Tome I, volume 3. **Fascicule 4.**

ENCYCLOPÉDIE

DES

IENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIEE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME I (TROISIÈME VOLUME),

THÉORIE DES NOMBRES.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER

1910
(30 OCTOBRE)

Tome I; troisième volume; quatrième fascicule.

Sommaire.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus,** fin (H. Burkhardt — H. Vogt). — **Additions et modifications.** — **Renseignements bibliographiques.** — **Index.**

Tome I, vol. 2: **Formes algébriques,** fin (G. Landsberg — J. Hadamard — J. Kürschák). **Invariants** (F. W. Meyer — J. Drach).

Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres,** fin (P. Bachmann — J. Hadamard — E. Maillet).

Tome I, vol. 4: **Statistique,** fin (L. von Bortkiewicz — F. Oltramare). — **Assurances** (G. Bohlmann — Poterin du Motel). — **Économie politique** (V. Pareto).

Tome II, vol. 1: **Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles** (E. Borel — L. Zoretti — P. Montel — M. Fréchet). — **Calcul différentiel** (A. Voss — J. Molk).

Tome II, vol. 2: **Analyse algébrique** (A. Pringsheim — G. Faber — J. Molk). — **Fonctions d'une variable complexe** (W. Osgood — J. Chazy).

Tome II, vol. 4: **Équations aux dérivées partielles** (E. von Weber — G. Floquet — E. Goursat).

Tome II, vol. 5: **Équations fonctionnelles** (S. Pincherle). — **Interpolation trigonométrique** (H. Burkhardt — E. Esclangon).

Tome III, vol. 1: **Principes de la Géométrie** (F. Enriques). — **Notions de courbe et surface** (H. von Mangoldt — L. Zoretti).

Tome III, vol. 2: **Géométrie projective** (A. Schoenflies — A. Tresse).

Tome III, vol. 3: **Coniques** (F. Dingeldey — E. Fabry).

Tome III, vol. 4: **Quadriques** (O. von Staude — A. Grévy).

Tome IV, vol. 2: **Fondements géométriques de la mécanique** (H. Timerding — L. Lévy).

Tome IV, vol. 4: **Analyse vectorielle** (M. Abraham — P. Langevin). — **Principes physiques de l'hydrodynamique** (A. E. H. Love — P. Appell — H. Beghin).

Tome IV, vol. 5: **Balistique extérieure** (C. Cranz — E. Vallier).

Tome V, vol. 2: **Atomistique** (F. W. Hinrichsen — E. Study — M. Joly — J. Roux).

Tome V, vol. 3: **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé).

Tome V, vol. 4: **Principes physiques de l'optique; anciennes théories** (A. Wangerin — C. Raveau.)

Tome VI, vol. 1: **Géodésie** (P. Pizzetti — L. Noirel).

Tome VII, vol. 1: **Coordonnées absolues et relatives** (E. Anding — H. Bourget). — **Réfraction** (A. Bemporad — P. Puiseux).

Tribune publique. 13.

247. [I_1 p. 92 ligne 12] (I 2, 17) ajouter: *N. Traverso* [Giorn. mat. 39 (1901), p. 225/39, 308/23] a généralisé la notion de déterminant [Voir aussi Periodico mat. (2) 5 (1902/3), p. 152/84]. **M. Lecat.**

248. [I_1 p. 97 ligne 35] (I 2, 21 note 155) après p. 157 ajouter: Cette règle a été généralisée pour les déterminants à plusieurs dimensions. Il en existe une autre (le produit de deux déterminants peut être mis sous forme d'un déterminant cubique) qui, elle aussi, a reçu une généralisation. Enfin le produit d'un nombre pair n de déterminants d'ordre n peut être mis sous forme d'un déterminant à n dimensions et de même ordre, dont les éléments sont des déterminants d'ordre n. Cf. n° 35. **M. Lecat.**

249. [I_1 p. 97 dernière ligne] (I 2, 21 note 156) ajouter: *L. Gegenbauer* [Sitzgsb. Akad. Wien 101 II^a (1892), p. 427] a généralisé pour les déterminants à plusieurs dimensions. **M. Lecat.**

250. [I_1 p. 112 dernière ligne] (I 2, 28) ajouter: Voir aussi *L. Saalschütz,* J. reine angew. Math. 134 (1908), p. 191. **M. Lecat.**

251. [I_1 p. 113 dernière ligne] (I 2, 28) ajouter: *L. Gegenbauer* [Denkschr. Akad. Wien math. I 50 (1885), p. 145/50] a généralisé ces résultats. **M. Lecat.**

252. [I_1 p. 116 ligne 18] (I 2, 29) ajouter: *L. E. Dickson* [The Amer. math. Monthly 10 (1903), p. 253/6] a généralisé la notion de déterminant symétrique gauche. *L. Gegenbauer* [Denkschr. Akad. Wien math. I 55 (1889), p. 39] a donné une autre généralisation en considérant des déterminants à n dimensions. **M. Lecat.**

253. [I_1 p. 131 ligne 37] (I 2, 35) (note 294 ligne 5 de cette note) ajouter *G. Garbieri,* Atti R. Ist. Veneto (5) 4 (1877), p. 37/59. **M. Lecat.**

254. [I_1 p. 412 ligne 26] (I 5, 25) ajouter: *L. Gegenbauer,* Denkschr. Akad. Wien (1885), p. 150/2. **M. Lecat.**

255. [I_1 p. 489 ligne 32] (I 7, 1 note 2). Le mot *ensemble* est synonyme du mot *classe* (extension d'un concept). C'est l'équivalent du mot ὅρος dont s'est servi *Aristote* et des mots Begriff, Menge, class-term, terminus, conceptus. Voir *G. Peano,* Formulaire de math. 2, § 1, Turin 1897, p. 19/20.

Il se trouve défini dans *G. Frege,* Grundgesetze der Arithmetik 1, Iéna 1893, p. 14/5 [voir aussi Function und Begriff, Iéna 1891, p. 16] et dans *B. A. W. Russell* [The principles of mathematics 1, Cambridge 1903, p. 20] comme représentant „toutes les valeurs de x *telles* qu'une certaine fonction proposée $\varphi(x)$ de x vérifie des conditions données". **Ph. E. B. Jourdain.**

256. [I_1 p. 491 ligne 36] (I 7, 3 note 5) au lieu de „Mannigfaltigkeit" lire „Mannigfaltigkeitslehre".

257. [I_1 p. 491 ligne 39] (I 7, 3 note 6) ajouter: Sur cette façon de conclure qui, d'après *G. Cantor* [Math. Ann. 23 (1884), p. 455], est au fond très ancienne et a été employée par *J. L. Lagrange, A. M. Legendre, B. Bolzano, A. L. Cauchy, G. Lejeune Dirichlet* et *K. Weierstrass,* voir *B. Bolzano,* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, publ. par *Ph. E. B. Jourdain*, dans *Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften nº 153, Leipzig 1906, p. 25, 43.

Il convient d'observer que la méthode de *Bolzano-Weierstrass* ne détermine, en général, un point limite que si l'ensemble envisagé est *fermé* [cf. nº **13**]. **Ph. E. B. Jourdain.**

258. [I_1 p. 492 ligne 26] (I 7, 3). Un *nombre* n'est un *signe* que pour ceux qui adoptent les théories formalistes de l'arithmétique. Ces théories ont été combattues en particulier par *G. Frege* [Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, p. 107/8; Sitzgsb. der Jenaischen Ges. für Medizin und Naturw. 1885; Revue de métaphysique et de morale 1895, p. 73/8; Über die Zahlen des Herrn *H. Schubert*, Iéna 1899; Grundgesetze der Arithmetik 1, Iéna 1893, p. XIII; id. 2, Iéna 1903, p. 72/4, 80/139; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 15 (1906), p. 586/90; 17 (1908), p. 52 5]. **Ph. E. B. Jourdain.**

259. [I_1 p. 493 ligne 19] (I 7, 4) ajouter: Au lieu de définir ainsi, avec *G. Cantor*, le nombre cardinal, on peut aussi définir le nombre cardinal d'un ensemble *M* comme *l'ensemble des ensembles qui sont équivalents* à *M* ou comme *une classe de classes similaires* [cf. I_1 p. 8 lignes 12/3; I 1, 7]. Cette définition donnée par *G. Frege* [Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, p. 79; Grundgesetze der Arithmetik 1, Iéna 1893, p. 57] et *B. A. W. Russell* [The principles of mathematics 1, Cambridge 1903, p. 115, 305] semble préférable à celle de *G. Cantor*; elle permet, en effet, de déduire logiquement l'une de l'autre certaines propositions arithmétiques. En l'adoptant on peut, par exemple, *démontrer* que tout ensemble *M* a un nombre cardinal, tandis qu'en adoptant la définition de *G. Cantor* cette proposition doit être envisagée comme un *postulat*.

Pour la définition du type d'ordre [cf. nº 8] envisagé comme un *ensemble*, voir *B. A. W. Russell*, The principles of mathematics 1, Cambridge 1903, p. 312, 321. Cette définition permet de *demontrer* que tout ensemble ordonné a un type d'ordre. **Ph. E. B. Jourdain.**

260. [I_1 p. 494 ligne 37] (I 7, 4 note 11) ajouter: *E. Zermelo*, Nachr. Ges. Gött. 1901, p. 34/8; Math. Ann. 65 (1908), p. 272/3; *H. Poincaré*, Revue de métaphysique et de morale 14 (1906), p. 314 5.

La question de la comparabilité des puissances est discutée avec soin par *Ph. E. B. Jourdain* [Quart. J. pure appl. math. 38 (1907), p. 352/67] qui insiste sur la nécessité d'admettre l'axiome de *E. Zermelo* [Math. Ann. 59 (1904), p. 514/6] ou „principe de la sélection", pour élucider complètement cette question. Au contraire, le théorème de *Schröder-Bernstein* n'a aucun besoin de cet axiome [*F. Bernstein*, Nachr. Ges. Gött. 1904, p. 557/60; *A. E. Harward*, London Edinb. Dublin philos. mag. (6) 10 (1905), p. 455/7]. **Ph. E. B. Jourdain.**

261. [I_1 p. 576 dernière ligne] (I 8, **13** note 223). Parmi les auteurs qui se sont occupés de la définition d'un groupe à l'aide de postulats indépendants les uns des autres, on peut citer tout particulièrement:

E. V. Huntington [220]), Trans. Amer. math. Soc. 6 (1905), p. 181 [dans ce mémoire on trouve aussi de nombreux renseignements bibliographiques]; *E. H. Moore* [220]), Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 549; 6 (1905), p. 179;

L. E. Dickson, Trans. Amer. math. Soc. 6 (1905), p. 198. Dans le cas où le nombre d'éléments est infini, *L. E. Dickson* (id. p. 205) appelle *semi-groupes* les groupes définis dans le texte de l'édition française de l'Encyclopédie. **A. Loewy.**

262. [I_1 p. 583 ligne 7] (I 8, **14**). Ce n'est une représentation de G ou G' que quand G_1 n'est ni invariant ni contenu dans un sous-groupe invariant de G.
G. A. Miller.

263. [I_1 p. 584 ligne 11] (I 8, **15**). *G. Frobenius* [Sitzgsb. Akad. Berlin 1900, p. 1324] a appelé *isomorphisme intérieur* l'isomorphisme cogrédient et *isomorphisme extérieur* l'isomorphisme contragrédient. **G. A. Miller.**

264. [I_1 p. 585 ligne 10] (I 8, **15**) lire: „des substitutions de $n-1$ de ces lettres".
G. A. Miller.

265. [I_1 p. 585 ligne 22] (I 8, **15**) lire „automorphismes cogrédients de G_1 et G_2 [257])." **G. A. Miller.**

266. [I_1 p. 587 ligne 19] (I 8, **16**) au lieu de „d'ordre p^{α}" lire „d'ordre $p^{\varkappa}$".
G. A. Miller.

267. [I_1 p. 596 ligne 36] (I 8, **18** note 338) lire *W. A. Manning*. **G. A. Miller.**

268. [I_1 p. 602 ligne 28] (I 8, **19**) au lieu de „tous les diviseurs" lire „tous les diviseurs premiers". **G. A. Miller.**

269. [I_3 p. 4 ligne 8] (I 15, **2**) après *P. Mansion* [17]) ajouter: *E. C. Catalan* [Nouv Corresp. math. 4 (1878), p. 103/11], *C. Le Paige* [id. p. 176], *L. Gegenbauer* [Sitzgsb. Akad. Wien 91 (1882), p. 333/43; 92 (1883), p. 1290/306] et *L. Kronecker* [Vorles. über Zahlenth. publ. par *K. Hensel* 1, Leipzig 1901, p. 242
M. Lecat.

270. [I_3 p. 4 ligne 9] (I 15, **2**) ajouter: *J. Hadamard* [cf. *E. Lucas* [13]), p. 403, auquel ces relations furent communiquées par *J. J. Sylvester*] a donné les relations

$$\varphi(n) = |a_{i,j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\varphi(n) = \ b_{i,j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

où, dans la première, a_{ij} est, pour $j < n$, égal à 0 ou à 1 suivant que i est divisible ou non par j, tandis que $a_{in} = i$; et où, dans la seconde,

$$b_{ij} = \left[\frac{i}{j}\right] \text{ pour } j \leqq n-1, \text{ tandis que } b_{in} = \frac{i(i+1)}{2}.$$

Ces théorèmes de *H. J. S. Smith, P. Mansion, E. Cesàro, L. Gegenbauer, J. Hadamard* ont encore été généralisés par *L. Gegenbauer* [Sitzgsb. Akad. Wien 101 II^a (1892), p. 425] au moyen de déterminants à n dimensions.
M. Lecat.

271. [I_3 p. 21 ligne 31] (I 15, **15** note 90) ajouter: *L. Gegenbauer,* Sitzgsb. Akad. Wien 97 II^a (1888), p. 427/31. **M. Lecat.**

272. [I_3 p. 23 ligne 31] (I 15, **16** note 104) ajouter: *L. Gegenbauer,* Sitzgsb. Akad. Wien 103 II^a (1894), p. 285/94. **M. Lecat.**

273. [I_3 p. 38 ligne 6] (I 15, **21**). Au sujet de la solution complète en nombres entiers des équations indéterminées

$$1 + x^2 = y^n$$

et

$$1 + x^2 = 2y^n$$

où n est un nombre naturel quelconque donné, voir *V. A. Lebesgue,* Nouv. Ann. math. (1) 9 (1850), p. 178; *C. Störmer,* Skrifter Videnskabsselskabet Christiania math. nat. 1897, mém. n° 2; Bull. Soc. math. France 27 (1899), p. 165. **C. Störmer.**

274. [I_3 p. 38 ligne 20] (I 15, **21**) ajouter: Envisageons l'équation indéterminée

$$x^n + y^n = z^n,$$

où n est supposé *impair*. Si les nombres x, y, z sont premiers entre eux deux à deux, l'un des nombres $x - y$ ou z est *forcément* multiple de $2n + 1$ et, en outre, de n si $2n + 1$ est un nombre premier. **Louvel.**

275. [I_4 p. 411 ligne 36] (I 23, 57 note 691). Le livre, ou plutôt l'opuscule de *E. Wingate* [Construction and use of the line of proportion, Londres 1628], *ne donne pas* la description du „slide rule". L'article de *F. Cajori* [Amer math. monthly 15 (1908), p. 1/5] contient à cet égard une affirmation erronée. En réalité l'opuscule cité de *E. Wingate* ne contient qu'une simple table de logarithmes et d'antilogarithmes, sans aucune partie mobile.

Le renseignement donné par *A. Favaro* [Atti Ist. Veneto (5) 5 (1878/9), p. 500] qui dit que le „slide rule" est contenu dans *E. Wingate* [Naturall and artificiall Arithmetique, Londres 1630] est, lui aussi, erronné. Voir à ce sujet, *F. Cajori,* History of the logarithmic slide rule, New York 1909, p. 10 et p. I, II des Notes additionnelles.

On doit donc considérer *W. (G.) Oughtred* comme l'inventeur non seulement de la règle à calcul „slide rule" du type circulaire mais aussi comme l'inventeur de la règle à calcul „slide rule" du type rectiligne. Le description du type circulaire et celle du type rectiligne ont *été données par W. (G.) Oughtred* dans un ouvrage écrit en latin qui a été traduit en anglais par un de ses élèves *W. Forster* et publié, pour ce qui concerne le type circulaire, à Londres en 1632 et, pour ce qui concerne le type rectiligne, à Londres en 1633.

Voir *F. Cajori,* Report Brit. Assoc. 79, Winnipeg 1909, éd. Londres 1910. Un extrait a été publié dans: Nature (Londres) 82 (1910), p. 267 col. 2 et p. 268 col. 1 [1909]. Voir aussi Colorado college publication, general series n° 47, Enginsering series 1 (1910), p. 125 85 (mém. n° 10). **F. Cajori.**

276. [II_1 p. 57 ligne 14] (II 1, 13 note 166). A propos de l'expression 0^0, il convient de faire observer que *G. W. Leibniz* s'en est occupé dans une lettre à *J. Hermann* datée de 1709 [Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 4, Halle 1859, p. 355]. D'après *G. W. Leibniz,* l'expression x^0 est toujours égale à 1, sauf dans le cas $x = 0$ et alors sa valeur est égale à zéro.

G. Eneström.

277. [II_8 p. 12 dernière ligne] (II 15, 8 note 35) au lieu du mémoire cité, lire: *A. Rosenblatt,* Arkiv för matematik, astronomi och fysik (Stockholm) 5 (1909), mém. n° 2, p. 1/4 [1908]. **A. Rosenblatt.**

☞ **Toute rectification ou addition, se rapportant à l'édition française, adressée à J. Molk, 8 rue d'Alliance, Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom de son auteur, dans la Tribune publique.**

Nancy, le 28 octobre 1910. **J. Molk.**

relation de la forme[307])

(1) $$\sum_{(m)} \mathrm{N}(m)\Psi(m) = \sum \Psi(\Phi_i),$$

où, dans le premier membre, la somme est étendue à tous les nombres naturels m. Dans le second membre la somme est étendue: quand $\Delta < 0$, à toutes les valeurs entières de x et de y; quand $\Delta > 0$, à toutes les valeurs entières de x et de y telles que l'on ait

(2) $$0 \leq y \leq \frac{a_i \mathrm{U} x}{\mathrm{T} - b_i \mathrm{U}},$$

(T, U) désignant la *solution fondamentale* [I 16, **16**] de l'*équation de Fermat* [I 15, **18**]

$$\mathrm{T}^2 - \Delta \mathrm{U}^2 = 1.$$

La relation identique (1) a lieu quelle que soit la fonction Ψ pourvu que les deux membres soient des séries convergentes.

On convient, en général, de se borner dans le premier membre aux valeurs de m premières à 2Δ et, par conséquent, dans le second membre, aux valeurs de x, y telles que Φ_i soit premier à 2Δ. L'identité subsiste évidemment dans ces conditions qui reviennent à faire $\Psi(m) = 0$ pour m non premier à 2Δ.

Pour m premier à 2Δ, prenons[308])

$$\Psi(m) = \frac{1}{m^s}.$$

La série obtenue

(1′) $$Q(s) = \sum_{(m)} \frac{N(m)}{m^s} = \sum_{(x,\,y)} \frac{1}{(a_i x^2 + 2 b_i x y + c_i y^2)^s},$$

qui est convergente pour $R(s) > 1$, peut être écrite en remplaçant Φ_i successivement par chacune des formes proprement primitives non équivalentes entre elles

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= a_1 x^2 + 2 b_1 x y + c_1 y^2,\\ \Phi_2 &= a_2 x^2 + 2 b_2 x y + c_2 y^2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi_h &= a_h x^2 + 2 b_h x y + c_h y^2,\end{aligned}$$

de même déterminant

$$\Delta = b_1{}^2 - a_1 c_1 = b_2{}^2 - a_2 c_2 = \cdots = b_h{}^2 - a_h c_h,$$

où h est le nombre de classes des formes $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_h$ non équi-

307) *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 230. Voir aussi *H. Poincaré*, J. reine angew. Math. 129 (1905), p. 89.

308) *H. Poincaré* [J. reine angew. Math. 129 (1905), p. 120 et suiv.; voir déjà *G. Lejeune Dirichlet*, J. reine angew. Math. 21 (1840), p. 7/9; Werke 1, Berlin 1889, p. 467/9] montre comment on peut aussi se servir de la série obtenue en faisant [cf. n° **33**] $\psi(m) = e^{mt}$.

valentes de déterminant Δ, de sorte que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_h$ forment un système de *représentants* de toutes les classes en question [I 16, 23].

Or si pour $\Delta < 0$, on se borne aux classes *positives* ou si, pour $\Delta > 0$, on prend le représentant de chaque classe de manière que le coefficient a_h correspondant soit positif [d'où résulte en vertu de l'inégalité (2) qu'il en est de même pour les valeurs de Φ_h qui interviennent au second membre de (1)] et si on ajoute entre elles les relations de la forme (1′) écrites dans ces conditions, on trouve qu'en désignant par τ le nombre 1, le nombre 2 ou le nombre 4 suivant que Δ est positif, ou négatif différent de -1, ou égal à -1, la valeur de la somme obtenue au second membre est donnée[309] par la formule[309])

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=h}\left[\sum \frac{1}{(a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2)^s}\right] = \tau \sum \left(\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{(mn)^s}$$

qui suppose encore $\Re(s) > 0$. Dans le second membre la somme est étendue à tous les nombres naturels m, n qui sont premiers relatifs à 2Δ; dans le premier membre la somme figurant dans le crochet et correspondant à un indice déterminé i est étendue à tous les nombres naturels x, y mentionnés plus haut pour lesquels le nombre $a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2$ est premier relatif à 2Δ. Chacun des deux membres de cette relation fondamentale (3) est d'ailleurs fini et déterminé pour $\Re(s) > 1$. Une formule semblable avec quelques modifications de détail [l'une d'elles consistant à prendre $\tau = 6$ pour $\Delta = -3$] peut également s'écrire[310]) pour les formes improprement primitives[311]).

Dans le cas où $\Delta < 0$, la formule (3) montre, par application de la propriété D_0[312]) [n° 18], que le nombre des représentations d'un nombre naturel m premier relatif à 2Δ par les formes proprement primitives de déterminant $\Delta < 0$ est égal à

$$\tau \sum_{(d)} \left(\frac{\Delta}{d}\right),$$

---

309) *G. Lejeune Dirichlet,* J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 358, 361; Werke 1, Berlin 1889, p. 449, 452; Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 226, 227.

310) *G. Lejeune Dirichlet*, Werke[309]) 1, p. 452; Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 219, 226.

311) D'ailleurs pour les formes quadratiques prises sous la forme [I 16, 22]

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

les formules sont notablement plus simples comme l'a montré *L. Kronecker* [Sitzgsb. Akad. Berlin 1885, p. 762]. Voir aussi *H. Weber*, Nachr. Ges. Gött. 1893, p. 46, 138, 245.

312) *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 229.

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de m et où $\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ est le caractère quadratique de Δ relativement à d; cette somme est donc égale à l'excès du nombre de ceux des diviseurs d de m pour lesquels le caractère quadratique $\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ est $+1$ sur le nombre de ceux des diviseurs d de m pour lesquels ce caractère quadratique $\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ est -1. Cette proposition avait déjà été établie par *C. G. J. Jacobi*[313]) dans le cas particulier où $\Delta = -1$. Elle prend d'ailleurs une forme particulièrement simple pour les cas de $\Delta = -1$, $\Delta = -2$, où il n'y a qu'une seule classe.

Ainsi le nombre de représentations d'un nombre entier impair positif m par la forme $x^2 + y^2$ est égal à 4 fois l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{4}$ sur le nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv -1 \pmod{4}$.

Le nombre de représentations d'un nombre entier impair positif m par la forme $x^2 + 2y^2$ est égal à 2 fois l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv 1 \pmod{8}$ ou qui sont $\equiv 3 \pmod{8}$ sur le nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv -1 \pmod{8}$ ou qui sont $\equiv -3 \pmod{8}$.

On démontre, de même, que le nombre des représentations d'un entier positif m par une forme $x^2 - 2y^2$, où $2x > 3y \geqq 0$, est égal à l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv \pm 1 \pmod{8}$ sur le nombre des diviseurs de m qui sont $\equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Dans le second membre de la formule (3) la somme est étendue aux nombres m et n qui sont premiers relatifs à 2Δ. Elle contient en facteur l'expression

$$\lim_{\varrho = 0} \left\{ \varrho \sum_{(n)} \frac{1}{n^{1+\varrho}} \right\},$$

où la somme est étendue à tous les nombres naturels n qui sont premiers relatifs à 2Δ, expression qui est égale à

$$\frac{\varphi(2|\Delta|)}{2|\Delta|},$$

le second membre de la formule (3) peut donc être mis sous la forme

$$\frac{\tau\varphi(2|\Delta|)}{2|\Delta|} \sum_{(m)} \left(\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{m^{1+\varrho}},$$

où la somme est étendue à tous les nombres naturels m premiers relatifs à 2Δ.

313) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 167; Werke 6, Berlin 1891, p. 245.

Si donc on pose

$$s = 1 + \varrho,$$

où $\varrho > 0$, et qu'après avoir multiplié par ϱ les deux membres de la relation (3) on fasse tendre ϱ vers zéro, on parvient à la relation

$$(4)\quad \lim_{\varrho=0}\left\{\sum_{i=1}^{i=h}\left[\varrho\sum\frac{1}{(a_ix^2+2b_ixy+c_iy^2)^{1+\varrho}}\right]\right\} = \tau\,\frac{\varphi(2|\Delta|)}{2|\Delta|}\sum_{m=1}^{m=+\infty}\left(\frac{\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}.$$

La somme qui figure dans le crochet du premier membre est étendue aux mêmes valeurs de x et y que celles qu'on a mentionnées plus haut, dans le cas général. Quand il s'agit de formes improprement primitives, il faut remplacer, dans les formules (1′), (3), (4), la forme

$$a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2$$

par l'expression

$$\tfrac{1}{2}(a_ix^2 + 2b_ixy + c_iy^2).$$

De la formule (4) on déduit tout d'abord que, quand $\Delta > 0$, *l'équation de Fermat*

$$x^2 - \Delta y^2 = 1$$

a un nombre infini de solutions en nombres entiers x, y[314]).

33. Expression fondamentale du nombre de classes des formes quadratiques. C'est cette formule (4) qui permet d'obtenir le nombre h des classes de formes binaires quadratiques soit proprement, soit improprement primitives, de déterminant donné Δ.

Si, en effet, on part d'une seule forme Φ_i, et par conséquent de la fonction $Q(s)$ définie par l'égalité (1′) du n° **32**, on peut évaluer directement, à l'aide de **E** [n° **18**] et du principe géométrique qui sera indiqué au n° **53**, ou encore à l'aide des expressions de $Q(s)$ du n° **36**, la quantité

$$(1)\qquad \lim_{\varrho=0}\,[\varrho\, Q(1+\varrho)].$$

Dans le cas où, Δ étant négatif, x, y prennent *toutes* les valeurs entières possibles, et non plus seulement celles qui rendent Φ_i premier à 2Δ, cette limite est égale à[315])

$$(1')\qquad \frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Mais dans ce cas *L. Kronecker*[315]) va plus loin et calcule la quantité

$$A_0 = \lim_{s=1}\left[Q(s) - \frac{1}{s-1}\,\frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}}\right].$$

---

314) *L. Kronecker*, Monatsb. Akad. Berlin 1864, p. 285.

315) Sitzgsb. Akad. Berlin 1885, p. 775; id. 1889, p. 135. Voir *J. de Seguier*, Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe, Berlin 1894.

La formule qu'il obtient [formule dont d'autres démonstrations ont été ensuite fournies par *H. Weber*[316]), *M. Lerch*[317]) et *J. Franel*[318])] introduit les fonctions elliptiques; elle est en relation étroite avec la multiplication complexe de ces fonctions[319]).

*En s'appuyant sur une formule qu'il avait publiée[320]) en 1889, *M. Lerch*[321]) a donné pour la fonction $Q(s)$ un développement valable dans tout le plan et a établi que la fonction

$$Q(s) - \frac{1}{s-1} \frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}}$$

est une transcendante entière en s dont il détermine les deux premiers termes du développement en série entière en s. Il démontre aussi que la fonction[322])

$$\Gamma(s) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi}\right)^s Q(s)$$

ne change pas quand on y remplace s par $1 - s$.*

Si, au contraire, conformément à ce qui précède, on assujettit x et y, dans la série qui définit $Q(s)$, à la condition que Φ_i soit premier à $2|\Delta|$, on trouve[323]), par les moyens mentionnés plus haut,

$$\lim_{\varrho = 0} [\varrho Q(1 + \varrho)] = \frac{\omega \pi \varphi(-2\Delta)}{4(-\Delta)\sqrt{-\Delta}}, \tag{2}$$

où $\varphi(-2\Delta)$ désigne encore *l'indicateur* [I 15, 2] de -2Δ, et où ω est égal à 2 pour les formes proprement primitives et à 1 ou à 3 pour les formes improprement primitives suivant que $\Delta \equiv 1 \pmod{8}$ ou que $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$.

Si enfin Δ est positif, il faut tenir compte, non seulement de la condition que Φ_i soit premier avec 2Δ, mais encore de la double inégalité (2) du n° **32**. On trouve alors

$$\lim [\varrho Q(1 + \varrho)] = \frac{\omega \varphi(2\Delta)}{8\Delta\sqrt{\Delta}} \log_e \frac{\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta}}{\sigma}, \tag{2'}$$

T et U ayant la même signification qu'au n° **32** et σ étant le diviseur

316) Math. Ann. 33 (1889), p. 392; Ellipt. Funct. und alg. Zahlen, Brunswick 1891, p. 456/62.

317) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1893, mém. n° 9, p. 1/17.

318) Math. Ann. 48 (1897), p. 595. Voir aussi *E. Landau*, J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 161/82.

319) *H. Weber* [Math. Ann. 20 (1882), p. 321] a été le premier à prouver l'existence de la limite A_0.

320) *Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 3 (1889), mém. n° 3.*

321) *Rozpravy české Akad. 1 (1892) II, mém. n° 27.*

322) *Id. 2 (1893) II, mém. n° 4; id. 4 (1895) II, mém. n° 1.*

323) *G. Lejeune Dirichlet*, J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 360/4; Werke 1, Berlin 1889, p. 451/5.

commun de a, $2b$, c égal à 1 pour les formes proprement primitives, à 2 pour les formes improprement primitives.

Le nombre cherché h n'est autre que le quotient du second membre de la formule (4) du n° **32** par le second membre de la formule (2) ou de la formule (2') du numéro actuel.

On a dès lors en se bornant aux fonctions proprement primitives

$$h = \frac{2}{\theta} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left(\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{m}, \tag{3}$$

où θ désigne le nombre (réel) positif

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log_e \left(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta}\right)$$

suivant que $\Delta < 0$ ou que $\Delta > 0$.

Comme θ et h sont nécessairement positifs, cette formule montre d'abord que

$$\sum_{m=1}^{m=+\infty} \left(\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{m}$$

est toujours différent de zéro, et même positif. C'est la proposition utilisée par *G. Lejeune Dirichlet* pour démontrer son théorème sur la progression arithmétique [n° **30**].

*On peut d'ailleurs parvenir à la formule (3) par un procédé plus direct et d caractère moins analytique que le précédent, sans utiliser les propriétés des séries de Lejeune Dirichlet. Ce procédé consiste[324]) à appliquer des considérations analogues à celles du n° **32** en prenant

$$\Psi(m) = 1 \quad \text{ou} \quad \Psi(m) = 0$$

suivant que, pour un nombre donné X, on a

$$m \leqq X \quad \text{ou} \quad m > X,$$

et en faisant croître X indéfiniment au delà de toute borne finie.*

34. Transformations de cette expression. Il reste à exprimer la quantité (3) [n° **33**], ainsi obtenue, sous forme finie, c'est-à-dire à sommer la série du second membre[325]), série non absolument convergente, dans laquelle les entiers m (positifs et premiers à 2Δ) sont supposés rangés par ordre de grandeur croissante.

---

324) **Ch. Hermite*, C. R. Acad. sc. Paris 55 (1862), p. 684; Œuvres, publ. par *E. Picard* 2, p. 255; *M. Lerch*, Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 33 (1906), mém. n° 2, p. 18 [mémoire couronné en 1900]; Acta math. 29 (1905), p. 360.*

325) Voir à ce sujet, *G. Lejeune Dirichlet,* J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 324; 21 (1840), p. 1, 134; Werke 1, Berlin 1889, p. 413, 461, 473; voir aussi *V. Schemmel,* Diss. Breslau 1863.

Remarquons d'abord que si l'on pose

$$h(\Delta) = \frac{2}{\theta} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left(\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{m},$$

$$h(\Delta Q^2) = \frac{2}{\theta_1} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left(\frac{\Delta Q^2}{m}\right) \frac{1}{m},$$

où θ_1 est la plus petite valeur (réelle) positive que peut prendre l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta Q^2}} \log \left(t_1 + u_1 \sqrt{\Delta Q^2}\right)$$

pour toutes les solutions entières (t_1, u_1) de l'équation de Fermat

$$t_1^2 - \Delta Q^2 u_1^2 = 1,$$

on a

$$\frac{h(\Delta Q^2)}{h(\Delta)} = \frac{\theta}{\theta_1} \prod_{(r)} \left[1 - \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{1}{r}\right],$$

où le produit est étendu à tous les facteurs premiers inégaux de Q qui sont premiers relatifs à 2Δ. En transformant convenablement cette relation, dans le cas où $\Delta > 0$, *G. Lejeune Dirichlet*[326]) a pu montrer qu'*il y a une infinité de déterminants positifs ayant le même nombre h de classes.*

Si l'on met Δ sous la forme

$$\Delta = \pm 2^c P S^2,$$

où P est un produit de nombres premiers impairs *inégaux* et où c est égal à 0 ou à 1, on a, pour tout nombre naturel m premier à 2Δ,

$$\left(\frac{\Delta}{m}\right) = \delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right),$$

où $\delta = +1$ lorsque le facteur $\pm P$ qui figure dans Δ est $\equiv 1 \pmod{4}$, tandis que $\delta = -1$ lorsque le facteur $\pm P$ qui figure dans Δ est $\equiv 3 \pmod{4}$, et où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que c est 0 ou 1.

Si l'on se borne maintenant aux déterminants Δ de la forme

$$\Delta = \pm 2^c P,$$

où le nombre impair P n'a aucun facteur double, on conclut de là que l'expression (3) [n° **33**] de h peut s'écrire

$$(14) \qquad h = \frac{2}{\theta} \sum_{(m)} \delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m},$$

---

326) Ber. Akad. Berlin 1855, p. 493; J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 76, 80; J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 127; Werke 2, Berlin 1891, p. 185, 197.

où la somme est étendue à tous les nombres naturels m premiers relatifs à $2\mathrm{P}$. Si l'on remplace $\frac{1}{m}$ par l'intégrale

$$\frac{1}{m} = \int_0^1 x^{m-1}\,dx,$$

on peut d'ailleurs écrire

$$h = \frac{2}{\theta}\int_0^1 \sum_{(\nu)} \left[\delta^{\frac{\nu-1}{2}} \varepsilon^{\frac{\nu^2-1}{8}} \left(\frac{\nu}{\mathrm{P}}\right) x^\nu\right] \frac{dx}{x(1-x^{8\mathrm{P}})},$$

où la somme est étendue aux $\varphi(8\mathrm{P})$ nombres naturels $\nu < 8\mathrm{P}$ et premiers relatifs à $8\mathrm{P}$. En décomposant en éléments simples, à dénominateurs de la forme

$$x - e^{\frac{2i\pi k}{8\mathrm{P}}},$$

le coefficient différentiel de l'intégrale définie qui figure dans le second membre, et en utilisant les formules de réduction obtenues à l'aide des sommes de Gauss [n° **16**], on parvient finalement au résultat suivant dans lequel le caractère essentiellement distinct de l'expression de h quand $\Delta > 0$ et quand $\Delta < 0$ apparaît nettement:

Premier cas:

$$\Delta > 0.$$

Si $\Delta = \mathrm{P} \equiv 1$ (mod. 4), on a

$$h = \frac{2 - \left(\frac{2}{\mathrm{P}}\right)}{\log_e(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta})} \log_e \frac{\prod\limits_{(b)} \sin\frac{b\pi}{\mathrm{P}}}{\prod\limits_{(a)} \sin\frac{a\pi}{\mathrm{P}}}.$$

Si $\Delta = \mathrm{P} \equiv 3$ (mod. 4), ou si $\Delta = 2\mathrm{P}$, on a

$$h = \frac{1}{\log_e(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta})} \log_e \frac{\prod\limits_{(b)} \sin\frac{b\pi}{4\Delta}}{\prod\limits_{(a)} \sin\frac{a\pi}{4\Delta}},$$

où le produit des numérateurs est étendu, dans la première formule, aux nombres naturels $b < \Delta$ qui sont premiers relatifs à Δ et, dans la seconde formule, aux nombres naturels $b < 4\Delta$ qui sont premiers relatifs à 2Δ et tels que $\left(\frac{\Delta}{b}\right) = -1$, tandis que le produit des dénominateurs est étendu, dans la première formule, aux nombres naturels $a < \Delta$ qui sont premiers relatifs à Δ, et, dans la seconde formule, aux nombres naturels $a < 4\Delta$ qui sont premiers relatifs à 2Δ et tels que $\left(\frac{\Delta}{a}\right) = +1$.

Second cas:

$$\Delta < 0.$$

Si $\Delta = -\text{P} \equiv 1 \pmod{4}$, on a[327])

$$h = \left[2 - \left(\frac{2}{\text{P}}\right)\right]\frac{\text{B} - \text{A}}{\text{P}} = \left(\frac{2}{\text{P}}\right)(\beta - \alpha) = \text{M} - \text{N},$$

où A est la somme des nombres naturels $a < \text{P}$, premiers relatifs à P et tels que $\left(\frac{a}{\text{P}}\right) = +1$, tandis que B est la somme des nombres naturels $b < \text{P}$, premiers relatifs à P et tels que $\left(\frac{b}{\text{P}}\right) = -1$; où α, β sont les nombres qui expriment combien de ces nombres a, b sont impairs; où enfin M est le nombre qui exprime combien des nombres a sont $< \frac{\text{P}}{2}$ tandis que N est le nombre qui exprime combien des nombres b sont $< \frac{\text{P}}{2}$.

Si $\Delta = -\text{P} \equiv 3 \pmod{4}$ ou si $\Delta = -2\text{P}$, on a

$$h = \frac{\nu - \mu}{-4\Delta} = \frac{\text{M} - \text{N}}{2},$$

où μ est la somme des nombres naturels $a < -4\Delta$ et premiers relatifs à -2Δ pour lesquels $\left(\frac{\Delta}{a}\right) = +1$, tandis que ν est la somme des nombres $b < -4\Delta$ et premiers relatifs à -2Δ pour lesquels $\left(\frac{\Delta}{b}\right) = -1$; où M, N sont les nombres qui expriment combien de ces nombres a, b sont $< -2\Delta$.

Les cas non mentionnés dans cette énumération se ramènent à ceux-ci au moyen de la formule donnée ci-dessus pour le quotient

$$\frac{h(\Delta\text{Q}^2)}{h(\Delta)}.$$

On parvient à des formules équivalentes en suivant une autre voie[328]) dans laquelle au lieu de faire usage des *sommes de Gauss* on a à sommer des *séries de Fourier* de caractère élémentaire telle que

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \cdots.$$

35. Relations diverses auxquelles satisfont les résultats obtenus. Plaçons-nous dans le cas où $\Delta > 0$.

En appliquant les formules précédentes on est alors conduit à des rapprochements inattendus de la théorie qui nous occupe avec la théorie de la division de la circonférence de cercle en parties

---

327) Une formule entièrement équivalente avait été établie par *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 189; Werke 6, Berlin 1891, p. 240.

328) Elle a été suivie par *G. Lejeune Dirichlet*[325]).

égales[329]). Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas où le déterminant Δ est un nombre premier $\mathrm{P} \equiv 1 \pmod{8}$.

Si alors on envisage l'expression

$$\prod_{(a)} \left[x - e^{\frac{2i\pi a}{\mathrm{P}}}\right],$$

où le produit est étendu à tous les nombres naturels a premiers à P et inférieurs à P pour lesquels $\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right) = +1$, on voit immédiatement, en appliquant les formules obtenues pour les *sommes de Gauss*, qu'elle peut être mise sous la forme

$$\tfrac{1}{2}[\mathrm{Y}(x) - \mathrm{Z}(x)\sqrt{\mathrm{P}}],$$

où $\mathrm{Y}(x)$ et $\mathrm{Z}(x)$ sont des fonctions rationnelles entières de x, à coefficients entiers. On a de même

$$\prod_{(b)} \left[x - e^{\frac{2i\pi b}{\mathrm{P}}}\right] = \tfrac{1}{2}[\mathrm{Y}(x) + \mathrm{Z}(x)\sqrt{\mathrm{P}}],$$

le produit étant étendu à tous les nombres naturels b premiers à P et inférieurs à P pour lesquels $\left(\frac{b}{\mathrm{P}}\right) = -1$.

Les nombres entiers

$$y = \mathrm{Y}(1), \quad z = \mathrm{Z}(1)$$

vérifient d'ailleurs l'équation

$$y^2 - \mathrm{P}z^2 = 4\mathrm{P};$$

on en déduit que les nombres entiers

$$\tau = \frac{y^2 + \mathrm{P}z^2}{4\mathrm{P}}, \quad v = \frac{yz}{2\mathrm{P}}$$

vérifient l'*équation de Fermat*

$$t^2 - \mathrm{P}u^2 = 1.$$

On a donné à cette solution

$$(t = \tau, \quad u = v)$$

de l'équation de Fermat le nom de *solution fournie par la division du cercle* (*Kreisteilungslösung*).

D'autre part, l'expression obtenue pour le nombre de classes h dans le cas envisagé où $\left(\frac{2}{\mathrm{P}}\right) = 1$ peut se mettre sous la forme

$$h = \frac{1}{\log_e(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{P}})} \log_e \frac{\prod_{(b)} \sin\frac{b\pi}{\mathrm{P}}}{\prod_{(a)} \sin\frac{a\pi}{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\log_e(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{P}})} \log_e \frac{(y + z\sqrt{\mathrm{P}})^2}{4\mathrm{P}}$$

329) *G. Lejeune Dirichlet*, J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 286; Werke 1, Berlin 1889, p. 343; *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), (4ᵉ éd.) p. 277/84.

en sorte que

$$(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{P}})^h = \frac{(y + z\sqrt{\mathrm{P}})^2}{4\mathrm{P}} = \tau + v\sqrt{\mathrm{P}}.$$

Mais (T, U) est la solution fondamentale et (τ, v) est une solution déterminée de la même *équation de Fermat*

$$t^2 - \mathrm{P}u^2 = 1;$$

il y a donc un nombre naturel ω, fourni par la solution de cette *équation de Fermat*, qui est tel que l'on ait

$$(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{P}})^\omega = \tau + v\sqrt{\mathrm{P}};$$

ce nombre naturel ω est égal au nombre h de formes binaires quadratiques de déterminant P.

Des considérations analogues[330]) s'appliquent au cas où le déterminant positif Δ n'est pas un nombre premier $\equiv 1 \pmod{8}$.

**M. Lerch*[331]) a montré comment on peut former les polynomes Y et Z pour un discriminant produit $\Delta_1\Delta_2$ quand on connaît ces polynomes pour les discriminants facteurs Δ_1 et Δ_2.*

Quand on se place au point de vue de *L. Kronecker* les résultats obtenus doivent être quelque peu modifiés.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\Delta < 0$. Continuons à désigner par P le produit des nombres premiers impairs, supposés inégaux, contenus dans $-\Delta$, en sorte que

$$\Delta = -2\mathrm{P}$$

ou

$$\Delta = -\mathrm{P}$$

suivant que $-\Delta$ est pair ou impair[331a]).

Supposons $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$. De ce que h est *positif* on déduit immédiatement qu'il y a plus de nombres naturels a premiers à P, inférieurs à $\frac{\mathrm{P}}{2}$ et pour lesquels $\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right) = +1$ que de nombres naturels b premiers à P, inférieurs à $\frac{\mathrm{P}}{2}$ et pour lesquels $\left(\frac{b}{\mathrm{P}}\right) = -1$; au contraire la somme de ceux des nombres a qui sont inférieurs à P est plus petite que la somme de ceux des nombres b qui sont inférieurs à P.

---

330) **A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 51, 85, 181, 229; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 52, 64, 84, 95] était en possession du théorème correspondant le plus général relatif à un discriminant fondamental quelconque (Note de *M. Lerch*).*

331) *Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 33 (1906), mém. n° 2 [1900]; Acta math. 29 (1905), p. 333; 30 (1906), p. 203/93.*

331a) *A ces conditions correspond, dans la notation de *L. Kronecker*, l'hypothèse que le discriminant est fondamental (Note de *M. Lerch*).*

Si P est premier et congru soit à 3 (mod. 8), soit à 7 (mod. 8) on a[332])

$$\prod_{(a)} \cot \frac{2\pi a}{\mathrm{P}} = \pm (-1)^h \frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}}$$

h désignant le nombre de classes de formes binaires quadratiques de déterminant $-\mathrm{P}$; dans le premier membre le produit est étendu à tous les nombres naturels a qui sont premiers à P et pour lesquels $\left(\frac{a}{\mathrm{P}}\right) = 1$. D'une façon plus précise, on montre que le second membre de cette égalité est égal à

$$(-1)^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}} \quad \text{ou à} \quad (-1)^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}},$$

où N est le nombre des diviseurs quadratiques de la forme

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{P}\mathrm{Y}^2,$$

suivant que

$$\mathrm{P} \equiv 7 \pmod{8} \quad \text{ou que} \quad \mathrm{P} \equiv 3 \pmod{8}.$$

On peut d'ailleurs en déduire que l'on a dans tous les cas[332a])

$$\prod_{(a)} \cot \frac{2\pi a}{\mathrm{P}} = (-1)^{\frac{h+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}}.$$

C. F. Gauss[333]) avait établi la formule

$$\Gamma(\Delta) = \frac{h(\Delta)}{2^{\omega+\sigma-1}}$$

qui donne le nombre $\Gamma(\Delta)$ de classes dans chaque genre de formes quadratiques de déterminant Δ positif ou négatif; dans cette formule ω est le nombre de ceux des facteurs impairs premiers de Δ qui sont inégaux tandis que σ doit être remplacé par 0 quand $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, par 2 quand $\Delta \equiv 0 \pmod{8}$, par 1 dans tous les autres cas. En appliquant ses méthodes analytiques, *G. Lejeune Dirichlet*[334]) a confirmé cette formule de *C. F. Gauss.*

En reprenant cette analyse, *L. Kronecker*[335]) a établi en outre que chaque classe du genre principal s'obtient par duplication [cf. I 16, **21**].

G. Lejeune Dirichlet[336]) a étendu ses recherches à des formes à

332) *M. A. Stern,* J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 216.

332a) *Ce fait est signalé ici pour la première fois par *M. Lerch.**

333) Disquisitiones arithmeticae, Leipzig 1801, nos 231, 252, 261, 287; trad. *A. Ch. M. Poullet-Delisle*, Recherches arithmétiques, Paris 1807; Werke 1, Göttingue 1870, p. 233, 275, 291, 336.

334) J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 324; Werke 1, Berlin 1889, p. 411.

335) Monatsb. Akad. Berlin 1864, p. 285.

336) Ber. Akad. Berlin 1841, p. 190; J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 291; Werke 1, Berlin 1889, p. 503, 533.

éléments complexes [cf. I 16, 23] surtout en vue de déterminer le nombre de leurs classes. Pour un déterminant réel $\Delta = b^2 - ac$ ce nombre est égal à

$$2^{k-1} h(\Delta) h(-\Delta);$$

$h(\Delta)$ désigne le nombre de classes des formes à éléments réels et à déterminant Δ; $h(-\Delta)$ désigne le nombre de classes des formes à éléments réels et à déterminant $-\Delta$; k doit être remplacé par 2 ou par 1 suivant que l'*équation de Fermat*

$$t^2 - \Delta u^2 = -1$$

a des solutions réelles ou n'en a pas[337]).

*Quand on fait usage des notations de *L. Kronecker*, les formules qui donnent le nombre de classes s'écrivent d'une façon différente. Le déterminant

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac$$

d'une forme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

est dit *fondamental* lorsqu'il est sans diviseur carré impair et tel que quand Δ_1 est impair on ait

$$\Delta_1 \equiv 1 \pmod{4},$$

tandis que quand Δ_1 est pair on ait ou bien

$$\frac{\Delta_1}{4} \equiv 2 \pmod{4}$$

ou bien

$$\frac{\Delta_1}{4} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Ceci posé, les formules qui donnent le nombre $\mathrm{Cl}(\Delta_1)$ de classes des formes

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

de déterminant fondamental donné Δ_1 s'écrivent, pour $\Delta_1 < 0$,

$$\mathrm{Cl}(\Delta_1) = \frac{\tau}{2\Delta_1} \sum_{\nu=1}^{\nu=|\Delta_1|-1} \left(\frac{\Delta_1}{\nu}\right) \nu,$$

où l'on doit remplacer τ

$$\begin{aligned} &\text{par } 2 \text{ quand } \Delta_1 < -4 \\ &\text{par } 4 \text{ quand } \Delta_1 = -4 \\ &\text{par } 6 \text{ quand } \Delta_1 = -3; \end{aligned}$$

pour $\Delta_1 > 0$, les formules qui donnent $\mathrm{Cl}(\Delta_1)$ s'écrivent

$$\mathrm{Cl}(\Delta_1) \log_e \frac{\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\Delta_1}}{2} = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\Delta_1-1} \left(\frac{\Delta_1}{\nu}\right) \log_e \sin \frac{\nu\pi}{\Delta_1},$$

---

337) Voir à ce sujet un complément de *P. Bachmann*, Math. Ann. 16 (1880), p. 537; Theorie der complexen Zahlen, Berlin 1867.

où (T, U) est la solution fondamentale de l'équation

$$t^2 - \Delta_1 u^2 = 4.^*$$

$_*$Les formules qui, dans la notation de *L. Kronecker*, correspondent aux différents cas envisagés par *G. Lejeune Dirichlet* [cf. nº **34**] sont toutes contenues dans une formule générale due à *M. Lerch*

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\left|\frac{1}{2}\Delta_1\right|}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right)\sum_{\nu=1}^{\nu=\left|\frac{\alpha\Delta_1'}{\Delta_1}\right|}\left(\frac{\Delta_1'}{\nu}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}\,(\Delta_1\Delta_1')\,\mathrm{sgn}\,\Delta_1',$$

où $\Delta_1 = b^2 - 4ac$ et $\Delta_1' = b'^2 - 4a'c'$ désignent deux déterminants fondamentaux quelconques de signes opposés[338]).

Tant que $|\Delta_1|$ et $|\Delta_1'|$ ne dépassent pas certaines limites, cette formule se prête d'ailleurs bien plus facilement aux applications que les formules habituelles de *G. Lejeune Dirichlet.*

Quand le déterminant

$$\Delta = b^2 - ac$$

de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

est *positif*, les formules de *G. Lejeune Dirichlet* pour le calcul du nombre de classes d'une forme de déterminant donné Δ sont d'un usage plutôt pénible dès que Δ atteint les centaines. Les développements établis par *M. Lerch* (dans la notation de *L. Kronecker*) ont pu encore être appliqués[339]) au calcul du nombre de classes des formes

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

de déterminant

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac = 9817.^*$$

En adoptant la notation de *C. F. Gauss* et de *G. Lejeune Dirichlet*, l'équation

$$\mathrm{Cl}(-\mathrm{D}) = 1$$

ne subsiste pour les formes proprement primitives de déterminant négatif que quand le discriminant $\mathrm{D} = ac - b^2$ est égal à[340])

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ ou } 7.$$

H. Teege[341]) a donné une nouvelle détermination du signe des

338) Cf. note 331. Voir aussi Acad. Fr. Joseph I., Bull. intern. (Prague) 5 (1898), p. 33; Bull. sc. math. (2) 21 (1897), p. 290/304.

339) J. math. pures appl. (5) 9 (1903), p. 377.

340) *E. Landau*, Math. Ann. 56 (1903), p. 671; voir aussi *M. Lerch*, id. 57 (1903), p. 568.

341) Diss. Kiel 1900.

sommes de Gauss ainsi qu'une modification du procédé de *L. Kronecker*[342]) pour cette détermination. Il a aussi donné un complément des combinaisons dues à *M. A. Stern*[343]) et un Tableau des polynomes Y et Z. *V. Schemmel*[344]) a démontré que le nombre de classes de formes quadratiques à déterminant négatif $\Delta = b^2 - ac$ est comme le nombre de classes de formes à déterminant positif $\Delta = b^2 - ac$, lié aux fonctions $Y(x)$, $Z(x)$ de la théorie de la division du cercle[345]).

*La formule due à *V. A. Lebesgue*[346])

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=|\Delta_1|-1} \left(\frac{\Delta_1}{\nu}\right) \cot \frac{\nu\pi}{\Delta_1} = -4\frac{\sqrt{D_1}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(\Delta_1),$$

où

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac = -D_1,$$

et quelques formules analogues dues à *M. Lerch*[347]), dans lesquelles les termes généraux des séries envisagées dépendent du carré ν^2 de l'indice sommatoire et ne dépendent pas du symbole $\left(\frac{\Delta_1}{\nu}\right)$, présentent quelque analogie avec les sommes de Gauss, mais ne peuvent être mise sous la forme propre aux sommes de Gauss que quand Δ_1 ne contient qu'*un seul* facteur premier impair[348]). Ainsi, quand Δ_1 est impair sans être premier, la valeur de l'expression[349])

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=|\Delta_1|-1} \cot \frac{\nu^2\pi}{\Delta_1}$$

342) J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 392.

343) Voir n° 8, note 35.

344) Diss. Breslau 1863.

345) Voir aussi *P. Bachmann*, Analyt. Zahlenth.[11]), p. 230.

346) *J. math. pures appl. (1) 15 (1850), p. 227.* Voir aussi *V. Schemmel*, Diss. Breslau 1863.

347) *Rozpravy české Akad. 17 (1908) II, mém. n° 6; voir aussi note 331.*

348) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1897, mém. n° 43.

349) *Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 33 (1906), mém. n° 2, p. 168 [1900]; Acta math. 30 (1906), p. 248. Ces mémoires et le mémoire cité note 347 contiennent des expressions du carré du nombre Cl (Δ_1) qu'on peut appeler additives (ou *sommatoires*), savoir (p. 216 du premier mémoire)

$$[\mathrm{Cl}(\Delta_1)]^2 = \frac{\tau^2\sqrt{D_1}}{4\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{\Delta_1}{n}\right)\left[\frac{1}{n}\int(n)\right]E,\ \text{où}\ E = e^{\frac{2n\pi x}{\Delta_1}} + e^{\frac{2n\pi}{\Delta_1 x}}$$

x étant une quantité positive arbitraire et $\int(n)$ désignant la somme des diviseurs de n, et ensuite l'expression (p. 62 du mémoire cité) dépend des nombres de classes à déterminants négatifs $-\delta$ diviseurs de Δ_1[350]).*

M. Lerch[351]) a aussi évalué des sommes telles que

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n-1} E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

où n désigne un nombre entier positif impair quelconque, m un nombre entier positif premier à n et où $E(a)$ désigne le plus grand entier contenu dans a. Il a donné[351]) des formules comme celle-ci:

$$(1)\qquad \sum_{s=1}^{s=n-1} R\left(\frac{ms^2}{n}\right) = \sum_{d} \left(\frac{m}{d}\right)\left[1-\left(\frac{2}{d}\right)\right]\frac{2}{\tau_d}\,\mathrm{Cl}(-d),$$

où $R(u)$ désigne le plus petit reste absolu de u, en sorte que

$$R(u) = u - E(u+\tfrac{1}{2});$$

dans cette formule m et n sont des nombres naturels premiers entre eux dont le second n est supposé impair; $\mathrm{Cl}(-d)$ représente le nombre de classes des formes quadratiques positives primitives

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

de déterminant

$$b^2 - 4ac = -d;$$

τ_d est égal à 6, à 4 ou à 2 suivant que $d = 4ac - b^2$ est égal à 3, à 4 ou à un nombre plus grand que 4; enfin $d = 4ac - b^2$ est un

---

$$\frac{4}{\tau^2}[\mathrm{Cl}(\Delta_1)]^2 = \frac{1}{|\Delta_1|}\sum_{\nu=1}^{\nu=|\Delta_1|-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu}\left(\frac{\Delta_1}{\alpha}\right)\right]^2 + \frac{\Delta_1}{12}\prod_{(\omega)}\left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

ω parcourant les différents facteurs premiers du nombre positif

$$D_1 = |\Delta_1| = 4ac - b^2.$$

Dans le mémoire[347]) se trouve établie la formule relative aux déterminants fondamentaux impairs Δ_1

$$\sum_{k=2}^{k=|\Delta_1|-1}\left(\frac{\Delta_1}{k}\right)\left\{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=k-1}(-1)^{\left[\frac{-\alpha\Delta_1}{k}\right]}\right\} = 4(1-2\varepsilon)\mathrm{K}^2 - \mathrm{K},$$

où

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta_1}\right),\quad \mathrm{K} = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(\Delta_1),\quad \Delta_1 = b^2 - 4ac.*$$

350) On doit à *M. Lerch* d'autres théorèmes analogues concernant le nombre de classes [Bull. sc. math. (2) 21 (1897), p. 290/304]. *Sur une généralisation des *sommes de Gauss* voir *M. Lerch,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1903, mém. n° 4.*

351) *Rozpravy české Akad. 7 (1898) II, mém. n° 7; Ann. mat. pura appl. (3) 11 (1905), p. 79. Voir aussi note 331.*

quelconque des diviseurs de n de la forme $4\nu+3$; la somme qui figure dans le second membre de la formule (1) est étendue à tous les diviseurs de n qui sont de la forme $4\nu+3$ [352]).*

36. Le théorème de Lejeune Dirichlet pour les formes quadratiques. *Les mêmes séries qui ont été introduites au n° **32** ont également permis à *G. Lejeune Dirichlet*[353]) de démontrer que *toute forme quadratique proprement primitive représente une infinité de nombres premiers.*

Il a même établi[354]) que, *parmi ces nombres premiers,* il y en a une *infinité représentables par une forme linéaire*

$$Mx + N$$

primitive (c'est-à-dire telle que M et N soient premiers entre eux) *donnée* quelconque, pourvu qu'entre les coefficients de la forme quadratique et de la forme linéaire existent certaines relations sans lesquelles d'ailleurs aucun nombre (premier ou non) ne peut être représenté à la fois par l'une et par l'autre.

Les démonstrations ont d'ailleurs été simplement esquissées par *G. Lejeune Dirichlet.* Elles ont été complétées par *H. Weber*[355]) pour le théorème sous sa première forme et par *Arnold Meyer*[356]) pour le théorème sous sa forme plus complète. *E. Schering* avait aussi démontré le théorème sous sa première forme; mais sa démonstration n'a été publiée que par *R. Haussner*[357]).

Utilisant à cet effet la théorie de la composition des formes quadratiques [I 16, **23**] *H. Weber* et *Arnold Meyer* font correspondre à chaque classe c de formes binaires quadratiques (proprement primitives), de déterminant donné Δ, un *caractère* $\varkappa(c)$ qui est, comme le caractère $\chi(n)$ du n° **29** un produit de puissances de certaines racines $\omega, \omega', \ldots$

352) C'est à l'aide de cette formule et de formules analogues que *M. Lerch* est parvenu à évaluer la somme S de ceux des résidus quadratiques du module n qui sont premiers à ce module et différents entre eux, et à prouver que si n est divisible par 3 tandis que ses autres facteurs sont de la forme $3k+2$, on a

$$S \equiv \frac{n}{3} \pmod{n}$$

et que, dans tous les autres cas, on a

$$S \equiv 0 \pmod{n}.$$

353) *Ber. Akad. Berlin 1840, p. 49; J. reine angew. Math. 21 (1840), p. 98; Werke 1, Berlin 1889, p. 499.* Voir *P. Bachmann*, Analyt. Zahlentheorie, p. 272.

354) *C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 285; Werke 1, Berlin 1889, p. 619.*

355) Math. Ann. 20 (1882), p. 301.

356) J. reine angew. Math. 103 (1888), p. 98.

357) Cf. *R. Haussner* dans *E. Schering*, Werke 2, Berlin 1909, p. 431/2.

de l'unité, les exposants dépendant de c. Si h est le nombre de classes, il y a h manières de choisir le caractère, différant entre elles par le choix de $\omega, \omega', \ldots$ Pour

$$\omega = \omega' = \cdots = 1$$

on a le *caractère principal*. Les autres caractères tels que

$$\omega^2 = \omega'^2 = \cdots = 1$$

sont les caractères *réels* ou *ambigus* ou *bilatéraux* [terminologie de *Ch. J. de la Vallée Poussin*[358])] et sont réels quel que soit c. Enfin ceux qui sont tels que l'une au moins des quantités ω soit complexe sont eux-mêmes complexes et *conjugués* (ou encore *opposés*) deux à deux.

D'après leur formation même, ces caractères possèdent les deux propriétés suivantes, tout analogues à celles des caractères $\chi(n)$ [n° **29**]:

1°) c, c' étant deux classes et cc' la classe composée [I 16, **23**] des deux premières, on a

$$\varkappa(c)\varkappa(c') = \varkappa(cc'); \tag{1}$$

2°) pour tout caractère autre que le principal, on a

$$\sum_{i=1}^{i=h} \varkappa(c_i) = 0, \tag{2}$$

la somme étant étendue aux h classes proprement primitives $c_1, c_2, \ldots, c_h$ de même déterminant Δ.

Le symbole $\varkappa(c)$ étant ainsi introduit, considérons la fonction $Q(s)$ du n° **32**. Il existe une telle fonction $Q(s)$ pour chacune des h classes $c_1, c_2, \ldots, c_h$; nous désignerons ces h fonctions respectivement par

$$Q(s, c_1),\ Q(s, c_2),\ \ldots,\ Q(s, c_h).$$

Cela posé, si l'on forme la combinaison

$$\begin{aligned} L(s, \varkappa) &= \varkappa(c_1)\, Q(s, c_1) + \varkappa(c_2)\, Q(s, c_2) + \cdots + \varkappa(c_h)\, Q(s, c_h) \\ &= \sum_{i=1}^{i=h} \sum_{(x,y)} \frac{\varkappa(c_i)}{[\Phi_i(x, y)]^s}, \end{aligned} \tag{3}$$

les mêmes restrictions [n° **32**] étant toujours imposées à (x, y), il résulte encore de la relation (1) et de l'identité d'Euler que cette série $L(s, \varkappa)$ peut se mettre sous la forme d'un produit de facteurs analogue à ceux qui représentent $\zeta(s)$ [n° **20**] ou $Z(s, \chi)$ [n° **29**].

358) *Ann. Soc. scient. Bruxelles 21² (1896/7), p. 343. *Ch. J. de la Vallée Poussin* désigne également par *caractères bilatéraux* les caractères du type χ [n° **29**] qu'il appelle *réels* dans la seconde partie de ses recherches[278]) et auxquels nous avons donné ce nom au n° **29**.*

D'ailleurs, lorsque $\varkappa$ est le caractère principal, la série coïncide avec le premier membre de la formule (3) du n° **32** et a, par conséquent, pour $s = 1$, un pôle simple dont le résidu a été calculé au n° **32**. Quant aux séries non principales, en vertu de la relation (2) elles ne sont pas infinies pour $s = 1$.

Une fois démontré qu'elles ne sont pas non plus *nulles* pour $s = 1$, la théorie est toute parallèle à celle des séries

$$Z(s, \chi)$$

et conduit à établir la première proposition de *G. Lejeune Dirichlet* en invoquant encore A″ [n° **18**].

Pour rechercher les nombres premiers représentables à la fois par une forme quadratique et par une forme linéaire

$$Mx + N$$

données, ces deux formes étant *compatibles,* c'est-à-dire satisfaisant aux relations mentionnées plus haut et, ce qui ne diminue pas la généralité, M étant supposé divisible par $\Delta = b^2 - ac$ et par 4, on subdivise chacune des séries $Q(s, c)$ précédemment considérées en d'autres dans chacune desquelles on ne donne aux entiers x, y (toujours soumis aux restrictions précédentes) que des valeurs en progression arithmétique de raison M. Tous les termes d'une telle série partielle correspondent à une même valeur pour le reste (relativement au module M) de la quantité $\Phi_i(x, y)$ [où $i = 1, 2, \ldots, h$] et, par conséquent, aussi pour la quantité

$$\chi(\Phi_i),$$

χ étant un caractère (mod. M) [n° **29**] comme il a été expliqué [I 16, **25**].

En multipliant chaque série partielle par la valeur correspondante de $\chi(\Phi_i)$ et aussi par le caractère de classe

$$\varkappa(c_i)$$

correspondant à la forme Φ_i, puis en sommant tant par rapport aux diverses classes que relativement aux diverses progressions arithmétiques entre lesquelles on peut distribuer les entiers x, y, on obtient une série

$$L(s, \varkappa, \chi)$$

qu'on peut encore transformer en produit par l'identité d'Euler.

La série qui correspond au cas où les caractères $\varkappa$ et χ sont tous deux principaux a un pôle pour $s = 1$, mais ici d'autres séries correspondant au cas où $\varkappa$ et χ sont des caractères *réels* convenablement accouplés partagent avec elle cette propriété. Les séries qui restent finies pour $s = 1$ étant encore différentes de zéro, la démonstration s'achève comme les précédentes.

Si l'on veut étudier la fréquence des nombres premiers dont l'existence est ainsi démontrée, il faut étendre aux séries

$$L(s, \varkappa) \quad \text{et} \quad L(s, \varkappa, \chi),$$

comme cela a été fait pour $Z(s, \chi)$, les propriétés de $\zeta(s)$ énumérées aux n^{os} **22** à **26** [propriétés α à η].

Le moyen le plus simple de définir ces séries dans tout le plan [propriétés α, β] est, à l'exemple de *Ch. J. de la Vallée Poussin*[359]), de les déduire de $\mathbf{F}'$ [n° **18**].

Si l'on prend pour $F(z)$ la fonction $Q(z)$ du n° **32**, la fonction $\Phi(t)$ qui lui correspond, d'après la formule $\mathbf{F}$, est représentée par la série (1) du n° **32** dans laquelle on prend

$$\Psi(m) = e^{-mt}.$$

Lorsque $\Delta = b^2 - ac < 0$ elle se ramène aisément au premier membre de l'identité de *A. L. Cauchy* [identité (9) du n° **16**].

Grâce à cette identité, déjà appliquée par *B. Riemann* à $\zeta(s)$ pour établir la propriété γ, *Ch. J. de la Vallée Poussin*[360]) étend sans difficulté la proposition γ à la fonction $Q(s, c)$ et par conséquent[361]) aux séries L, pour lesquelles *H. Weber*[362]) l'avait déjà obtenue d'une manière moins simple. Cette même expression donne aussi aisément le genre des séries en question [propriété ε].

Enfin le raisonnement même qui a été employé pour $\zeta(s)$ montre[363]) que les séries L possèdent la propriété η', c'est-à-dire qu'elles ne s'annulent pas pour

$$s = 1 + it.^*$$

37. Séries de la théorie des idéaux. $_*$Grâce aux relations qui existent entre les idéaux du corps quadratique [cf. I 10, **38**], défini par l'irrationnelle $\sqrt{\Delta}$, et les formes quadratiques $ax^2 + 2bxy + cy^2$ de déterminant $\Delta = b^2 - ac$ [cf. I 10, **54**], les séries

$$L(s, \varkappa)$$

peuvent être regardées comme comprises, à titre de cas particuliers, dans les séries de *E. E. Kummer* et *R. Dedekind*[364]) relatives aux idéaux des corps algébriques. Désignons par

$$N(\mathfrak{a})$$

---

359) $_*$Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 353.*

360) $_*$Id. p. 372/4.*

361) $_*$Id. p. 383.*

362) $_*$Math. Ann. 20 (1882), p. 301.*

363) $_*$*Ch. J. de la Vallée Poussin*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 21^2 (1896/7), p. 366.*

364) $_*$*E. E. Kummer*, J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 93/116; *R. Dedekind*, dans *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), (4^e éd.) p. 603/40. Voir aussi

la norme d'un idéal $\mathfrak{a}$ d'un corps donné K. La série

$$(1)\qquad \frac{1}{[N(\mathfrak{a}_1)]^s}+\frac{1}{[N(\mathfrak{a}_2)]^s}+\cdots+\frac{1}{[N(\mathfrak{a}_\nu)]^s}+\cdots\cdots,$$

où $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu, \ldots\ldots$ sont tous les idéaux du corps K, permet l'application de l'identité d'Euler, en sorte que l'on a

$$(1')\qquad \sum_{(i)}\frac{1}{[N(\mathfrak{a}_i)]^s}=\frac{1}{\prod\limits_{(h)}\left[1-\frac{1}{[N(\mathfrak{p}_h)]^s}\right]},$$

où le produit est étendu aux idéaux *premiers* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h, \ldots$ de K.

D'autre part, les idéaux de K pouvant être répartis en classes [I 18] qui forment un groupe abélien, on peut faire correspondre à chacune de celles-ci un *caractère* $\mathfrak{k}$.

On peut encore appliquer l'identité d'Euler à la série obtenue en multipliant chaque terme de (1) par la valeur de $\mathfrak{k}$ et écrire

$$(1'')\qquad \sum_{(i)}\frac{\mathfrak{k}(\mathfrak{a}_i)}{[N(\mathfrak{a}_i)]^s}=\frac{1}{\prod\limits_{(h)}\left[1-\frac{\mathfrak{k}(\mathfrak{p}_h)}{[N(\mathfrak{p}_h)]^s}\right]}.$$

Le *nombre des classes d'idéaux* du corps considéré K se déduit[365]) [d'après E] du résidu de la série (1) pour $s=1$. Dans le cas des corps circulaires le calcul de ce résidu est en rapport étroit avec la théorie des séries de Lejeune Dirichlet considérées au n° **29** et fournit une démonstration de l'inégalité $Z(1,\chi)\gtrless 0$ indiquée à cet endroit[365a]).

Dans les autres cas la détermination de ce résidu constitue, comme l'observe *R. Dedekind*[365]), une nouvelle difficulté à laquelle est ramenée la première. Afin d'écarter cette difficulté pour les corps relativement abéliens par rapport à un corps quadratique imaginaire, *R. Fueter*[365b]) généralise la formule de *L. Kronecker* du n° **33**.

Les séries (1′), (1″) conduisent à la détermination de la fréquence des idéaux premiers et à celle de leur distribution en classes. Mais les propriétés de ces séries sont beaucoup moins bien connues que celles des précédentes. L'état actuel de la théorie des corps algébriques ne permet pas d'affirmer que les fonctions qu'elles définissent [sauf dans le cas des corps quadratiques ou circulaires pour lesquels

---

H. Weber, Math. Ann. 48 (1897), p. 433; 49 (1897), p. 83; 50 (1898), p. 1; J. reine angew. Math. 129 (1905), p. 35.*

365) *R. Dedekind*, dans *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), p. 610.

E. Landau [J. reine angew. Math. 127 (1904), p. 167] montre que ce résidu peut être représenté par le produit de la série (1) du n° **37** et de la série (2) du n° **21**, produit qui converge pour $s=1$.

365a) *R. Dedekind,* dans *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), p. 625.

365b) *Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), p. 380.*

on est ramené à la série (1) du n° **28**] soient prolongeables analytiquement, ni a fortiori qu'elles possèdent la propriété γ.

E. Landau[366]) a seulement démontré que la série (1) peut être prolongée jusqu'à la droite

$$\Re(s) = 1 - \frac{1}{k},$$

où k est le degré du corps K; mais il a de plus, dans ce domaine, établi non seulement η' mais encore des inégalités analogues à η'', η''', η^{IV} quoiqu'un peu moins précises et il a montré [cf. n° **47**] que ces résultats suffisent pour l'étude des lois asymptotiques correspondantes.*

38. Une série de Kronecker. **L. Kronecker*[367]) a considéré la série

$$(1) \qquad \frac{v_{p_1}}{p_1^s} + \frac{v_{p_2}}{p_2^s} + \cdots + \frac{v_{p_i}}{p_i^s} + \cdots\cdots,$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots\ldots$ représentent la suite infinie des nombres premiers tandis que v_{p_i} désigne le nombre des racines de la congruence

$$(2) \qquad F(x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p_i),$$

$F(x)$ étant un polynome entier donné, à coefficients entiers.

Il montre que la partie principale de la quantité définie par la somme

$$\sum_{(i)} \frac{v_{p_i}}{p_i^s}$$

de la série (1) est, pour s voisin de 1 mais supérieur à 1,

$$k \log \frac{1}{s-1},$$

k étant le nombre des facteurs irréductibles de $F(x)$.*

*C'est de l'étude de cette série que *G. Frobenius*[368]) a déduit la distribution des modules premiers en diverses catégories d'après la manière dont la congruence (2) se comporte suivant ces modules; il démontre que chacune de ces catégories contient une infinité de nombres premiers.*

Distribution asymptotique des nombres premiers.

39. Nombre de nombres premiers. *Les fonctions arithmétiques ont des variations très irrégulières et lors même qu'on peut [voir par ex. n$^{\text{os}}$ **43** et **44**] en écrire une expression analytique exacte, celle-ci

366) *J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 64.*

367) *Monatsb Akad. Berlin 1880, p. 155; Werke 2, Leipzig 1897, p. 85.*

368) *Sitzgsb. Akad. Berlin 1896, p. 689.*

est forcément trop compliquée pour être utilisée, du moins sous sa forme complète. Mais, lorsque ces fonctions arithmétiques augmentent indéfiniment avec la variable, on peut, en général, en obtenir des évaluations simples sous forme d'expressions *asymptotiques*, c'est-à-dire approchées pour les grandes valeurs de cette variable.*

Le plus souvent, on considère comme *expression asymptotique* d'une fonction $f(n)$ une fonction $\psi(n)$ telle que

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\psi(n)}{f(n)} = 1,$$

mais on peut parfois considérer des expressions asymptotiques plus précises telles, par exemple, en supposant $f(n)$ infini avec n, que

$$\lim_{n=+\infty} [f(n) - \psi(n)] = 0.$$

Quand on peut trouver une expression asymptotique $\psi(n)$ d'une fonction $f(n)$ se prêtant mieux au calcul que $f(n)$, au moins pour de grandes valeurs de n, on a souvent la possibilité d'étudier le caractère de la fonction $f(n)$ mieux qu'on ne saurait le faire par une étude directe de cette fonction.

La fonction dont l'évaluation asymptotique est la plus importante, cette évaluation intervenant d'ailleurs dans beaucoup d'autres, est le nombre[369])

$$\Pi(x)$$

des nombres premiers[370]) inférieurs ou égaux à un nombre naturel donné x. *A. M. Legendre*[371]), opérant d'ailleurs par voie empirique, calcule ce nombre au moyen de la formule

$$\Pi(x) = \frac{x}{\log_e x - 1{,}08366}.$$

---

369) *L'histoire des recherches relatives aux nombres premiers est exposée dans la monographie de *G. Torelli,* Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato, Naples 1901; Atti Accad. sc. fis. mat. [Naples] (2) 11 (1899/1902), mém. n° 1, p. 155 [1900]; voir aussi *G. Torelli* [Rend. Accad. Napoli (3) 10 (1904), p. 350/62] et *M. Cipolla* [Rendic. Accad. Napoli (3) 8 (1902), p. 132/66].*

370) *Comme on l'a déjà dit[138]) le nombre 1 n'est pas compté comme nombre premier dans l'évaluation de $\Pi(x)$.*

371) **A. M. Legendre* [Essai sur la théorie des nombres, (1re éd.) Paris an VI, p. 19] donne déjà la formule

$$\Pi(x) = \frac{x}{A \lg_e x + B};$$

il donne [Essai sur la théorie des nombres, (2e éd.) Paris 1808, p. 394/5] A comme très voisin de 1 et $B = -1{,}08366$ environ.* Cf. Théorie des nombres (3e éd.) 2, Paris 1830, p. 65.

Cette formule[372]) fournit en effet des valeurs très approchées du nombre $\Pi(x)$ quand x ne dépasse pas deux ou trois millions; mais il n'en est plus de même quand x augmente au delà de trois millions[373]).

40. Résultats de Čebyšëv. Le logarithme intégral. D'ailleurs[374]) *P. L. Čebyšëv*[375]) prouve que

$$\frac{x}{\log_e x - 1{,}08366}$$

372) Cf. *A. Genocchi*, Ann. mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 52; *S. M. Drach*, London Edinb. Dublin philos. mag. 24 (1844), p. 192.

373) Diverses méthodes de nature purement arithmétique pour l'énumération directe des nombres premiers ont été indiquées par *E. Meissel*, Math. Ann. 2 (1870), p. 636/42; 3 (1871), p. 523/5 [voir aussi Math. Ann. 21 (1883), p. 304; 25 (1885), p. 251/7; Progr. Kiel 1884], *F. Rogel*, Math. Ann. 36 (1890), p. 304/15; Archiv Math. Phys. (2) 7 (1889), p. 381/8; (2) 17 (1900), p. 225/37; *Piarron de Mondésir,* Assoc. fr. avanc. sc. 6, (Le Havre) 1877, p. 79/82; *J. P. Gram,* K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (6) 2 (1881/6), p. 185 [1884]; résumé en français, id. p. 289; *L. Lorenz,* id. (6) 5 (1889/91), p. 427/50 [1891]; Tidsskrift math. Köbenhavn (Copenhague) (4) 2 (1878), p. 1/3; **A. Lugli*, Giorn. mat. (1) 26 (1888), p. 86/95;* *K. Hossfeld*, Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 382/4; *J. P. Gram*, Acta math. 17 (1893), p. 301/14; *F. Gräfe*, Z. Math. Phys. 39 (1894), p. 38/50; *H. Vollprecht,* id. 40 (1895), p. 118/73; **A. Baranowsky*, Rozprawy Akad. Umiejętności (Cracovie) (2) 8 (1895), p. 192/219; Bull. intern. Acad. sc. Cracovie 1894, p. 280/1; *Ch. J. Hargreave*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 8 (1854), p. 114/22; *K. E. Hoffmann*, Archiv Math. Phys. 64 (1879), p. 333/6.*

A signaler également la formule de *L. Kronecker* [Zahlenth.[59]) 1, p. 303]

$$\nu + \sum_{(d:n)} \left[\frac{N}{d}\right] \mu(d)$$

qui fournit, pour un nombre naturel quelconque donné N, le nombre des nombres premiers $\leqq N$; dans cette formule ν représente le nombre des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ qui sont inférieurs à $\sqrt{N}$ et d désigne un quelconque des diviseurs du produit

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_\nu;$$

la somme est étendue à *tous* ces diviseurs d.

Sur ces différents travaux qui ne rentrent pas dans le cadre de cet article, consulter *G. Torelli*[369]).

374) L'expression de $\Pi(x)$ donnée par *A. M. Legendre* avait aussi été adoptée tout d'abord par *G. Lejeune Dirichlet* [J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 272; Werke 1, Berlin 1889, p. 372], mais *G. Lejeune Dirichlet,* dans l'exemplaire de son mémoire qu'il a envoyé à *C. F. Gauss* [voir la note de *L. Kronecker* dans *G. Lejeune Dirichlet,* Werke 1, Berlin 1889, p. 372] la corrige pour la valeur $Li(x)$ qu'il prend sous la forme sensiblement équivalente

$$\sum_{n=2}^{n=[x]} \frac{1}{\log_e n}.$$

375) Mém. présentés Acad. Pétersb. 6 (1851), p. 141/57; 7 (1854), p. 17/33 [1850]; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 341/65, 366/92; Œuvres 1, S^t^ Pétersb. 1899, p. 27/70.

ne saurait être une expression asymptotique de $\Pi(x)$ parce que si

$$\frac{x}{\Pi(x)} - \log_e x$$

tend vers une limite finie quand x croît indéfiniment, cette limite ne peut être que -1.

Il montre que, sauf peut-être pour $x \leqq 3\,000\,000$, on a des résultats plus approchés[376] en déterminant $\Pi(x)$ au moyen de la fonction

$$(1) \qquad Li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log_e x} = \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log_e x} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dx}{\log_e x} \right],$$

où le second membre représente une valeur principale au sens de *A. L. Cauchy* [II 8] et à laquelle on a donné le nom de *logarithme intégral* de x.

*Cela revient à dire que le pourcentage ou *densité*[377] des nombres premiers dans le voisinage d'une valeur déterminée de x est $\frac{1}{\log_e x}$, ou encore que la probabilité pour qu'un entier inconnu mais dont on sait qu'il est voisin de x soit premier est $\frac{1}{\log_e x}$.

Si l'on prenait pour $\Pi(x)$ la valeur

$$(2) \qquad \frac{x}{\log_e x},$$

qui est la partie principale de celle de *A. M. Legendre,* on considérerait que $\frac{1}{\log_e x}$ est la *densité moyenne* ou pourcentage des nombres premiers *entre zéro et x*; autrement dit on considérerait que $\frac{1}{\log_e x}$ est la probabilité de tomber sur un nombre premier en choisissant un entier au hasard entre zéro et x [voir n° **53**].

Les deux expressions (1) et (2) sont d'ailleurs asymptotiques l'une à l'autre [cf. n° **47**]. Plus généralement, il importe de remarquer que la fonction $Li(x)$ admet[378] un développement (formel) en série

376) *C. F. Gauss* avait fait une remarque semblable après avoir pris connaissance des résultats numériques obtenus par *B. Goldschmidt* [voir la lettre de *C. F. Gauss* à *J. F. Encke* datée du 24 décembre 1849; Werke 2, Göttingen 1876, p. 444]; il avait adopté comme *P. L. Čebyšev* la valeur approchée $Li(x)$ pour $\Pi(x)$.

377) *Cette dénomination est celle dont *E. Cesàro* [Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 348] a fait usage.*

378) *Les propriétés de cette fonction sont exposées dans *N. Nielsen,* Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten, Leipzig 1906. Consulter aussi Interméd. math. 1 (1894), p. 133; 2 (1895), p. 153, 346; 8 (1901), p. 192; 11 (1904), p. 5, 108 [Questions 245, 2155, 2156, 2712].*

divergente, savoir

$$(2') \quad \frac{x}{\log_e x} + \frac{x}{(\log_e x)^2} + \frac{2x}{(\log_e x)^3} + \frac{6x}{(\log_e x)^4} + \cdots + \frac{(n-1)!\,x}{(\log_e x)^n} + \cdots\cdots$$

En limitant cette série à un nombre quelconque de termes, on a $Li(x)$ avec une erreur du même ordre de grandeur (pour x très grand) que le premier terme négligé.*

41. Aperçu sur la méthode de Čebyšëv. La fonction arithmétique $\theta(x)$. **P. L. Čebyšëv*[378a]) est le premier qui ait appliqué à l'étude de $\Pi(x)$ et de questions connexes un raisonnement rigoureux.

Il emploie successivement deux méthodes dont la première[379]) utilise déjà l'identité (4) du n° **17** et se rapproche par là de celle de *B. Riemann,* mais avec cette différence que $\zeta(s)$ n'intervient que par sa partie principale pour s voisin de 1, de sorte que cette méthode revient au fond à l'application de E′, E″.*

Le seconde méthode[380]) consiste à partir de la quantité

$$T(x) = \log_e \Gamma([x] + 1)$$

qui désigne la somme des logarithmes naturels de tous les nombres naturels inférieurs ou égaux à x, et à lui rattacher la fonction $\theta(x)$ qui désigne la somme des logarithmes naturels des nombres *premiers* inférieurs ou égaux à x.

Si l'on pose

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

en sorte que $\psi(x)$ représente le logarithme du p. p. c. m. de tous les nombres naturels inférieurs ou égaux à x, on peut exprimer $\mathrm{T}(x)$ au moyen de la fonction $\psi(x)$. On démontre[381]), en effet, que l'on a[382])

$$\mathrm{T}(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

378a) *Voir *E. Landau,* Primzahlen[133]) 1, p. 11/29.*

379) J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 341; Mém. présentés Acad. Pétersb. 6 (1851), p. 141/57; 7 (1854), p. 15/33; Œuvres 1, St Pétersbourg 1899, p. 27/70.

380) J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 366/92; Mém. présentés Acad. Pétersb. 7 (1854), p. 15/33; Œuvres 1, p. 49/70.

381) Pour ces formules de *P. L. Čebyšëv*[375]), voir *H. Poincaré* [J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 25/68] ainsi que *R. Daublebsky von Sterneck* [Sitzgsb. Akad. Wien 109 IIa (1900), p. 1137/58] et *J. J. Sylvester* [Amer. J. math. 4 (1881), p. 230/47].

382) Une généralisation de cette relation a été indiquée par *E. Cesàro* [Nouv. Ann. math. (3) 4 (1885), p. 418/22]. Voir encore *A. de Polignac,* C. R. Acad. sc. Paris 49 (1859), p. 350/2.

*Or l'inversion des deux relations précédentes s'obtient par les deux équations du n° **10**. On a successivement les deux formules

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu(n) \psi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

à la première desquelles *J. P. Gram*[383]) adjoint l'expression analogue

$$\psi(x) = - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] \log_e n.*$$

La *formule de Stirling,* qui donne une valeur approchée de

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (x-1)x$$

quand x est très grand [I 4, **12**], fournit dès lors, par là même, des bornes entre lesquelles sont comprises les fonctions $T(x)$, $\theta(x)$, $\psi(x)$, ainsi que le nombre des nombres premiers compris dans un intervalle donné. *On obtient ainsi, en particulier, le postulat de *J. Bertrand*[384]) d'après lequel il y a toujours au moins *un* nombre premier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n-2$ quel que soit le nombre naturel $n > 3$ que l'on envisage.*

*Mais, même après les compléments apportés par *J. J. Sylvester*[385]), on n'a pas encore ainsi une expression *asymptotique* de $\theta(x)$ au sens indiqué au n° **39**. *P. L. Čebyšev*[386]) démontre, il est vrai, que, si le rapport $\frac{\theta(x)}{x}$ a une limite, cette limite ne peut être que l'unité, mais l'existence de la limite est laissée douteuse, et les inégalités auxquelles arrive *P. L. Čebyšëv* laissent, entre $\frac{\theta(x)}{x}$ et 1 (pour x très grand), la possibilité d'une différence de $\frac{1}{10^e}$ environ que les travaux cités de *J. J. Sylvester* permettent de réduire, mais non de faire disparaître.

Cela tient au fond[387]) à ce que, au point de vue théorique, la

383) *K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (6) 2 (1881/6), p. 238, 299 [1884].*

384) *Ce postulat de *J. Bertrand* se trouve d'abord J. Ec. polyt. (1) cah. 30 (1845), p. 129. Voir aussi *J. A. Serret*, Alg. sup. (6e éd.) 2, Paris 1910, p. 226/39; *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 89/92.*

385) *Voir encore *J. J. Sylvester,* Amer. J. math. 4 (1881), p. 230/47; Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 1/19, 87/120.*

386) *Mém. Acad. Pétersb. 7 (1854), p. 17/33; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 366/92; Œuvres 1, St Pétersb. 1899, p. 49/70.*

387) *Voir *T. Levi-Civita,* Atti Accad. Lincei, *Rendic. mat.* (5) 4 I (1895), p. 303; *G. Torelli*[369]), p. 106.*

méthode précédente ne résout pas à proprement parler la question, en ce sens qu'elle fait intervenir une nouvelle fonction arithmétique, la fonction $\mu(n)$, laquelle dépend étroitement des nombres premiers.

F. Mertens[388]) a montré en faisant usage de procédés élémentaires que les quantités

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{(p)} \log_e p, \qquad \log_e x - \sum_{(p)} \frac{\log_e p}{p},$$

où les sommes sont étendues aux nombres premiers p inférieurs ou égaux à un nombre naturel donné x, sont toutes deux inférieures à 2. Pour la seconde de ces quantités, voir n° **46** (formule 5) un résultat plus précis.*

42. Introduction de la fonction $\zeta(s)$. C'est par la méthode de *B. Riemann*[389]) que les résultats de *P. L. Čebyšëv* ont pu être complétés.

Cette méthode consiste essentiellement, d'une part, dans l'introduction de la fonction $\zeta(s)$ définie au n° **20**, de l'autre dans l'établissement et dans l'usage de la proposition D du n° **18**.

En appliquant les propriétés énoncées ou démontrées par lui [cf. n^os **22** à **24**] de la fonction $\zeta(s)$ et, en particulier, la proposition θ [n° **24**], *B. Riemann*[390]) conclut que l'on a

$$(3) \quad f(x) = \log_e \tfrac{1}{2} + Li(x) - \sum_{(k)} \left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+i\alpha_k}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-i\alpha_k}\right)\right] + \int_x^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log_e x},$$

la somme étant étendue à toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\ldots$ de la fonction $\xi(t)$ ayant leur partie réelle positive.

*C'est à cette formule que l'on donne généralement le nom de *formule de Riemann*. La quantité $Li(x)$ y est, pour x réel, définie

388) J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 46; **P. L. Čebyšëv* [J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 388; Œuvres 1, S^t Pétersbourg 1899, p. 69] obtient un résultat analogue pour la somme

$$\sum \frac{1}{p \log_e p},$$

étendue aux nombres premiers p inférieurs ou égaux à x.*

389) Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 671; Werke[151]), (2^e éd.) p. 145; trad. *L. Laugel,* p. 165. Voir encore *W. Scheibner,* Z. Math. Phys. 5 (1860), p. 233.

390) La formule donnée par *B. Riemann* [Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 678; Werke (2^e éd.), Leipzig 1892, p. 151; trad. *L. Laugel*, p. 173] contient le terme $\log_e \xi(0)$ au lieu de $\log_e \frac{1}{2}$. Cette erreur a été corrigée par *A. Genocchi* [Ann. mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 52]; cf. *H. Brocard* [Nouv. Corresp. math. 6 (1880), p. 481/2], *A. Piltz* [Diss. Iéna 1884, p. 36], *H. Weber* [dans *B. Riemann*, Werke (2^e éd), Leipzig 1892, p. 155 en note], *H. von Mangoldt* [J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 299] et *G. Torelli,* Sulla totalità[289]), p. 96/7.

par la formule (1) du n° **40**. Quant aux termes $Li(x^\varrho)$ où

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \pm i\alpha_k$$

est un nombre imaginaire, on doit[391]) les calculer en prenant

$$x^\varrho = e^{\varrho \log_e x} = e^w,$$

où $\log_e x$ a sa valeur arithmétique, puis

$$Li(e^w) = \lim_{h=+\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z} dz \pm i\pi,$$

l'intégrale étant prise suivant un chemin rectiligne parallèle à l'axe réel et le signe à choisir devant le terme $i\pi$ étant celui du coefficient de i dans $w = \varrho \log_e x$.

La fonction $Li(e^w)$ ainsi définie est univoque dans tout le plan des w, une fois celui-ci sectionné suivant la partie négative de l'axe réel (de $-\infty$ à 0).*

43. Démonstrations rigoureuses de la formule de Riemann. *Dans le mémoire même de *B. Riemann*, la formule (3) qui précède constitue une dernière assertion non démontrée, même quand on admet les propositions ε et θ du n° **24**.

Cette formule n'a d'ailleurs de sens qu'en indiquant l'ordre dans lequel on range les α_k, car la convergence de la série du second membre n'est pas absolue. On spécifie donc que les quantités α_k sont rangées par ordre de valeur absolue croissante.*

La formule (3) a été démontrée dans ces conditions par *H. von Mangoldt*[392]) qui, à cet effet, opère non plus sur $\log_e \zeta(s)$ mais sur

$$\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)},$$

où r est un nombre réel.

Ceci fait intervenir l'expression

$$\Lambda(x, r) = \sum_{h=1}^{h=[x]} \frac{\nu(h)}{h^r} - \frac{\delta}{2}\frac{\nu(x)}{x^r},$$

où $\nu(n)$ est la fonction définie au n° **10** et où δ doit être remplacé par 1 quand x est soit un nombre premier soit une puissance d'un nombre premier, et par 0 quand x contient en facteur plus d'un nombre premier.

Déjà, avant *H. von Mangoldt, A. Piltz*[393]) avait établi cette même formule de Riemann par des considérations du même ordre quoique moins complètes et moins lumineuses. Certains théorèmes de *A. Piltz*

391) *H. von Mangoldt*, J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 301.

392) Id. p. 279.

393) Diss. Iéna 1884.

ont d'ailleurs été utilisés par *E. Pfeiffer*[394]) dans ses recherches sur l'expression du nombre moyen de classes de formes quadratiques et sur la fonction sommatoire de $t(n)$ [cf. n° **56**].

*Enfin la démonstration a été reprise et simplifiée par *E. Landau*[395]) à qui sa méthode permet de revenir à l'emploi de $\log_e \zeta(s)$.*

44. Valeur de cette formule. Calcul de $F(x)$. *La formule de Riemann donne une expression exacte de $f(x)$. Mais, comme nous l'avons fait comprendre plus haut, il n'en résulte nullement qu'elle soit apte à faire connaître l'allure de cette fonction et ses valeurs asymptotiques. En fait, non seulement la série qui figure dans cette formule n'est pas *absolument* convergente, mais (comme il est évident puisque sa somme est discontinue) elle n'est pas non plus *uniformément* convergente, de sorte qu'on ne pourrait certainement pas répondre *a priori* de l'erreur commise, au dessous d'une certaine limite.

Par contre, comme le remarque *H. von Mangoldt*[396]), toutes les séries non uniformément convergentes qui entrent dans la formule de Riemann se ramènent à une seule, savoir:

$$\frac{\sin(\alpha_1 \log_e x)}{\alpha_1} + \frac{\sin(\alpha_2 \log_e x)}{\alpha_2} + \cdots + \frac{\sin(\alpha_k \log_e x)}{\alpha_k} + \cdots\cdots \tag{1}$$

et *H. von Mangoldt*[397]), dans un travail ultérieur, indique [mais en utilisant cette fois les résultats obtenus postérieurement à *B. Riemann* et en renvoyant en particulier aux raisonnements de *Ch. J. de la Vallée Poussin*] que la valeur de cette série est d'ordre de grandeur inférieur à $x^{\frac{1}{2}}$, pour x très grand.

H. von Koch[398]) a essayé d'aller plus loin: il met $f(x)$ sous la forme d'une série uniformément convergente, augmentée d'une quantité qui reste inférieure à 3, ou même (avec une autre forme de la formule) qui tend vers zéro. Étant donnée la distribution irrégulière des nombres premiers [et quoique[399]) la fonction $f(x)$ présente cette irrégularité à un degré moindre que $F(x)$] ceci ne peut être obtenu sans l'emploi de séries dont l'étude serait sans doute assez compliquée.

394) Über die Periodizität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten, Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungsanstalt, Iéna 1886.

395) *Ann. Ec. Norm. (3) 25 (1908), p. 399; résumé: Sitzgsb. Akad. Berlin 1908, p. 737.*

396) *J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 294.*

397) *J. reine angew. Math. 119 (1898), p. 65.*

398) *Math. Ann. 55 (1902), p. 441.*

399) *B. Riemann*, Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 680; Werke[151]), (2e éd.) p. 153; trad. *L. Laugel*, p. 173. Il ne semble pas qu'il ait été fait des constatations numériques à l'appui de cette assertion de *B. Riemann.*

En somme, le résultat de *B. Riemann* fait présumer, et les résultats ultérieurs (y compris ceux que nous trouverons plus loin) confirment que $Li(x)$ est la partie principale de $f(x)$. Quant aux termes dépendant des α_k, ils offrent[400]) par rapport à $\log_e x$ une sorte de périodicité (à période d'autant plus courte que α est plus grand) et produisent les irrégularités de $f(x)$.*

De $f(x)$ on déduit $F(x)$ par une nouvelle application de l'énoncé (2°) du n° **10**, savoir

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n}\,\mu(n)\, f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = f(x) - \frac{1}{2} f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \cdots\cdots$$

L'inconvénient théorique signalé au numéro précédent se rencontre encore ici, mais il n'a plus la même importance pratique. Cela résulte de ce que la méthode de *P. L. Čebyšëv* emploie les *deux* formules du n° **10** et que, dans la première d'entre elles énoncée en (1°), les différents termes sont tous du même ordre de grandeur, tandis que dans la formule (2) qui précède le premier terme $f(x)$ du second membre en fournit la partie principale. On voit même que $F(x)$ est inférieur à $f(x)$. En admettant que $f(x)$ ait pour terme principal $Li(x)$, ceci donne l'inégalité[401])

$$(3) \qquad F(x) < Li(x),$$

ce qui est conforme aux résultats empiriques obtenus par *C. F. Gauss*[402]) et *B. Goldschmidt*[403]).

Au reste, en réduisant $f(x)$ à $Li(x)$ et, par conséquent[404]), $F(x)$ à l'expression approchée[405])

$$(4) \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n}\,\mu(n)\, Li\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = Li(x) - \frac{1}{2} Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \cdots\cdots,$$

---

400) *B. Riemann*, Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 680; Werke[151]), (2e éd.) p. 153; trad. *L. Laugel*, p. 173; *A. Piltz*, Diss. Iéna[393]), p. 44.

401) *B. Riemann*, Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 679; Werke[151]), (2e éd.) p. 152; trad. *L. Laugel*, p. 173.

402) Lettre de *C. F. Gauss* à *J. F. Encke* datée de décembre 1849; Werke 2, Göttingue 1876, p. 445.

403) Voir la remarque de *E. Schering* dans *C. F. Gauss,* Werke 2, Göttingue 1876, p. 520.

404) Cf. *J. P. Gram*, K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (6) 2 (1881/6), p. 185 [1884]; résumé en français id. p. 289; *L. Oppermann*, Overs. Selsk. Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1882, p. 169; résumé en français id. p. 9. On trouve dans chacun de ces deux mémoires un résumé des travaux sur le nombre des nombres premiers.

405) D'après *W. Preobraschensky* [Izvěstija Obščestva lĭubitelej jestest-

J. P. Gram[406]) est parvenu à éliminer de cette formule la fonction $\mu(n)$. En employant le développement de

$$Li(x) - \log_e \log_e x$$

suivant les puissances de $\log_e x$, il remplace la formule (4) par

$$F(x) = 1 + \frac{\log_e x}{1 \cdot 1!\,\zeta(2)} + \frac{(\log_e x)^2}{2 \cdot 2!\,\zeta(3)} + \frac{(\log_e x)^3}{3 \cdot 3!\,\zeta(4)} + \cdots \cdot \tag{5}$$

qui d'ailleurs, malgré cet avantage théorique, est moins utile en ce qu'elle ne donne pas directement l'ordre de grandeur du résultat.

*Mais tout ceci est subordonné à la possibilité de réduire $f(x)$ à $Li(x)$ et [cf. n° **47**] l'exactitude de l'inégalité (3) elle-même est liée à l'énoncé η de *B. Riemann*, c'est-à-dire à la plus grande difficulté encore existante de la théorie[407]).*

45. Autres expressions analytiques de $F(x)$. *Divers auteurs ont proposé, pour obtenir le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée x, des méthodes fondées sur l'introduction de transcendantes distinctes de $\zeta(s)$.

Ils commencent, en général, par trouver une équation caractéristique des nombres premiers, autrement dit une fonction analytique $\Phi(z)$ qui soit nulle lorsqu'on remplace z par un nombre premier et différente de zéro dans les autres cas, ou encore qui soit différente de zéro lorsque z est un nombre premier et nulle lorsqu'on remplace z par un entier non premier. La formule classique

$$\frac{1}{2 i \pi} \int_{(C)} \Psi(z) \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \Sigma \Psi(p), \tag{1}$$

où l'intégrale est prise suivant un contour fermé (C) et la somme du second membre étendue aux racines p de l'équation $\Phi(z) = 0$ situées à l'intérieur de ce contour, ou plus généralement la formule qui donne l'intégrale d'une fonction méromorphe quelconque, le long d'un contour

---

voznanija; C. R. de la Société des amateurs des sciences naturelles] 78 (1902), p. 27 [c'est le tome 5 des travaux de la section des sciences physiques] la somme

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n} \mu(n)\, Li\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

a un point d'inflexion pour $x = e^{16,4} = 13256519$ environ.

406) *J. P. Gram*, K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (6) 2 (1881/6), p. 30.*

407) *Les comparaisons directes non seulement confirment l'inégalité (3), mais montrent la formule (4), ou son équivalente (5), comme donnant $F(x)$ d'une manière notablement plus exacte que les autres formules connues, y compris celle de *P. L. Čebyšëv*. On trouvera ces comparaisons avec graphique à l'appui, à la fin de l'ouvrage cité de *G. Torelli*[289]).*

fermé, par une somme de résidus, font alors connaître non seulement le nombre des nombres premiers inférieurs à x, mais la somme $\Sigma\Psi(p)$ étendue à ces nombres, par une intégration le long d'un contour (C) comprenant le segment $(0, x)$, ou encore le segment $(-x, +x)$ de l'axe réel.

*Le théorème de Wilson [I 15, 7] fournit à *F. Rogel*[408]) plusieurs fonctions de cette nature; *H. Laurent*[408a]) envisage particulièrement la fonction

$$\Phi(z) = \frac{e^{\frac{2i\pi}{z}\Gamma(z)} - 1}{e^{-\frac{2i\pi}{z}} - 1}$$

pour $z > 4$. Comme $\Phi(z)$ a la valeur 1 ou la valeur 0 suivant que z est égal à un entier premier ou à un entier composé, on peut, soit appliquer à cette fonction le théorème des résidus comme le fait *H. Laurent*, soit sommer directement comme le fait *F. Rogel*.

H. Laurent[409]) a obtenu plus tard un résultat analogue en partant de la fonction

$$\prod_{m=1}^{m=n-1} \prod_{m'=1}^{m'=n-1} (1 - x^{mm'})$$

qui, lorsqu'on y remplace x par une racine primitive de l'équation $x^n - 1 = 0$, prend la valeur n^{n-1} ou la valeur 0 suivant que n est premier ou composé.

Il introduit enfin[410]) la quantité

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \sin^2 \pi z \left[\frac{1}{n^2 \sin\left(\frac{\pi z}{n}\right)} - \frac{1}{n\pi(n-z)}\right]^2$$

qui n'a pour racines réelles que les nombres premiers (positifs) et n'a pas de racine négative. Il resterait à étudier les zéros imaginaires de cette expression.*

**F. Rogel*[411]) introduit une transcendante analogue en vue d'évaluer les sommes des puissances des diviseurs d'un nombre entier.*

408) *Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1895, mém. n° 22, p. 1/11.*

408a) *C. R. Acad. sc. Paris 126 (1898), p. 809.*

409) *Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 234.*

410) **H. Laurent*, Interméd. math. 5 (1898), p. 78; 15 (1908), p. 265; [Question 1263]. Le facteur n est, en cet endroit, omis au dénominateur du second terme entre crochets et les nombres premiers négatifs sont également par erreur comptés comme des zéros. Voir [Interméd. math. 16 (1909), p. 248] la démonstration rectificative de *P. Fatou*.*

411) *Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1897, mém. n° 44 (indiqué par erreur comme mém. n° 46), p. 1/25.*

*Dans le même ordre d'idées, *L. Kronecker*[412]) remarque que l'expression

$$F_m(\mathrm{x}) = \prod_{(r)} \left[\mathrm{x} - e^{\frac{2i\pi r}{m}}\right],$$

où r prend la suite des valeurs premières à m et incongrues (mod. m), prend, pour $\mathrm{x} = 1$, la valeur p si m est une puissance de nombre premier p, la valeur 1 dans le cas contraire, et il déduit de là une valeur approchée de $\Pi(x)$.

Mais la transcendante qui a été le plus souvent considérée à ce point de vue, $\zeta(s)$ mise à part, est la *série de Lambert*[413])

$$(2) \qquad \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots + \frac{x^n}{1-x^n} + \cdots\cdots$$

que l'on peut écrire,

$$(3) \qquad t(1)x + t(2)x^2 + t(3)x^3 + \cdots + t(n)x^n + \cdots\cdots$$

et qui, sous l'une quelconque de ces deux formes, est convergente pour $|x| < 1$. Le nombre $t(n)$ des diviseurs de n pourra être défini comme le coefficient de x^n dans le développement (3) de la fonction

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} t(n)x^n$$

représentée par la somme des séries (2) ou (3), et les nombres premiers pourront être caractérisés par l'équation

$$t(n) - 2 = 0.$$

T. Levi-Civita[414]) a déduit de là $\Pi(x)$ par application de la formule (1); *H. Burhenne*[415]), *M. Curtze*[416]), *E. Cesàro*[417]), *J. Braun*[418]) ont également fait servir la série de Lambert à la recherche des nombres premiers[419]).

La série de Lambert est d'ailleurs en relation simple avec $\zeta(s)$.

412) *Zahlenth.[59]) 1, p. 296.*

413) *Anlage zur Architechtonik oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis, Riga 1771, p. 507.*

414) *Atti R. Accad. Lincei *Rendic. mat.* (5) 4 I (1895), p. 303.*

415) *Archiv Math. Phys. (1) 19 (1852), p. 442.*

416) *Ann. mat. pura appl. (2) 1 (1867/8), p. 285.*

417) *Rendic. Accad. Napoli (2) 7 (1893), p. 197.*

418) *Progr. Trèves 1898/9.*

419) *Cf. *G. Torelli* [Sulla totalità[289]), chap. 12] où l'on trouve aussi l'indication d'autres travaux ayant également pour objet l'expression de $\Pi(x)$ à l'aide de transcendantes diverses.*

La comparaison de la formule (3) avec la formule (4) du n° **21** montre[420]) que $[\zeta(s)]^2$ et $\mathfrak{L}(x)$ sont liées par la relation **F**, c'est-à-dire que l'on a

$$[\zeta(s)]^2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathfrak{L}(e^{-z}) z^{s-1} dz$$

et que, d'autre part [cf. n° **18**], $\mathfrak{L}(x)$ pourrait également s'exprimer à l'aide de $[\zeta(s)]^2$ par une intégrale définie.

Indiquons encore que, d'après *H. von Koch*[421]), l'expression

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} u_n \mu(n)$$

peut être mise sous la forme d'un déterminant infini [I 4, **40**] lorsque les quantités u_n qui y figurent vérifient les inégalités

$$|u_n| < g t^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots),$$

où g est un nombre fini et où t est un nombre positif plus petit que 1. Il en résulte que l'on peut aussi représenter par un déterminant infini la somme

$$\sum_{(p)} \frac{1}{p^s}$$

étendue à tous les nombres premiers p, quand la partie réelle du nombre s qui figure en exposant est plus grande que 1.

Ces diverses méthodes, quoique supérieures à celle de *B. Riemann* au point de vue théorique, en ce sens qu'elles ne supposent pas connu $\mu(n)$ [cf. n° **41**], n'ont pas jusqu'ici donné de résultats utiles: on ne connaît pas de moyen de dégager la partie principale des expressions auxquelles elles aboutissent.*

46. Le théorème des nombres premiers et la valeur asymptotique de $\theta(x)$. Pour démontrer que l'on a

$$\lim_{x=+\infty} \frac{F(x)}{Li(x)} = 1, \tag{1}$$

proposition qu'on désigne sous le nom de *théorème des nombres premiers*[422]), les auteurs récents préfèrent avec *G. H. Halphen*[423]) passer

420) **O. Schlömilch* [Z. Math. Phys. 3 (1858), p. 248] à la suite d'une communication de *G. Zehfuss* qui signale déjà l'identité des coefficients des deux développements. *G. Torelli* [Sulla totalità[289]), chap. 12] énumère divers travaux sur les propriétés analytiques de la fonction $\mathfrak{L}(x)$.*

421) Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 57 (1900), p. 659.

422) Dénomination due à *H. von Schaper*, Diss. Göttingue 1898, p. 58. Cf. *E. Landau,* Math. Ann. 56 (1903), p. 645.

423) *C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 634.*

par l'intermédiaire de la fonction $\theta(x)$ considérée par *P. L. Čebyšev* [nº **41**] et commencer par établir que l'on a[424])

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1. \tag{2}$$

$_*$A cet effet, on applique les relations générales du nº **18** à la fonction

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m=1}^{m=+\infty} \left[\sum_{(p)} \frac{\log_e p}{p^{ms}}\right], \tag{3}$$

où la somme intérieure au crochet est étendue à tous les nombres premiers p[425]).

Le fait seul que $\zeta(s)$ a un pôle simple [et, par conséquent, la fonction $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ représentée par la formule (3), un pôle simple avec résidu égal à -1] donne déjà[426]), en vertu de E, la proposition établie par *P. L. Čebyšëv* que la limite (2) ne peut être différente de 1, si elle existe.

Pour démontrer son existence, *G. H. Halphen*[427]) applique à la fonction $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, représentée par la formule (3), le théorème D en transformant par le théorème de *A. L. Cauchy* l'intégrale définie qu'on est ainsi conduit à écrire. Mais il ne peut mener son raisonnement jusqu'au bout, en l'absence de connaissances suffisantes sur les zéros de $\zeta(s)$. La démonstration n'est pas non plus complète chez *E. Cahen*[428]). Elle nécessite, en effet, la propriété η' de $\zeta(s)$ [cf. nº **26**]. Elle a été fournie, à l'aide de cette propriété, indépendamment par *Ch. J. de la Vallée Poussin*[429]) et par *J. Hadamard*[430]).

Tous deux, pour obtenir des séries convergentes, modifient la méthode, le premier[431]) en changeant s en $s-u$, puis en $s-v$, ce qui fait à nouveau intervenir[432]) les quantités $\Delta(x, r)$ du nº **43**, et

---

424) Cf. *F. Mertens*, Sitzgsb. Akad. Wien 107 IIª (1898), p. 1429, 1431.

425) $_*$Voir *E. Landau,* Primzahlen[133]) 2, p. 886 (§ 33).*

426) $_*$*L. Kronecker* [Zahlenth.[59]) 1, p. 479] où le résultat est déjà étendu aux progressions arithmétiques; *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 53 (1895/6), mém. nº 6, p. 31; *J. Hadamard,* Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 211.*

427) $_*$C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 634/7.*

428) $_*$C. R. Acad. sc. Paris 116 (1893), p. 85; Thèse, Paris 1894, p. 42.*

429) $_*$Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 183/256.*

430) $_*$Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199.*

431) $_*$*Ch. J. de la Vallée Poussin*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 201.*

432) $_*$Id. p. 214.*

retranchant membre à membre les relations ainsi obtenues; le second en appliquant $\mathbf{D}'$.

On arrive tout d'abord, dans l'un et l'autre cas[433]), non à la relation (2), mais à la relation

$$\lim_{x=+\infty} \frac{1}{x} \sum_{p<x} \log_e p \log_e \frac{x}{p} = 1 \tag{4}$$

ou, plus généralement[434]), à la relation

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \lim_{x=+\infty} \frac{1}{x} \sum_{p<x} \log_e p \log_e^{\mu-1} \frac{x}{p} = 1, \qquad (\mu > 1). \tag{4'}$$

L'une quelconque de ces formules entraîne la formule (2) et paraît même, au premier abord, être plus précise qu'elle. Mais *E. Landau*[435]) a démontré qu'il n'en est rien et que les formules (2), (4), (4′) sont entièrement équivalentes entre elles.

Ch. J. de la Vallée Poussin[436]) obtient, en même temps que (2), la formule

$$\lim_{x=+\infty} \left[\log_e x - \sum_{p<x} \frac{\log_e p}{p-1}\right] = C, \tag{5}$$

C étant la constante d'Euler.

De l'évaluation de $\theta(x)$ on passe, comme cela résulte des travaux de *P. L. Cebyšëv*[437]), à celle de $F(x)$ et par conséquent[438]) à la démonstration du théorème des nombres premiers, c'est-à-dire de la relation (1).

E. Landau[439]) a d'ailleurs refait la démonstration en opérant, comme *B. Riemann*, sur $\log_e \zeta(s)$ lui-même [mais en lui appliquant $\mathbf{D}'$] ce qui permet d'arriver à l'égalité (1) sans passer par (2).

Enfin les théorèmes généraux [nº **19**, 4º] découverts par *E. Landau* lui permettent de suppléer $\mathbf{D}$ et suffisent à établir le théorème des nombres premiers.*

---

433) **Ch. J. de la Vallée Poussin*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 248; *J. Hadamard*, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 217.*

434) **J. Hadamard*, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 217.*

435) *Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 25. Voir encore *E. Maillet*, Ann. mat. pura appl. (3) 12 (1906), p. 148.*

436) *Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 251. L'égalité *moyenne* des deux membres de (5) est énoncée par *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. nº 6, p. 322.*

437) *Mém. présentés Acad. sc. Pétersb. 6 (1851), p. 141; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 341; Œuvres 1, Sᵗ Pétersbourg 1899, p. 29.*

438) **J. J. Sylvester*, Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 9; *H. von Mangoldt*, J. reine angew. Math. 119 (1898), p. 65 et *Ch. J. de la Vallée Poussin* cité p. 70 de ce mémoire de *H. von Mangoldt*; *E. Landau*, Math. Ann. 56 (1903), p. 645/70, en partic. p. 663.*

439) *Sitzgsb. Akad. Berlin 1908, p. 750.*

47. Précision des évaluations obtenues. $_*$On peut avoir une limite supérieure de l'erreur commise en remplaçant $F(x)$ par $Li(x)$, ou $\theta(x)$ par x. Mais l'exactitude dont on peut répondre à cet égard est étroitement liée à ce que l'on connaît sur les zéros de $\zeta(s)$.

η' entraîne, comme on vient de le voir, la relation (1). Mais, dans celle-ci, on pourrait remplacer $Li(x)$ par la quantité $\frac{x}{\log_e x}$ du n° **40**, quantité dont le rapport avec la première tend vers 1 pour $x = +\infty$.

Au contraire, *Ch. J. de la Vallée Poussin*[440]) en démontrant η'' a pu établir que

$$|F(x) - Li(x)|$$

ne peut pas être d'un ordre de grandeur supérieur à

$$e^{-\sqrt{a \log_e x}} Li(x) \sqrt{a \log_e x}, \tag{1}$$

où a désigne une constante. La limite supérieure ainsi trouvée peut être remplacée par la limite équivalente un peu plus simple

$$x e^{-\sqrt{a \log_e x}}; \tag{1'}$$

$Li(x)$ donne, dès lors, pour $F(x)$ une approximation plus grande, non seulement que la valeur approchée

$$\frac{x}{\log_e x},$$

mais que toutes les autres valeurs approchées qu'on déduit du développement (2') du n° **40** en le limitant à un nombre quelconque de termes[441]).

La constante a est d'ailleurs celle qui figure dans η'' [inégalité (2) du n° **26**] ou du moins lui est inférieure d'aussi peu que l'on veut. *E. Landau*[442]) a pu, par la suite, augmenter la valeur

$$0{,}0328\ldots\ldots$$

indiquée pour a par *Ch. J. de la Vallée Poussin.*

Les résultats ainsi obtenus permettent[443]) [ce qui répond à une

440) $_*$Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 59 (1899/1900), mém. n° 1, p. 63.*

441) $_*$*P. L. Čebyšëv* [J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 358/61; Œuvres 1, S^t^ Pétersbourg 1899, p. 61/4] faisait déjà prévoir ce fait par une proposition tout analogue à celle mentionnée au n° **40**. Il avait montré, en effet, que si $F(x)$ peut être représentée asymptotiquement avec une erreur de l'ordre de $\frac{x}{\log_e^n x}$, on a nécessairement une telle expression en prenant les $n-1$ premiers termes du développement (2') en question.*

442) $_*$Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 250.*

443) $_*$*E. Landau* Nouv. Ann. math. (4) 1 (1901), p. 281/2.*

question posée en 1872 par *E. Lionnet*[444])] d'établir qu'à partir d'un nombre suffisamment grand x, il y a moins de nombres premiers entre x et $2x$ qu'entre 0 et x.

Les formules (1) et (2) du numéro **46** ne donnent que l'égalité asymptotique des deux nombres en question.

Ces résultats sont les plus complets que l'on connaisse actuellement en toute certitude sur l'ordre de grandeur de

$$|F(x) - Li(x)|.$$

Si, au contraire, la proposition η de *B. Riemann* venait à être démontrée, il ressort des travaux de *J. Franel*[445]), *H. von Koch*[446]), *E. Holmgren*[447]) que, conformément à une indication déjà donnée par *A. Piltz*[448]), la différence

$$F(x) - Li(x)$$

serait, au plus, de l'ordre de

$$\sqrt{x} \log_e x,$$

par conséquent d'ordre inférieur à

$$x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

si petit que soit ε[449]).*

444) *Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 190.*

445) *Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 41 (1896), p. 7.*

446) *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 57 (1900), p. 669/74; Math. Ann. 55 (1902), p. 462; Acta math. 24 (1901), p. 159; voir aussi *J. P. Gram*, Oversigt Selsk. Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1902, p. 3/15.*

447) *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 59 (1902), p. 221. *F. Mertens* [Sitzgsb. Akad. Wien 106 II^a (1897), p. 761] rattache l'évaluation de la différence

$$F(x) - Li(x)$$

à celle (non démontrée) de la fonction sommatoire de $\mu(n)$ [n° **55**]. Voir à ce sujet *G. Foussereau,* Ann. Ec. Norm. (3) 9 (1892), p. 31.*

448) Diss. Iéna 1884, p. 6.

449) **E. Landau* [Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 46] a réussi à établir ces relations entre les propriétés de $\zeta(s)$ et la distribution des nombres premiers, savoir (c étant une constante)

$$|F(x) - Li(x)| < cxe^{-\sqrt{a \log_e x}},$$

une fois démontré η'', et

$$|F(x) - Li(x)| < cx^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

en supposant démontré η', et cela par des moyens élémentaires, ne faisant appel ni aux propriétés transcendantes de $\zeta(s)$, ni même à la possibilité de prolonger cette fonction dans tout le plan, ce qui est important au point de vue de l'extension de la méthode [cf. n° **49**]. Il avait précédemment [Math. Ann. 56 (1903), p. 645; Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 239/44] obtenu par ces moyens élémentaires des résultats analogues, mais moins précis. Voir aussi *E. Landau,* Primzahlen[188]) 1, p. 333, 388.*

*Par contre, cette approximation de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ est la plus précise sur laquelle on puisse compter en aucun cas[450]), ainsi qu'il ressort des travaux de *E. Phragmén*[451]) et de *Erhard Schmidt*[452]). Ce dernier, par exemple, montre qu'il existe des valeurs aussi grandes que l'on veut de x pour lesquelles on a [$f(x)$ étant toujours défini par l'égalité (3) du n° **42**]

$$f(x) - Li(x) > \frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log_e x},$$

et d'autres (également aussi grandes que l'on veut) pour lesquelles on a

$$f(x) - Li(x) < -\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log_e x},$$

de sorte que la différence qui figure au premier membre est non seulement de valeur absolue supérieure à

$$\frac{1}{29} \frac{\sqrt{x}}{\log_e x}$$

mais aussi de signe indéfiniment variable et, par conséquent, de variation plus ou moins irrégulière.

La démonstration de *Erhard Schmidt* a été simplifiée sur un point par *E. Landau*[453]).

Enfin *E. Landau*[454]) tout en simplifiant les démonstrations parvient à remplacer le coefficient $\frac{1}{29}$ par la valeur à peu près double [cf. n° **26**] $\frac{1}{\alpha_1}$, où α_1 est la plus petite des racines de l'équation $\xi(t) = 0$.

Les mêmes inégalités ont lieu lorsque à $f(x)$ on substitue la quantité

$$F(x) + \tfrac{1}{2} Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Le fait que les irrégularités dans la distribution des nombres premiers sont au moins de l'ordre de $\sqrt{x}$ est déjà présumable d'après un théorème de *P. L. Čebyšëv* que nous retrouverons au numéro suivant.

Mais l'oscillation de la différence

$$f(x) - Li(x)$$

n'est réduite à la limite précédente que si les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$. Si, au contraire η n'est pas exact et

450) *Indiqué sans démonstration par *J. L. W. V. Jensen,* Acta math. 22 (1898/9), p. 364.*

451) *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 48 (1891), p. 599; 58 (1901), p. 189/202.*

452) *Math. Ann. 57 (1903), p. 195.*

453) *Math. Ann. 61 (1905), p. 544 à l'aide de la proposition 4° du n° **19**.*

454) *Primzahlen [188]) 2, p. 711/9.*

que ν soit la limite supérieure des parties réelles des zéros en question, on aura, une infinité de fois

$$f(x) - Li(x) < -x^{\nu-\varepsilon},$$
$$F(x) + \tfrac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - Li(x) < -x^{\nu-\varepsilon}$$

et une infinité de fois

$$f(x) - Li(x) > x^{\nu-\varepsilon},$$
$$F(x) + \tfrac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - Li(x) > x^{\nu-\varepsilon},$$

si petit que soit le nombre positif ε.

Comme le remarque *Erhard Schmidt*[455], la dernière de ces inégalités est contradictoire avec l'inégalité (3) du n° **44**

$$F(x) < Li(x);$$

celle-ci est donc essentiellement subordonnée à la proposition η de *B. Riemann.* Démontrer qu'elle a lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de x serait démontrer η.*

48. Extension aux nombres premiers représentables par des formes déterminées. En opérant sur les fonctions des n^os **28**, **36**, **37** comme sur $\zeta(s)$, on étend les propriétés précédentes aux nombres premiers compris dans des formes linéaires ou quadratiques.

Les conclusions de *P.L. Čebyšëv* [n° **41**] permettent à *H. Poincaré*[456] en passant par l'intermédiaire des idéaux [cf. n° **49**] d'en obtenir d'autres analogues relatives à certaines progressions arithmétiques et qui d'ailleurs, comme le remarque *V. Stanievič*, peuvent se déduire[456] de celles obtenues (pour une progression arithmétique quelconque à premier terme premier avec la raison) par *F. Mertens*[457].

En étendant η' aux séries de Lejeune Dirichlet [n° **31**], *J. Hadamard*[458] et *Ch. J. de la Vallée Poussin*[459] en ont déduit l'analogue de

---

455) *Math. Ann. 57 (1903), p. 204.*

456) *J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 66; *V. Stanievič*, C. R. Acad. sc. Paris 114 (1892), p. 109. Voir aussi *E. Phragmén*, id. p. 337; *G. Torelli*, Sulla totalità[289], p. 138 (chap. 11).*

457) Cf. notes 388 et 462. La généralisation aux progressions arithmétiques des résultats obtenus par *P. L. Čebyšëv*, c'est-à-dire la recherche de la valeur de la limite de $\dfrac{\Pi_1(x)}{Li(x)}$ ou, ce qui revient au même, de la limite analogue figurant au premier membre de la formule (1) du n° **46**, lorsqu'on admet que cette limite existe, est due à *L. Kronecker*, Zahlenth.[59] 1, p. 479. On a désigné ici par $\Pi_1(x)$ la même fonction que dans la formule (3) du n° **48.**

458) Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 203/9, 218/9.

459) Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 360.

la formule (2) du n° **46**, savoir

$$(1) \qquad \lim_{n=+\infty} \frac{1}{n} \sum_{p<n}{}' \log_e p = \frac{1}{\varphi(M)},$$

la somme Σ' étant étendue aux seuls nombres premiers p (inférieurs à n) qui font partie d'une progression arithmétique donnée de raison M [et $\varphi(M)$ désignant, comme précédemment, l'indicateur de M].

Le nombre de nombres premiers figurant sous le signe Σ' est dès lors asymptotique à

$$\frac{1}{\varphi(M)} Li(n).$$

Si l'on désigne par exemple par

$$\Pi_1(x)$$

le nombre des nombres premiers inférieurs à x et de la forme $4n+3$, et par

$$\Pi_2(x)$$

le nombre des nombres premiers inférieurs à x et de la forme $4n+1$, on a[460],

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)} = 1.$$

Ch. J. de la Vallée Poussin[461]) démontre que l'expression

$$(2) \qquad \varphi(M) \sum_{p \leq n}{}' \left(\frac{\log_e p}{p}\right) - \log_e n,$$

où la somme Σ' est étendue aux mêmes nombres premiers que dans l'équation (1), tend vers une limite finie; ce résultat est analogue à celui qu'il avait obtenu [n° **46**, formule (5)] pour les nombres premiers quelconques, ou à celui qu'avait indiqué dans le même d'ordre d'idées *F. Mertens*[462]); il est moins précis que le premier, mais plus précis que le second.

E. Landau[463]) généralise[464]) aux progressions arithmétiques les résultats du n° **47**, en ce sens qu'il obtient pour la différence

$$(3) \qquad \Pi_1(x) - \frac{1}{\varphi(M)} Li(x),$$

460) Cf. *G. Lejeune Dirichlet*, Abh. Akad. Berlin 1837, math. p. 45; Werke 1, Berlin 1889, p. 315; *L. Kronecker*, Zahlenth.[69]) 1, p. 479.

461) Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 360. Voir *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 450.

462) Voir n° **41**. Cette conclusion de *F. Mertens* ainsi que la conclusion analogue relative à $\frac{\theta(x)}{x}$ avait d'ailleurs (d'une manière moins précise) été étendue par son auteur[388]) aux progressions arithmétiques.

463) Sitzgsb. Akad. Wien **112** II^a (1903), p. 493.

464) Id. 117 II^a (1908), p. 1095.

où $\Pi_1(x)$ est le nombre des nombres premiers qui sont à la fois inférieurs à x et compris dans la progression arithmétique donnée, une limite supérieure de la forme

$$xe^{-\sqrt[d]{\log_e x}}, \tag{4}$$

où d est une constante qu'il trouve d'abord[465]) égale à 13 puis à 8, mais que, dans un travail ultérieur[466]), il parvient à prendre supérieure à 2 d'aussi peu que l'on veut. Ceci montre que la fonction $Li(x)$ représente, avec plus d'approximation que ne le fait la fonction $\frac{x}{\log_e x}$ et les diverses fonctions qui se déduisent de la formule (2') du n° **40**, le produit de l'indicateur $\varphi(M)$ par le nombre de ceux des nombres premiers inférieurs ou égaux à x qui font partie d'une progression arithmétique quelconque donnée de raison M.

Il ressort de là d'autre part que, aux quantités de l'ordre de grandeur (4) près, les nombres premiers sont répartis également entre les $\varphi(M)$ progressions arithmétiques de raison M qu'on peut former avec des entiers premiers à M[470]).

Mais ici encore les choses changent lorsqu'on tient compte des termes de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$. Non seulement, comme précédemment, la différence (3) est au moins de cet ordre; mais, à l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ près, il n'y a plus égale distribution de nombres premiers entre les $\varphi(M)$ progressions qui viennent d'être mentionnées, de sorte qu'une expression de $\Pi_1(x)$ valable avec cette approximation ne pourrait pas être la même pour les différentes classes (mod. M) de nombres premiers avec M.

En effet [$\Pi_1(x)$ et $\Pi_2(x)$ ayant la même signification que plus haut], *P. L. Čebyšëv*[471]) énonce la proposition que voici:

Pour des valeurs de x aussi grandes que l'on veut et convenablement choisies, le rapport

$$\frac{\Pi_1(x) - \Pi_2(x)}{\dfrac{\sqrt{x}}{\log_e x}}$$

est aussi voisin de 1 que l'on veut.

Après divers essais de *A. de Polignac*[472]), de *E. Cesàro*[473]), de *A. E.*

---

465) Math. Ann. 56 (1903), p. 663.

466) Math. Ann. 66 (1909), p. 445.

470) Résultat déjà énoncé par *L. Kronecker* dans le mémoire cité note 457.

471) Lettre à *P. H. Fuss*, Bull. Acad. Pétersb. (classe phys.-math.) (2) 11 (1853), col. 208; Œuvres 1, S^t Pétersbourg 1899, p. 697.

472) C. R. Acad. sc. Paris 49 (1859), p. 386.

Pellet[473a]) et de *G. Torelli*[474]), qui n'ont qu'un caractère précaire[475]), cette proposition a été démontrée par *E. Phragmén*[476]), puis par *E. Landau*[477]) qui emploie, à cet effet, la proposition 5° du n° **19**.

G. Torelli[478]) essaye d'énoncer plusieurs autres généralisations du théorème précédent de *P. L. Čebyšëv*[471]). La partie la plus essentielle de ses assertions s'établirait, par le premier raisonnement de *E. Landau*[477]) une fois établi que la série (2) du n° **29** correspondant au module M n'a pas de zéros réels compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Mais dans le même ordre d'idées, *E. Landau*[479]) démontre en toute rigueur un résultat beaucoup plus complet.

Soit θ $[\theta < 1]$ la plus grande racine réelle des séries $Z(s, \chi)$ correspondant à un module M. Les nombres de nombres premiers compris respectivement dans les progressions arithmétiques

$$Mx + N, \quad Mx + N'$$

et inférieurs à un nombre positif x ont entre eux une différence qui est une infinité de fois de l'ordre de

$$\frac{\sqrt{x}}{\log_e x} \quad \text{si} \quad \theta \leqq \frac{1}{2},$$

une infinité de fois de l'ordre de

$$\frac{x^\theta}{\log_e x} \quad \text{si} \quad \theta > \frac{1}{2},$$

avec un coefficient dont la valeur dépend, quand $\theta \leqq \frac{1}{2}$, de la différence entre le nombre des racines des congruences

$$x^2 \equiv N \pmod{M}, \qquad x^2 \equiv N' \pmod{M}$$

et s'exprime, quand $\theta > \frac{1}{2}$, à l'aide des caractères

$$\chi(N) \quad \text{et} \quad \chi(N').^*$$

473) Rendic. Accad. Napoli (3) 2 (1896), p. 297.

473a) *C. R. Acad. sc. Paris 136 (1903), p. 1235/6.*

474) Sulla totalità [289]), p. 144.

475) Ces démonstrations supposent, comme le fait remarquer *E. Landau*[477]), qu'on ait démontré la convergence du produit infini considéré au n° **30**,

$$\prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{P}{p^s}}, \qquad \text{où} \qquad P = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

pour $\Re(s) \geqq \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas.

476) Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 48 (1891), p. 599.

477) Math. Ann. 61 (1905), p. 527 où se trouvent critiquées les démonstrations précédemment citées.

478) *Sulla totalità [289]), p. 144.*

479) Primzahlen [138]) 2, p. 704/11.

E. Maillet[480]) énonce comme condition nécessaire et suffisante pour que la progression arithmétique

$$Mx + N$$

représente une infinité de puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ de nombres premiers p que N soit un résidu de puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ (mod M). Le nombre de nombres p^{μ} compris dans la progression et inférieurs à y, est alors de l'ordre de

$$\frac{y^{\frac{1}{\mu}}}{\log_e y}.$$

Enfin *E. Landau*[481]) étend aux nombres premiers compris dans une progression arithmétique la formule de Riemann [nº **42**], énoncée d'ailleurs précédemment par *A. Piltz*[482]) et *G. Torelli*[483]).*

Pour les nombres premiers représentables par une forme quadratique proprement primitive donnée, les résultats se déduisent de même de ceux qui ont été indiqués au nº **36**. Une fois η' étendu [ainsi que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$] aux séries

$$L(s, \varkappa)$$

du nº **36**, *Ch. J. de la Vallée Poussin*[484]) en déduit les conclusions correspondantes aux formules (1), (2) et (5) du nº **46**, savoir, en désignant par Σ'' une somme étendue aux nombres premiers représentables par la forme considérée et par h le nombre des classes de même déterminant,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{h}{x} \sum_{p<x}'' \log_e p = 1,$$

à moins que la forme considérée ne soit ambiguë [I 16, **17**], auquel cas on aurait

$$\lim_{x=+\infty} \frac{h}{x} \sum_{p<x}'' \log_e p = \frac{1}{2};$$

le nombre des nombres premiers inférieurs à x et représentables par la forme donnée est, à un facteur près qui tend vers l'unité, égal à

$$\frac{1}{h} \frac{x}{\log_e x},$$

cette expression devant toutefois être également réduite de moitié si la forme est ambigüe.*

480) *Interméd. math. 12 (1905), p. 106 [Question 2916]; Ann. mat. pura appl. (3) 12 (1906), p. 148.*

481) *Ann. Ec. Norm. (3) 25 (1908), p. 426; Primzahlen[133]) 1, p. 532.*

482) *Diss. Iéna 1884.*

483) *Sulla totalità[269]), p. 145.*

484) *Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 394 pour $\Delta = b^2 - ac < 0$; id. 21^2 (1896/7), p. 341 pour $\Delta = b^2 - ac > 0$.*

*Enfin la quantité

$$h \sum_{p<x}'' \frac{\log_e p}{p} - \log_e x$$

ou, pour les formes ambiguës,

$$2h \sum_{p<x}'' \frac{\log_e p}{p} - \log_e x$$

tend vers une limite déterminée pour $x = +\infty$.

On voit que, en première approximation et avec modification pour les formes ambiguës, les nombres premiers sont également répartis entre les différentes classes de même déterminant.

Enfin, en opérant de même sur les séries [nº **36**]

$$L(s, \varkappa, \chi),$$

on obtient[485]) des résultats tout semblables pour les nombres premiers représentables à la fois par une forme quadratique et une forme linéaire. Ici encore, les nombres premiers sont répartis d'une façon sensiblement uniforme tant entre les différentes classes de même déterminant Δ [en comptant les ambiguës pour moitié] qu'entre les différentes progressions arithmétiques de même raison [supposée[486]) divisible par Δ] compatibles avec l'une de ces classes.*

49. Extension aux idéaux premiers. *L'étude de la distribution des idéaux premiers présente des difficultés qui lui sont particulières en raison de ce que les transcendantes correspondantes n'ont pas été, jusqu'ici, prolongées dans tout le plan, mais seulement [voir nº **37**] jusqu'à la droite

$$\Re(s) = 1 - \frac{1}{k} \cdot$$

La méthode de *P. L. Čebyšëv* a été appliquée aux idéaux par *H. Poincaré*[487]) qui envisage en particulier le corps de *C. F. Gauss* [I 10, **4**].

E. Landau[488]) applique cette méthode à un corps algébrique K (de

485) **Ch. J. de la Vallée Poussin*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 21² (1897), p. 368.*

486) *Id. p. 356.*

487) *J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 25; *G. Torelli* [Sulla totalità[289]); Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 100/3] généralise aux corps définis par l'équation $x^q + 1 = 0$ où q est premier et démontre des conclusions subordonnées à la convergence du produit

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

pour $\frac{1}{2} < \Re(s) \leqq 1$.*

488) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 64/188 et p. 137/52 (chap. 4).

nombres) quelconque; il démontre d'autre part[489]), pour la fonction

$$Z_K(s),$$

définie par la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \frac{1}{[N(\mathfrak{a}_\nu)]^s}$$

de la série (1) du n° **37**, la propriété η', et parvient également[489]) à lui étendre, dans une certaine mesure, les propriétés η'', η'''; puis[490]), en faisant intervenir une propriété analogue à η^{IV}, il obtient l'évaluation asymptotique du nombre $\Pi_K(x)$ des idéaux premiers dont la norme est inférieure à x, savoir

$$(1) \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{\Pi_K(x)}{Li(x)} = 1,$$

de sorte que, comme l'avait annoncé *H. Poincaré*[491]) ce nombre est sensiblement indépendant de celui des classes d'idéaux et de celui des unités distinctes du corps qui cependant s'introduisent dans les calculs par l'intermédiaire du résidu de

$$Z_K(s)$$

pour $s = 1$.

Comme la propriété η'' est ici moins complètement connue que pour les transcendantes précédentes[492]), on peut seulement affirmer que la différence

$$\frac{\Pi_K(x)}{Li(x)} - 1$$

est de l'ordre de

$$(2) \qquad e^{-\sqrt[13]{\log_e x}}$$

et non de l'ordre de

$$e^{-\sqrt{\log_e x}}.$$

Dans un travail ultérieur *E. Landau*[493]), opérant (de même) sur les séries (1) du n° **37**, étend les résultats précédents aux idéaux premiers d'une classe déterminée. A une erreur relative près, laquelle est au plus de l'ordre de (2), les idéaux premiers sont uniformément répartis dans les différentes classes.*

489) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 80/100 (chap. 2).

490) Math. Ann. 56 (1903), p. 665.

491) *J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 25.*

492) **E. Landau* [J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 98] prouve seulement que pour tout zéro $s = \sigma + it$ de $Z_K(s)$ on a

$$1 - \sigma < \frac{b}{\log_e^9 t},$$

où b est une constante.*

493) *Math. Ann. 63 (1907), p. 145.*

50. L'écart entre nombres premiers et le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. La démonstration par laquelle *Euclide*[494]) prouve l'existence d'une infinité de nombres premiers permet d'assigner, pour tout nombre donné x, une limite en deçà de laquelle on trouve nécessairement un nombre premier supérieur à x, mais cette limite

$$\Gamma(x+1)+1$$

croît beaucoup plus rapidement que x.

Les résultats de *P. L. Čebyšev*[495]) [voir n° **41**] montrent l'existence d'un nombre premier p entre x et $2x-2$ dès que x est plus grand que 6 [postulat de *J. Bertrand*]; mais de plus, pour x suffisamment grand, ils permettent de conclure à la possibilité de déterminer un nombre premier p au moins vérifiant la double inégalité

$$x < p < (1+\alpha)x, \tag{1}$$

α étant fixé arbitrairement parmi les nombres supérieurs à $\frac{1}{5}$; *J. J. Sylvester*[496]) a ensuite montré qu'il en est de même dès que l'on prend pour α un nombre supérieur à

$$0{,}1668820\ldots..$$

nombre que *R. Daublebsky von Sterneck*[497]) a réduit à

$$0{,}1427048\ldots..;$$

et que *J. J. Sylvester*[498]) avait, avant *R. Daublebsky von Sterneck*, réduit encore davantage en montrant qu'il suffit de prendre[499])

$$\alpha > 0{,}092\cdots\cdot$$

Si maintenant on part de la formule (2) du n° **46**

$$\lim_{x=+\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1,$$

celle-ci prouve[500]) que, *quelque petit que l'on fixe le nombre positif* ε, il y a *au moins un nombre premier* p vérifiant, pour des valeurs suffi-

494) *Elementa, livre 9, prop. 20; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 388/91.*

495) *Voir note 375 et aussi *J. A. Serret*, Alg. sup. (6ᵉ éd.) 2, Paris 1910, p. 226.*

496) Americ. J. math. 4 (1881), p. 230.

497) Sitzgsb. Akad. Wien 109 IIᵃ (1900), p. 1137.

498) Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 120.

499) *J. J. Sylvester* [Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 120] donne, en outre, une limite inférieure du nombre des nombres premiers compris entre les deux limites indiquées.

500) *E. Cahen*, Thèse[140]), p. 45; ce résultat avait été indiqué sans démonstration par *T. J. Stieltjes* [cf. *E. Cahen*, C. R. Acad. sc. Paris 116 (1893), p. 490].

samment grandes de x, l'inégalité

$$(1') \qquad x < p < (1 + \varepsilon)\, x.$$

E. Landau[501]) a appliqué ce résultat à la décomposition des nombres entiers en sommes de cubes.

*Plus précisément, les évaluations du n° **47** montrent qu'il y a certainement un nombre premier (pour x assez grand) entre x et

$$x\left[1 + e^{-\sqrt{a_1 \log_e x}}\right],$$

où a_1 est une constante supérieure d'aussi peu qu'on le veut à celle qui figure dans l'expression (1) ou (1′) du n° **47**. Ce résultat ne semble pas avoir été déjà énoncé.*

La proposition correspondante à celle de *P. L. Čebyšëv* [possibilité de vérifier la double inégalité (1) lorsque α désigne un nombre déterminé convenablement choisi] est étendue aux progressions arithmétiques par *F. Mertens*[502]) et aux normes des idéaux premiers par *E. Landau*[503]).

Mais l'extension de la formule (2) du n° **46** telle que nous venons de l'indiquer dans les deux numéros précédents permet[504]) l'extension à toutes les catégories de nombres premiers qui viennent d'y être considérées de l'inégalité (1′), où le nombre positif ε est aussi petit qu'on le veut. Quelque petit que soit ce nombre, on peut prendre x assez grand pour qu'il existe entre x et $(1+\varepsilon)x$:

*1°) un nombre premier représentable à la fois par une forme linéaire et par une forme quadratique

$$aX^2 + 2bXY + cY^2$$

données [pourvu que ces formes soient proprement primitives et compatibles entre elles];

2°) un nombre premier qui est la norme d'un idéal premier appartenant à un corps quelconque donné à l'avance.*

J. Pervušin[505]) a donné une formule qu'il a probablement trouvée empiriquement et qui est relative à la détermination du $n^{\text{ième}}$ nombre

501) Math. Ann. 66 (1909), p. 102. Il parvient ainsi à diminuer d'une unité le nombre de cubes nécessaires tel que l'avait trouvé *A. Wieferich*, Math. Ann. 66 (1909), p. 95.

502) Sitzgsb. Akad. Wien 106 IIª (1897), p. 285.

503) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 152.

504) Voir les travaux précédemment cités, Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199/220; Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 183/256; *E. Landau*, J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 152.

505) Bull. Soc. phys.-math. Kazan (2) 4 (1894/5) n° 3, p. 94/6 (note rédigée en français) [1894]; *A. Vassiliev* [Verh. des ersten intern. Math.-Kongr. Zurich 1897,

premier p_n. *E. Cesàro*[506]) a corrigé cette expression de p_n et montré qu'on peut la déduire de celle de $\Pi(x)$; *M. Cipolla*[507]) l'a déduite des formules de *P. L. Čebyšëv* [n° **41**] et a aussi envisagé l'expression de la différence

$$p_{n+1} - p_n$$

de deux nombres premiers consécutifs, ainsi que celle du $n^{\text{ième}}$ nombre premier figurant dans une progression arithmétique donnée[507a]).

*D'après *E. Maillet*[508]), dans les limites des tables de nombres premiers [I 15, **26**] cette différence est plus petite que

$$(2 \log_{10} p_{n+1})^2 - 2$$

pour les valeurs de p_{n+1} comprises entre 17 et 9 000 000.*

*Les résultats du n° **47** permettent[509]) de montrer que l'expression

$$p_n = n\left[\log_e n + \log_e \log_e n - 1 + \frac{\log_e \log_e n - 2}{\log_e n} - \frac{(\log_e \log_e n)^2 - 6 \log_e \log_e n + 11}{2 (\log_e n)^2}\right]$$

que *E. Cesàro* obtient en résolvant approximativement par rapport à p_n l'équation

$$n = \log_e \prod_{(p)} p_n$$

est exacte à $\frac{n\varepsilon}{\log_e^2 n}$ près, ε tendant vers zéro.*

*Enfin les évaluations obtenues dans ce qui précède apportent une présomption de plus en faveur de l'exactitude du théorème (non démontré actuellement, mais empiriquement toujours vérifié jusqu'ici) de *Chr. Goldbach*[510]) qui s'énonce ainsi:

„Tout nombre pair est décomposable en une somme de deux nombres premiers".

Si, en effet, on désigne par G_n le nombre des décompositions de n en deux nombres premiers, G_n est en moyenne [cf. n° **53**], comme l'ont calculé *P. Stäckel*[511]) et plus exactement *E. Landau*[512]), de l'ordre de

$$\frac{n^2}{\log_e^2 n}$$

---

publ. par *F. Rudio*, éd. Leipzig 1898, p. 166/7] a traduit en français une autre note ms. due à *J. Pervušin.*

506) C. R. Acad. sc. Paris 119 (1894), p. 848.

507) Rendic. Accad. Napoli (3) 8 (1902), p. 132/66.

507a) Id. p. 158/66.

508) *Ann. Fac. sc. Toulouse (2) 6 (1904), p. 342 (Note de *E. Maillet*).*

509) **E. Landau*, Rendic. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 110.*

510) Lettres de *L. Euler* et de *Chr. Goldbach* datées du 7 juin et du 30 juin 1742, publiées dans *P. H. Fuss,* Correspondance math. phys. 1, S^t Pétersbourg 1843, p. 127, 135. Pour le cas où le nombre pair est de la forme $4n + 2$, voir *L. Euler,* Acta Acad. Petrop. 1780 II, éd. 1784, p. 38 [1775]; Commentat. arith. 2, S^t Pétersbourg 1849, p. 134. Voir encore *E. Maillet*, Interméd. math. 12 (1905), p. 107 [Question 574].

et, par conséquent, grandit indéfiniment avec n. On ne peut cependant, à aucun degré, regarder cette constatation comme une démonstration du théorème de Goldbach[513]) et il ne semble point qu'on puisse en obtenir une par cette voie.*

51. Sommes étendues aux nombres premiers. Puisque [nº **40**] les nombres premiers se rencontrent au voisinage d'un nombre quelconque x (suffisamment grand) dans une proportion sensiblement exprimée par $\frac{1}{\log_e x}$, la somme

$$(1) \qquad \sum_{(p)} F(p)$$

étendue aux nombres premiers, varie approximativement comme la somme

$$(1') \qquad \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{F(n)}{\log_e n}$$

étendue à tous les nombres entiers. C'est ce dont les formules (2) et (5) du nº **46** offrent déjà l'exemple[514]).

Aussi *P. L. Čebyšëv*[515]) a-t-il pu établir que, F étant positif et $\frac{F(x)}{\log_e x}$ décroissant, si les sommes (1) et (1') sont étendues à l'infini et considérées comme des sommes de séries, les deux séries correspondantes sont convergentes ou divergentes en même temps.

C'est ainsi encore que *F. Mertens*[516]) obtient pour la somme

$$\sum_{(p)} \frac{1}{p}$$

et pour le produit

$$\prod_{(p)} \frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$

étendus à tous les nombres premiers p inférieurs ou égaux à un nombre positif quelconque donné x, les relations[517])

511) Nachr. Ges. Gött. 1896, math. p. 292.

512) Id. 1900 math. p. 177.

513) *On aurait eu un résultat tout analogue à ceux de *P. Stäckel* et de *E. Landau* (la valeur moyenne étant seulement réduite de moitié) en admettant pour n les valeurs impaires en même temps que les valeurs paires, ce qui n'empêche pas que les nombres impairs ne sont pas décomposables sous la forme indiquée, sauf ceux qui sont de la forme $p+2$, p étant premier.*

514) *Voir à cet égard des énoncés plus précis de *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 197/213.*

515) Mém. présentés Acad. Pétersb. 7 (1854), p. 29; J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 384; Œuvres 1, p. 66.

516) J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 52/3.

517) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 289; 78 (1874), p. 46.

22*

(2) $$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log_e \log_e [x] + C - g - \sigma,$$

(3) $$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = e^{C - \sigma_1} \log_e [x],$$

où C désigne la *constante d'Euler* [n° 22], g une autre constante

$$g = \sum_{h=2}^{h=+\infty} \left(\frac{1}{h} \sum_{(p)} \frac{1}{p^h} \right)$$

pendant que la somme intérieure est étendue à tous les nombres premiers (positifs) au plus égaux à x, et que σ, σ_1 sont des fonctions de x tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ [518]).

On serait conduit à la série (2) et au produit (3) en faisant $s = 1$ dans la série

(4) $$\sum_{(p)} \frac{1}{p^s}$$

ou dans le produit

(4') $$\prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

qui représente $\zeta(s)$ pour $\Re(s) > 1$. Si dans ces mêmes quantités on fait $s = 1 + it$, t étant réel et différent de zéro, *F. Mertens* [519]) démontre que, contrairement à ce qui arrive [n° 27] pour la fonction $\zeta(s)$ elle-même, les expressions

$$\sum_{(p)} \frac{1}{p^{1+it}}, \quad \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{1+it}}}$$

ainsi obtenues convergent, la seconde donnant

$$\zeta(1 + it).$$

La démonstration fait intervenir à la fois les évaluations obtenues par

518) *Voir aussi *E. Cesàro*, Atti Accad. sc. fis. mat. [Naples] (2) 6 (1894), mém. n° 11, p. 20. Des évaluations relatives à ces sommes ainsi qu'à

$$\sum_{(i)} \frac{1}{p_i^2}, \quad \sum_{(i)} p_i^m, \quad \dots$$

avaient été proposées les unes par *A. M. Legendre* [Théorie des nombres, (3e éd.) 2, Paris 1830, p. 67/8], les autres par *Ch. J. Hargreave* [London Edinb. Dublin philos. mag. 35 (1849), p. 36].*

519) Nachr. Ges. Gött. 1887, p. 265. La proposition η' n'étant pas démontrée à cette époque, *F. Mertens* n'énonce son résultat que pour les valeurs de t telles que $\zeta(1 + it) \gtrless 0$. Voir *E. Landau*, Primzahlen [13]) 1, p. 237/8.

ailleurs sur les nombres premiers, en particulier celles de *F. Mertens* lui-même[520]) et le fait[521]) que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\Re(s) = 1$. *F. Mertens* montre, en outre, que la somme

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log_e p}{p^{1+it}}$$

reste finie lorsque x augmente indéfiniment.

La série (4) peut s'exprimer[522]) sous la forme

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log_e \zeta(ns)$$

et la fonction qu'elle représente peut[523]) être prolongée analytiquement jusqu'à la droite $\Re(s) = 0$. Par contre, il est probable que le prolongement est impossible au delà de la droite en question et cette impossibilité serait certaine, comme l'énonce *J. C. Kluyver*[524]) et comme le démontre *E. Landau*[525]), si la proposition η de *B. Riemann* était démontrée.

La fonction (4) est en relation, par l'intermédiaire de F, avec les fonctions représentées par les sommes $\Phi(y)$, $y\,\Phi'(y)$ des séries entières

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{y^p}{p} + \cdots\cdots, \tag{5}$$

$$y^2 + y^3 + y^5 + \cdots + y^p + \cdots\cdots, \tag{5'}$$

où ne figurent que les nombres premiers p. Si l'on donne à y la valeur $e^{2i\pi\frac{a}{\mathrm{M}}}$, où $\frac{a}{\mathrm{M}}$ est une fraction irréductible, et si l'on considère la somme

$$\sum_{p \leq x} \frac{y^p}{p}$$

on trouve[526]) pour cette somme la valeur

$$\frac{\mu(\mathrm{M})}{\varphi(\mathrm{M})} \log_e \log_e x + \mathrm{A},$$

A tendant vers une limite déterminée pour $x = +\infty$; de sorte que, si M admet un diviseur carré autre que l'unité, la série

$$\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots + \frac{y^p}{p} + \cdots\cdots,$$

520) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 289.
521) Nachr. Ges. Gött. 1887, p. 265.
522) *W. Scheibner*, Z. Math. Phys. 5 (1860), p. 236.
523) *E. Landau*, J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 104.
524) K. Akad. Wetensk. Amsterdam, Verslagen 8 (1899/1900), p. 678.
525) Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 157.
526) *P. Fatou*, C. R. Acad. sc. Paris 138 (1904), p. 343.

où

$$y = e^{2i\pi\frac{a}{\text{M}}},$$

et par conséquent aussi les deux séries

$$\frac{1}{3}\sin 3\frac{2\pi a}{\text{M}} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{2\pi a}{\text{M}} + \cdots + \frac{1}{p}\sin p\frac{2\pi a}{\text{M}} + \cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{3}\cos 3\frac{2\pi a}{\text{M}} + \frac{1}{5}\cos 5\frac{2\pi a}{\text{M}} + \cdots + \frac{1}{p}\cos p\frac{2\pi a}{\text{M}} + \cdots\cdots,$$

sont convergentes[527]), tandis que, pour $\mu(\text{M})$ non-nul, la première seule converge. Il en résulte[528]) que les séries (5) et (5′) admettent le cercle de rayon 1 comme coupure essentielle, ce qui d'ailleurs[529]) résulte, en vertu des résultats récents obtenus sur les séries de Taylor [II 9], du seul fait que les nombres premiers sont de plus en plus rares à mesure qu'on s'éloigne dans la suite des nombres.

La démonstration de la convergence ou de la divergence de la série (5), dans les conditions qui viennent d'être indiquées, repose sur la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$$

analogue à (2), mais limitée aux nombres premiers d'une progression arithmétique donnée de raison M; valeur qui est également due à *F. Mertens*[530]) et qui est, à une constante et à une quantité infiniment petite près, le quotient de (2) par $\varphi(\text{M})$, de sorte que[531]) pour tout caractère non principal (mod. M), la série

$$\frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(5)}{5^s} + \cdots + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots\cdots \tag{6}$$

527) $_*$Les séries

$$\frac{\gamma(2)}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma(3)}{3}\sin 3\theta + \cdots + \frac{\gamma(n)}{n}\sin n\theta + \cdots\cdots,$$

$$\frac{\gamma(2)}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma(3)}{3}\cos 3\theta + \cdots + \frac{\gamma(n)}{n}\cos n\theta + \cdots\cdots,$$

où $\gamma(n)$ est la fonction arithmétique égale à 1 quand n est premier ou puissance d'un nombre premier, à zéro dans le cas contraire, sont convergentes ou divergentes en même temps que celles du texte, dont elles ne diffèrent que par des termes contenant en dénominateur les puissances (supérieures à la première) des nombres premiers. On a pour leurs sommes (θ étant encore commensurable avec π) des expressions communiquées sans démonstration par *J. C. Kluyver* à *E. Landau* et établies par ce dernier, Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 150. Voir *E. Landau*, Primzahlen [133]) 2, p. 694.*

528) $_*$*P. Fatou,* C. R. Acad. sc. Paris 138 (1904), p. 343.*

529) $_*$*E. Landau*, Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 154.*

530) J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 62.

531) Id. p. 61/2.

et le produit infini (équivalent à une série de Lejeune Dirichlet)

$$(6') \qquad \frac{1}{1-\frac{\chi(3)}{3^s}} \frac{1}{1-\frac{\chi(5)}{5^s}} \cdots \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \cdots\cdots$$

convergent lorsqu'on y fait $s = 1$, comme aussi[532]) lorsqu'on y fait $s = 1 + it$, et qu'il en est encore de même lorsqu'on multiplie le terme général par $\log_e^m p$.

Par exemple[533]) les séries

$$-\frac{\log_e^m 3}{3} + \frac{\log_e^m 5}{5} - \frac{\log_e^m 7}{7} - \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\log_e^m p}{p} + \cdots\cdots,$$

qui, pour m entier positif, représentent formellement les dérivées de (6) en y prenant $\text{M} = 4$ et $s = 1$, convergent pour toute valeur réelle de m.

F. Mertens[534]) a également considéré les sommes précédentes pour les nombres premiers représentables par une forme quadratique. Enfin *E. Landau*[535]) a étendu la plupart de ces résultats aux idéaux.

Un résultat donné par *P. L. Čebyšëv*[536]) dans sa lettre à *P. H. Fuss*, et qui revient à dire que pour $y = -i$ le coefficient de i dans la valeur de la somme de la série (5') est égal à $+\infty$, dépend de l'inégalité de distribution des nombres premiers entre les formes $4n + 1$ et $4n + 3$[537]). Sa démonstration, qui n'a pas été fournie jusqu'ici, dépendrait de recherches analogues à celles qui ont permis d'établir le théorème précédemment cité [n° 48, note 471] également contenu dans la lettre en question.

52. Nombres composés d'un nombre donné de facteurs premiers. Problème de Lehmer. *E. Landau*[538]) a déduit de la distribution des nombres premiers celle des nombres composés d'un nombre donné de facteurs premiers tous différents, ainsi que celle des nombres pour lesquels le nombre $\varpi(n)$ des facteurs premiers distincts a une valeur

---

532) *E. Landau*, Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIª (1903), p. 534.

533) *E. Landau*, Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIª (1903), p. 505; établi pour $m = 1$ par *F. Mertens*, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 55.

534) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 294/312.

535) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 100/52 (chap. 3 et 4); Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIª (1903), p. 554 et suiv.; 115 IIª (1906), p. 589; voir aussi Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 156; Math. Ann. 63 (1907), p. 176, 179.

536) Bull. Acad. Pétersb. (classe phys.-math.) (2) 11 (1853), col. 208; Œuvres 1, Sᵗ Pétersbourg 1899, p. 697.

537) Voir *E. Landau*, Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 155.

538) Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 5, 12. Voir aussi Math. Ann. 54 (1901), p. 592.

donnée et celle des nombres pour lesquels le nombre $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ [cf. nº 9] des facteurs premiers, comptés avec leurs degrés de multiplicité, a une valeur donnée.

Dans le même ordre d'idées, les résultats obtenus sur les nombres premiers des progressions arithmétiques permettent d'étudier la distribution des nombres tels que tous leurs facteurs premiers appartiennent à une progression arithmétique donnée.

D. N. Lehmer[539]) a envisagé des expressions de la forme

$$\lim_{x=+\infty} \frac{1}{x} \sum_{(n \leqq x)} 2^{\varpi(n)} \theta_{M,N}(n),$$

où M et N désignent deux nombres sans diviseur commun et où le symbole

$$\theta_{M,N}(n)$$

représente l'unité ou zéro suivant que *tous* les $\varpi(n)$ facteurs premiers distincts du nombre naturel n sont, ou non, de la forme

$$hM + N,$$

autrement dit la limite pour $x = +\infty$ du quotient

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqq x}{}' 2^{\varpi(n)},$$

où la somme est étendue aux nombres $n \leqq x$ dont tous les facteurs premiers sont de la forme

$$hM + N.$$

Il a étudié la valeur de cette limite dans le cas particulier où

$$M = 4, \quad N = 1$$

et dans celui où

$$M = 6, \quad N = 1.$$

En exprimant par un produit infini la série ayant pour somme $\sum\limits_{(n)} \frac{1}{n^s} 2^{\varpi(n)}$ étendue aux nombres $n \leqq x$ dont tous les facteurs premiers sont de la forme

$$hM + N,$$

et appliquant la proposition D, *E. Landau*[540]) a démontré que la limite en question existe[541]) et que, contrairement à ce que supposait *D. N. Lehmer*, elle n'est différente de zéro que pour $M = 4$, $M = 3$,

539) Amer. J. math. 22 (1900), p. 293/335.

540) Amer. J. math. 26 (1904), p. 209/222.

541) Id. p. 211; Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 143.

ou $M = 6$ (la valeur 3 ne devant pas être ici considérée comme distincte de 6). Pour toute autre valeur de a, la quantité $\Sigma' 2^{\varpi(n)}$ n'est que de l'ordre de

$$\frac{x}{(\log_e x)^{1-f}}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{2}{\varphi(\text{M})}.$$

Plus généralement[542]) soient λ progressions arithmétiques données qu'on suppose de même raison M et dont les premiers termes sont premiers à M. La somme

$$\sum_{(n)}{}' 2^{\varpi(n)}$$

étendue aux nombres n dont tous les facteurs premiers sont pris dans les λ progressions données est de l'ordre de

$$\frac{x}{(\log_e x)^{1-f}}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{2\lambda}{\varphi(\text{M})}$$

et le quotient de ces deux quantités tend vers une limite déterminée.

Quant au nombre des nombres en question il est de l'ordre de

$$\frac{x}{(\log_e x)^{1-f}}, \qquad \text{où} \qquad f = \frac{\lambda}{\varphi(\text{M})}$$

et le quotient de cette quantité par $\sum\limits_{(n)}{}' 2^{\varpi(n)}$ tend également vers une limite[542]).

Un problème analogue consiste à étudier la distribution des entiers en classes, selon le nombre de carrés nécessaires pour leur décomposition en une somme de carrés; les entiers ν dont les facteurs premiers congrus à 3 (mod 4) figurent tous avec des exposants pairs offrent cet intérêt qu'ils sont décomposables en deux carrés[543]).

E. Landau[544]) a exprimé à l'aide de $\zeta(s)$ et de la série de *O. Schlömilch*[281]) [nº **29**] la série $f(s)$ du type (S') [nº **17**] à laquelle il suffit d'appliquer D pour obtenir la loi de distribution des entiers ν. Toutefois l'intégration présente des circonstances spéciales en ce que $f(s)$ s'exprime à l'aide d'une racine carrée et présente $s = 1$ comme point critique. On trouve que le nombre des entiers ν inférieurs à x est de l'ordre de $\frac{x}{\sqrt{\log_e x}}$.*

542) *E. Landau*, Amer. J. math. 31 (1909), p. 86/102. Voir aussi *E. Landau*, Primzahlen[133]) 2, p. 647.

543) *L'étude des nombres décomposables en trois carrés dépend immédiatement des résultats du nº **48**, les nombres en question étant ceux qui ne sont pas de la forme

$$4^M(8N + 7).*$$

544) *Archiv Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 305/12.*

Autres valeurs asymptotiques. Valeurs moyennes et médianes.

53. Valeurs asymptotiques déduites de considérations géométriques. *Certaines valeurs asymptotiques s'obtiennent presque immédiatement par une interprétation géométrique simple.

Soit

$$\varphi(x, y, \ldots)$$

une fonction analytique positive des p variables $x, y, \ldots$ augmentant indéfiniment avec elles. Le nombre $F(n)$ des systèmes de valeurs entières (et s'il y a lieu positives) de $x, y, \ldots$ qui vérifient l'inégalité

$$(1) \qquad \varphi(x, y, \ldots) \leqq n$$

peut être considéré comme celui des points (du plan pour $p = 2$, de l'espace pour $p = 3$, ou d'un hyperespace pour $p > 3$) à coordonnées entières, situés à l'intérieur de la variété (courbe pour $p = 2$, surface pour $p = 3$, hypersurface pour $p > 3$)

$$(1') \qquad \varphi(x, y, \ldots) = n.$$

En considérant ces points comme les centres de carrés pour $p = 2$, de cubes pour $p = 3$, d'hypercubes pour $p > 3$, de côté égal à 1, lesquels sont tous compris, les uns totalement, les autres partiellement dans la région définie par l'inégalité (1), on voit que $F(n)$ est asymptotiquement égal à l'aire pour $p = 2$, au volume pour $p = 3$, à l'hypervolume pour $p > 3$, de cette région, c'est-à-dire à l'aire, au volume, ou à l'hypervolume de la surface, de l'étendue ou de l'hyperétendue comprise à l'*intérieur* de la courbe, surface ou hypersurface (1'), avec une erreur qui, pour $p = 2$ par exemple, est de l'ordre du périmètre de la courbe (1').

Ce principe a été introduit par *G. Lejeune Dirichlet*[545]) en vue des problèmes dont il a été question au nº **33**; mais on peut lui attacher le nom de *H. Minkowski*[546]) qui lui a donné sa plus grande fécondité.

On peut le généraliser en considérant non plus le nombre des solutions de l'inégalité (1') mais la somme des valeurs d'une fonction analytique donnée $\psi(x, y, \ldots)$ correspondant à ces différentes solutions, somme qui sera, sous certaines conditions supplémentaires, représentée asymptotiquement par l'intégrale multiple $\int\int \ldots \int \psi(x, y, \ldots) dx\, dy \ldots$ étendue à la région (1').

Toutefois la précision que donne la méthode précédente est par

545) *Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 311.*

546) *Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, p. 61 [1896].*

essence limitée; il est donc souvent impossible de s'en contenter dès qu'on ne veut pas s'en tenir à la première approximation.

D'autre part, la méthode précédente suppose qu'on ait choisi φ (ainsi que ψ s'il y a lieu) parmi les fonctions analytiques ou du moins définies et suffisamment régulières pour les valeurs non entières des variables et, par conséquent, bien qu'on puisse par ce moyen [cf. n° **56**] atteindre certaines fonctions arithmétiques, on n'a point ainsi un procédé applicable, d'une façon générale, à ces fonctions.*

54. Valeurs moyennes et médianes. *Beaucoup de fonctions arithmétiques n'ont d'ailleurs aucune valeur asymptotique simple. Telles sont celles qui restent finies [exemple: $\mu(n)$] ou ont, aux environs d'une valeur déterminée quelconque de n, des variations du même ordre de grandeur qu'elles-mêmes [exemples: $\varphi(n)$, $t(n)$]. On recourt pour les étudier à la fonction sommatoire $F(n)$ [n° **11**] de la fonction $f(n)$ que l'on a en vue, ou, ce qui revient au même (en divisant par n), à la *moyenne* de ses n premières valeurs, expressions qui ont, en général, un cours plus régulier que la fonction $f(n)$ elle-même.*

On appelle, en conséquence, *valeur moyenne asymptotique*[547]) d'une fonction arithmétique $f(n)$ et l'on représente par le symbole

$$\mathfrak{M} f(n)$$

toute *expression asymptotique* de la moyenne arithmétique

$$\frac{F(n)}{n} = \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$$

des n valeurs $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de la fonction envisagée.

Il peut arriver qu'on puisse prendre pour cette *valeur moyenne* une constante; c'est ce qui a lieu lorsque la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} f(h)$$

tend, pour $n = +\infty$, vers une limite déterminée. On trouvera des exemples de ce fait [n^{os} **54** et **58**].

On appelle *valeur médiane*[548]) d'une fonction arithmétique $f(n)$ *pour le nombre* n et l'on représente par le symbole

$$M f(n)$$

toute expression asymptotique de la moyenne arithmétique

$$\frac{f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+m)}{m}$$

547) En allemand *Mittlererwerth.*

548) En allemand *Mittelwerth.*

des m valeurs

$$f(n+1),\ f(n+2),\ \ldots,\ f(n+m)$$

de la fonction envisagée, pour m et n suffisamment grands, le rapport $\frac{m}{n}$ étant d'ailleurs supposé tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$ [549]).

*Le nombre auxiliaire m peut, en général, dans ces conditions, être assimilé à un infiniment petit, de sorte que, en désignant par $F(n)$ non plus la fonction sommatoire de $f(n)$ mais une expression asymptotique de cette fonction sommatoire, la valeur médiane sera, en général, si on peut la déduire de la connaissance de $F(n)$, représentée par

$$F'(n),$$

tandis que la valeur moyenne asymptotique sera

$$\frac{F(n)}{n}.$$

La connaissance d'une valeur médiane $F'(n)$ entraîne d'ailleurs celle d'une valeur moyenne asymptotique, égale, d'après ce que l'on vient de dire, à

$$\frac{1}{n}\int F'(n)\,dn, \tag{1}$$

tandis que l'inverse n'a pas nécessairement lieu; de sorte que la valeur médiane renseigne d'une façon plus précise sur la fonction envisagée que la valeur moyenne.

Lorsque la fonction $F'(x)$ varie (c'est-à-dire croît ou décroît) plus lentement que n'importe quelle puissance (à exposant positif ou négatif mais non nul) de x [550]), la valeur médiane et la valeur moyenne que l'on en déduit par l'expression (1) sont asymptotiques l'une à l'autre.*

*Les calculs relatifs aux nombres premiers offrent, au fond, un premier exemple de valeurs moyennes et médianes. La *densité moyenne* [n° **40**] des nombres premiers entre 0 et n est la valeur moyenne asymptotique d'une fonction

$$\gamma_0(n)$$

définie comme devant être égale à 1 pour n premier et à 0 pour n composé; tandis que la *densité pour une valeur donnée de x* est la

549) *C. F. Gauss*, Disq.[333]) n°s 301/4; Werke 1, p. 362/9.

550) *Plus exactement, il suffit, pour qu'il en soit ainsi, qu'on puisse déterminer une fonction ξ (positive) de x telle que:

1°) $\frac{\xi}{x}$ tende vers zéro quand x tend vers $+\infty$;

2°) $\frac{F'(y)}{F'(x)}$ tende vers 1 toutes les fois que l'on a $\xi \leqq y \leqq x$ et que x tend vers $+\infty$.*

valeur médiane de cette même fonction. La fonction $\frac{\psi(x)}{x}$ [où $\psi(x)$ est la fonction de *P. L. Čebyšëv* du n° **41**] est la valeur moyenne de la fonction $\nu(n)$ définie au n° **10**.

Les propositions E, E', E'' conduisent directement à des valeurs moyennes; la seconde, par exemple, peut, dans le cas de $c_n = n$, s'énoncer ainsi:

Si $f(n)$ a pour valeur moyenne asymptotique une constante déterminée ω, le produit

$$(s-1)\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tend vers cette même constante ω lorsque s tend vers 1.

Toutefois, comme les réciproques de E, E', E'' ne sont pas exactes[551]), ces énoncés ne peuvent donner l'expression numérique de la valeur moyenne cherchée qu'en supposant établi que cette valeur moyenne existe sous la forme indiquée; mais on ne peut en déduire la démonstration de cette existence.

Au contraire on arrive avec *G. H. Halphen*[552]) à une expression de la fonction sommatoire de $f(n)$, et par conséquent à une valeur moyenne, en appliquant la proposition D à la fonction $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$.

C'est ainsi qu'en appliquant E' à la fonction $\gamma_0(n)$ considérée dans ce n° **54**, on obtient seulement la proposition de *P. L. Čebyšëv*, c'est-à-dire la valeur de la limite (2) du n° **46** en admettant que cette limite existe, tandis que l'emploi de D ou de D' permet d'obtenir une conclusion complète et qui se suffit à elle-même.

Enfin l'insuffisance que comporte l'emploi de E, E' est également évitée par les moyens qu'a employés *E. Landau* [cf. n° **19**, 4°] et qu'il a appliqués à $\gamma_0(n)$, comme on l'a mentionné à la fin du n° **46**.*

*Le principe posé au n° **53** donne des fonctions sommatoires et, par conséquent, des valeurs moyennes. Si, en effet, on désigne par $f(n)$ le nombre des solutions en nombres entiers de l'équation (1') écrite dans ce n° **53**, la fonction $F(n)$ est la sommatoire de $f(n)$.

C'est en opérant ainsi qu'on démontre que le nombre moyen des représentations d'un nombre n par une forme quadratique binaire définie donnée

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

551) ***G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 310 en note.*

552) *C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 634.*

de déterminant $\Delta = b^2 - ac$, est égal à[315])

$$\frac{\pi}{\sqrt{-\Delta}},$$

ce qui fournit la formule (1′) du n° **33**, et qu'on voit comment doit être modifié ce nombre si n est assujetti à être premier à 2Δ [ce qui correspond à la formule (2) du n° **33**].

En particulier[553]) la valeur moyenne du nombre des représentations des nombres naturels par la forme

$$x^2 + y^2$$

est égale à π.

Ce dernier résultat est d'ailleurs compris comme cas particulier dans des résultats plus généraux donnés par *R. Lipschitz*[554]) et concernant les représentations d'un nombre par une forme positive quadratique quelconque.

E. Cesàro[555]) procède de même pour évaluer le nombre moyen des représentations de n par la forme considérée lorsque x et y sont assujettis à être *positifs*, ou le nombre moyen des représentations de n sous la forme

$$x^\alpha + y^\beta,$$

α et β étant deux entiers positifs donnés, ou encore le nombre moyen de décompositions de n en une somme de p carrés[556]).*

C. F. Gauss*[557]) a, le premier, déterminé quelques *valeurs moyennes* et quelques *valeurs médianes* de fonctions arithmétiques; *G. Lejeune Dirichlet* en a déterminé un plus grand nombre soit par l'application de E′ et d'un cas particulier de E″, non énoncé par lui, à des séries de la forme (5′) [n° **51][558]) ou, auparavant[559]) à la série de Lambert,

553) *L. Gegenbauer*, Denksch. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 68.

554) Monatsb. Akad. Berlin 1865, p. 174.

555) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 198 (note 19). *Par suite d'une erreur sur les limites de sommation (c'est-à-dire ici d'intégration), *E. Cesàro* trouve pour le nombre moyen cherché, la forme donnée étant $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ et δ étant le radical $+\sqrt{4AC - B^2}$, l'expression

$$\frac{\pi}{2\delta} - \frac{B}{\delta^2}$$

au lieu de la véritable valeur

$$\frac{\pi}{2\delta} - \frac{1}{\delta}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{\delta}.*$$

556) *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 194, 199.

557) Disq.[333]) n° 301/4; Werke 1, p. 362/9; voir en partic. p. 363.

558) *G. Lejeune Dirichlet*, J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 259; Werke 1, Berlin 1889, p. 357.

559) Ber. Akad. Berlin 1838, p. 13; Werke 1, Berlin 1889, p. 351.

soit ensuite[560]) par des méthodes directes en utilisant les transformations d'expressions sommatoires qui ont été mentionnés[561]) aux n^{os} **11** et **15**[562]).

L. Kronecker[563]) a également repris un grand nombre de ces évaluations, particulièrement celles dont il sera question aux n^{os} **56** et **58**; il donne des exemples de l'emploi de E′; mais, en raison de l'insuffisance de cette méthode il indique surtout des procédés directs purement arithmétiques [voir n° **56**].*

*Nous allons maintenant indiquer les valeurs asymptotiques, moyennes ou médianes, d'un certain nombre de fonctions arithmétiques. Conformément à la notation de *E. Landau*[564]), u étant une fonction de la variable positive x nous désignerons par $O(u)$ toute autre fonction v telle que le rapport $\frac{v}{u}$ reste fini quand x augmente indéfiniment.*

55. Valeurs moyennes relatives à la fonction $\mu(n)$. *La fonction $\mu(n)$ est très étroitement liée à la théorie des nombres premiers en raison de la formule (2) $\left[\text{pour } \frac{1}{\zeta(s)}\right]$ du n° **21**, et la connaissance de sa fonction sommatoire aurait une grande importance à ce point de vue.

F. Mertens[565]) a étudié cette fonction sommatoire

$$\sigma(n) = \mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)$$

et a déduit de l'hypothèse d'après laquelle on aurait toujours

$$|\sigma(n)| < |\sqrt{n}| \tag{1}$$

plusieurs conséquences concernant le nombre des nombres premiers, les zéros de la fonction $\zeta(s)$ et autres (voir les notes 249 et 447).

Cette hypothèse, qui n'a jusqu'ici qu'un caractère empirique mais n'a cependant encore jamais été trouvée en défaut si loin qu'on ait poussé les calculs destinés à la vérifier expérimentalement, doit être considérée comme équivalente à η en ce sens qu'elle entraînerait η

560) *G. Lejeune Dirichlet*, Abh. Akad. Berlin 1849, math. p. 69; Werke 2, Berlin 1891, p. 49.

561) *G. Lejeune Dirichlet*, Ber. Akad. Berlin 1838, p. 13/5; Werke 1, Berlin 1889, p. 351/6; cf. J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 259; Werke 1, p. 357.

562) Cf. *G. Cantor*, Math. Ann. 16 (1880), p. 587. Voir aussi *P. Bachmann*, Analyt. Zahlenth.[11]), p. 480/4.

563) Zahlenth.[59]) 1, p. 314/74 (leçons 24 à 26).

564) *Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 25. Cf. Primzahlen[138]) 2, p. 883 (§ 12).*

565) Sitzgsb. Akad. Wien 106 II^a (1897), p. 761. Voir aussi *R. Daublebsky von Sterneck*, id. 106 II^a (1897), p. 835; 110 II^a (1901), p. 1053.

[cf. n° **26**] et que, d'autre part, comme le démontre *E. Landau*[566]) en appliquant la propriété (3°) du n° **19**, on serait certain, si l'on avait démontré la proposition η, que, pour n suffisamment grand, $\sigma(n)$ reste plus petit que

$$n^{\Theta},$$

où Θ est un certain nombre plus petit que 1 $[\Theta < \frac{6}{7}]$. Il en résulterait également que la série pour $\frac{1}{\zeta(s)}$ du n° **21** convergerait pour $\Re(s) > \Theta$.

On sait seulement, quant à présent, que $\sigma(n)$ est, au plus, de l'ordre de

$$n e^{-a\sqrt{\log_e n}},$$

ainsi que *E. Landau*[567]) l'a établi en appliquant **D′** à la formule (2) du n° **21**.

Par contre, $\sigma(n)$ ne peut[568]) osciller entre des limites finies. Il en résulte que la fonction représentée par la somme de la série

$$\mu(1)z + \mu(2)z^2 + \cdots + \mu(n)z^n + \cdots\cdot\cdot$$

a $z = 1$ pour point singulier.*

L'expression pour $\frac{1}{\zeta(s)}$ du n° **21** conduit, en y faisant $s = 1$, à présumer que l'on a

$$\sum_{h=1}^{h=+\infty} \frac{\mu(h)}{h} = 0. \tag{2}$$

C'est ce qu'énonce déjà[569]) *L. Euler*[570]). La démonstration de ce fait est due à *H. von Mangoldt*[571]) et a été ensuite donnée à nouveau avec évaluation du reste par *Ch. J. de la Vallée Poussin*[572]) et par *E. Landau*[573]).

---

566) *Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 264.*

567) *Id. p. 250. Premières évaluations moins avantageuses: Math. Ann. 54 (1901), p. 585; Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIᵃ (1903), p. 548.*

568) **P. Fatou*, Acta math. 30 (1906), p. 392.*

569) Introd.[1]) 1, p. 229; trad. *J. B. Labey* 1, p. 213.

570) *Un théorème peu différent, à savoir que l'on a

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} - \cdots\cdot\cdot = 0,$$

a peut-être été énoncé par *L. Euler* dès 1737 [Comm. Acad. Petrop. 9 (1737), éd. 1744, p. 186] (Note de *G. Eneström*).*

571) Sitzgsb. Akad. Berlin 1897, p. 835.

572) Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 59 (1899/1900), mém. n° 1, p. 67.

573) Diss. Berlin 1899; Math. Ann. 54 (1901), p. 570; Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIᵃ (1903), p. 537. Dans ce dernier mémoire, *E. Landau* étend ses recherches à un corps algébrique quelconque de nombres. Voir encore Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 81/160; *E. Landau*, Primzahlen[138]) 2, p. 567/609.

Ce dernier a de plus établi plusieurs résultats asymptotiques concernant non seulement le reste de (2) mais aussi les sommes

$$(3) \qquad \sum_{(h \leq x)} \frac{\mu(h) \log_e h}{h},$$

$$(3') \qquad \sum_{(h \leq x)} \frac{\mu(h) \log_e^m h}{h^s}$$

étendues à tous les nombres naturels plus grands que 1 et inférieurs ou égaux à un nombre quelconque donné x; dans la dernière de ces sommes, s désigne un nombre complexe dont la partie réelle est égale à 1 et m désigne un nombre réel quelconque.

De l'évaluation de (3) il ressort que l'on a[574])

$$\sum_{h=1}^{h=+\infty} \frac{\mu(h) \log_e h}{h} = -1,$$

comme la dérivation de l'expression de $\frac{1}{\zeta(s)}$ du n° **21** le faisait également prévoir.

E. Landau[575]) a aussi considéré le point de vue auquel s'était placé *F. Mertens* en partant de l'inégalité (1), c'est-à-dire qu'il a recherché jusqu'à quel point les évaluations asymptotiques (supposées démontrées par une autre voie) relatives à $\sigma(n)$ permettraient de remonter à la distribution des nombres premiers.

En changeant dans les résultats précédents h en $hk+l$, sous le signe Σ, *E. Landau* étend ces résultats aux progressions arithmétiques.

Certaines recherches de *J. C. Kluyver*[576]) complétées par *E. Landau*[577]) permettent d'étendre aux progressions arithmétiques la convergence de la série (2), c'est-à-dire d'affirmer que la série

$$\frac{\mu(l)}{l} + \frac{\mu(k+l)}{k+l} + \frac{\mu(2k+l)}{2k+l} + \cdots + \frac{\mu(hk+l)}{hk+l} + \cdots\cdot$$

est convergente quels que soient les nombres naturels k et l que l'on envisage, et d'obtenir la somme de cette série sous forme finie.

Il démontre à cette occasion, comme l'avait déjà énoncé *J. C. Kluyver*, que si l'on range ceux des entiers positifs $hk+l$ qui ne contiennent en facteur aucun carré en deux classes, dans l'une desquelles rentrent tous ceux de ces entiers contenant un nombre pair de facteurs premiers tandis que dans l'autre rentrent tous ceux de

574) C. R. Acad. sc. Paris 129 (1899), p. 812.

575) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 182 (chap. 7). Voir aussi Sitzgsb. Akad. Wien 115 IIᵃ (1906), p. 589; 117 IIᵃ (1908), p. 1089.

576) K. Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen natuurk. Afdeeling 12 (1903/4), p. 432.

577) Id. 13 (1904/5), p. 71. Voir *E. Landau*, Primzahlen[133]) 2, p. 631/7, 687/96.

ces entiers contenant un nombre impair de facteurs premiers, le rapport du nombre de ceux des entiers de la première classe qui sont inférieurs à un nombre donné x au nombre des entiers de la seconde classe qui sont inférieurs à ce même nombre x tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Quant au nombre total des entiers inférieurs à x et dépourvus de facteurs carrés, nombre qui peut s'écrire

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n),$$

il est[578] asymptotiquement égal à $\frac{6}{\pi^2} x$, avec une erreur d'ordre inférieur à $\sqrt{x}$, c'est-à-dire dont le rapport à $\sqrt{x}$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, en sorte que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{Q(x) - \frac{6x}{\pi^2}}{\sqrt{x}} = 0.$$

Si l'on se restreint aux entiers compris dans une progression arithmétique donnée de raison M, ce nombre[579] se réduit à

$$\frac{6}{\pi^2} x \frac{1}{\mathrm{M} \prod' \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} + O(\sqrt{x}),$$

où le produit $\prod'$ est étendu aux facteurs premiers p qui figurent dans M, en supposant, bien entendu, le premier terme l de la progression arithmétique tel que le p. g. c. d. de M et de l ne contienne aucun facteur carré (sans quoi le nombre en question serait nul).

56. Le nombre et la somme des diviseurs de n. Il y a lieu de signaler d'une manière particulière l'évaluation asymptotique du nombre $t(n)$ des diviseurs de n. *H. Poincaré*[580] a, en effet, montré qu'on peut en déduire la proposition de *P. L. Čebyšëv* [valeur de $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\theta(x)}{x}$ quand on suppose l'existence de cette limite démontrée]; et, d'autre part, sous sa forme la plus précise [formule (1′) ci-dessous] elle a été employée [cf. n° 27] à limiter supérieurement la valeur absolue de $\zeta(s)$ pour $0 \leq \Re(s) \leq 1$.

Le nombre $t(n)$ des diviseurs de n étant aussi celui des décompositions de n en deux facteurs entiers x, y, le principe du n° **51**

578) *L. Gegenbauer*, Denksch. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 47/8; *A. Berger*, Nova Acta Soc. Upsal. (3) 14 (1891), mém. n° 2, p. 110 [1886]; tirage à part en 1887; *E. Landau*, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 241. Voir aussi Sitzgsb. Akad. Wiss. Wien 112 IIᵃ (1903), p. 562, note 3; 115 IIᵃ (1906), p. 589.

579) *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 80.

580) *J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 37.*

fournit la fonction sommatoire $T(n)$ de $t(n)$, avec une erreur de l'ordre de n, par l'aire du triangle mixtiligne compris entre les droites $x = 1$, $y = 1$ et l'hyperbole

$$xy = n.$$

La fonction sommatoire $S(n)$ de la quantité $\int(n)$ [somme des diviseurs de n] est, de même, approximativement égale à l'intégrale double $\iint x\,dx\,dy$ étendue à la même aire laquelle est de l'ordre de n^2; mais l'erreur commise étant également de l'ordre de n^2, le coefficient de n^2 ne peut être obtenu par cette voie.

Les valeurs moyennes de $t(n)$, $\int(n)$ ont été déterminées par *G. Lejeune Dirichlet* qui, dans les travaux cités notes 557, 558 et 559, obtient les relations[581] [où C désigne toujours la constante d'Euler (n° 22)]:

$$T(n) = \sum_{h=1}^{h=n} t(h) = n \log_e n + (2C - 1)n + O(\sqrt{n}), \tag{1}$$

$$S(n) = \sum_{h=1}^{h=n} \int(h) = \frac{\pi^2 n^2}{12} + O(n \log_e n) \tag{2}$$

les *valeurs moyennes asymptotiques* de $\int(n)$ et de $t(n)$ étant les valeurs asymptotiques des expressions $\frac{1}{n} S(n)$, $\frac{1}{n} T(n)$.

Dans ses cours sur la théorie des nombres professés à l'Université de Berlin, *L. Kronecker*[582] confirme l'exactitude des résultats obtenus par *G. Lejeune Dirichlet*, en les obtenant à nouveau par un autre procédé[583] consistant essentiellement à distinguer ceux des diviseurs du nombre n qui sont $< \sqrt{n}$ de ceux qui sont $> \sqrt{n}$. *L. Kronecker*[584] donne aussi les *valeurs médianes* de $\int(n)$ et de $t(n)$ qui sont égales à

$$Mt(n) = \log_e n + 2C, \tag{3}$$

$$M\int(n) = \frac{\pi^2 n}{6}, \tag{4}$$

avec une erreur de l'ordre de $n^{-\frac{1}{4}}$ pour l'expression (3), de l'ordre de $n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\log_e n}$ pour l'expression (4), le nombre entier auxiliaire m [n° **54**] étant[584] supposé de l'ordre de $n^{\frac{3}{4}}$ dans la formule (3), de l'ordre de $n^{\frac{3}{4}}\sqrt{\log_e n}$ dans la formule (4).

581) *L. Gegenbauer* [Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 24] a donné, parmi une foule d'autres, des formules pour le nombre des diviseurs de k qui sont $\leqq |\sqrt{n}|$. Voir aussi *Ch. Hermite*, J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 324/8.

582) Zahlenth.[59] 1, p. 345, 353.

583) Id. p. 338; *L. Kronecker* lui-même attribue à *C. F. Gauss* la première idée de cette méthode.

584) Id. p. 346, 355.

La formule (3) peut s'écrire[585]), e désignant la base des logarithmes naturels,

$$Mt(n) = \frac{1}{ne} T[ne].$$

La méthode montre en outre[586]) que le nombre des diviseurs de n qui sont $\leqq \sqrt{n}$, évidemment égal à celui des diviseurs $\geqq \sqrt{n}$, a pour valeur moyenne $\frac{1}{2}\mathfrak{M}t(n)$ et pour valeur médiane $\frac{1}{2}Mt(n)$, la valeur moyenne devant d'ailleurs[587]) être augmentée de $\frac{1}{2}$ si l'on met en dehors les valeurs carrées de n, pendant que la somme $S_{d_1}(n)$ des diviseurs inférieurs ou égaux[588]) à $\sqrt{n}$ a pour valeur médiane[588]) $\sqrt{n}$, et que la somme $S_{d_2}(n)$ des diviseurs supérieurs à $\sqrt{n}$ a pour valeur médiane

$$\tfrac{1}{6} n\pi^2 - \sqrt{n},$$

le nombre entier m étant supposé de l'ordre de $n^{\frac{3}{4}}$ ou de $n^{\frac{3}{4}}\sqrt{\log_e n}$ et l'erreur commise étant de l'ordre de $n^{\frac{1}{4}}$ ou de $n^{\frac{1}{4}}\sqrt{\log_e n}$.

Mais *G. Voronoï*[589]) a montré, comme l'avait déjà affirmé *G. Lejeune Dirichlet*[590]), que l'erreur commise dans l'évaluation de $T(n)$ était plus petite que ne l'indique la formule (1) et que l'on a

$$(1') \qquad T(n) = n \log_e n + (2C - 1)n + O(\sqrt[3]{n} \log_e n).$$

Il en résulte[591]) que la fonction

$$\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)$$

est développable en une série de Lejeune Dirichlet qui converge pour $\Re(s) > \frac{1}{3}$ tandis que la formule (1) établit seulement cette convergence[592]) pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

La moyenne arithmétique des nombres de ceux des diviseurs de

---

585) *A. Berger*, Nova Acta Soc. Upsal. (3) 11 (1883), mém. n° 1, p. 21 [1880].

586) *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 346; *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 24.

587) *L. Gegenbauer*, id. p. 24; voir aussi *Ch. Hermite*, J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 324/8.

588) *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 355. Toutefois, lorsque n est carré parfait, *L. Kronecker* convient de compter le diviseur $\sqrt{n}$ pour moitié avec les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$ et pour moitié avec les diviseurs supérieurs.

589) *J. reine angew. Math. 126 (1903), p. 241. Voir aussi *E. Pfeiffer*, Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungsanstalt[394]), Iéna 1886, qui donne (p. 18) pour le reste l'expression

$$O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$$

ε étant un nombre positif quelconque.*

590) Lettre à *L. Kronecker*, Nachr. Ges. Gött. 1885, p. 379; Werke 2, Berlin 1891, p. 407.

591) *E. Landau*, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 234.

592) **L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 349/51. Voir aussi *J. Franel*, Interméd. math. 3 (1896), p. 103 [Question 830].*

$1, 2, 3, \ldots, n$ qui sont $\leqq [\sqrt{n}]$ est asymptotiquement

$$\tfrac{1}{2} \log_e n + C,$$

C désignant toujours la constante d'Euler.

La moyenne arithmétique des nombres de ceux des diviseurs de $1, 2, 3, \ldots, n$ qui sont $> [\sqrt{n}]$ est asymptotiquement[593]

$$\tfrac{1}{2} \log_e n + C - 1.$$

A côté de valeurs moyennes, *E. Landau*[594] a étudié les valeurs extrêmes [cf. nº **59**] de $t(x)$. Cette quantité, qui est une infinité de fois égale à 2, prend une infinité de fois des valeurs de la forme

$$2^{1-\delta \frac{\log_e x}{\log_e \log_e x}},$$

mais cesse finalement d'être supérieure à

$$2^{1+\delta \frac{\log_e x}{\log_e \log_e x}},$$

si petit que soit le nombre positif δ.

57. Conséquences relatives aux valeurs de $x - [x]$. Si l'on pose

$$\varrho(x) = x - [x]$$

la formule (1) ou (1′), comparée avec la formule

$$T(n) = \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{n}{h}\right]$$

du nº **13** et avec l'évaluation connue de la somme des n premiers termes de la série harmonique, fait évidemment connaître la somme $\sum_{h=1}^{h=n} \varrho\left(\frac{n}{h}\right)$ et montre qu'on a asymptotiquement[595]

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \varrho\left(\frac{n}{h}\right) = 1 - C < \frac{1}{2}\,.$$

Si donc A est le nombre de ceux des n premiers entiers naturels $1, 2, \ldots, n$ pour lesquels $\varrho\left(\frac{n}{h}\right)$ est plus petit que $\frac{1}{2}$, et si A_1 est le nombre de ceux de ces n entiers $1, 2, \ldots, n$ pour lesquels $\varrho\left(\frac{n}{h}\right)$ est plus grand que $\frac{1}{2}$, on a

$$A > A_1.$$

---

593) *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 25.

594) Primzahlen[138]) 1, p. 219/22.

595) *G. Lejeune Dirichlet,* Ber. Akad. Berlin 1851, p. 20; Werke 2, Berlin 1891, p. 97.

En supposant $p \leqq n$ et en étudiant de plus près le nombre des entiers consécutifs $1, 2, \ldots, p$ tels que $\varrho\binom{n}{h}$ soit inférieur à un nombre quelconque donné α vérifiant l'inégalité

$$0 < \alpha < 1,$$

G. Lejeune Dirichlet[596]) a d'ailleurs trouvé que l'on a

$$A = n(2 - \log_e 4) + O(\sqrt{n}),$$
$$A_1 = n(\log_e 4 - 1) + O(\sqrt{n}).$$

J. Franel[597]) annonce sans démonstration que l'expression $\sum_{h=1}^{h=n} [hx]$, où x désigne un nombre positif irrationnel déterminé quelconque, est, à l'ordre logarithmique près, donné par

$$\frac{n(n+1)}{2}x - \frac{n}{2}.$$

En posant

$$\varepsilon(x) = x - [x] - \tfrac{1}{2} = \varrho(x) - \tfrac{1}{2},$$

E. Landau[598]) indique des conditions suffisantes pour que la série

$$\frac{\varepsilon(x)}{1} + \frac{\varepsilon(2x)}{2} + \frac{\varepsilon(3x)}{3} + \cdots + \frac{\varepsilon(rx)}{r} + \cdots\cdots$$

converge pour tout nombre *irrationnel* x; il montre que cette série est au contraire divergente pour tout nombre *rationnel* x. *M. Lerch*[599]) prouve cependant que pour certains nombres transcendants l'hypothèse de *J. Franel* n'est pas vérifiée.

58. Autres fonctions des diviseurs de n. Plus généralement, *E. Cesàro*[600]), *L. Gegenbauer*[601]) et, par la méthode indiquée au n° **56**, *L. Kronecker*[602]) étudient la somme des valeurs que prend une fonction (algébrique ou analytique) $f(n)$ pour les différents diviseurs du nombre n,

596) Ber. Akad. Berlin 1851, p. 20; Werke 2, Berlin 1891, p. 97. Voir encore *V. A. Lebesgue*, J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 377; *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 II (1885), p. 108.

597) Interméd. math. 5 (1898), p. 77 [Question 1260]; 6 (1899), p. 149/50 [Question 1547].

598) Interméd. math. 8 (1901), p. 140/3 [Question 1151].

599) *Interméd. math. 11 (1904), p. 144 [Question 1547].*

600) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 9/350, en partic. les notes 12 et 13, p. 113 et suiv. Voir aussi id. p. 228.

601) Voir, en particulier, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 1, 37; 49 II (1885), p. 165; 50 I (1885), p. 153.

602) Zahlenth.[59]) 1, p. 326/74.

c'est-a-dire l'intégrale numérique [nº **11**] de $f(n)$. Parmi les formules qu'ils obtiennent citons seulement les suivantes:

La somme des $r^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs d'un nombre naturel n a pour valeur moyenne

$$n^r \zeta(r+1);$$

en particulier la somme des diviseurs de n a pour valeur moyenne[603])

$$n \frac{\pi^6}{6}.$$

De même la somme des inverses des $r^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n a pour valeur moyenne

$$\zeta(r+1);$$

en particulier la somme des inverses des diviseurs de n a pour valeur moyenne $\frac{\pi^2}{6}$, et aussi pour valeur médiane[604])

$$\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\log_e n}{n^h}\right),$$

h étant un nombre fixe quelconque pris entre 0 et 1 et le nombre m des valeurs envisagées pour former la valeur médiane [nº **52**] étant pris de l'ordre de n^h. La valeur médiane de la somme des logarithmes de tous les diviseurs de n est[605])

$$\tfrac{1}{2}(\log_e n)^2 + C \log_e n$$

et sa valeur moyenne est

$$\tfrac{1}{2}(\log_e n)^2 + (C-1)\log_e n.$$

La valeur moyenne de la somme des valeurs réciproques des diviseurs quadratiques d'un nombre naturel quelconque est $\frac{\pi^4}{90}$ [606]).

La valeur moyenne de la somme des diviseurs réciproques impairs d'un nombre naturel quelconque[607]) est $\frac{\pi^2}{8}$ [608]).

La valeur moyenne de la somme des cubes des valeurs réciproques des diviseurs impairs d'un nombre naturel quelconque est $\frac{\pi^4}{96}$ [609]).

---

603) *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. nº 6, note 12, p. 119.

604) Id. p. 117. Pour le cas où $m = 1$, voir aussi *A. Berger*, Nova Acta Soc. Upsal. (3) 11 (1883), mém. nº 1, p. 25 [1880] et *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 362, 364. *L. Kronecker* détermine même séparément la valeur médiane cherchée pour les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$ et pour les diviseurs supérieurs à $\sqrt{n}$. Il opère de même pour les problèmes analogues cités notes 582 et 583.

605) *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 368/9.

606) *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 55.

607) *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. nº 6, p. 139.

608) *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 64.

609) Id. p. 65.

La valeur moyenne de la somme des cinquièmes puissances des valeurs réciproques des diviseurs impairs d'un nombre naturel quelconque est $\frac{\pi^6}{960}$[610]).

La valeur moyenne de l'excès du nombre de ceux des diviseurs de n qui sont $\equiv 1$ (mod. 4) sur le nombre de ceux de ces diviseurs qui sont $\equiv -1$ (mod. 4) est $\frac{\pi}{4}$[611]).

A. Berger[612]) donne pour la fonction $\varepsilon(n)$ définie par l'expression

$$\varepsilon(n) = \sum_{(d)} (-1)^{\frac{1}{2}(d-1)},$$

où n est impair et où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n, la formule

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{m=+\infty} \frac{\varepsilon(1) + \varepsilon(3) + \cdots + \varepsilon(2m-1)}{2m-1}.$$

F. Mertens[613]) étudie, après *G. Lejeune Dirichlet*, la fonction $p(n)$ qui a été définie au n° **9**; c'est l'intégrale numérique [n° **11**] de $\mu^2(n)$. Il montre que la somme

$$P(n) = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$$

des valeurs pour $x = 1, 2, \ldots, n$ de la fonction $p(x)$ peut être représentée[614]) d'une façon approchée par l'expression

$$P(n) = \frac{6n}{\pi^2}\left(\log_e n + 2C - 1 + \frac{12}{\pi^2} f\right) + O(\sqrt{n} \log_e n),$$

où l'on a écrit pour abréger f au lieu de

$$f = \sum_{h=2}^{h=+\infty} \frac{1}{h^2} \log_e h$$

et où C désigne toujours la *constante* d'*Euler* [n° 22]. On en déduit la *valeur médiane*

$$Mp(n) = \frac{6}{\pi^2}\left(\log_e n + 2C + \frac{12}{\pi^2} f\right).$$

La valeur moyenne du nombre des décompositions des entiers $1, 2, \ldots, x-1, x$ en trois ou plus de trois facteurs a été déterminée par *A. Piltz*[615]), puis par *A. Berger*[616]), *J. Franel*[617]), *E. Landau*[618]).

610) *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 65.

611) *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, note 13, p. 135; *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 374; *L. Gegenbauer*, Denkschr. Akad. Wien (math.) 49 I (1885), p. 68.

612) Acta math. 9 (1886/7), p. 301.

613) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 291.

614) *G. Lejeune Dirichlet*, Abh. Akad. Berlin 1849, math. p. 81 2; Werke 2, p. 64/5; *F. Mertens*, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 294.

615) Diss. Iéna 1884.

59. L'indicateur $\varphi(n)$ et les diviseurs communs à deux nombres. *G. Lejeune Dirichlet*[619]) a montré que l'on peut exprimer la somme

$$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)$$

des indicateurs des n premiers nombres naturels, par la formule

$$\Phi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n^\delta),$$

où δ est un nombre compris entre 1 et 2.

F. Mertens[620]) a donné[621]) la formule plus approchée[622])

$$\Phi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log_e n),$$

qu'il a obtenue en rattachant $\Phi(n)$ à la fonction $\varrho(x)$ du n° **57** par la relation[623])

$$\Phi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} - n\sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{\mu(k)}{k}\, \varrho\left(\frac{n}{k}\right) + O(n).$$

On en déduit immédiatement la valeur moyenne asymptotique $\mathfrak{M}\varphi(n)$ de l'indicateur $\varphi(n)$ qui est l'expression asymptotique de $\frac{1}{n}\,\Phi(n)$, et la *valeur médiane* $M\varphi(n)$ de l'indicateur $\varphi(n)$ qui est[624])

$$M\varphi(n) = \frac{6n}{\pi^2} + O\left(\log_e^2 n\right)$$

en prenant, avec *L. Kronecker*[625]), pour le nombre (entier auxiliaire) m [cf. n° **54**] de valeurs de la fonction $\varphi(n)$, une valeur de l'ordre de $\frac{n}{\log_e n}$.

Il en résulte que le nombre asymptotique des fractions irré-

616) Nova Acta Soc. Upsal. (3) 14 (1891), mém. n° 2, p. 63 [1886]; tirage à part en 1887.

617) Math. Ann. 51 (1899), p. 369; 52 (1899), p. 538.

618) Math. Ann. 54 (1901), p. 592.

619) Abh. Akad. Berlin 1849, math. p. 77/81; Werke 2, Berlin 1891, p. 58/64.

620) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 291.

621) *F. Mertens* a aussi traité le cas où n est un nombre complexe $a + ib$. *E. Landau* [J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 153/61] étend ce résultat, ainsi que la plupart de ceux du présent numéro, à la fonction analogue à $\varphi(n)$ que considère la théorie des idéaux.

622) La formule d'après laquelle $\frac{1}{n^2}\Phi(n)$ a pour valeur approchée $\frac{3}{\pi^2}$ se trouve aussi dans *J. Perott,* Bull. sc. math. (2) 5 (1881), p. 37, 183.

623) *F. Mertens,* J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 290.

624) L'affirmation de *E. Cesàro* que $\varphi(n)$ est asymptotique à $\frac{6n}{\pi^2}$ a donné lieu à une discussion entre *E. Cesàro* et *J. L. W. V. Jensen,* C. R. Acad. sc. Paris 106 (1888), p. 1651; id. 107 (1888), p. 81, 426; Ann. mat. pura appl. (2) 16 (1888/9), p. 178.

625) Zahlenth.[59]) 1, p. 331.

ductibles $\frac{x}{y}$ dont le numérateur et le dénominateur sont $\leqq n$ est égal à $\frac{3n^2}{\pi^2}$.

Il en résulte[626]) aussi que la probabilité [I 20, **1**] pour que deux nombres naturels pris au hasard parmi les entiers consécutifs $1, 2, \ldots, n$ soient premiers entre eux, est $\frac{6}{\pi^2}$.

L. Kronecker[627]) détermine également la valeur médiane de $\frac{\varphi(n)}{n}$; elle est égale à $\frac{6}{\pi^2}$ avec une erreur $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si l'on prend pour le nombre entier auxiliaire m de valeurs de $\frac{\varphi(n)}{n}$ une valeur de l'ordre de

$$\sqrt{n}\log_e n.$$

La comparaison des évaluations obtenues par *P. Stäckel*[628]) et par lui-même [cf. n° **50**], relativement au théorème de Goldbach, conduit *E. Landau* à obtenir la valeur moyenne de $\frac{1}{\varphi(n)}$ et par conséquent l'expression asymptotique de la somme[629])

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \cdots + \frac{1}{\varphi(x)}$$

quel que soit le nombre naturel x que l'on envisage.

E. Cesàro[630]) énonce sans démonstration que le nombre moyen, c'est-à-dire la valeur moyenne du nombre des diviseurs communs à deux nombres naturels n et n', est égal à

$$\mathfrak{M}t(n;\, n') = \frac{\pi^2}{6},$$

et que la valeur moyenne de la somme de ces diviseurs communs est égale à

$$\mathfrak{M}\int(n;\, n') = \log_e \sqrt{n\,n'} + 2\,C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}.$$

Enfin, à côté des valeurs moyennes, *E. Landau* a remarqué qu'il y avait lieu d'étudier les variations extrêmes de $\frac{\varphi(n)}{n}$ [comme il l'avait fait pour $t(x)$ et comme cela importerait également pour d'autres fonctions arithmétiques]. Il limite inférieurement ces variations extrêmes

626) *J. J. Sylvester,* C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 409. *E. Cesàro* [Johns Hopkins Univ. Circul. 2 (1882/3), p. 85 col. 1 et 2] revendique la priorité de ce théorème et renvoie à Mathesis (1) 1 (1881), p. 184.

627) Zahlenth.[59]) 1, p. 334.

628) Nachr. Ges. Gött. 1896, math. p. 292.

629) Nachr. Ges. Gött. 1900, math. p. 177.

630) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 230.

d'une manière précise en démontrant[631]) que, quelque petit que soit le nombre positif ε, on a toujours, pour n suffisamment grand,

$$\varphi(n) > (1-\varepsilon)\,\frac{n}{\log_e \log_e n}\,e^{-C}$$

tandis qu'il existe des valeurs de n aussi grandes qu'on le veut pour lesquelles

$$\varphi(n) < (1+\varepsilon)\,\frac{n}{\log_e \log_e n}\,e^{-C}.$$

En un mot, il a montré que l'on a[632])

$$\underline{\lim}_{n=+\infty} \frac{\varphi(n)\log_e \log_e n}{n} = e^{-C};$$

$\varphi(n)$ est donc compris entre le minimé ainsi asymptotiquement évalué et le maximé $n-1$ (qu'il atteint pour n premier).

60. Résultats divers. Le nombre moyen de représentations d'un nombre par une forme binaire quadratique donnée s'obtient, à l'ordre de $\sqrt{n}$ près, par le principe du n° **53** [cf. n^{os} **33**, **54**]. Il a été déterminé par *C. F. Gauss*[633]).

Plus généralement, *R. Lipschitz*[634]) a donné la *valeur médiane* du nombre des représentations propres d'un nombre naturel donné par une forme positive [I 16, **14** et **42**] dans laquelle figure plus de deux variables ou qui est de degré plus grand que 2. Ainsi pour une forme quadratique positive à ν variables, où $\nu \geqq 2$, et de discriminant positif D [cf. I 16, **42**] cette *valeur médiane* est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}\;\frac{2^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]}\pi^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}}{(\nu-2)(\nu-4)\dots\left(\nu-2\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)}\;\frac{n^{\frac{\nu}{2}-1}}{\sum\limits_{h=1}^{h=+\infty}\frac{1}{h^{\nu}}}.$$

R. Lipschitz[635]) a aussi donné la *valeur médiane* du nombre des classes $H(\Delta)$ de formes quadratiques binaires (a, b, c), proprement primitives, positives et de discriminant positif [I 16, **13**]

$$\mathrm{D} = -\Delta = ac - b^2;$$

631) *E. Landau*, Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 86.

632) *Le symbole $\underline{\lim}$ désigne ici la limite inférieure (d'indétermination) de *A. L. Cauchy* [cf. I 3, **19**].*

633) Werke 2, Göttingue 1876, p. 284 [1837].

634) Monatsb. Akad. Berlin 1865, p. 174 et suiv.

635) Monatsb. Akad. Berlin 1865, p. 183. Voir aussi *C. F. Gauss*, Werke 2, Göttingue 1876, p. 284 [1837] cf. Disq.[333]) n° 302 et, au sujet des formes à déterminant positif, id. n° 304; Werke 1, p. 365, 368.

si l'on pose

$$s = 7\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{n^3} = 8\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3},$$

cette *valeur médiane*

$$MH(-\mathrm{D})$$

est égale à

$$\frac{2\pi\sqrt{\mathrm{D}}}{s}.$$

Une démonstration plus directe de cette relation a été ensuite indiquée par *F. Mertens*[636]).

F. Mertens[637]) a aussi donné l'expression asymptotique pour la somme des valeurs réciproques des nombres premiers représentables par une forme quadratique binaire à déterminant $b^2 - ac$ négatif.

F. Mertens[638]) et *E. Landau*[639]) ont aussi déterminé l'expression asymptotique, pour $n = +\infty$, de la somme

$$\sum\frac{1}{ax^2 + 2bxy + cy^2},$$

où a, b, c sont des entiers fixés arbitrairement parmi ceux pour lesquels

$$b^2 - ac < 0$$

et où la somme est étendue à tous les couples de nombres naturels x, y pour lesquels

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 < n.$$

Cette expression est en rapport, d'après **E'**, avec le résidu considéré au n° **33**.

Les expressions trouvées par *C. F. Gauss*[640]) pour la valeur médiane du nombre $G(\Delta)$ des genres (Geschlecht) de formes binaires quadratiques [I 16, 25] ont été retrouvées par *G. Lejeune Dirichlet*[641]) qui a, en outre, dans le cas où le déterminant

$$b^2 - ac = \Delta = -\mathrm{D}$$

est négatif, établi la formule

$$MG(-\mathrm{D}) = \frac{4}{\pi^2}\left(\log\mathrm{D} + 2C + \frac{12f}{\pi^2} - \frac{1}{6}\log_e 2\right),$$

où C est la constante d'Euler [n° 22] et où f représente, comme au

636) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 312.
637) Id. p. 294.
638) Sitzgsb. Akad. Wien 106 IIa (1897), p. 411.
639) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 165.
640) Disq.[333]) n° 301; Werke 1, p. 362.
641) Abh. Akad. Berlin math. 1849, p. 69; Werke 2, Berlin 1891, p. 49.

n° 58, l'expression

$$f = \sum_{h=2}^{h=+\infty} \frac{1}{h^2} \log_e h.$$

E. Landau[642]) a étudié asymptotiquement l'ordre maximé d'une substitution entre n lettres.

E. Cesàro[643]) donne un grand nombre d'autres évaluations asymptotiques, dont malheureusement certaines sont insuffisamment démontrées ou même fautives[644]).

Dans plusieurs autres mémoires *E. Cesàro*[645]) a également donné des déterminations asymptotiques concernant soit le p. g. c. d. soit le p. p. c. m. de plusieurs nombres, soit encore le plus grand diviseur quadratique d'un nombre ou d'autres expressions de ce genre. Dans ces mêmes mémoires, *E. Cesàro* s'occupe aussi de problèmes analogues à ceux résolus par *G. Lejeune Dirichlet*[646]) et concernant la déter-

---

642) Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 92. Voir *E. Landau*, Primzahlen [133]) 1, p. 222.

643) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 305/24.

644) Par ex. les formules donnés par *E. Cesàro* [Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 307]

$$\mathfrak{M}\varepsilon(n) = \frac{6n}{\pi^2}, \qquad \mathfrak{M}\mu(n) = \frac{36}{\pi^4}$$

sont inexactes et doivent, pour la fonction $\mu(n)$, en vertu du n° **55**, être remplacées par

$$\mathfrak{M}\varepsilon(n) = 0, \qquad \mathfrak{M}\mu(n) = 0,$$

comme l'ont montré *H. v. Mangoldt* [Sitzgsb. Akad. Berlin 1897, p. 849, 852 où la fonction désignée par $\lambda(n)$ est identique à la fonction $\varepsilon(n)$ du texte] et *E. Landau* [Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIª (1903), p. 537]. La démonstration de *E. Landau* est plus précise encore que celle de *H. von Mangoldt*, et *E. Landau* l'étend aux nombres d'un corps algébrique quelconque.

E. Cesàro [Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 316] donne aussi la relation

$$\mathfrak{M}\nu(n) = 1$$

qui n'est autre que la relation

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

démontrée par *Ch. J. de la Vallée Poussin* [Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 251] et *J. Hadamard* [Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199]. Mais son raisonnement repose sur une soustraction illégitime d'égalités moyennes et ne peut être accepté.

645) Ann. mat. pura appl. (2) 13 (1885), p. 235, 251, 269, 291, 295, 315, 323, 329.

646) Ber. Akad. Berlin 1851, p. 20; Werke 2, Berlin 1891, p. 97.

mination des nombres A et A_1 du n° **57**, et il donne en outre[647]) plusieurs théorèmes concernant la distribution des nombres polygones [I 16, **37**] dans la suite naturelle des nombres.

Caractères arithmétiques des nombres irrationnels.

58. Caractéristiques des nombres irrationnels. A chaque nombre irrationnel on peut [cf. I 3, **11, 12, 13**] faire correspondre de diverses manières une suite infinie de nombres rationnels; *B. Christoffel*[648]) lui fait correspondre, sous le nom de *caractéristique*, la suite infinie que voici:

Soit j un nombre irrationnel quelconque, compris entre 0 et 1; désignons par

$$[nj]$$

le plus grand entier contenu dans le produit de j par le nombre naturel n et posons

$$g_1 = 0, \quad g_2 = [2j], \quad g_3 = [3j] - [2j], \quad \ldots$$

et, en général,

$$g_n = [nj] - [(n-1)j].$$

La caractéristique de j est la suite infinie

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots\ldots$$

dont chacun des éléments g_n est, comme on le voit par sa définition, égal soit à 0 soit à 1.

Ainsi la caractéristique du nombre irrationnel

$$\sqrt{2} - 1$$

est

$$0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots\ldots$$

Si, j étant un nombre positif *quelconque* et n un nombre naturel, on convient de désigner par

$$(nj)$$

le reste de la division de nj par le plus grand entier $[nj]$ contenu dans nj, la condition nécessaire et suffisante pour que j soit *irrationnel* est manifestement que, pour aucun nombre naturel n, on n'ait

$$(nj) = 0;$$

---

647) Nouv. Ann. math. (3) 5 (1886), p. 209.

648) *E. B. Christoffel*, Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 253. Voir encore *H. J. S. Smith*, Messenger math. (2) 6 (1877), p. 1; Papers 2, Oxford 1894, p. 135 [1875].

dans l'étude des caractères des nombres irrationnels on peut alors, comme le fait *B. Christoffel*, se borner à envisager les nombres irrationnels compris entre zéro et un.

B. Christoffel étudie la loi de succession des nombres 0 et 1 dont la suite forme la caractéristique d'un nombre irrationnel quelconque j compris entre zéro et un.

L'importance de cette étude provient de ce que la caractéristique d'un nombre irrationnel j peut [à des entiers près] entièrement remplacer le nombre j. On démontre, en effet, qu'à toute caractéristique, c'est-à-dire à toute loi de succession donnée de zéros et d'unités, correspond d'une façon biunivoque une fraction continue *régulière illimitée* convergente, sans terme initial; mais [I 4, **28**] une telle fraction continue a pour valeur un nombre irrationnel déterminé plus petit que 1.

Rien n'empêche donc d'envisager, comme le fait *B. Christoffel*, les irrationnelles comme des symboles servant à distinguer les unes des autres les diverses caractéristiques possibles. Ce point de vue ne semble pas toutefois avoir été de quelque utilité jusqu'ici dans l'étude des propriétés des nombres irrationnels.

59. Caractères des nombres algébriques. Parmi les nombres irrationnels on rencontre tout d'abord les irrationnelles *algébriques*. Ce sont les nombres irrationnels qui sont racines d'une équation algébrique à coefficients rationnels.

Les plus simples des irrationnelles algébriques sont les irrationnelles *quadratiques*. Ce sont les racines des équations du second degré à coefficients rationnels entiers.

Les irrationnelles quadratiques sont caractérisées par les fractions continues régulières (ou ordinaires) convergentes *périodiques* [I 3, **12**; I 4, **28** et **32**], si l'on appelle fraction continue régulière (ou ordinaire) toute fraction continue de la forme

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots\cdot\cdot$$

où les a_i sont des entiers avec

$$a_0 \geqq 0, \quad a_1 > 0, \quad \ldots, \quad a_n > 0, \quad \ldots\ldots$$

On sait en effet que la fraction continue ordinaire relative à chaque racine d'une équation quadratique à coefficients entiers est périodique et réciproquement.

E. Galois [649]) a montré que quand la fraction continue périodique f

649) J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 385; Œuvres, publ. par *E. Picard*,

relative à l'une des racines d'une équation du second degré est périodique *simple*, on obtient la fraction continue relative à la seconde racine de cette équation en divisant -1 par la fraction continue qui se déduit de f en y renversant l'ordre des quotients incomplets[650]).

Le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre naturel non carré D est périodique avec un terme initial q_0, et sa période est toujours de l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|q_2}+\cdots+\frac{1|}{|q_{h-1}}+\frac{1|}{|q_h}+\frac{1|}{|q_h}+\frac{1|}{|q_{h-1}}+\cdots+\frac{1|}{|q_2}+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|2q_0}$$

ou

$$\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|q_2}+\cdots+\frac{1|}{|q_h}+\frac{1|}{|k}+\frac{1|}{|q_h}+\cdots+\frac{1|}{|q_2}+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|2q_0};$$

dans le premier cas, la période est dite *sans terme moyen*; dans le second cas elle est dite *avec terme moyen*; k désigne un entier positif quelconque.

Dans le cas où, en développant $\sqrt{D}$, la période est sans terme moyen, le numérateur x et le dénominateur y de la fraction irréductible $\frac{x}{y}$ dont le développement en fraction continue est

$$q_0+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|q_2}+\cdots+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|2q_0}+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|q_2}+\cdots+\frac{1|}{|q_2}+\frac{1|}{|q_1}$$

fournissent la plus petite solution en nombres naturels de l'équation de Fermat

$$x^2-Dy^2=1.$$

Dans le cas où, dans le développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue, la période a un terme moyen, c'est le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible dont le développement en fraction continue est

$$q_0+\frac{1|}{|q_1}+\frac{1|}{|q_2}+\cdots+\frac{1|}{|q_h}+\frac{1|}{|k}+\frac{1|}{|q_h}+\cdots+\frac{1|}{|q_2}+\frac{1|}{|q_1}$$

qui fournissent cette solution.

L'équation

$$x^2-Dy^2=-1$$

n'est susceptible de solution que quand la période du développement de $\sqrt{D}$ est sans terme moyen; on obtient la plus petite solution de l'équation en prenant pour x et y le numérateur et le dénominateur de

---

Paris 1897, p. 2. Le théorème de Galois ne s'applique pas au cas où la racine de l'équation du second degré serait périodique *mixte* [I 4, 32].

650) Au sujet des conditions pour que les périodes soient les mêmes pour les deux racines, cf. *V. A. Lebesgue,* J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 281; *E. Galois,* id. (1) 11 (1846), p. 385; Œuvres[649]), p. 6.

la fraction irréductible dont le développement en fraction continue est

$$q_0 + \frac{1|}{q_1} + \frac{1|}{q_2} + \cdots + \frac{1|}{|q_2} + \frac{1|}{|q_1};$$

le développement jusqu'au premier des quotients q_h fournit alors une représentation de D comme somme de deux carrés $x^2 + y^2$, en prenant pour x et y le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible à laquelle est égal ce développement.

Ces résultats, déjà trouvés par *J. L. Lagrange* et reproduits par *A. M. Legendre*[651]), ont été approfondis en particulier par *M. A. Stern*[652]). Dans les mémoires cités de *M. A. Stern* on trouve des remarques qui peuvent servir à simplifier le calcul d'une Table[653]) donnant les plus petites solutions de l'équation de Fermat jusqu'à $D = 1000$.

A. Göpel[654]) a établi des théorèmes sur les représentations des nombres naturels sous la forme $x^2 - Dy^2$, où D est un nombre entier positif.

J. Ph. E. de Fauque de Jonquières[655]) s'est attaché au développement en fraction continue de $\sqrt{D}$; il a aussi étudié les propriétés des fractions continues périodiques mixtes [I 4, **32**].

C. G. J. Jacobi[656]) a montré que probablement les irrationnelles cubiques présentent un caractère analogue à celui des irrationnelles quadratiques en ce qu'elles conduisent à de certains algorithmes du même type que celui des fractions continues périodiques.

O. Perron[657]) en généralisant ces algorithmes de *C. G. J. Jacobi* et en démontrant leur convergence a fait faire un grand pas à l'étude des irrationnelles cubiques. Il a particulièrement envisagé le cas où l'un de ces algorithmes est périodique et a donné, pour les nombres représentés par cet algorithme périodique, l'expression générale de l'approximation avec laquelle ils sont représentés quand on s'arrête à un terme déterminé.

651) *A. M. Legendre*, Théorie des nombres (3ᵉ éd.) 1, Paris 1830, p. 49, 68. Cf. I 16, nᵒˢ **16**, **17**.

652) J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 1, 154, 241, 364; id. 11 (1834), p. 33, 142, 277, 311; id. 53 (1857), p. 1.

653) Le „Canon Pellianus" de *C. F. Degen*, Copenhague 1817, constitue déjà une Table de ce genre. *Une petite table de même nature avait été publiée par *L. Euler* dès 1738 [Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 184] (Note de *G. Eneström*).*

Voir aussi *A. Cayley*, Report Brit. Assoc. 63, Nottingham 1893, éd. Londres 1894, p. 73; Papers 13, Cambridge 1897, p. 430.

654) J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 1.

655) C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 1297, 1351, 1420, 1490.

656) J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 1; Werke 6, Berlin 1891, p. 355

657) Habilitationsschrift, Munich 1906.

O. Perron[658]) a aussi étendu les mêmes recherches aux nombres algébriques à coefficients complexes.

H. Minkowski[659]) a indiqué le caractère général suivant pour les nombres algébriques: soit a un nombre algébrique déterminé, racine d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré à coefficients entiers et

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

n nombres naturels variables quelconques; posons alors

$$\xi = x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n.$$

A chaque valeur du nombre entier r on peut faire correspondre d'une manière unique une certaine substitution P de la forme

$$x_k = p_k^{(1)} z_1 + p_k^{(2)} z_2 + \cdots + p_k^{(n)} z_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $p_k^{(i)}$ sont des entiers au plus égaux à r en valeur absolue et dont le déterminant est différent de zéro. Cette substitution change ξ en

$$X = \xi P = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n.$$

En faisant prendre à r les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots$ et opérant un choix convenable parmi les substitutions obtenues, on détermine une suite

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ldots$$

de substitutions que *H. Minkowski* appelle la *chaîne de substitutions appartenant à a.*

Soit, en général,

$$X_m = \xi P_m;$$

les nombres algébriques a de degré n, c'est-à-dire ceux qui sont racines d'une équation *irréductible* du $n^{\text{ième}}$ degré à coefficients entiers, sont alors caractérisés par le fait que cette chaîne

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ldots$$

ne s'arrête pas, joint au fait que les X_m ont tous leurs coefficients α différents de zéro et au fait que, parmi les équations $X_m = 0$, il n'y en a qu'un nombre fini d'essentiellement distinctes. Dans les applications de ce critère, on doit supposer toutefois $n > 1$ si a est réel, $n > 2$ si a est complexe.

Dans un autre mémoire, *H. Minkowski*[660]) a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que la chaîne de substitutions satisfasse à une certaine condition de périodicité; il a montré que cela n'arrive que dans *six* cas différents où n a nécessairement l'une ou l'autre des valeurs 2, 3, 4 ou 6.

---

658) Sitzgsb. Akad. München 37 (1907), p. 401/81.

659) Nachr. Ges. Gött. 1899, math. p. 64.

660) Acta math. 26 (1902), p. 333.

*On peut encore indiquer le critère suivant pour les nombres algébriques.

Soient x un nombre, k un entier $\geq |x|$, $y = \frac{x}{2k}\cdot$ Quand x est rationnel ou algébrique, tout nombre rationnel M satisfait à une relation

$$M = c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_n y^n + \cdots\cdots,$$

où la suite des nombres rationnels $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\ldots$ est périodique à partir d'un certain terme. Au contraire, quand x n'est ni rationnel ni algébrique, il n'existe aucun nombre rationnel M satisfaisant à une relation de ce genre[661]).*

*Enfin on a considéré des fractions continues périodiques d'*ordre supérieur*, qui peuvent représenter des nombres algébriques de degré > 2 et dont le mode de génération est intuitif dans l'exemple suivant[662]):

$$x = \alpha + \frac{p}{\beta - \alpha + x} + \frac{q}{\gamma - \alpha + x};$$

mais les applications arithmétiques de ce genre de fractions continues restent à développer.*

60. Les nombres transcendants e et π. On dit qu'un nombre est *transcendant* lorsqu'il n'est ni rationnel, ni algébrique, c'est-à-dire quand il n'est racine d'aucune équation entière algébrique à coefficients entiers.

Avant d'envisager les nombres transcendants en général, nous allons d'abord nous occuper de deux de ces nombres qui jouent un rôle considérable dans presque toutes les branches des mathématiques. Ce sont les deux nombres e et π.

**L. Euler*[662a]) a d'abord énoncé et démontré que e et e^2 sont des nombres irrationnels.*

La considération des fractions continues relatives aux fonctions

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{tg} x,$$

a permis à *J. H. Lambert*[663]) de montrer que π et e ainsi que e^m (pour m rationnel entier ou fractionnaire quelconque) ne sont pas rationnels; il en est de même de π^2 comme l'a établi *A. M. Legendre*[664]).

661) **E. Maillet*, Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions, Paris 1906, p. 66.*

662) **R. de Montessus de Bellore*, Interméd. math. 4 (1897), p. 41.*

662a) *Comm. Acad. Petrop. 9 (1737), éd. 1744, p. 108 [1737] (Texte et note de *G. Eneström*).*

663) Hist. Acad. Berlin 17 (1761), éd. 1768, p. 265.

664) Éléments de géométrie, Paris an II; (12e éd.) Paris 1823, p. 296; (23e éd.) Bruxelles 1847, p. 226.

Cf. *A. Pringsheim*, Sitzgsb. Akad. München 28 (1898), p. 326.

J. Liouville[665]) a ensuite prouvé, d'après le développement en série de e, que ni e ni e^2 ne sont irrationnels quadratiques.

Par la considération de fractions continues particulières, *A. Hurwitz*[666]) a pu plus généralement montrer que e n'était pas racine d'une équation du troisième degré, à coefficients entiers.

Il retrouve aussi par la même voie que e n'est pas racine d'une équation du premier ou du second degré à coefficients entiers et obtient[667]) pour e^2 le développement en fraction continue

$$e^2 = 7 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots + \frac{1|}{|a_\nu} + \cdots\cdots,$$

où

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 18,$$

$$a_6 = 5, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 1, \quad a_9 = 6, \quad a_{10} = 30,$$

et, en général, quel que soit le nombre naturel m,

$$a_{5m-4} = 3m - 1, \; a_{5m-3} = 1, \; a_{5m-2} = 1, \; a_{5m-1} = 3m, \; a_{5m} = 12m + 6.$$

L. Euler[668]) avait déjà obtenu pour e le développement analogue

$$e = 2 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_\nu} + \cdots\cdots,$$

où

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 4, \quad a_6 = 1,$$

et, en général, quel que soit le nombre naturel m,

$$a_{3m-2} = 1, \quad a_{3m-1} = 2m, \quad a_{3m} = 1.$$

*Soit N une irrationnelle. Connaissant le développement en fraction continue régulière

$$N = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots\cdots,$$

où $a_0 \geqq 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, ... et les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ de N, on peut se proposer de rechercher s'il n'existe pas des rapports simples entre les quotients incomplets et les réduites de N et des fonctions rationnelles, à coefficients entiers, de N.

Cette question difficile a été étudiée par *J. A. Serret*[669]), *A. Hur-*

665) J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 192/3.

666) Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 41 (1896), p. 61.

667) Id. p. 55.

668) Comm. Acad. Petrop. 9 (1737), éd. 1744, p. 120 [1737]. *Voir aussi *A. Hurwitz,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 41 (1896), p. 53.*

669) *Alg. sup. (6e éd.) 1, Paris 1910, p. 34.*

witz[670]) et *E. Maillet*[671]). Voir aussi à ce sujet le n° **65** consacré aux nombres transcendants de *J. Liouville.**

61. Recherches d'Hermite. Les recherches de *Ch. Hermite*[672]), qui établissent la transcendance de e, sont antérieures à celles de *A. Hurwitz.*

En envisageant la suite

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots\ldots$$

définie par les expressions

$$A = \sin x,\ A_1 = \int_0^x xA\,dx,\ A_2 = \int_0^x xA_1\,dx,\ \ldots,\ A_n = \int_0^x xA_{n-1}\,dx,\ \ldots\ldots,$$

Ch. Hermite établit tout d'abord à nouveau que ni π ni π^2 ne sont rationnels. A cet effet il remarque que trois termes consécutifs quelconques de la suite envisagée sont liés par la relation

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x^2 A_{n-1}$$

et que cette formule conduit au développement de $\operatorname{tg} x$ en fraction continue dû à *J. H. Lambert*

$$\operatorname{tg} x = \frac{x|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} - \frac{x^2|}{|5} - \cdots - \frac{x^2\ \ |}{|2n-1} - \cdots\cdots$$

Il montre que le terme général A_n de la suite envisagée peut se mettre sous la forme

$$A_n = \psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x,$$

où $\psi(x)$, $\chi(x)$ sont des fonctions rationnelles entières, à coefficients entiers, de x; et qu'il peut aussi se mettre sous la forme

$$A_n = \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\,dz.$$

C'est de cette double représentation de A_n que *Ch. Hermite* conclut que ni π ni π^2 ne sont rationnels.

En résolvant par rapport à $\sin x$ et $\cos x$ les équations

$$A_n = \psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x,$$

$$\int_0^x A_n\,dx = \psi_1(x)\sin x + \chi_1(x)\cos x + C,$$

où $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ sont des fonctions entièrement analogues à $\psi(x)$, $\chi(x)$,

670) *Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 41 (1896), p. 56, 59.*

671) *C. R. Acad. sc. Paris 141 (1905), p. 419; 142 (1906), p. 384; Nombres transcendants[661]), p. 48.*

672) C. R. Acad. sc. Paris 77 (1873), p. 18, 74, 226, 285; Sur la fonction exponentielle, Paris s. d. [1874]; J. reine angew. Math. 76 (1873), p. 303, 342.

et où C est une constante, *Ch. Hermite* obtient pour $\sin x$ et $\cos x$ des développements en séries entières en x; ces développements coïncident, aux puissances près de x de degré $\geq 2n$, avec ceux de deux fonctions rationnelles de x de la forme

$$\frac{x\,\mathrm{T}(x^2)}{\mathrm{R}(x^2)}, \qquad \frac{\mathrm{S}(x^2)}{\mathrm{R}(x^2)},$$

où R, S et T désignent des fonctions rationnelles entières de x^2. On peut en conclure que le développement de e^x peut, lui aussi, être représenté par un développement en série entière en x qui, aux puissances près de x de degré $\geqq 2n$, coïncide avec celui d'une certaine fonction se présentant sous forme fractionnaire.

Voici, d'autre part, le principe de la méthode employée par *Ch. Hermite* pour établir la transcendance de e.

Posant

$$f(z) = z(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n), \qquad F(z) = [f(z)]^m$$

et

$$\varepsilon_{i,m}^{(h)} = \frac{1}{(m-1)!}\int_{z_0}^{z_i} \frac{[f(z)]^m}{z - z_h} e^{-z} dz,$$

on établit entre les $\varepsilon_{i,m}^{(h)}$, pour les valeurs successives de m, une relation de récurrence qui permet de conclure que

$$\varepsilon_{i,m}^{(h)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon_{i,m}^{(h)} = e^{-z_0}\alpha_0^{(h)} - e^{-z_i}\alpha_i^{(h)},$$

où $\alpha_0^{(h)}, \alpha_1^{(h)}, \dots, \alpha_n^{(h)}$ sont des nombres entiers en même temps que $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_n$.

De ce que $\varepsilon_{i,m}^{(h)}$ décroît indéfiniment avec $\frac{1}{m}$, on conclut qu'une équation

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \dots + N_n e^{z_n} = 0,$$

où $N_0, N_1, \dots, N_n$ désignent des nombres entiers positifs ou négatifs (différents tous de zéro), conduirait au système des équations linéaires

$$\alpha_0^{(h)} N_0 + \alpha_1^{(h)} N_1 + \dots + \alpha_n^{(h)} N_n = 0$$
$$(h = 0, 1, 2, \dots, n),$$

lequel est impossible parce que son déterminant est différent de 0.

Le nombre e est donc *transcendant.*

62. Recherches de Lindemann. En cherchant à approfondir la méthode de *Ch. Hermite, F. Lindemann*[673]) a montré que le nombre π doit, lui aussi, être transcendant.

673) Math. Ann. 20 (1882), p. 213. Une exposition simple des travaux de

De ce que

$$e^{i\pi} = -1,$$

on conclut que π est certainement transcendant si e^z est irrationnel pour tout nombre algébrique entier z.

Mais si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les racines de l'équation irréductible à laquelle satisfait z, et si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les coefficients de l'équation ayant pour racines $e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_n}$, on aurait, si l'une de ces racines était rationnelle, une identité de la forme

$$N_0 + M_1 N_1 + M_2 N_2 + \cdots + M_n N_n = 0,$$

où $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont entiers. La preuve de son impossibilité résulte des mêmes relations que tout à l'heure entre des intégrales définies; mais les chemins d'intégration de ces intégrales sont ici complexes.

63. Simplifications apportées aux démonstrations d'Hermite et de Lindemann. En s'appuyant sur un lemme basé sur des considérations élémentaires, *K. Weierstrass*[674]) a considérablement simplifié la démonstration de *F. Lindemann.*

Ce lemme est ainsi conçu: si $f(z)$ est une fonction rationnelle entière, à coefficients entiers, de degré $n+1$, avec des racines distinctes $z_0, z_1, \ldots, z_n$, il y a un système

$$g_0(z), \quad g_1(z), \quad \ldots, \quad g_n(z)$$

de $n+1$ fonctions rationnelles entières à coefficients entiers de degrés $\leqq n$, tel que le déterminant

$$|g_i(z_k)| \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

soit différent de zéro, et que chacune des différences

$$g_i(z_0)e^{z_k} - g_i(z_k)e^{z_0} \quad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

soit, en valeur absolue, plus petite qu'une quantité δ fixée à l'avance aussi petite que l'on veut.

De ce que

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

on conclut immédiatement que π est transcendant, si $e^x + 1$ est différent de 0 pour toute valeur algébrique de x.

Pour constater qu'il en est ainsi, il suffit de considérer le produit

$$\mathrm{P} = \prod_{h=1}^{h=r} (e^{x_h} + 1),$$

Ch. Hermite et de *F. Lindemann* a été donnée par *E. Rouché*, Nouv. Ann. math. (3) 2 (1883), p. 5.

674) Sitzgsb. Akad. Berlin 1885, p. 1067; trad. avec quelques légères modifications par *J. Molk,* Bull. sc. math. (2) 14 (1890), p. 186/99, 228/40.

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les racines de l'équation irréductible à laquelle x satisfait; de le mettre sous la forme

$$P = 1 + e^{z_1} + e^{z_2} + e^{z_3} + \cdots + e^{z_n} + \cdots\cdots,$$

où $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots$ sont respectivement égaux à

$$0, \quad x_h, \quad x_h + x_{h_1}, \quad x_h + x_{h_1} + x_{h_2}, \quad \ldots,$$

$h, h_1, h_2, \ldots$ étant distincts et égaux à toutes les combinaisons possibles des nombres $1, 2, \ldots, r$; et enfin d'appliquer le lemme précédent à l'équation entière dont les racines sont égales à celles des valeurs $z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui sont *distinctes*[675]).

En suivant la même voie, on obtient aussi le théorème le plus général de ceux établis dans cet ordre d'idées par *F. Lindemann*[676]):

L'équation

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \cdots + X_r e^{x_r} = 0$$

est impossible pour des nombres algébriques distincts quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et des nombres algébriques non tous nuls $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Il résulte de ce théorème général que e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ sont toujours transcendants quand x est un nombre algébrique autre que 0 et que $\log_e x$ est toujours transcendant quand x est un nombre algébrique autre que 1; le premier de ces résultats comprend comme cas particulier le théorème de *Ch. Hermite* sur la transcendance de e.

La démonstration de la transcendance de π permet de conclure définitivement à l'*impossibilité de résoudre le problème de la quadrature du cercle*[677]), c'est-à-dire le problème suivant: Un cercle de rayon R étan tdonné, construire un carré ayant une aire équivalente, en ne se servant que de la règle et du compas. On montre, en effet, que, s'il y avait une solution, le nombre π serait, contrairement à ce que l'on a vu, racine d'une équation algébrique à coefficients entiers; le degré de cette équation serait une puissance de 2.

---

675) Une extension de ces considérations de *K. Weierstrass* aux intégrales de certaines équations différentielles linéaires a été donnée par *A. Hurwitz* [Math. Ann. 22 (1883), p. 211] et *E. Ratner* [id. 32 (1888), p. 566].

676) *On en trouve une démonstration complète dans *H. Weber,* Algebra 2, Brunswick 1896, p. 760.*

677) Pour l'histoire du problème de la quadrature du cercle voir en particulier **J. E. Montucla*, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, Paris 1754; nouv. éd. publ. par *S. F. Lacroix*, Paris 1831*; *F. Rudio*, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, éd. Leipzig 1892; *F. Klein,* Vorträge über Elementargeometrie, publ. par *F. Tägert,* Leipzig 1895; trad. *J. Griess*, Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire, Paris 1896, p. 82/96.

*Au sujet des diverses manières d'entendre cette impossibilité, voir *E. Maillet*, Nombres transcendants[661]), p. 156/60.*

Après *K. Weierstrass*, les démonstrations de certains des théorèmes précédents ont encore été simplifiées davantage par *T. J. Stieltjes*[678]) qui abrège la démonstration de *Ch. Hermite*, puis par *D. Hilbert*[679]), *A. Hurwitz*[680]), *P. Gordan*[681]), ${}_*$*H. Padé*[682]) et *O. Veblen*[683]).*

Pour démontrer qu'une équation de la forme

$$(e) \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0,$$

où $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des nombres entiers, est impossible, quel que soit le nombre naturel n que l'on envisage, *D. Hilbert* commence par multiplier le premier membre de l'équation supposée par l'expression

$$\int_0^{+\infty} u\,dz = \int_0^{+\infty} [z(z-1)\ldots(z-n)]^{1+\varrho}\,\frac{e^{-z}\,dz}{z};$$

si l'on pose

$$P_1 = a\int_0^{+\infty} u\,dz + a_1 e\int_1^{+\infty} u\,dz + a_2 e^2\int_2^{+\infty} u\,dz + \cdots + a_n e^n\int_n^{+\infty} u\,dz,$$

$$P_2 = a_1 e\int_0^{1} u\,dz + a_2 e^2\int_0^{2} u\,dz + \cdots + a_n e^n\int_0^{n} u\,dz,$$

on peut choisir le nombre naturel ϱ de façon que le nombre $\frac{P_1}{\varrho!}$ soit un nombre entier positif et que le nombre $\frac{P_2}{\varrho!}$ soit < 1; pour ce choix de ϱ, l'expression $P_1 + P_2$ est donc sûrement différente de 0; en d'autres termes l'équation supposée est impossible; donc e est transcendant[684]).

La transcendance de π se déduit de même de la considération du produit $\Pi(1 + e^{\alpha})$, étendu aux racines α d'une équation algébrique dont on suppose que $i\pi$ soit une racine.

A. Hurwitz démontre la transcendance de e, en s'appliquant à ne faire usage que de considérations empruntées au calcul différentiel et évitant de faire intervenir le calcul intégral. Il utilise le théorème suivant:

---

678) ${}_*$C. R. Acad. sc. Paris 110 (1890), p. 267.*

679) Math. Ann. 43 (1893), p. 216; Nachr. Ges. Gött. 1893, p. 113.

680) Math. Ann. 43 (1893), p. 220; Nachr. Ges. Gött. 1893, p. 153.

681) Math. Ann. 43 (1893), p. 222. ${}_*$Une démonstration de *R. E. Moritz* [Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 57] coïncide au fond avec celle de *P. Gordan.**

682) ${}_*$*H. Padé* [Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 144] donne une nouvelle démonstration des formules de *Ch. Hermite.**

683) ${}_*$The Amer. math. Monthly 11 (1904), p. 219 (Texte et notes 681 à 683 de *G. Vivanti*).*

684) *K. Th. Vahlen,* Math. Ann. 53 (1900), p. 457.

Si, $f(x)$ désignant une fonction rationnelle entière de degré r, on pose

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x),$$

où $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ représentent les dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, r$ de $f(x)$, prises par rapport à x, on a

$$(f) \qquad e^{-x}F(x) - F(0) = -xe^{-\theta x}f(\theta x),$$

pour un nombre positif θ, inférieur à 1, convenablement choisi.

En appliquant cette formule pour $x = 1, 2, \ldots, n$ à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}[(x-1)(x-2)\ldots(x-n)]^p,$$

où p est premier $> n$ et $> a$, on voit aisément l'impossibilité de l'équation (e).

Au lieu d'utiliser la relation (f), *P. Gordan* s'appuie sur le développement en série de e^x.

Si $(x+h)^{(r)}$ est le résultat de la substitution de $k!$ à h^k dans le développement suivant la formule du binome de $(x+h)^r$, on a

$$r!\,c_r e^x = c_r(x+h)^{(r)} + q_r e^{|x|} c_r x^r,$$

q_r désignant une expression inférieure à 1 en valeur absolue. L'application de cette formule à la fonction $f(x)$ de *A. Hurwitz* mise sous la forme

$$f(x) = \sum c_r x^r$$

montre la transcendance de e. L'extension à π se fait de même que dans le procédé de *D. Hilbert*[679]), mais sans intervention du calcul intégral.

En s'appuyant sur le développement en série de e^x, *F. Mertens*[685]) a donné enfin une démonstration élémentaire, mais plus longue, des théorèmes de *Ch. Hermite* et de *F. Lindemann*[686]).

64. Nombres transcendants en général[687]). *J. Liouville*[688]) est le premier qui ait démontré l'existence de nombres transcendants. Soit

685) Sitzgsb. Akad. Wien 105 IIa (1896), p. 839.

686) Voir encore, comme se rattachant à ce qui précède, *P. Stäckel,* Math. Ann. 46 (1895), p. 513; *E. Borel,* C. R. Acad. sc. Paris 128 (1899), p. 596.

687) Voir à ce sujet, *E. Maillet*, Introduction à la théorie des nombres transcendants[661]).

688) J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 134, 139.

Nous laissons ici de côté tout ce qui a trait à la *classification* des irrationnelles algébriques à l'aide de la théorie des groupes de substitutions.

$f(x)$ un polynome irréductible à coefficients entiers et de degré $n \geqq 2$, ayant pour racine ξ, et soit $\frac{p}{q}$ une fraction rationnelle réelle ou imaginaire arbitraire, à dénominateur q réel. On peut déterminer un nombre réel M qui dépend seulement de n et des coefficients de $f(x)$, et tel que

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{1}{Mq^n}. \tag{1}$$

J. Liouville a conclu de cette inégalité le moyen de former *effectivement* une infinité de nombres qui ne satisfont à aucune équation irréductible de degré $\leqq n$ à coefficients entiers, et même de nombres transcendants.

De la façon même dont *J. Liouville* a formé ses nombres transcendants il résulte que l'ensemble de ces nombres a la *puissance du continu.*

G. Cantor[689]) et *C. Jordan*[690]) ont montré aussi l'existence d'une infinité de nombres transcendants mais sans en former effectivement. *C. Jordan* s'appuie sur les propriétés des fonctions intégrables; *G. Cantor* part de ce théorème: l'ensemble des nombres algébriques réels est un ensemble dénombrable.

**E. Borel*[691]), en se basant sur ce même théorème, a montré que parmi les fractions continues ordinaires de la forme

$$\frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots\cdots,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ sont des nombres naturels $\leqq q$, q étant un entier arbitraire $\geqq 2$, il y a une infinité de nombres transcendants.*

*Comme corollaire du théorème général précité de *F. Lindemann*[676]), *G. Rémoundos*[692]), étudiant certaines analogies entre les propriétés des fonctions transcendantes entières et des nombres, a considéré les polynomes en u

$$q(u) = u^n + \gamma_1 u^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} u + \gamma_n,$$

où $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n$ sont des nombres transcendants *donnés.* Il obtient une série de résultats analogues au suivant: parmi les équations

$$q(u) = A_k e^{\alpha_k},$$

où A_k et α_k prennent toutes les valeurs possibles rationnelles ou algébriques, avec α_k différent de 0, il y en a n au plus dont les racines ne soient pas toutes transcendantes.*

689) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 258.

690) *Cours d'Analyse (1^re^ éd.) 3, Paris 1887, p. 566.*

691) *Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, p. 28.*

692) *C. R. Acad. sc. Paris 140 (1905), p. 136, 1232; Ann. Éc. Norm. (3) 23 (1906), p. 367/86.*

C. Störmer[693]) a établi une inégalité analogue à (1) pour les irrationnelles de la forme $\alpha = \frac{\log A}{\log B}$, où A et B sont positifs > 1 et algébriques; plus exactement, soit

$$\alpha = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1}{|a_n} + \cdots\cdots$$

le développement en fraction continue ordinaire de α; on a

$$a_{n+1} < k\frac{M^{q_n}}{q_n},$$

où k et M ne dépendent que de A et B, et où

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_n}$$

est une réduite de α. *C. Störmer* ajoute que les mêmes méthodes s'appliqueraient au développement en fraction continue ordinaire de diverses expressions, par exemple de $\frac{\operatorname{arc\,tg} A}{\operatorname{arc\,tg} B}$.

En dehors des nombres transcendants dont *J. Liouville* a établi l'existence et qui ne comprennent pas le nombre e, il en existe d'autres dont l'ensemble a la puissance du continu.*

65. Nombres transcendants de J. Liouville et nombres analogues. *Soit X un nombre réel ou complexe limite d'une suite

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\ldots$$

de fractions rationnelles

$$X_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

toutes distinctes, à numérateurs P_n entiers réels ou complexes, à dénominateurs Q_n entiers réels croissants. On détermine α_n, supposé positif, par la condition

(2) $$|X - X_n| = Q_n^{-\alpha_n};$$

soit α un nombre arbitrairement grand: si l'on peut, pour toute valeur de α, choisir l'entier ν assez grand, de façon que $\alpha_n > \alpha$ dès que $n > \nu$, X est un nombre transcendant, comme l'a montré *J. Liouville*[694]), d'après l'inégalité (1) du n° **64**. *E. Maillet*[695]) appelle X un *nombre de Liouville.*

Plus généralement, soit un nombre Y réel ou complexe, limite d'une suite semblable

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots\ldots$$

693) *Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 154, 157.*

694) *J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 137.*

695) *Nombres transcendants[661]), p. 14.*

de fractions rationnelles distinctes

$$Y_n = \frac{P_n^{(1)}}{Q_n^{(1)}},$$

où $Q_n^{(1)}$ est un entier réel croissant avec n, et $P_n^{(1)}$ un polynome à coefficients entiers réels formé avec un même nombre algébrique ξ; on peut montrer que Y est transcendant sous des conditions analogues, mais plus compliquées[696].

Soient alors

$$X, X', X'', \ldots\ldots$$

des nombres de Liouville réels ou imaginaires, limites des suites

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, X_n = \frac{P_n}{Q_n}, \ldots & \text{pour } X, \\ X_1' = \frac{P_1'}{Q_1'}, \ldots, X_n' = \frac{P_n'}{Q_n'}, \ldots & \text{pour } X', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

et

$$|X - X_n| = Q_n^{-\alpha_n}, \ |X' - X_n'| = Q_n'^{-\alpha'_n}, \ldots\ldots$$

Si l'on pose

$$Q_n' = Q_n^{\sigma'_n}, \quad Q_n'' = Q_n^{\sigma''_n}, \quad \ldots\ldots$$
$$\alpha_n' = \tau_n'\alpha_n, \quad \alpha_n'' = \tau_n''\alpha_n, \quad \ldots\ldots,$$

σ_n' σ_n'', ..., τ_n', τ_n'', ... sont positifs.

Admettant que σ_n', σ_n'', ... restent compris entre deux nombres fixes positifs, et que τ_n', τ_n'', ... soient supérieurs à un nombre fixe positif, X, X', X'', ..., sont ce que *E. Maillet*[697]) appelle des nombres de Liouville *correspondants.*

Le nombre X de Liouville et la suite des X_n étant donnés, soit S_1 l'ensemble

$$X, X', \ldots\ldots$$

des nombres transcendants de Liouville satisfaisant aux conditions ci-dessus et des nombres rationnels.

L'ensemble des nombres de S_1 forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division). Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels réels ou imaginaires des nombres de S_1 appartient à S_1.

Les nombres réels de Liouville jouissent de propriétés remarquables. La suite

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\ldots$$

---

696) **E. Maillet,* Nombres transcendants[661]), p. 19.*

697) *Nombres transcendants[661]), p. 27/40; Bull. Soc. math. France 35 (1907), p. 33. On trouvera à ces deux endroits l'indication de correspondances plus particulières et des exemples d'ensembles S ou d'ensembles analogues.*

des

$$X_n = \frac{P_n}{Q_n}$$

est formée, à partir d'un certain terme, de réduites du développement en fraction continue de X. Ces nombres sont les seules irrationnelles a possédant une infinité de réduites a_n dont la puissance $p^{\text{ième}}$

$$a_n^p$$

soit une réduite de a^p pour une infinité de valeurs de p [698]).

La puissance $p^{\text{ième}}$

$$X^p$$

d'un nombre réel X de Liouville est la limite de la suite de celles des fractions X_n^p qui sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$ exactes. Inversement, si l'on peut définir X comme limite d'une suite de fractions rationnelles X_n qui satisfont à la condition (2) et qui sont des puissances $q^{\text{ièmes}}$ exactes, X est la puissance $q^{\text{ième}}$

$$Y^q$$

d'un nombre transcendant réel Y de Liouville. Il y a des propriétés analogues pour les nombres de Liouville imaginaires [699]).

Les nombres de Liouville d'un même ensemble S_1 donnent naissance à une véritable arithmétique analogue à celle des nombres rationnels. Il resterait à déterminer, si cela est possible, ceux de ces nombres qu'on peut regarder comme entiers [700]).

E. Maillet a indiqué plusieurs classifications des irrationnelles A réelles positives basées sur la considération du développement en fraction continue

$$A = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1}{|a_n} + \cdots\cdot\cdot$$

(a_n entier positif), et la rapidité de croissance des a_n en fonction de n; il définit à cette occasion ce qu'il appelle l'*ordre* de A, qui est aussi, par définition, l'ordre de la suite des a_n. Les nombres A d'ordre assez grand sont des nombres de Liouville; ceux d'ordre assez petit n'en sont pas [701]). Dans le même ordre d'idées, si A est un nombre de Liouville, il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$a_{n+1} > q_n^{\alpha},$$

695) *Nombres transcendants [661]), p. 41, 44.*

699) *Id. p. 44, 46.*

700) *Id. p. 45, 195.*

701) **J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 134; *E. Maillet*, C. R. Acad. sc. Paris 142 (1906), p. 386; id. 143 (1906), p. 26; Nombres transcendants [661]), p. 8, 228.*

α étant un nombre positif arbitraire, et[702])

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \cdots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Les nombres Z de Liouville d'ordre suffisamment grand ont des propriétés encore plus remarquables. Les théorèmes d'Hermite et Lindemann relatifs à e et π peuvent à certains égards leur être étendus; ainsi

$$e^Z,\ \cos Z,\ \sin Z,\ \operatorname{tg} Z,\ a^Z\ (a \text{ rationnel positif})$$

et même

$$Z^Z$$

sont des nombres transcendants;

$$e^a,\ \log_e a,\ \pi$$

ne sont pas des nombres de Liouville Z[703]).

On peut encore étudier les racines des équations du second degré dont les coefficients sont des polynomes entiers à coefficients entiers formés avec un même nombre de Liouville[704]).

E. Maillet[705]) appelle suite *quasi-périodique* une suite infinie

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots$$

où l'on trouve une infinité de suites finies

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m,\ \ldots\ldots$$

de quantités a_k, et dont chacune s_m est formée par la répétition β_m fois d'un même groupe de quantités a_k, le nombre β_m croissant indéfiniment et suffisamment vite avec m.

Quand les a_k sont des entiers au plus égaux à l'entier q, soit E un entier; dans le système de numération de base q le nombre

$$E + \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \cdots + \frac{a_n}{q^n} + \cdots\cdots$$

est dit une *fraction* q^{imale} *quasi-périodique* f_1, et même un nombre *quasi-rationnel* si les s_m sont formés de 0. La fraction continue

$$f_2 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_n} + \cdots\cdots,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ sont des entiers positifs, est dite une *fraction continue quasi-périodique.* Dès lors, Z a dans le système de numération

702) *C. R. Acad. sc. Paris 141 (1905), p. 418; Nombres transcendants[661]), p. 124.*

703) *Nombres transcendants[661]), p. 241; Bull. Soc. math. France 35 (1907), p. 27.*

704) *Bull. Soc. math. France 34 (1906), p. 213.*

705) *J. math. pures appl. (5) 10 (1904), p. 357 et suiv.; (6) 3 (1907), p. 322.*

706) **E. Maillet,* Nombres transcendants[661]), p. 126 et suiv.; Bull. Soc. math. France 34 (1906), p. 213.*

de base q une représentation quasi-périodique; si $\sqrt{Z}$ n'est pas un nombre de Liouville, c'est une fraction continue quasi-périodique[706]. Inversement, sous certaines conditions relatives aux s_m, f_1 est un nombre de Liouville et f_2 un nombre transcendant.

Si l'on envisage un même groupe ou ensemble S_1 de nombres de Liouville d'ordre suffisamment grand, que l'on désignera par S_2, le théorème général de Lindemann[676] a son analogue pour les nombres de S_2. On peut aussi chercher si une équation indéterminée

$$F(x, y, z, \ldots) = 0$$

à coefficients entiers a un système de solutions en nombres $x, y, z, \ldots$ de S_2. Une pareille équation ne peut admettre une telle solution, un des nombres $x, y, z, \ldots$ au moins étant transcendant, que si $F = 0$ a une infinité de solutions en nombres rationnels; par exemple, l'équation

$$x^m + y^m = z^m$$

est impossible pour les nombres de S_2 dans tous les cas où elle est impossible en nombres entiers[707].*

66. Fonctions génératrices de nombres rationnels, algébriques, transcendants. *Soit $f(x)$ la somme d'une série

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n + \cdots\cdots$$

à coefficients rationnels, algébriques, ..., ou encore la valeur d'une fraction continue où les quotients incomplets sont des fractions rationnelles en x à coefficients rationnels, algébriques, etc. ...

On peut se proposer de rechercher la nature arithmétique de $f(x)$ quand on donne à x une valeur appartenant à une espèce arithmétique bien définie de nombres (entiers naturels, rationnels, algébriques, etc.). Cette étude est en rapport avec celle de la nature arithmétique des racines de $f(x)$. Par exemple, e^x est transcendant pour x algébrique et différent de zéro.

K. Weierstrass a donné le moyen de former effectivement une infinité de fonctions transcendantes entières de la forme $f(x)$ à coefficients rationnels et qui prennent des valeurs toutes rationnelles pour les valeurs rationnelles de x[708]; il a indiqué également qu'une extension est possible au cas des valeurs algébriques de x. On peut aussi[709],

---

707) **E. Maillet,* Interméd. Math. 14 (1907), p. 25 [Question 3150]; Mém. Acad. sc. Toulouse (10) 7 (1907), p. 1.*

708) *Lettre de *K. Weierstrass* à *E. Strauss* publiée par *P. Stäckel* [Math. Ann. 46 (1895), p. 513]; trad. par *L. Laugel* [Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 57].*

709) **P. Stäckel* [C. R. Acad. sc. Paris 128 (1899), p. 725/7, 805/8] ainsi que

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat poste ou valeur sur Paris.

COURS
D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

PAR

J.-A. SERRET,
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

6e EDITION. DEUX FORTS VOLUMES IN-8 (23-14); 1910.......... 25 FR.

Avertissement.

Cette sixième édition de l'*Algèbre supérieure* est divisée en *cinq Sections*, composées chacune de plusieurs Chapitres. La *première Section* renferme la *théorie générale des équations* et les *principes sur lesquels repose leur résolution numérique;* on trouvera en particulier dans cette première Section une théorie très développée des fractions continues. La *deuxième Section* comprend la *théorie des fonctions symétriques*, celle des *fonctions alternées* et des *déterminants,* et les nombreuses questions qui s'y rattachent, avec des applications importantes à la théorie générale des équations. La *troisième Section* a pour objet l'ensemble des *propriétés des nombres entiers* qui sont indispensables dans la théorie de la résolution algébrique des équations; on trouvera dans cette Section une étude complète et nouvelle des fonctions entières d'une variable *prises relativement à un module premier*. La *quatrième Section* renferme la *théorie des substitutions;* elle comprend tous les faits principaux acquis à la Science, dans cette partie difficile de l'Analyse algébrique. Enfin, on a réuni dans la *cinquième Section* tout ce qui se rapporte directement à la *résolution algébrique des équations*.

Le titre de ce Livre, qui a été conservé, indique suffisamment que l'Auteur n'a pas la prétention d'avoir composé un *Traité complet* sur l'Algèbre supérieure; cependant on reconnaîtra qu'il a constitué un corps de doctrine étendu qui ne sera pas sans quelque utilité pour les géomètres qui s'occupent de cette branche importante de l'Analyse mathématique.

Table des Matières de Tome I.

tions continues périodiques. — CHAP. III. Propriétés générales des équations algébriques. — CHAP. IV. Des équations simultanées et de l'élimination. — CHAP. V. Propriétés des racines de l'unité. — CHAP. VI. De la séparation des racines des équations numériques. — CHAP. VII. Du calcul des racines des équations numériques.

SECTION II. — *Les fonctions symétriques.* — CHAP. I. Théorie des fonctions symétriques. — CHAP. II. Formules générales relatives à la théorie des fonctions symétriques. — CHAP. III. Digression sur la décomposition des fractions rationnelles et sur les séries récurrentes. — CHAP. IV. Des fonctions alternées et des déterminants. Application à la théorie des équations. — CHAP. V. Développements relatifs à la théorie de l'élimination.

Table des Matières du Tome II.

SECTION III. — *Les propriétés des nombres entiers.* — CHAP. I. Des congruences. — CHAP. II. Des résidus des puissances et des congruences binomes. — CHAP. III. Propriétés des fonctions entières d'une variable relativement à un module premier. — CHAP. IV. Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module. — CHAP. V. Sur la totalité des nombres premiers compris entre des limites données.

SECTION IV. — *Les substitutions.* — CHAP. I. Propriétés générales des substitutions. — CHAP. II. Propriétés des systèmes de substitutions conjuguées. — CHAP. III. Des équations abéliennes. — CHAP. IV. Sur une classe d'équations du neuvième degré résolubles algébriquement.

SECTION V. — *La résolution algébrique des équations.* — CHAP I. Des équations du troisième et du quatrième degré. Considérations générales sur la résolution algébrique des équations. — CHAP. II. De l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales au delà du quatrième degré. — CHAP. III. Des indices des systèmes conjugués. — CHAP. IV. Sur quelques cas particuliers de la théorie des substitutions. — CHAP. V. Applications de de la théorie des substitutions. — CHAP. VI. Sur les équations résolubles algébriquement.

41381 — Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

LES

FONCTIONS POLYÉDRIQUES ET MODULAIRES,

Par G. VIVANTI,

Professeur à la Faculté des Sciences de Messine.

OUVRAGE TRADUIT,

Par Armand CAHEN,

Agrégé de l'Université, Professeur au Lycée de Cherbourg.

IN-8 (25-16) DE VII-316 PAGES, AVEC 50 FIGURES; 1910.......... 12 FR

Preface.

Le but que je me propose en écrivant le présent Ouvrage est très modeste : permettre au lecteur d'aborder sans difficultés les leçons classiques de M. Klein sur *l'Icosaèdre* et de MM. Klein et Fricke sur les *Fonctions modulaires*.

Les *leçons sur l'Icosaèdre* sont un modèle d'élégance géométrique et une véritable mine d'idées nouvelles et géniales, mais la lecture en est assez difficile; elles renferment une foule de sujets dispersés et à peine esquissés; et lors même qu'on a saisi chacune des théories partielles, le lien qui les relie est imperceptible et n'apparaît qu'après un long travail et un remaniement complet de toute la matière. Quant à l'Ouvrage sur les *Fonctions modulaires*, ses dimensions considérables et l'extrême variété des sujets qu'il renferme font qu'il ne se prête pas aisément à une première étude. Tels sont du moins les résultats de mon expérience personnelle.

J'ai donc cru de mon devoir de faire profiter d'autres que moi de l'œuvre d'élaboration accomplie pour mon usage personnel, et de leur faciliter la compréhension de ces théories difficiles en leur évitant ainsi la répetition d'un travail utile mais pénible.

Table des Matières.

INTRODUCTION
A LA
THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS
ET DES
PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES
DES FONCTIONS,

PAR

EDMOND MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique.

GRAND IN-8 (25 × 16) DE V-275 PAGES; 1906.................... 12 FR.

Extrait de la Préface.

Dans cet Ouvrage d'Arithmétique, j'ai cherché à exposer, sous une forme aussi simple que possible, soit certains résultats connus, soit des résultats nouveaux relatifs à la théorie des nombres transcendants, c'est-à-dire des nombres qui ne sont racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. J'espère avoir pu, en ne donnant cependant que des propriétés en grande partie nouvelles dans la forme ou dans le fond, rendre mon travail presque entièrement accessible aux étudiants. Une partie peut être lue par un élève de Mathématiques spéciales, le tout par un polytechnicien ou un licencié ès sciences mathématiques.

Pour ne pas faire un Ouvrage trop volumineux, je me suis dispensé de traiter en détail bien des questions qui appellent des recherches plus étendues ou qui ont été approfondies ailleurs. Afin que l'on puisse se mettre au courant de la littérature du sujet, si on le désire, ce qui n'est pas nécessaire pour la lecture de l'Ouvrage, j'ai ajouté un index bibliographique. Il est court, car l'étude des nombres transcendants est un sujet presque entièrement neuf, où il y a d'autre part beaucoup à *faire*.

Comme les matières de cette Introduction se rattachent par plus d'un point à la théorie des fonctions entières, j'ai complété l'index bibliographique par des renseignements très sommaires suffisants pour permettre au lecteur d'aborder cette dernière; enfin, j'y ai signalé quelques Mémoires relatifs aux fonctions transcendantes, qui présentent certaines analogies avec les nombres transcendants.

Table des Matières.

de Liouville. — III. Propriétés arithmétiques des nombres de Liouville. — IV. Les nombres transcendants considérés comme racines de séries infinies ou de fractions continues. — V. Fonctions génératrices de nombres transcendants. — VI. Sur la classification des nombres irrationnels ou transcendants. — VII. Les fractions décimales et les fractions continues quasi-périodiques. — VIII. Quelques propriétés arithmétiques des racines des équations transcendantes. — IX. Transcendance de e et π; impossibilité de la quadrature du cercle. — X. Extension aux séries à coefficients rationnels des propriétés des polynomes à coefficients rationnels. — XI. Fonctions symétriques. — XII. Sur l'extension de la notion de divisibilité et de réductibilité aux fonctions entières. NOTES. — I. Sur la classification des fonctions entières. — II. Sur l'ordre des nombres de Liouville. — III. Sur les fonctions hypertranscendantes. — IV. Bibliographie

45797 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

que de la forme de ce domaine, et toute fonction régulière dans le domaine peut être représentée par la somme d'une série formée avec les polynomes de la famille,

L'étude de la représentation d'une fonction par une série de polynomes convergente dans son étoile d'holomorphie n'a pas été abordée ici : les belles méthodes de M. Painlevé unissent en effet le domaine réel et le domaine complexe, et leur auteur les a exposées dans une Note contenue dans le Livre de M. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*, à laquelle je renvoie le lecteur.

Table des Matières.

46012 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris

ÉLÉMENTS
DE LA
THÉORIE DES NOMBRES

CONGRUENCES. FORMES QUADRATIQUES. NOMBRES INCOMMENSURABLES. QUESTIONS DIVERSES

Par É. CAHEN,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin.

UN VOLUME GRAND IN-8 DE VIII-403 PAGES; 1900.......... 12 FR.

Préface.

L'Ouvrage que nous offrons ici au public a pour but de combler une lacune singulière. Il n'existe, en effet, aucun Traité moderne, français, de la Théorie des nombres. Et cependant, tout le monde sait l'extrême importance de cette Théorie, base de toutes les Mathématiques, et dont il faut absolument connaître les principaux résultats pour entreprendre une recherche d'ordre tant soit peu élevé....

La première difficulté qu'éprouve l'Auteur d'une Théorie des nombres, c'est de délimiter son sujet. Qu'est-ce, en effet, que la Théorie des nombres? Il semble d'abord que ce soit tout simplement la Théorie des *nombres entiers*. Mais cette définition est trop vaste. En effet, la notion de nombre entier suffit pour donner la définition des nombres fractionnaires et incommensurables. Il faut donc se restreindre et dire que la Théorie des nombres est la théorie des nombres entiers, *en tant seulement qu'ils sont entiers*. Mais il est évident alors que la Théorie des nombres fractionnaires ou incommensurables, en tant qu'ils sont fractionnaires ou incommensurables, est étroitement liée à la précédente. En fait, il est pratiquement impossible d'étudier l'une de ces Théories indépendamment des deux autres....

En résumé, la Théorie des nombres étudie les propriétés des nombres, en tant que ces nombres sont *entiers*, *fractionnaires ou incommensurables*. Elle cherche à distinguer ces nombres, à les classer, à étudier leurs propriétés particulières. Mais les propriétés qui appartiennent à tous les nombres, par exemple celles qui constituent le calcul algébrique et toutes ses conséquences, échappent à la Théorie des nombres....

Cet Ouvrage contient sous forme de Notes l'exposé de quelques questions particulièrement importantes ou intéressantes, et qui ne rentrent point dans le cadre précédent.

Telles sont les matières qui nous ont paru devoir entrer dans les *Éléments de la Théorie des nombres*. Nous réservons pour le Traité plus complet, que nous aurons peut-être le plaisir de publier un jour, des matières plus difficiles et qui d'ailleurs, étant encore l'objet des travaux de nombreux géomètres, ne présentent pas ce caractère définitif que doit avoir un Traité didactique.

L'Ouvrage se termine par des Tables numériques : Tables de nombres premiers, de racines primitives, d'indices, de diviseurs linéaires de formes quadratiques.

Ne voulant pas allonger inutilement, nous avons passé rapidement sur les théories élémentaires ou sur celles développées dans d'autres Ouvrages; par exemple, sur les premières propriétés des nombres entiers et sur la définition des nombres incommensurables. Nous ne pouvions les passer complètement sous silence, sans laisser une lacune dans l'Ouvrage. Nous avons d'ailleurs, en cela, suivi l'exemple des plus illustres géomètres, Legendre, Lejeune-Dirichlet, etc., qui, dans leurs Théories des nombres, n'ont pas jugé indigne d'eux de commencer au début même, à la définition du nombre entier....

Nous avons, dans toutes les questions, donné des exemples numériques. Ceci nous semble d'une grande importance. Il ne su t pas de démontrer qu'un nombre existe, il faut savoir le calculer.

Tous ces calculs exigent l'emploi des Tables que nous avons placées à la fin du Volume.

En publiant ce Traité, nous avons pensé être utile à tous les étudiants en Mathématiques, à tous ceux qui, ayant besoin de la Théorie des nombres, sont obligés actuellement d'aller la chercher dans des Ouvrages étrangers qu'ils ne lisent souvent que difficilement. Peut-être aussi intéresserons-nous ce que nous appellerons les *mathématiciens amateurs*. Nous voulons dire ceux, officiers, ingénieurs, etc., qui, ayant une instruction solide et le goût de la Science mathématique, prennent plaisir à s'en occuper, dans les loisirs que leur laisse leur profession. A ceux-là, la Théorie des nombres, plus difficile peut-être, mais exigeant moins d'études préalables que la plupart des autres Théories modernes, réservera de grandes jouissances. On sait, en effet, l'attrait particulier qu'exerce cette Science. L'Auteur serait heureux s'il parvenait à procurer, à ceux qui liront cet Ouvrage, un plaisir égal à celui qu'il a éprouvé à le composer.

Table des matières.

Symbole de Jacobi. Résolution de la congruence du deuxième degré à une inconnue. — CHAP. V *Les nombres incommensurables*. Définition des nombres incommensurables. Opérations sur ces nombres. Développement des nombres incommensurables en fractions continues. Distinction entre les nombres commensurables et les incommensurables. Recherche des racines commensurables des équations algébriques. Nombres algébriques. Théorème de Liouville. Classification des nombres incommensurables. Nombres algébriques du second degré. — CHAP. VI *Les formes quadratiques binaires*. Formes quadratiques binaires. Formes contenues l'une dans l'autre. Notions sur les substitutions linéaires à coefficients entiers. Substitutions modulaires. Groupes de substitutions. Congruences de substitutions. Formes équivalentes. Classes de formes. Resolution des trois problemes du n° 305 pour les formes à discriminant positif. Equation de Pell pour un discriminant positif. Résolution des problemes du n° 305 pour les formes à discriminant negatif. Equation de Pell pour un discriminant négatif. Recherche des nombres représentables par une forme. Analyse indéterminée du second degré. Réduction des formes quadratiques à des formes linéaires.

Notes. Sur les différents systèmes de numération. — Sur les nombres premiers. — Sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. — Suites de Brocot et de Farey. — Sur le calcul des racines primitives des nombres premiers. — Sur la fraction approchant le plus d'un nombre a et dont le dénominateur est plus petit qu'un entier m. — Sur le groupe modulaire — Sur les fonctions numériques. — Sur les nombres entiers imaginaires.

Tables. Table des nombres premiers de 1 à 10000. — Table des racines primitives et des indices pour les nombres premiers de 1 à 200. — Table des formes linéaires des facteurs impairs des formes quadratiques $x^2 + Dy^2$ de $D = 1$ à $D = 101$. — Table des formes linéaires des facteurs impairs des formes quadratiques $x^2 - \Delta y^2$ de $\Delta = 1$ à $\Delta = 101$.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES COORDONNÉES CURVILIGNES,

Par G. DARBOUX,

Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences,
Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris.

DEUX VOLUMES GRAND IN-8, SE VENDANT SÉPARÉMENT :

Tome I : Volume de IV-338 pages; 1898.................. 10 fr.
Tome II.................................. (*En préparation.*)

Préface du Tome I.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier Volume est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces,* j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication.

Extrait de la Table des Matières du Tome I.

45796 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Abréviations.

Dans les publications de l'academie des sciences de Paris, **H.** signifie Histoire, **M.** signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, **19** — renvoi au tome premier, article 2, numéro **19**.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch,* *c* se prononce *tz,* *š* se prononce comme *ch* dans *chat,* *ž* se prononce comme notre *j* dans *je,* *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer.*

Abh. = Abhandlungen.
Acad. — Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numimatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomatique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift