al triangolo $O\,A_{n-1}\,A_n$ e non al triangolo successivo $O\,A_n\,A_{n+1}$; soltanto il lato $O\,A$ lo supporremo appartenere al triangolo $O\,A\,A_1$. In tal modo scelto un punto qualsiasi del triangolo $O\,A\,B$ (escluso il lato $O\,B$) esso apparterrà ad uno e ad uno solo dei triangoli precedentemente costrutti. Appartenga il punto scelto al triangolo $O\,A_n\,A_{n+1}$, denotiamolo con M_n e chiamiamo x, y le sue coordinate. I punti M_{n-1}, $M_{n-2}, \ldots$, M_2, M_1, M aventi rispettivamente le coordinate :

$$\left(\frac{x}{\alpha}, y\right), \quad \left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right), \ldots . \quad \left(\frac{x}{\alpha^{n-2}}, y\right), \quad \left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, y\right), \quad \left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

apparterranno ordinatamente ai triangoli:

$$O\,A_{n-1}\,A_n, \qquad O\,A_{n-2}\,A_{n-1}, \ldots, \qquad O\,A_2\,A_3, \qquad O\,A_1\,A_2, \qquad O\,A\,A_1,$$

e si potranno chiamare *corrispondenti* di M_n.

Scelto M_n sarà facile ottenere M mediante una costruzione geometrica. Basterà tirare da M_n la parallela all'asse y finchè non si incontra il lato $O\,A_1$ e a partire da questo punto d'intersezione V_1 costruire una spezzata:

$$V_1\,V_2\,V_3\ldots V_{2n-1}\,V_{2n}\,M,$$

internamente al triangolo $O\,A\,A_1$, avente i vertici V_1, $V_3, \ldots, V_{2n-1}$ sul lato $O\,A_1$ e i vertici V_2, $V_4, \ldots, V_{2n}$ sul lato $O\,A$ ed i lati successivamente paralleli agli assi x, y finchè non si incontra in M la parallela ad x condotta dal punto M_n.

4. Per ciò che è stato detto nel § 2, $H(x, y)$ e quindi $L(x, y)$ sono funzioni definite nei punti del triangolo $O\,A\,A_1$, mentre $\lambda(y)$ è definita nell'intervallo $(0, a)$. Si prolunghi ora la funzione $L(x, y)$ in tutto lo spazio $O\,A\,B$ (escluso il lato $O\,B$), prendendone il valore in un punto qualsiasi M_n dato da:

$$\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)\lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)\cdots\lambda\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

e denotiamo con $K(x, y)$ la funzione così ottenuta. Si riconosce subito che essa sarà in generale discontinua lungo le linee $O\,A_1$, $O\,A_2, \ldots, O\,A_n, \ldots$

Il suo valore potrà essere scritto, in virtù delle (4), sotto la forma:

$$K(x, y) = \frac{H\left(x, \frac{x}{\alpha}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}\right)} \cdot \frac{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha^2}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha^2}\right)} \cdots \frac{H\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \frac{x}{\alpha^n}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^n}\right)} L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right), \tag{7}$$

ossia:

$$K(M_n) = \frac{H(V_1)\,H(V_3)\ldots H(V_{2n-1})}{H(V_2)\,H(V_4)\ldots H(V_{2n})}\,L(M),$$

denotando con $F(V)$ il valore di una funzione di x, y nel punto V.

Riferendoci quindi alla costruzione geometrica precedentemente indicata, potremo dire che il *valore della funzione K in un punto qualunque del triangolo $O\,A\,B$ (escluso $O\,B$) è eguale al valore della funzione L nel punto corrispondente del triangolo $O\,A\,A_1$ moltiplicato per il prodotto dei valori di H nei vertici d'ordine dispari della poligonale costruita e diviso per il* *prodotto dei valori di H nei vertici d'ordine pari.* È facile dimostrare che $|K(x, y)|$ sarà sempre inferiore ad un numero finito.

Infatti la (7) potrà scriversi:

$$K(x, y) = \frac{H\left(x, \frac{x}{\alpha}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^n}\right)}\left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha}, \xi_1\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}\right)}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha}\right)\right]\left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha^2}, \xi_2\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha^2}\right)}\left(\frac{x}{\alpha^3} - \frac{x}{\alpha^2}\right)\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \xi_{n-1}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)}\left(\frac{x}{\alpha^n} - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)\right] L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

in cui le ξ_i sono numeri compresi fra $\frac{x}{\alpha^i}$ e $\frac{x}{\alpha^{i+1}}$. Sia ora m il limite superiore dei valori assoluti di $H(x, y)$, m' il limite inferiore dei valori assoluti di $H(x, x)$ e m'' il limite superiore dei valori assoluti di $H_2(x, y)$, riferendosi alle (4) avremo:

$$|K(x, y)| \leq \frac{m\,m''}{m'^2}\left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha}\right)\right]\left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^3} - \frac{x}{\alpha^2}\right)\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^n} - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)\right],$$

e siccome $\frac{x}{\alpha^n} < a$:

$$|K(x, y)| < \frac{m\,m''}{m'^2}\left[1 + \frac{m''}{m'}a\right]\left[1 + \frac{m''}{m'}a\,\alpha\right]\cdots\left[1 + \frac{m''}{m'}a\,\alpha^{n-2}\right]$$

$$< \frac{m\,m''}{m'^2}\prod_{0}^{\infty}{}_i\left[1 + \rho\,\alpha^i\right],$$

in cui $\rho = \frac{m''}{m'}a$. Il che dimostra la proposizione.

5. Riprendiamo ora la formula (6) del § 2, ed osserviamo che:

per $y \geqq x \geqq \alpha y$ si ha $L(x, y) = K(x, y)$

» $\alpha y > x \geqq \alpha^2 y$ » $\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha}, y\right) = K(x, y)$

» $\alpha^2 y > x \geqq \alpha^3 y$ » $\lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right) = K(x, y)$

. . . .

e così di seguito indefinitamente, perciò la formula (6) potrà scriversi:

$$\psi(y) = \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x) K(x, y)\, dx,$$

ovvero, ponendo $K(x, y) = -S_0(x, y)$,

$$\psi(y) = \varphi(y) - \int_0^y \varphi(x) S_0(x, y)\, dx,$$

dalla quale si ricaverà, col processo di inversione esposto nell'Art. I, § 10.

$$\varphi(y) = \psi(y) - \int_0^y \psi(x) s_0(x, y)\, dx, \tag{8}$$

in cui $s_0(x, y)$ potrà calcolarsi con quadrature successive mediante $K(x, y)$.

Ottenuta in tal maniera $\varphi(x)$, la (1) ci darà la funzione incognita $\theta(x)$.

6. La soluzione del problema propostoci può ottenersi anche in un altro modo come accenneremo ora.

Dalla (5) segue:

$$\theta(y) - \alpha\lambda(y)\theta(\alpha y) = \psi(y) - \int_{\alpha y}^y \theta(x) L(x, y)\, dx,$$

onde applicando la (1) avremo:

$$\theta(y) = \psi(y) + \alpha\lambda(y)\psi(\alpha y) + \alpha^2\lambda(\alpha y)\lambda(y)\psi(\alpha^2 y) + \cdots - \int_{\alpha y}^y \theta(x) L(x, y)\, dx -$$
$$- \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \theta(x)\alpha\lambda(y) L(x, \alpha y)\, dx - \int_{\alpha^3 y}^{\alpha^2 y} \theta(x)\alpha^2\lambda(\alpha y)\lambda(y) L(x, \alpha^2 y)\, dx + \cdots$$

e ponendo:

$$\psi(y) + \alpha\lambda(y)\psi(\alpha y) + \alpha^2\lambda(\alpha y)\lambda(y)\psi(\alpha^2 y) + \cdots = \chi(y),$$

dalla equazione precedente resulterà:

$$\left.\begin{aligned}\chi(y) = \theta(y) + \int_{\alpha y}^y \theta(x) L(x, y)\, dx + \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \theta(x)\alpha\lambda(y) L(x, \alpha y)\, dx + \\ + \int_{\alpha^3 y}^{\alpha^2 y} \theta(x)\alpha^2\lambda(\alpha y)\lambda(y) L(x, \alpha^2 y)\, dx + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Questa formula è analoga alla (6) e da essa potrebbe ricavarsi $\theta(y)$ con un procedimento analogo a quello tenuto nei due paragrafi precedenti per ottenere $\varphi(y)$ dalla (6). Noi non staremo però a svilupparlo, ci varremo piuttosto della formula ora trovata per risolvere la equazione funzionale (3) nel caso di α negativo e minore dell'unità.

7. Prima di procedere alla trattazione di questo caso premettiamo le considerazioni seguenti.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) = \varphi(y) + \int_{-y}^{y} \varphi(x) K(x, y) \, d x, \qquad (a > y > -a), \tag{10}$$

in cui $f(y)$ sia definita nell'intervallo $(-a, a)$ e la funzione finita ed integrabile $K(x, y)$ per $y > x > -y$ e $a > y > -a$. L'equazione precedente potrà scriversi:

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x) K(x, y) \, d x + \int_0^y \varphi(-x) K(-x, y) \, d x,$$

e cambiando y in $-y$:

$$f(-y) = \varphi(-y) - \int_0^y \varphi(x) K(x, -y) \, d x - \int_0^y \varphi(-x) K(-x, -y) \, d x.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} f(y) &= f_1(y), & f(-y) &= f_2(y), \\ \varphi(y) &= \varphi_1(y), & \varphi(-y) &= \varphi_2(y), \\ K(x, y) &= -S_{11}^{(0)}(x, y), & K(-x, y) &= -S_{12}^{(0)}(x, y), \\ K(x, -y) &= S_{21}^{(0)}(x, y), & K(-x, -y) &= S_{22}^{(0)}(x, y), \end{aligned}$$

allora le due equazioni precedenti si scriveranno:

$$\left.\begin{aligned} f_1(y) &= \varphi_1(y) - \int_0^y \varphi_1(x) S_{11}^{(0)}(x, y) \, d x - \int_0^y \varphi_2(x) S_{12}^{(0)}(x, y) \, d x \\ f_2(y) &= \varphi_2(y) - \int_0^y \varphi_1(x) S_{21}^{(0)}(x, y) \, d x - \int_0^y \varphi_2(x) S_{22}^{(0)}(x, y) \, d x \end{aligned}\right\} \quad (a > y > 0),$$

e quindi da queste equazioni potremo ricavare $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ definite ambedue nell'intervallo $(0, a)$ mediante le formule [Cfr. Art. I, § 10, formule (19) (20)]:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(y) &= f_1(y) - \int_0^y f_1(x)\, s_{11}^{(0)}(x, y)\, dx - \int_0^y f_2(x)\, s_{12}^{(0)}(x, y)\, dx \\ \varphi_2(y) &= f_2(y) - \int_0^y f_2(x)\, s_{21}^{(0)}(x, y)\, dx - \int_0^y f_1(x)\, s_{22}^{(0)}(x, y)\, dx\end{aligned}\right\} \quad (a > y > 0).$$

Definendo la funzione $R(x, y)$ per $y > x > -y$, $a > y > -a$, mediante le seguenti relazioni:

$$s_{11}^{(0)}(x, y) = -R(x, y), \quad s_{12}^{(0)}(x, y) = -R(-x, y), \quad s_{21}^{(0)}(x, y) = R(x, -y),$$

$$s_{22}^{(0)}(x, y) = R(-x, -y) \qquad \begin{pmatrix} y > x > 0 \\ a > y > 0 \end{pmatrix},$$

potremo sostituire alle precedenti equazioni l'unica formula:

$$\varphi(y) = f(y) + \int_{-y}^{y} f(x)\, R(x, y)\, dx \qquad (a > y > -a), \tag{11}$$

la quale risolve la equazione funzionale (10).

Supponiamo ora di avere la equazione funzionale:

$$f(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x)\, K(x, y)\, dx \qquad \begin{pmatrix} 0 > \alpha > -1 \\ a > y > \alpha a \end{pmatrix}, \tag{12}$$

con $\varphi(x)$ funzione incognita.

Essa potrà ridursi alla (10), basterà perciò supporre:

$$K(x, y) = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} \alpha y > x > -y \\ a > y > \alpha a \end{cases} \qquad \text{e per} \begin{cases} \alpha a > y > -a \\ y > x > -y \end{cases},$$

e prolungare la funzione $f(y)$ per y compreso fra αa e $-a$ in maniera arbitraria pur di conservarla atta alla integrazione e finita.

Ne resulteranno:

$$S_{12}^{(0)} = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} y > x > -\alpha y \\ a > y > 0 \end{cases}$$

$$S_{22}^{(0)} = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} a > y > -\alpha a \\ y > x > 0 \end{cases}$$

$$S_{21}^{(0)}(x, y) = 0 \quad \begin{cases} \text{per} \begin{cases} y > x > -\alpha y \\ -\alpha a > y > 0 \end{cases} \\ \text{e per} \begin{cases} a > y > -\alpha a \\ y > x > 0 \end{cases} \end{cases},$$

e per conseguenza $S_{12}^{(i)}$, $S_{21}^{(i)}$, $S_{22}^{(i)}$ saranno nulle per quei valori delle variabili x, y pei quali rispettivamente abbiamo indicato esser nulle $S_{12}^{(0)}$, $S_{21}^{(0)}$, $S_{22}^{(0)}$ e quindi per gli stessi valori delle variabili x, y saranno pure nulle $s_{12}^{(0)}$, $s_{21}^{(0)}$, $s_{22}^{(0)}$ (*) e perciò finalmente la (11) si ridurrà a:

$$\varphi(y) = f(y) + \int_{\alpha y}^{y} f(x)\, R(x,\, y)\, d\, x\,, \tag{13}$$

giacchè $R(x, y)$ al pari di $K(x, y)$ sarà tale che:

$$R(x,\, y) = 0 \qquad \text{per} \left\{ \begin{array}{c} \alpha\, y > x > -y \\ a > y > \alpha\, a \end{array} \right. \qquad \text{e per} \left\{ \begin{array}{c} \alpha\, a > y > -a \\ y > x > -y \end{array} \right. .$$

8. Ciò premesso passiamo alla risoluzione della equazione funzionale:

$$f(y) - f(0) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, H(x,\, y)\, d\, x\,, \qquad (a > y > \alpha\, a)\,, \tag{3'}$$

nella ipotesi $0 > \alpha > -1$. Supponendo che $f(y)$, $f'(y)$, $H(x, y)$, $H_2(x, y)$ siano funzioni finite e continue per x, y variabili respettivamente negl'intervalli $(\alpha y, y)$, $(\alpha a, a)$ e $\theta(x)$ sia la funzione incognita nell'intervallo $(\alpha\, a, a)$ avremo che le equazioni (4), (5) e (9) seguiteranno a sussistere; e il campo entro il quale si dovranno considerare le funzioni $H(x, y)$, $H_2(x, y)$, $L(x, y)$ sarà costituito dalla figura compresa fra le linee $y = a\,(A\,A')$, $y = \alpha\, a\,(B\,B')$, $y = x\,(A\,B)$, $y = \alpha\, x\,(B'\,A')$. Si tirino le rette aventi per equazioni $y = \alpha\, x$, $y = \alpha^2\, x$, $y = \alpha^3\, x, \ldots$ Preso quindi un punto M entro la figura si tracci a partire da esso una poligonale $M\, V_1\, V_2\, V_3 \ldots$ con i lati paralleli agli assi x, y ed avente successivamente i vertici situati sulle rette $A\,B$ e $A'\,B'$ e si determinino i punti $M_0 = M$, M_1, $M_2, \ldots$, interni alla figura che la poligonale ha a comune colla parallela all'asse y condotta per M. È facile riconoscere che se M è compreso fra le rette $y = \alpha^{n-1}\, x$ e $y = \alpha^{n+1}\, x$, i detti punti saranno n, e le coordinate del punto M_i saranno x, $\alpha^i\, y$.

(*) Questi resultati divengono pressochè intuitivi esaminando la questione da un punto di vista geometrico, ossia costruendo nel piano x, y i campi nei quali sono individuate le diverse funzioni che si considerano, marcando le porzioni di essi ove le funzioni stesse si annullano, ed i cammini delle integrazioni mediante le quali si passa dalle $S_{r,t}^{(i)}$ alle $S_{r,t}^{i+1}$. Noi ci risparmiamo di riportare qui tali figure che il lettore può da sè facilmente disegnare.

Definiamo ora la funzione $K(x,\ y)$ prendendone il valore nel punto M dato da:

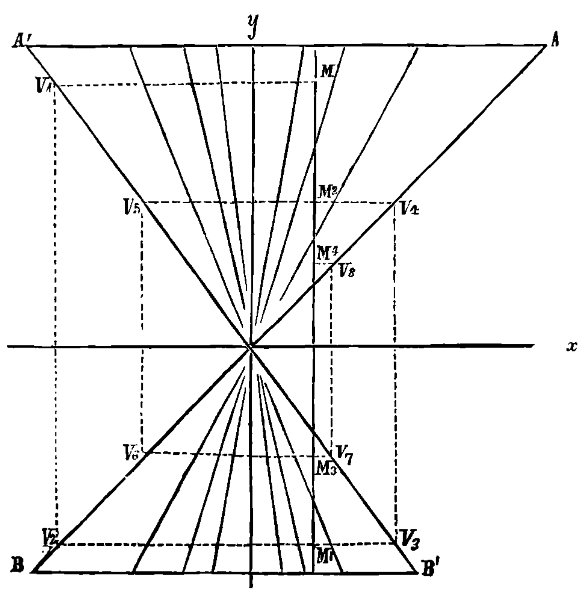
$$L(x,\ y) - \alpha\,\lambda(y)\,L(x,\ \alpha y) + \alpha^2\,\lambda(\alpha y)\,\lambda(y)\,L(x,\ \alpha^2 y) + \cdots$$

$$+ \cdots + (-1)^n \alpha^n \lambda(\alpha^{n-1} y)\,\lambda(\alpha^{n-2} y)\ldots\lambda(y)\,L(x,\ \alpha^n y) =$$

$$= \frac{1}{H(y,\ y)} \Big\{ H_2(x,\ y) - \alpha \frac{H(\alpha y,\ y)}{H(\alpha y,\ \alpha y)} H_2(x,\ \alpha y) +$$

$$+ \alpha^2 \frac{H(\alpha y,\ y)}{H(\alpha y,\ \alpha y)} \frac{H(\alpha^2 y,\ \alpha y)}{H(\alpha^2 y,\ \alpha^2 y)} H_2(x,\ \alpha^2 y) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \alpha^n \frac{H(\alpha y,\ y)}{H(\alpha y,\ \alpha y)} \frac{H(\alpha^2 y,\ \alpha y)}{H(\alpha^2 y,\ \alpha^2 y)} \cdots \frac{H(\alpha^n y,\ \alpha^{n-1} y)}{H(\alpha^n y,\ \alpha^n y)} H_2(x,\ \alpha^n y) \Big\},$$



(Nella figura si è supposto n 5.

vale a dire:

$$K(M) = \frac{1}{H(y,\ y)} \Big\{ H_2(M_0) - \alpha \frac{H(V_1)}{H(V_2)} H_2(M_1) + \alpha^2 \frac{H(V_1)}{H(V_2)} \frac{H(V_3)}{H(V_4)} H_2(M_2) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \alpha^n \frac{H(V_1)}{H(V_2)} \frac{H(V_3)}{H(V_4)} \cdots \frac{H(V_{2n-1})}{H(V_{2n})} H_2(M_n) \Big\}.$$

La funzione $K(x,\ y)$ sarà in generale discontinua lungo le linee $y = \alpha x$,

$y = \alpha^2 x$, $y = \alpha^3 x, \ldots$, e i suoi valori assoluti saranno inferiori ad un numero finito.

Infatti abbiamo:

$$\frac{H(V_{2s-1})}{H(V_{2s})} = 1 + \frac{H(V_{2s-1}) - H(V_{2s})}{H(V_{2s})}.$$

Ora la distanza fra i punti V_{2s-1} e V_{2s} è inferiore o al più eguale a $|a(1-\alpha)\alpha^{s-1}|$, quindi se ε_s denota il limite superiore dei valori assoluti delle differenze fra i valori di $H(x, y)$ in tutte le possibili coppie di punti le cui distanze non superano $|a(1-\alpha)\alpha^{s-1}|$, avremo:

$$|H(V_{2s-1}) - H(V_{2s})| \leqq \varepsilon_s,$$

e, chiamando m' il limite inferiore dei valori assoluti di $H(x, x)$, sarà:

$$\left|\frac{H(V_{2s-1})}{H(V_{2s})}\right| \leqq 1 + \frac{\varepsilon_s}{m'},$$

d'onde:

$$|K(M)| \leqq \frac{m''}{m'}\left\{1 - \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right) + \alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^n \alpha^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right)\cdots\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m'}\right)\right\},$$

in cui m'' denota il massimo valore assoluto di $H_2(x, y)$. Ora per la proprietà che hanno le funzioni di esser continue uniformemente abbiamo che:

$$\lim_{s=\infty} \varepsilon_s = 0,$$

quindi la serie indefinita a termini positivi:

$$T = 1 - \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right) + \alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) - \cdots +$$
$$\cdots + \left(-1\right)^n \alpha^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right)\cdots\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m'}\right) + \cdots$$

sarà convergente e per conseguenza:

$$|K(M)| < \frac{m'' T}{m'},$$

il che prova la proposizione enunciata.

In virtù di quanto abbiamo dimostrato la (9) potrà scriversi dunque:

$$\psi(y) = \theta(y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) K(x, y)\, dx, \tag{14}$$

e perciò il procedimento esposto nel § 7 [cfr. formule (12) e (13)] ci darà il modo di ricavare la funzione incognita $\theta(x)$ dalla (14).

9. Noi abbiamo fin qui trattato il caso in cui nella equazione funzionale (3) o (3') $|\alpha|$ fosse minore di 1. È evidente che il caso nel quale $|\alpha|>1$ non presenta difficoltà nuove, giacchè si può ricondurre subito al precedente. Basterà perciò cambiare la variabile y, prendendo $z=\alpha y$ e avremo:

$$\int_{\alpha y}^{y}\theta(x)\,H(x,\ y)\,dx=\int_{z}^{\frac{z}{\alpha}}\theta(x)\,H\left(x,\ \frac{z}{\alpha}\right)dx,$$

onde, posto $\beta=\frac{1}{\alpha}$, la equazione funzionale diverrà:

$$f\left(\frac{z}{\alpha}\right)-f(0)=-\int_{\beta z}^{z}\theta(x)\,H\left(x,\ \frac{z}{\alpha}\right)dx,$$

in cui $|\beta|<1$.

Resta il caso in cui $\alpha_1=-1$, nel quale l'equazione funzionale diviene:

$$f(y)-f(0)=\int_{-y}^{y}\theta(x)\,H(x,\ y)\,dx,\qquad (a>y>-a). \tag{15}$$

Esso è un caso eccezionale che sfugge alle precedenti considerazioni ed in cui la questione assume un carattere diverso. Intanto è da osservare che in questo caso la $f(y)$ non può più scegliersi arbitrariamente, se si vuole che $\varphi(x)$ resulti finita continua e derivabile, giacchè derivando due volte l'equazione precedente si trova:

$$f'(0)\,H_2(0,\ 0)-f''(0)\,H(0,\ 0)=0.$$

Ma in casi particolari la $f(y)$ può andar soggetta a limitazioni di una natura ancora più restrittiva. Dalla (15) infatti segue, cambiando y in $-y$:

$$f(-y)-f(0)=-\int_{-y}^{y}\theta(x)\,H(x,\ -y)\,dx, \tag{16}$$

quindi se, per esempio, $H(x,\ -y)=-H(x,\ y)$ dovrà essere $f(y)=f(-y)$, mentre dovrà essere $f(y)=-f(-y)$ se $H(x,\ y)=H(x,-y)$ ed il problema funzionale resulterà indeterminato. Noi non staremo ad approfondire qui la questione di risolvere la (15), ma ci limiteremo a mostrare a quale classe di questioni essa appartenga.

Si prenda nelle (15) e (16):

$$f(y)=f_1(y),\qquad f(-y)=f_2(y),\qquad \theta(x)=\theta_1(x),\qquad \theta(-x)=\theta_2(x),$$
$$H(x,\ y)=H_{11}(x,\ y),\qquad H(-x,\ y)=H_{12}(x,\ y),$$
$$-H(x,\ -y)=H_{21}(x,\ y),\qquad -H(-x,\ -y)=H_{22}(x,\ y),$$

allora esse diverranno [Cfr. § 7]:

$$f_1(x)-f_1(0)=\int_0^y[H_{11}(x,\ y)\,\theta_1(x)+H_{12}(x,\ y)\,\theta_2(x)]\,d\,x\,,$$

$$f_2(y)-f_2(0)=\int_0^y[H_{21}(x,\ y)\,\theta_1(x)+H_{22}(x,\ y)\,\theta_2(x)]\,d\,x\,.$$

L'analisi di queste equazioni funzionali è stata fatta nel § 5 della mia prima Nota dell'Accademia dei Lincei, precedentemente citata, quando il determinante:

$$\begin{vmatrix} H_{11}(y,\ y), & H_{12}(y,\ y) \\ H_{21}(y,\ y), & H_{22}(y,\ y)\end{vmatrix} \gtrless 0\,.$$

Nel nostro caso esso si annulla per $y=0$. Poichè questo determinante compie lo stesso ufficio della funzione $H(y,\ y)$ nei problemi considerati nel § 11 dell'Art. I, così si riconosce che la questione si presenta come dello stesso tipo di quella che si incontra allorchè $H(y,\ y)$ si annulla per $y=0$. [Cfr. l'ultimo teorema del § 11 dell'Art. I.]

10. Supponiamo che l'equazione funzionale abbia la forma:

$$f(y)=\int_{py}^{qy}\varphi(x)\,H(x,\ y)\,d\,x\,, \tag{17}$$

in cui $\left|\frac{p}{q}\right|\gtrless 1$.

Senza alterare la generalità delle nostre considerazioni potremo supporre senz'altro:

$$\left|\frac{p}{q}\right|<1\,.$$

Pongasi:

$$q\,y=z\,,$$

avremo:

$$f\left(\frac{z}{q}\right)=\int_{\alpha z}^{z}\varphi(x)\,H\left(x,\ \frac{z}{q}\right)d\,x\,,$$

essendo $\alpha = \frac{p}{q}$. L'equazione rientra quindi nella classe di equazioni funzionali precedentemente studiate.

Abbiasi ora l'equazione:

$$f(y) = \int_p^{q'} \varphi(x y) \, K(x, y) \, d x,$$

in cui p, q sono due limiti costanti arbitrarii, escluso il caso $\left|\frac{p}{q}\right| = 1$.

Posto $x y = \xi$, la relazione precedente diverrà:

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(\xi) \, K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) y \, d\xi,$$

e posto:

$$K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) y = H(\xi, y),$$

l'ultima equazione diverrà:

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(\xi) \, H(\xi, y) \, d\xi,$$

ossia si ridurrà alla (17). Il problema dunque propostosi da Abel e di cui fu parlato nel § 1 dell'Art. I potrà risolversi mediante le fatte considerazioni, supposta $K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) y$ finita, ed escluso il caso in cui per i limiti si abbia $\left|\frac{p}{q}\right| = 1$.

Art. III.

1. Dedicheremo questo articolo ad alcune applicazioni delle formule generali esposte nell'Art. I. Il procedimento ivi indicato nei §§ 10, 11 dà la soluzione dei vari problemi d'inversione mediante delle operazioni di quadratura; in molti casi esse si eseguiscono con facilità ed in particolare quando le funzioni date sono serie di potenze.

2. Cominciamo dal provare come, eseguendo le dette quadrature, le formule (23) e (24) dell'Art. I conducano subito alla formula di Sonine allorchè si suppone che $F(u)$ sia una serie di potenze.

Prendiamo:

$$F(u) = \sum_0^{\infty}{}_h \, a_h \, u^h, \qquad a_0 = 1, \tag{1}$$

tenendo presenti le (24) dell'Art. I, avremo:

$$s_0(v) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \sum_0^\infty {}_h\, a_{h+1} \frac{\Gamma(h-\lambda+2)}{\Gamma(h+1)} v^h,$$

ovvero, ponendo:

$$a_{h+1} \frac{\Gamma(h-\lambda+2)}{\Gamma(1-\lambda)} = c_{h+1},$$

$$s_0(v) = \sum_0^\infty {}_h \frac{c_{h+1}}{\Gamma(h+1)} v^h, \qquad c_0 = 1.$$

Abbiamo ora:

$$t_0(v) = \frac{1}{v^{1-\lambda}},$$

e perciò:

$$t_i(v) = \frac{v^i}{v^{1-\lambda}} \sum_0^\infty {}_s\, b_{i,s}\, v^s, \qquad (b_{0,0} = 1,\ b_{0,s} = 0),$$

onde:

$$t_{i+1}(v) = \frac{v^{i+1}}{v^{1-\lambda}} \sum_0^\infty {}_r\, v^r \sum_0^r c_{h+1} b_{i,r-h} \frac{\Gamma(i+r-h+\lambda)}{\Gamma(i+r+\lambda+1)},$$

ossia, ponendo:

$$b_{i,s} = \frac{\beta_{i,s}}{\Gamma(i+s+\lambda)},$$

si ha la formula ricorrente:

$$\beta_{i+1,r} = \sum_0^r {}_h\, c_{h+1}\, \beta_{i,r-h}, \qquad [\beta_{0,0} = \Gamma(\lambda)]. \tag{2}$$

Abbiamo dunque il modo di calcolare tutte le $t_i(v)$ e per conseguenza $\Omega(v)$.

3. Osserviamo che supponendo la variabile v complessa e $|v|$ minore del raggio di convergenza della serie (1), la funzione:

$$\Theta(v) = v^{1-\lambda}\, \Omega(v) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i\, v^{1-\lambda}\, t_i(v),$$

in virtù della legge con cui decrescono i limiti superiori dei moduli di $t_i(v)$ è una funzione uniforme ed olomorfa. Essa è dunque una serie di potenze di a convergente entro il cerchio di convergenza della (1), quindi resulterà:

$$\Theta(v) = \sum_0^\infty {}_k\, e_k\, v^k = \sum_0^\infty {}_k\, v^k \sum_0^k {}_s (-1)^s\, b_{s,k-s},$$

da cui segue:

$$e_k = \sum_0^k {}_s (-1)^s b_{s,k-s} = \frac{1}{\Gamma(k+\lambda)} \sum_0^k (-1)^s \beta_{s,k-s},$$

Si ponga:

$$\varepsilon_k = \sum_0^k {}_s (-1)^s \beta_{s,k-s}, \qquad \varepsilon_0 = \Gamma(\lambda),$$

sarà per la (2):

$$\varepsilon_k = \sum_1^k {}_s (-1)^s \sum_0^{k-s} {}_h c_{h+1} \beta_{s-1,k-s-h} = -\sum_0^{k-1} {}_h c_{h+1} \sum_0^{k-h-1} {}_\sigma (-1)^\sigma \beta_{\sigma,k-h-\sigma-1}$$

$$= -\sum_0^{k-1} {}_h c_{h+1} \varepsilon_{k-h-1} = -\sum_1^k c_h \varepsilon_{k-h}.$$

Riassumendo si hanno le formule:

$$F(u) = \sum_0^\infty {}_h a_h u^h, \qquad a_0 = 1,$$

$$c_h = \frac{a_h \Gamma(h-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)},$$

$$\varepsilon_k = -\sum_1^k {}_h c_h \varepsilon_{k-h},$$

$$e_k = \frac{1}{\Gamma(k+\lambda)} \varepsilon_k,$$

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \Theta(u) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \sum_0^\infty {}_k e_k v^k,$$

$$\Omega(v) = \frac{\Theta(v)}{v^{1-\lambda}},$$

le quali ci permettono di calcolare Θ e quindi Ω conoscendo F.

Osserviamo ora che dalla terza delle precedenti equazioni segue:

$$\sum_0^k {}_h c_h \varepsilon_{k-h} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

mentre:

$$c_0 \varepsilon_0 = \Gamma(\lambda),$$

perciò se poniamo:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \rho(x), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots) = 1 + \partial_1 x + \partial_2 x^2 + \cdots = \psi(x), \tag{4}$$

si avrà:

$$\rho(x)\,\psi(x) = 1\,, \tag{5}$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned} F(u) &= \Gamma(1-\lambda)\sum_0^\infty{}^h \frac{c_h}{\Gamma(h+1-\lambda)}\,u^h \\ \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\,\Theta(u) &= \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\sum_0^\infty{}^k \frac{\partial_k}{\Gamma(k+\lambda)}\,v^k, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

le quali appunto conducono alla formula di Sonine. (Cfr. Art. I § 8.)

Il resultato varrebbe anche se la (3) non fosse convergente o si annullasse, ma allora dovremmo attribuire alla (3), (4) e (5) un significato simbolico. La reciprocità delle due serie (6) prova che esse hanno lo stesso cerchio di convergenza.

4. Il precedente resultato può ottenersi anche molto semplicemente dalla equazione (2) colle considerazioni seguenti.

La (2) prova che se poniamo:

$$\rho(v) = \sum_0^\infty c_i\,v^i,$$

sarà, almeno simbolicamente:

$$\sum_0^\infty{}^r \beta_{i+1,r}\,v^{i+1+r} = \left(\sum_0^\infty{}^r \beta_{i,r}\,v^{i+r}\right)\left(\sum_1^\infty{}^h c_h\,v^h\right) =$$

$$= \left(\sum_0^\infty{}^r \beta_{i,r}\,v^{i+r}\right)[\rho(v)-1],$$

e perciò:

$$\beta_{0,0}\,[-1+\rho(v)]^i = \sum_0^\infty{}^s \beta_{i,s}\,v^{i+s},$$

quindi per avere $v^{1-\lambda}\,t_i(v)$ basterà dividere per $\Gamma(h+\lambda)$ il coefficiente del termine di grado h ($h = 1, 2, 3, \ldots \infty$) nella serie:

$$\beta_{0,0}\,[-1+\rho(v)]^i.$$

Se dunque scriviamo:

$$\Omega(v) = \frac{\Theta(v)}{v^{1-\lambda}},$$

$\Theta(v)$ si otterrà calcolando:

$$\beta_{0,0}\,[\sum_0^\infty (-1)^i\,(-1+\rho(v))^i] = \theta(v),$$

e dividendo quindi il coefficiente del termine di grado h ($h = 1, 2, \ldots \infty$) per $\Gamma(h+\lambda)$.

Ora dalla equazione precedente si deduce, almeno simbolicamente:

$$\dot{\theta}(v) = \frac{\beta_{0,0}}{\rho(v)},$$

per conseguenza:

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\,\theta(v) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{1}{\rho(v)},$$

da cui seguono immediatamente le formule (6).

5. Esaminiamo ora le formule (21) e (22) dell'Art. I supponendo che $F(z)$ sia una serie di potenze.

Poniamo:

$$F(z) = 1 + \sum_1^\infty{}_i\, a_i z^i, \tag{7}$$

e scriviamo:

$$s_i(z) = z^i \sum_0^\infty c_{i,h}\, z^h.$$

Avremo intanto:

$$s_0(z) = F'(z) = \sum_1^\infty{}_h\, h\, a_h\, z^{h-1},$$

quindi:

$$c_{0,h} = (h+1)\, a_{h+1}. \tag{8}$$

Ma:

$$s_{i+1}(z) = \int_0^z s_0(z-u)\, s_i(u)\, du = \int_0^z u^i \sum_0^\infty{}_r \sum_0^r{}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, u^{r-h}(z-u)^h\, du =$$

$$= \sum_0^\infty{}_r \sum_0^r{}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, z^{i+r+1} \int_0^1 \xi^{i+r-h}(1-\xi)^h\, d\xi =$$

$$= \sum_0^\infty{}_r\, z^{i+r+1} \sum_0^r{}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, \frac{\Gamma(h+1)\,\Gamma(i+r-h+1)}{\Gamma(i+r+2)},$$

e per conseguenza:

$$c_{i+1,r} = \sum_0^r{}_h\, \frac{c_{0,h}\,\Gamma(h+1)\, c_{i,r-h}\,\Gamma(i+r-h+1)}{\Gamma(i+r+2)}.$$

Posto:

$$e_{i,r} = c_{i,r}\,\Gamma(i+r+1), \tag{9}$$

avremo dunque:

$$e_{i+1,r}=\sum_0^r {}_h\, e_{i,r-h}\, e_{0,h},$$

da cui segue:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_{i+1,r}\, u^r=\left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{i,r}\, u^r\right)\left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, u^r\right), \tag{10}$$

e perciò:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_{i,r}\, u^r=\left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, u^r\right)^{i+1}. \tag{11}$$

Osserviamo che se anche la serie $\sum_0^r {}_r\, e_{0,r}\, u^r$ non fosse convergente, le due formule precedenti conserverebbero il loro significato simbolico e lo stesso può dirsi delle formule seguenti.

Per ottenere dunque $s_i(z)$ basterà fare la potenza $(i+1)^{esima}$ della serie $\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, z^r$, quindi moltiplicarla per z^i e dividere per $\Gamma(i+r+1)$ il coefficiente del termine di grado $i+r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\dots\ \infty)$.

Si noti ora, come già facemmo nel caso precedentemente studiato, che supponendo z complessa, finchè $|z|$ è minore del raggio del circolo di convergenza della serie (7) la funzione:

$$\Theta(z)=\sum_0^\infty {}_i\,(-1)^i\, s_i(z),$$

sarà olomorfa; essa sarà dunque esprimibile con una serie di potenze di z convergente entro il cerchio di convergenza della (7).

Per ottenerla si formi:

$$\sum_0^\infty {}_i\,(-1)^i\, z^i\left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, z^r\right)^{i+1}=\frac{\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, z^r}{1+z\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, z^r}=\sum_0^\infty {}_h\, b_h\, z^h,$$

avremo allora:

$$\Theta(z)=\sum_0^\infty {}_h\,\frac{b_h}{\Gamma(h+1)}\, z^h.$$

Dalle (7), (8) e (9) si deduce, scrivendo per semplicità e_h invece di $e_{0,h}$:

$$F(z)=1+\sum_0^\infty {}_h\,\frac{e_h}{\Gamma(h+2)}\, z^{h+1},$$

onde potremo enunciare la proposizione seguente:

Posto:

$$\sigma(z) = \sum_0^\infty{}_h\, e_h\, z^h, \tag{12}$$

$$\rho(z) = \frac{\sigma(z)}{1 + z\,\sigma(z)} = \sum_0^\infty b_h\, z^h, \tag{13}$$

e quindi:

$$F(z) = 1 + \sum_0^\infty{}_h \frac{e_h}{\Gamma(h+2)}\, z^{h+1}, \tag{14}$$

$$\Theta(z) = \sum_0^\infty{}_h \frac{b_h}{\Gamma(h+1)}\, z^h. \tag{15}$$

si avrà che l'integrale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, F[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx,$$

si invertirà mediante la formula:

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f\ (x)\, \Theta\, [\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx,$$

e per la validità delle formule precedenti basterà mantenersi entro il cerchio di convergenza della serie (14), *anche se le* (12) *e* (13) *non fossero convergenti, attribuendo in questo caso a queste ultime un significato simbolico.*

6. Le formule precedenti possono verificarsi anche direttamente col procedimento seguente.

Affinchè:

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f'(x)\, \Theta\, [\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx,$$

verifichi l'equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, F\, [\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx, \qquad F(0) = 1,$$

dovremo avere:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y f'(x)\, F[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx +$$

$$+ \int_\alpha^y \lambda'(x)\, F[\lambda(x) - \lambda(y)] \int_\alpha^x f'(\xi)\, \Theta[\lambda(\xi) - \lambda(x)]\, d\xi =$$

$$= \int_\alpha^y f'(x)\, F\, [\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx +$$

$$+ \int_\alpha^y f'(\xi)\, d\xi \int_\xi^y F[\lambda(x) - \lambda(y)]\ \Theta\ [\lambda(\xi) - \lambda(x)]\ \lambda'(x)\, dx,$$

quindi:

$$\int_\xi^y F[\lambda(x) - \lambda(y)]\,\Theta[\lambda(\xi) - \lambda(x)]\,\lambda'(x)\,dx = 1 - F[\lambda(\xi) - \lambda(y)],$$

ovvero:

$$-\int_0^z F(u)\,\Theta(z-u)\,du = 1 - F(z),$$

che può anche scriversi:

$$F(z) - F(0) = \int_0^z F(u)\,\Theta(z-u)\,du.$$

Posto:

$$F(u) = \sum_0^\infty{}_h\, a_h u^h, \qquad (a_0 = 1),$$

$$\Theta(u) = \sum_0^\infty{}_h\, \partial_h u^h,$$

dall'equazione precedente resulterà:

$$\sum_0^\infty{}_r\, z^{r+1} \sum_0^r{}_h\, a_h \partial_{r-h} \int_0^1 v^h (1-v)^{r-h}\,dv = \sum_0^\infty{}_r\, a_{r+1} z^{r+1},$$

onde:

$$a_{r+1} = \sum_0^r{}_h\, a_h \partial_{r-h} \int_0^1 v^h (1-v)^{r-h}\,dv =$$

$$= \sum_0^r{}_h \frac{a_h \Gamma(h+1)\,\partial_{r-h}\Gamma(r-h+1)}{\Gamma(r+2)}.$$

Scriviamo:

$$a_{h+1}\Gamma(h+2) = e_h = g_{h+1},$$

$$\partial_h \Gamma(h+1) = b_h,$$

otterremo:

$$e_r = \sum_0^r{}_h\, g_h b_{r-h}, \qquad (r = 0,\ 1,\ 2\ldots),$$

equazione che equivale, almeno simbolicamente, all'altra:

$$\sum_0^\infty{}_r\, e_r z^r = \left(\sum_0^\infty{}_r\, b_r z^r\right)\left(\sum_0^\infty{}_r\, g_r z^r\right).$$

Ma:

$$\sum_0^\infty{}_r\, g_r z^r = 1 + z\sum_0^\infty{}_r\, e_r z^r,$$

quindi:

$$\sum_0^\infty{}_r\, e_r\, z^r = \left(\sum_0^\infty{}_r\, b_r\, z^r\right)\left(1 + z \sum_0^\infty{}_r\, e_r\, z^r\right),$$

onde si avranno immediatamente le (13), (14) e (15).

Gli esempi della stessa specie di quelli ora considerati potrebbero moltiplicarsi all'infinito, noi non staremo a trattarne altri, non presentando essi che difficoltà puramente di calcolo (*).

(*) A complemento delle notizie contenute nell'Art. I, debbo aggiungere che durante la stampa del presente scritto il sig. Le Roux ha pubblicato nel fascicolo del 18 gennaio dei Comptes rendus de l'Académie des Sciences una Nota: *Sur l'équation des télégraphistes*, nella quale accenna ad un teorema sulle funzioni ricavate mediante integrali definiti, rimandando alla sua tesi di laurea, lavoro però che non ho potuto ancora procurarmi.

Sulla teoria dei gruppi infiniti continui.

(*Di* P. Medolaghi, *a Roma.*)

INTRODUZIONE.

Nei primi lavori sulla teoria dei gruppi infiniti (*), si parla soltanto, come è noto, di gruppi di trasformazioni infinitesime. Questi gruppi sono definiti da certi sistemi di equazioni alle derivate parziali che furono chiamati *equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime.*

L'Engel, già fino dal 1885 (**), espose un metodo per formare questi sistemi di equazioni per tutti i gruppi in n variabili, e fino da quel momento apparì una notevole corrispondenza tra questi gruppi e certi gruppi *finiti* di particolari composizioni. Queste composizioni furono anche determinate dall'Engel pel caso in cui le equazioni di definizione sono dell'ordine primo e secondo. Più recenti considerazioni (***) dell'Engel, intese a dimostrare la generalità del suo metodo, mi hanno reso facile il determinare queste composizioni anche nel caso generale. Questa determinazione, insieme ad una esposizione del metodo di Engel, si trovano nel § 2 di questo lavoro.

Gli altri paragrafi sono destinati a mostrare un altro aspetto della corrispondenza tra i gruppi finiti così trovati (che io chiamo *gruppi* γ_{sn}) ed i gruppi in n variabili. Le considerazioni si riferiscono alle equazioni delle trasformazioni finite.

(*) Lie, *Ueber unendliche continuirliche Gruppen* (Christiania, Videnskab. Forh., 1882). Engel, *Ueber die definitionsgleichungen der continuirlichen Tr. gruppen* (Math. Ann., Bd. 27, 1886).

(**) Engel, op. cit.

(***) *Kleinere Beitrage IX* (Berichte der kgl. Sachs. Ges. der Wissenschaft, 1891).

È noto, dalle Memorie (*) in cui Lie pose i fondamenti della teoria dei gruppi infiniti, che la nozione di gruppo di trasformazioni infinitesime coincide essenzialmente con quella di gruppo infinito. Le trasformazioni finite sono definite da sistemi di equazioni alle derivate parziali che furon chiamate *equazioni di definizione delle trasformazioni finite*, e che si deducono da quelle delle trasformazioni infinitesime, *integrando un sistema completo.*

Per le equazioni delle trasformazioni finite fu trovata dal Lie la forma seguente:

$$I_k\left(y_1 \dots y_n \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots\right) = \alpha_k (x_1 \dots x_n), \quad k = 1 \dots m. \tag{1}$$

Qui le I_k sono funzioni delle $y_1 \dots y_n \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots$ sulla cui natura non si aveva, per quel che io so, nessuna idea più precisa. Io ora dimostro che ogni sistema (1) si può ottenere dalle equazioni finite:

$$z'_k = f_k (z_1 \dots z_m\, a_1 \dots a_r), \qquad k = 1 \dots m,$$

di un gruppo γ_{sn}, ponendo al posto delle $z_1 \dots z_m$ delle funzioni opportunamente scelte $\varpi_1 (y_1 \dots y_n) \dots \varpi_m (y_1 \dots y_n)$ delle $y_1 \dots y_n$; al posto delle $z'_1 \dots z'_m$ le stesse funzioni rispettivamente, delle $x_1 \dots x_n$, e finalmente ponendo in luogo delle $a_1 \dots a_r$ certe funzioni delle $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots$, che hanno la proprietà di essere invarianti indipendenti di certi speciali gruppi γ_{sn}.

Da questo teorema si possono ricavare molte conseguenze: di queste alcune sono indicate negli ultimi paragrafi. Qui voglio accennare soltanto alla più importante.

Date le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo infinito Γ, si possono scrivere immediatamente le trasformazioni infinitesime del corrispondente gruppo γ_{sn}. Allora il problema di trovare le equazioni delle trasformazioni finite si riduce al problema di trovare le equazioni finite di quel gruppo γ_{sn} ed a determinare le funzioni $a\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots\right)$. Anche questo problema si può ridurre alla determinazione delle equazioni finite di un gruppo γ_{sn} e precisamente di un gruppo semplicemente transitivo.

(*) *Grundlagen für die Theorie der unendl. cont. Tr. gruppen* (Berichte der Sachs. G. d. W., 1891).

È notevole che, inversamente, date le equazioni finite:

$$z'_\mu = f_\mu(z_1 \dots z_\mu\, a_1 \dots a_\rho), \tag{2}$$

di un gruppo transitivo con la composizione γ_{sn}, si possono *sempre* determinare le $a_1 \dots a_\rho$ in funzione delle $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots$ in modo che le (2), per *ogni* sistema di funzioni $z_i = \varpi_i(y)$ $z'_i = \varpi_i(x)$, rappresentino un gruppo.

La corrispondenza tra gruppi, finiti ed infiniti, in n variabili, e gruppi finiti con la composizione γ_{sn}, può essere applicata con vantaggio allo studio di certi problemi di integrazione. Furono anzi questi che mi condussero alle ricerche esposte nella presente Memoria. Io mi riserbo di trattare queste applicazioni in una seconda Memoria e perciò mi limito ad accennare in questa introduzione ad un problema studiato dal Lie (*):

Supposto che si conoscano le equazioni di definizione di un gruppo infinito Γ:

$$I_k\left(y_1 \dots y_n \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \dots x_n),$$

come anche la trasformazione infinitesima generale:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

del gruppo, si cerca di ricondurre la integrazione della $Xf = 0$ *alle equazioni ausiliari più semplici.*

Sarebbe interessante studiare sui gruppi γ_{sn} *anzichè sulle equazioni* $I_k = B_k$ *questo problema di integrazione.*

§ 1. Generalità sui gruppi infiniti.

Riassumo in questo paragrafo le nozioni ed i teoremi fondamentali della teoria dei gruppi infiniti.

Una schiera di trasformazioni:

$$y_i = F_i(x_1 \dots x_n), \qquad i = 1 \dots n, \tag{1}$$

si dice gruppo infinito, quando le $F_1 \dots F_n$ sono le soluzioni più generali di

(*) *Berichte der kgl. Sachs. Ges. der Wissenschaft. 1895* (Verwerthung des Gruppenbegriffs).

un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$W_k\left(x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n\, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0, \qquad k = 1,\ 2 \dots \tag{2}$$

che soddisfa alle due condizioni seguenti:

Prima: il sistema di soluzioni più generale del sistema (2) non dipende soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie.

Seconda: insieme con i sistemi di soluzioni:

$$y_i = F_i(x_1 \dots x_n), \qquad i = 1 \dots n,$$

$$y_i = \Phi_i(x_1 \dots x_n), \qquad i = 1 \dots n,$$

anche:

$$y_i = \Phi_i\,[F_1(x) \dots F_n(x)], \qquad i = 1 \dots n,$$

deve essere un sistema di soluzioni.

Allora le (2) si dicono le *equazioni di definizione delle trasformazioni finite* del gruppo. Il sistema (2) contenga le derivate delle y rispetto alle x fino all'ordine s. Si imaginerà portato ad una forma tale che tutte le equazioni di ordine minore od eguale ad s, che si possono dedurre da esso con derivazioni ed eliminazioni, si possano già dedurre con sole eliminazioni.

Ogni gruppo infinito contiene infinite trasformazioni infinitesime indipendenti. Se Xf ed Yf sono due tra queste, anche le trasformazioni $a\,Xf + b\,Yf$, qualunque siano le costanti a, b, e la $(X\,Y)f$ appartengono al gruppo.

Le trasformazioni infinitesime contenute nel gruppo si possono definire con un numero finito di equazioni differenziali della forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(x)\,\xi_i + \sum_i \sum_\nu \alpha_{ki\nu}(x)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} + \cdots = 0, \qquad k = 1,\ 2 \dots \tag{3}$$

lineari ed omogenee nelle ξ e nelle loro derivate, che godono delle due proprietà:

Prima: il sistema di soluzioni più generali non dipende solo da un numero finito di costanti arbitrarie.

Seconda: se $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_n$ sono due sistemi di soluzioni, anche: $\sum_{\nu=1}^{n}\left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x_\nu}\right) \cdots \sum_{\nu=1}^{n}\left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_n}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_n}{\partial x_\nu}\right)$, è un sistema di soluzioni.

Le (3) si dicono *equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime* del gruppo. Anche il sistema (3) si imaginerà portato ad una forma tale che le equazioni deducibili da esso con derivazioni ed eliminazioni ed il cui ordine non è maggiore dell'ordine delle equazioni (3), si possano dedurre dalle (3) con sole eliminazioni.

Questo, senza che sia necessario ripeterlo, si supporrà per tutti i sistemi di equazioni di definizione che interverranno.

Le equazioni (3) sono dello stesso ordine delle equazioni (2), ed in egual numero. Ad esse si può dare questa forma:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_i \xi_i(x)\left[\frac{\partial W_k}{\partial y_i}\right]+\sum_i\sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\left[\frac{\partial W_k}{\partial y_{i\nu}}\right]+\sum_i\sum_\mu\sum_\nu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left[\frac{\partial W_k}{\partial y_{i\mu\nu}}\right]+\cdots=0,\\ k=1,\ 2\ldots\end{array}\right\} \quad (3')$$

dove si è posto, per comodo:

$$y_{i\nu}=\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu}, \qquad y_{i\mu\nu}=\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\cdots$$

e dove con la parentesi $[f]$ si indica quello che diventa la funzione f di $x_1\ldots x_n\, y_1\ldots y_n\, y_{11}\ldots y_{nn}\, y_{111}\ldots$ dopo la sostituzione:

$$y_i=x_i, \qquad y_{i\nu}=\varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu}=0, \qquad (\varepsilon_{i\nu}=0 \quad \text{se } i \gtrless \nu; \quad \varepsilon_{ii}=1). \quad (4)$$

Si vede intanto di qui che note le equazioni (2) con sole derivazioni si possono formare le equazioni (3). Si può fare un'altra osservazione sulla forma delle equazioni (3).

Perciò è necessario ricordare che le equazioni $W_k=0$ si possono sempre porre sotto la forma più comoda:

$$I_k(y_1\ldots y_n\, y_{11}\ldots y_{nn}\, y_{111}\ldots)-\alpha_k(x_1\ldots x_n)=0,$$

qui le funzioni I_k non dipendono che dalle $y_1\ldots y_n\, y_{11}\ldots$ e non dalle $x_1\ldots x_n$; esse hanno inoltre la proprietà di ridursi identicamente, per la sostituzione (4), alle funzioni $\alpha(x_1\ldots x_n)$ corrispondenti.

Ponendo allora nelle (3') al posto di W_k la funzione $I_k-\alpha_k$ e ponendo mente a questa ultima circostanza, si hanno in luogo delle (3') le:

$$\sum_i \xi_i(x)\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}+\sum_i\sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\left[\frac{\partial I_k}{\partial y_{i\nu}}\right]+\cdots=0, \qquad k=1,\ 2\ldots \qquad (3'')$$

Sulle funzioni di $x_1\ldots x_n$ rappresentate dai simboli $\left[\frac{\partial I_k}{\partial y_{i\nu}}\right],\cdots$ non si potrebbe invece direttamente concludere nulla. Il metodo di Engel, che io espongo nel § 2, ci mostra che le $\left[\frac{\partial I_k}{\partial y_{i\nu}}\right]\cdots$ sono esprimibili con le sole $\alpha_1,\ \alpha_2\ldots$

Si è veduto che per ogni gruppo infinito esistono dei sistemi di equazioni (3) che definiscono le trasformazioni infinitesime contenute nel gruppo: si può domandare se, inversamente, dato un sistema di equazioni (3), con le proprietà che si sono dette *prima* e *seconda*, esista sempre un gruppo infinito, di cui quelle siano le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime. La risposta a questa domanda è nel seguente teorema fondamentale:

Teorema 1.° *Sia dato un sistema di m equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(x)\,\xi_i + \sum_i \sum_\nu \alpha_{ki\nu}(x)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} + \cdots = 0, \qquad k = 1, 2 \ldots m, \tag{3}$$

che abbia le seguenti proprietà:

Se le equazioni (3) *sono dell'ordine* s, *con derivazioni ed eliminazioni non se ne deve poter ricavare nessuna equazione di ordine* $\leqq s$, *ed indipendente dalle* (3).

Il sistema di soluzioni più generale non deve dipendere solo da un numero finito di costanti arbitrarie.

Se $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_n$ *sono due sistemi di soluzioni, anche:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\xi_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \right), \qquad i = 1 \ldots n,$$

è un sistema di soluzioni.

Allora il sistema (3) *definisce la trasformazione infinitesima più generale:*

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

di un certo gruppo infinito. Le trasformazioni finite di questo gruppo sono determinate da m equazioni differenziali parziali indipendenti, di ordine s della forma:

$$I_k(y_1 \ldots y_n\, y_{11} \ldots) = \alpha_k(x_1 \ldots x_n), \qquad k = 1 \ldots m, \tag{2}$$

che per la sostituzione:

$$y_i = x_i, \qquad y_{i\mu} = \varepsilon_{i\mu}, \qquad y_{i\nu\mu} = 0 \ldots$$

si riducono ad identità.

Le funzioni $I_1 \ldots I_m$ *hanno poi la proprietà di rimanere invarianti per ogni trasformazione:*

$$y'_i = F_i(y_1 \ldots y_n),$$

che appartiene al gruppo infinito. Date le equazioni (3) *le funzioni* $I_1 \dots I_m$ *si possono trovare con la integrazione di un sistema completo.*

Ecco come si forma questo sistema completo.

Imaginiamo estesa s volte la trasformazione $Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$, considerando le derivate prime, seconde,... s^{esime} delle y rispetto alle x. Sarà:

$$X^{(s)} f = \sum_i \xi_i(y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\nu} B_{i\nu} f + \sum_i \sum_\nu \sum_\mu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y_\mu \partial y_\nu} B_{i\mu\nu} f + \cdots$$

dove le $B_{i\nu} f$, $B_{i\mu\nu} f \dots$ sono trasformazioni nelle $y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots$

Imaginiamo ora scritte le (3) ponendo in luogo delle $x_1 \dots x_n$ rispettivamente le variabili $y_1 \dots y_n$. Dalle equazioni così ottenute si possono ricavare m delle quantità:

$$\xi_1(y) \dots \xi_n(y) \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y_1^2} \dots$$

espresse in funzione delle rimanenti. Le espressioni così ottenute siano poste nel simbolo $X^{(s)} f$, che diventa, mettendo in evidenza quelle che rimangono tra le $\xi_1 \dots \xi_n \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} \dots$,

$$X^{(s)} f = \sum_i \xi_i(y) \overline{B}_i f + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\nu} \overline{B}_{i\nu} f + \cdots$$

dove le $\overline{B}_i f$, $\overline{B}_{i\mu} f \dots$ sono trasformazioni nelle variabili:

$$y_1 \dots y_n\, y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots$$

Le equazioni:

$$\overline{B}_i f = 0, \qquad \overline{B}_{i\nu} f = 0 \dots$$

formano appunto il sistema completo cercato. Questo sistema, come si vede dal modo con cui fu formato, *dipende essenzialmente* dalla natura delle funzioni $\alpha_1(y) \dots \alpha_m(y)$ che si presentano, scrivendo le (3) sotto la forma (3'). Rilevo questa circostanza perchè indicherò più tardi un metodo che fa dipendere la determinazione delle funzioni $I_1 \dots I_m$ dalla integrazione di un sistema completo *indipendente* dalla natura delle funzioni $\alpha_1(y) \dots \alpha_m(y)$.

§ 2. Metodo di Engel per la costruzione delle equazioni di definizione.

Nel paragrafo precedente si sono considerate equazioni della forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\,\xi_i + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\,\alpha_{ki\nu} + \cdots = 0, \qquad k = 1,\ 2 \ldots \tag{1}$$

Supponiamo che delle proprietà attribuite a questo sistema tutte rimangano tranne quella che si pose per *prima:* supponiamo, cioè, che il sistema di soluzioni più generale dipenda soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie.

Allora, come è noto (*), le (1) sono le equazioni di definizione di un gruppo *finito.*

Il problema di determinare tutti i sistemi di equazioni di definizione dei gruppi sia finiti che infiniti, fu risoluto dall'Engel (**). Dimostrazioni del metodo di Engel furono date dal Lie e dall'Engel stesso (***). Io accennerò ora la dimostrazione dell'Engel che conduce ad una forma notevole per le equazioni (1) e permette di generalizzare i suoi primi risultati.

Sia un gruppo infinito:

$$I_k(y_1 \ldots y_n\, y_{11} \ldots) = \alpha_k(x_1 \ldots x_n), \qquad k = 1 \ldots m, \tag{2}$$

e le I_k contengano fino alle derivate s^{esime} delle y rispetto alle x.

Sia $Xf = \sum_i \xi_i(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$ una trasformazione infinitesima del gruppo. Indichiamo con $X^{(s)} f$ la trasformazione Xf estesa s volte. Sarà, pel teorema 1.°:

$$X^{(s)} I_1 = 0, \qquad X^{(s)} I_m = 0.$$

Sia ora $Zf = \sum \zeta_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ una trasformazione infinitesima qualunque nelle variabili $x_1 \ldots x_n$ e sia $Z^{(s)} f$ la corrispondente trasformazione estesa. L'Engel dimostra che è:

$$Z^{(s)} I_k = \sum_i \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \zeta_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(x)\, \alpha^{k}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_1 \ldots I_m), \qquad k = 1 \ldots m.$$

(*) Lie, *Theorie der Transf. gruppen.* Vol. I, pag. 47, teor. 28.

(**) *Math. Ann.*, Bd. 27.

(***) *Kleinere Beitrage IX* (Berichte der Sachs. Ges. d. W., 1894).

essendo le $\alpha^k_{i, \nu_1 \dots \nu_n}$ funzioni delle sole $I_1 \dots I_m$ ed essendo:

$$\zeta_{i, \nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \zeta_i(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}}, \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n < s).$$

Posto allora:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha^k_{i, \nu_1 \dots \nu_n}(I_1 \dots I_m) \frac{\partial f}{\partial I_k} = \overline{A}_{i, \nu_1 \dots \nu_n} f, \tag{3}$$

la espressione:

$$Zf + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n} \zeta_{i, \nu_1 \dots \nu_n}(x) \overline{A}_{i, \nu_1 \dots \nu_n} f, \tag{4}$$

rappresenta evidentemente la trasformazione infinitesima generale di un gruppo infinito nelle variabili $x_1 \dots x_n \; I_1 \dots I_m$.

Assumiamo ora delle funzioni $\varpi_1(x_1 \dots x_n) \dots \varpi_m(x_1 \dots x_n)$ affatto arbitrarie e scriviamo le equazioni:

$$I_1 = \varpi_1(x_1 \dots x_n) \dots I_m = \varpi_m(x_1 \dots x_n). \tag{5}$$

L'insieme delle trasformazioni (4) che lasciano invariante il sistema (5) è ancora un gruppo: d'altra parte, che una trasformazione (4) lascia invariante il sistema di equazioni (5) si esprime con le:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \dots \nu_n} \zeta_{i, \nu_1 \dots \nu_n}(x) \, \alpha^k_{i, \nu_1 \dots \nu_n}(\varpi_1 \dots \varpi_m) = \sum_{\mu} \zeta_\mu \frac{\partial \varpi_k}{\partial x_\mu}, \qquad k = 1 \dots m. \tag{6}$$

Se dunque:

$$\zeta_1^{(1)} \dots \zeta_n^{(1)}; \qquad \zeta_1^{(2)} \dots \zeta_n^{(2)},$$

sono due sistemi di funzioni ζ che soddisfano alle relazioni (6) anche il sistema delle funzioni:

$$\sum_{\nu} \left(\zeta_\nu^{(1)} \frac{\partial \zeta_i^{(2)}}{\partial x_\nu} - \zeta_\nu^{(2)} \frac{\partial \zeta_i^{(1)}}{\partial x_\nu} \right), \qquad i = 1 \dots n,$$

vi soddisfa. Se ne conclude che *le equazioni* (6) *definiscono un gruppo nelle variabili $x_1 \dots x_n$ qualunque siano le funzioni $\varpi_1(x) \dots \varpi_m(x)$.*

In particolare, ponendo al posto di $\varpi_1 \dots \varpi_m$ le funzioni $\alpha_1 \dots \alpha_m$ delle x che entrano nei secondi membri delle (2), le (6) ci rappresentano il gruppo da cui eravamo partiti e le cui trasformazioni finite sono definite dalle (2).

Si ha così il teorema (*):

(*) Engel. *Math. Ann.*, Bd. 27, pag. 34.

Teorema 2.° *Sia:*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{x=1}^{m} U_x(\alpha,\ \xi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}, \tag{7}$$

il simbolo di una trasformazione infinitesima nelle variabili $x_1 \ldots x_n\, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ *e le funzioni* $U_x(\alpha,\ \xi)$ *lineari ed omogenee nelle* ξ *e nelle loro derivate siano scelte in maniera che la schiera delle trasformazioni ottenuta lasciando le* ξ *funzioni arbitrarie delle* $x_1 \ldots x_n$ *sia un gruppo.*

Prendiamo poi per $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ *delle funzioni arbitrarie delle* x, *e scriviamo le equazioni:*

$$U_x(\alpha\ \xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial \alpha_x}{\partial x_\nu} = 0, \qquad x = 1 \ldots m. \tag{8}$$

Questo sistema di equazioni definisce un gruppo (finito od infinito) nelle variabili $x_1 \ldots x_n$.

Prendendo tutti i possibili gruppi infiniti della forma (7) *e formando ogni volta le corrispondenti equazioni* (8) *si hanno tutti i gruppi (finiti od infiniti) nelle variabili* $x_1 \ldots x_n$.

Le funzioni $\alpha_1(x) \ldots \alpha_m(x)$ del teorema precedente non sono interamente arbitrarie. Esse infatti devono essere scelte in modo che dalle equazioni (8) non si possano con derivazioni ottenere equazioni nuove: questa condizione si traduce analiticamente con un certo numero di relazioni tra le α e le loro derivate:

$$\chi_x\left(\alpha_1 \ldots \alpha_m \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0, \qquad x = 1,\ 2 \ldots$$

Quando dirò, anche in seguito, che le α sono arbitrarie nelle (8), intendo però sempre limitata questa arbitrarietà dalle equazioni $\chi_x = 0$, se ve ne sono (*).

Il teorema 2.° fa dipendere la determinazione dei gruppi nelle $x_1 \ldots x_n$ da quella di certi gruppi nelle variabili $x_1 \ldots x_n\, \alpha_1 \ldots \alpha_m$, e più precisamente da quella di certe funzioni $U_x(\alpha,\ \xi)$. Queste funzioni si sa che contengono le ξ e le loro derivate in modo lineare ed omogeneo:

$$U_x(\alpha\ \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{A}_i^x(\alpha) + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu}^x(\alpha) + \cdots$$

(*) Engel. *Math. Ann.*, Bd. 27, pag. 38.

Poniamo ora:

$$\sum_{x=1}^{m} \overline{A}_i^x(\alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha_x} = \overline{A}_i f, \qquad \sum_{x=1}^{m} \overline{A}_{i\nu}^x(\alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha_x} = \overline{A}_{i\nu} f \ldots,$$

il simbolo (7) si potrà scrivere così:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{A}_i f + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu} f + \cdots,$$

confrontando questo simbolo con quello (4) si ha intanto che *senza diminuire la generalità dei risultati si può supporre che sia:*

$$\overline{A}_i^x(\alpha) = 0, \qquad i = 1 \ldots n, \qquad x = 1 \ldots m,$$

il simbolo (7) allora diventa:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu} f + \sum_i \sum_\mu \sum_\nu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \overline{A}_{i\mu\nu} f + \cdots, \tag{9}$$

sotto la qual forma esso è identico al simbolo (4). Le $\overline{A}_{i\nu} f$, $\overline{A}_{i\mu\nu} f \ldots$ rappresentano trasformazioni nelle variabili $\alpha_1 \ldots \alpha_m$. Si presenta ora questa questione:

A quali condizioni devono essere soggette le trasformazioni $\overline{A}_{i\nu} f$, $\overline{A}_{i\nu\mu} f, \ldots$ perchè la (9) sia, ponendo per $\xi_1 \ldots \xi_n$ delle funzioni arbitrarie delle x, la trasformazione infinitesima generale di un gruppo nelle $x_1 \ldots x_n\ \alpha_1 \ldots \alpha_m$?

L'Engel nel lavoro più volte citato nei *Math. Ann.* ha risoluto la questione nei due casi più semplici. Ma è facile risolverla anche nel caso più generale. Ecco anzitutto i risultati di Engel.

(A) Perchè il simbolo:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu} f,$$

rappresenti la trasformazione infinitesima generale di un gruppo è necessario e sufficiente che le trasformazioni $A_{i\nu} f$ nelle $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ formino un gruppo della composizione:

$$(\overline{A}_{ix} \overline{A}_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} \overline{A}_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} \overline{A}_{i\nu}.$$

(B) Perchè il simbolo:

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu} f + \sum_i \sum_\nu \sum_\mu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \overline{A}_{i\nu\mu} f,$$

rappresenti la trasformazione infinitesima generale di un gruppo è necessario e sufficiente che le $\overline{A}_{i\nu} f$, $\overline{A}_{i\nu\mu} f$ formino un gruppo nelle $\alpha_1 \dots \alpha_m$ della composizione:

$$(\overline{A}_{i\varkappa}\, \overline{A}_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu}\, \overline{A}_{\mu\varkappa} - \varepsilon_{\mu\varkappa}\, \overline{A}_{i\nu}$$

$$(\overline{A}_{i\varkappa j}\, \overline{A}_{\mu\nu\pi}) = 0$$

$$(\overline{A}_{i\varkappa}\, \overline{A}_{\mu\nu\pi}) = \varepsilon_{i\nu}\, \overline{A}_{\mu\varkappa\pi} + \varepsilon_{i\pi}\, \overline{A}_{\mu\nu\varkappa} - \varepsilon_{\varkappa\mu}\, \overline{A}_{i\nu\pi}\,.$$

Per estendere questi risultati al caso in cui nel simbolo (9) entrano fino alle derivate s^{esime} delle ξ, $(s > 2)$ si possono seguire due vie diverse. Una prima via sarebbe questa: si dimostra anzitutto che, affinchè la (9) sia la trasformazione generale di un gruppo è necessario e sufficiente che le $\overline{A}_{i\nu} f$, $\overline{A}_{i\mu\nu} f \dots$ formino un gruppo nelle $\alpha_1 \dots \alpha_m$ di una composizione che è la stessa per tutti. Per trovarla allora, basta considerare uno speciale gruppo (9); p. es. il gruppo di tutte le trasformazioni puntuali in $x_1 \dots x_n$ estese fino ad s volte, considerando le derivate delle y rispetto alle x.

Un procedimento più comodo si può tenere ricordando in che maniera si è giunti al simbolo (9) o, ciò che è lo stesso, al simbolo (4).

Si era considerato una qualunque trasformazione $Zf = \sum \zeta_i (x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ nelle $x_1 \dots x_n$ e si era estesa s volte considerando le derivate delle $y_1 \dots y_n$ (variabili non trasformate da Zf) rispetto alle $x_1 \dots x_n$. La trasformazione così ottenuta $Z^{(s)} f$ si può rappresentare così:

$$Z^{(s)} f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i (x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_\nu} A_{i\nu} f + \sum_i \sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu} A_{i\mu\nu} f + \cdots \tag{10}$$

in cui le $A_{i\nu} f$, $A_{i\mu\nu} f, \dots$ sono trasformazioni nelle variabili:

$$y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots y_{i, r_1 \dots r_n} \dots$$

Si era trovato poi che:

$$Z^{(s)} I_k = \sum_i \sum_{r_1 \dots r_n} \zeta_{i, r_1 \dots r_n}\, \alpha^k_{i, r_1 \dots r_n} (I_1 \dots I_m), \qquad k = 1 \dots m.$$

Poichè I_k è una funzione delle sole $y_1 \dots y_n\, y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots$ ne segue che è:

$$A_{i, r_1 \dots r_n} (I_k) = \alpha^k_{i, r_1 \dots r_n} (I_1 \dots I_m), \tag{11}$$

in cui col simbolo:

$$A_{i, r_1 \dots r_n} f,$$

si rappresenta la trasformazione che nel simbolo (10) ha il coefficiente $\zeta_{i, r_1 \dots r_n}$.

Le equazioni (11) ci dicono che le equazioni:

$$I_1 = \text{costante}, \ldots \qquad I_m = \text{costante},$$

rappresentano una divisione invariante dello spazio $y_{11} \ldots y_{nn} y_{111} \ldots$ pel gruppo delle:

$$A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f, \qquad i = 1 \ldots n, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n \leq s.$$

Allora, per un teorema della teoria dei gruppi finiti (*), le trasformazioni infinitesime:

$$\sum_{k=1}^{m} A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n}(I_k) \frac{\partial f}{\partial I_k} = \sum_{k=1}^{m} \alpha^k_{i, \nu_1 \ldots \nu_n}(I_1 \ldots I_m) \frac{\partial f}{\partial I_k} = \overline{A}_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f,$$

generano nelle variabili $I_1 \ldots I_m$ un gruppo *isomorfo* al gruppo delle $A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f$.

Si ha dunque il teorema:

Teorema 3.° *Perchè la trasformazione*:

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \overline{A}_{i\nu} f + \cdots$$

che contiene fino alle derivate s^{esime} *delle* ξ, *sia la trasformazione infinitesima generale di un gruppo nelle* $x_1 \ldots x_m$ $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ *è necessario e sufficiente che le trasformazioni:*

$$\overline{A}_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f,$$

nelle $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ *formino un gruppo isomorfo al gruppo delle* $A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f$ *nelle* $y_{11} \ldots y_{nn} y_{111} \ldots$, *essendo le* $A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f$ *definite dal simbolo:*

$$Z^{(s)} f = Z f + \sum_i \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \zeta_{i, \nu_1 \ldots \nu_n}(x) A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f.$$

Facendo $s = 1$, 2 si trovano precisamente le composizioni (A), (B).

La composizione del gruppo $A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f$ si indicherà brevemente col simbolo γ_{sn}.

Combinando il teorema 3.° col teorema 2.° si ha:

Teorema 4.° *Le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di ogni gruppo nelle* $x_1 \ldots x_n$ *si possono porre sotto la forma:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \zeta_{i, \nu_1 \ldots \nu_n}(x) \alpha^x_{i, \nu_1 \ldots \nu_n}(\varpi_1 \ldots \varpi_m) = \sum_{i=1} \zeta_i(x) \frac{\partial \varpi_x}{\partial x_i}, \qquad x = 1 \ldots m, \qquad (6)$$

(*) *Theorie der Tr. gruppen.* Vol. 1, pag. 307.

dove le:

$$\sum_{x=1}^{m} \alpha^{x}_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_1 \ldots \varpi_m)\frac{\partial f}{\partial \varpi_x} = \overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f,$$

sono trasformazioni che formano un gruppo con la composizione γ_{sn}.

Reciprocamente ogni gruppo di questa composizione conduce ad equazioni (6) *che per ogni sistema di funzioni* $\varpi_1 \ldots \varpi_m$ *definiscono un gruppo nelle* $x_1 \ldots x_n$.

Sia $N_{(s)}$ il numero delle derivate delle y rispetto alle x fino all'ordine s. Perchè le (6) definiscano effettivamente un gruppo è necessario che il gruppo formato dalle $\overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f$ abbia un numero di parametri non maggiore di $N_{(s)}$. Il problema di determinare tutti i gruppi in $x_1 \ldots x_n$ è dunque ricondotto a quest' altro:

Determinare per ogni valore di s tutti i gruppi che hanno la composizione γ_{sn} *ed un numero di parametri non maggiore di* $N_{(s)}$.

§ 3. Determinazione dei gruppi con la composizione γ_{sn}.

Il problema a cui siamo stati condotti nel paragrafo precedente si può, per ogni valore di s, risolvere coi metodi indicati dal Lie nel suo trattato sulla teoria dei gruppi finiti. È necessario ora considerare con più cura questo problema.

Siano due trasformazioni infinitesime qualunque, una nelle variabili $y_1 \ldots y_n$, e l'altra nelle variabili $x_1 \ldots x_n$:

$$Yf = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y)\frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Consideriamo accanto alle variabili $y_1 \ldots y_n\, x_1 \ldots x_n$ anche le variabili:

$$y_{i,\nu_1\ldots\nu_n} = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} y_i}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}, \qquad i = 1 \ldots n, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n \leq s,$$

ed imaginiamo estese le Yf ed Xf rispetto a queste nuove variabili. Se fosse, p. es., $s = 1$, si avrebbe:

$$\left.\begin{aligned} Y^{(1)}f &= \sum_i \eta_i(y)\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \eta_i}{\partial y_\nu}\left(\sum_\mu y_{\nu\mu}\frac{\partial f}{\partial y_{i\mu}}\right) \\ X^{(1)}f &= \sum_i \xi_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_i \sum_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\left(\sum_\mu y_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial y_{\mu i}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Siccome è:

$$(Y^{(1)} X^{(1)}) = (Y X)^{(1)},$$

e d'altra parte $(Y X) = 0$, così anche $(Y^{(1)} X^{(1)}) = 0$ qualunque siano le trasformazioni Yf ed Xf. Formiamoci la parentesi $(Y^{(1)} X^{(1)})$ con le espressioni (1) di $Y^{(1)}$ ed $X^{(1)}$ e scriviamo che questa parentesi deve essere identicamente eguale a zero qualunque siano le funzioni $\xi_1 \ldots \xi_n \; \eta_1 \ldots \eta_n$. Si trova allora che le trasformazioni:

$$\sum_\mu y_{\nu\mu} \frac{\partial f}{\partial y_{i\mu}}, \qquad \nu, \; i = 1 \ldots n, \tag{2}$$

sono tutte permutabili con le trasformazioni:

$$\sum_\mu y_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial y_{\mu i}}. \qquad \nu, \; i = 1 \ldots n,$$

ciò che, in questo caso speciale $s = 1$, è anche facile verificare.

Le trasformazioni (2) formano un gruppo semplicemente transitivo, come anche le trasformazioni (3). Si può riassumere tutto questo dicendo:

I gruppi (2) *e* (3) *sono semplicemente transitivi e reciproci tra loro.*

Essi sono, come è noto, i due gruppi parametrici del gruppo lineare omogeneo generale in n variabili.

Torniamo al caso di s qualunque. Sia:

$$\left.\begin{aligned} Y^{(s)} f &= \sum_i \eta_i (y) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_i \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \eta_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} (y) \, B_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f \\ X^{(s)} f &= \sum_i \xi_i (x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \xi_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} (x) \, A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f \end{aligned}\right\} \quad (\nu_1 + \cdots + \nu_n \leq s).$$

Un ragionamento analogo a quello fatto nel caso di $s = 1$ ci conduce a questo teorema:

Le trasformazioni:

$$B_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f, \qquad i = 1 \ldots n, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n \leq s,$$

formano, nelle $N_{(s)}$ *variabili* $y_{11} \ldots y_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} \ldots$ *un gruppo semplicemente transitivo.*

Anche le trasformazioni:

$$A_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f, \qquad i = 1 \ldots n, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n \leq s,$$

formano, nelle stesse variabili, un gruppo semplicemente transitivo.

I due gruppi sono reciproci tra loro.

Essi sono quindi simili tra loro; la loro comune composizione è quella che abbiamo chiamata γ_{sn}. Questi gruppi hanno una grande importanza, non abbastanza notata fino ad ora, nella teoria dei gruppi in n variabili e con equazioni di definizione dell'ordine s. Essi occorreranno più volte nel seguito di questo lavoro: io chiamerò per semplicità *gruppo* B il gruppo delle $B_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$, e *gruppo* A quello delle $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$.

Imaginiamo tre serie di variabili:

$$z_1 \ldots z_n; \qquad y_1 \ldots y_n; \qquad x_1 \ldots x_n,$$

e pensiamo le $y_1 \ldots y_n$ come funzioni delle $x_1 \ldots x_n$; le $z_1 \ldots z_n$ come funzioni delle $y_1 \ldots y_n$. Le $z_1 \ldots z_n$ sono allora funzioni implicite delle $x_1 \ldots x_n$: scriviamo le formule che esprimono le derivate delle z rispetto alle x in funzione delle derivate delle z rispetto alle y, e delle derivate delle y rispetto alle x:

Queste formole per le derivate prime, seconde,... s^{esime} sono:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial x_\mu} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu}, \qquad i, \mu = 1 \ldots n, \\ \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu} &= \sum_\rho \sum_\sigma \frac{\partial^2 z_i}{\partial y_\sigma \partial y_\rho} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_\nu} + \sum_\sigma \frac{\partial z_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial^2 y_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In queste equazioni consideriamo le derivate delle z rispetto alle x come variabili nuove, le derivate delle z rispetto alle y come antiche variabili, e le derivate delle y rispetto alle x come parametri; esse allora *rappresentano un gruppo* $N_{(s)}{}^{plo}$ *semplicemente transitivo, con la composizione* γ_{sn} *e precisamente il gruppo* A.

Se invece si considerano come parametri le derivate delle $z_1 \ldots z_n$ rispetto alle $y_1 \ldots y_n$ e come antiche variabili le derivate delle $y_1 \ldots y_n$ rispetto alle $x_1 \ldots x_n$, e come nuove variabili le derivate delle z rispetto alle x, si hanno nelle (3) le equazioni finite di un altro gruppo $N_{(s)}{}^{plo}$ semplicemente transitivo, con la composizione γ_{sn} e precisamente del gruppo B. Dunque:

Le equazioni (3) *sono le equazioni finite dei due gruppi* A, B.

Se di un gruppo transitivo si conoscono le equazioni finite, si possono trovare tutte le divisioni invarianti per quel gruppo senza integrazioni. Si possono dunque *senza integrazioni* trovare tutte le divisioni invarianti dello spazio $y_{11} \ldots y_{nn}\, y_{111} \ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots (\nu_1 + \cdots + \nu_n < s)$ pel gruppo A.

In particolare, essendo il gruppo A semplicemente transitivo, si può seguire questa via per determinare le sue divisioni invarianti, o, ciò che è lo stesso, i suoi gruppi isomorfi (*):

Si determinano anzitutto i sottogruppi di B. Sia:

$$B_1 f \ldots B_{N-m} f,$$

un sottogruppo $(N-m)^{plo}$, e siano:

$$\varpi_1(y_{11}\ldots)\ldots\varpi_m(y_{11}\ldots),$$

invarianti indipendenti di questo sottogruppo. Allora le trasformazioni:

$$\sum_{x=1}^{m} A_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_x)\frac{\partial f}{\partial \varpi_x} = \sum_{x=1}^{m} \alpha^x_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_1\ldots\varpi_m)\frac{\partial f}{\partial \varpi_x} = \overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f,$$

generano nelle m variabili $\varpi_1\ldots\varpi_m$ un gruppo transitivo, isomorfo al gruppo A, e quindi con la composizione γ_{sn}. Questo gruppo è $(N-l)^{plo}$ se nel gruppo $B_1\ldots B_{N-m}$ vi è un sottogruppo l^{plo}, ma nessun sottogruppo maggiore che sia invariante nel gruppo $B_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f$.

Esso dunque è allora ed allora soltanto N^{plo} e con la composizione γ_{sn} quando il gruppo $B_1\ldots B_{N-m}$ non è invariante e non contiene nessun sottogruppo invariante del gruppo B.

Con questo procedimento si ottengono tutti i gruppi transitivi con la composizione γ_{sn}. Dopo ciò, è facile ottenere tutti i gruppi intransitivi di quella composizione e con un numero di parametri $\leqq N$. Io non voglio però insistere su questo problema.

§ 4. Ricerca delle equazioni di definizione delle trasformazioni finite.

Sia proposto un qualunque gruppo Γ, con le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime. Il problema che ora voglio studiare è quello della ricerca delle equazioni di definizione delle trasformazioni finite.

Il teorema 1.° (§ 1) riduce questo problema alla integrazione di un sistema completo $N_{(s)}{}^{plo}$ in $N_{(s)}+m$ variabili, se m è il numero delle equazioni ed s il loro ordine. È dunque di questo problema di integrazione che io mi voglio occupare.

(*) *Theorie der Tr. gruppen.* Vol. I, teor. 78, pag. 439.

Le equazioni di definizione del gruppo Γ si possono *sempre* (teorema 3.°, § 2) portare alla forma:

$$\sum_i \sum_{\nu_1 \ldots \nu_n} \zeta_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(x)\, \alpha^x_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(\varpi_1 \ldots \varpi_m) = \sum_i \zeta_i \frac{\partial \varpi_x}{\partial x_i}, \tag{1}$$

in cui le $\varpi_1 \ldots \varpi_m$ sono determinate funzioni di $x_1 \ldots x_n$.

Ma anche ponendo per $\varpi_1 \ldots \varpi_m$ delle funzioni qualunque delle x, purchè queste funzioni soddisfino a certe relazioni:

$$\chi_x\left(\varpi_1 \ldots \varpi_m \frac{\partial \varpi_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0, \qquad x = 1, 2 \ldots,$$

le (1) definiscono un gruppo. Scrivendo dunque le equazioni del gruppo Γ sotto la forma (1) si viene ad associare ad esso una serie di gruppi nelle $x_1 \ldots x_n$. Ora, poichè il sistema completo da cui dipende la determinazione delle equazioni finite si forma, pel gruppo Γ, con le equazioni (1), e queste hanno tanta analogia con quelle dei gruppi associati a Γ, è naturale pensare che sia possibile con la integrazione di *un solo* sistema completo ad m soluzioni indipendenti avere le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di tutti i gruppi (1).

Così è infatti; ed io intendo dimostrarlo in questo paragrafo.

Le equazioni delle trasformazioni finite del gruppo Γ sono della forma:

$$I_k(y_1 \ldots y_n\, y_{11} \ldots) = \varpi_k(x_1 \ldots x_n), \qquad k = 1 \ldots m,$$

essendo $I_1 \ldots I_m$ le funzioni che si vogliono determinare. Queste funzioni hanno le due proprietà seguenti:

α) deve essere:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_k) = \alpha^k_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_1 \ldots I_m), \qquad k = 1 \ldots m,$$

β) e deve essere per la sostituzione:

$$y_i = x_i, \qquad y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu} = 0, \ldots$$

identicamente $I_k(y_1 \ldots y_n\, y_{11} \ldots) = \varpi_k(x_1 \ldots x_n)$.

Queste proprietà, come vedremo, definiscono completamente le funzioni I_k. Intanto proponiamoci di cercare il più generale sistema di funzioni $I_1 \ldots I_m$ che soddisfano alle condizioni α) β).

Poichè le $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ sono trasformazioni nelle sole derivate delle y rispetto alle x, e non nelle y stesse (che non contengono nemmeno nei coefficienti) si può dire che:

Si tratta di cercare il sistema più generale di funzioni $I_1 \ldots I_m$ *delle* $y_1 \ldots y_n \; y_{i\nu} \ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots$ *tali che sia:*

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_k) = \alpha^k_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_1 \ldots I_m), \qquad k = 1 \ldots m,$$

e che per la sostituzione:

$$y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu} = 0, \ldots \tag{2}$$

si riducano rispettivamente ad $\varpi_1(y) \ldots \varpi_m(y)$.

Sia:

$$I_k = I_k(y_1 \ldots y_n \; y_{11} \ldots), \tag{3}$$

uno dei sistemi cercati. Dire che le funzioni I_k soddisfano alle relazioni:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_k) = \alpha^k_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}(I_1 \ldots I_m), \tag{4}$$

equivale a dire che il *sistema di equazioni:*

$$I_k = I_k(y_1 \ldots y_n \; y_{11} \ldots), \ldots$$

tra le variabili $I_1 \ldots I_m \; y_1 \ldots y_n \; y_{11} \ldots$ deve essere *invariante* rispetto alle trasformazioni:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f + \overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = U_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f, \tag{5}$$

nelle variabili $I_1 \ldots I_m \; y_1 \ldots y_n \; y_{11} \ldots$

Col simbolo $\overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ rappresento, come ho sempre fatto fin qui, la trasformazione infinitesima $\sum_{x=1}^{m} \alpha^x_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \frac{\partial f}{\partial I_x}$.

Inversamente il sistema più generale di equazioni della forma (3) che ammetta le $U_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$, ci fa conoscere il sistema più generale di funzioni $I_1 \ldots I_m$ che soddisfano alle (4).

Le trasformazioni $U_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ formano evidentemente un gruppo con la composizione γ_{sn}; per avere di questo gruppo i sistemi di equazioni invarianti consideriamo la matrice formata con i coefficienti delle trasformazioni $U_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$. In questa matrice non si annullano certo tutti i determinanti di ordine $N_{(s)}$ e nemmeno si possono annullare in virtù di un sistema della forma (3), essendovi tra quei determinanti uno formato con le sole $y_{11} \ldots y_{nn} \ldots$ e non identicamente nullo. Ogni sistema della forma (3) rappresenta dunque relazioni tra m soluzioni indipendenti delle equazioni:

$$U_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = 0, \quad i = 1 \ldots n, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n \leqq s. \tag{6}$$

Siano:

$$\Phi_1(I_1 \dots I_m\, y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots), \dots \Phi_m(I_1 \dots y_{11} \dots),$$

m soluzioni indipendenti del sistema completo (6).

Poichè questo sistema completo è risolubile rispetto alle $\dfrac{\partial f}{\partial y_{i,\nu_1 \dots \nu_n}}$ le funzioni Φ saranno risolubili rispetto $I_1 \dots I_m$.

Se ne conclude che il sistema (3) più generale può avere la forma:

$$\Phi_1 = c_1 \dots \Phi_m = c_m, \tag{7}$$

essendo $c_1 \dots c_m$ costanti arbitrarie, od anche funzioni arbitrarie delle $y_1 \dots y_n$. Risolvendo il sistema (7) rispetto $I_1 \dots I_m$ si ha:

$$\left. \begin{array}{c} I_\mu = \Omega_\mu \left\{ c_1(y) \dots c_m(y)\, y_{11} \dots y_{nn}\, y_{111} \dots \right\} \\ \mu = 1 \dots m. \end{array} \right\} \tag{7'}$$

e queste sono le funzioni più generali delle $y_1 \dots y_n\, y_{11} \dots$ che soddisfano alle relazioni (4).

Se le funzioni $\Omega_1 \dots \Omega_m$ devono anche, per la sostituzione $y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}$ $y_{i\mu\nu} = 0, \dots,$ ridursi rispettivamente a $\varpi_1(y) \dots \varpi_m(y)$, basta supporre che le $\Phi_1 \dots \Phi_m$ delle relazioni (7) siano *soluzioni principali* delle equazioni (5) rispetto al sistema di valori $y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}\, y_{i\mu\nu} = 0, \dots$ Allora infatti le $\Phi_1 \dots \Phi_m$ si riducono per quel sistema di valori rispettivamente ad $I_1 \dots I_m$ e le relazioni (7) divengono dunque per quel sistema di valori:

$$I_1 = \varpi_1(y) \dots I_m = \varpi_m(y), \tag{8}$$

essendo le $\varpi_1(y) \dots \varpi_m(y)$ funzioni prese ad arbitrio delle $y_1 \dots y_n$.

Poichè ora il sistema (7′) è equivalente al sistema (7), anche esso per la sostituzione $y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}\, y_{i\mu\nu} = 0, \dots$ si deve ridurre alle identità (8).

Si ha dunque il teorema:

Teorema 5.° *Vi è un unico sistema di funzioni:*

$$I_1(y_1 \dots y_n\, y_{11} \dots y_{nn} \dots) \dots I_m(y_1 \dots y_n \dots),$$

che soddisfa alle relazioni:

$$A_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(I_k) = \alpha^k_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(I_1 \dots I_m),$$

e per la sostituzione:

$$y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}\; y_{i\mu\nu} = 0, \dots \tag{2}$$

si riduce al sistema di funzioni:

$$\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y).$$

essendo qui le ϖ *funzioni, date comunque, delle* $y_1\ldots y_n$.

Per trovare questo sistema di funzioni basta determinare le soluzioni principali del sistema completo:

$$A_{i,\nu_1\ldots\nu_n}f+\overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n}f=0, \tag{6}$$

rispetto al sistema di valori (2). *Se sono:*

$$\Phi_1\left\{I_1\ldots I_m\,y_{11}\ldots y_{nn}\ldots\right\}\ldots\Phi_m\left\{I_1\ldots I_m\,y_{11}\ldots\right\},$$

queste soluzioni, basta risolvere le equazioni:

$$\Phi_1=\varpi_1(y),\qquad \Phi_m=\varpi_m(y),$$

rispetto ad $I_1\ldots I_m$. *Le espressioni così ottenute:*

$$I_1=\Omega_1\left\{\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y)\,y_{11}\ldots\right\}\ldots I_m=\Omega_m\left\{\varpi_1(y)\ldots y_{11}\ldots\right\},$$

sono quelle cercate.

E possiamo aggiungere: le equazioni:

$$I_1=\varpi_1(x)\ldots I_m=\varpi_m(x), \tag{9}$$

sono le equazioni di definizione delle trasformazioni finite — del gruppo Γ se per $\varpi_1\ldots\varpi_m$ si pongono le funzioni caratteristiche di Γ nelle equazioni (1); — dei gruppi associati a Γ se si pongono successivamente tutti i sistemi di funzioni che soddisfano alle relazioni $\chi_x\left(\varpi_1\ldots\varpi_m\,\frac{\partial\varpi_1}{\partial x_1}\cdots\right)=0$. La ricerca delle equazioni (9) si è fatta dipendere così dalla integrazione di un sistema completo, il sistema (6), la cui forma dipende soltanto dalla natura delle funzioni $\alpha_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_1\ldots\varpi_m)$, non dalla natura delle funzioni $\varpi_1\ldots\varpi_m$.

Si è dimostrato quel che si voleva, e si è per di più trovato che le equazioni di definizione di ogni gruppo sono della forma:

$$\Omega_\mu\left\{\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y)\,y_{11}\ldots\right\}=\varpi_\mu(x)$$
$$\mu=1\ldots m.$$

Risultato già abbastanza importante perchè ci fa vedere in che maniera le funzioni $I_k(y_1\ldots y_n\,y_{11}\ldots)$ dipendono dalle variabili $y_1\ldots y_n$. Questo risultato sarà completato nei paragrafi che seguono.

§ 5. Sui gruppi intransitivi.

Prima di proseguire nello studio delle equazioni delle trasformazioni finite voglio occuparmi brevemente dei gruppi intransitivi per potere poi limitarmi allo studio di quelli transitivi.

Il gruppo γ_{sn} abbia le trasformazioni infinitesime:

$$\overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f = \sum_x \alpha^x_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_1\ldots\varpi_m)\frac{\partial f}{\partial \varpi_x}. \qquad (1)$$

Allora le equazioni dei corrispondenti gruppi in $x_1\ldots x_n$ sono:

$$\sum_i \sum_{\nu_1\ldots\nu_n} \zeta_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(x)\,\alpha^x_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varpi_1\ldots\varpi_m) = \sum_\mu \zeta_\mu \frac{\partial \varpi_x}{\partial x_\mu}. \qquad (2)$$

Un cambiamento delle variabili $\varpi_1\ldots\varpi_m$ trasforma il sistema (2) in un sistema equivalente e quindi la serie dei gruppi (2) in sè stessa.

Supponiamo ora che il gruppo γ_{sn} sia intransitivo, e siano:

$$\varphi_1(\varpi_1\ldots\varpi_m)\ldots\varphi_k(\varpi_1\ldots\varpi_m),$$

suoi invarianti indipendenti. Introduciamo in luogo delle antiche variabili $\varpi_1\ldots\varpi_m$ le nuove $\varphi_1\ldots\varphi_k\ \psi_1\ldots\psi_{m-k}$ essendo le ψ indipendenti tra loro e dalle φ.

Poichè $\overline{A}_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varphi_\nu) = 0$ il sistema (2) diventa della forma:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m \zeta_\mu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = 0, \qquad \nu = 1\ldots k, \\ \sum_i \sum_{\nu_1\ldots\nu_n} \zeta_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(x)\,\beta^\sigma_{i,\nu_1\ldots\nu_n}(\varphi_1\ldots\varphi_k\psi_1\ldots\psi_{m-k}) = \sum_{\mu=1}^n \zeta_\mu \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu}, \quad \sigma = 1\ldots m-h. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

si vede di qui che:

Teorema 6.° *Se il gruppo γ_{sn} è intransitivo ed ha k invarianti indipendenti:*

$$\varphi_1(\varpi_1\ldots\varpi_m)\ldots\varphi_k(\varpi_1\ldots\varpi_m),$$

ogni corrispondente gruppo nelle $x_1\ldots x_n$ è intransitivo ed ha k invarianti indipendenti. Pel gruppo definito dal sistema di funzioni $\varpi_1(x)\ldots\varpi_m(x)$ questi invarianti sono:

$$\varphi_1[\varpi_1(x)\ldots\varpi_m(x)]\ldots\varphi_k[\varpi_1(x)\ldots\varpi_m(x)].$$

Possiamo esprimere la stessa cosa in questo modo:

Se tra le equazioni finite del gruppo γ_{sn} ve ne sono k della forma:

$$\varphi_\nu(\varpi'_1 \dots \varpi'_m) = \varphi_\nu(\varpi_1 \dots \varpi_m), \qquad \nu = 1 \dots k,$$

tra le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di ogni gruppo corrispondente nelle $x_1 \dots x_n$ ve ne sono k della forma:

$$\varphi_\nu \left\{ \varpi_1(y) \dots \varpi_m(y) \right\} = \varphi_\nu \left\{ \varpi_1(x) \dots \varpi_m(x) \right\}, \qquad \nu = 1 \dots k.$$

Esempio.

Le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} + A_1(\alpha_1 \dots \alpha_m) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i} + A_m(\alpha_1 \dots \alpha_m) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

qualunque siano le funzioni $\alpha_1 \dots \alpha_m$ delle x, e le funzioni $A_1 \dots A_m$ delle α, purchè sia $m < n$, definiscono un gruppo infinito nelle $x_1 \dots x_n$. Il corrispondente gruppo γ_{sn} è semplicemente infinito; la sua trasformazione infinitesima è:

$$A f = A_1(\alpha_1 \dots \alpha_m) \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \dots + A_m(\alpha_1 \dots \alpha_m) \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}.$$

Sia:

$$\bar{\alpha}_x = \varphi_x(\alpha_1 \dots \alpha_m), \qquad x = 1 \dots m, \tag{5}$$

una trasformazione delle α che conduce Af alla forma canonica $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_m}$.

Allora:

$$A(\varphi_1) = 0 \dots A(\varphi_{m-1}) = 0, \qquad A(\varphi_m) = 1.$$

Per la sostituzione (5), le (4) diventano:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\mu} = 0, \qquad i = 1 \dots m-1 \\ \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\mu \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0. \end{array}\right\} \tag{4'}$$

Le prime $m-1$ di queste equazioni ci dicono che ogni gruppo (4) lascia invarianti $m-1$ funzioni. L'ultima delle (4') ci dice che ogni gruppo (4) lascia invariante un integrale n-plo.

Più semplicemente si può dire:

Ognuno dei gruppi (4) *è caratterizzato dal lasciare invarianti m integrali n-^{pli}.*

La determinazione di questi integrali e quindi delle equazioni di definizione delle trasformazioni finite di ogni gruppo (4) è un problema *equivalente* a quello della riduzione di Af alla forma canonica $\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$.

§ 6. Proprietà delle equazioni di definizione delle trasformazioni finite. Caso speciale.

Considero oramai soli gruppi γ_{sn} transitivi: essi hanno un numero di parametri non maggiore di $N_{(s)}$; mi limiterò in questo paragrafo a considerare quei gruppi γ_{sn} che hanno precisamente $N_{(s)}$ parametri.

Siano date le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo Γ in $x_1 \ldots x_n$; il gruppo γ_{sn} corrispondente sia in m variabili, $I_1 \ldots I_m$ ed a $N_{(s)}$ parametri; le sue trasformazioni infinitesime si indicheranno, come al solito, con $\overline{A}_{i, \nu_1 \ldots \nu_n} f$.

Ricordo il seguente teorema della teoria dei gruppi finiti (*).

Teorema 7.° *Se r trasformazioni infinitesime indipendenti:*

$$X'_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x'_1 \ldots x'_n) \frac{\partial f}{\partial x'_i}, \qquad k = 1 \ldots r,$$

nelle n variabili $x'_1 \ldots x'_n$ soddisfano a relazioni della forma:

$$(X'_k X'_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} X'_s.$$

Se poi r trasformazioni infinitesime nelle variabili $a_1 \ldots a_r$:

$$A_k = \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{k\mu}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu}, \qquad k = 1 \ldots r,$$

soddisfano alle:

$$(A_k A_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} A_s,$$

(*) *Theorie der Tr. gruppen.* Vol. I, pag. 154, teor. 23.

e non si annulla identicamente il determinante delle funzioni $\alpha_{k\mu}$, *si formi il sistema completo* r-*plo*:

$$X'_k f + A_k f = 0, \qquad k = 1 \ldots r,$$

e se ne determinino le soluzioni principali rispetto ad un certo sistema di valori $a_k = a_k^0$. *Se sono* $x_i = F_i(x'_1 \ldots x'_n\, a_1 \ldots a_r)$ *queste soluzioni principali le equazioni che si hanno risolvendole rispetto alle* x', *cioè le*:

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n\, a_1 \ldots a_r),$$

rappresentano un gruppo continuo r-*plo*. *Questo gruppo contiene la trasformazione identica, ed è generàto dalle trasformazioni infinitesime*:

$$\lambda_1 X'_1 f + \cdots + \lambda_r X'_r f.$$

Poniamo nel teorema precedente: $r = N_{(s)}$, $n = m$, e prendiamo:
Come variabili $a_1 \ldots a_r$ le N variabili $y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}$;
Come variabili $x'_1 \ldots x'_n$ le m variabili $I_1 \ldots I_m$;
Come trasformazioni $A_k f$ le N trasformazioni $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$;
Come trasformazioni $X'_k f$ le N trasformazioni $\overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$;
e finalmente come sistema di valori $a_k = a_k^0$, il sistema di valori:

$$y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu} = 0, \ldots \tag{1}$$

per le $y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n}$. Se sono:

$$\Phi_\mu(I_1 \ldots I_m\, y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots), \qquad \mu = 1 \ldots m,$$

le soluzioni principali del sistema completo:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f + \overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = 0,$$

rispetto al sistema di valori (1), e se le $I'_\mu = \Phi_\mu(I\, y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n})$, risolute rispetto $I_1 \ldots I_m$, danno:

$$\left.\begin{array}{c} I_\mu = f_\mu(I'_1 \ldots I'_m \ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots) \\ \mu = 1 \ldots m, \end{array}\right\} \tag{2}$$

le (2) sono le equazioni finite del gruppo γ_{sn}; il cui primo gruppo parametrico è il gruppo $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$. I parametri della trasformazione identica sono dati dalle (1).

Se nelle (2) si pone $I_\mu = \varpi_\mu(x)$ $I'_\mu = \varpi_\mu(y)$ $(\mu = 1 \ldots m)$, e si pensa al modo tenuto nel § 4 per formare le equazioni di definizione delle trasformazioni finite pei gruppi corrispondenti al gruppo γ_{sn}, si vede che le:

$$\varpi_\mu(x) = f_\mu\,[\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y)\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots],$$

sono, per ogni sistema di funzioni $\varpi_1(x)\ldots\varpi_m(x)$ le equazioni delle trasformazioni finite di un gruppo in $x_1\ldots x_n$.

Il problema di determinare queste equazioni per un gruppo dato in $x_1\ldots x_n$ coincide dunque col problema di trovare le equazioni finite del corrispondente gruppo γ_{sn} in maniera però che il primo gruppo parametrico sia precisamente il gruppo A.

Inversamente, sia:

$$z'_\lambda = f_\lambda(z_1\ldots z_m,\ a_1\ldots a_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots a_N), \qquad \lambda = 1\ldots m, \tag{3}$$

un gruppo N^{plo} in m variabili, con la composizione γ_{sn}.

È sempre possibile determinare le $a_{i,\nu_1\ldots\nu_n}$ in funzione delle $y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}$:

$$a_{i',\nu'_1\ldots\nu'_n} = \sigma_{i',\nu'_1\ldots\nu'_n}(\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots), \tag{4}$$

in modo che il primo gruppo parametrico sia il gruppo A.

Facendo le sostituzioni (4) nelle (3), e ponendo in luogo di $z_1\ldots z_m$ rispettivamente $\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y)$, in luogo di $z'_1\ldots z'_m$ rispettivamente $\varpi_1(x)\ldots\varpi_m(x)$ si ottenga:

$$\varpi_\mu(x) = F_\mu\left\{\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y)\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots\right\}, \qquad \mu = 1\ldots m. \tag{5}$$

Queste definiscono un gruppo per ogni sistema di funzioni $\varpi_1\ldots\varpi_m$.

Scriviamo infatti accanto alle (5) le:

$$\varpi_\mu(y) = F_\mu\left\{\varpi_1(z)\ldots\varpi_m(z)\ldots\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} z_i}{\partial y_1^{\nu_1}\ldots\partial y_n^{\nu_n}}\ldots\right\}, \qquad \mu = 1\ldots m. \tag{5'}$$

Combinando queste ultime equazioni con le (5), e ricordando che le equazioni finite del gruppo A sono le (3) del § 3 in cui si considerino le derivate delle z rispetto alle y come variabili, e quelle delle y rispetto alle x come parametri, si trova:

$$\varpi_\mu(x) = F_\mu\left\{\varpi_1(z)\ldots\varpi_m(z)\ldots\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} z_i}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\ldots\right\}, \qquad \mu = 1\ldots m. \tag{5''}$$

La schiera delle trasformazioni definite dal sistema (5) è dunque tale che insieme con le:

$$y_i = F_i(x_1 \dots x_n), \qquad i = 1 \dots n,$$
$$z_i = \Phi_i(y_1 \dots y_n), \qquad i = 1 \dots n,$$

anche la trasformazione:

$$z_i = \Phi_i[F_1(x) \dots F_n(x)], \qquad i = 1 \dots n,$$

appartiene alla schiera. Si ha dunque il teorema:

Teorema 8.° *Se un gruppo* Γ *nelle variabili* $x_1 \dots x_n$ *è tale che il suo gruppo* γ_{sn} *abbia* $N_{(s)}$ *parametri, le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di* Γ *sono della forma:*

$$\varpi_\mu(x) = f_\mu \left\{ \varpi_1(y) \dots \varpi_m(y) \dots y_{i,\nu_1 \dots \nu_n} \dots \right\},$$
$$\mu = 1 \dots m,$$

in cui le equazioni $z'_\mu = f_\mu(z_1 \dots z_m \dots y_{i,\nu_1 \dots \nu_n} \dots)$ *sono le equazioni finite del gruppo* γ_{sn} *associato a* Γ.

Inversamente, se $z'_\mu = f_\mu(z_1 \dots z_m \dots a_{i,\nu_1 \dots \nu_n} \dots)$ *sono le equazioni finite di un gruppo* γ_{sn} *ad* $N_{(s)}$ *parametri, e se è:*

$$y_{i,\nu_1 \dots \nu_n} = \rho_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(\dots a_{i',\nu'_1 \dots \nu'_n} \dots),$$

la sostituzione che conduce il primo gruppo parametrico nel gruppo A; sostituzione, la cui inversa sia:

$$a_{i',\nu'_1 \dots \nu'_n} = \sigma_{i',\nu'_1 \dots \nu'_n}(\dots y_{i,\nu_1 \dots \nu_n} \dots),$$

le equazioni:

$$\varpi_\mu(x) = f_\mu \left\{ \varpi_1(y) \dots \varpi_m(y) \dots \sigma_{i',\nu'_1 \dots \nu'_n}(\dots y_{i,\nu_1 \dots \nu_n} \dots) \dots \right\}, \quad \mu = 1 \dots m, \tag{1}$$

definiscono, per ogni sistema di funzioni $\varpi_1 \dots \varpi_m$, *un gruppo in n variabili.*

Perchè dalle (1) con derivazioni ed eliminazioni non si possano ottenere nuove equazioni di ordine non maggiore di s, è necessario e sufficiente che le funzioni $\varpi_1 \dots \varpi_m$ soddisfino a certe relazioni:

$$\chi_x\left(\varpi_1 \dots \varpi_m \frac{\partial \varpi_1}{\partial x_1} \dots\right) = 0, \qquad x = 1, 2 \dots,$$

queste sono le stesse che per le equazioni delle trasformazioni infinitesime dovendo il numero di queste essere eguale al numero delle (1).

Sarebbe facile mostrare che le (1) si riducono ad identità per la sostituzione:

$$y_i = x_i, \qquad y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu} = 0, \ldots$$

Basta infatti osservare che le equazioni finite del gruppo parametrico si riducono ad identità per quella sostituzione.

Esempi. Sia $s = 1$, allora $N_{(s)} = n^2$.

I.) Come gruppo γ_{sn} prendiamo quello definito dalle trasformazioni:

$$A_{ix} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}, \tag{1'}$$

a questa forma del gruppo lineare omogeneo, corrispondono i gruppi in $x_1 \ldots x_n$, le cui trasformazioni infinitesime sono definite dalle equazioni:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \xi_i} = 0, \qquad \nu = 1 \ldots n. \tag{2'}$$

Le trasformazioni finite di questi gruppi hanno le equazioni di definizione:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) \frac{\partial y_i}{\partial x_\mu} = \alpha_\mu(x), \qquad \mu = 1 \ldots n, \tag{3'}$$

in cui le α sono le stesse funzioni che nelle (2').

Per ogni sistema di funzioni α le (3') [o, ciò che è lo stesso, le (2')] definiscono un gruppo. Tutti questi gruppi hanno la proprietà di lasciare invariante una espressione di Pfaff; cioè la:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, d\, x_i.$$

II.) Come gruppo γ_{sn} prendiamo ora invece quello:

$$A_{ix} = \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \tag{1''}$$

i gruppi corrispondenti in $x_1 \ldots x_n$ soddisfano con le loro trasformazioni infinitesime ad un sistema della forma:

$$\sum_{x=1}^{n} \alpha_x \frac{\partial \xi_i}{\partial x_x} - \sum_{x=1}^{n} \xi_x \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_x} = 0, \qquad i = 1 \ldots n. \tag{2''}$$

Le equazioni di definizione delle trasformazioni finite sono:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y_{i\lambda}} = \alpha_\lambda(x), \qquad \lambda = 1 \ldots n, \tag{3''}$$

essendo:

$$\Omega = \sum \pm y_{11} \ldots y_{nn}, \qquad y_{ix} = \frac{\partial y_i}{\partial x_x}.$$

I gruppi (3″) sono caratterizzati dal lasciare invariante il sistema di $n-1$ equazioni di Pfaff:

$$d x_1 : d x_2 : \ldots : d x_n = \alpha_1 (x) : \alpha_2 (x) : \ldots : \alpha_n (x),$$

o ciò che è lo stesso dal lasciare invariante la trasformazione infinitesima $A f = \sum_i \alpha_i (x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$, per modo che se $X f$ è la trasformazione infinitesima generica di uno dei gruppi (3″), si ha $(X A) = 0$.

III.) Finalmente prendiamo come gruppo γ_{sn} il gruppo:

$$Z_{ix} f = - \varepsilon_{in} z_x \sum_{\tau=1}^{n-1} z_\tau \frac{\partial f}{\partial z_\tau} + z_x \frac{\partial f}{\partial z_i} + \varepsilon_{ix} v \frac{\partial f}{\partial v}, \tag{1‴}$$

in cui conveniamo che sia:

$$\varepsilon_{ix} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq x, \qquad \varepsilon_{ii} = 1, \qquad z_n = 1.$$

A questo gruppo γ_{sn} corrispondono i gruppi in $x_1 \ldots x_n$ definiti dalle:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ \displaystyle\sum_{x=1}^{n} z_x \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_x} - z_\sigma \sum_{x=1}^{n} z_x \frac{\partial \xi_n}{\partial x_x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial z_\sigma}{\partial x_i}, \quad \sigma = 1 \ldots n-1, \end{array}\right\} \tag{2‴}$$

di queste equazioni la prima definisce già per sè stessa un gruppo; le rimanenti $n-1$ definiscono per sè sole un altro gruppo.

Se di questi due gruppi cerchiamo i due corrispondenti gruppi γ_{sn} si troverebbe che essi sono rispettivamente ad uno, e ad n^2-1 parametri. Le equazioni delle trasformazioni finite di queste due sorta di gruppi si troveranno nel paragrafo seguente.

§ 7. Caso generale.

Mi propongo di estendere le considerazioni del paragrafo precedente anche ai gruppi in n variabili, il cui gruppo γ_{sn} ha un numero di parametri inferiore ad $N_{(s)}$.

Premetto alcune considerazioni su gruppi finiti.

Sia un gruppo semplicemente transitivo, in r variabili: $x_1 \dots x_r$:

$$X_1 \dots X_r,$$

il suo reciproco sia il gruppo $Y_1 \dots Y_r$.

Sia $A_1 \dots A_r$ un gruppo transitivo isomorfo al gruppo X, in m variabili $\alpha_1 \dots \alpha_m$; esiste allora nel gruppo $Y_1 \dots Y_r$ un sottogruppo $(r-m)^{plo}$:

$$\overline{Y}_1 \dots \overline{Y}_{r-m},$$

ed un sistema di invarianti indipendenti $\alpha_1(x) \dots \alpha_m(x)$ di questo gruppo, tale che le trasformazioni:

$$\sum_{\mu=1}^{m} X_k(\alpha_\mu) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} \varpi_{k\mu}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu}, \qquad x = 1 \dots r,$$

sono appunto le $A_1 \dots A_r$ proposte.

Se il gruppo $A_1 \dots A_r$ è $(r-l)^{plo}$, e sono $A_1 \dots A_{r-l}$ trasformazioni indipendenti, esiste nel gruppo $\overline{Y}_1 \dots \overline{Y}_{r-m}$ un sottogruppo l^{plo}, invariante nel gruppo $Y_1 \dots Y_r$. Si può determinare un sistema di invarianti indipendenti di questo sottogruppo l^{plo}:

$$\varphi_1 \dots \varphi_{r-l},$$

tale che le:

$$\sum_{\nu=1}^{r-l} X_k(\varphi_\nu) \frac{\partial f}{\partial \varphi_\nu} = U_k f, \qquad k = 1 \dots r-l,$$

siano trasformazioni nelle $\varphi_1 \dots \varphi_{r-l}$, indipendenti tra loro: allora il gruppo $U_1 \dots U_{r-l}$ è semplicemente transitivo. Voglio dimostrare che esso è oloedrico isomorfo al gruppo $A_1 \dots A_{r-l}$.

Si sa intanto che esistono relazioni:

$$\left.\begin{aligned} (A_i A_x) &= \sum_{s=1}^{r} c_{ixs} A_s \\ (U_i U_x) &= \sum_{s=1}^{r} c_{ixs} U_s \end{aligned}\right\} \qquad i,\ x = 1 \dots r,$$

essendo tanto il gruppo $A_1 \dots A_r$, quanto il gruppo $U_1 \dots U_r$ isomorfi al gruppo $X_1 \dots X_r$. Basterà allora dimostrare che se le $A_{r-l+1} \dots A_r$ si esprimono in funzione delle $A_1 \dots A_{r-l}$ nel modo seguente:

$$A_{r-l+\mu} = \sum_{\sigma=1}^{r-l} d_{\mu\sigma} A_\sigma, \tag{1}$$

anche tra le $U_1 \dots U_r$ si hanno le relazioni:

$$U_{r-l+\mu} = \sum_{\sigma=1}^{r-l} d_{\mu\sigma} U_\sigma. \tag{2}$$

Perciò basta osservare che le $\varphi_1 \dots \varphi_{r-l}$ sono funzioni delle $\alpha_1 \dots \alpha_m$. Le relazioni (1) si scompongono nelle $m \cdot l$ seguenti:

$$X_{r-l+\mu}(\alpha_x) = \sum_\sigma d_{\mu\sigma} X_\sigma(\alpha_x), \qquad x = 1 \dots m, \qquad \mu = 1 \dots l,$$

dalle quali si deducono le:

$$\sum_x \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha_x} X_{r-l+\mu}(\alpha_x) = \sum_\sigma d_{\mu\sigma} \sum_x \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha_x} X_\sigma(\alpha_x),$$

cioè le:

$$X_{r-l+\mu}(\varphi_\nu) = \sum_\sigma d_{\mu\sigma} X_\sigma(\varphi_\nu), \qquad \nu = 1 \dots r-l, \qquad \mu = 1 \dots l,$$

c. d. d.

Scriviamo ora le equazioni:

$$U_k f + A_k f = 0, \qquad k = 1 \dots r-l,$$

esse formano un sistema completo $(r-l)^{plo}$ nelle $r-l+m$ variabili:

$$\alpha_1 \dots \alpha_m \; \varphi_1 \dots \varphi_{r-l}.$$

Siano:

$$\psi_\nu(\varphi_1 \dots \varphi_{r-l} \; \alpha_1 \dots \alpha_m), \qquad \nu = 1 \dots m, \tag{3}$$

le soluzioni principali di quel sistema completo rispetto al sistema di valori $\varphi_1 = \varphi_1^0 \dots \varphi_{r-l}^0$: allora:

$$\psi_\nu(\varphi_1^0 \dots \varphi_{r-l}^0 \; \alpha_1 \dots \alpha_m) = \alpha_\nu.$$

Nelle (3) poniamo in luogo delle $\varphi_1 \dots \varphi_{r-l}$ le loro espressioni nelle $x_1 \dots x_r$: le ψ diventano funzioni indipendenti delle $x_1 \dots x_r \; \alpha_1 \dots \alpha_m$: esse sono soluzioni del sistema completo:

$$X_k f + A_k f = 0, \qquad k = 1 \dots r.$$

Se si volessero dunque determinare le soluzioni principali di questo sistema pei valori $x_1 = x_1^0 \dots x_r = x_r^0$ basterebbe prima calcolare i valori delle $\varphi_1 \dots \varphi_{r-l}$ per $x_1 = x_1^0 \dots x_r = x_r^0$ e, detti $\varphi_1^0 \dots \varphi_{r-l}^0$ i valori così trovati, determinare le soluzioni principali del sistema $U_k + A_k = 0$ rispetto a:

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 \dots \varphi_{r-l} = \varphi_{r-l}^0.$$

Premesso questo, supponiamo di avere le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo in $x_1 \dots x_n$; e da esse si sia riconosciuto che il gruppo $\overline{A}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f$ corrispondente in m variabili $\alpha_1 \dots \alpha_m$ è $\left\{N_{(s)} - l\right\}^{plo}$. Allora al gruppo $\overline{A}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f$ corrisponde un sottogruppo $(N-m)^{plo}$ di B, che contiene un sottogruppo l^{plo} invariante: questo ultimo gruppo si indichi con γ.

Siano $\overline{C}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f$ $N-l$ indipendenti tra le trasformazioni $\overline{A}$. Si è visto che si può determinare un sistema di invarianti indipendenti $\varphi_1 \dots \varphi_{N-l}$ del gruppo γ tali che le $N-l$ trasformazioni $C_{i,\nu_1\dots\nu_n} f$ [indico con questo simbolo le trasformazioni formate con le A, come le $\overline{C}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f$ sono formate con le $\overline{A}$], formino un gruppo $(N-l)^{plo}$ semplicemente transitivo nelle variabili $\varphi_1 \dots \varphi_{N-l}$.

Si è anche veduto che il gruppo delle Cf è isomorfo al gruppo delle $\overline{C}f$: per riferire i due gruppi in modo isomorfo basta far corrispondere tra loro le trasformazioni con li stessi indici.

Per trovare le equazioni delle trasformazioni finite del gruppo proposto, si considerava, nel § 4, il sistema completo:

$$\overline{A}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f + A_{i,\nu_1\dots\nu_n} f = 0,$$

e se ne determinavano le soluzioni principali rispetto ad un certo sistema di valori per le $y_{i,\nu_1\dots\nu_n}$. Si sa ora che si può invece tenere quest' altra via:

Si calcolano i valori $\varphi_1^0 \dots \varphi_{N-l}^0$ delle $\varphi_1 \dots \varphi_{N-l}$ per:

$$y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad y_{i\mu\nu} = 0, \dots;$$

si determinano le soluzioni principali del sistema completo:

$$C_{i,\nu_1\dots\nu_n} f + \overline{C}_{i,\nu_1\dots\nu_n} f = 0,$$

rispetto al sistema di valori $\varphi = \varphi^0$. Se sono $\Phi_\mu(\varphi_1 \dots \varphi_{N-l}\ \alpha_1 \dots \alpha_m)$ queste soluzioni, si risolvono le:

$$\alpha'_\mu = \Phi_\mu(\varphi_1 \dots \varphi_{N-l}\ \alpha_1 \dots \alpha_m), \qquad \mu = 1 \dots m,$$

rispetto $\alpha_1 \dots \alpha_m$; se così si ottiene:

$$\alpha_\mu = f_\mu(\alpha'_1 \dots \alpha'_m\ \varphi_1 \dots \varphi_{N-l}), \qquad \mu = 1 \dots m, \tag{4}$$

le equazioni:

$$\left.\begin{array}{c}\varpi_\mu(x) = f_\mu\left\{\varpi_1(y)\ldots\varpi_\mu(y)\,\varphi_1(\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots)\ldots\varphi_{N-l}(\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots)\right\} \\ \mu = 1\ldots m,\end{array}\right\} \quad (5)$$

definiscono per un certo sistema di funzioni ϖ il gruppo da cui eravamo partiti, e per ogni altro sistema di funzioni ϖ ancora un gruppo.

Applicando il teorema 7.° del § 6 si vede che le (4) sono le equazioni finite del gruppo $A_{i,\nu_1\ldots\nu_n} f$.

Dunque:

Teorema 9.° *Per ogni gruppo nelle variabili $x_1\ldots x_n$ le equazioni di definizione delle trasformazioni finite si hanno dalle equazioni finite del corrispondente gruppo γ_{sn}.*

$$z'_\mu = f_\mu(z_1\ldots z_m\, a_1\ldots a_{N-l}), \qquad \mu = 1\ldots m,$$

ponendo per le $z_1\ldots z_m$ funzioni determinate delle $y_1\ldots y_n$, per z'_μ le stesse funzioni delle $x_1\ldots x_n$ e per $a_1\ldots a_{N-l}$ un sistema di invarianti, convenientemente determinato, di un sottogruppo invariante l^{plo} in B.

Questo teorema non è stato dimostrato che per gruppi il cui corrispondente γ_{sn} è transitivo. Se il gruppo γ_{sn} è intransitivo anche il gruppo nelle $x_1\ldots x_n$ lo è certamente: si può dunque dire che il teorema precedente vale per tutti i gruppi transitivi in $x_1\ldots x_n$.

Le considerazioni del § 5 fanno intravvedere che un teorema analogo sussiste anche pei gruppi intransitivi.

Voglio ora dimostrare che:

Teorema 10.° *Se sono:*

$$z'_\mu = f_\mu(z_1\ldots z_m\, a_1\ldots a_{N-l}), \qquad \mu = 1\ldots m, \quad (6)$$

le equazioni finite di un qualunque gruppo transitivo con la composizione γ_{sn}, si possono determinare tali funzioni:

$$a_x = a_x(\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots),$$

che le equazioni:

$$\left.\begin{array}{c}\varpi_\mu(x) = f_\mu\left\{\varpi_1(y)\ldots\varpi_m(y),\ldots a_x(\ldots y_{i,\nu_1\ldots\nu_n}\ldots)\ldots\right\} \\ \mu = 1\ldots m,\end{array}\right\} \quad (7)$$

determinino per ogni sistema di funzioni $\varpi_1\ldots\varpi_m$ un gruppo in $x_1\ldots x_n$.

Siano:

$$\overline{C}_1 f \ldots \overline{C}_{N-l} f,$$

trasformazioni infinitesime indipendenti del gruppo (6), e siano:

$$C_1 f \ldots C_{N-l} f,$$

trasformazioni indipendenti del primo gruppo parametrico: facendo corrispondere ad una $\overline{C} f$ la $C f$ con lo stesso indice i due gruppi siano riferiti tra loro in modo isomorfo. Se facendo corrispondere:

$$\overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = \sum_{\sigma=1}^{N-l} d_{i,\nu_1 \ldots \nu_n, \sigma} \overline{C}_\sigma f,$$

ad $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ i due gruppi $\overline{C}$ ed A vengono ad essere riferiti in modo isomorfo, anche facendo corrispondere:

$$\Gamma_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = \sum_{\sigma=1}^{N-l} d_{i,\nu_1 \ldots \nu_n, \sigma} C_\sigma f,$$

ad $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ i due gruppi C ed A vengono ad essere riferiti in modo isomorfo.

Supponiamo che sia:

$$\Gamma_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = \sum_{x=1}^{N-l} \alpha^x_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} (a_1 \ldots a_{N-l}) \frac{\partial f}{\partial a_x}.$$

Vi è allora uno ed un solo sistema di funzioni:

$$a_x = a_x (\ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots), \qquad x = 1 \ldots N-l, \tag{8}$$

tali che sia:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} (a_x) = \alpha^x_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} (a_1 \ldots a_{N-l}),$$

e per:

$$\gamma_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \qquad \gamma_{i\mu\nu} = 0 \ldots,$$

assumano i valori $a_1 = a^0_1 \ldots a_{N-l} = a^0_{N-l}$ (*).

Le funzioni (8) così determinate hanno anche la seguente proprietà: determinate le soluzioni principali di:

$$C_\sigma + \overline{C}_\sigma = 0,$$

(*) Se il gruppo $\overline{C}_1 f \ldots \overline{C}_{N-l} f$ è riferibile in modo isomorfo a sè stesso, senza che con un cambiamento di variabili si possa passare dall'una forma all'altra, applicando ad ogni forma il ragionamento precedente si ottengono *due* sistemi di funzioni $a_x (\ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots)$. Vedi gli esempi 2.° e 3.° alla fine del paragrafo.

rispetto ad $a_1 = a_1^0 \ldots a_{N-l} = a_{N-l}^0$, e fatte le sostituzioni (8) nelle funzioni così trovate si hanno le soluzioni principali di:

$$A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f + \overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = 0\,,$$

rispetto ad $y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}\ y_{i\mu\nu} = 0, \ldots$

Come sistema di valori $a_1 = a_1^0 \ldots a_{N-l} = a_{N-l}^0$ prendiamo quello cui corrisponde nel gruppo (6) la trasformazione identica. Ricordando allora in che modo si ottengono le (6) (teorema 7.° § 6), si vede che le equazioni (7) si ottengono determinando le soluzioni principali $\Phi_\mu(\alpha_1 \ldots \alpha_m \ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots)$ di $A_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f + \overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f = 0$ rispetto ad $y_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}, \ldots$, ponendo $\alpha'_\mu = \Phi_\mu(\alpha_1 \ldots)$ e risolvendo queste equazioni rispetto $\alpha_1 \ldots \alpha_m$:

$$\alpha_\mu = f_\mu(\alpha'_1 \ldots \alpha'_m \ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots)\,,$$

e finalmente ponendo per $\alpha'_1 \ldots \alpha'_m$ funzioni arbitrarie delle y, e per $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ rispettivamente le stesse funzioni delle x. Ma questa via è appunto quella per ottenere le equazioni delle trasformazioni finite dei gruppi corrispondenti al gruppo $\overline{A}_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$, indicata nel § 4.

Dunque le (7) sono le equazioni delle trasformazioni finite pei gruppi in $x_1 \ldots x_n$ corrispondenti al gruppo (6) c. d. d.

Il problema di determinare le funzioni $a_x(\ldots y_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} \ldots)$ si è fatto dipendere dalla integrazione di un sistema completo. Sarebbe possibile mostrare che questo problema si può ridurre al problema di determinare le equazioni finite del gruppo $\Gamma_{i,\nu_1 \ldots \nu_n} f$ e a delle quadrature: ma la dimostrazione che ho trovata è forse troppo lunga.

Esempi. Supporrò $s = 1$. Allora la composizione γ_{sn} è quella del gruppo lineare omogeneo generale.

In questo gruppo, come è ben noto, vi sono due soli sottogruppi invarianti; il numero l può assumere quindi due soli valori (oltre il valore $l = 0$); precisamente i valori $l = 1$, $l = n^2 - 1$.

Se, per ogni valore di l, prendiamo il *minimo* valore possibile per m, si trovano in tutto tre categorie di gruppi in $x_1 \ldots x_n$. Queste tre categorie furono, appunto in questo modo, trovate da Engel nel suo lavoro già citato (Math. Ann. Bd. 27).

Io riporterò le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime, ponendovi accanto *quelle delle trasformazioni finite.* Basta por mente alla forma di queste ultime per vedere illustrato il teor. 9.°

1.ª categoria.

I gruppi di questa categoria sono i primi che si incontrano nello spazio $x_1 \dots x_n$.

Sono definiti dalla *unica* equazione:

$$\alpha(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0, \tag{1'}$$

le equazioni finite sono definite dalla:

$$\alpha(y)\,\Omega = \alpha(x), \qquad \text{posto } \Omega = \sum \pm y_{11} \dots y_{nn}, \tag{2'}$$

i gruppi (1') sono dunque generati dalle trasformazioni che lasciano invariante un integrale n^{plo}.

Le equazioni (2') scritte sotto la forma $z\,a = z'$ ci mostrano che il gruppo γ_{sn} corrispondente è un gruppo ∞^1 della varietà ad una dimensione.

2.ª categoria.

È formata dai gruppi che lasciano invariante una equazione della forma $\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$: sono definiti dalle:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} + \sum_{x=1}^{n-1} \alpha_x \frac{\partial \xi_i}{\partial x_x} - \alpha_i \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_{x=1}^{n-1} \alpha_x \frac{\partial \xi_n}{\partial x_x} \right) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu}\, \xi_\nu = 0, \\ &\qquad\qquad i = 1 \dots n-1, \end{aligned}\right\} \tag{1''}$$

equazioni che si possono rappresentare simbolicamente in un modo molto semplice. Basta porre $A f = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $X f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Allora le (1'') ci dicono che deve essere:

$$(A\,X) = \lambda\, A f,$$

essendo $\lambda(x)$ una funzione indeterminata delle $x_1 \dots x_n$.

Le equazioni delle trasformazioni finite sono:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_\mu(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y)\,\Omega_{i\mu} + \Omega_{n\mu}}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y)\,\Omega_{in} + \Omega_{nn}}, \qquad \text{posto } \Omega_{i\mu} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y_{i\mu}}, \\ &\qquad\qquad \mu = 1 \dots n-1, \end{aligned}\right\} \tag{2''}$$

il gruppo γ_{sn} corrispondente si presenta sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_{in} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, & A_{ni} &= -\alpha_i \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \\ A_{ix} &= \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, & A_{nn} &= -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \end{aligned}\right\} \quad i,\ x = 1 \dots n-1.$$

3.ª categoria.

È formata dai gruppi che lasciano invariante un sistema completo della forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1 \dots n-1.$$

Le equazioni delle trasformazioni infinitesime sono:

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} + \sum_{x=1}^{n-1} \alpha_x \frac{\partial \xi_x}{\partial x_i} - \alpha_i \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_{x=1}^{n-1} \alpha_x \frac{\partial \xi_x}{\partial x_n} \right) + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu} \xi_\nu = 0, \\ i = 1 \dots n-1. \end{gathered}\right\} \quad (1''')$$

Le trasformazioni finite soddisfano alle relazioni:

$$\alpha_\mu(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y)\, y_{i\mu} + y_{n\mu}}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(y)\, y_{in} + y_{nn}}, \qquad \mu = 1 \dots n-1, \qquad (2''')$$

il gruppo γ_{sn} corrispondente si presenta sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_{in} &= \alpha_i \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, & A_{ni} &= -\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \\ A_{ix} &= -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}, & A_{nn} &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \end{aligned}\right\} \quad i,\ x = 1 \dots n-1.$$

§ 8. Alcune applicazioni.

La ricerca delle equazioni di definizione delle trasformazioni finite di un gruppo transitivo in $x_1 \dots x_n$ si è ricondotta a questi due problemi:

Determinazione delle equazioni finite di un gruppo finito transitivo di cui sono note le trasformazioni infinitesime.

Determinazione delle funzioni $a_x = a_x(\dots y_{i,\nu_1\dots\nu_n} \dots)$.

Anche questo secondo problema si può ricondurre alla determinazione delle equazioni finite di un gruppo finito semplicemente transitivo.

La ricerca delle equazioni delle trasformazioni finite pei gruppi transitivi si può dunque condurre a quella delle equazioni finite di gruppi finiti (di data composizione).

Il problema di determinare *tutti* i gruppi transitivi in n variabili (finiti ed infiniti) si riduce al problema di determinare tutti i gruppi transitivi finiti con la composizione γ_{sn} per ogni valore di s.

Il problema di determinare le equazioni finite di tutti i gruppi transitivi di una data composizione essendo risolubile con operazioni effettuabili, si ha che anche il problema di determinare le equazioni di definizione delle trasformazioni finite di tutti i gruppi in n variabili, le cui equazioni sono dell'ordine s, si può risolvere con operazioni effettuabili.

Voglio ora indicare una applicazione dei teoremi trovati nel § 2.

Sia proposto un gruppo Γ in $x_1 \dots x_n$, e le trasformazioni infinitesime del corrispondente γ_{sn} si indichino con $\overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f \, (i = 1 \dots n, \; \nu_1 + \dots + \nu_n \leqq s)$.

Il gruppo $\overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f$ sia imprimitivo (esso però si suppone transitivo) e sia:

$$\varphi_1(\alpha_1 \dots \alpha_m) = \text{costante}, \qquad \dots \varphi_{m_1}(\alpha_1 \dots \alpha_m) = \text{costante},$$

una divisione invariante dello spazio $\alpha_1 \dots \alpha_m$.

Introduciamo come nuove variabili le $\varphi_1 \dots \varphi_{m_1}$ $\psi_1 \dots \psi_{m-m_1}$ in luogo di $\alpha_1 \dots \alpha_m$; nelle nuove variabili sia:

$$\overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f = \sum_{x=1}^{m_1} \overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(\varphi_x) \frac{\partial f}{\partial \varphi_x} + \sum_{\sigma=1}^{m-m_1} \overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(\psi_\sigma) \frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma}, \tag{1}$$

le trasformazioni:

$$\overline{\overline{A}}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f = \sum_{x=1}^{m_1} \overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n}(\varphi_x) \frac{\partial f}{\partial \varphi_n},$$

nelle $\varphi_1 \dots \varphi_{m_1}$ formano un gruppo isomorfo al gruppo $\overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f$.

Introducendo le espressioni (1) delle $\overline{A}_{i,\nu_1 \dots \nu_n} f$ nelle equazioni delle trasformazioni infinitesime del gruppo Γ si vede che tra queste m equazioni ve ne sono m_1 che contengono solamente i simboli $\varphi_1 \dots \varphi_{m_1}$. Queste equazioni definiscono per sè sole un gruppo in n variabili e con m_1 equazioni di definizione.

Si ha il teorema:

Teorema 11.° *Perchè dalle m equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime (o finite) di un gruppo Γ, se ne possano con eliminazioni* *e combinazioni ottenere* $m_1 < m$ *che definiscano per sè sole un gruppo, è necessario e sufficiente che il gruppo* γ_{sn} *in* $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ *corrispondente a* Γ *sia imprimitivo, ed ammetta una divisione invariante dello spazio* $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ *in* ∞^{m_1} *varietà ad* $m - m_1$ *dimensioni.*

Se di un gruppo transitivo finito sono conosciute le equazioni finite, si possono senza integrazioni trovare tutte le sue divisioni invarianti. Dunque, dato un gruppo Γ in $x_1 \ldots x_n$, il problema di determinare tutti i gruppi con un minor numero di equazioni di definizione dello stesso ordine o di un ordine minore, e che contengono il gruppo Γ, si risolve senza integrazioni, note le equazioni finite del gruppo γ_{sn} associato a Γ.

Roma, gennaio 1897.

Des groupes transitifs de classe (*) ef (e et f étant premiers avec $5 \leq e \leq f$) et de degré $ef+k$ (k étant $< e$).

(Par Ed. Maillet, *à Neuilly.)*

Ces groupes peuvent contenir un sous-groupe d'ordre, de degré et de classe ef, ou n'en pas contenir: nous allons étudier successivement les deux cas.

I.

Groupes qui contiennent un sous-groupe d'ordre, de degré et de classe ef.

Nous établissons le théorème suivant qui leur est applicable.

Théorème. — Soit m un nombre impair quelconque, k un nombre plus petit que le plus petit diviseur ε de m: un groupe G transitif, de classe m, de degré $m+k$, avec $0 < k < \varepsilon$, renfermant un sous-groupe M d'ordre, de degré et de classe m, ne peut exister que si $k \leq 2$, et $m+1=2^\nu$.

En effet, d'abord G est primitif. Car, s'il ne l'était pas, il admettrait une répartition de ses lettres u à u en systèmes de non-primitivité, avec $u > 1$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les k lettres de G laissées immobiles par le groupe M, d'ordre, de degré et de classe m; u divisera $m+k < 2m$, et sera par suite $< m$. Alors, M permutant exclusivement entre elles les lettres du système dont

(*) D'après MM. Jordan et Netto la classe d'un groupe est le nombre de lettres minimum que déplace une substitution de ce groupe différente de l'unité; la classe d'une substitution est le nombre de lettres qu'elle déplace.

fait partie α_i, ce système ne pourrait comprendre une des lettres de M sans les comprendre toutes, puisque M est transitif entre m lettres; dans ce cas il faudrait $u > m$, contrairement à ce qu'on a vu. Les lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ forment donc un certain nombre de systèmes, et u divise k; u divisant k et $m+k$ divise k et m, ce qui est absurde, puisque $k < \varepsilon$ (*).

Ceci posé, je dis que G est $k+1$ fois transitif.

En effet, cette propriété est vraie si $k=1$. Admettons qu'elle le soit pour les degrés $m+k'$ inférieurs à $m+k$, et montrons qu'elle a lieu pour le degré $m+k$ ($k' \geqq 1$, $k > 1$).

Soit H_{α_1} le groupe des substitutions de G qui laissent immobile α_1 par exemple. L'ordre de H_{α_1} est $> m$, puisque G est primitif, car s'il était égal à m, G admettrait une répartition de ses lettres k à k (**). Dès lors, si H_{α_1} permutait exclusivement entre elles les lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, ses substitutions seraient permutables à M, et H_{α_1} ne renfermerait, comme il est facile de le voir, qu'un seul groupe d'ordre et de degré m, le groupe M lui-même. Donc, en considérant les transformés de H_{α_1} par les substitutions de G, on voit que ces transformés sont en nombre $m+k$, puisque G est primitif, et que chacun des transformés de M par les substitutions de G est commun à k d'entre eux exactement, en sorte que k devrait diviser $m+k$, par suite m, ce qui est contraire à l'hypothèse $k < \varepsilon$.

On en conclut que H_{α_1} contient une substitution permutant α_i ($i > 1$) avec une des lettres de M, et M n'est pas permutable à toutes les substitutions de H_{α_1}. Soit M' un transformé de M, différent de M, par une substitution de H_{α_1}: M' sera transitif entre m lettres, et d'ordre et de degré m; parmi ces m lettres on en aura k', par exemple, comprises parmi les lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, avec $1 \leqq k' \leqq k-1 < m$, en sorte que M' permutera ces k' lettres avec des lettres de M. Le groupe (M, M') dérivé de M et de M' sera transitif, de degré $m+k'$, de classe m, et renfermera le groupe M d'ordre, de degré, et de classe m. Par hypothèse, il sera $k'+1$ fois transitif, avec $k'+1 \geqq 2$, c. à. d. primitif: donc, d'après un théorème connu (***), G sera $k+1$ fois transitif.

(*) Ce raisonnement peut même servir à montrer qu'un groupe transitif de degré $m+k$, avec $k < m$, contenant un sous-groupe transitif de degré m, ne peut exister que si k n'est pas premier à m, ou s'il est primitif.

(**) Voir par exemple *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1895, D. 18.

(***) Jordan, *Journal de Liouville*, année 1871, p. 384.

D'après un théorème de M. Jordan (*), on sait que G, qui est $k+1$ fois transitif, de classe m et de degré $m+k$, ne peut exister, m étant impair et > 3, que si $k \leqq 2$, et $m + 1 = 2^\nu$, ce qui démontre le théorème.

Ce résultat est applicable aux groupes transitifs de classe ef et de degré $ef + k$ avec e et f premiers, $0 < k < e \leqq f$, renfermant un sous-groupe de degré, d'ordre et de classe ef: on a forcément $k \leqq 2$.

Comme exemple d'un pareil groupe on peut citer un groupe linéaire de degré 17 et d'ordre 17. 16. 15, et un groupe linéaire de degré 513, et d'ordre 513. 512. 511.

Remarque. — Après avoir établi que G est primitif, on abrégerait la démonstration en s'appuyant sur un théorème de M. Jordan (**).

II.

Groupes qui ne contiennent aucun sous-groupe d'ordre, de degré et de classe ef.

Ces groupes contiendront un sous-groupe M d'ordre r et de degré ef (r étant égal à e ou à f) maximum parmi les sous-groupes de degré et de classe ef qu'ils renferment.

Soit G un de ces groupes, d'ordre G, de degré $ef + k$ avec $0 < k < e \leqq f$ et $5 \leqq e$: G divise (***) $ef(ef+1)\dots(ef+k)$, et, par suite, est divisible par r sans l'être par r^2, même si $e = f$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les k lettres de G non déplacées par M; H_{α_1}, d'ordre H_{α_1}, le groupe des substitutions de G qui laissent α_1 immobile; L, d'ordre L, le groupe des substitutions de H_{α_1} permutables à M; K, d'ordre K, le groupe des substitutions de G permutables à M, contenant L.

D'après un théorème de M. Sylow (****), on a :

$$H_{\alpha_1} = (1 + nr)L, \qquad L = l.r.$$

(*) Jordan, *Journal de Liouville*, année 1872.

(**) D'après l'énoncé que nous en avons donné dans le *J. de Math.*, 1895, p. 20.

(***) Voir par exemple *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1895, p. 9-10.

(****) *Math. Ann.*, t. V, p. 584.

De plus, H_{α_1} renferme $1+nr$ transformés de M, exactement. H_{α_1} et ses transformés par les substitutions de G en renferment $(1+nr)(ef+k)$ qui, évidemment, sont identiques k à k, et le nombre des transformés distincts de M par les substitutions de G est $\frac{(1+nr)(ef+k)}{k}\cdot$ Donc, d'après le même théorème de M. Sylow:

$$G=\frac{(1+nr)(ef+k)}{k}K=(ef+k)H_{\alpha_1},$$

$$K=k\,.\,L=k\,.\,l\,.\,r>L.$$

K déplace α_1; il permute exclusivement entre elles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, puisque ses substitutions sont permutables à M, et les permute transitivement, puisque le groupe des substitutions de K laissant α_1 immobile est d'ordre $L=\frac{K}{k}\cdot$

Je dis qu'aucune substitution de K ne peut être échangeable à une de M sans faire partie de M. En effet, une substitution de M déplace r lettres dans chacun de ses cycles; une substitution U qui lui serait échangeable ne pourrait laisser immobile une des lettres de M sans en laisser $r>k$, ce qui est impossible, puisqu'une substitution de G laisse au plus k lettres de M immobiles. Donc U déplace toutes les lettres de M; de plus U opère entre elles une substitution régulière, sans quoi une de ses puissances, qui serait échangeable aux substitutions de M, laisserait des lettres de M immobiles, sans d'ailleurs les laisser toutes, puisqu'elle déplace au moins ef lettres avec $ef>k$. Cette substitution régulière est d'ordre diviseur de ef; si elle déplace quelques unes des lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, en l'élevant à la puissance ef, on obtiendrait une substitution différente de l'unité, puisque $f \geqq e > k$, et qui déplacerait au plus k lettres, tout en faisant partie de G qui est de classe ef, résultat absurde; si elle ne déplace aucune des lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, elle engendrera avec M un groupe contenant un sous-groupe d'ordre e^2 ou ef contrairement à ce qu'on a vu ou à l'hypothèse, à moins qu'elle ne soit contenue dans M, ce qui montre le résultat annoncé.

On en conclut de suite que toute substitution de M a exactement kl transformées par les substitutions de K (à part l'unité), et, en considérant les $r-1$ substitutions de M différentes de l'unité, que:

$$r-1\equiv 0 \pmod{k\,l}. \tag{1}$$

Nous allons maintenant déterminer l.

Prenons dans K un des groupes F les plus généraux parmi ceux dont l'ordre F est premier à r, et qui n'ont avec M aucune substitution commune, et soit :

$$K = F \,.\, \mu r.$$

Si un sous-groupe de F était permutable aux substitutions de K, on sait (*), et l'on voit facilement, F n'ayant avec M aucune substitution commune, que les substitutions de ce sous-groupe seraient échangeables à celles de M, sans faire partie de M, ce que nous avons vu impossible. Dès lors, K est holoédriquement isomorphe (**) à un groupe K' de degré μr, transitif, et où l'isomorphe F' de F est formé de l'ensemble des substitutions de K' laissant une même lettre de K', convenablement choisie, immobile.

Soit ρ' une substitution d'ordre r de K' :

$$\rho' = (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r)(\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r)\ldots,$$

$$\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_r,$$

$$\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots,\ \gamma_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

étant les lettres de K' qui ne renferme d'autres substitutions d'ordre r que ρ' et ses puissances. Soit aussi F'_{β_1} celui des transformés de F' par les substitutions de K' qui laisse β_1 immobile : une substitution de F'_{β_1} transforme ρ' en une de ses puissances, et ne peut laisser β_i (avec $i > 1$) immobile que si elle est échangeable à ρ', ce qui est impossible, comme on l'a vu, à cause de l'isomorphisme de K et de K'. Désignant alors par S une substitution déplaçant $\beta_2, \ldots, \beta_r$ et transformant la substitution $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r)$ en une de ses puissances, par T_1, $T_2, \ldots$ des substitutions entre γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_r, \ldots$, les substitutions de F'_{β_1} seront de la forme :

$$1,\ S T_1,\ S^2 T_2, \ldots,\ S^{F-1} T_{F-1},$$

S étant convenablement choisi, et d'ordre F. Cela résulte en effet facilement, d'une part de ce que F'_{β_1} doit permuter exclusivement entre elles $\beta_2 \ldots \beta_r$, et de ce que chacune de ses substitutions déplace ces $r-1$ lettres et transforme ρ' en une de ses puissances ; d'autre part de ce que les substitutions

(*) Voir par exemple *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1895, D. 17.

(**) Voir par exemple notre *Thèse de Doctorat*, p. 12 et 15.

entre $\beta_2, \ldots, \beta_r$ qui transforment $(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r)$ en ses puissances sont les puissances d'une même substitution.

On en conclut que F'_{β_1} est holoédriquement isomorphe à un groupe formé des puissances d'une même substitution, c. à d. est formé des puissances d'une même substitution.

Supposons maintenant qu'une substitution de F'_{β_1} laisse en même temps γ_1 par exemple immobile. F'_{β_1} et F'_{γ_1} auraient une substitution commune différente de l'unité et échangeable à leurs substitutions, par suite à celles du groupe $(F'_{\beta_1}, F'_{\gamma_1})$ dérivé de ces deux groupes. Ce groupe dérivé est alors d'ordre premier à r; d'après l'hypothèse faite sur F, et en vertu de l'isomorphisme de F et de F', on a :

$$(F'_{\beta_1}, F'_{\gamma_1}) = F'_{\beta_1} = F'_{\gamma_1};$$

c. à d. que si une substitution de F'_{β_1} laisse γ_1 immobile, il en est de même de toutes les substitutions de F'_{β_1}, qui déplacent $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$, d'après ce qui précède.

Soit alors μ_1 le nombre des lettres laissées immobiles par une substitution de F'_{β_1}: toutes les substitutions de F'_{β_1} laissent ces μ_1 lettres immobiles et celles-ci appartiennent à μ_1 cycles différents de ρ', en sorte que $\mu_1 \leqq \mu$. Si $\mu_1 > 1$, on sait (*) que K' contiendra un groupe Φ' d'ordre $\mu_1 F$ contenant F'_{β_1}: il en résulte sans peine que K contiendra un groupe Φ d'ordre $\mu_1 F$ contenant F. D'après l'hypothèse faite sur F, Φ aura des substitutions communes avec M, par suite contiendra M: les substitutions de Φ' sont permutables à F'_{β_1}, et celles de Φ à F, en sorte que les substitutions de M sont permutables à F et celles de F à M. Il en résulterait encore (**) que les substitutions de F sont échangeables à celles de M, contrairement à ce qu'on a vu. Donc $\mu_1 = 1$.

En résumé, K' est transitif, de degré μr, de classe $\mu r - 1$, et le groupe F'_{β_1} des substitutions de K', qui laissent une lettre β_1 quelconque immobile, est formé des puissances d'une même substitution.

On sait alors (***) que K' renferme $\mu r - 1$ substitutions déplaçant μr lettres; parmi ces $\mu r - 1$ substitutions sont comprises les $r - 1$ substitutions

(*) Voir par exemple *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, D. 18-20 et notre *Thèse de Doctorat*, p. 18.

(**) Voir par exemple *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, D. 17.

(***) Voir notre *Thèse de Doctoral*, p. 49 et suiv.

de M', isomorphe de M, qui sont différentes de l'unité, puisqu'elles sont d'ordre r premier, et régulières. Je dis qu'on a $\mu = 1$.

En effet, soit $\mu > 1$: il y a dans K' des substitutions d'ordre premier à r et déplaçant μr lettres; les substitutions correspondantes de K ne sont comprises ni dans M, ni dans F, ni dans un de ses transformés par les substitutions de K. On peut donc partir d'une d'elles pour former un groupe E différent de F et de ses transformés par les substitutions de K, et maximum comme F parmi les groupes de K dont l'ordre est premier à r. On voit encore que E est formé des puissances d'une même substitution.

Les transformés de E par K sont différents des transformés de F par K; de plus, si un transformé E_1 de E avait une substitution autre que l'unité commune avec un transformé F_1 de F, le groupe (E_1, F_1), dérivé de E_1 et F_1, qui serait $> F_1$, d'après ce qu'on vient de voir, aurait une substitution commune avec M, laquelle serait échangeable à une substitution de F_1, ce qui n'a pas lieu. Alors les transformés de F par les substitutions de K renferment $(F-1)\mu r = K\frac{F-1}{F}$ substitutions distinctes, et distinctes de l'unité; les transformés de E, d'ordre E, renferment de même $K\frac{E-1}{E}$ substitutions distinctes, et distinctes des précédentes et de l'unité : il faudrait donc :

$$K\left(\frac{F-1}{F}+\frac{E-1}{E}\right) < K,$$

ce qui est absurde, puisque $\frac{F-1}{F} \geqq \frac{1}{2}$, $\frac{E-1}{E} \geqq \frac{1}{2}$. On en conclut que $\mu = 1$, comme nous l'avions annoncé.

Les groupes F et M sont échangeables (*), et le groupe dérivé $(F, M) = K$ est d'ordre $K = Fr$; F ne contient aucune substitution (à part l'unité), laissant à la fois $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ immobiles, d'après les hypothèses faites sur G. Les groupes des substitutions opérés par K et F entre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ coincident : soit P ce groupe, d'ordre $P = kl$; il est transitif et holoédriquement isomorphe à F, par suite formé des puissances d'une même substitution; une substitution de P laissant α_1 par exemple immobile est échangeable aux substitutions du groupe transitif P, et par suite laisse $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ immobiles. Donc :

$$P = k, \qquad l = 1;$$

le groupe des substitutions de H_{α_1} permutables à M se confond avec M.

(*) D'après la définition de Serret, *Algèbre supérieure*, t. II, pag. 283.

On en conclut immédiatement que, si G était deux fois transitif, H_{α_1} serait transitif, et que la quantité désignée tout-à-l'heure par l devrait être égale à $k-1$, ce qui exige $k \leqq 2$. En tenant compte de ce qui a été dit dans le § I, on peut dire:

Théorème I. — Un groupe G transitif, de classe ef (e et f premiers, $5 \leqq e \leqq f$), de degré $ef+k$ $(0<k<e)$ n'est qu'une fois transitif(*) si $k>2$.

Quand $k \leqq 2$, G fait partie des groupes transitifs de degré N et de classe $N-1$ ou $N-2$, que nous avons étudiés (**). On sait en particulier qu'il n'existe aucun de ces groupes qui soit de classe $4h+1$, et que, pour les classes $\leqq 100$, G ne peut être primitif que si $m+1=2^\nu$.

Supposons $k>2$; H_{α_1} ne peut se confondre avec M, sans quoi G admettrait (***) une répartition de ses lettres k à k, les lettres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ formant un système et k diviserait $ef+k$, par suite e ou f, ce qui est absurde. Donc $H_{\alpha_1}>M$.

Je dis que H_{α_1} déplace toutes les lettres de G, sauf α_1.

En effet, supposons que H_{α_1} déplace seulement k_1-1 des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, avec $k_1<k$: on sait (****) que G admettra une répartition de ses lettres $k-k_1+1$ à $k-k_1+1$. Si le système de cette répartition dont fait partie α_i contenait quelques-unes des lettres de M, il contiendrait les r lettres d'un cycle d'une substitution de M, car M fait partie de H_{α_i} qui permute exclusivement entre elles les lettres de ce système. On aurait:

$$k-k_1+1>r, \quad \text{ou} \quad k>r,$$

contrairement à l'hypothèse. Les lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ forment donc un certain nombre de systèmes, ainsi que les lettres de M, et k aurait un diviseur commun avec ef, ce qui est impossible. Il en résulte $k_1=k$.

Je dis de plus que H_{α_1} permute chacune des $k-1$ lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ exclusivement avec des lettres déplacées par M.

En effet, on sait (*****) que, si l'ordre du groupe des substitutions de H_{α_1} permutables à M est vr, si v'' est le nombre des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ que

(*) Une propriété semblable a lieu pour les groupes de classe $p_1 p_2 \cdots p_i$ et de degré $p_1 p_2 \cdots p_i + k$; où k est >2 et plus petit que le plus petit des nombres premiers différents $p_1, p_2, \ldots, p_i$.

(**) *Thèse de Doctorat*, p. 49-104 et *Bull. Soc. Mat.*, 1897, t. 25, p. 16.

(***) Voir par exemple *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1895, D. 18-20.

(****) Idem.

(*****) *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1895, D. 20.

H_{α_1} substitue à α_2, si $H_{\alpha_1 \alpha_2}$ est le groupe des substitutions de H_{α_1} qui laissent α_2 immobile, $v' r$ l'ordre du groupe des substitutions de $H_{\alpha_1 \alpha_2}$ permutables à M, on a $v = v' v''$. Or ici $v = 1$, ce qui exige en particulier $v'' = 1$.

En résumé, si $k > 2$, H_{α_1} est de degré $ef + k - 1$, et permute exclusivement avec des lettres de M chacune des $k - 1$ lettres que M laisse immobiles.

Ceci posé, considérons dans H_{α_1} un des groupes minima D parmi ceux qui contiennent M et sont $> M$, ce qui est possible, puisque $H_{\alpha_1} > M$.

D déplace k' des lettres α_i, par exemple $\alpha_2, \ldots, \alpha_{k'+1}$, avec $k > k' > 0$; chacune de ces k' lettres est permutée transitivement avec des lettres de M exclusivement, d'après ce qui précède; l'une d'elles α_j, par exemple, le sera avec $q\,r$ lettres de M. Aucune substitution de D ne peut laisser simultanément ces $q\,r$ lettres et α_j immobiles sans se réduire à l'unité, en sorte que D est holoédriquement isomorphe au groupe D_{α_j} des substitutions qu'il opère entre elles: de plus, M étant maximum dans D, par hypothèse, on sait (*) que D_{α_j} est primitif et d'ordre:

$$D_{\alpha_j} = D = r\,(1 + q\,r),$$

D étant l'ordre de D; q a donc la même valeur pour chacune des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_{k'+1}$. D_{α_j} appartient aux groupes primitifs de degré $N = 1 + q\,r$ et de classe $N - 1$ dont nous avons déjà parlé, ce qui impose certaines conditions à la valeur de $1 + q\,r$. Ainsi il faut $1 + q\,r \neq 4\,h + 2$, et, comme $1 + q\,r \leqq e\,f + 1$, on en conclut que pour $e\,f < 200$, $1 + q\,r$ est une puissance d'un nombre premier.

Les groupes $D_{\alpha_2}, D_{\alpha_3}, \ldots, D_{\alpha_{k'+1}}$ déplacent en tout $k'(1 + q\,r)$ lettres. Les autres lettres de D sont toutes déplacées par M, s'il y en a: d'où deux cas à distinguer:

1.er cas. — Il n'y en a pas, c. à d.:

$$k'(1 + q\,r) = e\,f + k',$$

ou:

$$k'\,q\,r = e\,f.$$

Or k' divise $e\,f$ et est $< k < e$: donc $k' = 1$. D est primitif et d'ordre $r\,(e\,f + 1)$: il est transitif entre $e\,f + 1$ lettres, et d'après un théorème de M. Jordan déjà utilisé, G serait k fois transitif, ce qui est impossible, d'après le théorème I, puisque $k > 2$. Il faut donc $k'\,q\,r < e\,f$.

(*) W. Dyck, *Math. Ann.*, t. XXII, et notre *Thèse de Doctorat*, p. 18.

2.ème cas. — Il y en a.

Ces lettres sont au nombre de $ef - k'qr$. Une d'elles sera permutée transitivement par D avec λr lettres; aucune substitution de D ne peut laisser simultanément immobiles ces λr lettres, puisque $k < \lambda r$, et les substitutions opérées entre elles par D forment un groupe D', de degré λr, transitif, holoédriquement isomorphe à D, d'ordre:

$$D' = D = B' . \lambda r ,$$

B', d'ordre B', étant le groupe des substitutions de D' qui laissent immobile une de ces λr lettres. Aucune des substitutions de B' ou de ses transformés par D' ne fait partie de M', isomorphe de M dans D', ni des transformés de M' par D', puisque B' est premier à r.

En considérant successivement toutes les lettres qui font partie des $ef - k'qr$ en question, on obtiendra un certain nombre de groupes D', $D'_1, \ldots$ analogues à D', et:

$$ef - k'qr = r . \sum \lambda. \tag{2}$$

Deux circonstances pourront alors se présenter:

1.° — Il pourra se faire qu'une des valeurs B', $B'_1, \ldots$ qui correspondent respectivement à D', $D'_1, \ldots$ soit > 1. Soit par exemple $B' > 1$.

On a:

$$B' \lambda = 1 + qr.$$

D' sera de classe $\lambda r - t$, avec $0 < t \leq k'$, et de degré λr.

Soit n_i le nombre des substitutions de B' qui laissent immobiles i des lettres de D'; on sait (*) que D' contient:

$$\lambda r \left(\frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} + \cdots + \frac{n_t}{t} \right),$$

substitutions qui laissent quelques lettres immobiles, avec:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = B' - 1.$$

D' contient d'ailleurs, d'après ce qui précède, $\frac{r-1}{r} D$ substitutions faisant partie de M' ou de ses transformés par D', et déplaçant toutes les lettres de D'. Donc:

$$\frac{r-1}{r} D + \lambda r \left(\frac{n_1}{1} + \frac{n_2}{2} + \cdots + \frac{n_t}{t} \right) < D,$$

(*) Jordan, *J. de Math.*, 1872.

ou, a fortiori :

$$\frac{r-1}{r}+\frac{B'-1}{tB'}<1,$$

ce qui donne :

$$e>k>k' \geqq t>r\frac{B'-1}{B'} \geqq \frac{r}{2}. \tag{3}$$

Or d'après la congruence (1), k divise $r-1$, ce qui donne $k=r-1$; d'après l'hypothèse $k<e \leqq f$, il faut :

$$r=e, \qquad k=e-1. \tag{4}$$

L'un des ordres B', $B'_1, \ldots$ ne peut être >1 que si $r=e=k+1$.

Supposons donc $r=e=k+1$. Si l'on a $k'=t$, D contiendra une substitution de classe ef déplaçant toutes les lettres de $D_{\alpha_2}, D_{\alpha_3}, \ldots, D_{\alpha_{k'+1}}$ et régulière, puisque G est de classe ef. Son ordre divise ef et B', et par suite est égal à f : ses puissances forment un groupe Q sur lequel on peut raisonner comme on l'a fait sur M. On sera encore conduit à des groupes analogues à B', $B'_1, \ldots$ dont les ordres seront tous égaux à 1, d'après ce qui précède; on verra tout-à-l'heure que leurs ordres ne peuvent pas non plus être tous égaux à 1, et par suite que $k'>t$. L'inégalité (3) deviendra :

$$e-1=k>k'>t>e\frac{B'-1}{B'} \geqq \frac{e}{2}, \tag{5}$$

d'où :

$$e \geqq t+3>\frac{e}{2}+3, \tag{6}$$

et :

$$e \geqq 7. \tag{7}$$

Enfin, d'après (2) :

$$\lambda \leqq f-k'q,$$

$$B'\lambda=1+qe \leqq (f-k'q)B',$$

ou :

$$B' \geqq \frac{1+qe}{f-k'q};$$

mais, d'après (5) :

$$B'<\frac{e}{e-t},$$

en sorte que :

$$\frac{e}{e-t}>\frac{1+qe}{f-k'q},$$

ou :

$$ef > qe(k'-t)+qe^2+e-t,$$

ou, d'après (5) et (6):

$$ef \geqq qe(e+1)+4,$$

ce qui donne :

$$f > q(e+1). \tag{8}$$

Il y aura intérêt, pour chaque valeur particulière de e, à déterminer une limite inférieure de q, d'après ce que nous avons dit de D et des groupes primitifs de classe $N-1$ et de degré N. Ainsi on ne pourra avoir $q=1$ que si $e+1=2^r<f$; si $e+1 \neq 2^r$, il faudra $q \geqq 2$, et:

$$f \geqq 2e+3. \tag{9}$$

En résumé, l'un des ordres B', $B'_1, \ldots$ ne peut être >1 que si l'on a:

$$r=e=k+1, \tag{4}$$

$$e \geqq 7, \tag{7}$$

$$e+1=2^r<f, \quad \text{ou} \quad f \geqq 2e+3. \tag{10}$$

2.° — Toutes les valeurs B', $B'_1, \ldots$ sont $=1$.

On a toujours $\lambda = 1+qr$, et, d'après (2):

$$ef = k'qr+(1+qr)r \cdot \varphi,$$

φ désignant le nombre des groupes analogues à D'. On a $\varphi>0$, $q>0$, et, par suite, $r=e$, et:

$$f=k'q+(1+qe)\varphi \geqq 1+q(e+k'). \tag{11}$$

Mais H_{α_1} est de degré $m+k-1$ et permute chacune des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ avec des lettres de M exclusivement. Chacune des lettres α_i non déplacées par D $(i>1)$ sera permutée par H_{α_1} avec au moins $e(1+qe)$ lettres de M; il faut donc $\varphi \geqq k-1-k'$, et:

$$f \geqq k'q+(1+qe)(k-1-k'). \tag{12}$$

Les inégalités (11) et (12) montrent, en remarquant que q satisfait aux conditions précédemment indiquées, que l'on ne pourra avoir $f<2e+3$ que si:

$$\left.\begin{array}{l} q=1, \quad \varphi=1, \quad f=k'+e+1, \quad k-1-k' \leqq 1, \\ \text{par suite:} \\ k=k'+2, \quad \text{ou} \quad k=k'+1. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Si $k=k'+2$, $f=e+k-1$, ce qui est impossible, f étant premier, et $k>1$ divisant $e-1$, d'après (1).

Si $k=k'+1$, D et H_{α_1} sont tous deux de degré $ef+k-1$; on ne peut avoir $D=H_{\alpha_1}$, car on en conclurait:

$$G=(ef+k)D=(ef+k)(e+1)e,$$

et G contenant le sous-groupe désigné antérieurement par K, d'ordre ke, $k<e$ devrait diviser $e+1$ et $e-1$, d'après (1), ce qui exigerait $k \leqq 2$, contrairement à l'hypothèse. Soit donc $D<H_{\alpha_1}$: $\alpha_i\,(i>1)$ est permutée par H_{α_1} avec au moins e lettres de M, puisqu'elle l'est déjà par D; mais elle ne pourra l'être aussi avec les $e(e+1)$ lettres permutées exclusivement entre elles par D que pour une valeur de i au plus, puisque H_{α_1} permute chacune des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ avec des lettres de M exclusivement. Donc, puisque $k>2$, il y a au moins une des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, par exemple α_2, que H_{α_1} permute exclusivement avec e lettres de M. Le groupe $H_{\alpha_1\alpha_2}$, formé des substitutions de H_{α_1} laissant α_2 immobile, est d'ordre:

$$\frac{H_{\alpha_1}}{e+1}>e,$$

puisque:

$$H_{\alpha_1}>(e+1)e=D.$$

$H_{\alpha_1\alpha_2}$ contient alors un sous-groupe Δ analogue à D, minimum parmi ceux qui contiennent M et sont $>M$; mais ce groupe Δ est de degré $<ef+k-1$, c. à d. de degré plus petit que celui de H_{α_1}, et le cas exceptionnel que nous venons d'étudier pour D ne pourra se présenter pour Δ. En raisonnant sur Δ comme nous l'avons fait sur D, on sera donc conduit, soit aux conditions (4), (7) et (10), soit à la condition:

$$f \geqq 2e+3. \tag{14}$$

Nous conclurons, en tenant compte du théorème I et du § I:

Théorème II. — Un groupe transitif de classe ef (e et f premiers, $5 \leqq e \leqq f$), de degré $ef+k$ (avec $(0<k<e)$, ne peut exister qu'à l'une des conditions suivantes:

1.° —. $k \leqq 2$, $ef=4h+3$;

2.° —. $f>e+1=2^r$;

3.° —. $f \geqq 2e+3$;

de plus, dans les deux derniers cas, le groupe ne sera qu'une fois transitif et aura son ordre premier à f.

Si en particulier $e = f$, on a :

Corollaire. — Un groupe transitif de classe e^2 est de degré e^2 ou $\geqq e^2 + e$, e étant premier impair.

III.

Application aux groupes transitifs des 100 premières classes.

Si $ef \leqq 100$, il faut e égál à 5 ou 7.

1.° — . $e = 5$.

On a $e + 1 = 6 \neq 2^r$, $f \geqq 13$.

De plus, d'après (7), les quantités B', $B_1, \ldots$ sont toutes égales à 1. Appliquant alors (11):

$$f = k' q + (1 + 5 q) \varphi,$$

$\varphi > 0$, $k - 1 - k' \leqq \varphi$, $3 \geqq q \geqq 2$, puisque $ef \leqq 100$, $k = 4$ si $k > 2$, puisque k divise $e - 1 = 4$.

Pour $f = 13$, $q = 2$, $\varphi = 1$, $k' = 1$, $k - 1 - k' = 2 > \varphi = 1$, ce qui implique contradiction.

Pour $f = 17$, $q = 2$, $\varphi = 1$, $k' = 3 = k - 1$: D et H_{α_1} seraient tous deux de degré $ef + k - 1$, et un raisonnement fait précédemment montre que H_{α_1} contiendrait un sous-groupe Δ, analogue à D, mais de degré $< ef + k - 1$, ce qui conduit à une contradiction.

Pour $f = 19$, $q = 2$ exigerait $\varphi = 1$, $k' = 4$, ce qui est impossible, puisque $k' \leqq k - 1 = 3$; $q = 3$ donne $\varphi = 1$, $k' = 1$, $k - 1 - k' = 2 > \varphi = 1$, ce qui implique contradiction.

2.° — . $e = 7$.

On a $e + 1 = 8 = 2^3$. Nous savons qu'alors l'hypothèse $B' = B'_1 = \cdots = 1$ conduit à la condition $f \geqq 2e + 3 = 17$, $ef > 100$, à moins qu'on ne puisse trouver dans H_{α_1} un groupe analogue à D pour lequel les quantités analogues à B', $B'_1, \ldots$ ne soient pas toutes égales à 1.

Supposant donc qu'a priori on ait pris pour D ce groupe et que $B' > 1$, les conditions (8) et $ef \leqq 100$ donnent $q = 1$. De plus (5) et (6) donnent

$k' = 5 = k - 1$, $t = 4 > 7 . \frac{B' - 1}{B'}$, $B' = 2$, et d'après (2) où l'on remplace r par e:

$$f = 5 + \sum \lambda. \tag{15}$$

Ce qui précède montre d'ailleurs que si, par exemple $B'_1 > 1$, il faut $B'_1 = 2$, et, d'après $B'_i \lambda_i = 8$, que les quantités λ sont toutes égales à 4 ou 8, l'une d'elles étant égale à 4, à cause de $B' = 2$. Mais $ef \leqq 100$ donne f égal à 11 ou 13, et, par suite, il y a dans (15) au plus deux quantités λ, dont une égale à 4, l'autre égale à 4 ou à 8. Ceci exige immédiatement:

$$f = 13, \qquad \lambda = 4, \qquad \lambda_1 = 4, \qquad B' = B'_1 = 2.$$

Dans ce cas on ne peut avoir $H_{\alpha_1} = D$, sans quoi:

$$G = (ef + k)(e + 1)e = 97 . 8 . 7,$$

et $k = 6$ devrait diviser G, à cause de l'existence du groupe K, ce qui n'a pas lieu. Soit donc $H_{\alpha_1} > D$.

D est de même degré que H_{α_1}, puisque $k' = k - 1 = 5$; il permute chacune des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_6$ avec $e = 7$ lettres de M exclusivement, et permute exclusivement entre elles les 28 lettres de chacun des deux groupes D', D'_1, correspondant à B', B'_1. H_{α_1} permutant chacune des lettres $\alpha_2, \ldots, \alpha_6$ avec des lettres de M exclusivement, il y en aura au moins 3 permutées par H_{α_1} chacune avec 7 lettres de M seulement: soit α_2 l'une d'elles. Le groupe $H_{\alpha_1 \alpha_2}$ des substitutions de H_{α_1} laissant α_2 immobile est alors d'ordre $\frac{H_{\alpha_1}}{8} > 7$, et contient un sous-groupe Δ' analogue à D, mais pour lequel la quantité k' est $\leqq 4$.

Les quantités qui pour Δ' sont analogues à B', $B'_1, \ldots$ seront ici toutes égales à 1, sans quoi on trouverait, en raisonnant comme sur D, $k' = 5$. Mais, puisque $f < 2e + 3$, (13) doit avoir lieu et $f = k' + e + 1 \leqq 12$, ce qui est contradictoire.

Nous pouvons donc conclure:

Théorème III. — Les groupes transitifs de classe $ef \leqq 100$ (e et f premiers, $5 \leqq e \leqq f$) sont de degré $ef + k$, avec $k \leqq 2$, ou $k \geqq e$.

Corollaire. — Ceux de ces groupes qui sont primitifs sont de degré $\geqq ef + e$.

Car il suffit de tenir compte des résultats que nous avons obtenus pour les groupes primitifs de degré N et de classe $N - 1$ ou $N - 2$.

D'autre part, on connaît (*) l'existence d'un groupe primitif au moins de classe ef et de degré $ef+e$ pour les 100 premières classes, à savoir un groupe primitif de classe 55, de degré 60, d'ordre $\overline{60}^2$, dérivé de l'isomorphe régulier du groupe alterné de 5 éléments, et de son conjoint. Néanmoins, ainsi que nous le montrerons ultérieurement, ces raisonnements sont susceptibles d'extensions quand on ne considère que des groupes renfermant une substitution d'ordre f à e cycles, avec $f > e$.

Neuilly-sur-Marne, 17 avril 1897.

(*) Voir par ex. notre *Thèse de Doctorat*, p. 35.

Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica.

(*Di* G. Castelnuovo, *a Roma.*)

In un mio lavoro del novembre 1894, che l'Accademia Italiana delle Scienze volle accogliere tra le sue Memorie (*), io esposi alcune proprietà dei sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Però le difficoltà che l'argomento offriva, mi costrinsero a presentare i risultati ottenuti con restrizioni che ritenevo superflue, ma che non vedevo allora il modo di togliere. Essendo ritornato più tardi sullo stesso soggetto, mi riuscì di dare a quei risultati una estensione molto maggiore, e nel tempo stesso di rendere più semplici le dimostrazioni. Pensai che fosse opportuno introdurre nelle mie ricerche del 94 i miglioramenti a cui accenno, prima di esporre nuovi risultati, a cui i precedenti servono di base; e così fui indotto a scrivere il presente lavoro. Debbo però avvertire che i principali risultati in questo contenuti si trovano già enunciati (presso a poco sotto la forma qui adottata), ma non dimostrati, in una Monografia che ho redatto in collaborazione col sig. Enriques (**). Ed anzi il lavoro che ora presento al lettore, giova a dare una idea esatta dei metodi che condussero ad una parte delle proprietà trovate recentemente nella teoria delle superficie algebriche, mentre la Monografia citata si proponeva di esporre il complesso dei risultati piuttosto che i metodi di ricerca.

(*) *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve* ..., Memorie della Soc. It. d. Sc. (detta dei XL), Serie III, Tomo X, 1896.

(**) *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, Mathem. Annalen, 48 (1896).

Debbo ancora far notare che il Capitolo I del presente lavoro, che qui serve a stabilire alcune proprietà ausiliarie, le quali trovano applicazioni nei Capitoli successivi, preso a sè può considerarsi come una introduzione ad una teoria dei sistemi lineari di superficie nello spazio, il cui sviluppo non può tardare, giacchè ormai si posseggono gli elementi per tentarlo.

CAPITOLO I.

Sopra i sistemi lineari di superficie determinati dagli elementi base.

Dovremo spesso ricorrere, nei paragrafi seguenti ad un particolare sistema di superficie algebriche (*aggiunte* ad una data superficie) definite dal loro modo di comportarsi lungo certe linee fisse, ed in certi punti fissi. Ora per raggiungere maggior chiarezza di esposizione, e per ottenere risultati più generali, conviene premettere alla ricerca che dobbiamo esporre, alcune nozioni generali sopra i sistemi lineari di superficie algebriche determinati dagli *elementi-base* (o dal *gruppo-base*). E per muovere da concetti noti, accenniamo anzitutto alla questione analoga che si presenta in geometria piana.

1. *Sistema lineare di curve piane definito dai punti-base.* Per definire nel modo più generale l'ente geometrico di cui ora vogliamo occuparci, conviene partire dalla teoria ben nota di punto singolare di una curva piana.

In seguito alle ricerche fatte sull'argomento ed alle convenzioni introdotte (*), ha ormai un significato preciso la locuzione seguente: La curva piana C ha la molteplicità s in un punto fisso O; ha le molteplicità s_1, $s_2, \ldots, s_k$ $(s_1 + s_2 + \cdots + s_k \leq s)$ nei punti O_1, $O_2, \ldots, O_k$ che sono infinitamente vicini ad O sopra direzioni assegnate (distinte o coincidenti); ha le moltiplicità s_{i1}, $s_{i2}, \ldots$ $(s_{i1} + s_{i2} + \cdots \leq s_i)$ nei punti O_{i1}, $O_{i2}, \ldots, O_{il}$ che sono infinitamente vicini ad O_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$; ecc. Qualunque singolarità di una curva piana può definirsi in siffatto modo, e nella definizione comparisce solo un numero *finito* di punti O, O_i, $O_{ij}, \ldots$ Perchè la singolarità si possa ritener nota, occorre assegnare tutti quei punti e le corrispondenti molteplicità; ma quando non si tema confusione si può parlare brevemente della singolarità

(*) Si consultino i lavori, ormai classici, del sig. Nöther.

che presenta la curva C nell'*intorno di* O; O comparisce come il *centro* della singolarità di cui O_i, $O_{ij}, \ldots$, sono i *punti satelliti.*

Nel definire la singolarità di una curva C intorno ad O non ha alcuna importanza l'ordine della curva C, purchè esso sia abbastanza elevato affinchè C possa avere quella determinata singolarità. Così si può dire che due curve C e C' dello stesso ordine, o di ordine diverso, hanno la *stessa singolarità nell'intorno di* O (o *lo stesso comportamento in* O); e si intenderà che le due curve C e C' hanno le stesse molteplicità s, s_i, $s_{ij}, \ldots$, nei punti O, O_i, $O_{ij}, \ldots$ E qui non va nemmeno escluso il caso in cui i numeri s, s_i, $s_{ij}, \ldots$ son tutti uguali ad 1; nel qual caso si tratta di un contatto più o meno intimo delle curve C e C' in un punto semplice O.

Se due o più curve dello stesso ordine hanno la stessa singolarità nell'intorno di O, ogni curva del sistema lineare che quelle determinano, ha la stessa singolarità nell'intorno di O. Segue di qua che tutte le curve di dato ordine che hanno una stessa singolarità nell'intorno di O, formano un sistema lineare che si dirà *completamente definito da quella singolarità*, o *dai punti base* O, O_i, $O_{ij}, \ldots$ (presi colle molteplicità s, s_i, $s_{ij}, \ldots$). E se O, P, $Q, \ldots$ sono punti *distinti* del piano, ciascuno centro di una singolarità ben definita, si potrà immaginare il sistema, certo lineare, di tutte le curve di dato ordine (è indifferente quale sia, purchè abbastanza elevato) che si comportano nel modo voluto negli intorni di O, P, $Q, \ldots$; si dirà che questo sistema è *completamente definito dai suoi punti-base* (che sono O, O_i, $O_{ij}, \ldots$; P, $P_i, \ldots$, ecc.), o dal *gruppo-base.* E quando non interessi fissar l'attenzione sopra il gruppo base, si dirà brevemente che il sistema di curve è *completo.*

Si hanno pure da considerare talvolta sistemi *lineari incompleti* di curve piane. Quando di un sistema incompleto siano fissati i punti-base, che saranno i punti (distinti o infinitamente vicini) comuni a tutte le curve del sistema (od anche una parte di questi punti, ove si faccia una opportuna convenzione), rimane determinato un sistema *completo* costituito da tutte le curve dello stesso ordine che hanno quei dati punti-base (colle stesse moltiplicità appartenenti alle curve del sistema incompleto). Il sistema completo contiene entro di sè il sistema incompleto da cui proviene; la differenza (positiva) tra la dimensione del sistema completo e la dimensione del sistema incompleto dicesi *deficienza* dell'ultimo sistema.

Uno stesso gruppo di punti può esser scelto come base di sistemi di curve di vari ordini, tutti determinati da quel gruppo. Naturalmente bisognerà che l'ordine superi un certo limite perchè il sistema esista; ma se ad es. esiste il sistema $|C^n|$ delle curve d'ordine n determinato da quel gruppo, esisteranno pure i sistemi $|C^{n+1}|$, $|C^{n+2}|, \ldots$, formati da curve degli ordini $n+1$, $n+2, \ldots$, comportantisi ugualmente in quel gruppo-base. E ad es. $|C^{n+1}|$ conterrà ogni curva che sia composta di una curva presa entro a $|C^n|$ e di una retta, ecc.

Si chieda ora la dimensione di uno tra quei sistemi completi, ad es. di $|C^n|$. Se indichiamo con k_n il numero delle condizioni a cui deve soddisfare una curva d'ordine n per passare colle molteplicità assegnate per i punti-base assegnati, la dimensione di $|C^n|$ è data evidentemente dalla formola:

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k_n. \tag{1}$$

La quantità k_n può dipendere da n (e crescere con n) in corrispondenza ai valori più bassi di n; ma « si può sempre assegnare un limite i tale che « per $n \geqq i$ la quantità k_n si mantenga costante col variare di n ». Indicando con k il valore di quella costante abbiamo dunque la formola:

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k, \qquad (n > i), \tag{2}$$

la quale permette di calcolare la dimensione di $|C^n|$ se n supera un certo limite i.

La quantità k dicesi la *postulazione* del gruppo dei punti base del sistema (ed è data, sotto certe avvertenze, dalla somma dei numeri esprimenti le condizioni che le singolarità base del sistema, considerate staccatamente, impongono alle curve di ordine abbastanza elevato, costrette a possederle). La formula (2) porta il nome di *formula di postulazione* (Cayley, Nöther), o *formola caratteristica* (Hilbert) relativa al sistema $|C^n|$.

Quando la dimensione ρ_n di un sistema completo $|C^n|$ è espressa dalla formula di postulazione, il che avviene se l'ordine $n > i$, il sistema si dice *regolare*. Nel caso opposto ($n < i$) il sistema si dice *sovrabbondante*; la sua dimensione ρ_n non è più espressa dalla formula di postulazione (2), ma dalla formula (1), in cui k_n indica un numero minore di k. Tuttavia anche in questo caso giova tener conto della formola di postulazione (2), e chiamare *dimensione virtuale* ρ'_n di $|C^n|$ il valore che assume il secondo membro della (2):

$$\rho'_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k \qquad (n \text{ qualsiasi}).$$

Si chiamerà per contrapposto *effettiva* la vera dimensione ρ_n di $|C^n|$. « Per un sistema sovrabbondante la dimensione effettiva supera la dimensione virtuale. » La differenza positiva:

$$\rho_n - \rho'_n = s_n,$$

dicesi la *sovrabbondanza* del sistema ($s_n = 0$ per i sistemi regolari). Per un sistema sovrabbondante $|C^n|$ la dimensione effettiva è dunque espressa dalla formola:

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k + s_n, \tag{1'}$$

equivalente alla (1).

La dimensione virtuale ρ' di un sistema $|C|$, non ostante la sua definizione puramente aritmetica, ha tuttavia carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni birazionali del piano; (non muta valore se viene calcolata coi caratteri del sistema in cui $|C|$ si muta mediante la trasformazione). Ciò si riconosce introducendo i due caratteri (certo invariantivi) di $|C|$: *genere* π della curva generica, e *grado* m, ossia numero delle intersezioni variabili di due curve del sistema. Si trova infatti la relazione:

$$\rho' = m - \pi + 1. \tag{3}$$

Se poi in luogo della dimensione virtuale ρ' si introducono la dimensione effettiva ρ e la sovrabbondanza s, si ottiene la formola:

$$\rho - m + \pi - 1 = s. \tag{4}$$

Volendo esprimere con un enunciato queste relazioni conviene di introdurre la *serie caratteristica* del sistema completo $|C|$, vale a dire la serie (*completa*) $g_m^{\rho-1}$ che il sistema $|C|$ sega sopra una delle sue curve. Si hanno allora le proposizioni seguenti:

« Un sistema regolare di curve piane ha la serie caratteristica non spe- « ciale; un sistema sovrabbondante ha invece la serie caratteristica speciale » (e precisamente la sovrabbondanza uguaglia l'indice di specialità della serie, che è il numero delle curve aggiunte d'ordine $n-3$ linearmente indipendenti passanti per un gruppo della serie) (*).

(*) Sulle proprietà qui ricordate dei sistemi lineari di curve piane si potranno consultare le mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari*..., Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino, Serie II, Tomo 42.

2. *Due lemmi sopra i sistemi completi di curve piane.* — Le proprietà sopra ricordate dei sistemi completi di curve piane verranno estese nel seguito in più modi. Pel momento ci interessa piuttosto di stabilire due lemmi di cui presto dovremo servirci.

I. « Un sistema *completo* di curve piane (irriducibili) non può esser con- « tenuto in un altro sistema avente lo stesso grado (numero delle intersezioni « variabili di due curve del sistema). » Giacchè se il sistema completo $|C|$ di grado m e dimensione effettiva ρ, fosse contenuto nel sistema $|D|$ dello stesso grado m ma di dimensione $\sigma > \rho$, la serie caratteristica $g_m^{\rho-1}$ di $|C|$, segata sopra una curva C dal sistema $|C|$, sarebbe contenuta nella serie $g_m^{\sigma-1}$ segata su C dal sistema $|D|$; e ciò non è possibile, perchè la serie caratteristica di un sistema completo è completa.

II. « Siano $|C^n|$ e $|C^{n+1}|$ due sistemi di curve *completi, regolari,* aventi « gli stessi punti-base e lo stesso comportamento in questi; si formino tutte « le curve C^{n+2} composte di una C^{n+1} variabile e di una retta variabile; il « sistema lineare $|C^{n+2}|$ di minima dimensione contenente tutte quelle C^{n+2} « è un sistema *completo* (determinato dall'identico gruppo-base, colle identiche « moltiplicità) (*). »

Si badi che in questo enunciato è essenziale la ipotesi che $|C^n|$ e $|C^{n+1}|$ siano regolari; perchè abbandonando questa, può accadere benissimo che il sistema $|C^{n+2}|$ nominato nell'enunciato sia incompleto, anzichè completo come vogliamo dimostrare. Venendo ora alla dimostrazione, indichiamo con ρ_n, ρ_{n+1} e ρ_{n+2} le dimensioni effettive dei tre sistemi $|C^n|$, $|C^{n+1}|$ e $|C^{n+2}|$. Fissiamo poi due rette arbitrarie a e b nel piano, ed osserviamo che tra le $\infty^{\rho_{n+2}-1}$ curve di $|C^{n+2}|$ che passano pel punto ab, si trovano per ipotesi i due sistemi che si ottengono riunendo le curve di $|C^{n+1}|$, una volta alla retta a, ed una seconda volta alla retta b Questi due sistemi hanno la dimensione ρ_{n+1}, ed hanno in comune il sistema ∞^{ρ_n} ottenuto riunendo le curve di $|C^n|$ alla coppia di rette a, b. Segue la relazione:

$$\rho_{n+2} - 1 \geq 2\,\rho_{n+1} - \rho_n\,,$$

ossia:

$$\rho_{n+2} \geq 2\,\rho_{n+1} - \rho_n + 1\,.$$

(*) Lo stesso lemma si ritrova nelle due Memorie del sig. Enriques: *Ricerche di geometria sopra una superficie*, III, 2 (Mem. Acc. d. Sc. di Torino, 1893); *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, n.° 36 (Mem. della Società italiana delle Sc., 1896).

Ora l'espressione a secondo membro dell'ultima relazione (come segue dalla formola (2) che può applicarsi al calcolo di ρ_n, ρ_{n+1} poichè i sistemi $|C^n|$, $|C^{n+1}|$ sono regolari e completi) dà la dimensione del sistema *completo* (certo regolare) formato dalle curve d'ordine $n+2$, che passano per i punti-base dei sistemi $|C^n|$, $|C^{n+1}|$, e si comportano come queste curve in quei punti. Si conclude che nell'ultima relazione deve tenersi solo il segno d'uguaglianza, e che il sistema $|C^{n+2}|$ è completo, come si voleva dimostrare.

Segue subito dal lemma di cui stiamo occupandoci, che nelle ipotesi fatte è pur completo il sistema $|C^{n+r}|$ di minima dimensione che contiene le curve ottenute riunendo ogni curva di $|C^{n+1}|$ ad ogni curva generale d'ordine $r-1$ fissato ad arbitrio.

3. *Sistema lineare di superficie definito dal gruppo-base.* — Premesse queste nozioni sopra i sistemi completi di curve, siamo ora in grado di estendere molti concetti ai sistemi lineari di superficie (in quella misura almeno che pel momento ci interessa).

Consideriamo anzitutto una superficie algebrica F, e fermiamoci un momento sopra i punti singolari che questa può presentare. Uno di siffatti punti O può definirsi tenendo una via analoga a quella che abbiamo riportata nel caso relativo alle curve piane (*). Così ha un significato preciso il dire che O è un punto multiplo secondo s (>1) per la superficie F; che nell'intorno di O (infinitamente vicini ad O), e su direzioni assegnate, si trovano i punti $O_1, O_2, \ldots, O_i, \ldots$, i quali sono multipli secondo $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$ $(\leq s)$ per F; che nell'intorno di ciascuno di questi punti, ad es. di O_i, si trovano i punti O_{i1}, $O_{i2}, \ldots$ multipli secondo s_{i1}, $s_{i2}, \ldots$ $(< s_i)$ per F; e così via. E per quanto riguarda la posizione di quei punti *satelliti* che si condensano intorno al *centro* della singolarità O, va ancora notato che tra i punti O_1, $O_2, \ldots, O_i, \ldots$, alcuni (in numero finito) possono essere eccezionali, isolati, ed allora ciascuno di essi richiede una definizione a sè; mentre altri in numero infinito possono susseguirsi con continuità lungo una o più linee infinitesime, di cui ciascuno di questi punti è punto generico (sicchè la definizione data per uno di essi, vale per i rimanenti punti della linea). Ed altrettanto può ripetersi per i punti O_{i1}, $O_{i2}, \ldots$; ecc.

(*) Ciò che segue è tolto dalla recente Memoria del sig. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Annali di Matematica, s.^{e} II, t.^{o} 25, 1896.

Una superficie algebrica F può contenere più, anche infinite, singolarità condensate intorno a certi punti O, P, Q,... della superficie. Nel caso che i centri di singolarità O, P, Q,... siano in numero infinito, essi pure vanno distinti in due categorie.

La prima categoria si compone di punti generici sopra una o più curve multiple della superficie; se O è uno di tali punti, la definizione che si dà della singolarità intorno ad O (mediante i punti O, O_i, O_{ik},... e le molteplicità corrispondenti s, s_i, s_{ik},...), si ripete per ogni altro punto generico della curva multipla cui O appartiene. Ma si può dir di più: si può pensare che, nella ipotesi in cui ci siamo posti riguardo ad O, ciascuno dei punti satelliti O_i,..., O_{ik},... sia a sua volta punto generico di una linea infinitesima. E si può dire allora che O è punto generico di una linea s^{upla}, alla quale sono infinitamente vicine (successive) certe linee multiple secondo s_1, s_2,...; avendo poi la linea s_i per successive certe linee multiple secondo s_{i1}, s_{i2},...; e così via. La sezione piana generica della superficie F ha allora nel punto d'incontro colla linea multipla *centrale* un punto s^{uplo}, a cui sono infinitamente vicini certi punti di molteplicità s_1, s_2,...; ciascuno di questi s_i avendo infinitamente vicini certi punti di molteplicità s_{i1}, s_{i2},...; ecc. In breve: la singolarità condensata intorno ad un punto O *generico* di una linea multipla della superficie F è definita, quando si definisca la singolarità intorno ad O della curva segata su F da un piano generico condotto per O (*).

La cosa muta aspetto quando si considerano i punti singolari della seconda categoria che una superficie F può possedere; punti, ciascuno dei quali esige una definizione speciale, e che noi chiameremo punti multipli *isolati* della superficie. I punti isolati sono sempre in numero finito, e possono anche

---

(*) Le considerazioni qui esposte, relativamente al punto generico di una linea multipla, non si trovano nella Memoria citata del sig. Segre, il quale nel detto lavoro non approfondisce lo studio delle linee multiple di una superficie. Per conseguenza il concetto tratteggiato qui sopra a proposito di tali linee ha bisogno di conferma, alla quale condurrà (è lecito prevederlo) una ricerca più profonda sull'argomento. Ma io non posso trattenermi più a lungo su ciò, dovendo trattare questioni di tutt'altra natura. In ogni caso farò notare che, quando pure uno studio ulteriore delle singolarità dovesse portare una modificazione di linguaggio in qualche punto di questo paragrafo, la modificazione non si rifletterebbe nei lemmi dei paragrafi seguenti, e tanto meno nei teoremi a cui il presente lavoro è dedicato; poichè a quei lemmi si può arrivare anche partendo da una definizione diversa di sistema *completo* di superficie. Ho preferito la definizione del testo, perchè mi sembrava più soddisfacente dal lato intuitivo.

mancare; ciascuno si definisce nel modo generale esposto sul principio di questo paragrafo. E non si può dire, in generale, di conoscere la singolarità del punto, quando si conosca la singolarità che presenta la sezione di F eseguita con un piano generico condotto pel punto.

Premesse queste nozioni sopra i punti singolari di una superficie, ora ci sarà facile di definire il concetto di due o più superficie che *si comportano* nello stesso modo nell'intorno di un loro punto O. Sia O un punto singolare qualsiasi di una superficie F definito mediante la costellazione O; O_1, $O_2, \ldots, O_i, \ldots$; $O_{i1}, O_{i2}, \ldots$ e le molteplicità s; $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots$; $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$ Ora si può immaginare una seconda superficie F' (dello stesso ordine o di ordine diverso) che passi per tutti quei punti O, O_i, $O_{ik}, \ldots$ colle stesse molteplicità s, s_i, $s_{ik}, \ldots$ di F. Diremo che le due superficie F, F' *si comportano nello stesso modo* (hanno la stessa singolarità) *nell'intorno di* O. E perchè questa locuzione abbia senso, non è nemmeno necessario di supporre che O sia un vero punto multiplo $(s > 1)$ di F; ma può darsi benissimo che O sia un punto semplice $(s = 1)$ contornato da punti semplici O_i, $O_{ik}, \ldots$ $(s_i = s_{ik} = \cdots = 1)$, nel qual caso le due superficie F, F' hanno in comune un punto semplice O, ed hanno ivi un contatto più o meno intimo con curve e superficie fisse.

Se due o più superficie dello stesso ordine si comportano ugualmente nell'intorno di un punto O, ogni superficie del sistema lineare da quelle determinato, si comporta come quelle nell'intorno di O. Segue che *tutte* le superficie di dato ordine, le quali si comportano in modo assegnato nell'intorno di O, formano un sistema lineare il quale si dice *completamente definito da quella singolarità intorno ad* O, o più precisamente *dai punti-base* O, $O_i, \ldots, O_{ik}, \ldots$ che compongono quella singolarità (ai quali punti spettano le molteplicità s, $s_i, \ldots, s_{ik}, \ldots$).

Similmente se sono assegnate più (anche infinite) singolarità aventi per centri i punti O, $P, \ldots$, si può parlare del sistema di superficie di dato ordine che è completamente definito da quelle singolarità. E ricordando che le singolarità di una superficie possono essere o isolate, o distribuite lungo curve, si avranno da considerare sistemi lineari di superficie *completamente definiti da certe linee-base e da certi punti-base*. Ma senza insistere ulteriormente sullo stesso tema, formuleremo così la definizione a cui dovremo spesso ricorrere:

« Tra i punti comuni a tutte le superficie di un sistema lineare si fissino « alcuni, o tutti, in numero finito, o infinito, formanti certe curve-base e

« certi punti-base isolati; se fuori del sistema non esiste nessun'altra super-
« ficie dello stesso ordine, che si comporti in ciascuno di quei punti come la « superficie generica del sistema, si dirà che il sistema è *completamente de-* « *terminato da quei punti-base*, o meglio *da quelle linee-base e da quei punti-* « *base isolati* (brevemente da quel *gruppo-base*). »

E quando non occorra di fissar l'attenzione sul gruppo-base, si dirà pure in modo più conciso che il sistema di superficie è *completo*. Nella definizione di sistema di superficie definito dagli elementi base non ha poi grande importanza l'ordine della superficie generica del sistema; ed uno stesso gruppo di linee e punti (colle stesse molteplicità) potrà assumersi come base di sistemi lineari di superficie di vari ordini n, $n+1, \ldots$, sistemi che indicheremo di solito coi simboli $|\Phi^n|$, $|\Phi^{n+1}|, \ldots$ Se esiste il sistema corrispondente ad un valore n dell'ordine, esiste evidentemente il sistema che corrisponde ad ogni ordine superiore $n+1, \ldots$ Ed il sistema $|\Phi^{n+1}|$ contiene (tra le altre) quelle superficie che si compongono di una superficie di $|\Phi^n|$ e di un piano generico; come pure una superficie di $|\Phi^{n+1}|$ costretta a contenere un piano generico ci dà per residuo una superficie di $|\Phi^n|$; ecc.

4. *Sistema lineare di superficie definito dalle linee-base.* — Val la pena di trattenersi un po' su quel caso particolare che presenta la definizione di sistema completo di superficie, quando nel gruppo-base non compariscono punti multipli isolati, ma soltanto alcune linee-base, per le quali le superficie del sistema devono passare con date molteplicità (e con dato comportamento). In tal caso il sistema lineare si dice *completamente determinato dalle sue linee-base.*

All'esame di un siffatto sistema giova premettere la seguente osservazione. Noi abbiamo già notato che se O è un punto generico di una linea multipla per una superficie, la singolarità della superficie in O è definita, quando si definisca la singolarità che presenta intorno ad O la curva sezione della superficie con ogni piano generico passante per O. Ne viene che due superficie si comportano nell'identico modo lungo una linea multipla (o semplice) comune, allora, e solo allora, che condotto per ogni punto generico O della linea un piano generico, questo seghi le due superficie in due curve comportantisi ugualmente nell'intorno di O.

Ciò premesso consideriamo un sistema $|\Phi^n|$ di superficie d'ordine n completamente definito da certe linee-base. Sopra ogni piano ω dello spazio quel sistema sega un sistema lineare di curve d'ordine n, che ha i suoi punti-base nelle intersezioni delle linee-base col piano ω. Non è detto però che quel sistema di curve sia *completamente* definito da quei punti-base; può anzi darsi che avvenga il contrario, può darsi che quel sistema sia incompleto; ma in ogni caso lo stesso sistema sarà contenuto in un sistema di curve $|\Gamma^n_\omega|$ completamente definito dagli stessi punti-base. Per ogni posizione del piano secante ω si ha così in corrispondenza un sistema completo di curve $|\Gamma^n_\omega|$; e mediante questi ∞^3 sistemi di curve si può ricostruire il sistema $|\Phi^n|$ di superficie, perchè (in virtù della osservazione fatta sopra) esso si compone di tutte le superficie d'ordine n che segano sopra ogni piano ω una curva del corrispondente sistema $|\Gamma^n_\omega|$.

Ora va notato che per definire o ricostruire il sistema $|\Phi^n|$ non occorre adoperare quei sistemi di curve dati sopra *ciascuno* degli ∞^3 piani dello spazio; ma basta servirsi di quei sistemi $|\Gamma^n_\omega|$ che stanno sopra gli ∞^1 piani ω di un fascio, il cui asse non sia linea base per $|\Phi^n|$.

Per giustificare questa affermazione consideriamo da un lato gli ∞^3 sistemi di curve $|\Gamma^n_\sigma|$ che appartengono agli ∞^3 piani σ dello spazio, ed insieme consideriamo il sistema di superficie $|\Phi^n|$ definite dalla proprietà di segare *sopra ogni piano dello spazio* una curva del corrispondente sistema. Dall'altro lato consideriamo gli ∞^1 sistemi di curve $|\Gamma^n_\omega|$ compresi tra gli ∞^3 ora nominati, ed aventi la particolarità di giacere sui piani ω di un fascio, ed insieme consideriamo il sistema $|\Psi^n|$ delle superficie d'ordine n che segano *sui piani di quel fascio* curve dei corrispondenti sistemi. Paragoniamo ora i due sistemi di superficie $|\Phi^n|$ e $|\Psi^n|$. Se i due sistemi non coincidono (ammesso che ciò sia possibile), il secondo conterrà il primo entro di sè, e segherà sopra un piano generico σ, non più appartenente al fascio, un sistema di curve, che determinerà un sistema completo $|\Delta^n_\sigma|$ contenente il sistema $|\Gamma^n_\sigma|$ e più ampio di questo. Allora però il grado di $|\Delta^n_\sigma|$ dovrà superare il grado di $|\Gamma^n_\sigma|$ (n.° 2, I lemma); vale a dire l'ordine della curva intersezione di due superficie Ψ^n (fuori delle linee-base) dovrà superare l'ordine della curva intersezione di due Φ^n. Ma ciò è impossibile, perchè sia l'una che l'altra curva segano un piano ω del fascio in uno stesso numero di punti, che è dato dal grado del sistema $|\Gamma^n_\omega|$. Si conclude che il sistema $|\Phi^n|$ di superficie coincide col sistema $|\Psi^n|$.

5. *Costruzione di una superficie che abbia un dato comportamento lungo certe curve-base assegnate* — Le considerazioni precedenti ci mostrano che il comportamento di una superficie Φ^n lungo certe curve-base assegnate

è in certo modo definito, quando sopra ogni piano ω di un fascio si conosca il sistema $|\Gamma^n_\omega|$ completo di curve, a cui appartiene la sezione di Φ^n con ω. Viceversa sopra ogni piano ω di un fascio venga assegnato un sistema $|\Gamma^n_\omega|$ completo di curve, i cui punti-base, al variare di ω, descrivano una o più curve-base (non contenenti l'asse del fascio); rimarrà definito allora un *comportamento* lungo quelle curve-base; e si potrà chiedere di costruire una superficie Φ che si comporti nel modo assegnato lungo le curve-base, vale a dire che seghi sopra ogni piano ω del fascio una curva Γ, la quale appartenga al sistema $|\Gamma^n_\omega|$ se è possibile, o almeno (pur differendo nell'ordine) abbia lo stesso comportamento delle curve Γ^n_ω nei loro punti-base.

La costruzione (quando non si faccia attenzione all'ordine di Φ) si eseguisce subito. Basta infatti fissare razionalmente sopra ogni piano ω del fascio una curva del corrispondente sistema $|\Gamma^n_\omega|$, e ciò si ottiene fissando razionalmente su ω un certo gruppo di punti in numero uguale alla dimensione di $|\Gamma^n_\omega|$ (dimensione che non varia al variare di ω, finchè ω sia un piano *generico* del fascio). Le ∞^1 curve che così otteniamo in corrispondenza ai piani del fascio, generano una superficie Φ che si comporta nel modo voluto lungo le curve-base nominate. Però l'ordine di Φ non sarà in generale n, ma $n+k$ con $k>0$, e l'asse del fascio sarà retta k^{upla} per Φ.

Va poi notato che degli elementi arbitrari, i quali compariscono in questa costruzione, si può sempre disporre in modo che la sezione Γ^n_ω della Φ con *uno* dei piani ω del fascio (all'infuori della retta k^{upla}) sia una curva assegnata a priori entro al corrispondente sistema $|\Gamma^n_\omega|$.

6. *Sistema di curve segato sopra un piano generico da un sistema lineare di superficie.* — Dalla costruzione precedente segue subito un corollario importante di cui ora vogliamo occuparci.

Per definire il comportamento di un sistema lineare di superficie $|\Phi|$ lungo le curve-base, basta conoscere, come già dissi, sopra ogni piano generico ω il sistema completo di curve $|\Gamma|$, a cui appartengono le sezioni di quelle superficie con ω. Se non interessa tener conto dell'ordine delle superficie Φ, allora anche l'ordine delle curve Γ, che fissano quel comportamento, sarà in nostro arbitrio; e si potrà sempre supporre di aver assunto quell'ordine n così elevato che il sistema completo di curve $|\Gamma^n|$ riesca *regolare*, e riesca pur *regolare* il sistema completo $|\Gamma^{n-1}|$ (n.° 1). Fatta questa ipotesi, siamo pur sicuri (n.° 1) che riescono regolari i sistemi completi di curve $|\Gamma^{n+1}|\ldots$ definiti dagli stessi punti base (e dal medesimo comportamento); e sappiamo inoltre (n.° 2, lemma II) che $|\Gamma^{n+1}|$ è il sistema di minima dimensione contenente ogni curva composta di una Γ^n e di una retta generica; che $|\Gamma^{n+2}|$ è il sistema di minima dimensione contenente ogni curva composta di una Γ^n e di una conica generica, od anche (si può dire) ogni curva composta di una Γ^n e di una retta doppia, ecc.

Ciò posto fissiamo sopra una posizione del piano ω una retta g arbitraria; e poi descriviamo sopra ogni piano per g il corrispondente sistema $|\Gamma^n|$. Allora col metodo indicato nel paragrafo precedente noi possiamo descrivere una superficie Φ^{n+k} che abbia l'ordine $n+k$, dove k è un numero abbastanza elevato, che si comporti nel modo voluto lungo le curve-base assegnate, e che seghi il piano ω di partenza lungo la retta g contata k volte, ed inoltre lungo una curva d'ordine n, che si può fissare ad arbitrio entro al sistema $|\Gamma^n|$. Ora ripetiamo la costruzione lasciando però variare sul piano ω di partenza, tanto quella curva scelta entro a $|\Gamma^n|$, quanto la retta g, asse del fascio di piani. Otterremo in corrispondenza infinite superficie Φ^{n+k}, le quali danno luogo ad un sistema lineare di superficie Φ^{n+k}; tutte queste si comportano nel modo voluto lungo le curve base assegnate, e segano sul piano ω un sistema lineare di curve d'ordine $n+k$, entro a cui giace ogni curva composta di una Γ^n e di una retta generica g contata k volte. Ma questo sistema di curve d'ordine $n+k$ è il sistema *completo*, e regolare $|\Gamma^{n+k}|$ (in virtù della ipotesi fatta su n). Dunque il sistema lineare contenente le superficie Φ^{n+k}, e a più forte ragione il sistema lineare *completo* $|\Phi^{n+k}|$, composto di tutte le superficie d'ordine $n+k$ che si comportano nel modo voluto lungo le curve base assegnate, sega sopra il piano ω un sistema *completo* di curve. Si ottiene così un primo risultato (*):

« Il sistema lineare delle superficie d'ordine sufficientemente elevato che « si comportano in modo assegnato lungo certe curve-base assegnate, sega « sopra un piano generico un sistema di curve completo (e regolare). »

Questo risultato si può però subito estendere al caso in cui il gruppo base che determina il sistema, si componga oltre che di curve-base, anche di punti-base isolati (in numero finito). Basta notare che partendo da una superficie Φ, la quale si comporti nel modo voluto lungo le curve-base assegnate, si può subito costruire una particolare superficie che soddisfi pure alle condizioni imposte dai punti-base isolati, pur di aggiungere alla Φ, per

(*) Lo stesso procedimento di dimostrazione, si trova esposto, in un caso particolare, nella Memoria sopra citata del sig. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria* ..., n.° 36.

ogni singolarità O che sia riunione di punti-base infinitamente vicini, un cono avente il vertice in quel punto O, e avente l'ordine sufficientemente elevato, in relazione colla singolarità del punto; il cono del resto può esser qualsiasi (*).

Ora partendo dal sistema di superficie $|\Phi^{n+k}|$ sopra considerato, si formino nuove superficie Φ^m d'ordine $m > n+k$ coll'aggiungere ad ogni Φ^{n+k} un numero sufficiente di coni, i cui ordini (assai elevati) diano per somma $m-(n+k)$. Lasciando variare tutti gli elementi arbitrari della costruzione, otterremo così infinite superficie Φ^m soddisfacenti a tutte le condizioni imposte dagli elementi-base, siano curve, siano punti isolati; e sarà determinato un sistema $|\Phi^m|$ di superficie contenente quelle Φ^m. Ora ripetendo il ragionamento fatto sopra, segue che il sistema di curve $|\Gamma^m|$ segato sopra un piano generico dal sistema di superficie $|\Phi^m|$, risulta ancora *completo* (e regolare). Si arriva dunque infine al seguente teorema fondamentale:

Un sistema lineare completo di superficie sega sopra un piano generico un sistema completo (regolare) di curve, ogniqualvolta l'ordine delle superficie supera un certo limite, che dipende dalla natura del gruppo-base del sistema primitivo.

7. *Dimensione virtuale e dimensione effettiva di un sistema completo di superficie.* — Le considerazioni seguenti mostrano l'interesse del teorema ora dimostrato.

Fissato un gruppo-base (di curve e punti), consideriamo i sistemi lineari di superficie dei vari ordini che son determinati da quel gruppo-base. In corrispondenza ad un valore n dell'ordine avremo un sistema $|\Phi^n|$, il quale segherà sopra un piano generico ω un sistema lineare di curve, che avrà i suoi punti-base nelle intersezioni di ω colle linee-base di $|\Phi^n|$. Se non facciamo nessuna ipotesi sopra il numero n, non possiamo esigere che il sistema di curve segato su ω sia *completo*; ma questo sistema sarà in ogni caso contenuto in un sistema completo $|\Gamma^n|$, ed avrà una certa deficienza $\delta_n > 0$. Non possiamo nemmeno esigere che il sistema completo $|\Gamma^n|$ sia *regolare*; per metterci nella ipotesi più generale, supporremo che esso abbia la sovrabbondanza $s_n \geq 0$, e quindi la dimensione (effettiva)

$$\rho_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k + s_n\,, \tag{α}$$

(*) Questa affermazione si trova giustificata nel n.° 30 della Memoria già citata del sig. Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari...*

dove k (indipendente da n) è la *postulazione* del gruppo dei punti-base di $|\Gamma^n|$ (n.° 1). Ne viene che il sistema di superficie $|\Phi^n|$ sega sopra il piano ω un sistema di curve avente la dimensione

$$\rho_n - \delta_n = \binom{n+2}{2} - 1 - k + (s_n - \delta_n). \qquad (\beta)$$

Se noi costringiamo una superficie di $|\Phi^n|$ a contenere $\rho_n - \delta_n + 1$ punti arbitrari del piano ω (dato che sia possibile), quella superficie si spezzerà nel piano ω ed in una superficie del sistema $|\Phi^{n-1}|$ che ha lo stesso gruppo-base di $|\Phi^n|$. Dunque se con r_{n-1}, r_n indichiamo le dimensioni dei due sistemi di superficie, abbiamo la relazione

$$r_{n-1} = r_n - (\rho_n - \delta_n + 1),$$

ossia

$$r_n - r_{n-1} = \rho_n - \delta_n + 1, \qquad (\gamma)$$

od anche

$$r_n - r_{n-1} = \binom{n+2}{2} - k + s_n - \delta_n \qquad (s_n \geqq 0,\ \delta_n \geqq 0). \qquad (\delta)$$

E questa relazione, come si riconosce subito, vale anche se il sistema $|\Phi^{n-1}|$ non esiste, purchè in tal caso si ponga -1 al posto della sua dimensione r_{n-1}. Ora facciamo crescere l'ordine n di un'unità per volta, ed insieme ad ogni sistema di superficie $|\Phi^n|$ consideriamo il sistema completo $|\Gamma^n|$ di curve piane, al quale appartengono le sezioni di $|\Phi^n|$ con un piano generico ω. Si arriverà anzitutto ad un certo valore i di n, dal quale in su (cioè per $n \geqq i$) il sistema $|\Gamma^n|$ di curve piane riuscirà *regolare* ($s_n = 0$). Per quei valori di n si avrà dunque

$$r_n - r_{n-1} = \binom{n+2}{2} - k - \delta_n \qquad (n \geqq i,\ \delta_n \geqq 0). \qquad (\varepsilon)$$

L'ordine n continui a crescere; il teorema precedente ci insegna che si arriverà poi ad un secondo valore $l \geqq i$, a partire dal quale (cioè per $n \geqq l$) il sistema di curve segato da $|\Phi^n|$ sul piano ω risulterà *completo* ($\delta_n = 0$), e coinciderà quindi col sistema regolare $|\Gamma^n|$. Avremo quindi

$$r_n - r_{n-1} = \binom{n+2}{2} - k \qquad (n \geqq l \geqq i). \qquad (\zeta)$$

L'ultima relazione si enuncia dicendo che al crescere di n, dal valore $l-1$ in su, la dimensione r_n di $|\Phi^n|$ percorre una progressione aritmetica di terzo ordine, di cui il termine generale può evidentemente scriversi sotto la forma

$$r_n = \binom{n+3}{3} - 1 - kn + k' \qquad (n \geqq l-1), \tag{1}$$

dove k' è una nuova costante (positiva o negativa), che dipende soltanto dalla natura del gruppo-base del sistema.

La formula (1) può anche enunciarsi dicendo che un qualsiasi gruppo base impone alle superficie di ordine n abbastanza elevato passanti per quel gruppo, un numero di condizioni espresso da $kn - k'$, dove k e k' sono due costanti che dipendono dalla natura del gruppo-base (e precisamente k dipende solo dalle curve-base, e non dai punti-base). L'espressione $kn - k'$ dicesi *postulazione del gruppo-base*, e la formula (1) prende il nome di *formula di postulazione* (o *formula caratteristica*) relativa a quel gruppo-base.

Un sistema lineare completo di superficie, il cui ordine sia sufficientemente elevato ($n \geqq l-1$) perchè la dimensione r_n venga espressa dalla formula di postulazione (1), dicesi *regolare*. Quel limite $l-1$ che l'ordine delle superficie deve superare od uguagliare, perchè il sistema sia regolare, dipende solo dalla natura del gruppo-base.

Per i valori di n inferiori a quel limite $l-1$, il secondo membro della formola (1) non dà più la vera dimensione, o *dimensione effettiva* r_n, del sistema $|\Phi^n|$ che si considera; ma esso ci dà tuttavia un carattere di cui è opportuno tener conto, e che sarà detto *dimensione virtuale* r'_n di $|\Phi^n|$. Sicchè abbiamo per ogni valore di n

$$r'_n = \binom{n+3}{3} - 1 - kn + k', \tag{2}$$

e per $n \geqq l-1$

$$r'_n = r_n.$$

L'errore che si commette assumendo il valore r'_n come dimensione del sistema $|\Phi^n|$ per $n < l-1$, si determina subito in base alle relazioni γ) e δ). Precisamente si trova

$$r_n = r'_n + \sum_{h=n+1}^{h=l-1} \delta_h \qquad \text{per } n \geqq i-1, \tag{3}$$

ed

$$r_n = r'_n + \sum_{h=n+1}^{h=l-1} \delta_h - \sum_{h=n+1}^{h=i-1} s_h \qquad \text{per } n < i-1. \tag{4}$$

La formola (3) può interpretarsi così: « Sia $|\Phi^n|$ un sistema completo di « superficie di ordine n abbastanza elevato ($n \geqq i-1$) perchè i sistemi $|\Phi^{n+1}|$,

« $|\Phi^{n+2}|\ldots$, determinati dallo stesso gruppo-base, seghino sopra un piano « generico sistemi di curve, che (completati ove occorra) siano regolari. In « questa ipotesi la dimensione effettiva di $|\Phi^n|$ supera, od uguaglia, la di- « mensione virtuale del sistema stesso; e la differenza è espressa dalla somma « delle deficienze di quei sistemi di curve piane che abbiamo nominati. » Il caso contenuto in questo enunciato ($r_n \geq r'_n$) è dunque perfettamente analogo a quello che presentano tutti i sistemi completi di curve piane ($\rho_n \geq \rho'_n$; v. n.° 1).

Ma per le superficie si arriva ad un caso nuovo, quando l'ordine di $|\Phi^n|$ è inferiore a quel limite $i-1$ che comparisce nell'ultimo teorema. Infatti allora l'errore $r_n - r'_n$ a cui dà luogo la formola di postulazione nel calcolo di r_n, si compone (come risulta dalla (4)) di due parti aventi segni opposti. La parte positiva è data ancora dalla somma delle deficienze dei sistemi di curve segati sopra un piano generico dai sistemi di superficie $|\Phi^{n+1}|$, $|\Phi^{n+2}|\ldots$; mentre la parte negativa è data dalla somma delle sovrabbondanze degli stessi sistemi di curve piane (completati ove occorra). Non è dunque facile di prevedere a priori il segno dell'errore complessivo quando $n < i-1$; e quell'errore potrebbe anche esser nullo ($r_n = r'_n$). Tuttavia anche nell'ultimo caso si continuerà a dire che il sistema $|\Phi^n|$ è irregolare; e si aggiungerà che esso presenta due cause uguali ed opposte di irregolarità; riservando l'appellativo *regolare* ad un sistema per cui ciascuna delle due cause di irregolarità svanisca. Questa almeno sembra per ora la convenzione più opportuna.

8. *Una osservazione sulla formola di postulazione.* — Affinchè la formula di postulazione (2) possa effettivamente applicarsi al calcolo della dimensione di un sistema $|\Phi^n|$ di superficie definito da un gruppo-base assegnato, occorre conoscere i valori delle costanti k, k' relative a quel gruppo base. Ora la determinazione di k si riduce ad un problema di geometria piana che si può ritener risoluto; giacchè k è la postulazione del gruppo di punti-base, che si ottiene segando con un piano generico le curve-base del sistema di superficie. Più difficile riesce il calcolo di k'; e sebbene in molti casi i sigg. Cayley (*) e Nöther (**) abbiano insegnato il modo di determinare k', in funzione dei caratteri del gruppo-base, non si può dir tuttavia che il problema sia risoluto nelle ipotesi più generali.

(*) *On the Deficiency of certain Surfaces*, Math. Annalen, 3, 1871.

(**) *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di Matem., s.ᵉ II, t.° 5.°, 1871.

Del resto per continuare le nostre ricerche non occorre di conoscere quelle espressioni di k e k', ma basta di aver mostrato *a priori* l'esistenza di una formola per il calcolo di r_n, e di averne indicato l'aspetto (*). E solo per portare un esempio (del resto notissimo), ricorderò che nel caso elementare in cui il gruppo-base del sistema $|\Phi^n|$ si compone di una sola curva d'ordine N e genere Π, per la quale le Φ^n devono passare semplicemente, le costanti k e k' hanno i valori seguenti

$$k = N, \qquad k' = \Pi - 1.$$

9. *Un lemma sopra i sistemi completi di superficie.* — Ora noi vogliamo procurarci un lemma sopra i sistemi completi di superficie, lemma che riceverà nel seguito importanti applicazioni.

Fissato un gruppo-base, noi sappiamo che ad ogni valore (abbastanza elevato) dell'ordine n corrisponde un sistema lineare $|\Phi^n|$ di superficie determinato completamente da quel gruppo-base; continueremo ad indicare con r_n la dimensione effettiva di $|\Phi^n|$. Il sistema $|\Phi^n|$ sega sul piano generico ω un sistema di curve, che o è completo, od è contenuto in un sistema completo ben determinato; si indicherà ancora con $|\Gamma^n|$ l'ultimo sistema completo (con Γ^n una sua curva generica), e con ρ_n la sua dimensione effettiva; il sistema delle sezioni di $|\Phi^n|$ avrà invece la dimensione $\rho_n - \delta_n$, indicando con $\delta_n \geqq 0$ la deficienza di esso. Se poi si dovranno attribuire particolari posizioni $\omega_1, \omega_2, \ldots$ al piano generico ω, i corrispondenti sistemi completi di curve verranno designati con $|\Gamma_1^n|$, $|\Gamma_2^n|, \ldots$ Va notato ancora che in luogo dell'ordine n, si avranno da considerare ordini decrescenti $n-1$, $n-2, \ldots$, dei quali si terrà conto modificando gli indici nei simboli adottati.

Ciò premesso, volendo arrivare gradatamente alla questione che ci interessa, proponiamoci anzitutto una domanda molto semplice. Sopra un piano generico ω_1 si fissa una curva Γ_1^n del sistema $|\Gamma_1^n|$ già nominato; « esisterà « una superficie Φ^n la quale seghi il piano ω_1 lungo la curva Γ_1^n (senza con- « tener il piano stesso)? ». Per risponder alla domanda si osservi: 1.°) che la condizione imposta ad una delle ∞^{r_n} superficie Φ^n di contenere una tra le ∞^{ρ_n} curve Γ_1^n, equivale a ρ_n condizioni semplici, per modo che le Φ^n che vi

(*) Il sig. ENRIQUES ed io abbiamo già mostrato in varie occasioni, come non occorra conoscere le espressioni di k e k', quando si applicano i sistemi lineari di superficie aggiunte allo studio della geometria sopra una superficie. Si veda per es. il n.° 37 della *Introduzione* ... citata del sig. ENRIQUES.

soddisfanno, formano un sistema di dimensione $r_n - \rho_n$; 2.°) che le Φ^n, le quali contengono tutto il piano ω_1 (e quindi si spezzano in esso ed in una residua Φ^{n-1}), formano un sistema di dimensione r_{n-1}. Segue da questa osservazione che se è

$$r_n - \rho_n > r_{n-1}, \tag{α_1}$$

allora esistono superficie Φ^n che passano per Γ_1^n senza contenere ω_1; (mentre l'opposto accadrebbe se al segno $>$ nella (α_1) si dovesse sostituire il segno $=$). Alla disuguaglianza (α_1), il cui verificarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè la domanda sopra enunciata ammetta una risposta affermativa, si può anche dare un'altra forma, tenendo conto della relazione (δ) del n.° 7. Infatti la (α_1) si traduce subito nella

$$\delta_n < 1, \tag{β_1}$$

(ossia $\delta_n = 0$), dove δ_n ha il significato convenuto.

Ora muoviamo un altro passo verso la nostra meta. Conduciamo due piani ω_1, ω_2 generici per una retta g, e fissiamo sopra di essi ordinatamente le curve Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} generiche entro ai sistemi $|\Gamma_1^{n-1}|$, $|\Gamma_2^{n-1}|$ che appartengono a quei piani; « esiste una superficie Φ^n la quale passi per la retta g, « e seghi i piani ω_1 e ω_2 lungo le curve Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} (senza contenere i piani « stessi)? » Per rispondere si osserverà: 1.°) che la curva composta $\Gamma_1^{n-1} + g = \Gamma^n$ impone (al più) ρ_n condizioni ad una Φ^n che debba contenerla; 2.°) che una Φ^n la quale passi per g, deve ancora soddisfare a ρ_{n-1} condizioni per contenere una Γ_2^{n-1} tra le $\infty^{\rho_{n-1}}$ curve di $|\Gamma_2^{n-1}|$; 3.°) che le Φ^n, le quali si spezzano nei due piani ω_1, ω_2 ed in una Φ^{n-2} residua, variabile, formano un sistema $\infty^{r_{n-2}}$. Si concluderà dunque che se

$$r_n - \rho_n - \rho_{n-1} > r_{n-2}, \tag{α_2}$$

ossia

$$\delta_n + \delta_{n-1} < 2, \tag{β_2}$$

esistono Φ^n che passano per la retta g e per le due curve Γ_1^{n-2}, Γ_2^{n-2}, senza contenere tutti e due i piani di queste curve ω_1, ω_2. E a questo proposito va notato, che (per ragioni di simmetria) non può accadere che *ogni* Φ^n costretta a passare per g, Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1}, venga a contenere *uno solo* dei piani ω_1, ω_2, a meno che quel piano non abbia una particolare posizione rispetto al gruppo-base di $|\Phi^n|$; il che si esclude.

Giovérà muovere ancora un terzo passo verso la soluzione del nostro problema; esso corrisponde alla questione seguente. Sopra tre piani generici

ω_1, ω_2, ω_3 condotti per la retta g si fissino le curve Γ_1^{n-2}, Γ_2^{n-2}, Γ_3^{n-2} generiche entro ai rispettivi sistemi; « esiste una superficie Φ^n che passi doppia- « mente per la retta g, e che seghi inoltre i piani ω_1, ω_2, ω_3 lungo le curve « Γ_1^{n-2}, Γ_2^{n-2}, Γ_3^{n-2} (senza contenere i piani stessi)? ». Si osserverà che le condizioni imposte alla Φ^n equivalgono: 1.°) al passaggio per la curva $\Gamma_1^{n-2}+2\,g=\Gamma_1^n$ di ω_1 (ρ_n condizioni semplici, al più); 2.°) al passaggio per la curva $\Gamma_2^{n-2}+g=\Gamma_2^{n-1}$ di ω_2 (ρ_{n-1} condizioni semplici, al più); 3.°) al passaggio per la curva Γ_3^{n-2} di ω_3 (ρ_{n-2} condizioni semplici); si osserverà inoltre: 4.°) che le Φ^n contenenti i tre piani ω_1, ω_2, ω_3 sono $\infty^{r_{n-3}}$. Si concluderà dunque che se

$$r_n-\rho_n-\rho_{n-1}-\rho_{n-2}>r_{n-3}\,, \tag{α_3}$$

ossia se

$$\delta_n+\delta_{n-1}+\delta_{n-2}<3\,, \tag{β_3}$$

esistono Φ^n che passano doppiamente per g e semplicemente per Γ_1^{n-2}, Γ_2^{n-2}, Γ_3^{n-2}, senza contenere i piani delle tre curve.

Ormai siamo autorizzati ad enunciare il risultato generale, senza che occorra ripetere il ragionamento, di cui il concetto risulta chiaramente dalle cose dette:

« Se m è un numero minore di n, ma sufficientemente alto perchè esista « sul piano generico ω il sistema $|\Gamma^m|$; se inoltre sussiste la relazione

$$« \ \delta_n+\delta_{n-1}+\cdots+\delta_m<n-m+1\,;$$

« allora esiste certo una superficie Φ^n (del sistema $|\Phi^n|$) che passa $n-m$ « volte per una retta assegnata, e sega inoltre $n-m+1$ piani passanti per « la retta lungo curve Γ^m assegnate (senza contener questi piani) ».

Conviene però di presentare l'enunciato sotto un'altra forma, affinchè risulti più chiaro. A tal fine indichiamo con Δ la somma

$$\Delta=\delta_m+\delta_{m+1}+\cdots+\delta_n\,,$$

dove n si suppone tanto grande che riescano nulli δ_{n+1}, δ_{n+2},...; la disuguaglianza precedente si trasforma allora nella

$$n>\Delta+m-1\,;$$

e questa ci dice che, dati m e Δ, basta assumere $n=\Delta+m$ affinchè il teorema si verifichi. Ciò posto possiamo dire:

Dato un gruppo di linee e punti-base, si considerino i sistemi completi di superficie degli ordini m, $m+1$,..., che passano con date molteplicità *per quelle linee-base e per quei punti-base; si considerino inoltre i sistemi di curve che quelle superficie segano sopra un piano generico, sistemi aventi le deficienze δ_m, $\delta_{m+1}, \ldots$, e contenuti in certi sistemi completi* $|\Gamma^m|$, $|\Gamma^{m+1}|, \ldots$; *e si indichi con* Δ *la somma di tutte quelle deficienze*

$$\Delta = \delta_m + \delta_{m+1} + \cdots$$

Allora esiste certo una superficie Φ *d'ordine* $m + \Delta$ *che passa colle molteplicità assegnate per gli elementi-base nominati, che passa inoltre* Δ *volte per una retta assegnata ad arbitrio, e che sega* $\Delta + 1$ *piani generici condotti per la retta lungo altrettante curve* Γ^m *arbitrariamente scelte entro ai sistemi* $|\Gamma^m|$ *giacenti su quei piani. La superficie* Φ *di cui si parla, non contiene i* $\Delta + 1$ *piani.*

Va notato che il procedimento di dimostrazione non esclude che il teorema possa verificarsi anche quando, nell'ultima parte dell'enunciato, si sostituisca a Δ un numero inferiore; certo poi si verifica se si sostituisce a Δ un numero superiore.

Osservazione. — Non sarà inutile ricordare che quando il sistema $|\Gamma^m|$ è regolare, Δ può anche definirsi come la differenza tra la dimensione effettiva r_{m-1} e la dimensione virtuale r'_{m-1} del sistema delle superficie d'ordine $m - 1$, che passano colle moltiplicità dovute per gli elementi base assegnati. Ciò fu notato nel n.° 7.

10. *Un esempio atto a mostrare come si applichi l'ultimo lemma.* — Solo in seguito apparirà il frutto che si può ricavare dal teorema precedente, quando lo applicheremo a particolari sistemi completi di superficie. Ma per mostrare sin d'ora come esso possa giovare, fermiamoci ad un esempio semplicissimo (non collegato col seguito), facendo così una breve digressione alle nostre ricerche.

Supponiamo data nello spazio una curva *sghemba* del quinto ordine K^5, che può anche spezzarsi in più curve. Sopra un piano generico ω dello spazio le cinque intersezioni con K^5 determinano una conica Γ^2 (fatta eccezione per un particolare spezzamento di K^5 che escludiamo). Se il piano ω ruota intorno ad una retta g, la conica Γ^2 descrive una particolare superficie Φ^n che passa semplicemente per K^5, ed $n - 2$ volte per la retta g; « qual'è l'ordine n di questa superficie? »

Volendo applicare il teorema precedente, notiamo anzitutto che qui è $m = 2$. Per procurarci il valore di Δ, seguendo l'ultima osservazione del paragrafo precedente, dobbiamo anzitutto cercare la dimensione effettiva r_1 del sistema dei piani (Φ^{m-1}) che passano per K^5, dimensione che deve ritenersi uguale a -1, giacchè nessun piano passa per K^5; in secondo luogo dobbiamo cercare la dimensione virtuale del sistema stesso, la quale è espressa (n.° 8) da

$$r'_1 = 3 - 5 + \Pi - 1 = \Pi - 3,$$

dove Π è il genere della curva K^5 (irriducibile o spezzata). Segue che è

$$\Delta = r_1 - r'_1 = 2 - \Pi.$$

Si conclude adunque, in virtù dell'ultimo teorema, che « esiste una su« perficie d'ordine $m + \Delta = 4 - \Pi$ la quale passa semplicemente per K^5, e « passa $2 - \Pi$ volte per la retta g » (e può inoltre assoggettarsi a contenere certe coniche, condizione che nel caso presente segue dalle precedenti). Questa superficie Φ d'ordine $4 - \Pi$ sega dunque sopra ogni piano per g la conica determinata dalle intersezioni di K^5 con quel piano. Segue che la Φ è la superficie richiesta $(n = 4 - \Pi)$, o in casi particolari si spezza nella richiesta ed in piani passanti per g; *in ogni caso è* $n < 4 - \Pi$.

La relazione $n = 4 - \Pi$ del resto si verifica direttamente nei casi che la K^5 sia una curva irriducibile di genere 2 $(n = 2)$, di genere 1 senza punto doppio $(n = 3)$, di genere 0 senza punti doppi $(n = 4), \ldots$, o si componga di cinque rette generiche sghembe a due a due $(\Pi = -4,\ n = 8)$.

CAPITOLO II.

Alcune proprietà fondamentali dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Le proprietà contenute nei paragrafi precedenti sono di natura *proiettiva*; lo studio di quelle non è lo scopo del nostro lavoro. Esse ci daranno solo un mezzo per risolvere alcune questioni sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie, questioni che appartengono alla *Geometria sopra l'ente algebrico*, vale a dire a quel ramo di geometria, in cui si considerano come identici due enti, tra i quali passi una corrispondenza birazionale.

E a questo proposito, perchè il lettore possa chiaramente distinguere anche nel seguito quali considerazioni siano da considerarsi come mezzi di ricerca, e quali siano propriamente i risultati che si hanno di mira, gioverà ripetere alcune osservazioni già fatte altrove (*).

11. *Due aspetti sotto i quali viene considerata una superficie algebrica.* — In tutto questo lavoro (e quasi sempre nelle ricerche affini) una superficie algebrica viene considerata sotto due aspetti diversi.

Talvolta infatti si fa attenzione ai caratteri *proiettivi* della superficie, si assegna la superficie in *senso proiettivo.* Si suppone allora di conoscere l'ordine della superficie, lo spazio lineare a cui appartiene, i punti singolari che la superficie possiede, ecc.; e si considerano come identiche due superficie, che si ottengano l'una dall'altra con una corrispondenza proiettiva tra gli spazi cui appartengono. In linguaggio analitico, limitandosi allo spazio ordinario, si può dire che si assegna la equazione della superficie in coordinate proiettive, ritenendo come equivalenti due equazioni, delle quali l'una segua dall'altra con una trasformazione lineare eseguita sulle variabili.

Talvolta invece si fa astrazione da ogni carattere proiettivo della superficie, si assegna la superficie in *senso invariantivo* (rispetto alle trasformazioni birazionali). Sotto questo nuovo aspetto non si parla più di ordine della superficie, di spazio a cui la superficie appartiene...; tutti i punti della superficie vanno considerati come semplici, sebbene ogni superficie dello spazio *ordinario*, che sia immagine proiettiva di quella considerata, possa avere punti multipli. Ma si bada soltanto a quei caratteri della superficie (generi, moduli, ecc.), che non vengono alterati mediante una trasformazione birazionale applicata alla superficie. E si considerano come identiche due superficie che si corrispondano birazionalmente. Parlando il linguaggio dell'algebra si può dire che sotto questo nuovo aspetto, la superficie non è rappresentata da *una* equazione in coordinate proiettive, ma piuttosto dal campo di razionalità che una equazione algebrica, a tre coordinate, determina, riguardando come equivalenti due equazioni che diano luogo allo stesso campo di razionalità (fatta astrazione da irrazionalità numeriche).

Volendo collegare i due modi di considerare una stessa superficie, dobbiamo dire che, data una superficie proiettivamente, rimane *individuata* una superficie in senso invariantivo. Ma, viceversa, ad una superficie pensata nell'ultimo senso, corrispondono infinite superficie proiettivamente distinte, di vari

(*) Si veda ad es. il Cap. I della Monografia citata, *Sur quelques récents résultats...*

ordini, appartenenti a vari spazi, ecc. E ciascuna di queste va considerata come una immagine proiettiva della superficie data in senso invariantivo.

12. *Sistema lineare di curve sopra una superficie.* — L'ente che offre il mezzo di fissare una tra le infinite immagini proiettive, che corrispondono ad una stessa superficie data in senso invariantivo, è il *sistema lineare di curve.*

È noto come un tale sistema si definisca, ricorrendo per maggior chiarezza ad una immagine proiettiva della superficie data F, contenuta (per esempio) nello spazio ordinario. Un sistema lineare di superficie algebriche (che possono venire anche costrette a passare per alcune curve fisse di F e per alcuni punti fissi di F) sega su F un *sistema lineare di curve.* Si riconosce subito che una trasformazione birazionale tra due superficie muta un sistema lineare di curve dell'una in un sistema analogo tracciato sull'altra. In virtù di questa osservazione si può immaginare un sistema lineare di curve sopra una superficie, facendo astrazione dai caratteri proiettivi di questa; si arriva così al concetto di *sistema lineare di curve sopra una superficie data in senso invariantivo.*

Nel seguito, quando non si dichiari il contrario, la curva C di un sistema lineare $|C|$ sarà supposta *irriducibile.* Le curve del sistema possono passar tutte per alcuni punti fissi della superficie, punti che vanno riguardati come semplici per questa, quando la superficie sia data in senso invariantivo, ma possono esser semplici o multipli per le curve del sistema $|C|$. Questi punti si dicono *punti-base* del sistema. D'ordinario il *gruppo-base* di un sistema $|C|$ contiene *tutti* i punti-base che sono comuni alle curve del sistema; in casi particolari però conviene di riguardare come punti-base *solo una parte* dei punti suddetti, considerando gli altri punti come mutue intersezioni delle curve C, che son venute a cadere in punti fissi. Naturalmente quando si voglia adottare l'ultima convenzione, bisognerà dichiararlo espressamente, e fissare quali punti si riguardano come base; altrimenti si intenderà definito il gruppo-base nel modo ordinario.

Quando sia fissato il gruppo-base di un sistema $|C|$, rimangono definiti alcuni caratteri del sistema stesso, che godono proprietà invariantive, e sono: *la dimensione* r, numero dei punti generici che occorre assegnare per individuare una curva del sistema; *il genere* π della curva C generica, della quale si riguardino come multipli solo i punti che cadono nei punti-base fissati di $|C|$; *il grado* n, numero di quelle intersezioni di due C generiche che cadono fuori dei punti-base, intersezioni che variano al variare delle C, quando il gruppo-base comprende (come in generale) ogni punto fisso comune a tutte le C.

Ora quando è dato sopra una superficie F, definita invariantivamente, un sistema lineare di curve $|C|$ di dimensione $r > 2$, rimane determinata proiettivamente nello spazio lineare a r dimensioni S_r una superficie F', semplice o multipla, d'ordine n in generale, che corrisponde birazionalmente alla F, in guisa che alle curve C di questa corrispondano le sezioni di F' praticate cogli iperpiani S_{r-1} di S_r. La F' può dunque considerarsi come la immagine proiettiva della F, ottenuta fissando su questa il particolare sistema di curve $|C|$.

Viceversa quando si definisce una superficie F' mediante i suoi caratteri proiettivi (lo spazio S_r a cui appartiene, ecc.), si viene a definire non solo la superficie F, in senso invariantivo, di cui la F' è la immagine, ma pure un particolare sistema ∞^r di curve sopra F, il quale corrisponde al sistema delle sezioni iperpiane di F'.

13. *Punti multipli e curve fondamentali.* — Ad ogni particolarità proiettiva della superficie F' corrisponde una particolarità invariantiva (per trasformazioni birazionali) del sistema di curve $|C|$, che rappresenta su F il sistema delle sezioni iperpiane di F'. Così ad un punto multiplo O', centro di una singolarità di F', corrisponde su F un gruppo di punti od una curva Ω, che presenta una sola condizione alle curve di $|C|$ costrette a contenere quel gruppo o quella curva. E la curva Ω (limitandoci al caso della curva, che è il più interessante) non è segata dalle curve di $|C|$ in nessun punto fuori dei punti-base del sistema. Una curva, semplice o composta, che goda le due proprietà notate per Ω, dicesi *curva fondamentale* del sistema $|C|$. Viceversa ad una curva fondamentale Ω di $|C|$ corrisponde un punto O' di F', che può esser multiplo od anche semplice (e nell'ultimo caso la curva Ω di F dicesi talvolta *eccezionale*, *ausgezeichnete*).

La natura dell'intorno del punto O' di F' si riflette nella natura della curva fondamentale Ω. Ma delle varie considerazioni che si potrebbero fare sull'argomento, a noi interessa soltanto la seguente:

Supponiamo per maggior chiarezza che la superficie F' di cui si parla appartenga allo spazio ordinario; a questo caso possiamo sempre ridurci partendo da una superficie di un iperspazio, e ricorrendo ad una conveniente proiezione. Pel punto O' di F' si conduca un piano generico, il quale segherà la F' lungo una certa curva. Paragonando il genere di questa al genere della sezione piana generica di F', due casi potranno darsi, poichè il genere della prima curva può essere uguale o minore del genere della seconda. Il primo caso si presenta ad esempio se O' è punto semplice di F', o se è punto generico di una curva multipla di F', od anche se O' è punto triplo tanto per la superficie F', quanto per una curva doppia giacente su di essa; ecc. Un esempio del secondo caso è offerto da un punto multiplo O', il quale non appartenga a nessuna curva multipla della superficie. Ora nelle ricerche che andremo sviluppando, interessa appunto la distinzione dei punti multipli di una superficie secondo il criterio qui fissato; ed ha invece minore importanza la classificazione dei punti multipli di cui abbiamo parlato al n.° 3. Perciò modificando leggermente una locuzione di cui allora si faceva uso, limiteremo il concetto di *punto multiplo isolato* di una superficie F', e lo riserveremo solo ad un punto O' il quale abbassi il genere di una sezione della superficie ottenuta con un piano passante per esso; mentre gli altri punti multipli di F' si diranno *non isolati.* Diremo poi che ad un punto multiplo *isolato* di F' corrisponde una curva fondamentale *propria* del sistema $|C|$, che sulla superficie F rappresenta le sezioni piane di F'; mentre ad un punto *non isolato* di F' (eventualmente anche semplice) corrisponde una curva fondamentale *impropria.* Volendo introdurre direttamente questi ultimi concetti sul sistema lineare $|C|$, senza ricorrere alla rappresentazione proiettiva, basta dire che la curva Ω fondamentale di un sistema ∞^r $|C|$ è *impropria*, se le ∞^{r-1} curve C_1 che insieme ad Ω costituiscono curve di $|C|$, hanno lo stesso genere delle C; ed è *propria* nel caso opposto.

Osservazione. — Le considerazioni svolte negli ultimi due paragrafi mostrano quale vantaggio si possa raggiungere nella ricerca delle proprietà dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie F, quando in luogo della F si consideri una particolare immagine proiettiva F' di questa. Se infatti la F' dello spazio S_r è costruita in modo che le sue sezioni iperpiane corrispondano alle ∞^r curve del sistema $|C|$ considerato sopra F, le proprietà proiettive di F' si tradurranno in proprietà di quel sistema $|C|$. E se la dimensione r di $|C|$ è >3 converrà spesso, staccando entro a $|C|$ un sistema lineare ∞^3, di procurarsi una immagine F'' di F situata nello spazio ordinario (proiezione della F' di S_3); alla F'' si potranno applicare nel miglior modo le nozioni di geometria proiettiva che si posseggono sulle superficie del nostro spazio.

Ma accanto ai vantaggi che questo metodo presenta, i quali consistono nello sfruttare a favore di una teoria in formazione « geometria sull'ente algebrico », i risultati di una teoria già classica « geometria proiettiva », si presentano però alcuni inconvenienti. Infatti perchè la rappresentazione proiettiva della F (su cui sta il sistema $|C|\ \infty^r$) mediante la superficie F' di S_r riesca veramente proficua, occorre, o almeno giova, che la F' sia una superficie *irriducibile*; ciò si traduce in una condizione da imporsi al sistema $|C|$, per la quale le ∞^{r-1} curve C che passano per un punto generico di F, non devono in conseguenza passare per un secondo punto determinato dal primo e variabile con questo (sicchè intanto deve essere in generale $r > 2$); si esige insomma, come si suol dire, che il sistema $|C|$ sia semplice. Inoltre si suppone di riguardare come punto-base di $|C|$, *ogni* punto che sia comune a tutte le C. Pur facendo astrazione da quest'ultima avvertenza, che dipende almeno in parte dal nostro arbitrio, diremo tuttavia che il metodo proiettivo si presta nel miglior modo allo studio dei sistemi semplici di curve situati sopra una superficie F. Ora delle proprietà che si trovano per i sistemi semplici, la maggior parte vale anche per i sistemi non semplici; ma per dimostrar queste col metodo proiettivo occorrono in generale ulteriori considerazioni; giova per esempio assumere come immagine proiettiva di F una superficie F' dello spazio ordinario, su cui non tutti i piani, ma solo gli ∞^2 piani di una stella seghino un sistema, non semplice, corrispondente al sistema dato o a parte di questo; ecc.

Per le ragioni qui addotte, e per conciliare due fini altrettanto importanti, quali sono la soppressione di tutte le restrizioni inutili negli enunciati, e la chiarezza di esposizione, mi son deciso a seguire spesso nel presente lavoro questo procedimento: dimostro un teorema sul sistema lineare $|C|$ di curve, valendomi della rappresentazione proiettiva, e supponendo che $|C|$ sia un sistema semplice; poi dò un cenno della via da tenersi per estendere lo stesso risultato a tutti i sistemi $|C|$ anche non semplici; e ciò mi permette di enunciare il teorema senza tener conto di quella restrizione superflua.

14. *Operazioni elementari sopra i sistemi lineari di curve.* — Basterà dare un semplice cenno sopra alcuni concetti fondamentali che intervengono continuamente nello studio dei sistemi lineari di curve sopra una superficie. Un esame particolareggiato di questi concetti si troverà altrove (*).

(*) V. l'*Introduzione*... già citata dal sig. Enriques (n.° 9 e seg.), e la Monografia pure citata *Sur quelques récents résultats*..., (n.° 8 e seg.).

Sopra una superficie, data in senso invariantivo, si conosca un sistema lineare $|C|$ di curve, del quale sia fissato il gruppo-base; e siano r, n, π la dimensione, il grado ed il genere di $|C|$, rispetto a quel gruppo-base. Allora può accadere che si possa *ampliare* il sistema $|C|$ mantenendo costante il grado n, vale a dire, che si possa costruire un nuovo sistema di dimensione $> r$, il quale contenga $|C|$ ed abbia lo stesso grado di $|C|$. Questa operazione, applicata finchè è possibile, conduce però necessariamente (partendo da $|C|$ col gruppo-base assegnato), ad un *unico* sistema di grado n che non può ulteriormente ampliarsi e che dicesi *completo* (rispetto al grado). « Ogni « sistema lineare di curve sopra una superficie è contenuto in *un* determinato « sistema completo dello stesso grado. » In particolare sul piano un sistema completo di curve, si dice d'ordinario *determinato* dai punti-base; e la stessa locuzione potrebbe anche adoperarsi sulle superficie. Al concetto invariantivo di *sistema completo* corrisponde il concetto proiettivo di *superficie normale*, superficie di un certo spazio che non può ottenersi come proiezione di una superficie dello stesso ordine di uno spazio più elevato. Precisamente: le sezioni iperpiane di una superficie normale formano un sistema completo, e viceversa.

Dati sopra una superficie (in senso invariantivo) due sistemi completi di curve $|C|$ e $|D|$, coi loro gruppi-base, aventi le curve generiche C e D, rimane definito un nuovo sistema completo $|C+D|$, che contiene tutte le curve $C+D$, ed ha per gruppo-base la riunione dei gruppi-base dei sistemi primitivi; il nuovo sistema dicesi *somma* dei due sistemi $|C|$ e $|D|$. In particolare se $|C|$ e $|D|$ coincidono, si arriva al sistema $|2C|$ *doppio* di $|C|$; e similmente si definisce il sistema $|kC|$ *multiplo di* $|C|$ *secondo il numero* k (intero, positivo).

La operazione inversa dell'addizione, mediante la quale dai sistemi $|C+D|$ e $|C|$ si ritorna al sistema $|D|$, dicesi *sottrazione*; e $|D|$ dicesi *residuo di* $|C|$ *rispetto a* $|C+D|$.

15. *Sistema aggiunto ad un sistema dato; definizione invariantiva.* — Oltre alle operazioni sopra indicate, ve n'è un'altra che gode una particolare importanza, e che si applica ad ogni sistema completo $|C|$ di curve appartenente ad una superficie; è l'operazione di *aggiunzione*, mediante la quale si passa dal sistema $|C|$ ad un nuovo sistema di curve $|C'|$, *sistema aggiunto* a $|C|$. Definiamo anzitutto questa operazione, sotto l'aspetto invariantivo.

Si è trovato opportuno, in vista delle conseguenze a cui porta, di definire il sistema aggiunto mediante la via indiretta che viene qui esposta (*):

« Sia $|C|$ un sistema completo di curve sopra una superficie data in« variantivamente. Rimane allora completamente definito un secondo sistema « completo $|C'|$ mediante le due proprietà seguenti:

« 1) il sistema $|C'|$ sega sopra la curva C generica, supposta di ge« nere π, gruppi della serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$;

« 2) qualunque sia il sistema $|D|$ sulla superficie, il sistema $|C'+D|$ « sega sulla curva generica, supposta irriducibile, di $|C+D|$ gruppi della « serie canonica; ciascuno di questi gruppi però contiene h punti riuniti in « ogni punto che sia base h^{uplo} per $|D|$ e non sia base per $|C|$.

« Il sistema $|C'|$ così definito dicesi *sistema aggiunto* a $|C|$. »

In varie occasioni è opportuno di presentare lo stesso concetto, contenuto nella definizione, sotto forma di teorema; si arriva così al *teorema fondamentale sul sistema aggiunto:*

« Siano $|C|$ e $|D|$ due sistemi lineari di curve situati sopra una stessa « superficie, e sia $|C'|$ il sistema aggiunto a $|C|$, e $|(C+D)'|$ il sistema « aggiunto alla somma $|C+D|$; ciò posto, il sistema $|C'|$ addizionato « a $|D|$ dà luogo ad un sistema $|C'+D|$, che è contenuto nel sistema « $|(C+D)'|$, e ne differisce in ciò soltanto, che ogni punto il quale sia « base h^{uplo} per $|D|$ e non sia base per $|C|$, risulta multiplo secondo h « per $|C'+D|$, e multiplo secondo $h-1$ per $|(C+D)'|$. »

Se però ogni punto-base del sistema $|D|$ è pur base per $|C|$, si ha senz'altro l'identità

$$|C+D'|=|(C+D)'|.$$

Tornando alla definizione del sistema aggiunto a $|C|$, non è detto che ogni sistema $|C|$ abbia sistema aggiunto $|C'|$; e ad esempio $|C'|$ manca, se $|C|$ ha il genere zero. Ma in ogni caso, supposto che $|C|$ sia almeno ∞^2, si riconosce che anche quando manca $|C'|$, esiste tuttavia il sistema $|(kC)'|$ aggiunto a $|kC|$, in corrispondenza ai valori (interi, positivi) abbastanza elevati di k; e si possono sempre scrivere le identità, conseguenze del teorema fondamentale,

$$|(kC)'|=|C'+(k-1)C|=|(2C)'+(k-2)C|=\cdots,$$

(*) Enriques, *Introduzione...*, Cap. IV; cfr. inoltre la Monografia *Sur quelques récents résultats...*, Cap. IV.

delle quali alcune sarebbero puramente convenzionali quando i sistemi $|C'|, \ldots$ non esistessero.

16. *Definizione proiettiva del sistema aggiunto; superficie aggiunte ad una data superficie.* — Ricorrendo a considerazioni di indole proiettiva, si può dare del sistema aggiunto un'altra definizione, storicamente la prima (*), che può sembrare più semplice della precedente, ma che non penetra così profondamente come quella nel legame che passa tra un sistema di curve ed il sistema aggiunto. Tuttavia anche questa seconda definizione ha molta importanza per noi.

Sia F una superficie data mediante i suoi caratteri proiettivi; si sappia che F appartiene allo spazio ordinario, ha un certo ordine n, certe curve multiple, certi punti multipli isolati. Si fissi l'attenzione sopra il sistema lineare delle sezioni piane di F, o meglio sopra il sistema completo $|C|$, di dimensione $r \geqq 3$, contenente quello. Si chiede di definire e di costruire il sistema di curve $|C'|$ *aggiunto* a $|C|$.

Orbene si riconosce che il sistema di curve $|C'|$ viene segato sopra F da un sistema lineare di superficie d'ordine $n-3$, che si chiamano superficie *aggiunte* (di quell'ordine) ad F. Queste superficie sono completamente definite dal loro modo di comportarsi lungo le curve multiple e nei punti multipli isolati di F, e le intersezioni C' di quelle superficie con F vanno considerate facendo astrazione dalle curve multiple di F, che sono pur comuni alle superficie aggiunte. Si tratta ora di precisare il comportamento di una superficie aggiunta ad F negli elementi multipli di F; ma per far questo è inutile esigere che sia $n-3$ l'ordine della superficie aggiunta; facendo anzi astrazione dall'ordine si arriva al concetto di *superficie d'ordine qualsiasi aggiunta ad F.*

Per definire quel comportamento dobbiamo considerare a parte il caso delle linee multiple, ed il caso dei punti multipli isolati.

1) *Linee multiple di F.* — Ogni superficie Φ aggiunta ad F deve comportarsi in tal guisa lungo le linee multiple di F, che segando la Φ e la F con uno stesso piano generico, la curva sezione di Φ sia aggiunta alla curva sezione di F. Poichè nel piano è perfettamente determinato il compor-

(*) La definizione a cui si allude è dovuta al sig. NÖTHER; la si trova esposta nella Memoria fondamentale *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*... Math. Annalen, 8, ed in una Nota dello stesso Autore pubblicata nelle Göttinger Nachrichten del 1871.

tamento di una curva aggiunta in un punto multiplo della curva primitiva, così possiamo dire (n.° 4) di conoscere perfettamente il comportamento delle superficie aggiunte lungo le curve multiple della superficie F. Sicchè se la F possiede curve multiple, ma non ha punti multipli isolati (n.° 13), la definizione precedente basta per costruire le superficie di dato ordine aggiunte ad F.

2) *Punti multipli isolati di F.* — Ogni superficie Φ aggiunta ad F deve passare $i-2$ volte (almeno) per ogni punto O multiplo (isolato) secondo i per F. Questa definizione basta se il punto O è punto multiplo ordinario; ma se invece si tratta di un punto multiplo singolare O, la definizione diventa insufficiente. Infatti in quest'ultimo caso bisogna inoltre assicurarsi che applicando alla F una trasformazione birazionale dello spazio, che muti la F in una superficie F', ed il punto O in un complesso di curve e di punti singolari di F', la trasformata Φ' di Φ sia ancora aggiunta alla F' lungo quelle curve e quei punti. Ora la 1) ci dà il modo di assicurarci se la Φ' sia aggiunta ad F' lungo quelle curve singolari di F'; ma per ciò che riguarda i punti multipli isolati sorti su F', siamo da capo alla stessa difficoltà. Per ciascuno di questi bisognerà rifare una nuova trasformazione della F' in una superficie F'', ecc. Siccome però le trasformazioni che così si devono eseguire per eliminare i punti isolati *singolari* sono in numero finito, così per questa via è possibile fissare, almeno in teoria, il comportamento di una superficie aggiunta in ogni punto multiplo isolato della superficie data F. E per questa via appunto il sig. NÖTHER (*) è riuscito a risolvere la questione in molti casi particolari.

La questione però non è essenziale pel seguito della nostra ricerca. A noi basta rilevare due conseguenze delle considerazioni precedenti, di cui la prima è evidente, mentre l'altra dipende dalle ricerche fatte dal sig. ENRIQUES, e potrebbe condurre ad una definizione indiretta di superficie aggiunte, qualora la definizione diretta, a cui sopra si accenna, non sembrasse abbastanza precisa.

I. « Le superficie d'ordine qualsiasi aggiunte ad una data superficie F « formano un sistema lineare completamente definito dagli elementi-base, che « si trovano compresi tra le curve multiple ed i punti multipli della super- « ficie F. »

II. « Le superficie d'ordine $n-3$ aggiunte ad F (d'ordine n) segano « sopra F, all'infuori delle curve multiple, il sistema completo $|C'|$ di curve

(*) Nota citata delle Gött. Nachr.

« aggiunto al sistema completo $|C|$, cui appartengono le sezioni piane di F. » E quindi le superficie aggiunte d'ordine $n-3+k$ segano sopra F il sistema $|C'+kC|$ aggiunto a $|(k+1)C|$, qualunque sia l'intero positivo k.

Osservazioni. — Abbiamo detto che il teorema II può anche presentarsi in modo da condurre ad una nuova definizione delle superficie aggiunte. Precisamente dopo aver definito, secondo il n.° 14, il sistema $|C'|$ di curve aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, si potrà, col sig. Enriques (*), chiamare *aggiunta ad F* ogni superficie Φ d'ordine $n-3$, che si comporti nel modo indicato dalla 1) lungo le curve multiple di F, e passi inoltre per una curva C'. Quest'ultima condizione fissa il comportamento della Φ anche nei punti multipli isolati della F, e sostituisce adunque la condizione contenuta in 2). Similmente si definiscono le superficie d'ordine qualsiasi aggiunte ad F.

Da queste considerazioni risulta, tra le altre cose, che « ogni superficie « d'ordine $>n-3$, la quale si comporti nel modo indicato dalla 1) lungo le « curve multiple di F, e passi inoltre per una curva C', riesce aggiunta ad F « anche nei punti multipli isolati ».

17. *Sistema canonico di curve sopra una superficie; genere geometrico e numerico della superficie.* — Ritornando per un momento alla definizione invariantiva del sistema aggiunto (n.° 14), rileviamo che la conseguenza più importante a cui essa conduce, è espressa dal seguente teorema (**):

« Se un sistema completo di curve $|C|$ sopra una superficie è contenuto « nel proprio sistema aggiunto $|C'|$, la proprietà analoga sussiste per ogni « altro sistema di curve appartenente alla superficie; ed il sistema residuo « $|C'-C|$ (fatta astrazione da punti che potessero entrare tra le sue compo- « nenti) non dipende dal sistema $|C|$ su cui si opera. » Il sistema $|K|=|C'-C|$ è dunque legato alla superficie da relazione invariantiva rispetto alle trasformazioni birazionali. Esso prende il nome di ***sistema canonico*** sulla superficie.

(*) *Introduzione...*, n.° 31; cfr. pure la Monografia *Sur quelques récents résultats...*, n.° 18.

(**) Enriques, *Introduzione...*, n.° 38; cfr. inoltre la Monografia *Sur quelques récents résultats...*, n.° 21. La definizione del sistema canonico di curve mediante superficie aggiunte d'ordine $n-4$ è dovuta però al sig. Nöther nella Memoria citata *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...* Math. Annalen, 8.

I suoi caratteri (dimensione, grado, genere) sono *invarianti* della superficie, rispetto alle trasformazioni birazionali. Tale è per esempio il *genere geometrico* p_g della superficie, che è dato dalla dimensione del sistema canonico aumentata di una unità ($p_g = 0$, se il sistema canonico non esiste).

Sopra la superficie F data nello spazio ordinario mediante i suoi caratteri proiettivi (ordine $n, \ldots$), il sistema canonico $|K|$ può costruirsi per via proiettiva. Precisamente si riconosce che:

« Le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad F segano il sistema canonico sopra questa superficie » all'infuori delle curve multiple, ed eventualmente di certe curve *eccezionali*, che con una trasformazione birazionale si possono mutare in punti.

Il sistema completo di quelle superficie aggiunte ha una dimensione effettiva r_{n-4}, ed una dimensione virtuale r'_{n-4}, che possono anche differire tra loro (n.° 7). Ora dalle cose dette risulta subito che

$$p_g = r_{n-4} + 1$$

è un invariante della superficie F, il *genere geometrico.* Ma è notevole il fatto che anche *la dimensione virtuale* r'_{n-4} *ha carattere invariantivo* rispetto alle trasformazioni birazionali (*). Precisamente si assume come invariante

$$p_n = r'_{n-4} + 1,$$

e si chiama il *genere numerico* di F; (l'indice di p è appunto l'iniziale dell'aggettivo).

In molte questioni in luogo dei due generi p_g e p_n comparisce la loro differenza $p_g - p_n$, di cui vedremo presto, ed in più modi, il significato geometrico.

18. *Le superficie aggiunte dei vari ordini.* — Riprendiamo la superficie F d'ordine n, proiettivamente data, e consideriamo il sistema $|\Phi^\nu|$ costituito dalle superficie aggiunte ad F, d'ordine $\nu \geqq n-3$. Poichè questo sistema è completamente definito dal gruppo-base (che non dipende dall'ordine ν), potremo applicare a $|\Phi^\nu|$ le considerazioni generali fatte sopra i sistemi completi di superficie.

(*) Questa proprietà notevole, dimostrata sotto certe restrizioni da Cayley (Math. Annalen, 3), Zeuthen (Math. Annalen, 4) e Nöther (l. c.), risulta sussistere in ogni caso in seguito alle ricerche del sig. Enriques (*Introduzione* ... n.° 40). Si veda a questo proposito la Monografia *Sur quelques récents résultats* ... n.° 26.

Ed osserveremo anzitutto che il sistema di superficie $|\Phi^\nu|$ sega sopra un piano generico ω un sistema di curve aggiunte alla sezione C di F fatta col piano ω. Questo sistema può però essere incompleto, ed avere una certa deficienza δ_ν; esso in ogni caso è contenuto nel sistema completo $|\Gamma^\nu|$ di tutte le curve aggiunte a C, di quell'ordine. Ora se ci limitiamo, come si è detto, a considerare i valori di $\nu \geq n-3$, possiamo affermare che il sistema $|\Gamma^\nu|$ è regolare.

Attribuiamo a ν valori successivi crescenti, e consideriamo i valori corrispondenti che assume la deficienza δ_ν del sistema di curve segato da $|\Phi^\nu|$ sul piano ω. Noi sappiamo (n.° 6) che si arriverà sempre ad un numero (intero, positivo) l, tale che per $\nu > l$ quella deficienza δ_ν risulti nulla, e quindi il sistema $|\Phi^\nu|$ seghi sopra ω il sistema completo e regolare $|\Gamma^\nu|$ delle curve aggiunte a C. Giungiamo così al seguente risultato (*):

Le superficie aggiunte ad F, degli ordini $n-3$, $n-2$,... possono segare sopra un piano generico sistemi incompleti di curve; ma « si può sempre « determinare un numero $l (\geq n-3)$ così grande, che il sistema completo delle « superficie aggiunte d'ordine $\nu \geq l$ seghi sopra un piano generico il sistema « completo delle curve aggiunte alla sezione di F con quel piano ».

In altre parole se riprendiamo la deficienza δ_ν sopra considerata, e facciamo crescere ν di una unità per volta a partire da $n-3$, possiamo dire che nella serie di numeri positivi

$$\delta_{n-3},\ \delta_{n-2}, \ldots,\ \delta_{l-1}, \ldots,$$

l'ultimo termine non nullo è precisamente δ_{l-1}. Segue (n.° 7) che se si applica la formula di postulazione al calcolo della dimensione del sistema di superficie aggiunte $|\Phi^\nu|$, quella formula dà risultati esatti quando $\nu \geq l-1$; i sistemi corrispondenti sono regolari. Se invece la stessa formola si applica ai valori di $\nu < l-1$, per aver la dimensione effettiva esatta r_ν di $|\Phi^\nu|$ bisogna tener conto di un termine correttivo; il quale, quando si limiti la variazione di ν all'intervallo compreso tra $n-4$ ed $l-1$ (gli estremi inclusi), è dato dalla somma delle deficienze

$$\delta_{\nu+1} + \delta_{\nu+2} + \cdots + \delta_{l-1},$$

somma che va aggiunta alla dimensione virtuale r'_ν per ottenere la dimensione effettiva r_ν.

(*) Enriques, *Introduzione*... n.[i] 36, 37; cfr. pure la Monografia *Sur quelques récents résultats*... n.° 19.

In particolare applicando queste considerazioni al valore estremo $\nu = n - 4$, e ricordando la importanza di $r_{n-4} = p_g - 1$ ed $r'_{n-4} = p_n - 1$, possiamo enunciare il notevole risultato (*):

« La differenza tra il genere geometrico ed il genere numerico di una « superficie F d'ordine n è data dalla somma delle deficienze dei sistemi di « curve segati sopra un piano generico dalle superficie di ordine $\geq n - 3$ « aggiunte ad F. »

Di qua segue anzitutto

$$p_g \geq p_n.$$

E se $p_g = p_n$, se cioè, come si suol dire, la superficie è *regolare*, le deficienze δ_{n-3}, $\delta_{n-2}, \ldots$ sono tutte nulle.

Viceversa si supponga che sia $\delta_{n-2} = 0$, e che sia quindi completo il sistema $|\Gamma^{n-2}|$ delle curve segate sopra un piano ω dalle superficie Φ^{n-2} aggiunte ad F; poichè quel sistema $|\Gamma^{n-2}|$ è regolare (essendo costituito dalle curve d'ordine $n - 2$ aggiunte ad una curva piana d'ordine n), ed è pur regolare il sistema delle curve Γ^{n-3} aggiunte a C, si conclude (n.° 2, II) che il sistema contenente ogni curva formata da una Γ^{n-2} insieme ad una retta è completo, e quindi che le superficie $|\Phi^{n-1}|$ aggiunte ad F segano sul piano ω un sistema completo di curve. Dunque dalla ipotesi $\delta_{n-2} = 0$, segue $\delta_{n-1} = 0$, e similmente $\delta_n = 0 \ldots$ Se poi oltre alla ipotesi $\delta_{n-2} = 0$, si suppone che si verifichi pure la $\delta_{n-3} = 0$, allora tutte quelle deficienze, che sommate insieme danno la differenza $p_g - p_n$, risultano nulle. Dunque « per asserire che la superficie F è regolare, basta sapere che le superficie degli « ordini $n - 3$ ed $n - 2$ aggiunte ad F segano sopra un piano generico si« stemi completi di curve ».

Non possiamo ancora asserire (sebbene sia vero) che la condizione $\delta_{n-3} = 0$ basti da sola per trarre la stessa conseguenza; ma possiamo dire però che « se la sezione di F con un piano generico è una curva normale, e se le « superficie d'ordine $n - 3$ aggiunte ad F segano su quel piano un sistema « completo di curve, la superficie F è regolare ».

Infatti la ipotesi che la sezione piana generica C di F sia normale, o in altre parole che la serie g^2_n segata su C dalle rette del suo piano sia completa, porta di conseguenza che il sistema delle curve Γ^{n-4} aggiunte a C è regolare; sicchè ai sistemi $|\Gamma^{n-4}|$, $|\Gamma^{n-3}|$ si potrà applicare lo stesso

(*) Enriques, *Introduzione*... n.° 40; cfr. la Monografia *Sur quelques récents résultats*... n.° 27.

lemma (n.° 2, II), che si è applicato or ora ai sistemi Γ^{n-3}, $|\Gamma^{n-2}|$; e dalla ipotesi $\delta_{n-3}=0$, si trarrà $\delta_{n-2}=\delta_{n-1}=\cdots=0$.

Le proposizioni a cui siamo così pervenuti, acquistano maggiore interesse se vengono presentate sotto forma invariantiva.

A tal fine non considereremo più i sistemi di superficie $|\Phi^{n-3}|$, $|\Phi^{n-2}$,... aggiunti alla superficie F d'ordine n, ma baderemo ai sistemi di curve $|C'|$, $|C'+C|$,... che quelle superficie segano sopra F, e noteremo poi che $|C'|$ è il sistema aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F. E in luogo dei sistemi di curve segate dai sistemi di superficie $|\Phi^{n-3}$, Φ^{n-2},... sopra il piano ω, esamineremo le serie di gruppi $g_{2\pi-2}$, $g_{2\pi-2+n}$,... determinate da quei sistemi sulla curva C del piano ω, serie che sono pur segate su C dai sistemi di curve $|C'|$, $|C'+C|$,... Queste serie sono incomplete se le deficienze δ_{n-3}, δ_{n-2},... sono diverse da zero; e precisamente si riconosce subito che δ_{n-3}, δ_{n-2},... sono esattamente le deficienze delle serie in questione $g_{2\pi-2}$, $g_{2\pi-2+n}$,..., rispetto alle serie complete che le contengono (*).

Abbandonando ora il linguaggio proiettivo, diremo:

I. *Sia $|C|$ un sistema lineare di curve sopra una superficie; si formino i sistemi di curve $|C'|$ (aggiunto a $|C|$), $|C'+C|$, $|C'+2C|$,..., e si considerino le serie che questi sistemi segano sulla curva C generica; può accadere che alcune (le prime) tra quelle serie siano incomplete, ma si può sempre determinare un numero così grande, che per ogni valore di k superiore a quello, risulti completa la serie segata da $|C'+kC|$ su C.*

II. *La somma delle deficienze di tutte le serie sopra considerate non dipende dal sistema $|C|$ su cui si opera, ma è un invariante della superficie, ed è uguale precisamente alla differenza tra il genere geometrico ed il genere numerico della superficie.*

III. *Se la superficie è regolare ($p_g=p_n$), tutte quelle deficienze sono nulle, ed in particolare il sistema di curve aggiunto ad un sistema $|C|$ qualsiasi, sega sulla curva C generica la serie canonica completa.*

IV. Viceversa *per asserire che la superficie è regolare, basta sapere che sono complete le serie segate sulla curva C dei sistemi $|C'|$ e $|C'+C|$*; od anche

V. *Una superficie è regolare se sopra di essa esiste un sistema $|C|$, almeno ∞^2, che abbia la serie caratteristica completa, e sulla cui curva gene-*

(*) Il ragionamento elementarissimo con cui si giustifica questa affermazione, ritengo inutile di riportare qui. Il lettore potrà trovarlo nella mia Memoria citata *Alcuni risultati*... pag. 7, nota (3).

rica il sistema aggiunto $|C'|$ *seghi la serie canonica completa.* Si vedrà più tardi che la prima condizione è contenuta nella seconda.

Osservazione. — La dimostrazione che noi abbiamo dato di questi teoremi facendo uso di considerazioni proiettive, suppone che il sistema $|C|$ sia tale da potersi assumere (esso, od un sistema ∞^3 entro a quello) come sistema delle sezioni piane di una superficie F. Questa restrizione dipende però dalla natura della dimostrazione, e non ha nessun legame con quei teoremi, i quali valgono, a parte l'ultimo, anche nella ipotesi che il sistema lineare $|C|$ sia ∞^1. Perciò la restrizione fu ommessa negli enunciati. Noi qui non ci arresteremo ad estendere la dimostrazione proiettiva ai sistemi ∞^1. Basterà accennare che in questo caso conviene adoperare una superficie F d'ordine n, sulla quale il sistema ∞^1 $|C|$ venga segato dai piani di un fascio, il cui asse sarà una retta g multipla secondo $i\,(\geqq 0)$ per F; (ciò può sempre ottenersi). Allora i sistemi $|C'|$, $|C'+C|,\ldots$ vengono segati sopra F dalle superficie Φ^{n-3}, $\Phi^{n-2},\ldots$ aggiunte ad F, costrette inoltre ad avere la retta g come multipla secondo i, $i+1,\ldots$; e si riconosce che in corrispondenza a valori abbastanza elevati dell'ordine, quelle superficie segano sopra un piano del fascio, e fuori dell'asse, il sistema completo delle curve d'ordine $n-3-i$ aggiunte alla C (d'ordine $n-i$); donde si conclude, ecc.

19. *I multipli successivi di un sistema lineare di curve.* — Nel paragrafo precedente abbiamo applicato le proprietà generali dei sistemi completi di superficie, alle superficie Φ dei vari ordini che sono aggiunte ad una superficie F, proiettivamente data, d'ordine n. Ora possiamo applicare le stesse proprietà ai sistemi che si ottengono imponendo alle superficie Φ aggiunte la condizione di passare ulteriormente per una curva K (semplice o composta) di F, ed eventualmente per un gruppo di punti fissati sopra F. Le superficie Φ^ν di dato ordine che soddisfanno a tali condizioni, segano sopra F, fuori delle curve-base, un sistema *completo* di curve $|D|$; ed anzi ogni sistema completo di curve $|D|$ su F può esser segato dalle superficie aggiunte Φ^ν d'ordine ν abbastanza elevato, che siano costrette a passare per una curva K e per certi punti fissati convenientemente sopra F. Se poi imponiamo le stesse condizioni alle superficie aggiunte di ordine $\nu+1$, $\nu+2,\ldots$, otteniamo evidentemente sopra F i sistemi di curve $|D+C|$, $|D+2C|,\ldots$, indicando al solito con $|C|$ il sistema completo a cui appartengono le sezioni piane di F. Ora il teorema del n.° 6, applicato ai sistemi lineari di superficie che stiamo considerando, ci dice che scegliendo il numero k sufficien-

temente elevato, si può ottenere che le superficie aggiunte $\Phi^{\nu+k}$ (le quali passano per K...) seghino sopra il piano ω di una sezione generica C di F, un sistema completo di curve; sarà precisamente il sistema di tutte le curve $\Gamma^{\nu+k}$ aggiunte a C che passano pel gruppo $K\omega$ (intersezione della curva K col piano ω). Ora un tale sistema di curve sega sopra C una serie completa. Si può dunque enunciare, sotto forma invariantiva, il risultato seguente:

Se $|C|$ e $|D|$ sono due sistemi lineari completi di curve sopra una superficie, e si considerano le serie che i sistemi $|D|$, $|D+C|$, $|D+2C|,\ldots$, segano sopra una curva generica C di $|C|$, potrà darsi che alcune di queste serie siano incomplete; ma si riesce sempre a determinare un numero così elevato, che per i valori di k superiori a quello, risulti completa la serie segata dal sistema $|D+kC|$ sulla curva C.

Nella dimostrazione non è escluso il caso in cui $|C|$ e $|D|$ coincidono, il qual caso si presenta quando la curva K è segata su F da una superficie aggiunta d'ordine $\nu-1$. Si arriva così al teorema:

Sia $|C|$ un sistema completo di curve sopra una superficie; può darsi che la serie segata da $|C|$ sopra una curva generica C del sistema stesso (serie caratteristica di C) sia incompleta, ed incomplete possono riuscire le serie segate su C dai sistemi $|2C|$, $|3C|,\ldots$, multipli di $|C|$; ma si può sempre determinare un numero così grande, che per i valori di k superiori a quello risulti completa la serie segata da $|kC|$ su C.

Osservazione. — Sopra questi enunciati ci sarebbe da fare una osservazione analoga a quella che segue il n.° 18, giacchè nella dimostrazione si suppone *semplice* il sistema $|C|$, mentre tale restrizione non figura negli enunciati. Ciò dipende dal fatto che una simile restrizione è superfiua, come si potrebbe riconoscere modificando la dimostrazione secondo il procedimento indicato nella questione analoga. La sola restrizione necessaria, ma in certo modo inclusa già nell'enunciato, è che si possa parlare di serie segata su C dai sistemi $|D|$, $|D+C|,\ldots$; e perciò, quando $|C|$ e $|D|$ coincidono, si deve supporre che la loro dimensione superi l'unità.

20. *Cenno di estensione degli ultimi risultati.* — L'ultimo risultato secondo cui le superficie $|\Phi^{\nu}|$ aggiunte ad F, e passanti eventualmente per una curva K di F, segano sopra un piano ω un sistema di curve $|\Gamma^{\nu}|$ (aggiunte alla curva $C=F\omega$), che risulta completo ogniqualvolta l'ordine ν supera un certo limite, si riferisce ad un piano generico ω, come sempre si è detto. Ma quel risultato va modificato quando il piano secante ω assume una

posizione *particolare* ω_1, e passa precisamente per un punto singolare isolato O di F. Allora infatti le curve Γ_1^ν, sezioni delle superficie aggiunte Φ^ν con ω_1, non sono più (in generale) *aggiunte* alla curva C_1 sezione di F con ω_1; perchè se ad es. O è un punto r^{uplo} di F, le curve Γ_1^ν hanno ivi un punto d'ordine $r-2$, anzichè $r-1$. Non si può nemmeno affermar più che le Γ_1^ν formino un sistema *completo*, per valori abbastanza elevati di ν, e si possono trovare esempi di singolarità O, in corrispondenza alle quali accade il contrario. Come vanno dunque modificati i risultati generali, quando da un piano *generico* ω si passa ad un piano particolare ω_1? Od almeno (poichè questo è il solo problema che ci interessi): si può stabilire tali convenzioni che permettano di far rientrare il caso particolare nel caso generale? La risposta a tale questione ci permetterà di far astrazione, in tutto il seguito del nostro lavoro, da posizioni singolari del piano secante ω, e quindi darà maggior semplicità e chiarezza ai nostri ragionamenti. A mostrare come una siffatta estensione possa ottenersi è dedicato il presente paragrafo; il quale però, si badi bene, se è necessario per mettere al sicuro da ogni obbiezione alcuni ragionamenti che dovremo fare in seguito, non è punto necessario per comprenderli.

Consideriamo ancora le curve Γ_1^ν che le superficie Φ^ν aggiunte ad F, ma non soggette ad altre condizioni, segano sopra il piano ω_1 condotto pel punto singolare O; e supponiamo, poichè a noi basta, che ω_1 sia pure un piano generico entro alla stella di piani O. Il sistema formato dalle curve Γ_1^ν, benchè possa esser incompleto, ha tuttavia una dimensione ρ'_ν che per valori sufficientemente elevati di ν può esprimersi mediante una formula di postulazione del tipo

$$\rho'_\nu = \binom{\nu+2}{2} - k,$$

dove k è una costante, che potrà differire dalla costante analoga, relativa ad un piano generico ω; ciò si riconosce con un ragionamento simile a quello fatto quando si trattava di un piano generico ω. Orbene, per quei valori elevati di ν noi diremo convenzionalmente che le curve Γ_1^ν di ω_1, sezioni delle superficie Φ^ν, formano *un sistema completo* $|\Gamma_1^\nu|$ *di curve aggiunte alla sezione C_1 di F con* ω_1; dove gli aggettivi *completo* ed *aggiunto* non hanno il significato ordinario, che competerebbe loro se C_1 fosse una curva qualsiasi sopra un piano generico ω; ma posseggono un significato speciale, in quanto la curva C_1 viene collegata colla superficie F a cui appartiene.

Costringiamo ora le curve di $|\Gamma_1^\nu|$ a contenere una, due... rette generiche del piano ω_1, ed otterremo come residui i sistemi *completi* $|\Gamma_1^{\nu-1}|$, $|\Gamma_1^{\nu-2}|$,...

di curve *aggiunte* a C_1, dei vari ordini. Così rimane definito su ω_1 il sistema delle curve *aggiunte* a C_1 d'ordine arbitrario; e la definizione, si badi bene, è indipendente dall'ordine ν da cui si è partiti, e non muta se a ν si sostituisce un altro ordine, purchè sempre sufficientemente alto. Colle convenzioni introdotte possiamo dire ormai che le superficie aggiunte ad F dei vari ordini segano, anche sul piano particolare ω_1, sistemi di curve *aggiunte* a $C_1 = F\omega_1$; questi sistemi sono *completi* se l'ordine delle superficie aggiunte supera un certo limite, mentre possono essere incompleti se quel limite non è raggiunto; ed in quest'ultimo caso per valutare le deficienze, dobbiamo riferirci ai sistemi *completi* $|\Gamma_1|$, che abbiamo convenzionalmente introdotti.

Gli stessi risultati possono enunciarsi introducendo, in luogo dei sistemi $|\Gamma_1^\nu|$, le serie che questi segano sopra la curva C_1, e chiamando *complete* queste serie (convenzionalmente, quando si considerano legate colla superficie F). Allora si dirà che il sistema $|C'|$, aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, sega, anche sopra una curva particolare C_1 di $|C|$, una serie che può essere incompleta; ma in ogni caso, per valori abbastanza elevati di k, la serie segata da $|C'+kC|$ su C_1 è completa. Vediamo dunque che adottando le convenzioni fatte, i risultati relativi alle serie segate da $|C'|$, $|C'+C|, \ldots$ sulla curva generica di $|C|$, possono trasportarsi senz'altro anche alle curve particolari C_1 dell'ultimo sistema.

Riprendendo le superficie $|\Phi^\nu|$ aggiunte ad F, notiamo che nelle ultime considerazioni noi non le avevamo assoggettate ad altre condizioni che a quelle provenienti dall'aggiunzione. Se ora assoggettiamo le $|\Phi^\nu|$ a passare per una curva K di F, e poi le seghiamo col piano ω_1 sopra nominato, veniamo ad estendere al piano ω_1 particolare, i risultati relativi ad un piano generale ω ottenuti nel n.° 19. Volendo limitarci alla sola questione che ci interessa pel seguito, supponiamo che la curva K sia essa stessa la intersezione di F con una superficie aggiunta Φ^μ di un certo ordine $\mu < \nu$. Allora le $|\Phi^\nu|$ passanti per K segano su F un multiplo $|(\nu-\mu)C|$ del sistema $|C|$.

Seghiamo il sistema $|\Phi^\nu|$ col piano ω_1; troveremo su questo un sistema di curve $|\Gamma_1^\nu|$, che sono *aggiunte* alla curva $C_1 = F\omega_1$ nel senso sopra convenuto, e passano inoltre pel gruppo di punti $K\omega_1$ segato dalla curva K sul piano ω_1. Attribuiamo a ν valori crescenti; vedremo che da un certo punto in poi la dimensione del sistema di curve $|\Gamma_1^\nu|$ in questione soddisfa ad una formula di postulazione analoga alla precedente; diremo allora convenzionalmente che quello è *il sistema completo delle curve d'ordine ν (abbastanza* *elevato), che sono aggiunte a C_1, e passano pel gruppo $K\omega_1$*; e diremo *completa* la serie segata da questo sistema sopra C_1. Anche qui il termine *completo* ha un significato puramente convenzionale, che è nettamente fissato finchè C_1 è sezione della superficie F col piano ω_1, e diverrebbe indeterminato quando si facesse astrazione dalla superficie F. In corrispondenza a valori più bassi di ν il concetto analogo di sistema completo di curve aggiunte a C_1 passanti pel gruppo $K\omega_1$, si definisce staccando una o più rette generiche di ω_1 dal sistema che abbiamo or ora definito per i valori elevati di ν. E si dirà ancora che un siffatto sistema completo sega una serie completa sopra C_1. Il nuovo sistema e la nuova serie, corrispondenti a valori bassi di ν, possono però esser più ampli che il sistema e la serie segati sopra ω_1 e C_1 dalle superficie Φ^ν condotte per K. Si può dunque estendere a C_1 il teorema già enunciato per C: se si considerano le serie segate su C_1 dai sistemi $|C|$, $|2C|,\ldots$, si riconosce che le prime tra queste serie possono ben essere incomplete; ma per valori di k superiori ad un certo limite la serie segata su C_1 da $|kC|$ è certo completa, nel senso convenzionale ora introdotto.

Sulle serie di gruppi appartenenti alla curva C_1, che così vengono definite, e sulle serie che da queste si possono ottenere tenendo fissi uno o più punti del sostegno, si potrebbe costruire una geometria analoga a quella che i sigg. Brill e Nöther hanno esposta; avvertendo però che nel nostro linguaggio le espressioni *curva aggiunta*, *serie completa*... hanno sul piano ω_1 un significato diverso da quello usato. Noi però non vogliamo fermarci più a lungo su questa estensione, e solo ci limitiamo a notare che nella geometria a cui qui si accenna, vale un teorema analogo a quello che porta il nome di Riemann-Roch, e che può esser dimostrato colle stesse considerazioni. Volendo ridurre l'enunciato alla sola parte che ci interessa, diremo: Sulla curva C_1 (segata dal piano ω_1 su F) si consideri la serie *completa* g_n, a cui appartengono i gruppi segati su C_1 dalle rette di ω_1; uno di questi gruppi si spezzi in due G_m, G_{n-m} $(m<n)$, e si supponga che G_m formi parte di una serie almeno ∞^1, i cui gruppi insieme a G_{n-m} diano gruppi della g_n completa; « allora ogni curva d'ordine $n-3$ *aggiunta* a C_1, la quale passi « per $m-1$ punti di G_m, passa anche per il punto rimanente ». Le parole sottolineate hanno il significato convenzionale introdotto.

Osservazione. — Le considerazioni che precedono hanno la più stretta analogia colle ricerche del sig. Nöther, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen 15). Solo va notato che i sistemi di curve *non-aggiunte* (*aggiunte* a C_1 secondo la nostra locuzione) da noi introdotti, possono non esser determinati interamente da punti-base; mentre l'inverso accade nei sistemi che il sig. Nöther considera.

21. *Un lemma sopra le superficie aggiunte ad una data.* — Liberato il terreno da inevitabili digressioni, ora siamo in grado di procedere più spediti verso la meta che ci proponiamo di raggiungere.

Ai sistemi delle superficie dei vari ordini $n-3$, $n-2$,... aggiunte ad una superficie data F d'ordine n, noi abbiamo applicato vari risultati ottenuti pei sistemi completi di superficie in generale. Ci rimane ancora da vedere come si applichi a questo caso il lemma dimostrato nel § 9. Non abbiamo che da tradurre l'enunciato che si trova colà. In luogo degli ordini m, $m+1$,... delle superficie ivi considerate, sostituiremo gli ordini $n-3$, $n-2$,... delle superficie Φ aggiunte ad F; e le deficienze δ_m, δ_{m+1},... che allora si avevano, diverranno le deficienze δ_{n-3}, δ_{n-2},... dei sistemi di curve segati sopra un piano generico dai sistemi di superficie aggiunte $|\Phi^{n-3}|$, $|\Phi^{n-2}|$,... Ora di quelle deficienze interessa solo la somma Δ, che nel nostro caso vale (n.° 18)

$$\Delta = \delta_{n-3} + \delta_{n-2} + \cdots = p_g - p_n ,$$

essendo p_g, p_n i generi geometrico e numerico di F. Con ciò l'enunciato del n.° 9 si trasforma nel seguente (*):

« Data una superficie F d'ordine n e di generi p_g, p_n, si può sempre « costruire una superficie Φ d'ordine $n-3+(p_g-p_n)$, la quale sia aggiunta « ad F, passi p_g-p_n volte per una retta generica assegnata, e seghi « p_g-p_n+1 piani condotti per quella retta lungo altrettante curve asse- « gnate di ordine $n-3$, aggiunte alle sezioni corrispondenti di F. » La Φ non contiene quei p_g-p_n+1 piani.

22. *Un teorema sopra i fasci di curve appartenenti ad una superficie.* — Il teorema che a noi interessa, si deduce dal precedente come corollario. Consideriamo i p_g-p_n+1 piani ω_1, ω_2,... condotti per la retta g; sopra ognuno di quelli consideriamo il sistema $|\Gamma^{n-3}|$ delle $\infty^{\pi-1}$ curve d'ordine $n-3$ aggiunte alla sezione $F\omega_1$, supposta di genere π. Supponiamo poi che si possa costringere una Γ^{n-3} a contenere un certo numero $m-1$ di punti a_1, a_2,..., a_{m-1} della retta g, senza che in conseguenza la Γ^{n-3} venga a

(*) Il teorema si trova già nella mia Memoria *Alcuni risultati*... n.° 2.

contener tutta la retta (e per ciò basta che $m-1$ sia un numero abbastanza piccolo); e sopra ciascuno dei $p_g - p_n + 1$ piani ω_i per g, fissiamo appunto una Γ^{n-3} in modo che passi per quegli stessi $m-1$ punti $a_1, \ldots, a_{m-1}$. Allora, costruita in corrispondenza la superficie Φ, di cui il teorema precedente afferma l'esistenza, quella Φ verrà a passare $p_g - p_n$ volte per la retta g, ma inoltre $p_g - p_n + 1$ volte per i punti $a_1, \ldots, a_{m-1}$, ed avrà come piani tangenti in ciascuno di quelli i $p_g - p_n + 1$ piani ω_i. La superficie Φ segherà dunque ogni ulteriore piano ω per g in una curva Γ^{n-3} passante per $a_1, \ldots, a_{m-1}$. La curva Γ^{n-3} sul piano variabile ω incontrerà ulteriormente la retta g in $n-3-(m-1) = n-m-2$ punti, che in generale varieranno col variare di ω. Uno di quei punti muovendosi potrà venire a coincidere con un punto a_m fissato ad arbitrio sulla retta g. Quante volte questa coincidenza accadrà? La risposta si dà subito; se la curva Γ^{n-3}, intersezione del piano ω colla superficie Φ, passa per a_m, quel piano ω è tangente in a_m alla Φ, e poichè a_m (come ogni altro punto generico della retta g) è multiplo secondo $p_g - p_n$ per Φ, ne viene che saranno $p_g - p_n$ i piani ω per g, in corrispondenza ai quali la curva $\Gamma^{n-3} \equiv \Phi\,\omega$ verrà a passare per a_m. Se però, attribuendo posizioni particolari ai punti $a_1, \ldots, a_{m-1}$, a_m di g, si riesce a vedere che sopra $p_g - p_n + 1$ piani ω condotti per g, ogni curva Γ^{n-3} aggiunta ad $F\omega$, e passante per $a_1, \ldots, a_{m-1}$, viene in conseguenza a passare per a_m, allora si conchiude che il punto a_m è pure multiplo secondo $p_g - p_n + 1$ (e non $p_g - p_n$) per la superficie Φ. Si deduce quindi che *ogni* piano ω condotto per g sega Φ in una curva d'ordine $n-3$, la quale passa per $a_1, \ldots, a_{m-1}$, e in conseguenza per a_m. E si conclude infine che sopra ogni piano ω per g quegli m punti $a_1, \ldots, a_{m-1}$, a_m presentano solo $m-1$ condizioni indipendenti alle curve aggiunte Γ^{n-3}, che debbono contenerli. Questo risultato può enunciarsi così: data la superficie F d'ordine n e generi p_g, p_n, e condotta una retta generica g intorno alla quale ruoti un piano ω, se in corrispondenza a $p_g - p_n + 1$ posizioni di ω, m punti fissati sulla retta g presentano solo $m-1$ condizioni alle curve d'ordine $n-3$ aggiunte alla sezione $F\omega$, che vengono costrette a contenere quegli m punti, allora lo stesso fatto si verifica sopra ogni altro piano ω condotto per g.

Il risultato assume un particolare interesse, se gli m punti della retta g non sono punti arbitrari di questa, ma vengono scelti tra le intersezioni di F con g, e quindi appartengono ad ogni curva $F\omega$. È noto infatti (teorema di Riemann-Roch) che se m punti di una curva piana C d'ordine n presentano solo $m-1$ condizioni alle curve aggiunte d'ordine $n-3$, che sono costrette a contenerli, quegli m punti formano un gruppo di una serie lineare g^1_m giacente su C; e viceversa un gruppo di una serie g^1_m giacente su C presenta solo $m-1$ condizioni ad una curva aggiunta d'ordine $n-3$ costretta (se è possibile) a contenerlo. In base a ciò l'ultima proposizione, nel caso particolare che si considera, dà luogo al seguente enunciato (*):

Sia F una superficie d'ordine n e di generi p_g, p_n; se un certo gruppo di m ($\leq n$) punti, fissati tra le intersezioni di F con una retta generica g, forma parte di una serie lineare g^1_m sopra le curve sezioni di F con $p_g - p_n + 1$ piani condotti per la retta g, allora lo stesso fatto si verifica sopra ogni altro piano condotto per quella retta.

Il teorema può naturalmente enunciarsi senza che compariscano i caratteri proiettivi della superficie F. Esso allora si presenta sotto la forma seguente:

Sopra una superficie di generi p_g, p_n, si abbia un gruppo di m punti, i quali appartengano, come punti semplici, alle curve di un sistema lineare ∞^1; se sopra $p_g - p_n + 1$ tra queste curve quel gruppo fa parte di una serie g^1_m, lo stesso fatto accadrà sopra ciascun'altra delle ∞^1 curve; ognuna di queste conterrà dunque una g^1_m, di cui il gruppo nominato fa parte.

Perchè il passaggio tra il teorema precedente e l'ultimo fosse perfettamente giustificato, si dovrebbe supporre che il sistema lineare ∞^1 fosse un fascio generico entro ad un sistema semplice più ampio, almeno ∞^3. Se una siffatta restrizione, che pur rispetteremo in seguito, non viene esplicitamente enunciata, ciò dipende dal fatto che una lieve modificazione nel nostro procedimento, ottenuta abbandonando le considerazioni proiettive, permette di riconoscere che quella restrizione è superflua.

23. *Caso particolare delle superficie regolari.* — Affinchè si possa acquistare una chiara idea del risultato precedente, fermiamoci un po' sul caso più semplice, che si presenta quando la superficie è regolare ($p_g = p_n$). Il teorema generale, nella ipotesi $p_g = p_n$, ci dice che se sopra la curva C, appartenente ad un sistema lineare $|C|$, si trova una serie g^1_m, ogni altra curva C_1 del sistema, la quale passi per un gruppo della serie, contiene a sua volta una nuova serie g^1_m, di cui quel gruppo fa parte. E la proprietà si dimostra subito direttamente con un ragionamento molto semplice, di cui quello fatto nel caso generale deve considerarsi come una naturale estensione.

(*) Cfr. la mia Memoria *Alcuni risultati*... n.° 3.

Infatti se la superficie è regolare, il sistema di curve $|C'|$, aggiunto al sistema $|C|$, ha la proprietà di segare sopra la curva C generica la serie canonica completa (n.° 18). Ne viene che, per riconoscere se un gruppo G_m di m punti sopra C formi parte di una serie g^1_m, basta esaminare se G_m presenti solo $m-1$ condizioni (ai gruppi della serie canonica su C e quindi) alle curve di $|C'|$, che sono costrette a passare per G_m. Ammesso che questa riduzione nel numero delle condizioni si verifichi, risulterà che non solo sopra C, ma pure sopra ogni altra curva C_1 passante per G_m, questo gruppo formerà parte di una serie g^1_m; giacchè la serie canonica completa è segata da $|C'|$ tanto su C, quanto su C_1.

Ora si badi che l'ultimo ragionamento si fonda solo sul fatto, che il sistema $|C'|$, aggiunto a $|C|$, sega sulla curva C generica la serie canonica completa; mentre la ipotesi $p_g = p_n$, da cui l'ultimo fatto segue, non apparisce esplicitamente. In base a ciò possiamo enunciare il risultato seguente, che, almeno in appparenza, è più generale di quello a cui il teorema del § 22 ci ha condotto:

Se il sistema aggiunto ad un sistema lineare $|C|$ sopra una superficie, sega sulla curva generica C di questo la serie canonica completa, ogni gruppo G_m di m punti di C, il quale formi parte di una serie lineare su C, forma parte di una serie analoga sopra ogni altra curva di $|C|$ che passi per G_m.

24. *Corollario dei teoremi precedenti.* — Ritorniamo al teorema generale del § 22, e vediamo di trarne un corollario, di cui presto dovremo servirci. Per maggior chiarezza (sebbene non sia necessario) riferiamoci ad una superficie F proiettivamente data, di ordine n, di cui le sezioni piane saranno indicate con C. Sopra la curva C segata su F dal piano generico ω, le rette di ω determinano una serie g^2_n, la quale può essere incompleta; e in ogni caso è contenuta in una serie g^s_n completa ($s \geqq 2$). Se dunque spezziamo il gruppo G_n, segato su C da una retta g, in due gruppi, l'uno G_s di s punti, l'altro G_{n-s} formato coi punti rimanenti, in generale accade che G_s appartenga ad un solo gruppo di g^s_n, e precisamente al gruppo G_n. Non è escluso però che, in corrispondenza ad una posizione particolare della retta g o del piano ω, quel gruppo G_s possa appartenere ad ∞^1 gruppi della serie completa, ed allora il gruppo residuo G_{n-s} forma parte di una serie g^1_{n-s}; viceversa se vale l'ultima proprietà relativa al gruppo G_{n-s}, varrà la prima relativa al gruppo G_n.

Questa osservazione ci permette di risponder subito alla domanda seguente: entro al gruppo G_n segato sulla superficie F da una retta generica g, si fissi un gruppo G_s di s punti, e per la retta g si conduca un piano variabile ω, il quale seghi la F lungo la curva C; « per quante posizioni di ω « accade che G_s appartenga ad ∞^1 gruppi di quella serie completa g_n, che è « determinata sulla curva C dal gruppo G_n? » Questo fatto accade ogniqualvolta il gruppo $G_{n-s} = G_n - G_s$ appartiene ad una serie g^1_{n-s}, quindi $p_g - p_n$ volte al più, oppure sempre (n.° 22) In conclusione:

I. *Sia F una superficie d'ordine n e generi p_g, p_n; condotta una retta generica g, il gruppo G_n, segato da questa su F, determina una serie completa sopra la sezione fatta su F da un piano generico ω, che ruoti intorno a g. Ora se in corrispondenza a $p_g - p_n + 1$ posizioni di ω accade, che s punti fissi di G_n formino parte di ∞^1 gruppi di quella serie completa, lo stesso fatto si verificherà sopra ogni altra posizione di ω.*

Alla ipotesi particolare $p_g = p_n$ si può però sostituire una ipotesi, che pel momento dobbiamo ritenere come più larga: quella che il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane, seghi sulla C generica la serie canonica completa; ciò in base alla osservazione del § 23. Abbiamo adunque il teorema:

II. *Sia F una superficie tale che il sistema di curve $|C'|$, aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane, determini sulla C generica la serie canonica completa. Condotta una retta g generica, la quale seghi su F il gruppo G_n, si costruisca sopra ogni piano ω condotto per g la serie completa g^s_n, determinata da G_n sulla curva sezione $F\omega$. Si riconosce allora che in ciascuna delle infinite serie g^s_n, che si ottengono al variare di ω, vi è un solo gruppo, e precisamente G_n, il quale gode la proprietà di contenere s punti fissati entro a G_n.*

I teoremi I e II esprimono proprietà di un sistema lineare $|C|$ sopra una superficie, e possono enunciarsi senza che appariscano i caratteri proiettivi di questa; tuttavia, siccome nel seguito quei teoremi verranno applicati nella forma in cui sono stati qui esposti, non val la pena che ci fermiamo su quella facile interpretazione.

25. *La proprietà fondamentale della serie caratteristica di un sistema completo di curve.* — Il teorema del § 22, ed i corollari che ne abbiamo dedotto, ci mettono ora in grado di affrontare un problema fondamentale nella teoria dei sistemi lineari di curve giacenti sopra una superficie. Vediamo intanto di formarci una idea esatta della questione.

Sopra una superficie F è dato un sistema lineare di curve $|C|$ di dimensione $r \geqq 2$; le curve del sistema segano sopra una generica C di esse una serie di dimensione $r-1$, il cui ordine indicheremo con n (*grado di* $|C|$), la *serie caratteristica* g_n^{r-1}. Si tratta di esaminare se questa serie sia *completa*. Prima di cercare una risposta alla domanda, che qui si presenta, si deve esaminare se il sistema $|C|$ stesso sia completo, o se esso sia contenuto in un sistema più vasto $\infty^{r+\rho}$ $(\rho > 0)$ di curve secantisi ancora a due a due in n punti variabili. Se il secondo caso si presenta, la serie g_n^{r-1} sopra nominata è compresa nella serie $g_n^{r+\rho-1}$ segata dal secondo sistema sulla stessa curva C; quindi la g_n^{r-1} certo non è completa, e possiede una deficienza almeno uguale a ρ. Dunque perchè valga la pena di occuparsi della questione proposta, si deve supporre anzitutto che il sistema $|C|$ sia completo. E la questione si presenta allora così:

« Dato un sistema lineare completo (almeno ∞^2) di curve sopra una su- « perficie, la serie caratteristica del sistema sarà sempre completa? O, in caso « opposto, quali legami passano tra la sua deficienza e i caratteri invarian- « tivi della superficie? »

La questione stessa, ristretta ai sistemi semplici di curve, può anche presentarsi sotto forma proiettiva, adottando il nome di curva normale, o superficie normale, per una curva o superficie di uno spazio S_r a r dimensioni, sulla quale gli S_{r-1} seghino una serie di gruppi, o sistema di curve, completo.

« Sia F una superficie d'ordine n dello spazio ordinario, la quale possa « ottenersi mediante proiezione da una superficie normale F' dello stesso or- « dine di uno spazio S_r $(r \geqq 3)$; le curve sezioni di F' cogli iperpiani S_{r-1} « sono curve normali? Oppure, in caso opposto, se quelle curve sono proie- « zioni di curve normali (d'ordine n) di $S_{r+\delta-1}$, quali legami passano tra δ « ed i caratteri invariantivi di F? »

Qualche esempio basta per mostrare come sopra alcune superficie si possa rispondere affermativamente alla prima parte della domanda; mentre per altre superficie è la seconda parte della domanda che va considerata.

Così la superficie generale d'ordine n del nostro spazio ci dà un esempio di superficie normale, le cui sezioni piane sono curve normali. Ogni superficie razionale normale del nostro spazio (o di S_r) ha come sezioni piane (o con S_{r-1}) curve normali; e ciò perchè « la serie caratteristica di un sistema lineare « completo di curve piane è sempre completa ».

Ma un esempio semplice di superficie, per cui il fatto opposto può presentarsi, vien dato dalle *rigate*. E ad es. la rigata del quarto ordine con due rette doppie, sebbene normale per lo spazio ordinario, ha come sezioni piane curve non normali (proiezioni di quartiche ellittiche di S_3, sicchè qui $\delta = 1$). Più in generale (*) « una rigata d'ordine n e genere p dello spazio ordinario « può ritenersi come proiezione di una rigata normale dello stesso ordine di « uno spazio a $r \geq n - 2p + 1$ dimensioni », dove l'estremo inferiore può esser raggiunto in corrispondenza ad ogni valore di p; mentre la sezione piana della rigata, curva d'ordine n e genere p, è proiezione di una curva normale di uno spazio a $n-p$ (o più) dimensioni; qui adunque se $r = n - 2p + 1$ si ha $\delta = p$.

Altri esempi atti ad illuminare la questione di cui dobbiamo occuparci, verranno addotti in seguito; quelli semplici portati qui avevano l'unico fine di richiamar l'attenzione del lettore sulla ricerca che vogliamo compiere.

26. *Dimostrazione del teorema fondamentale in un caso particolare.* — Giova, per ragioni di chiarezza e per altri motivi che si vedranno, ragionare anzitutto sopra un caso particolare.

Si parta da una superficie F dello spazio ordinario, avente l'ordine n e le sezioni piane di genere π, che si può supporre a dirittura superiore a zero. Si indicherà con C la sezione piana generica di F, e con $|C|$ il sistema ∞^r ($r \geq 3$) completo di curve contenente le sezioni piane di F.

Ora si suppone (e in ciò consiste la particolarità imposta ad F) che « il « sistema $|C'|$, aggiunto a $|C|$, seghi sulla curva C generica la serie canonica « *completa* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ » o in altre parole, usando il linguaggio proiettivo, si suppone « che le superficie Φ^{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunte ad F, seghino sopra un piano « generico ω il sistema *completo* $\infty^{\pi-1}$ delle curve d'ordine $n-3$ aggiunte « alla sezione $F\omega$ ». Questa ipotesi si verifica sulle superficie regolari ($p_g = p_n$); e, come vedremo più tardi, solo su queste.

Ciò premesso, proponiamoci di costruire il sistema completo $|C|$, che contiene le sezioni piane di F. Determineremo poi la dimensione r di $|C|$, e riconosceremo allora che quel sistema $|C|$ sega sopra una C generica una serie completa, vale a dire che « la serie caratteristica del sistema $|C|$ è completa ».

La via per costruire il sistema completo $|C|$ vien suggerita dal Restsatz (**). Questo teorema ci insegna che pel nostro scopo basta segare la superficie F

(*) Segre, *Recherches générales sur les courbes*... Math. Annalen, 34.

(**) Nöther, *Zur Theorie*..., pag. 509 (Math. Annalen, 8); Enriques, *Introduzione*..., n.° 35.

con una superficie Φ^ν ad essa aggiunta d'ordine ν qualsiasi; si otterrà così (fuori delle curve multiple di F) una certa curva. Si condurranno poi tutte le superficie $\Phi^{\nu+1}$ d'ordine $\nu+1$ aggiunte ad F, che passano per quella curva; « queste segheranno ulteriormente su F il sistema completo di curve conte- « nente le sezioni piane di F », vale a dire il sistema $|C|$ richiesto. Sebbene il valore di ν non abbia influenza sulla dimostrazione, supporremo che sia $\nu=n-3$; così avremo da considerare la curva C' segata sopra F da una Φ^{n-3}, e dovremo costruire le superficie Φ^{n-2} passanti per C'. La dimensione del sistema che esse formano, è la dimensione richiesta r di $|C|$.

Una Φ^{n-2} passante per C' sega sul piano generico ω una curva Γ^{n-2} d'ordine $n-2$, la quale è aggiunta alla sezione $C=F\omega$, e passa inoltre per il gruppo di punti $G_{2\pi-2}=C'\omega$. Ora si può chiedere: le ∞^r Φ^{n-2} passanti per C', segano sopra ω il sistema completo delle curve d'ordine $n-2$, che sono aggiunte a C, e passano per $G_{2\pi-2}$? In altre parole: dovendo costruire una Φ^{n-2} per C', sarà lecito assumere su ω la sua sezione piana Γ^{n-2} *ad arbitrio*, tra le curve d'ordine $n-2$ aggiunte a C e passanti per $G_{2\pi-2}$? Ammettiamo che alla domanda si debba dare una risposta affermativa; allora si conchiuderà che le superficie Φ^{n-2} passanti per C', segano sulla curva C quella serie *completa*, che è pur determinata su C dalle curve piane Γ^{n-2} aggiunte a C e passanti per $G_{2\pi-2}$; si conchiuderà dunque che è *completa* la serie segata dal sistema $|C|$ su C, cioè la serie caratteristica di $|C|$. Ora questo è precisamente il risultato a cui vogliamo giungere. Dunque tutto si riduce ad esaminare se « fissata ad arbitrio sul piano ω una curva Γ^{n-2}, aggiunta alla C « e passante pel gruppo $G_{2\pi-2}$, sia possibile costruire una superficie Φ^{n-2}, ag- « giunta alla superficie F, che passi per la curva C', e seghi inoltre il piano ω « lungo la detta curva Γ^{n-2} (senza contenere ω) ».

Cominciamo perciò a vedere come si possa fissare sul piano ω una curva Γ^{n-2}, tra le infinite curve analoghe. A tal fine notiamo che le Γ^{n-2} di ω passanti per $G_{2\pi-2}$, segano sulla curva C la serie g_n *completa* contenente la g_n^2 determinata su C dalle rette di ω. Se dunque indichiamo con s la dimensione di quella serie completa g_n^s, saranno ∞^s le Γ^{n-2} aggiunte a C e passanti per $G_{2\pi-2}$; e tra queste Γ^{n-2} si troveranno quelle che si spezzano in una retta generica di ω, e nella curva Γ^{n-3} segata su ω dalla superficie Φ^{n-3} che si è condotta sin dal principio per determinare la curva C'. Segue che per determinare una Γ^{n-2} tra le ∞^s curve analoghe, basta costringerla a passare per $s-1$ punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ di una retta generica g di ω, e costringerla inoltre a toccare in uno a_1 tra questi una retta t_1 assegnata nel fascio

(a_1, ω). Con ciò la Γ^{n-2} è determinata, e non si spezza nella Γ^{n-3} e nella retta g, se si suppone (come faremo) che il punto a_1 sia esterno alla curva Γ^{n-3}, ossia alla superficie Φ^{n-3}. Ora se si immagina che per la Γ^{n-2}, così segnata su ω, passi una Φ^{n-2}, questa dovrà segare la retta g nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, e dovrà avere in a_1 un piano tangente τ_1 passante per t_1; piano che del resto si può ritenere arbitrario (come si vede combinando linearmente la Φ^{n-2} colla $\Phi^{n-3}+\omega$) Fissato τ_1, ed ammesso sempre che esista la Φ^{n-2} in questione, si potrà ormai segnarne la curva Γ_1^{n-2} sezione con un piano qualsiasi ω_1 passante per la retta g; infatti la Γ_1^{n-2} deve: 1) esser aggiunta alla $C_1 = F\omega_1$, 2) deve passare pel gruppo di punti $C'\omega_1$, 3) deve contenere i punti $a_1, \ldots, a_{s-1}$ della retta g, ed avere nel primo di questi la retta tangente $\tau_1\omega_1$. Con ciò la Γ_1^{n-2} è pienamente determinata. Concludiamo che « se esiste una Φ^{n-2} « aggiunta ad F, contenente C', passante per i punti $a_1, \ldots, a_{s-1}$ della « retta g, e tangente al piano τ_1 in a_1, di questa Φ^{n-2} noi sappiamo deter- « minare la sezione con ogni piano ω condotto per g; quindi sappiamo rico- « struire la superficie Φ^{n-2} ».

Abbiamo ragionato finora nella ipotesi che la Φ^{n-2} esistesse. Ma, senza più badare all'esistenza di questa superficie, possiamo sempre fissare $s-1$ punti arbitrari $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ sopra una retta g generica, ed inoltre fissare un piano τ_1 per a_1; e possiamo poi costruire, sopra ogni piano ω passante per g, quella curva Γ^{n-2} ben determinata, che è aggiunta alla curva $F\omega$, passa pel gruppo di punti $C'\omega$ e per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, e tocca in a_1 la retta $\tau_1\omega$. Mentre il piano ω descrive il fascio intorno a g, la curva Γ^{n-2} descrive una superficie Φ, che è aggiunta alla F (n.° 16, Oss.), e passa per la curva C' e per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$. Sarà Φ la superficie d'ordine $n-2$ richiesta? Veramente non si può ancora affermare che sia $n-2$ l'ordine di Φ; parrebbe che potesse anche esser maggiore. Pel momento si può dire soltanto che la Φ ha l'ordine $n-2+d$ con $d \geq 0$, è una Φ^{n-2+d} aggiunta ad F, che passa per C', e passa inoltre d volte per la retta g, e $d+1$ volte per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ di g. Rimane ora da dimostrare soltanto che è $d=0$. Proponiamoci dunque di calcolare d.

A tal fine osserviamo che in un punto generico a_s della retta d^{upla} g, la superficie Φ^{n-2+d} ha d piani tangenti. Sia ω_1 uno di questi; ω_1 sega Φ^{n-2+d} (oltrechè nella retta g contata d volte) lungo una curva d'ordine $n-2$ Γ^{n-2}, che è aggiunta alla curva $F\omega_1$, passa pel gruppo $C'\omega_1$, e passa inoltre per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, *ed anche per* a_s, toccando la retta $\tau_1\omega_1$ in a_1. Viceversa se la sezione di Φ^{n-2+d} con un piano ω_1 per g è una curva Γ^{n-2}, che (oltre a soddisfare alle condizioni riscontrate sopra ogni piano ω) *viene a passare per il punto* a_s *di* g, si può concludere che ω_1 è piano tangente in a_s alla superficie Φ^{n-2+d}. Dunque determinare il numero d, equivale a rispondere alla seguente domanda: sopra una retta g si fissino s punti ad arbitrio a_1, $a_2, \ldots, a_s$, e per a_1 si conduca un piano arbitrario τ_1; poi si conduca per la retta g un piano ω, e si costruisca su ω il sistema ∞^s delle curve Γ^{n-2} aggiunte ad $F\omega$, che passano per il gruppo $C'\omega$; « in corrispondenza a quante « posizioni di ω si trova una Γ^{n-2}, che passi per $a_1, a_2, \ldots, a_s$, e tocchi la « retta $\tau_1\omega$ in a_1 »? La stessa domanda si può anche presentare sotto altra forma, se si bada che sopra ogni piano ω per g esiste una $\Gamma^{n-2} = g + \Gamma^{n-3}$, che passa per $a_1, a_2, \ldots, a_s$, ma non tocca la retta $\tau_1\omega$ in a_1: « si conduca ad « arbitrio la retta g, e si fissino arbitrariamente s punti di essa; sopra quanti « piani ω per g esistono ∞^1 Γ^{n-2} (anzichè una sola), le quali risultino ag- « giunte alla curva $F\omega$, passino pel gruppo $C'\omega$, e contengano inoltre gli s « punti assegnati? »

Per rispondere a tale questione conviene (ed è lecito, come vedremo) assegnare posizioni particolari agli s punti $a_1, a_2, \ldots, a_s$ di g. Precisamente sceglieremo quegli s punti tra le $n\,(> s)$ intersezioni della superficie F colla retta generica g. Ricordiamo poi che in un piano ω qualsiasi, le ∞^s curve Γ^{n-2}, aggiunte alla curva $F\omega$ e passanti pel gruppo $C'\omega$, segano sopra la curva $C = F\omega$ la serie completa g^s_n contenente i gruppi segati dalle rette. Allora l'ultima domanda si traduce nella seguente: « un piano generico ω « condotto per una retta g seghi la superficie F lungo una curva $C = F\omega$, « sopra cui la serie g^2_n determinata dalle rette sia contenuta in una serie g^s_n « completa ($s \geqq 2$); allora s punti scelti nel gruppo G_n, segato dalla retta g « su F, appartengono ad un solo gruppo (precisamente a G_n) della serie g^s_n, « finchè il piano ω è generico. Ora quante sono le posizioni particolari di ω « nel fascio g, per cui quegli s punti appartengono non più ad uno solo, ma « ad ∞^1 gruppi di g^s_n? »

Ebbene all'ultima domanda noi siamo in grado di rispondere; ce ne offre il mezzo il corollario II del n.° 24. Questo infatti ci dice: « poichè sopra la « superficie F, il sistema di curve $|C'|$, aggiunto al sistema delle sezioni « piane $|C|$, sega (secondo l'ipotesi) la serie canonica completa sulla curva C « generica, non esiste *nessun* piano ω per la retta *generica* g, su cui gli s « punti $a_1, a_2, \ldots, a_s$ appartengano ad ∞^1 gruppi della g^s_n. » In altre parole, nel caso presente il numero d dei piani eccezionali ω è *zero*; e la superficie Φ^{n-2+d}, che abbiamo imparato a costruire, è in realtà una Φ^{n-2}, la quale è aggiunta alla F, passa per la curva C', passa inoltre semplicemente per gli $s-1$ punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, e tocca finalmente il piano τ_1 in a_1.

Ricordiamo però che i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ non sono punti arbitrari della retta g, ma sono $s-1$ tra le n intersezioni di g con F. Questa restrizione tuttavia può facilmente esser tolta. Infatti, detta a_s una ulteriore intersezione di F con g, osserviamo che, come si è costruita una Φ^{n-2} partendo dagli elementi $\tau_1, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, così si può costruire una seconda superficie Φ^{n-2} partendo dagli elementi $\tau_1, a_1, a_3, \ldots, a_s$; e analogamente una terza $\Phi^{n-2}(\tau_1;\ a_1, a_2, a_4, \ldots, a_s), \ldots$, e finalmente una $(s-1)^{esima}$

$$\Phi^{n-2}(\tau_1;\ a_1, a_2, \ldots, a_{s-2}, a_s).$$

Ora le $s-1$ superficie così ottenute sono linearmente indipendenti, perchè ad es. l'ultima non passa pel punto a_{s-1} comune alle rimanenti $s-2$. Ne viene che quelle $s-1$ superficie determinano un sistema lineare ∞^{s-2} di Φ^{n-2}, passanti per a_1 e tangenti a τ_1; e lasciando variare il piano τ_1 intorno ad a_1, si ha un sistema ∞^s di superficie Φ^{n-2} aggiunte ad F, passanti per C', e passanti inoltre pel punto a_1. Togliendo finalmente la condizione imposta dal punto a_1, risulta che le superficie Φ^{n-2}, che sono aggiunte ad F e passano per C', formano un sistema lineare ∞^{s+1}. Dunque « $s+1$ è la dimensione del sistema completo $|C|$ contenente le sezioni piane di F », sistema che quelle Φ^{n-2} segano su F.

La serie lineare segata dal sistema $|C|$ sopra una sezione piana C di F, serie caratteristica di $|C|$, è quindi una g^s_n; d'altronde è appunto s la dimensione della serie completa contenente i gruppi segati su C dalle rette del suo piano. Confrontando le due osservazioni, si arriva ad un teorema, che in linguaggio proiettivo può enunciarsi così (*):

Sia F una superficie d'ordine n dello spazio ordinario; se le superficie d'ordine $n-3$, aggiunte ad F, segano la serie canonica completa sulla sezione piana generica di F, allora, o quella sezione piana è una curva normale ($s=2$), o la F è proiezione di una superficie dello stesso ordine n di uno spazio superiore S_{s+1}, sulla quale gli iperpiani S_s segano curve normali.

Ma noi preferiamo di enunciare lo stesso teorema sotto forma invariantiva rispetto alle trasformazioni birazionali:

Sopra una superficie algebrica si conosca un sistema lineare completo di curve $|C|$, sulla cui curva generica il sistema (di curve) aggiunto $|C'|$ seghi

(*) Il teorema si trova dato per la prima volta (con qualche restrizione superflua) nella mia Memoria *Alcuni risultati*..., n.° 5.

la serie canonica completa; si può affermare allora che anche la serie caratteristica del sistema $|C|$ *è completa.*

Osservazione. — Veramente per passare dall'enunciato proiettivo, all'ultimo enunciato, occorre supporre che il sistema $|C|$ sia semplice, almeno ∞^3. Però questa restrizione non è necessaria, e non figura in conseguenza nell'enunciato; il teorema sussiste anche se $|C|$ è non-semplice, anche se $|C|$ ha la dimensione 2. Ci si persuade di ciò, se si osserva che il concetto fondamentale della dimostrazione proiettiva suesposta può applicarsi anche quando la retta g che si considera, passi per un punto singolare O della superficie F, punto tale che i piani passanti per esso seghino sopra F il sistema $|C|$, od un sistema ∞^2 contenuto totalmente in $|C|$; mentre le sezioni piane di F costituiscono allora un sistema ∞^3, che contiene parzialmente il sistema ∞^2, e che comparisce solo come ente ausiliario nella dimostrazione. In queste poche righe si cerchi soltanto un cenno del processo di estensione; se volessimo scendere in tutti i particolari, saremmo costretti a dilungarci molto, senza nessun vantaggio pel lettore, il quale non troverebbe nella digressione nessun concetto nuovo.

27. *La proprietà fondamentale della serie caratteristica sopra una superficie regolare.* — Il procedimento di dimostrazione che ci ha condotto all'ultimo teorema, ci guiderà pure ad una proposizione notevolmente più generale. Ma prima di riprendere quella dimostrazione, cerchiamo intanto di ricavar tutti i frutti che il risultato ottenuto ci può dare.

Un corollario immediato dell'ultimo teorema si ha ricordando (n.° 18, III) che, sopra una superficie regolare ($p_g = p_n$), il sistema $|C'|$, aggiunto ad un sistema qualsiasi $|C|$, sega sulla curva generica di questo la serie canonica completa. Abbiamo dunque il teorema (*):

Sopra una superficie regolare ($p_g = p_n$) *ogni sistema lineare completo di curve ha la serie caratteristica completa.*

Così si giustificano gli esempi sopra addotti delle superficie generali di dato ordine, delle superficie razionali..., sopra le quali si potevano facilmente riscontrare sistemi completi, aventi la serie caratteristica completa.

28. *Criterio per decidere se una superficie sia regolare.* — Un altro corollario importante del teorema del § 26 ci permette di invertire la osser-

(*) *Alcuni risultati...*, n.° 7; cfr. pure la Monografia *Sur quelques récents résultats...*, n.° 28.

vazione ora ricordata, secondo la quale sopra una superficie regolare il sistema aggiunto $|C'$ sega la serie canonica completa sulla curva generica del sistema $|C|$; così renderemo più espressivi alcuni risultati ottenuti in un paragrafo precedente (n.° 18, IV e V).

Supponiamo che sopra una superficie F, di generi p_g, p_n, esista un sistema lineare $\infty^r |C| (r \geq 2)$, il cui aggiunto $|C'|$ seghi sulla curva generica C di $|C|$ la serie canonica completa $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. Allora possiamo concludere che è pur completa la serie caratteristica g_n^{r-1} di $|C|$, ossia la serie che $|C|$ sega su C. Ma noi sappiamo che il verificarsi di questi due fatti è condizione sufficiente per concludere la regolarità della superficie (n.° 18, V).

Arriviamo così al seguente teorema, che comprende i teoremi IV e V del n.° 18, poichè ne conserva la ipotesi essenziale, abbandonando la ipotesi superflua (*):

Una superficie contenente un sistema lineare almeno ∞^2, *sulla cui curva generica il sistema aggiunto seghi la serie canonica completa, è regolare* ($p_g = p_n$). Ogni altro sistema di curve sulla superficie gode la stessa proprietà del sistema nominato (n.° 18, III). Dunque la proprietà contenuta nell'enunciato è *caratteristica* per le superficie regolari.

Per le superficie irregolari ($p_g > p_n$) si ha da considerare il minimo valore di δ_0 (deficienza della serie segata sopra una curva generica di un sistema dal sistema aggiunto). In virtù dell'ultimo teorema quel minimo è superiore a zero. Esso dà un nuovo carattere invariantivo della superficie, sul quale nulla ancora si sa. Quanto al massimo di δ_0, è noto che esso è uguale a $p_g - p_n$ (Enriques).

29. *La proprietà fondamentale della serie caratteristica sopra una superficie irregolare.* — In base all'ultimo teorema, il risultato del § 26 non dice nulla di più della proposizione del § 27, che ne abbiamo dedotta; esso stabilisce che è completa la serie caratteristica di ogni sistema completo sopra una superficie regolare. Ora si può chiedere: come va modificato quel risultato, quando si considerano superficie irregolari? Dato che sopra queste esistano sistemi lineari completi aventi le serie caratteristiche incomplete, quale relazione passa tra le deficienze di quelle serie, e la differenza $p_g - p_n$ che esprime in certo modo la irregolarità della superficie? La dimostrazione che noi abbiamo dato nel § 26, può fino ad un certo punto ripetersi ora; e questa

(*) *Alcuni risultati...*, n.° 6; *Sur quelques récents résultats...*, n.° 28.

parte che rimane inalterata, noi possiamo esporre rapidamente. Ci fermeremo più a lungo sul punto in cui cominciano le divergenze.

Partendo di nuovo da considerazioni di natura proiettiva, assumiamo una superficie F d'ordine n dello spazio ordinario, di generi p_g, p_n, superficie che per maggior semplicità supporremo non rigata (sebbene non sia necessario). Consideriamo il sistema ∞^3 delle sezioni piane di F, il quale, se non è completo, sarà contenuto in un sistema completo $\infty^r \mid C \mid$ $(r > 3)$. Consideriamo ancora la serie g_n^2 segata dalle rette sopra una sezione piana di F, e sia g_n^s $(s > 2)$ la serie completa che contiene la g_n^2. Proponiamoci ora di costruire il sistema completo $\mid C \mid$. Si procederà nel modo già indicato nel § 26. Si costruisca anzitutto una superficie Φ^{n-3} aggiunta ad F, d'ordine $n-3$ (o $n-2$, $n-1,\ldots$ quando la Φ^{n-3} non esistesse; purchè si aumentino allora di una, due,... unità gli ordini delle superficie e curve piane aggiunte, che verranno adoperate): e sia C' la curva intersezione di Φ^{n-3} con F, all'infuori delle linee multiple. Si conducano poi tutte le superficie aggiunte ad F d'ordine $n-2$ Φ^{n-2} che passano per C'; queste segheranno sopra F il sistema completo richiesto $\mid C \mid$. Ora per costruire una Φ^{n-2} passante per C', cerchiamo di costruirne la curva Γ^{n-2} sezione con un piano ω variabile in un fascio. Sarà la Γ^{n-2} una curva aggiunta alla curva $C = F\omega$, e passerà pel gruppo $C'\omega$ di $2\pi-2$ punti. D'altronde le curve Γ^{n-2} aggiunte, che passano pel gruppo $C'\omega$, segando sopra la curva C la serie completa g_n^s, formano un sistema ∞^s; per fissarne una, basta costringerla a passare per $s-1$ punti $a_1, a_2,\ldots, a_{s-1}$ di una retta g del piano ω, e costringerla inoltre a toccare in a_1 una retta t_1. Ora facciamo ruotare il piano ω intorno alla retta g, e sopra ciascuna posizione di ω tracciamo quella curva Γ^{n-2}, che è aggiunta alla curva $F\omega$, passa pel gruppo di punti $C'\omega$, passa inoltre per i punti $a_1, a_2,\ldots, a_{s-1}$ fissati sopra g, e tocca finalmente in a_1 una retta t_1 sezione di ω con un piano fisso τ_1 condotto per a_1. Le ∞^1 curve Γ^{n-2} così costruite formano una superficie Φ, che è aggiunta ad F, e passa per la curva C'. La Φ in generale passerà inoltre un certo numero $d \geq 0$ di volte per la retta g, e $d+1$ volte per i punti $a_1, a_2,\ldots, a_{s-1}$ di g; ed avrà l'ordine $n-2+d$, sarà una Φ^{n-2+d}.

La prima questione che ora dobbiamo risolvere, è quella di fissare un *massimo* a d. Nella ipotesi $p_g = p_n$ noi abbiamo trovato $d = 0$; qui $(p_g > p_n)$ vedremo, col ragionamento analogo, che è $d \leq p_g - p_n$. A tal fine assumiamo un nuovo punto a_s sulla retta g, e immaginiamo condotti i d piani $\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_d$ tangenti a Φ^{n-2+d} nel punto a_s. Ciascuno di questi piani, per es. ω_1, sega la Φ^{n-2+d}, oltre che in g contata d volte, lungo una curva Γ^{n-2}, che è aggiunta alla curva $F\,\omega_1$, passa pel gruppo $C'\,\omega_1$, passa inoltre per a_1 (colla tangente $\omega_1\,\tau_1$), $a_2, \ldots, a_{s-1}$, *ed anche per* a_s. Dunque, facendo astrazione dalla tangente in a_1, possiamo dire che sopra ω_1, come pure sopra $\omega_2, \ldots, \omega_d$, esistono ∞^1 curve Γ^{n-2} (e non una sola $= g + \Gamma^{n-3}$ come sopra un piano generico ω), le quali sono aggiunte alla curva $F\,\omega_1$, passano pel gruppo $C'\,\omega_1$, e passano inoltre per gli s punti $a_1, a_2, \ldots, a_s$ fissati sopra g. E siccome l'ultima osservazione può essere invertita, così si può dire che d è il numero di quei piani $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$, per i quali la proprietà ora esposta si verifica: partendo appunto da questa definizione di d, riesce possibile fissare un limite che d non può superare.

A tal fine e per facilitar la ricerca, attribuiamo anzitutto una posizione particolare ai punti $a_1, a_2, \ldots, a_s$ di g; scegliamo i punti stessi tra le $n\,(> s)$ intersezioni di F colla retta g. Allora sul piano ω_1 (oppure su $\omega_2, \ldots, \omega_d$) le ∞^1 curve Γ^{n-2} passanti per $a_1, a_2, \ldots, a_s$, segano sopra la curva $F\,\omega_1$ una serie g^1_n, che appartiene alla g^s_n completa, ed i cui gruppi hanno in comune i punti $a_1, a_2, \ldots, a_s$; questi punti adunque, su quel piano ω_1, non determinano più un solo gruppo della g^s_n (come in generale), ma entrano invece in ∞^1 gruppi. D'altronde il caso d'indeterminazione di cui ora stiamo parlando, sappiamo (n.° 24) che può presentarsi *al più* sopra $p_g - p_n$ piani condotti per la retta g; concludiamo dunque che è $d \leq p_g - p_n$.

Nella ipotesi $p_g = p_n$ trattata nel § 26, avevamo trovato col ragionamento qui riportato $d = 0$, ed avevamo dedotto che per $s-1$ punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ di g si può condurre una superficie Φ^{n-2}, la quale sia aggiunta ad F, passi per C', e tocchi inoltre un piano assegnato τ_1 in a_1. Qui non possiamo più trarre la stessa conseguenza, giacchè la superficie Φ, a cui arriviamo partendo dai punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ e dal piano τ_1, non ha più l'ordine $n-2$, ma ha l'ordine $n-2+d$, e passa d volte per g; dove di d si sa soltanto che è $\leq p_g - p_n$. Volendo pervenire a superficie d'ordine $n-2$, dobbiamo proporci una questione che non ci si presentava nella ipotesi $p_g = p_n$: « tra le infinite superficie Φ^{n-2+d}, che si ottengono al variare dei punti a_1, « $a_2, \ldots, a_{s-1}$ di g, quante sono quelle che si spezzano in una Φ^{n-2} ed in d « piani passanti per la retta g »?

Per rispondere alla domanda, riprendiamo i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ scelti tra le intersezioni di g con F, fissiamo il piano τ_1 in a_1, ed indichiamo con $(\tau_1;\, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1})$ la Φ^{n-2+d} che siamo riusciti a costruire partendo da questi elementi (superficie la quale è aggiunta ad F, passa per C', passa d volte per la retta g, e $d+1$ volte per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, toccando il piano τ_1 in a_1). Sia, come prima, a_s una ulteriore intersezione della retta g con F, e siano $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ i d piani tangenti alla Φ^{n-2+d} in a_s, e passanti per g. Uno qualsiasi, ad es. ω_1, di questi piani sega la superficie in quella curva Γ_1^{n-2}, che è aggiunta alla curva $F\omega_1$, passa pel gruppo $C'\omega_1$, passa inoltre per gli s punti $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s$, e tocca in a_1 il piano τ_1. Ora si costruisca similmente la superficie

$$\Phi^{n-2+d}(\tau_1;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{s-2},\ a_s);$$

questa superficie sega il piano ω_1 (come pure i piani $\omega_2, \ldots, \omega_s$) nella stessa curva Γ_1^{n-2} determinata dalla precedente superficie Φ^{n-2+d}. Le due superficie Φ, che abbiamo sinora costruito, sono però distinte; giacchè mentre per la prima Φ il punto a_{s-1} è $(d+1)^{\text{uplo}}$, ed il punto a_s è punto di contatto coi piani ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_d$, per la seconda Φ invece a_s è punto $(d+1)^{\text{uplo}}$, ed a_{s-1} è punto di contatto cogli stessi d piani. Ora col medesimo ragionamento si vede che, insieme alle due Φ sinora considerate, anche le altre $s-3$ Φ^{n-2+d}

$$(\tau_1;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{s-3},\ a_{s-1},\ a_s),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\tau_1;\ a_1,\ a_3,\ a_4, \ldots,\ a_{s-1},\ a_s),$$

segano ciascuno dei d piani $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$ lungo una stessa curva Γ^{n-2}. Le $s-1$ Φ^{n-2+d}, che così otteniamo in fine, sono linearmente indipendenti, perchè ad es. la prima passa d volte pel punto a_s, che è multiplo secondo $d+1$ per le rimanenti. Quelle Φ^{n-2+d} danno luogo adunque ad un sistema lineare ∞^{s-2} di superficie d'ordine $n-2+d$, le quali sono aggiunte ad F, passano per la curva C', e passano inoltre d volte per la retta g, e $d+1$ volte pel punto a_1, toccando ivi il piano fisso τ_1. Di più, tutte quelle ∞^{s-2} superficie hanno la proprietà di segare lungo una curva fissa ciascuno dei d piani $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d$. In virtù di quest'ultima proprietà si vede che basta imporre una condizione semplice, perchè una superficie del sistema ∞^{s-2} contenga uno dei piani ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_d$, e si spezzi in quello ed in una superficie residua d'ordine $n-3+d$. Dunque staccando uno per volta i d piani, si otterrà alla fine un sistema lineare di dimensione $> s-2-d$, composto di superficie d'ordine $n-2$ aggiunte ad F, passanti per C', passanti (semplicemente) pel punto a_1, e tangenti inoltre al piano τ_1, condotto ad arbitrio per a_1. Se togliamo ancora le due condizioni semplici che corrispondono a questo contatto, e la condizione ulteriore del passaggio per a_1, troviamo finalmente che « le superficie d'or« dine $n-2$ aggiunte ad F, le quali passano per la curva C', formano un

« sistema di dimensione $\geq s+1-d$ ». Tale è dunque la dimensione del sistema completo $|C|$ contenente le sezioni piane di F. La serie g_n che questo sistema sega sopra una sezione piana generica di F, *serie caratteristica* di $|C|$, ha in conseguenza la dimensione $\geq s-d$, ed essendo contenuta in una g_n^s completa, ha la deficienza $< d$. D'altra parte abbiamo notato esser $d \leq p_g - p_n$. Dunque infine possiamo enunciare il seguente teorema fondamentale (*):

Sopra una superficie di generi p_g, p_n, ogni sistema lineare completo di curve ha una serie caratteristica la cui deficienza non può superare $p_g - p_n$.

Osservazione. — Rimarrebbe al solito da osservare che la dimostrazione fu data nella ipotesi che il sistema $|C|$ sia semplice, almeno ∞^3, mentre questa restrizione non comparisce nell'enunciato. Si può rispondere che la restrizione è inutile, e che ciò si prova, o modificando il ragionamento come fu indicato in un caso analogo (assumendo come asse del fascio dei piani ω una retta g generica entro una *stella*, anzichè nello spazio); o più semplicemente ricorrendo al metodo indicato nel n.° seguente.

Ma un'altra restrizione fu imposta nella dimostrazione, e non appare nell'enunciato. Si è supposto infatti che la superficie F, su cui si ragionava, non fosse *rigata*; e ciò per evitare che qualcuna tra le sezioni di F con un piano ω del fascio g si spezzasse. Ora non è che lo spezzamento della curva $F\omega$ renda illusoria la dimostrazione; ma per mostrare che, non ostante lo spezzamento, la dimostrazione continua a sussistere, occorrevano considerazioni ulteriori, che sarebbero venute a complicar anche più un ragionamento per sua natura non semplice. Ora volendo mostrare che il teorema vale anche per le superficie rigate, rimangono sempre due vie. Una di queste consiste nel dimostrare il teorema per ogni sistema di curve giacente sopra una superficie rigata, e secante in più di un punto ciascuna generatrice, e fino a questo punto si arriva senza modificare minimamente la dimostrazione già data; poi col metodo indicato nel paragrafo seguente, si mostra come il teorema possa estendersi dai sistemi di curve ora considerati, ad ogni sistema di unisecanti le generatrici.

(*) Quando pubblicai la Memoria citata *Alcuni risultati*..., ero già in possesso di questo teorema; ma alcune difficoltà riscontrate nella dimostrazione che davo allora, mi consigliarono di differirne la esposizione. Mi limitai a dar cenno del risultato in una nota a piè di pagina. Il teorema si trova poi enunciato (senza dimostrazione) nella Monografia *Sur quelques récents résultats*..., n.° 27.

La seconda via consiste nell'approfittare dei risultati ottenuti dal sig. SEGRE sulle superficie rigate (*). Infatti uno dei teoremi del sig. SEGRE ci insegna, che una superficie F rigata, d'ordine n, a sezioni di genere $\pi (p_g = 0,\ p_n = -\pi)$, è sempre proiezione di una superficie rigata dello stesso ordine di uno spazio a $r \geqq n - 2\pi + 1$ dimensioni; e ciò equivale a dire che un sistema $|C|$ completo di curve unisecanti le generatrici, se ha il grado n e il genere π, ha la dimensione $r \geqq n - 2\pi + 1$. Ora se la serie caratteristica g_n^{r-1} di $|C|$ è non speciale, essa è contenuta in una serie $g_n^{n-\pi}$ completa, e quindi essa ha la deficienza

$$\delta = n - \pi - (r - 1) \leqq \pi,$$

dove

$$\pi = p_g - p_n.$$

Se poi la serie caratteristica g_n^{r-1} di $|C|$ è speciale, ed è contenuta per esempio in una serie completa $g_n^{n-\pi+i}$ $(i > 0)$, nel qual caso la sua deficienza è

$$\delta = n - \pi + i - (r - 1),$$

si vede allora, con ragionamenti analoghi a quelli del sig. SEGRE, che risulta $r \geqq n - 2\pi + 1 + 2i$, e quindi

$$\delta \leqq \pi - i < p_g - p_n.$$

Sicchè in ogni caso il teorema vale anche per le superficie rigate.

30. *Ancora sul teorema fondamentale.* — Nella mia Memoria citata *Alcuni risultati...*, dopo di aver dimostrato il teorema del n.° 27 pei sistemi lineari di curve *semplici* e *privi di curve fondamentali proprie*, ho indicato una via per togliere le restrizioni sottolineate che apparivano superflue (**). La stessa via si applica al teorema generale del n.° 29; e per le conseguenze a cui conduce, val la pena di riprodurla brevemente qui, adottando, nell'esporla, la forma invariantiva che dà maggior generalità ai risultati.

Sopra una superficie F, data in senso invariantivo, si abbiano due sistemi irriducibili completi di curve $|C_1|$, $|C_2|$, di cui siano fissati i gruppi-base (com-

(*) *Recherches générales sur les courbes...*; l. c.

(**) Si veda il n.° 7 di quella Memoria. Quel procedimento, come ho avvertito colà, mi fu suggerito da un paragrafo (IV, 1) delle *Ricerche di geometria...*, del sig. ENRIQUES.

posti di tutti o di alcuni dei punti comuni alle curve dei singoli sistemi). Sia

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

il sistema completo somma di quei due, ed abbia come gruppo-base la riunione dei gruppi-base dei due sistemi primitivi. Indichiamo con r_1, r_2, r le dimensioni dei tre sistemi (r_1, $r_2 \geq 1$), con n_1, n_2 i gradi dei due primi, e con i il numero dei punti intersezioni di una C_1 con una C_2, fuori dei punti-base dei due sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$. Le serie caratteristiche di questi saranno $g_{n_1}^{r_1-1}$ e $g_{n_2}^{r_2-1}$.

Ciò premesso, consideriamo la serie che il sistema somma $\infty^r |C$ sega sopra la curva generica C_1 di $|C_1|$ (fuori dei punti-base). Questa serie ha l'ordine $n_1 + i$, come risulta considerando una C spezzata in $C_1 + C_2$; ed ha la dimensione $r - r_2 - 1$, poichè le curve di $|C|$ che contengono la C_1, si spezzano in questa curva ed in una delle ∞^{r_2} curve C_2. La serie segata da $|C|$ su C_1 è dunque una $g_{n_1+i}^{r-r_2-1}$. Costringiamo ora le curve di $|C|$ a passare per le i intersezioni della C_1 con una C_2; se quelle i intersezioni presentano $\varepsilon < i$ condizioni alle curve di $|C|$ che le contengono, queste ultime curve segheranno sopra la C_1 una serie $g_{n_1}^{r-r_2-1-\varepsilon}$. Questa serie contiene la serie caratteristica $g_{n_1}^{r_1-1}$ del sistema $|C_1|$; giacchè l'ultima serie è segata sulla C_1 dalle curve C che passano per le i intersezioni della C_1 con una C_2, e *contengono inoltre tutta la* C_2. Ne viene che la deficienza δ_1 della serie caratteristica $g_{n_1}^{r_1-1}$ del sistema $|C_1|$ è

$$\delta_1 \geq (r - r_2 - 1 - \varepsilon) - (r_1 - 1),$$

ossia

$$\delta_1 \geq r - r_1 - r_2 - \varepsilon;$$

dove il segno di uguaglianza va preso solo nel caso che sia completa la serie $g_{n_1}^{r-r_2-1-\varepsilon}$; e ciò accade per es. se è completa la serie segata dal sistema $|C|$ sulla curva C_1.

Ragionando similmente sul sistema $|C_2|$, si trova che la serie caratteristica di questo sistema ha la deficienza

$$\delta_2 > r - r_1 - r_2 - \varepsilon,$$

dove il secondo membro ha lo stesso valore che nella relazione precedente.

Vediamo ora come il risultato ottenuto possa servire al nostro scopo. Riprendiamo ancora il sistema $|C_1|$ completo, irriducibile, di dimensione $r_1 > 1$, e scegliamo il sistema $|C|$ in guisa da soddisfare alle seguenti condizioni:

1) $|C|$ seghi sulla curva C_1 generica una serie completa;

2) $|C|$ contenga il sistema $|C_1|$, e dia per residuo un sistema $|C_2|$ semplice (almeno ∞^3), le cui curve non passino per altri punti fissi oltre ai punti-base di $|C_1|$.

Le due condizioni possono sempre esser soddisfatte, perchè se ad es. $|C_1|$ si considera tracciato sopra una superficie F', che sia una immagine proiettiva di F nello spazio ordinario, e i cui punti multipli non cadano nei punti-base (in numero finito) di $|C_1|$, il sistema $|C|$ potrà sempre ritenersi segato sulla F' dalle superficie d'ordine abbastanza elevato, che passano con molteplicità convenienti per i punti-base di $|C|$.

Ora dalla ipotesi 1) segue

$$\delta_1 = r - r_1 - r_2 - \varepsilon \leq \delta_2 ;$$

dalla ipotesi 2) segue poi che al sistema $|C_2|$ si può applicare senza alcuna modificazione, non solo il risultato, ma pur tutto il ragionamento del n.° 29, per modo che si ha

$$\delta_2 \leq p_g - p_n ,$$

essendo p_g e p_n i generi della superficie F. Quindi in fine

$$\delta_1 < p_g - p_n .$$

Concludendo possiamo dire che « dimostrato il teorema fondamentale del « n.° 29 per i sistemi semplici (almeno ∞^3) di curve, esso può estendersi su« bito, col procedimento indicato, anche ai sistemi non semplici, anche ai « sistemi ∞^1; *e per un sistema irriducibile, completo, di dimensione* ≥ 1, *co« munque sia fissato il gruppo-base, vale la relazione: deficienza serie ca« ratt.* $< p_g - p_n$ ».

Il procedimento di cui ci siamo serviti, permette pure di estendere il teorema ai sistemi *riducibili;* ma a tal fine bisognerebbe estendere con opportune convenzioni i concetti di serie caratteristica, serie completa,...; e ciò esigerebbe una discussione minuziosa, su cui non vogliamo ora fermarci.

31. *Esempi di superficie a cui si può applicare il teorema fondamentale.* — Il teorema generale del n.° 29, messo a confronto col caso particolare già trattato (n.° 27) delle superficie regolari ($p_g = p_n$), mostra perchè sopra alcune superficie si trovino sistemi lineari completi a serie caratteristica completa, mentre sopra altre superficie si incontrano sistemi con serie caratteristica deficiente. Il presentarsi dell'uno o dell'altro caso dipende, non tanto dalla natura del sistema, quanto dalla natura della superficie. Così per

esempio si può asserire che una superficie è irregolare, se sopra di essa esiste un sistema completo avente la serie caratteristica incompleta; mentre dalla ipotesi opposta *non* si può concludere la regolarità della superficie.

Il risultato a cui siamo giunti verrà completato, mostrando che sopra ogni superficie di generi p_g, p_n, esistono in fatto sistemi lineari completi, le cui serie caratteristiche hanno esattamente la deficienza $p_g - p_n$. Ciò faremo nel Capitolo seguente; per ora limitiamoci a verificar la cosa sopra due esempi.

Quello delle superficie rigate è il più semplice. Le considerazioni che vi abbiamo dedicato nella Osservazione del n.° 29, bastano a mostrare come il teorema si applichi ai sistemi di curve unisecanti le generatrici, conducendo ad un risultato che poteva ritenersi noto, in seguito alle ricerche del sig. Segre.

Un secondo esempio ci è offerto dalle superficie *iperellitiche* introdotte dal sig. Picard, e di cui uno studio completo si deve al sig. Humbert (*). Queste superficie, i cui punti si possono far corrispondere birazionalmente alle coppie di punti di una curva di genere 2, hanno $p_g = 1$, $p_n = -1$; d'altronde sopra di esse si possono costruire sistemi $\infty^{\pi-2}$ completi di curve di genere π (sufficientemente elevato), che sono *aggiunti* di sè stessi; la serie caratteristica $g_{2\pi-2}^{\pi-3}$ è contenuta nella $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica, ed ha quindi la deficienza $2 = p_g - p_n$.

CAPITOLO III.

Altre proprietà dei sistemi lineari di curve.

Gli ultimi teoremi offrono il mezzo per proseguire lo studio dei sistemi lineari di curve situati sopra una superficie. Noi però tra le svariate proprietà, che i metodi qui adoperati permettono di ottenere, ci limitiamo ad esporre quelle che sembrano più interessanti, e che portano maggior luce sull'argomento.

32. *Di nuovo sul sistema canonico di curve sopra una superficie.* — Noi abbiamo già definito (n.° 17) il *sistema canonico* $|K|$ di curve, che gode una speciale importanza tra i vari sistemi appartenenti ad una superficie.

(*) *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, n.° 144; Journal de Mathématiques, 4.e s.e, t. X.

Sappiamo che $|K|$ si ottiene sottraendo un sistema *qualsiasi* $|C|$ dal proprio aggiunto $|C'|$, e sopprimendo, quando sia il caso, nel resto $|C'-C|$ le curve *eccezionali* (curve trasformabili birazionalmente in punti) che potessero entrarvi. Sappiamo ancora che la dimensione di $|K|$ aumentata di una unità, dà quel carattere invariantivo della superficie che prende il nome di genere geometrico p_g; mentre il genere della curva canonica K generica, supposta irriducibile, è un altro invariante che dicesi *genere lineare* $p^{(1)}$. Un terzo invariante sarebbe il grado $p^{(2)}$ del sistema $|K|$, ma esso, quando si definisca convenientemente il gruppo-base di K, si riconosce uguale a $p^{(1)}-1$ (*).

Il sistema canonico $|K|$ esiste per tutte le superficie che hanno il genere geometrico $p_g > 1$; se $p_g = 1$, il sistema canonico si riduce ad una sola curva, che può anche mancare quando ogni sistema $|C|$ coincida (fatta astrazione da curve eccezionali) col proprio aggiunto $|C'|$. Finalmente se $p_g = 0$ (ad es. sulle superficie razionali, o rigate...) manca il sistema canonico, e nessun sistema $|C|$ è contenuto nel proprio aggiunto.

33. *Sistemi speciali e non speciali di curve sopra una superficie.* — Quando sopra una superficie di genere geometrico $p_g > 0$, si confronta il sistema canonico $|K|$ con un altro sistema di curve $|C|$ qualsiasi, due casi possono presentarsi; perchè il sistema $|C|$ può esser contenuto nel sistema canonico $|K|$, oppure $|C|$ non è contenuto in $|K|$. Nel primo caso si dice che $|C|$ è un sistema *speciale;* nel secondo *non speciale.* Sopra una superficie di genere $p_g = 0$, ogni sistema va considerato come non speciale. È chiaro che la dimensione, il genere... di un sistema speciale non possono superare i corrispondenti caratteri $p_g - 1$, $p^{(1)}$... del sistema canonico. Invece per i sistemi non speciali, la dimensione, il genere, il grado... non hanno limite superiore.

La curva generica C di un sistema speciale $|C|$ fa parte di una o più (infinite) curve canoniche K; quelle curve che insieme a C completano le curve canoniche di cui C fa parte, formano un sistema lineare speciale $|C_1| = |K - C|$, che non dipende dalla particolare curva C fissata entro a $|C|$, e che si chiama *residuo di* $|C|$ *rispetto al sistema canonico.* È naturale di considerare il sistema $|C|$ come più o meno speciale, secondo che

(*) Nöther, *Zur Theorie...*, Math. Annalen, 8. Sulle avvertenze da farsi all'uguaglianza qui riportata, si veda la Monografia citata *Sur quelques récents résultats...*, n.[i] 24, 25.

più o meno ampio è il sistema residuo $|C_1|$. Precisamente se indichiamo con i la dimensione di $|C_1|$ aumentata di una unità, ossia il *numero delle curve canoniche linearmente indipendenti che contengono una curva* C, diremo che i è l'*indice di specialità* di $|C|$. Si può dire allora che ad un sistema non speciale corrisponde l'indice $i=0$, al sistema canonico $|K|$ corrisponde l'indice $i=1$; ecc.

34. *Relazione fondamentale tra i caratteri di un sistema lineare di curve sopra una superficie.* — Sopra una superficie, data invariantivamente, di generi p_g, p_n, si consideri un sistema lineare *completo* $|C|$ di curve, del quale sia fissato il gruppo-base. Indicheremo d'ordinario colle lettere r, n, π, i, i caratteri di $|C|$ già definiti, cioè la *dimensione*, il *grado*, il *genere* e l'*indice di specialità*. Ci proponiamo di stabilire una relazione tra questi caratteri ed i generi della superficie.

A tal fine consideriamo la serie caratteristica g_n^{r-1} segata dal sistema $|C|$ sopra una C delle sue curve. Questa serie è certo *speciale*, se la superficie ha il genere $p_g > 0$, come pel momento supponiamo; infatti, sotto l'ultima ipotesi, il sistema $|C|$ è contenuto nel suo aggiunto $|C'|$, e quindi la serie g_n^{r-1} segata da $|C|$ sopra una delle sue curve C, è contenuta nella serie $g_{2\pi-2}$ (serie canonica, completa o no) che il sistema $|C'|$ sega su C. Anzi di qua risulta che il sistema $|C'-C|$ sega sulla curva C gruppi di $2\pi-2-n$ punti, i quali sommati coi gruppi della serie caratteristica g_n^{r-1}, danno gruppi della serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. La stessa osservazione si può enunciare ricordando che il sistema $|C'-C|$ è il sistema canonico $|K|$ della superficie, o ne differisce per qualche curva fissa che entra in ogni curva di $|C'-C|$, ma non forma parte della curva K generica. Vediamo allora che « sopra una curva « generica C del sistema $|C|$, la serie residua della serie caratteristica g_n^{r-1} « rispetto alla serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ contiene la serie segata su C dal sistema « canonico, e può coincidere con questa ».

Per tradurre questo enunciato in una relazione tra i caratteri delle varie serie nominate, conviene però ricordare che la serie caratteristica g_n^{r-1} può essere incompleta; se indichiamo con δ la sua deficienza, e quindi con $g_n^{r-1+\delta}$ la serie completa che la contiene, sappiamo che è in ogni caso (n.° 28)

$$0 \leqq \delta \leqq p_g - p_n.$$

Ora l'ultima serie ha, rispetto alla serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, una serie residua $g_{n'}^{\varrho'}$ (che è pur residua di g_n^{r-1}), i cui caratteri si possono calcolare in base al teorema di RIEMANN-ROCH; precisamente si trova

$$n' = 2\pi - 2 - n, \qquad \rho' = \pi - n + r + \delta - 2.$$

Sappiamo d'altronde che questa serie $g_{n'}^{\rho'}$, o parte di essa, è segata dal sistema canonico $|K|$, il quale ha la dimensione $p_g - 1$. Ora se la curva C non è contenuta in $|K|$, o, come diciamo, se il sistema $|C|$ è *non speciale*, $p_g - 1$ è pur la dimensione della serie segata da $|K|$ sulla curva C; si ha dunque, in virtù dell'ultima osservazione,

$$\rho' \geq p_g - 1,$$

ossia

$$\pi - n + r + \delta - 1 > p_g.$$

Se invece il sistema $|C|$ è *speciale* coll'indice i, di guisa che una sua curva appartiene a ∞^{i-1} curve di $|K|$, si vede collo stesso ragionamento che risulta

$$\pi - n + r + \delta - 1 \geq p_g - i; \tag{α}$$

e quest'ultima relazione (per $i = 0$) contiene la precedente. Si noti poi che dalla dimostrazione segue, che il segno di uguaglianza vale soltanto quando la serie segata dal sistema canonico $|K|$ su C è completa, e coincide colla $g_{n'}^{\rho'}$, o ne differisce per qualche punto fisso, che entra in ogni gruppo dell'ultima serie, ma non entra nel gruppo generico della prima.

Un'altra osservazione va fatta prima di procedere. Noi abbiamo dedotto la α) nella ipotesi $p_g > 0$. Ma quella relazione vale pure se $p_g = 0$ e quindi $i = 0$; infatti se una curva C di genere π sostiene una serie completa $g_n^{r-1+\delta}$ (serie completa contenente la serie caratteristica di $|C|$), tra i caratteri di quella serie vale sempre la nota relazione

$$n - (r - 1 + \delta) \leq \pi,$$

a cui appunto si riduce la α) quando $p_g = i = 0$. Il segno inferiore nella α) riguarda ora il caso che la serie caratteristica sia non speciale.

Ritornando alla α) (nelle ipotesi $p_g \geq 0$, $i \geq 0$), possiamo trasformare quella relazione eliminando δ mediante la formola

$$\delta \leq p_g - p_n.$$

Si arriva così alla *relazione fondamentale* (*)

$$r - n + \pi - 1 \geq p_n - i, \tag{1}$$

(*) La relazione (1) fu data per la prima volta dal sig. NÖTHER (Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., 1886), scrivendo p_g in luogo di p_n, e supponendo quindi tacitamente la rela quale lega i caratteri r, n, π, i di un sistema lineare completo di curve sopra una superficie, al genere numerico di questa. Affinchè la (1) si riduca ad una uguaglianza, occorre che la deficienza δ abbia il valore massimo, ed inoltre che la α) stessa diventi una uguaglianza.

Volendo enunciare il risultato espresso dalla (1), conviene staccare, per maggior chiarezza, il caso dei sistemi non speciali ($i = 0$), da quello dei sistemi speciali. Abbiamo così i seguenti teoremi:

I. *Tra i caratteri r, n, π di un sistema non speciale completo di curve, sopra una superficie di genere numerico p_n, passa la relazione*

$$r - n + \pi - 1 \geqq p_n;$$

la quale fissa un limite inferiore (raggiungibile) alla dimensione r di un sistema lineare, di cui si conoscano il genere π ed il grado n. Per i sistemi, certo non speciali, di curve sul piano ($p_n = 0$), si ritrova una nota relazione (n.° 1).

II. *Tra i caratteri r, n, π di un sistema completo, speciale coll'indice i, sopra una superficie di genere numerico p_n, passa la relazione*

$$r - n + \pi - 1 \geqq p_n - i.$$

Per un sistema speciale di dato genere e grado, non si può dunque assegnare nemmeno un limite inferiore alla dimensione r, finchè non si conosca l'indice di specialità i. Ma quando sia dato i (vale a dire il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti che passano per una curva generica del sistema), si ha, se non la dimensione r del sistema, almeno un limite inferiore a quella.

Un corollario immediato dei due teoremi precedenti ci dice che: *se tra i caratteri di un sistema lineare passa la relazione*

$$r - n + \pi - 1 < p_n,$$

il sistema è certo speciale; ma non è vero l'inverso.

35. *Sovrabbondanza di un sistema. Sistemi di sovrabbondanza nulla.* — La relazione fondamentale (1), che contempla i due casi $i = 0$, $i > 0$,

---

golarità della superficie. Il sig. ENRIQUES (*Ricerche di geometria...*, IV, 2) fece rilevare che la dimostrazione del sig. NÖTHER valeva soltanto sotto una certa restrizione, che, in grazia del teorema del n.° 26, si traduce nell'uguaglianza $p_g = p_n$. Ma il teorema del n.° 28 permette di applicare il ragionamento del sig. NÖTHER al caso generale $p_g \geqq p_n$, e conduce appunto alla relazione (1), che si trova data per la prima volta, senza dimostrazione, nella Monografia citata *Sur quelques récents résultats*, n.[i] 34, 35.

sopra considerati, si può presentare sotto forma di uguaglianza, se si introduce la differenza $s \geqq 0$ tra il primo e il secondo membro della (1). Avremo allora

$$r - n + \pi - 1 = p_n + s - i. \tag{2}$$

Il numero, positivo o nullo, s dicesi *sovrabbondanza del sistema di curve;* è un carattere del sistema, che è legato agli altri caratteri dalla relazione (2). Noi avevamo già introdotto il concetto di sovrabbondanza, trattando dei sistemi lineari di curve piane (n.° 1). La definizione data ora comprende quella del n.° 1 come caso particolare ($p_n = i = 0$).

Possiamo subito applicare la relazione (2) al sistema canonico $|K|$, supposto irriducibile; così ci calcoleremo la sovrabbondanza di $|K|$. La dimensione di $|K|$ è $p_g - 1$, il grado n si indica con $p^{(2)}$, ed il genere π con $p^{(1)}$, l'indice i vale per definizione 1. Sostituendo nella (2) troviamo

$$s = p_g - p_n + (p^{(1)} - 1 - p^{(2)}).$$

D'altronde, adottando convenzioni opportune riguardo al gruppo base di $|K|$, si ha (n.° 32) $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, e quindi

$$s = p_g - p_n.$$

La sovrabbondanza del sistema canonico, sopra una superficie, uguaglia la differenza tra il genere geometrico e il genere numerico della superficie.

Tornando ora alla sovrabbondanza di un sistema generale, vediamo quali particolarità presentino i sistemi di sovrabbondanza nulla. Ponendo $s = 0$ la formula (2) diventa

$$r - n + \pi - 1 = p_n - i,$$

e proviene dalla (1) e dalla α) in cui si prendano i segni di uguaglianza; le considerazioni fatte a proposito di quelle formole, conducono subito al seguente enunciato:

Sopra una superficie di generi p_g, p_n, un sistema lineare completo $|C|$ di curve, il quale abbia la sovrabbondanza nulla, gode le seguenti proprietà:

1) *la serie caratteristica del sistema $|C|$ ha la deficienza massima $\delta = p_g - p_n$;*

2) *la serie segata dal sistema canonico sulla curva generica del sistema $|C|$ è completa.* Quest'ultima parte dell'enunciato, quando $p_g = 0$, e quindi non esiste sistema canonico, va sostituita colla seguente:

2') *la serie caratteristica del sistema $|C|$ è non speciale.*

Le proprietà 1) e 2) (o 2')) non bastano però a caratterizzare un sistema di sovrabbondanza nulla, a meno che non si aggiungano certe restrizioni relative ai punti base del sistema; ma su ciò non intendiamo fermarci.

Osservazione. — La sovrabbondanza di un sistema lineare di curve sopra una superficie fu considerata per la prima volta dal sig. ENRIQUES (*Ricerche di geometria...*, IV, 2), nella ipotesi che la superficie fosse regolare ($p_g = p_n$). Sotto questa restrizione egli potè dare una definizione geometrica della sovrabbondanza, che non si estende al caso delle superficie irregolari. Eccola: « la sovrabbondanza di un sistema $|C|$ non speciale, sopra una superficie re- « golare ($p_g = p_n = p$), è l'eccesso su $2p$ del numero delle curve aggiunte C', « linearmente indipendenti, che passano per le intersezioni variabili di due « curve C. » Se invece il sistema $|C|$ è speciale coll'indice i, in questo enunciato si deve sostituire alla sovrabbondanza s, la differenza $s - i$.

36. *Sistemi regolari di curve. Dimensione virtuale di un sistema.* — Tra i sistemi di curve aventi la *sovrabbondanza nulla*, godono particolare importanza i sistemi *non speciali* ($i = 0$). Un sistema che abbia appunto $s = 0$, $i = 0$, dicesi *regolare*. Tra i suoi caratteri ed il genere numerico della superficie passa la relazione

$$r - n + \pi - 1 = p_n,$$

od anche

$$r = p_n + n - \pi + 1.$$

Noi vedremo tra poco che, sopra ogni superficie, esistono sistemi regolari di dimensione grande quanto si vuole. Per ora ci limitiamo a mostrare come la considerazione di siffatti sistemi permetta di presentare, sotto una forma più chiara, le varie particolarità, che può offrire un sistema lineare completo di curve sopra una superficie.

Sebbene sia un semplice modo di dire, conviene tuttavia di ammettere che ogni sistema $|C|$ di curve sopra una superficie di generi p_g, p_n, riuscirebbe regolare, se non agissero talvolta sopra di esso due cause perturbatrici, di cui ora parleremo. D'accordo con ciò, detti n e π il grado ed il genere di $|C|$, conviene riguardare come dimensione teorica, o *virtuale*, di $|C|$ l'espressione

$$r' = p_n + n - \pi + 1,$$

che in ogni caso è legata al sistema $|C|$ da una relazione invariabile per trasformazioni birazionali. La dimensione vera, o *effettiva*, r di $|C|$ può tuttavia differire dalla dimensione virtuale; e precisamente, se con s e i indichiamo le due cause perturbatrici, che sono la *sovrabbondanza* e la *specialità* di $|C|$, abbiamo dalla (2)

$$r = r' + s - i.$$

Vi sono sistemi sui quali nè l'una, nè l'altra causa di perturbazione non agiscono ($s = i = 0$); sono i *sistemi regolari.* Gli altri sistemi vanno considerati come irregolari, quando pure le due cause di perturbazione si eliminassero ($s = i > 0$).

Va ancora notato che delle due cause di irregolarità, l'una, la *specialità*, si presenta solo per i sistemi contenuti nel sistema canonico, aventi quindi dimensione, genere e grado inferiori a certi limiti; mentre per la seconda causa di irregolarità non si può dir nulla di simile.

La dimensione virtuale del sistema canonico vale $r' = p_n - 1$; risulta subito dalla definizione.

Osservazione. — Le definizioni qui date di sistema regolare, e di dimensione virtuale, comprendono come caso particolare le definizioni analoghe date a proposito dei sistemi lineari di curve piane (n.° 1).

37. *Sistemi mutuamente residui rispetto al sistema canonico.* — Ritorniamo alla formola (2) del n.° 35. Essa, quando venga applicata ad un sistema $|C|$ *speciale* ($i > 0$), può anche presentarsi altrimenti; basta osservare che, per definizione, $i - 1$ è la dimensione (effettiva) del sistema $|C_1| = |K - C|$, residuo di $|C|$ rispetto al sistema canonico $|K|$.

Indicando quella dimensione con r_1, si ha dunque

$$r_1 = p_n - r + n - \pi + s, \tag{4}$$

relazione che, per i sistemi speciali di curve, sostituisce la relazione fornita dal teorema di Riemann-Roch per le serie speciali appartenenti ad una curva ($\rho_1 = p - 1 - n + \rho$).

Il sistema $|C_1|$, residuo di $|C|$, può in certi casi esser riducibile; noi però, per metterci nella ipotesi più semplice, supporremo che esso sia *irriducibile;* (in caso opposto, basterebbe introdurre quelle convenzioni, che permettono di estendere ai sistemi riducibili i caratteri e le proprietà dei sistemi irriducibili). Indicando allora con n_1, π_1, s_1 il genere, il grado, e la sovrabbondanza di $|C_1|$, avremo per simmetria

$$r = p_n - r_1 + n_1 - \pi_1 + s_1; \tag{4'}$$

e sottraendo dalla (4)

$$n-\pi+s=n_1-\pi_1+s_1. \tag{5}$$

Questa uguaglianza si spezza in altre due, quando si tenga conto delle relazioni che legano i gradi e i generi dei due sistemi $|C|$ e $|C_1|$. A tal fine cominciamo a determinare il numero delle intersezioni (fuori dei punti-base) di una C con una C_1, numero che indicheremo brevemente con $C \cdot C_1$. Si ha subito, introducendo simboli analoghi, e tenendo conto della relazione $C+C_1=K$,

$$C \cdot C_1 = C \cdot K - C \cdot C;$$

d'altronde $C \cdot K$, numero delle intersezioni di una curva C con una curva canonica K, vale $2\pi-2-n$, e $C \cdot C$ vale n, quindi in fine

$$C \cdot C_1 = 2\pi-2-2n.$$

Ora applicando formole note, possiamo calcolarci il grado ed il genere del sistema $|C+C_1|$, ossia del sistema canonico $|K|$; questi caratteri sono espressi da (*)

$$p^{(2)}=n+n_1+2(2\pi-2-2n)=n_1-3n+4\pi-4$$
$$p^{(1)}=\pi+\pi_1+(2\pi-2-2n)-1=3\pi+\pi_1-2n-3.$$

D'altronde vale la relazione $p^{(2)}=p^{(1)}-1$; in virtù di questa si ricava subito

$$n-\pi=n_1-\pi_1,$$

e, tenendo conto della (5),

$$s=s_1.$$

Possiamo anche calcolarci le dimensioni virtuali r', r'_1 dei due sistemi $|C|$ e $|C_1|$. Si ha per definizione

$$r'=p_n+n-\pi+1,$$
$$r'_1=p_n+n_1-\pi_1+1,$$

e quindi

$$r'=r'_1.$$

Le uguaglianze ora trovate possono riassumersi col seguente enunciato:

Due sistemi (irriducibili) mutuamente residui rispetto al sistema canonico, hanno la stessa dimensione virtuale, e la stessa sovrabbondanza; l'indice

(*) V. Enriques, *Ricerche di geometria...*, IV, 3.

di specialità di ciascuno uguaglia poi, per definizione, la dimensione effettiva dell'altro aumentata di una unità.

38. *Influenza dei punti-base di un sistema sulla sovrabbondanza di questo.* — Riprendiamo ora in esame le cause che rendono irregolare un sistema lineare di curve, ed occupiamoci anzitutto della *sovrabbondanza*. Come abbiamo già detto, anche sul piano si presenta la distinzione tra sistemi regolari e sistemi sovrabbondanti di curve (tutti non speciali); ma sul piano la causa che dà luogo alla sovrabbondanza, si comprende facilmente. Infatti ogni sistema di curve piane privo di punti-base è regolare; mentre un sistema dotato di punti-base è regolare, oppure no, secondo che le condizioni che questi presentano alle curve del sistema, sono tutte indipendenti, oppure alcune seguono dalle rimanenti.

Si può ora chiedere se altrettanto avvenga sulle superficie. È facile prevedere che la risposta non sarà così semplice, poichè, nè avviene che ogni sistema privo di punti-base (e non speciale) sia regolare, nè d'altra parte ogni sistema dotato di punti-base può dedursi da un sistema privo di punti-base colla imposizione di questi. Senza entrare nelle questioni che qui si presenterebbero, si possono fare però alcune considerazioni, che hanno stretta analogia con quelle di geometria piana sopra ricordate.

Partiamo da un sistema completo $|C|$ di curve sopra una superficie, sistema avente i caratteri r, n, π; e per metterci nella ipotesi più generale, supponiamo che sia $s \geqq 0$ la sovrabbondanza di $|C|$, e $i > 0$ l'indice di specialità. Se indichiamo con r' la dimensione virtuale di $|C|$

$$r' = p_n + n - \pi + 1,$$

avremo dunque

$$r - r' = s - i.$$

Costringiamo ora le curve di $|C|$ a passare $k \geqq 1$ volte per un punto generico fissato sulla superficie. Ammesso che le curve di $|C|$ non vengano in conseguenza a spezzarsi, otterremo un nuovo sistema irriducibile $|C_1|$, di cui sarà facile valutare i caratteri. Infatti il punto k^{uplo} porta un abbassamento nel grado di k^2 unità, e nel genere di $\dfrac{k(k-1)}{2}$ unità; sicchè i caratteri corrispondenti di $|C|$ sono

$$n_1 = n - k^2, \qquad \pi_1 = \pi - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Siamo ora in grado di calcolare la dimensione *virtuale* di $|C_1|$

$$r'_1 = p_n + n_1 - \pi_1 + 1 = p_n + n - \pi + 1 - \frac{k(k+1)}{2},$$

ossia

$$r'_1 = r' - \frac{k(k+1)}{2},$$

la quale ci dice che il punto k^{uplo} porta un abbassamento di $\frac{k(k+1)}{2}$ unità nella dimensione *virtuale* di $|C|$; risultato analogo a quello che si trova nel piano, e facile a prevedersi.

Ora si deve ritenere, e si verifica sopra esempi, che *in generale* anche la dimensione effettiva di $|C|$ subisca un abbassamento di $\frac{k(k+1)}{2}$ unità per la imposizione del punto k^{uplo}. Concludiamo adunque che in generale la imposizione di un punto k^{uplo} non altera la differenza $s - i$ tra la dimensione effettiva e la dimensione virtuale di un sistema lineare. Ed è chiaro che nessuna delle due quantità s ed i subisce alterazioni; giacchè l'indice di specialità i, cioè il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti che contengono una curva di $|C|$, non varia quando le curve di $|C|$ si costringono a passare una o più volte per un punto della superficie, senza che questo passaggio tragga con sè lo spezzamento delle C; e non variando nè i, nè la differenza $s - i$, rimarrà inalterata anche la sovrabbondanza s.

Osservazioni analoghe possono ripetersi, se il sistema $|C_1|$ è dedotto da $|C|$, coll'imporre alle curve di $|C|$ il passaggio colle molteplicità $k_1, k_2, \ldots$ per più punti fissati sulla superficie. Supposto che $|C_1|$ sia ancora irriducibile, si trova che la dimensione virtuale r'_1 di esso differisce dalla dimensione virtuale r' di $|C|$ di

$$r' - r'_1 = \frac{1}{2} \sum_i k_i (k_i + 1)$$

unità; ma per quel che riguarda le dimensioni effettive r, r_1 di $|C|$ e $|C_1|$, la differenza potrà riuscire inferiore al numero ora scritto, ed esser espressa da

$$r - r_1 = \frac{1}{2} \sum_i k_i (k_i + 1) - \sigma,$$

se $\sigma \geqq 0$ è il numero di quelle, tra le condizioni imposte dai punti multipli, che sono conseguenza delle rimanenti. Segue di qua che

$$r - r' = r_1 - r_1' - \sigma,$$

ossia

$$s - i = s_1 - i_1 - \sigma;$$

e poichè, come si è visto prima, $i = i_1$, sarà

$$s_1 = s + \sigma.$$

Questa relazione dà luogo all'enunciato: *Se da un sistema* $|C|$ *si deduce un nuovo sistema* $|C_1|$, *imponendo alle curve di* $|C|$ *le condizioni di passare con date molteplicità per punti-base assegnati (i quali vengono aggiunti all'antico gruppo-base di* $|C|$), *la sovrabbondanza di* $|C_1|$ *supera od uguaglia la sovrabbondanza di* $|C|$, *e la differenza è data dal numero di quelle, tra le condizioni imposte dai nuovi punti-base, che sono conseguenza delle rimanenti.*

In particolare partendo da un sistema regolare $|C|$ $(s = 0,\ i = 0)$, si possono ottenere sistemi irregolari $(s > 0,\ i = 0)$, costringendo le curve di $|C|$ a passare per punti fissi così collegati tra loro, che il passaggio per alcuni di essi tragga con sè il passaggio per i rimanenti.

39. *Influenza prodotta dallo staccamento di una curva.* — Come abbiamo avvertito, non si può esigere che ogni sistema $|C_1|$ possa dedursi da un sistema $|C|$ più ampio, per esempio regolare, imponendo soltanto nuovi punti-base alle curve di $|C|$. Ma oltre alla operazione derivante dai punti-base, può esser necessario di dover staccare una o più curve parziali dal sistema $|C|$ per giungere al sistema $|C_1|$. E si può dimostrare, inversamente, che ogni sistema $|C_1|$ può dedursi da un sistema abbastanza ampio $|C|$, per es. regolare, collo staccamento di curve e colla imposizione di punti-base. Sicchè rimane da esaminare l'influenza esercitata dalla nuova operazione sulla sovrabbondanza e sulla specialità di un sistema (*).

Sia $|C|$ il sistema da cui si parte, di caratteri r, n, π; e sia D una curva contenuta, come parte, in una o più (infinite) curve C. Le curve C_1 che insieme alla D costituiscono curve complete del sistema $|C|$, formano un nuovo sistema $|C_1| = |C - D|$ *residuo di* D *rispetto a* $|C|$. Si tratta appunto di paragonare il sistema $|C|$ col nuovo sistema $|C_1|$, che supporremo sia irriducibile, e di cui riguarderemo come punti-base quelli soli che cadono tra i punti-base di $|C|$; indicheremo con r_1, n_1, π_1 i caratteri di $|C_1|$. Per non esser costretti a introdurre locuzioni convenzionali, atte a togliere ogni re-

(*) Enriques, *Ricerche di geometria* ..., IV, 4.

strizione, supporremo a dirittura che la curva D sia generica entro ad un sistema lineare $|D|$, almeno ∞^1, di cui il grado e il genere indicheremo con N e Π; questi caratteri di $|D|$ vanno calcolati tenendo conto di quei soli punti-base di $D|$ che cadono tra i punti-base di $|C|$. Indichiamo finalmente con ν il numero di quelle intersezioni di una D con una C_1, che cadono fuori del gruppo-base di $|C|$. Ciò posto dalla relazione

$$|C| = |C_1 + D|,$$

deduciamo subito

$$n = n_1 + N + 2\nu,$$

$$\pi = \pi_1 + \Pi + \nu - 1.$$

Con questi caratteri possiamo calcolare le dimensioni *virtuali* di C e C_1 che sono

$$r' = p_n + n - \pi + 1,$$

$$r'_1 = p_n + n_1 - \pi_1 + 1.$$

Paragonando troviamo

$$r'_1 = r' - (N + \nu - \Pi + 1).$$

Ora si tratta di stabilire la relazione tra le dimensioni *effettive* r, r_1 di $|C$ e $|C_1|$; si tratta dunque di esaminare quante tra le curve di $|C$ contengono una D prefissa, spezzandosi in questa ed in una C_1 residua. A tal fine occupiamoci della serie che il sistema $|C|$ sega sopra la curva D. L'ordine di questa serie si valuta subito; perchè il numero delle intersezioni di una $C = C_1 + D$ con la D è la somma dei numeri delle intersezioni della D con una C_1 e con una D. Ora questi ultimi due numeri valgono per ipotesi ν e N; quindi la serie segata dal sistema $|C|$ sulla D generica è una $g^{\rho}_{\nu+N}$, di cui la dimensione ρ è ancora incognita. Quando si fosse determinato ρ, si avrebbe subito

$$r_1 = r - (\rho + 1);$$

giacchè basta imporre ad una delle ∞^r curve C le condizioni di contenere $\rho + 1$ punti di D, per ottenere che la C si spezzi nella D e in una delle ∞^{r_1} curve C_1.

Sicchè possiamo dire sin d'ora che lo staccamento della curva D dal sistema $|C|$ abbassa la dimensione *virtuale* di

$$N + \nu - \Pi + 1 \quad \text{unità,}$$

e la dimensione *effettiva* di

$$\rho + 1 \quad \text{unità.}$$

Le due diminuzioni coincidono se

$$\rho = N + \nu - \Pi$$

è la dimensione della serie $g_{\nu+N}$, segata dal sistema $|C|$ sulla curva D di genere Π; vale a dire, se *quella serie è completa e non speciale.* Se invece la serie $g_{\nu+N}$, pur rimanendo non speciale, è incompleta colla deficienza δ, allora

$$\rho = N + \nu - \Pi - \delta,$$

e l'abbassamento subìto dalla dimensione virtuale di $|C|$ supera di δ unità l'abbassamento subìto dalla dimensione effettiva.

Finalmente se la serie $g_{\nu+N}$ è speciale coll'indice ι, ed ha la deficienza $\delta \geqq 0$, si ha

$$\rho = N + \nu - \Pi - \delta + \iota,$$

e si vede che l'abbassamento subìto dalla dimensione virtuale di $|C|$ supera di $\delta - \iota$ unità l'abbassamento subìto dalla dimensione effettiva; dove però $\delta - \iota$ può esser positivo, nullo o negativo.

Per formarsi una idea più esatta di questo risultato, conviene di staccare nettamente due casi.

I. *La serie segata dal sistema $|C|$ sulla curva D sia non speciale.* Allora i sistemi $|C|$ e $|C_1| = |C - D|$ sono certo non speciali; perchè, se $|C_1|$ ad es. fosse speciale, e quindi appartenesse al sistema canonico $|K|$, il sistema $|C_1 + D| = |C|$ formerebbe parte del sistema $|K + D|$ aggiunto a $|D|$, e quindi $|C|$ segherebbe sulla curva D una serie speciale, contro la ipotesi. In conseguenza le irregolarità che $|C|$ e $|C_1|$ possono presentare, dipendono esclusivamente dalle loro sovrabbondanze s ed s_1; ed il risultato sopra ottenuto ci permette di concludere:

Le sovrabbondanze di $|C|$ e $|C_1| = |C - D|$ coincidono, se la serie non speciale segata da $|C|$ su D è completa; mentre se tale serie è incompleta colla deficienza δ, la sovrabbondanza di $|C_1|$ supera di δ unità la sovrabbondanza di $|C|$.

In particolare: « Staccando da un sistema *regolare* $|C|$ una curva D, su « cui $|C|$ seghi una serie completa non speciale, si ottiene un sistema residuo « pure *regolare.* »

II. *La serie segata dal sistema* $|C|$ *sulla curva* D *sia speciale.* In questo caso i sistemi $|C|$ e $|C_1|$ *possono* (non *debbono*) esser speciali; per metterci nelle ipotesi più generali, indichiamo con s, s_1 (>0) le sovrabbondanze, e con i, i_1 (≥ 0; $i \geq i_1$) gli indici di specialità dei due sistemi. Le irregolarità di $|C|$ e $|C_1|$ provengono dalle differenze $s - i$, $s_1 - i_1$, che vanno aggiunte alle dimensioni virtuali per ottenere le dimensioni effettive; quelle differenze noi chiameremo brevemente le *irregolarità* di $|C|$ e $|C_1|$. Dal ragionamento fatto sopra segue che

$$\text{irreg. } |C_1| = \text{irreg. } |C| + \delta - \iota,$$

dove δ e ι hanno i significati convenuti. In parole:

Da un sistema $|C|$ *si sottragga una curva* D, *su cui* $|C|$ *seghi una serie che abbia la deficienza* δ *e l'indice di specialità* ι; *mediante questa operazione l'irregolarità* $(s - i)$ *del sistema primitivo aumenta (algebricamente) di* $\delta - \iota$ *unità.*

Quest'ultimo enunciato comprende il precedente ($\iota = 0$).

40. *Corollari dei teoremi precedenti.* — I risultati ottenuti conducono a numerosi corollari; quelli che più ci interessano, si fondano sulla seguente osservazione.

Noi abbiamo già notato (n.° 18) che se $|C|$ e $|D|$ sono due sistemi lineari di curve sopra una stessa superficie, mediante i quali si formino i sistemi $|D + C|$, $|D + 2C|, \ldots$, $|D + kC| \ldots$, si può sempre determinare un numero così grande, che per i valori superiori di k il sistema $|D + kC|$ seghi una serie *completa* sulla curva generica C. Supponendo ora che $|C|$ sia almeno ∞^2, si può anche esigere che per valori abbastanza elevati di k la serie sopra nominata risulti non speciale, giacchè l'ordine della serie stessa cresce con k. Ne viene, applicando il teorema I, che:

Se $|C|$ *e* $|D|$ *sono due sistemi lineari di curve sopra una stessa superficie, dei quali il primo sia almeno* ∞^2, *il sistema* $|D + kC|$ *ha una sovrabbondanza costante, qualunque sia il numero* k *purchè superiore ad un certo limite;* e quel sistema inoltre, per quei valori di k, è non speciale.

Il teorema II ci dà il mezzo di paragonare la sovrabbondanza costante S di $|D + kC|$ alla irregolarità $s' - i'$ di $|D|$; infatti applicando k volte il teorema citato, vediamo che la differenza $(s' - i') - S$ è uguale alla somma delle differenze tra la deficienza δ e l'indice di specialità ι delle serie segate su C dai sistemi $|D + kC|$, $|D + (k-1)C|, \ldots$, $|D + C|$. In simboli, indicando con δ_h, ι_h la deficienza e l'indice di specialità della serie segata da $|D + h\, C|$ sulla curva C, abbiamo

$$S = s' - i' - \sum_{h=1} (\delta_h - \iota_h),$$

dove, come limite superiore della somma, va preso quel valore di h, a partire dal quale δ_h e ι_h si annullano.

Applicheremo l'ultimo teorema e l'ultima formola a due casi notevoli.

I. *Sia* $|D|$ *il sistema aggiunto al sistema* $|C|$; per adottare la solita scrittura, indichiamo con $|C''|$ quel sistema che sopra è designato con $|D|$. Noi vediamo allora che il sistema $|C' + k\, C|$ ha una sovrabbondanza S costante, quando k ha un valore sufficientemente elevato. Per calcolare S possiamo approfittare della formola precedente; ma ci gioverà questa volta paragonare la irregolarità S del sistema $|C' + k\, C|$ colla irregolarità $p_g - p_n - 1$ del sistema canonico $|K|$ (supposto esistente), notando che è $|C'| = |K + C|$, $|C' + C| = |K + 2\, C|, \ldots$ Diremo allora che la sovrabbondanza richiesta S è data da

$$S = (p_g - p_n - 1) - \sum_{h=0} (\delta_h - \iota_h),$$

dove la somma va estesa alle serie che i sistemi $|C'|$, $|C' + C|, \ldots$ segano su C. Ora tutte quelle serie sono non speciali, tranne la prima che ha l'indice $\iota_0 = 1$ (sicchè $\iota_1 = \iota_2 = \cdots = 0$); e la somma delle deficienze delle serie stesse vale (n.° 17)

$$\sum_{h=0} \delta_h = p_g - p_n.$$

Sostituendo troviamo $S = 0$. Si ha così l'importante risultato:

Se $|C|$ *è un sistema lineare qualsiasi, e* $|C'|$ *ne è il sistema aggiunto, il sistema* $|C' + k\, C|$ *è regolare, purchè il numero* k *superi un certo limite.*

Converrebbe veramente esaminare con attenzione le ipotesi fatte per giungere a questo risultato; ma ci riserviamo di ritornare sull'argomento al n.° 41.

II. *Facciamo ora la ipotesi che* D *coincida con* $|C|$. Allora possiamo dire che il sistema $|k\, C|$, per valori abbastanza alti di k, ha una sovrabbondanza S costante, che è legata alla irregolarità $s - i$ di $|C|$ dalla relazione

$$S = s - i - \sum_{h=1} (\delta_h - \iota_h),$$

dove δ_h e ι_h indicano la deficienza e l'indice di specialità della serie segata da $|(h+1)C|$ sulla curva C generica. Introducendo, per simmetria, anche la deficienza δ_0 e l'indice ι_0 della serie segata da $|C|$ su C, *serie caratteristica* g_n^{r-1} *di* $|C|$, e notando che si ha (per definizione)

$$\iota_0 = \pi - n + r + \delta_0 - 1 = p_n + s - i + \delta_0,$$

e quindi

$$\delta_0 - \iota_0 = -p_n - (s - i),$$

possiamo scrivere la sovrabbondanza S di $|kC|$ sotto la forma

$$S = -p_n - \sum_{h=0} (\delta_h - \iota_h),$$

da cui

$$\sum_{h=0} (\iota_h - \delta_h) = S + p_n.$$

Se si considerano le serie segate sulla curva generica di un sistema $|C|$ (*almeno* ∞^2) *dai sistemi* $|C|$, $|2C|$, $|3C|, \ldots$, *e per ciascuna serie si forma la differenza tra l'indice di specialità e la deficienza*, *la somma di tutte queste differenze uguaglia il genere numerico della superficie aumentato della sovrabbondanza costante* $S \geq 0$ *che possiede il sistema* $|kC|$, *quando* k *è abbastanza elevato.*

Vedremo poi (n.° 43) in quale caso sia $S = 0$.

41. *Sulla regolarità del sistema* $|C' + kC|$. — Noi abbiamo visto poco fa che il sistema $|C' + kC|$, formato mediante un sistema $|C|$ irriducibile, almeno ∞^2, e mediante il suo aggiunto $|C'|$, è regolare quando k è sufficientemente elevato. Però la dimostrazione sopra esposta non è esente da obbiezioni, e fa nascere il desiderio di calcolare direttamente i caratteri del sistema $|C' + kC|$, in funzione dei caratteri di $|C|$ e di $|C'|$, per verificare poi se in fatto la dimensione virtuale del sistema $|C' + kC|$ risulta uguale alla dimensione effettiva. Ma una difficoltà si presenta fin dal principio, giacchè si può sospettare che il sistema $|C' + kC|$ possa talvolta esser *riducibile*. Ne viene che per dimostrare la regolarità del sistema $|C' + kC|$ bisogna:

1) o dimostrare che il sistema $|C' + kC|$ è *irriducibile*, in corrispondenza a valori abbastanza elevati di k;

2) o estendere ai sistemi riducibili il concetto di *regolarità* introdotto pei sistemi irriducibili.

Quanto alla via indicata con 1), va notato che le ricerche fatte sinora sull'argomento, sebbene lascino prevedere in tutti i casi la irriducibilità del sistema $|C' + k\,C|$, non esauriscono la questione; e trattandosi di ricerche minuziose, non è il caso di esporre qui il risultato incompleto a cui sinora si è arrivati.

Quanto alla via indicata con 2), diremo che essa non presenta nessuna difficoltà, ma non val forse la pena di introdurre le convenzioni che essa esige, nel dubbio che possano essere inutili, almeno nel caso nostro.

In seguito a queste considerazioni, noi ci limitiamo a dimostrare due proposizioni, che bastano al nostro scopo.

I. *Se $|C|$ è un sistema lineare di curve, irriducibile, almeno ∞^2, privo di curve fondamentali proprie, e $|C'|$ ne è il sistema aggiunto, il sistema $|C' + k\,C|$ è irriducibile, e non possiede punti fissi comuni a tutte le sue curve fuori dei punti-base di $|C|$, quando il numero k è sufficientemente elevato.*

II. *Nelle ipotesi ora fatte il sistema $|C' + k\,C|$ è regolare.*

I. Per dimostrare la prima parte osserviamo che, detto π il genere ed n il grado del sistema $|C|$, la ipòtesi che il sistema $\infty^r\,|C|$ sia privo di curve fondamentali proprie, si traduce nella condizione che entro a $|C|$ non si trovino sistemi ∞^{r-1} di genere inferiore a π. Ne viene che, quando si sarà ottenuto un valore di k così elevato, che il sistema $|C' + k\,C|$ seghi sulla curva C generica una serie completa $g_{2\pi-2+kn}^{\pi-2+kn}$ (n.° 18), si potrà affermare che una serie dello stesso ordine e della stessa dimensione vien segata dal sistema $|C' + k\,C|$ anche sulla curva generica di *ogni* sistema ∞^{r-1} contenuto in $|C|$. D'altra parte la serie in questione $g_{2\pi-2+kn}^{\pi-2+kn}$ non possiede punti fissi, che siano comuni a tutti i suoi gruppi. Segue che non vi può esser un punto comune a tutte le curve di $|C' + k\,C|$, fuori dei punti-base di $|C|$; giacchè se quel punto esistesse, le ∞^{r-1} curve C passanti per esso (semplici o spezzate) conterrebbero una serie del tipo nominato, dotata di un punto fisso. E con ciò risulta pure che le curve di $|C' + k\,C|$ non possono avere una parte fissa in comune. E nemmeno può accadere che la curva generica di $|C' + k\,C|$ si spezzi in più curve variabili di un fascio, giacchè entro a quel sistema si trovano curve delle quali una componente irriducibile è la C, che varia in un sistema almeno ∞^2. Con ciò la proposizione I è completamente dimostrata.

II. Passiamo ora al teorema II. Ci conviene ricordare che $|C' + k\,C|$ è il sistema aggiunto a $|(k+1)\,C|$. Se per brevità di scrittura indichiamo l'ultimo sistema con $|D|$, designeremo il primo con $|D'|$; si tratta allora di dimostrare che $|D'|$ è regolare, in corrispondenza a valori abbastanza elevati di k. Supponiamo perciò di aver scelto k così grande che

1) il sistema $|D|$ non abbia punti-base semplici (basta che sia $k \geqq 1$);

2) il sistema $|D'|$ sia irriducibile, e non abbia punti fissi comuni alle sue curve, fuori dei punti-base di $|D|$ (o, ciò che fa lo stesso, di $|C|$); $|D'|$ possegga inoltre il sistema aggiunto $|D''|$;

3) il sistema $|D'|$ seghi sulla curva generica D di $|D|$ una serie avente la deficienza $p_g - p_n$; anche quest'ultima condizione può sempre venir soddisfatta (*).

Ciò posto, indichiamo con π_0 il genere di $|D|$, e con n', π', r' il grado, il genere, e la dimensione effettiva del sistema aggiunto $|D'|$. La dimensione r' può valutarsi subito, notando che $|D'|$ sega per ipotesi sulla curva D di genere π_0 una serie $g_{2\pi_0-2}^{\pi_0-1-(p_g-p_n)}$, e che il sistema $|D'-D|$, coincidendo (a parte curve fisse) col sistema canonico, ha la dimensione $p_g - 1$. Sicchè

$$r' = \pi_0 - 1 - (p_g - p_n) + p_g,$$

ossia

$$r' = \pi_0 - 1 + p_n.$$

Rimane da calcolare il grado n' del sistema $|D'|$. A tal fine conviene introdurre il sistema ausiliario $|D + D'|$, e formarne il sistema aggiunto. Nelle ipotesi fatte, questo sistema aggiunto si può costruire in due modi, fondandosi sulla proprietà fondamentale dell'aggiunzione, n.° 15; ed è rappresentato da ciascuno dei due sistemi

$$|2D'| = |D + D''|.$$

Cerchiamo ora il numero dei punti in cui una curva generica dell'ultimo sistema sega una curva D', fuori dei punti-base di $|D|$. Questo numero è espresso, facendo uso di notazioni già adoperate, dai due membri dell'uguaglianza

$$2D' \cdot D' = (D + D'') \cdot D';$$

ora notando che

$$D' \cdot D' = n', \qquad D \cdot D' = 2\pi_0 - 2, \qquad D' \cdot D'' = 2\pi' - 2,$$

si ha

$$2n' = 2\pi_0 + 2\pi' - 4,$$

e finalmente

$$n' = \pi_0 + \pi' - 2,$$

(*) ENRIQUES, *Introduzione...*, n.° 40; cfr. pure la Monografia *Sur quelques récents résultats...*, n.° 27.

la quale ci dà il grado di $|D'|$. Ora coi caratteri di $|D'|$ che conosciamo, siamo in grado di verificare se $|D'|$ sia regolare. Si ha infatti

$$r' - n' + \pi' - 1 = (\pi_0 - 1 + p_n) - (\pi_0 + \pi' - 2) + \pi' - 2 = p_n;$$

e tanto basta, trattandosi di un sistema non speciale, per concludere che $|D'|$ è *regolare*, come si era affermato.

Osservazioni. — Sul lemma I noterò, che esso può anche enunciarsi sotto forma proiettiva, assumendo una superficie dello spazio ordinario o di un iperspazio, le cui sezioni iperpiane formino il sistema $|C|$, od un multiplo di esso. Siccome $|C|$ (insieme ai suoi multipli) è privo di curve fondamentali proprie, così la superficie in questione sarà priva di punti multipli isolati. Diremo dunque: « Sopra una superficie priva di punti multipli isolati, il sistema aggiunto al sistema delle sezioni iperpiane, o ad un multiplo abbastanza elevato di questo, è irriducibile e privo di punti-base; quindi le curve generiche del detto sistema aggiunto sono prive di punti multipli. »

Sul teorema II va notato, che nella dimostrazione non si tien conto veramente del fatto che $|C|$ sia privo di curve fondamentali proprie, ma solo delle due conseguenze che abbiamo dedotto da quel fatto, e che si riducono alla irriducibilità di $|C' + k C|$, e alla mancanza di punti fissi comuni alle curve di questo sistema, fuori dei punti-base di $|C|$. L'ultima condizione non è nemmeno necessaria, purchè i caratteri n' e π' del sistema $|C' + k C|$ siano calcolati rispetto ai punti-base di questo sistema, che cadono tra i punti-base di $|C|$. Con ciò arriviamo al seguente teorema, più generale del II.

Se $|C|$ è un sistema irriducibile almeno ∞^2, ed è pure irriducibile il sistema $|C' + k C|$, quest'ultimo sistema, per k sufficientemente elevato, è regolare, quando si riferisca al gruppo di punti che è base per $|C|$.

42. *Considerazioni sul teorema del paragrafo precedente.* — Il teorema che ci afferma esser regolare il sistema aggiunto ad un multiplo abbastanza elevato di un sistema $|C|$, privo di curve fondamentali proprie, ci dà il mezzo di procurarci sistemi regolari di dimensione alta quanto si vuole. E siccome sappiamo già (n.° 35) che in un sistema regolare completo la serie caratteristica ha la deficienza massima $p_g - p_n$, siamo ora in grado di dare il compimento desiderato al teorema che assegnava quel massimo:

Sopra una superficie di generi p_g, p_n, esistono infiniti sistemi di curve completi, le cui serie caratteristiche hanno la deficienza massima $p_g - p_n$.

Di qua si può trarre una definizione dell'invariante $p_g - p_n$; $p_g - p_n$ *è il valore massimo raggiunto dalla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare appartenente alla superficie* (*).

Inoltre l'esistenza di sistemi regolari, tali che tra i loro caratteri passa la relazione (n.° 36)

$$r - n + \pi - 1 = p_n,$$

mentre per ogni altro sistema non speciale, il primo membro supera il secondo, ci permette pure di stabilire la seguente proprietà del genere numerico p_n, proprietà che potrebbe anche servire di definizione:

Colla dimensione effettiva r, *col grado* n *e col genere* π *di un sistema lineare completo non speciale appartenente ad una superficie, si formi la espressione*

$$r - n + \pi - 1;$$

questa potrà mutar valore al mutare del sistema, ma tra tutti i valori che essa può assumere, ve n'è uno minimo, che gode naturalmente proprietà invariantiva rispetto alle trasformazioni birazionali, ed è il genere numerico della superficie.

Si confronti questa definizione con quella che si può dare del genere di una curva « valore massimo della differenza $n - r$ tra l'ordine e la dimen- « sione di una serie completa esistente sulla curva ». E si avrà una via per introdurre un carattere analogo anche sulle varietà algebriche di dimensione superiore a 2.

43. *Un teorema sui multipli di un sistema privo di curve fondamentali.* — Per mostrare una applicazione del teorema II del § 41, vogliamo infine esporre una proprietà del sistema $|kC|$ multiplo di un sistema $|C|$. Noi sappiamo già che quel sistema è non speciale, ed ha una sovrabbondanza costante, quando il numero k supera un certo limite (n.° 40, II). Si può chiedere adesso in qual caso quella sovrabbondanza sia nulla, ed il sistema $|kC|$ risulti in conseguenza regolare. Un esame un po' attento lascia vedere che il valore della sovrabbondanza costante di $|kC|$ dipende dalle curve fondamentali, che il sistema $|C|$ (e quindi il sistema $|kC|$) possiede. Senza entrare nei particolari della questione, ci limiteremo a dimostrare il teorema seguente (**):

(*) Cfr. la Monografia citata *Sur quelques récents résultats* ..., n.° 27.

(**) Cfr. Enriques, *Ricerche di geometria* ..., V, 4.

Se un sistema lineare, irriducibile, $|C|$ almeno ∞^2, è privo di curve fondamentali proprie, ogni multiplo $|kC|$ di esso è regolare, quando k supera un certo limite.

Si consideri infatti (ragionando in linguaggio proiettivo) la superficie F di S_r, le cui sezioni iperpiane formano il sistema $|C|$, o, ciò che per noi fa lo stesso, un multiplo di $|C|$. Questa superficie è priva di punti multipli isolati, giacchè il sistema $|C|$ (insieme ai suoi multipli) è privo di curve fondamentali proprie. Ne viene (n.° 41, Oss.) che le curve C', d'ordine $2\pi-2$, aggiunte a $|C|$, sono prive di punti multipli. Ma allora le varietà a $r-1$ dimensioni di S_r segano sopra ciascuna C' (di genere π') una serie non speciale e completa $g_{k(2\pi-2)}^{k(2\pi-2)-\pi'}$, purchè l'ordine k di quelle varietà superi un certo limite. E poichè questa serie è segata su C' dalle curve di $|kC|$, diremo intanto che scegliendo k abbastanza elevato si può ottenere che la serie $g_{k(2\pi-2)}$, segata da $|kC|$ sopra una C', sia completa e non speciale. Prendendo poi k abbastanza elevato, si può esigere inoltre che la detta serie $g_{k(2\pi-2)}$ di C' contenga la serie caratteristica $g_{n'}$ di $|C'|$, e lasci per residuo una serie non speciale. Ora dalle ipotesi fatte, appoggiandosi ad un lemma relativo alle addizioni di serie situate sopra una stessa curva (*), segue che è pur completa su C' la serie contenente ogni gruppo formato da un gruppo della $g_{k(2\pi-2)}$ e da un gruppo della serie caratteristica $g_{n'}$; è dunque completa la serie che il sistema $|C'+kC|$ sega su C'. D'altra parte (n.° 41) il sistema $|C'+kC|$ è regolare, quando k è abbastanza elevato; dunque (n.° 40) è regolare anche il sistema $|kC|$, che si ottiene dal precedente staccando la curva C'. E ciò appunto si voleva dimostrare.

Corollario. — La formola del n.° 40, II, che dà la sovrabbondanza costante S del sistema $|kC|$, diviene nella ipotesi dell'ultimo teorema

$$p_n = \sum_{h=0} (\iota_h - \delta_h),$$

e dà luogo alla seguente proposizione:

(*) Il lemma si enuncia così: *Sopra una curva di genere π si abbiano due serie, di cui la prima completa non speciale $g_n^{n-\pi}$ contenga la seconda g_m, e la differenza g_{n-m} sia ancora una serie non speciale; allora la serie g_{n+m}, di dimensione minima, contenente ogni gruppo formato da un gruppo della prima e da un gruppo della seconda serie, è ancora completa (non speciale).* Se infatti g_{n+m} non fosse completa, essa avrebbe una dimensione $n+m-\pi-\delta$ con $\delta>0$, e quindi un gruppo di g_m presenterebbe ad essa $m-\delta$ condizioni; ma allora lo stesso gruppo presenterebbe al più $m-\delta$ condizioni ad ogni gruppo della $g_n^{n-\pi}$ costretto a contenerlo, e la serie residua g_{n-m} avrebbe la dimensione $\geqq n-m-\pi+\delta$, e sarebbe speciale, contro la ipotesi.

Se $|C|$ *è un sistema di curve, almeno* ∞^2, *privo di curve fondamentali proprie, e si considerano le serie che il sistema* $|C|$ *ed i suoi multipli* $|2C|$, $|3C|\ldots$, *segano sulla curva* C *generica, formando per ogni serie la differenza tra l'indice di specialità e la deficienza, la somma di tutte queste differenze non dipende dal sistema* $|C|$ *da cui si parte, ed è uguale al genere numerico della superficie.*

Roma, febbraio 1897.